ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Миляник
Юлія Простакова

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

МАТЕМАТИКА 9

ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 2



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Олександр Школьний, Євген Нелін,
Андрій Миляник, Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

підручник інтегрованого курсу
для 9 класу закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)

Частина 2

Видавництво «Ранок»
2026

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Створено відповідно до модельної навчальної програми
«Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В.,
Простакова Ю. С., Школьний О. В.)

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Миляник
Юлія Простакова

Математика

Підручник інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)

Частина 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/111352

Інтерактивний
електронний додаток

Київ • Харків
Видавництво «Ранок»
2026

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

УДК 51:37.016(075.3)
Ш 67

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 № 110)

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.)

Підручник успішно пройшов апробацію у 2025/2026 навчальному році (наказ Міністерства освіти і науки України від 02.02.2026 № 142)

Ілюстрації *Володимира Хорошенка*

Школьний О. В.
Ш 67 Математика : підруч. інтегр. курсу для 9 кл. закл. загал. серед. освіти (у 2-х ч.). Ч. 2 / О. В. Школьний, Є. П. Нелін, А. І. Миляник, Ю. С. Простакова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2026.

УДК 51:37.016(075.3)

Інтерактивний електронний додаток до підручника доступний за QR-кодом або посиланням **rnk.com.ua/111352**

© Школьний О. В., Нелін Є. П., Миляник А. І., Простакова Ю. С., 2026
© Хорошенко В. Д., ілюстрації, 2026
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2026

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Вельмишановне панство!

Ви продовжуєте вивчати математику. Нагадаємо, що користь від вивчення математики подвійна: з одного боку, за її допомогою можна знаходити розв'язання багатьох проблем, які виникають у повсякденному житті, а з іншого боку, математика — це своєрідний фітнес для розуму, який допомагає тримати ваше мислення в тонусі, готовим до багатьох сюрпризів навколишнього світу.

Щоб вивчення цієї науки було цікавішим, вам допомагатимуть Петрик і Тетянка (вони, як і ви, навчаються в 9-му класі), а також учитель, учителька та дідусь Тарас — учитель математики на пенсії.


Тетянка


Петрик


Учителька


Учитель


Дідусь Тарас

Теоретичний матеріал підручника викладено у формі чату, у якому беруть участь згадані персонажі. Для зручності сприйняття матеріалу деякі частини теоретичного чату виділено кольором.



Синьою плашкою виділено основні означення, аксіоми — їх формулювання необхідно запам'ятати.



Помаранчевою плашкою виділено формулювання основних властивостей і теорем, зміст яких слід запам'ятати.

Одразу після теоретичного чату — рубрика «Перевірте себе». Вона містить *контрольні запитання*, що дозволять вам зрозуміти, чи добре ви засвоїли теоретичний матеріал.

Тренувальні вправи чотирьох рівнів (початкового, середнього, достатнього, високого) наведено в рубриці «Тренажерний зал» (пам'ятаймо, що математика — це фітнес для розуму!). Непарні номери ви будете опрацьовувати в класі, а парні номери (позначені «будиночком») — удома самостійно. Серед тренувальних вправ є *ключові завдання*, позначені значком , — результати або методи їх розв'язування можуть бути корисними під час розв'язування інших завдань.

Після чималої порції тренувальних вправ на вас чекатиме рубрика «Цікавинки від дідуся Тараса», що містить матеріал для розширення кругозору та додаткового вивчення.

Зверніть увагу! Відомості про фото та джерела інформації, використані в підручнику, зокрема для матеріалів цієї рубрики, розміщено в інтерактивному електронному додатку до підручника: rnk.com.ua/112157



За можливості обов'язково опрацюйте рубрику «Запитання та завдання від дідуся Тараса» — це збагатить вас новими знаннями та вміннями!

Кожний параграф завершується рубрикою «Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу», яка допоможе вам не забути вивчене й бути готовими до нових сюжетних поворотів у вивченні математики протягом 9-го класу.

Наприкінці кожного розділу ви знайдете рубрику «Готуємось до контрольної роботи», яка подана у формі тестових завдань із варіантами відповідей, короткою відповіддю та повним поясненням. Другий варіант завдань для підготовки до контрольної роботи розміщений в електронному додатку до підручника. Дуже корисною буде рубрика «Головне в розділі». Вона оформлена у вигляді логічних блок-схем, призначених для систематизації вивченого матеріалу.

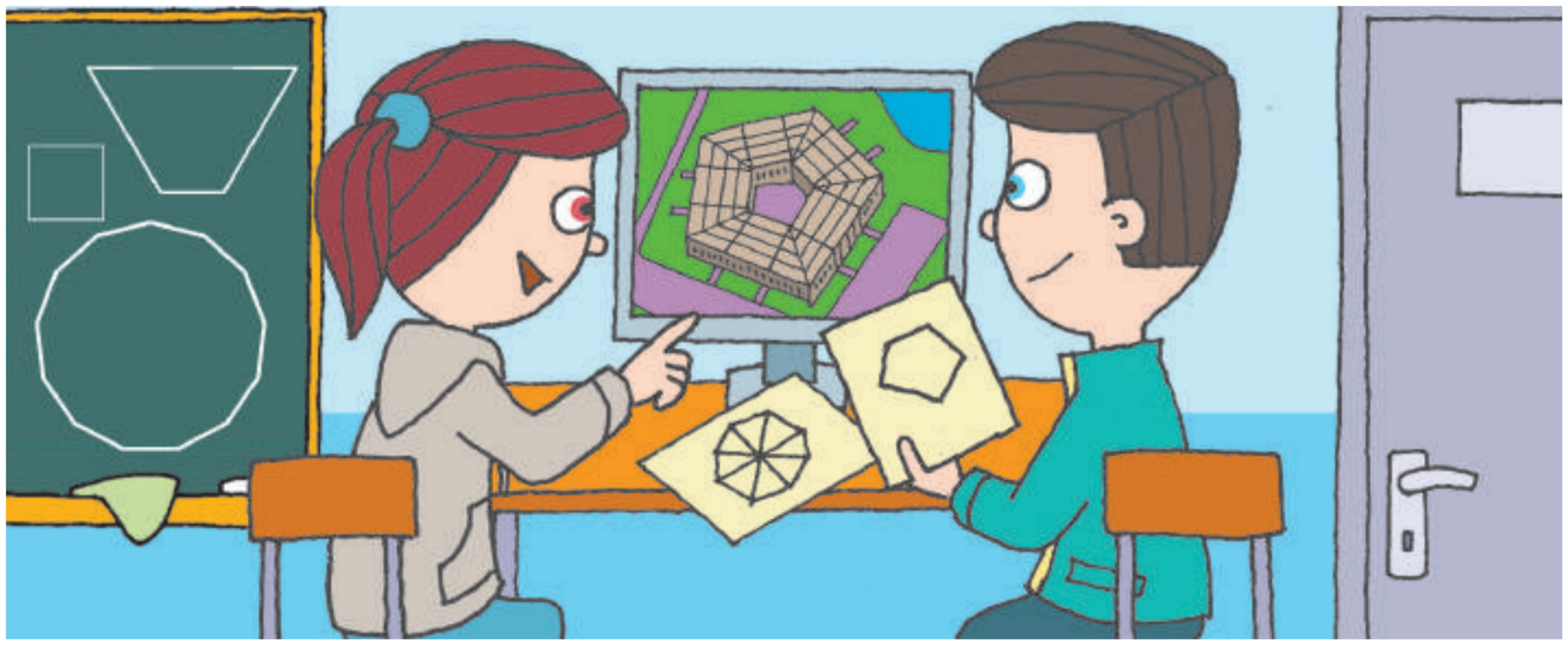
І нарешті, дідусь Тарас пропонує виконати навчальні проєкти, які додатково допоможуть усвідомити важливість математики в реальному житті.

Бажаємо вам успіхів у вивченні математики!
Усе у вас вийде, вірте в себе!

РОЗДІЛ 5.
ПЛОСКІ МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ. ПЛОЩА КРУГА

CHAPTER 5.
FLAT POLYGONS. AREAS OF POLYGONS. AREA OF CIRCLE

§ 14. Многокутники, правильні многокутники. Вписані й описані многокутники





Слухай, Тетянко, нещодавно дивився в інтернеті науково-популярну передачу про архітектурні споруди та місця на планеті, які мають незвичайну форму. У цій передачі згадували про Пентагон у США, а також про площу Октогон у Будапешті (Угорщина) й площу Октагон у Данідіні (Нова Зеландія). Мені ці назви здалися знайомими, але не пам'ятаю, звідки саме.



Це просто: синонімом до слова «многокутник» є слово «полігон». «Пента» — це грецькою «п'ять», а «окта» — «вісім». Тож пентагон — це п'ятикутник, а октагон — восьмикутник. Ось, поглянь: на фото будівля Пентагону, що у Вашингтоні.



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

До речі, крім пентагонів і октагонів часто трапляються й гексагони — шестикутники. Пам'ятаєш, ми у 8 класі на уроках хімії вивчали кристалічні ґратки. Точно пам'ятаю, що магній, цинк, титан і ще кілька металів мають саме гексагональні кристалічні ґратки, тобто ґратки шестикутної форми.



А й справді, як я міг забути. У 8 класі ми вивчали чотирикутники. За тією самою логікою вони мали б називатися тетрагонами, бо грецькою «тетра» — це «чотири». Але подивись уважніше на будівлю Пентагону: здається, що в цього п'ятикутника сторони однакової довжини й кути також рівні. Серед чотирикутників таку властивість має квадрат.



Дійсно! І я чомусь упевнена, що многокутники, у яких довжини сторін однакові й кути теж рівні, мають спеціальну назву. Пропоную дізнатися про них більше. Зараз якраз урок математики, там і запитаємо.



Ви вже знаєте: многокутником (або полігоном) називають замкнену ламану без самоперетинів, будь-які три сусідні вершини якої не лежать на одній прямій. Вершини ламаної при цьому називають вершинами многокутника, а ланки ламаної — сторонами многокутника. Многокутник, як і чотирикутник, записують, послідовно перелічуючи його вершини за або проти ходу годинникової стрілки. Суму довжин усіх сторін многокутника називають периметром цього многокутника.

Якщо многокутник має n вершин і сторін, то його також називають n-кутником. Наприклад, якщо $n = 5$, то многокутник називають п'ятикутником, а якщо $n = 8$, то восьмикутником тощо. Очевидно також, що в загальному випадку $n \in N$ і $n \geqslant 3$.

Також ви знаєте, що частину площини, обмежену многокутником, називають плоским многокутником. Якщо всі точки будь-якого відрізка, кінці якого належать плоскому многокутнику, містяться в цьому плоскому многокутнику, то відповідний многокутник називають опуклим. У протилежному випадку многокутник називають неопуклим.

Наприклад, на рис. 14.1 зображено неопуклий п'ятикутник $KLMNP$ і опуклий шестикутник $ABCDEF$. *Далі, якщо не зазначено інше, розглядатимемо лише опуклі многокутники, називаючи їх просто многокутниками.*

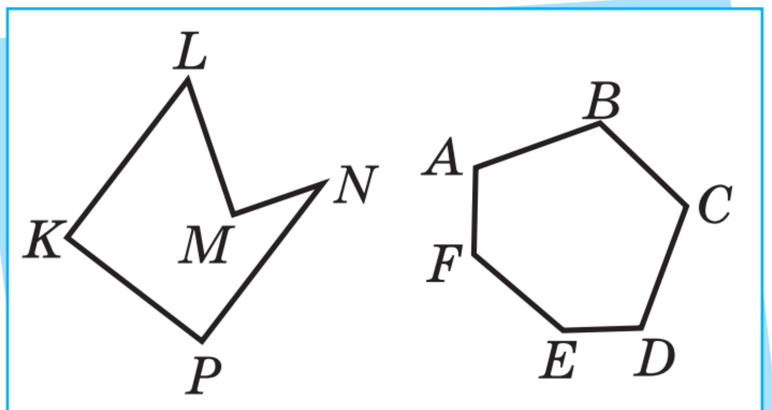


Рис. 14.1



Так само, як і для чотирикутників, вершини, які належать одній стороні многокутника, називають сусідніми вершинами. Вершини многокутника, які не належать одній стороні, називають несусідніми вершинами. Для чотирикутника несусідні вершини називають протилежними вершинами. Відрізки, що сполучають дві несусідні вершини многокутника, називають діагоналями многокутника.

Ви вже знаєте, що чотирикутник має дві діагоналі. Якщо зобразити п'ятикутник $ABCDE$ (рис.14.2), то побачимо, що він має 5 діагоналей: AC, AD, BD, BE і CE. Визначимо кількість діагоналей довільного n-кутника.

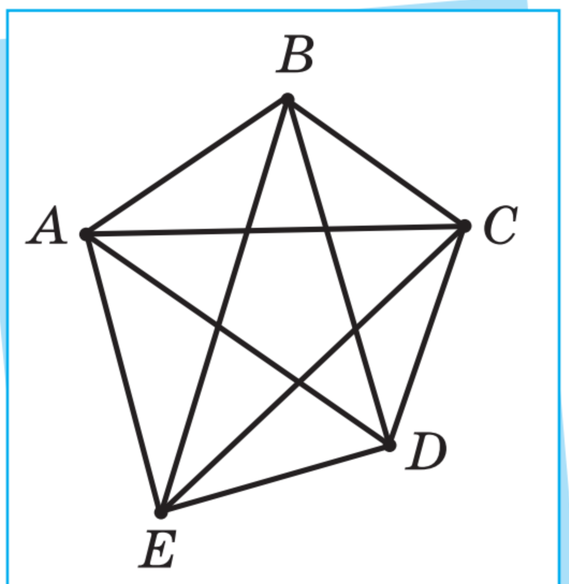


Рис. 14.2



ТЕОРЕМА (про кількість діагоналей n-кутника).

Кількість k діагоналей n-кутника обчислюється за формулою $k=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Доведення. Оскільки кожна вершина n-кутника має $n-3$ несусідні вершини (крім неї самої і двох сусідніх), то з неї можна провести $n-3$ діагоналі. Тому з n вершин многокутника можна провести $n\cdot(n-3)$ діагоналі. Однак за такого способу підрахунку кожна діагональ буде порахована двічі, бо будь-який відрізок має два кінці. Отже, якщо кількість діагоналей позначити k, то $k=\dfrac{n(n-3)}{2}$, що й потрібно було довести.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Будь-які дві сусідні сторони многокутника утворюють внутрішній кут цього многокутника. Ви вже знаєте, що сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого чотирикутника дорівнює 360°. Це твердження можна узагальнити.



ТЕОРЕМА (про суму внутрішніх кутів опуклого n-кутника).

Сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n-2)$.

Доведення. Візьмемо будь-яку вершину опуклого n-кутника та проведемо з неї всі можливі діагоналі (наприклад, якщо $n=5$ (див. рис. 14.2), то з точки A можна провести діагоналі AC і AD).

Ці $n-3$ діагоналі розіб'ють n-кутник на $n-2$ трикутники, сума кутів кожного з яких, як відомо, дорівнює 180° (для випадку $n=5$ п'ятикутник $ABCDE$ розіб'ється на трикутники ABC, ACD і ADE).

Отже, сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n-2)$, що й потрібно було довести (для випадку $n=5$ сума внутрішніх кутів опуклого п'ятикутника дорівнює $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$).



Кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника, називають зовнішнім кутом цього многокутника. Ви знаєте, що сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого чотирикутника дорівнює 360°. Це твердження також можна узагальнити.



ТЕОРЕМА (про суму зовнішніх кутів опуклого n-кутника).

Сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній його вершині, дорівнює 360°.

Доведення цієї теореми:
rnk.com.ua/112993





За аналогією із чотирикутниками, многокутник називають вписаним у коло, якщо всі його вершини належать цьому колу. Також многокутник називають описаним навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола. Наприклад, на рис. 14.3 зображено шестикутник $ABCDEF$, вписаний у коло із центром у точці O, і п'ятикутник $KLMNP$, описаний навколо кола із центром у точці S.

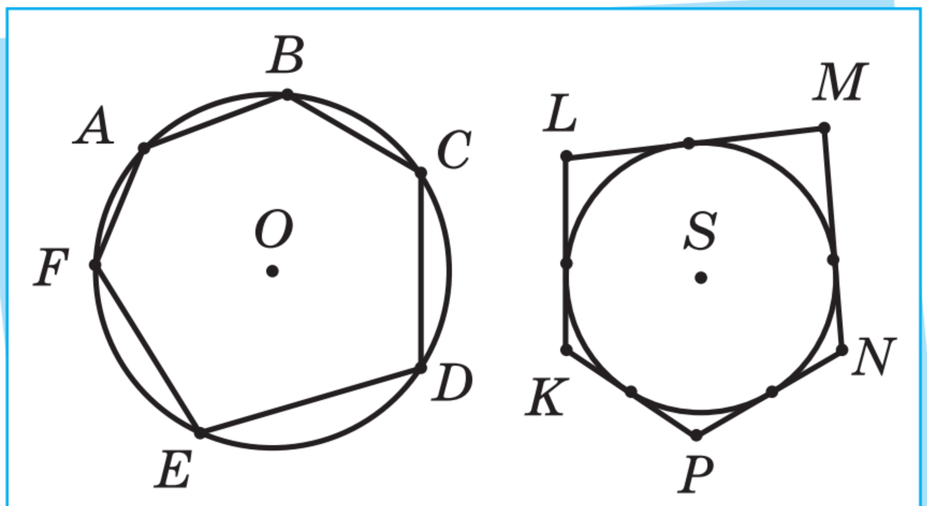


Рис. 14.3

Зрозуміло також: якщо многокутник є вписаним у коло, то це коло є описаним навколо цього многокутника, а якщо многокутник є описаним навколо кола, то це коло є вписаним у цей многокутник. Наприклад, на рис. 14.3 коло із центром у точці O є описаним навколо шестикутника $ABCDEF$, а коло із центром у точці S — вписаним у п'ятикутник $KLMNP$.



Петрик і Тетянка цікавилися, як називають ті многокутники, що мають рівні довжини сторін і рівні градусні міри кутів. Наведемо відповідне означення.



Многокутник, довжини всіх n сторін якого рівні, а градусні міри всіх n його внутрішніх кутів також рівні, називають правильним многокутником або правильним n-кутником.

Із доведеної вище теореми про суму внутрішніх кутів опуклого n-кутника випливає, що градусну міру внутрішнього кута α_n правильного n-кутника можна обчислити за формулою:

$$\alpha_n = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$$



Використовуючи останню формулу, обчислимо градусні міри внутрішніх кутів правильних п'ятикутника, шестикутника й восьмикутника:

$$\alpha_5 = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ,\ \alpha_6 = \frac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ,\ \alpha_8 = \frac{180^\circ \cdot 6}{8} = 135^\circ.$$

Якщо в правильному многокутнику внутрішні кути рівні, то очевидно, що зовнішні кути також рівні. Ураховуючи теорему про суму зовнішніх кутів опуклого n-кутника, градусну міру зовнішнього кута β_n правильного n-кутника можна обчислити за формулою:

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$$



Правильний n-кутник має й інші цікаві властивості. Сформулюємо їх у вигляді теореми.

ТЕОРЕМА (про властивості правильного n-кутника).

Будь-який правильний n-кутник зі стороною a є вписаним у коло радіуса $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ і описаним навколо кола радіуса $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, причому центри цих кіл збігаються.

Доведення того, що будь-який правильний n-кутник є вписаним у коло й описаним навколо кола, а центри цих кіл збігаються: rnk.com.ua/112994



Виведемо формули для обчислення радіуса R кола, описаного навколо правильного n-кутника зі стороною a, і радіуса r кола, вписаного в цей правильний n-кутник.

Нехай $A_1A_2\ldots A_n$ — правильний n-кутник зі стороною a, тобто $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 = a$.
Нехай також цей n-кутник є вписаним у коло із центром у точці O й описаним навколо кола із центром у цій самій точці. Зобразимо фрагмент цього многокутника (рис. 14.4). На рисунку $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n = R$, $OK \perp A_1A_2$, $OK = r$.

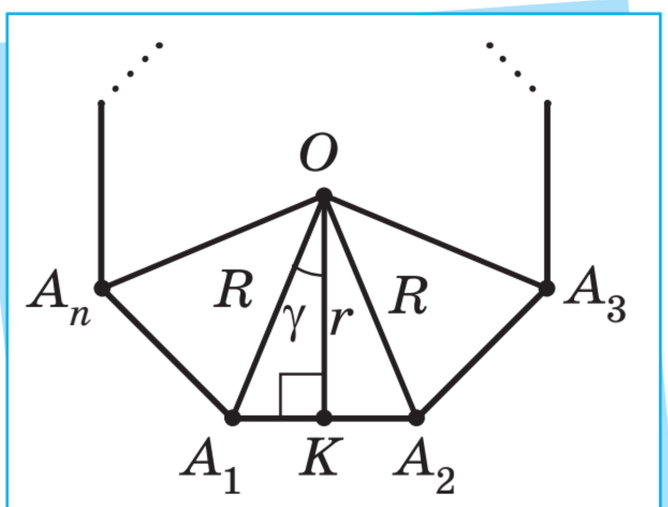


Рис. 14.4

Оскільки n-кутник є правильним і вписаним у коло, то $\Delta A_1OA_2 = \Delta A_2OA_3 = \ldots = \Delta A_nOA_1$ за трьома сторонами, а отже, $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_nOA_1 = \dfrac{360^\circ}{n}$. Крім того, ΔA_1OA_2 — рівнобічний з основою A_1A_2, а отже, висота OK є в ньому медіаною і бісектрисою. Тому $\angle A_1OK = \gamma = \dfrac{1}{2}\angle A_1OA_2 = \dfrac{180^\circ}{n}$ і $A_1K = \dfrac{1}{2}A_1A_2 = \dfrac{a}{2}$.

Таким чином, у прямокутному трикутнику A_1OK: $\angle K = 90^\circ$, $\angle A_1OK = \gamma = \dfrac{180^\circ}{n}$, $OA_1 = R$, $OK = r$, $A_1K = \dfrac{a}{2}$. Оскільки $\sin\gamma = \dfrac{A_1K}{OA_1} = \dfrac{a}{2R}$, то $R = \dfrac{a}{2\sin\gamma} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, а оскільки $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{A_1K}{OK} = \dfrac{a}{2r}$, то $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\gamma} = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, що й потрібно було довести.



Оскільки $n \geqslant 3$, то кут $\gamma = \dfrac{180^\circ}{n}$ завжди є гострим, а отже, для нього визначені всі відомі вам тригонометричні функції. Це дає можливість обчислити радіус R кола, описаного навколо правильного n-кутника зі стороною a, і радіус r кола, вписаного в цей правильний n-кутник, для найбільш поширених випадків: $n = 3$ (правильний, або рівносторонній, трикутник), $n = 4$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

(правильний чотирикутник, або квадрат) і $n=6$ (правильний шестикутник). Результати обчислень наведено в таблиці.

n	R	r
3	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$
4	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
6	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Переконайтесь у правильності цих обчислень самостійно.



Також із доведення останньої теореми випливає, що для правильного n-кутника зі стороною a виконується рівність $R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$, де R і r — відповідно радіуси описаного та вписаного кіл для цього n-кутника.

Переконайтесь у правильності цього твердження самостійно.



До речі, центр вписаного й описаного кіл для заданого правильного n-кутника часто називають просто центром n-кутника.

Перевірте себе!

1. Дайте означення: а) многокутника; б) плоского многокутника; в) опуклого (неопуклого) многокутника; г) вершини многокутника; д) сторони многокутника; е) периметра многокутника; є) внутрішнього кута многокутника; ж) зовнішнього кута многокутника; з) діагоналі многокутника. Наведіть приклади.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. Сформулюйте теорему: а) про кількість діагоналей n-кутника; б) про суму внутрішніх кутів опуклого n-кутника; в) про суму зовнішніх кутів опуклого n-кутника.

3. Дайте означення правильного многокутника. Як обчислити внутрішній і зовнішній кути правильного n-кутника?

4. Сформулюйте теорему про властивості правильного n-кутника.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. За кількістю сторін і кутів визначте тип зображеного многокутника (рис. 1). Опуклим чи неопуклим є многокутник?

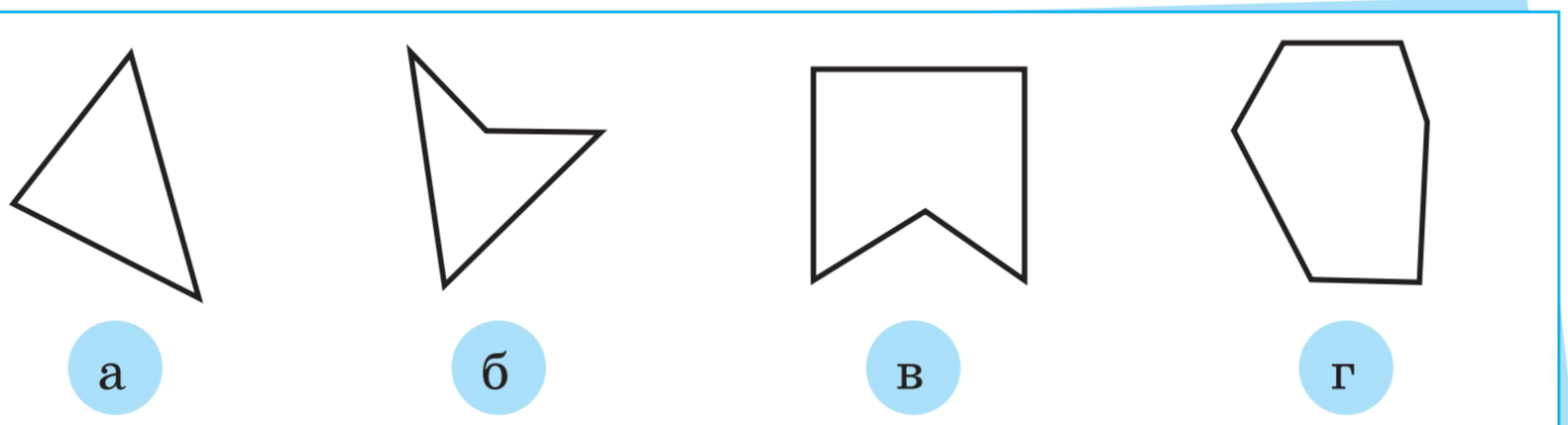


Рис. 1

2. За кількістю сторін і кутів визначте тип зображеного многокутника (рис. 2). Опуклим чи неопуклим є многокутник?

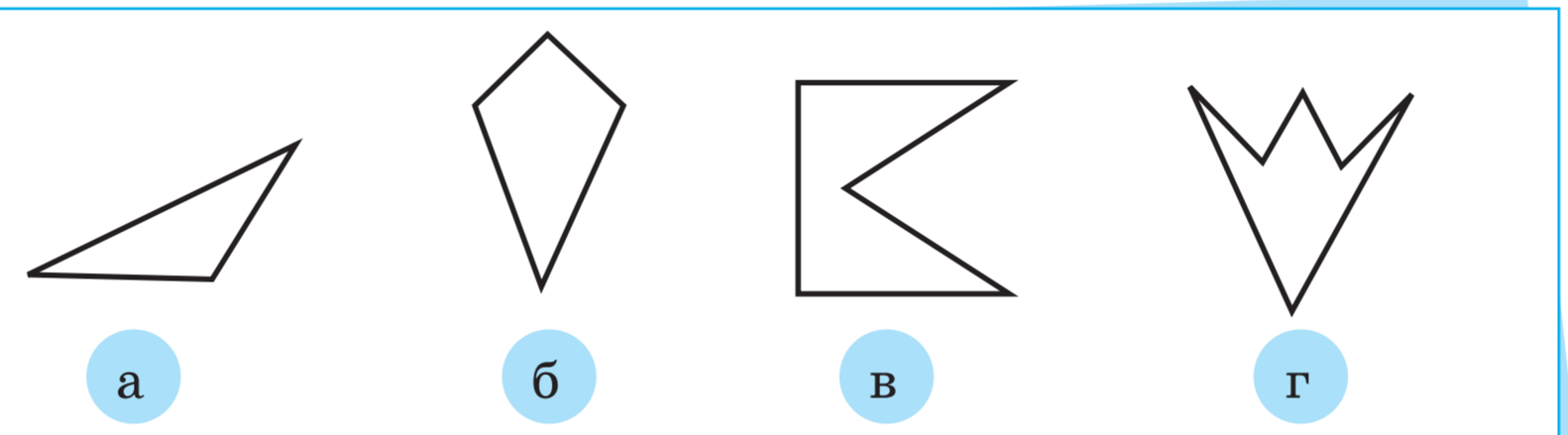


Рис. 2

3. На рис. 3 зображено опуклий п’ятикутник, у якому проведено три діагоналі. Запишіть усі точки, які є вершинами цього п’ятикутника. Запишіть точки, які не є вершинами п’ятикутника.

4. На рис. 4 зображено опуклий шестикутник, у якому проведено три діагоналі. Запишіть усі точки, які є вершинами цього шестикутника. Запишіть точки, які не є вершинами шестикутника.

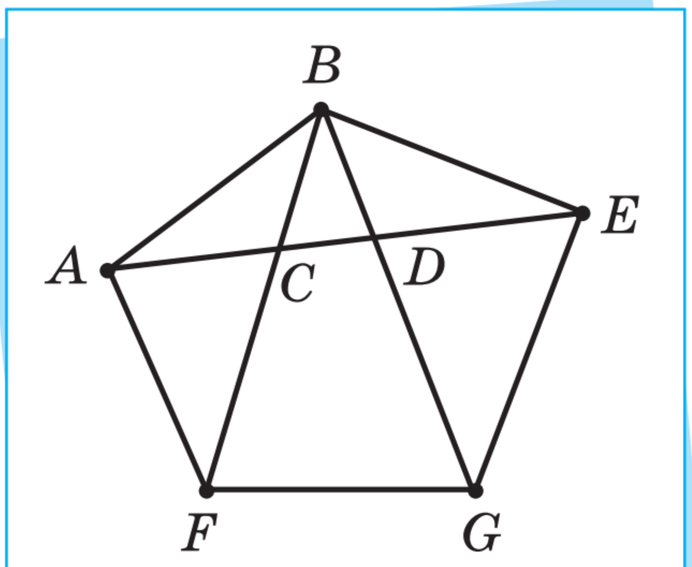


Рис. 3

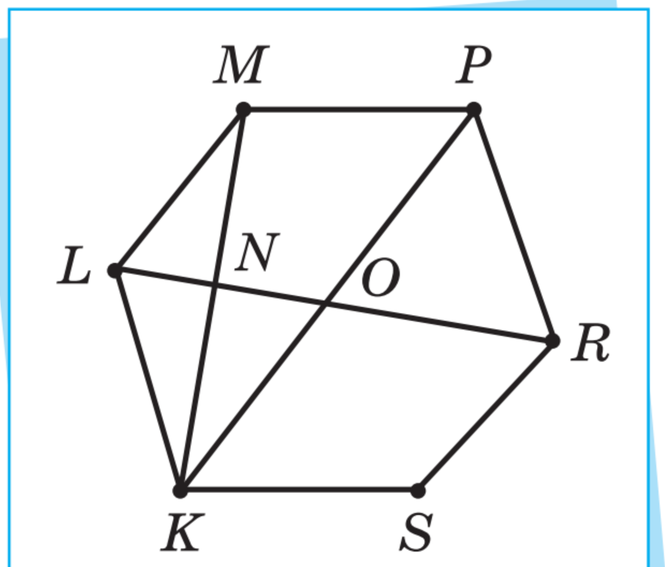


Рис. 4

5. На рис. 4 зображено шестикутник. Запишіть три відрізки, які є сторонами шестикутника. Запишіть три відрізки, які не є сторонами шестикутника.

6. На рис. 3 зображено п’ятикутник. Запишіть три відрізки, які є сторонами п’ятикутника. Запишіть три відрізки, які не є сторонами п’ятикутника.

7. На рис. 3 зображено опуклий п’ятикутник. Які із зображених відрізків є діагоналями цього п’ятикутника?

8. На рис. 4 зображено опуклий шестикутник. Які із зображених відрізків є діагоналями цього шестикутника?

9. Побудуйте опуклий шестикутник $ABCDEF$. Проведіть із вершини A всі можливі діагоналі. Скільки діагоналей можна провести з вершини A? На скільки трикутників розбили шестикутник проведені діагоналі?

10. Побудуйте опуклий семикутник $KLNMOPR$. Проведіть із вершини P всі можливі діагоналі. Скільки діагоналей можна провести з вершини P? На скільки трикутників розбили семикутник проведені діагоналі?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

11. За формулою $k=\frac{n(n-3)}{2}$ обчисліть кількість діагоналей: а) восьмикутника; б) дванадцятикутника; в) трикутника; г) паралелограма.

12. За формулою $k=\frac{n(n-3)}{2}$ обчисліть кількість діагоналей: а) дев'ятикутника; б) двадцятикутника; в) квадрата; г) трапеції.

13. За формулою $180^\circ\cdot(n-2)$ обчисліть суму внутрішніх кутів: а) шестикутника; б) дванадцятикутника; в) квадрата; г) трапеції.

14. За формулою $180^\circ\cdot(n-2)$ обчисліть суму внутрішніх кутів: а) п'ятикутника; б) десятикутника; в) трикутника; г) паралелограма.

Середній рівень

15. З'ясуйте, скільки діагоналей має n-кутник, якщо: а) $n=5$; б) $n=7$; в) $n=10$.

16. З'ясуйте, скільки діагоналей має n-кутник, якщо: а) $n=6$; б) $n=11$; в) $n=14$.

17. Обчисліть суму внутрішніх кутів опуклого восьмикутника.

18. Обчисліть суму внутрішніх кутів опуклого дев'ятикутника.

19. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного n-кутника, якщо: а) $n=8$; б) $n=12$; в) $n=20$.

20. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного n-кутника, якщо: а) $n=9$; б) $n=10$; в) $n=16$.

21. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута правильного n-кутника, якщо: а) $n=5$; б) $n=9$; в) $n=15$.

22. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута правильного n-кутника, якщо: а) $n=8$; б) $n=12$; в) $n=18$.

23. Задано два кола: одне коло вписано в правильний шестикутник зі стороною 12, друге коло описано навколо цього ж шестикутника. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл для цього шестикутника.

24. Задано два кола: одне коло вписано в правильний чотирикутник зі стороною 10 см, друге коло описано навколо цього ж чотирикутника. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл для цього чотирикутника.

25. Дано правильний шестикутник зі стороною $a = 6$ см. Радіус r кола, вписаного в цей шестикутник, дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо даного шестикутника.

26. Дано правильний шестикутник зі стороною $a = 10$ см. Радіус R кола, описаного навколо цього шестикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть радіус r кола, вписаного в цей шестикутник.

Достатній рівень

27. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо градусна міра кожного його внутрішнього кута дорівнює 156°?

28. Скільки кутів має правильний многокутник, якщо градусна міра кожного його внутрішнього кута дорівнює 160°?

29. Сума внутрішніх кутів деякого правильного многокутника дорівнює 1080°. Визначте:
а) кількість сторін цього многокутника;
б) градусну міру внутрішнього кута цього многокутника;
в) градусну міру зовнішнього кута цього многокутника;
г) кількість діагоналей цього многокутника.

30. Сума внутрішніх кутів деякого правильного многокутника дорівнює 1800°. Визначте:
а) кількість сторін цього многокутника;
б) градусну міру внутрішнього кута цього многокутника;
в) градусну міру зовнішнього кута цього многокутника;
г) кількість діагоналей цього многокутника.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

31. На рис. 5 зображено квадрат зі стороною a, вписаний у коло радіуса R, і позначено r — радіус кола, вписаного в цей квадрат. Відповідно до рис. 5 у таблиці наведено значення для a, R, r. Заповніть таблицю*.

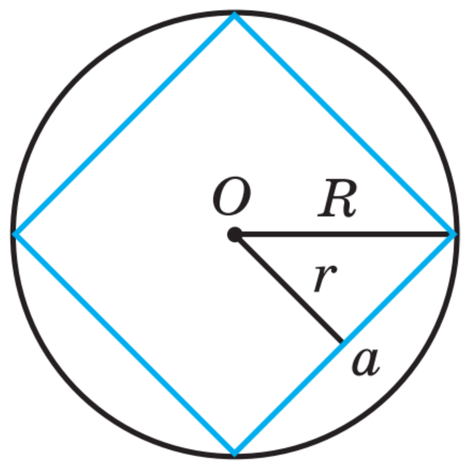


Рис. 5

	a	R	r
а)	6		
б)		4	
в)			2

32. На рис. 6 зображено рівносторонній трикутник зі стороною a, вписаний у коло радіуса R, і позначено r — радіус кола, вписаного в цей трикутник. Відповідно до рис. 6 у таблиці наведено значення для a, R, r. Заповніть таблицю.

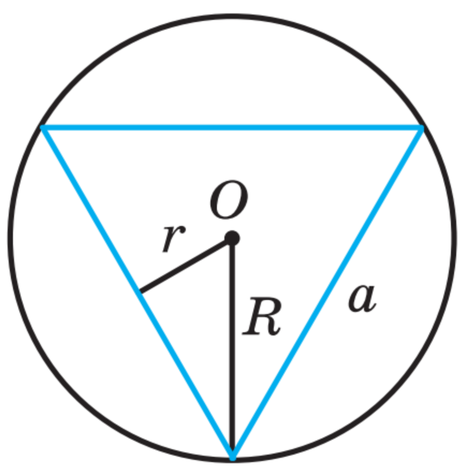


Рис. 6

	a	R	r
а)	6		
б)		3	
в)			2

33. Прямі, що містять сторони правильного п'ятикутника $ABCDE$, перетинаються в точках K, L, M, N, P (рис. 7). Доведіть, що трикутник AKB рівнобічний. Знайдіть градусну міру $\angle AKB$.

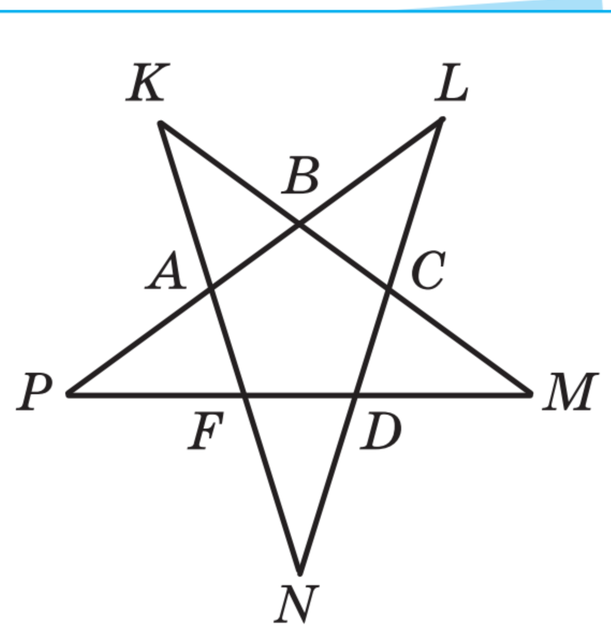


Рис. 7

* Зрозуміло, що в цьому та подібних випадках таблицю слід перенести в зошит.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

34. Точки перетину діагоналей правильного п'ятикутника $ABCDE$ є вершинами правильного п'ятикутника $KLMNP$ (рис. 8). Доведіть, що $\triangle AKB$ — рівнобічний. Знайдіть градусні міри кутів $\triangle AKB$.

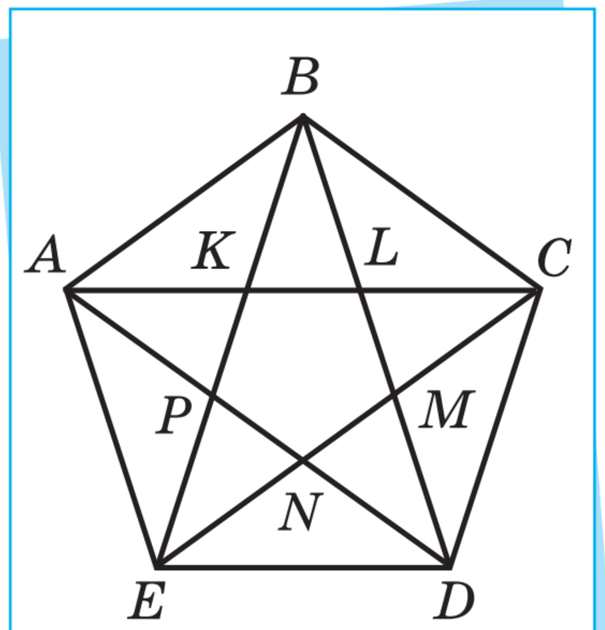


Рис. 8

35. У правильному n-кутнику 77 діагоналей, а його сторона дорівнює 7 см. Визначте: а) значення n; б) градусну міру внутрішнього кута n-кутника; в) радіус кола, описаного навколо цього n-кутника. Одержані значення округліть до десятих.

36. У правильному n-кутнику 27 діагоналей, а його сторона дорівнює 27 см. Визначте: а) значення n; б) градусну міру внутрішнього кута n-кутника; в) радіус кола, вписаного в цей n-кутник. Одержані значення округліть до десятих.

37. Навколо кола описаний квадрат зі стороною 6 см. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

38. У коло вписаний правильний шестикутник зі стороною 6 см. Знайдіть сторону квадрата, описаного навколо цього кола.

Високий рівень

39. Кути квадрата зі стороною 30 см зрізали так, що утворився правильний восьмикутник (рис. 9). Знайдіть сторону отриманого восьмикутника.

40. Кути правильного трикутника зі стороною 33 см зрізали так, що утворився правильний шестикутник (рис. 10). Знайдіть сторону отриманого шестикутника.

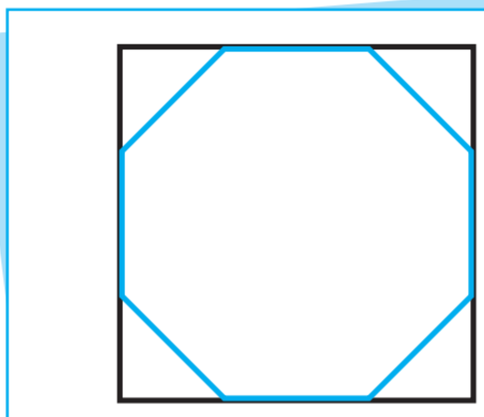


Рис. 9

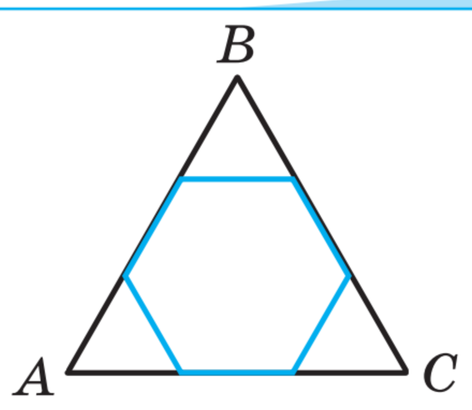


Рис. 10

41. Побудуйте правильний n-кутник, вписаний у задане коло, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 6$.

42. Побудуйте правильний n-кутник, вписаний у задане коло, якщо: а) $n = 4$; б) $n = 8$.

43. Доведіть, що кожна діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній із його сторін.

44. Доведіть, що всі діагоналі правильного п'ятикутника рівні.

45. Знайдіть діагоналі правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.

46. Знайдіть діагоналі правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

47. Доведіть: якщо всі кути п'ятикутника, вписаного в коло, рівні, то цей многокутник правильний.

48. Доведіть: якщо всі сторони п'ятикутника, описаного навколо кола, рівні, то цей многокутник правильний.

49. Усі кути вписаного многокутника рівні. Чи завжди цей многокутник буде правильним? Відповідь обґрунтуйте.

50. Усі сторони описаного многокутника рівні. Чи завжди цей многокутник буде правильним? Відповідь обґрунтуйте.



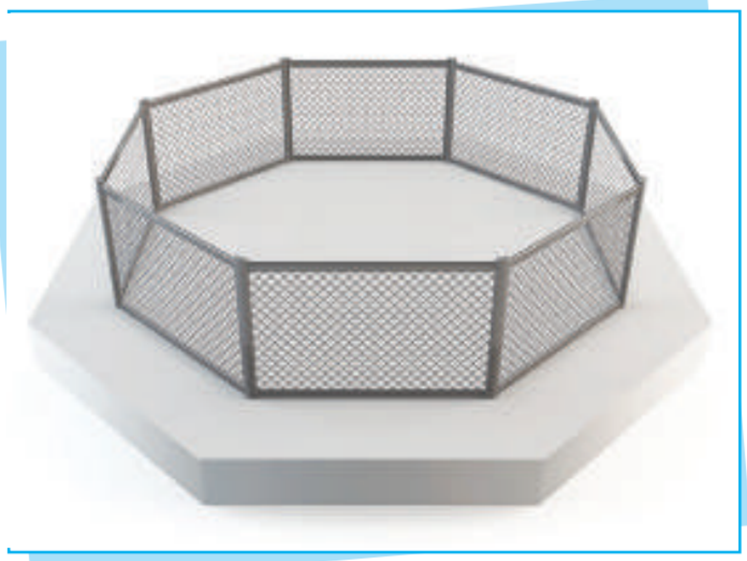
Цікавинки від дідуся Тараса

Многокутники, зокрема правильні, мають численні застосування в архітектурі, народних ремеслах, побуті, мистецтві. Петрик навів приклад будівлі Пентагону, яка має форму правильного п'ятикутника. Однак у світі доволі багато будівель, що мають таку форму, наприклад вілла кардинала Фарнезе в містечку Капрарола неподалік Рима (Італія) (див. фото).



Вілла кардинала Фарнезе в м. Капрарола (Італія)

Форму правильного шестикутника (гексагона) мають чарунки бджолиних стільників, паркетна плитка тощо. У формі правильного восьмикутника (октагона) будують не лише площі, як у Будапешті (Угорщина) і Данідіні (Нова Зеландія), а також альтанки, клумби й навіть ринги для змагань (див. фото). Популярні многокутники також в орнаментах, якими прикрашають одяг, посуд, кулінарні вироби.





Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи траплялися вам восьмикутники в повсякденному житті? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.
2. Підготуйте невелике повідомлення про використання n-кутників $(n \geqslant 5)$ у повсякденному житті, побуті та техніці.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - 4\frac{1}{6} : 1\frac{2}{3}$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{7x+1}{2-\sqrt{x}} - \sqrt{30-4x}$.
3. Під час футбольного матчу двох жіночих команд коментатор повідомив, що середній вік 10 польових гравчинь однієї з команд дорівнює 22,4 року. Через деякий час у цій команді відбулася заміна: замість гравчині віком 24 роки на поле вийшла гравчиня віком 19 років. Знайдіть середній вік польових гравчинь цієї команди після заміни.
4. Пиріг має форму прямокутника, периметр якого дорівнює 130 см, а площа — 1000 см^2. Знайдіть розміри цього пирога.

5. Купюру називають «математично суперщасливою», якщо між цифрами її номера можна вставити дужки та знаки арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) так, щоб після виконання всіх цих дій отримати число 100, причому зробити це можна принаймні двома різними способами. Чи є зображена на рисунку купюра «математично суперщасливою»?

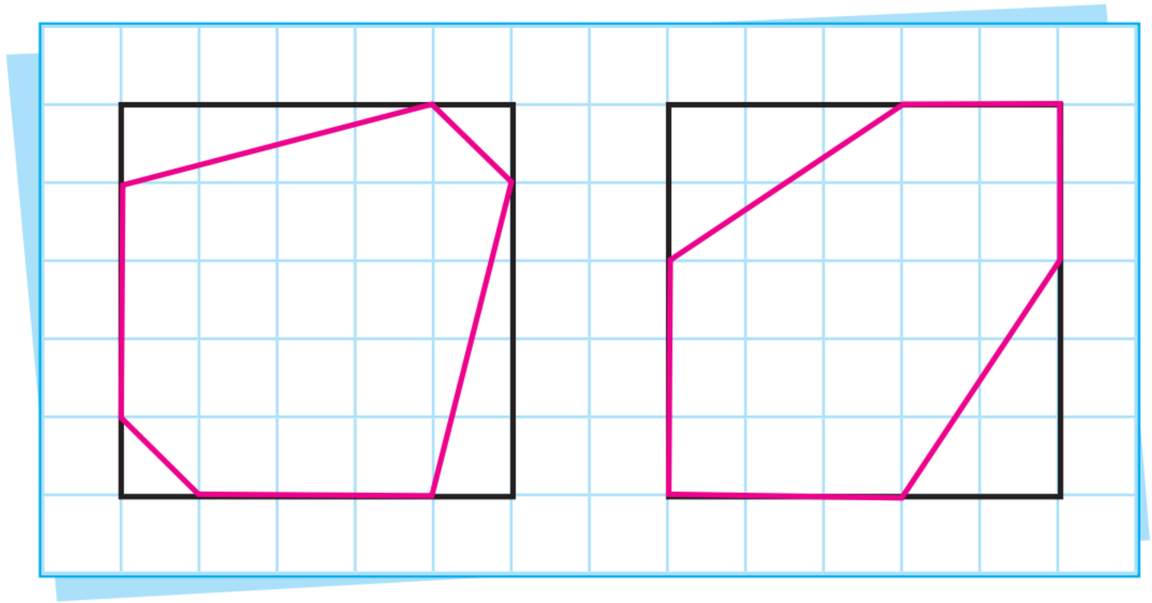


§ 15. Площі многокутників





Петрику, наш волонтерський проєкт «Зелене місто» знову підкинув мені загадку. Ось, поглянь на схему, яку я накреслила на аркуші в клітинку. Ми вирішили навесні на клумбах у міському парку (чорні квадрати на схемі) посадити квіти в межах шестикутника (виділено червоним кольором), а на решті простору клумби розмістити дерев'яні скульптури. Однак між нами виникла суперечка, який із двох шестикутників вибрати для квітів. Вирішили в підсумку вибрати той, що має найбільшу площу. Але я не знаю, як цю площу визначити.





Непросте завдання, але в мене є ідея. Дідусь Тарас колись загадував одного митця, якого запитали, як він створює свої скульптури. І той відповів, що він *просто бере брилу мармуру й відсікає від неї все зайве*. Спробуймо діяти за тим самим принципом. Площу чорного квадрата, зображеного на твоїй схемі зліва, легко порахувати: $5 \cdot 5 = 25$ клітинок. Далі від цього квадрата слід відсікти чотири трикутники. Із двох менших трикутників можна скласти квадрат зі стороною 1, а отже, сума їх площ буде 1 клітинка. Із двох більших трикутників можна скласти прямокутник, площа якого дорівнює $1 \cdot 4 = 4$ клітинки. Тому площа шестикутника в лівому квадраті буде $25 - 1 - 4 = 20$ клітинок.



Стривай, далі я сама! Площа чорного квадрата, зображеного на схемі праворуч, теж 25 клітинок. Від цього квадрата слід відсікти два трикутники, з яких можна скласти прямокутник, площа якого дорівнює $2 \cdot 3 = 6$ клітинок. Тому площа шестикутника в правому квадраті буде $25 - 6 = 19$ клітинок. Ура, в нас є переможець! Отже, вибираємо варіант, зображений на схемі зліва.



Так, із цією загадкою впоралися. Але добре, що обидва шестикутники були симетричними відносно діагоналі квадрата, проведеної з його лівого нижнього кута до правого верхнього. Це дало нам можливість складати з трикутників прямокутники. А що робити, якщо многокутники будуть складнішими? Варто запитати вчителів. Упевнений, обчислення площ приховує ще багато цікавого.

Петрик згадав вислів легендарного італійського митця епохи Відродження *Мікеланджело Буонарроті* (1475–1564). *Дізнайтеся про нього більше самостійно.*





Із радістю розкриємо вам усі таємниці обчислення площ многокутників.

У 7 класі ви вже вивчали довжину відрізка — додатну величину, яка має такі *властивості:*

- рівні відрізки мають рівні довжини;
- довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою;
- довжина відрізка вимірюється в одиничних відрізках, на які він розбивається своїми внутрішніми точками.

Традиційно довжинами одиничних відрізків є 1 мм, 1 см, 1 м тощо. Одиниці вимірювання можуть і не вказуватися, але тоді одиничний відрізок має бути зображений. Наприклад, якщо відрізок зображений на аркуші в клітинку, то таким одиничним відрізком можна вважати сторону клітинки.



За аналогією з довжиною відрізка визначають і площу плоского многокутника. Як і раніше, для задач на знаходження площ ми будемо називати його просто многокутником без додаткових уточнень.



Площа многокутника — це додатна величина, яка має такі властивості:

- рівні многокутники мають рівні площі;
- якщо многокутник розбивається на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
- за одиницю вимірювання площі беруть площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці вимірювання довжини (одиничному відрізку).

Знайти (обчислити, виміряти) площу многокутника — означає дізнатися, у скільки разів його площа відрізняється від площі одиничного

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

квадрата. У результаті порівняння площі многокутника з площею одиничного квадрата отримують числове значення площі цього многокутника.



Площу многокутника традиційно вимірюють у мм^2, см^2, м^2 тощо залежно від того, у яких одиницях вимірюється довжина сторони одиничного квадрата. Однак площу многокутника можна виміряти й у клітинках зошита, як це зробили Петрик і Тетянка для шестикутників, що моделюють місце посадки квітів на клумбі.

Наприклад, на рис. 15.1 зображено многокутник, який складається з 11 клітинок (одиничних квадратів), а отже, його площа дорівнює 11 клітинок, або квадратних одиниць (скорочено записують: кв. од. або од^2).

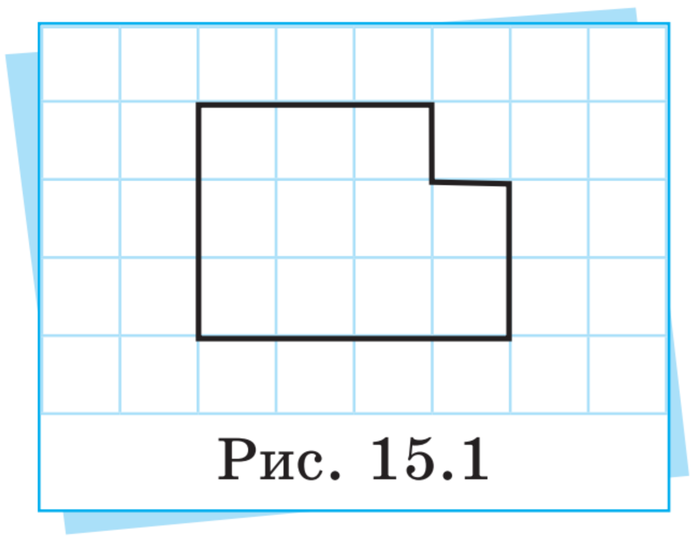


Рис. 15.1



Два многокутники, які мають однакові площі, називають рівновеликими. Із означення площі зрозуміло: якщо два многокутники рівні, то вони також і рівновеликі. Однак якщо два многокутники рівновеликі, то вони не обов'язково рівні. Наприклад, на рис. 15.2 зображено два різні рівновеликі многокутники, площа яких дорівнює 5 клітинок.

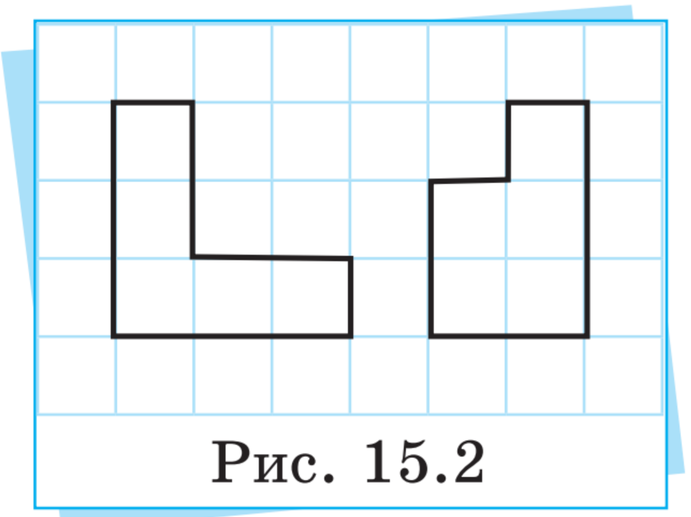


Рис. 15.2



Оскільки англійською мовою слово «площа» перекладається як *square*, то зазвичай для її позначення використовують букву S. Ще з початкової школи ви знаєте формулу обчислення площі прямокутника, довжини сторін якого дорівнюють a і b:

$$S = a \cdot b$$

Однак у початковій школі довжини сторін прямокутника виражалися лише натуральними числами, у 5–6 класах — ще й десятковими дробами. Наразі ви вже знаєте більш широкі числові множини. Зокрема, довжини сторін прямокутника можуть виражатися раціональними або ірраціональними числами. А отже, відома вам формула обчислення площі прямокутника потребує обґрунтування.

Таке обґрунтування для випадку, коли довжини сторін прямокутника виражені раціональними числами: rnk.com.ua/112995





Використовуючи означення площі та формулу площі прямокутника, можна вивести формули площ і для інших многокутників. Почнемо з формули площі паралелограма.



ТЕОРЕМА (про площу паралелограма).

Площа паралелограма обчислюється за формулою:

$$S = a \cdot h,$$

де a — сторона паралелограма,
h — висота, проведена до цієї сторони.

Доведення. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм, у якого $BC = AD = a$. Якщо цей паралелограм є прямокутником, то в нього одна зі сторін є висотою, проведеною до іншої, а отже, висновок теореми правильний. Якщо ж паралелограм $ABCD$ не є прямокутником, то один з його кутів C або D є гострим. Нехай, наприклад, гострим є кут C (рис. 15.3).

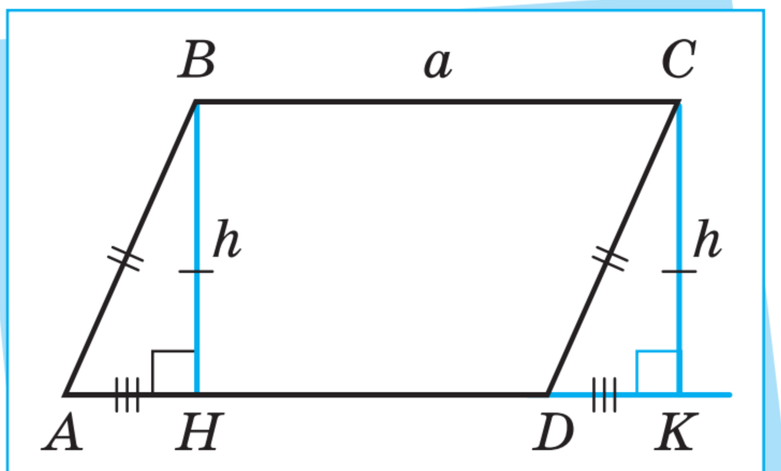


Рис. 15.3

Проведемо з вершини C висоту CK паралелограма $(CK \perp AD)$. Утвориться прямокутна трапеція $ABCK$. Площа цієї трапеції дорівнює сумі площ паралелограма $ABCD$ і трикутника DCK. Також проведемо

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

висоту BH паралелограма $(BH \perp AD)$ і позначимо $BH = CK = h$. Тоді площа трапеції $ABCK$ дорівнює сумі площ прямокутника $BCKH$ і трикутника ABH. Прямокутні трикутники DCK і ABH рівні за гіпотенузою та катетом, а отже, є і рівновеликими, тобто $S_{\Delta DCK} = S_{\Delta ABH}$. Таким чином, $S_{ABCK} = S_{ABCD} + S_{\Delta DCK} = S_{BCKH} + S_{\Delta ABH}$, звідки випливає, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює площі прямокутника $BCKH$, тобто $S_{ABCD} = BC \cdot CK = a \cdot h$, що й потрібно було довести.



Використовуючи формулу площі паралелограма, легко довести *формулу площі трикутника.*

ТЕОРЕМА (про площу трикутника).

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

де a — сторона трикутника,
h — висота, проведена до цієї сторони.

Доведення. Нехай ABC — даний трикутник, $BC = a$ — сторона трикутника, $AH = h$ — висота, проведена до цієї сторони (рис. 15.4).

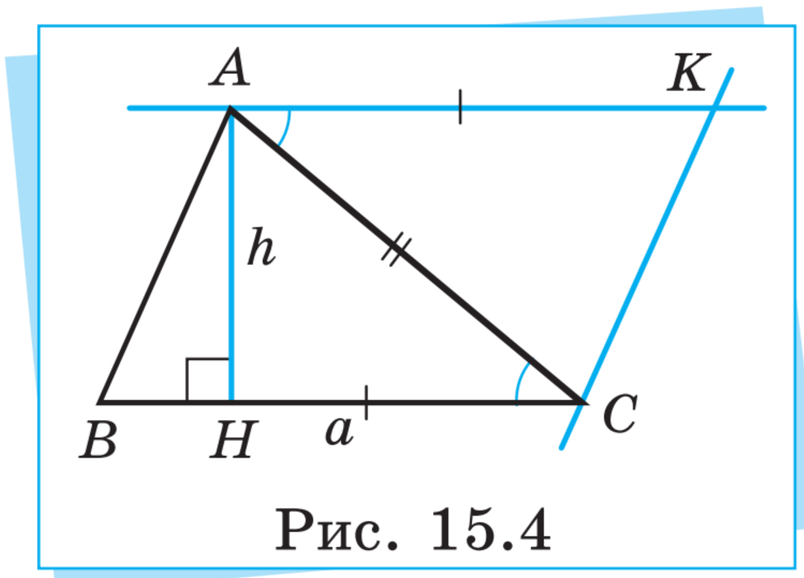


Рис. 15.4

Проведемо через точку C пряму, паралельну до прямої AB, а через точку A — пряму, паралельну до прямої BC. Точку перетину цих прямих позначимо K. За означенням $AKCB$ — паралелограм, площа якого за щойно доведеною теоремою обчислюється за формулою $S_{AKCD} = a \cdot h$. За властивістю паралелограма діагональ AC розбиває паралелограм $AKCB$ на два рівні (а отже, і рівновеликі) трикутники ABC і CKA, тому $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CKA}$. Таким чином, $S_{AKCB} = 2 \cdot S_{\Delta ABC}$, звідки $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{AKCB} = \frac{1}{2} a \cdot h$, що й потрібно було довести.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини гострого кута, збігається з його катетом. Тому зі щойно доведеної теореми випливає, що площу прямокутного трикутника можна знайти за формулою $S=\frac{1}{2}ab$, де a і b — катети цього трикутника (рис. 15.5).

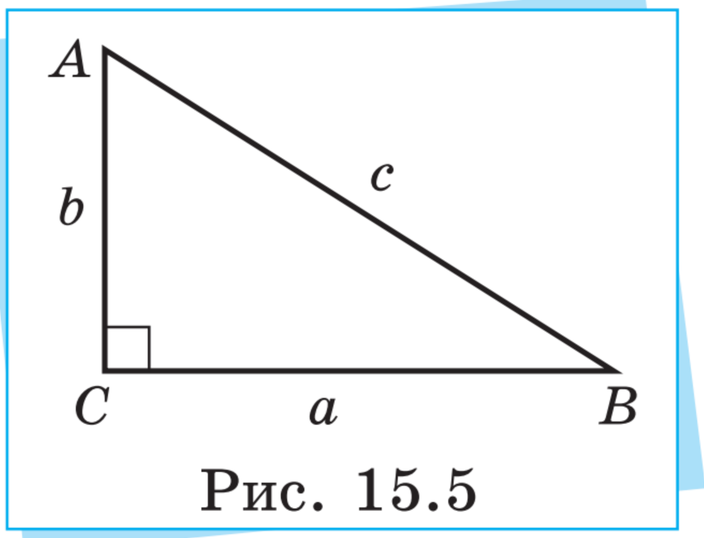


Рис. 15.5



Наведені формули для знаходження площ паралелограма й трикутника через сторону та висоту, проведену до неї, вважаються *основними* формулами обчислення площ цих фігур. Однак площу як трикутника, так і паралелограма можна обчислювати й за іншими формулами, які виводяться з основної. Розглянемо задачу.

Задача. Знайдіть площу трикутника KMP, у якого $KM=8$ см, $KP=12$ см, а $\angle K=60°$.

Розв'язання. Проведемо висоту MH трикутника KMP (рис. 15.6) і розглянемо прямокутний трикутник KMH. У ньому відома гіпотенуза KM і гострий кут K. Ми можемо розв'язати такий трикутник, зокрема знайти його катет MH. Справді, $\sin\angle K=\frac{MH}{KM}$, звідки $MH=KM\cdot\sin\angle K=8\cdot\sin 60°=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ (см). Тепер за основною формулою площі трикутника $S_{KLM}=\frac{1}{2}KP\cdot MH=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$ (см^2).

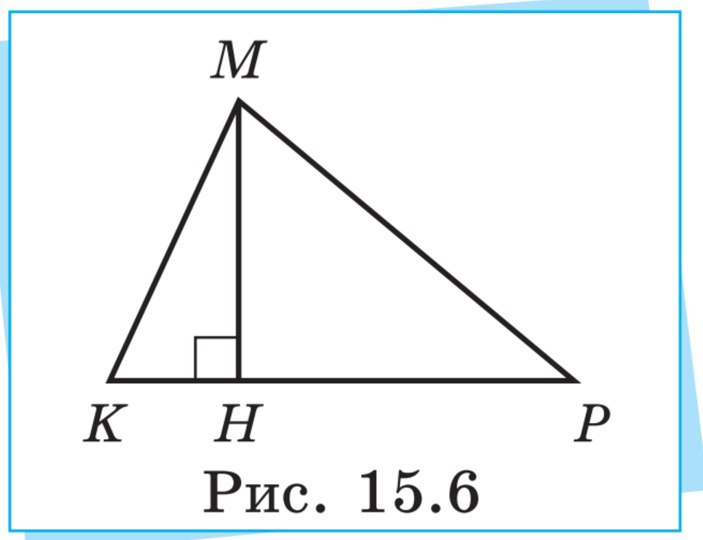


Рис. 15.6

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Міркуючи аналогічно, можна довести, що площу будь-якого трикутника можна обчислити за формулою:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma ,$$

де a і b — сторони трикутника, а γ — кут між прямими, що містять ці сторони.

Для площі паралелограма також існує аналогічна формула:

$$S = a \cdot b \cdot \sin\gamma ,$$

де a і b — сусідні сторони паралелограма, а γ — кут між прямими, що містять ці сторони.

Виведіть ці формули самостійно.



Доведемо формулу для обчислення площі трапеції.



ТЕОРЕМА (про площу трапеції).

Площа трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = l \cdot h ,$$

де a і b — основи трапеції,
l — середня лінія трапеції,
h — висота трапеції.

Доведення. Нехай $ABCD$ — задана трапеція; $BC = a$, $AD = b$ — її основи. Проведемо в цій трапеції висоти $BH_1 = DH_2 = h$ і діагональ BD (рис. 15.7). За означенням площі $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$.

Крім того, за формулою площі трикутника маємо: $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} BH_1 \cdot AD = \frac{1}{2} b \cdot h$;

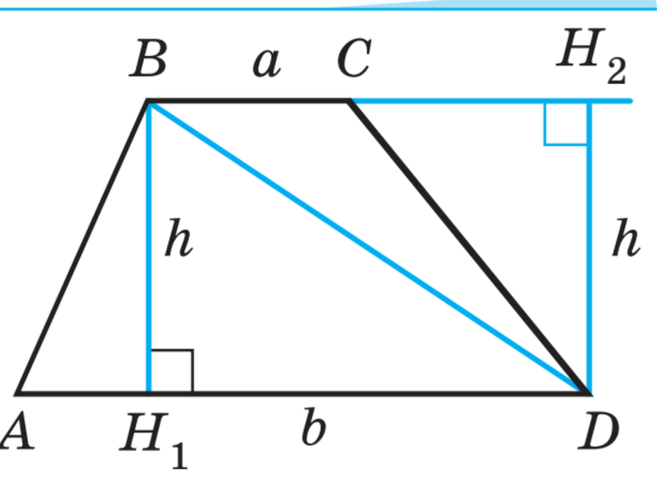


Рис. 15.7

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} DH_2 \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot h$. Таким чином: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} b \cdot h + \frac{1}{2} a \cdot h$, або $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$. Оскільки довжину середньої лінії трапеції можна знайти за формулою $l = \frac{1}{2}(a+b)$, то $S_{ABCD} = l \cdot h$. Теорему доведено.



Існують і інші способи доведення формул площі трапеції та площі трикутника (проілюстровано на рис. 15.8). Однак ці способи суттєво залежать від виду трапеції чи трикутника. *Спробуйте виконати ці доведення самостійно, розглянувши всі можливі випадки.*

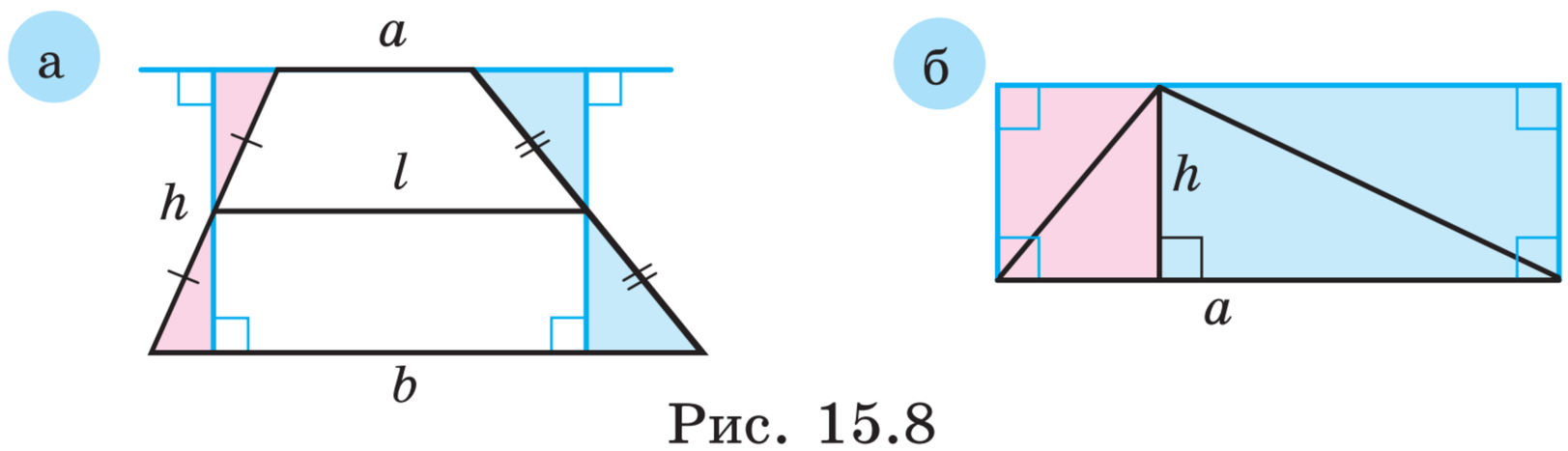


Рис. 15.8



Формулу площі можна вивести й для довільного опуклого чотирикутника.

ТЕОРЕМА (про площу опуклого чотирикутника).

Площа довільного опуклого чотирикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi,$$

де d_1 і d_2 — діагоналі чотирикутника,
φ — кут між прямими, які містять ці діагоналі.

Доведення теореми про площу опуклого чотирикутника: rnk.com.ua/112996





Зауважимо, що ця теорема правильна для всіх тих опуклих чотирикутників (зокрема, трапецій, паралелограмів і прямокутників), у яких кут між прямими, що містять діагоналі, є гострим.

Якщо діагоналі опуклого чотирикутника перпендикулярні й мають довжини d_1 і d_2, то площу такого чотирикутника можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Зокрема, за цією формулою можна обчислити площу ромба або дельтоїда. Її доведення на основі теореми про площу опуклого чотирикутника буде наведено в § 17. Проте останню формулу можна вивести й без використання згаданої теореми. *Спробуйте зробити це самостійно.*



Перевірте себе!

1. Дайте означення площі многокутника. У яких одиницях вимірюють площу многокутника?
2. Які многокутники називають рівновеликими? Чи будь-які два рівні многокутники є рівновеликими? Чи будь-які два рівновеликі многокутники є рівними?
3. Запишіть основну формулу, за якою обчислюють: а) площу паралелограма; б) площу трикутника. Наведіть інші відомі вам формули, за якими можна обчислити площі паралелограма й трикутника.
4. Запишіть формулу для обчислення: а) площі трапеції; б) площі довільного опуклого чотирикутника; в) площі ромба й дельтоїда.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. У скільки разів площа многокутника більша від площі однієї клітинки (рис. 1)?

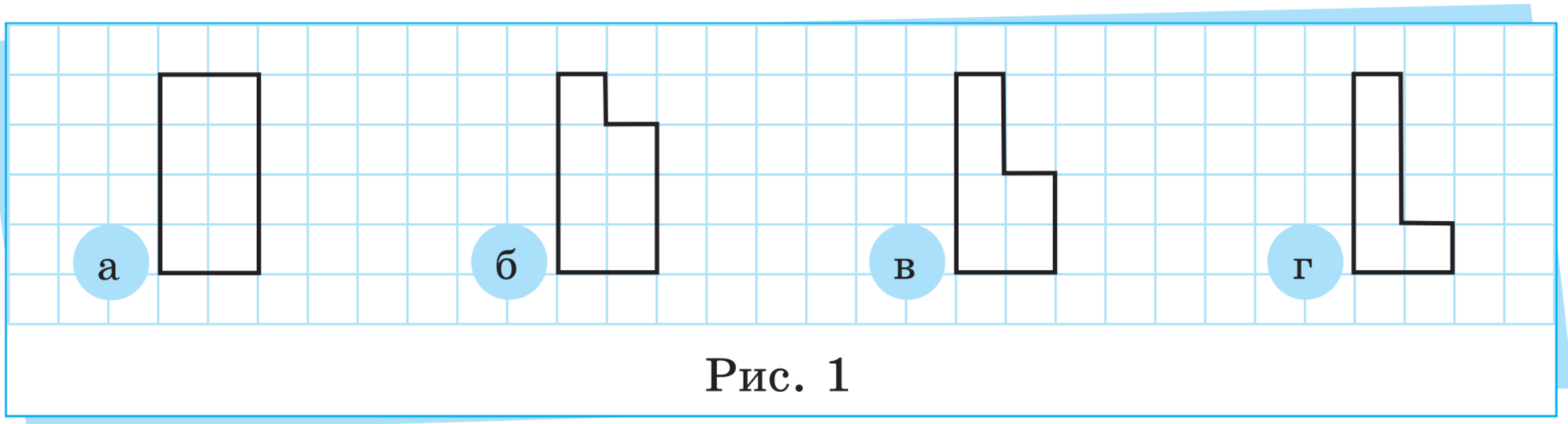


Рис. 1

2. У скільки разів площа многокутника більша від площі однієї клітинки (рис. 2)?

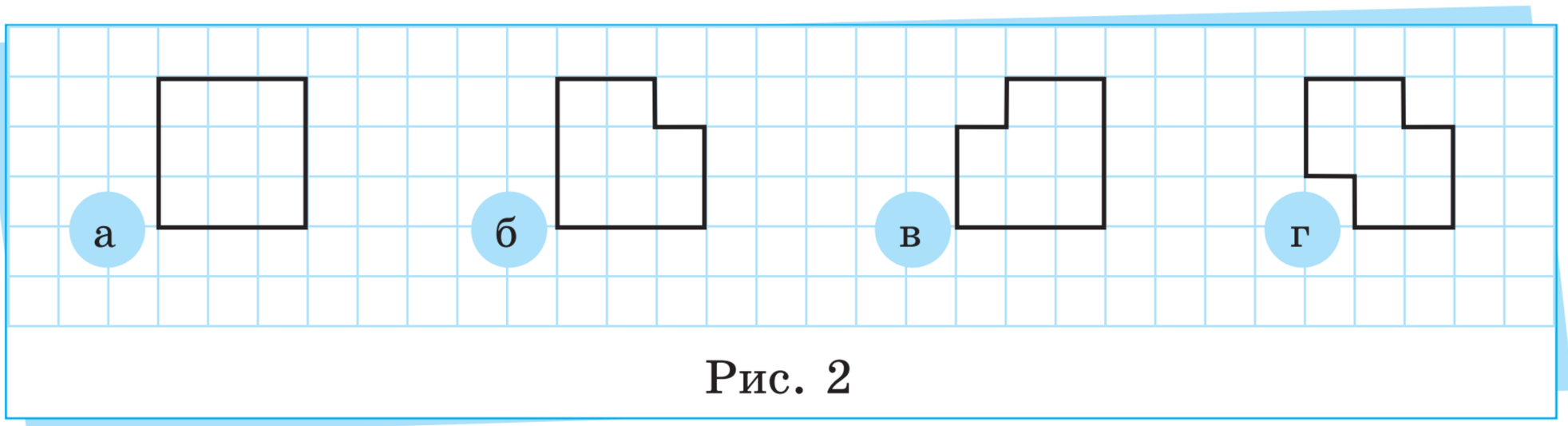


Рис. 2

3. За рис. 3 обчисліть площу многокутника (1 клітинка — 1 квадратна одиниця).

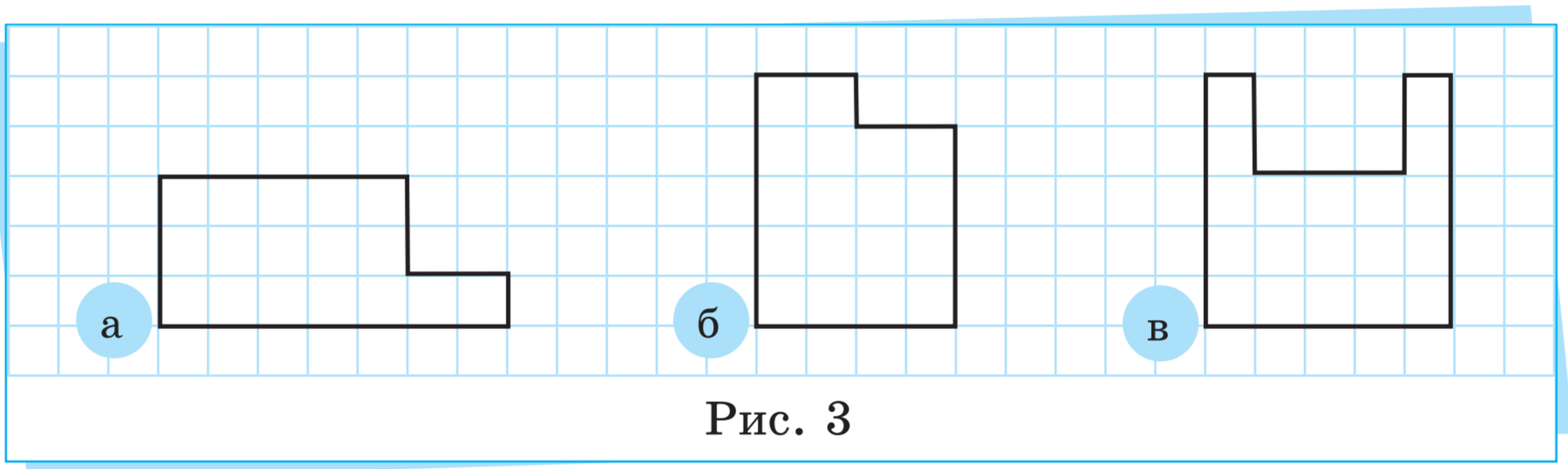


Рис. 3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. За рис. 4 обчисліть площу многокутника (1 клітинка — 1 квадратна одиниця).

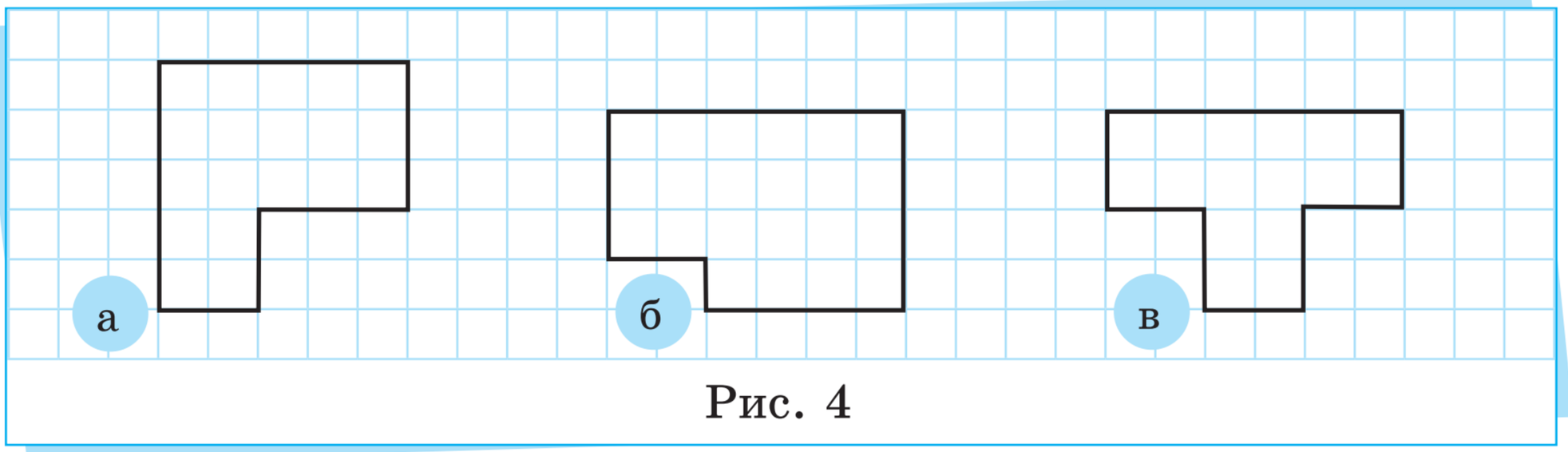


Рис. 4

5. За рис. 5 знайдіть довжину сторони a паралелограма й довжину висоти h, проведеної до цієї сторони. Обчисліть площу S паралелограма за формулою $S = a \cdot h$.

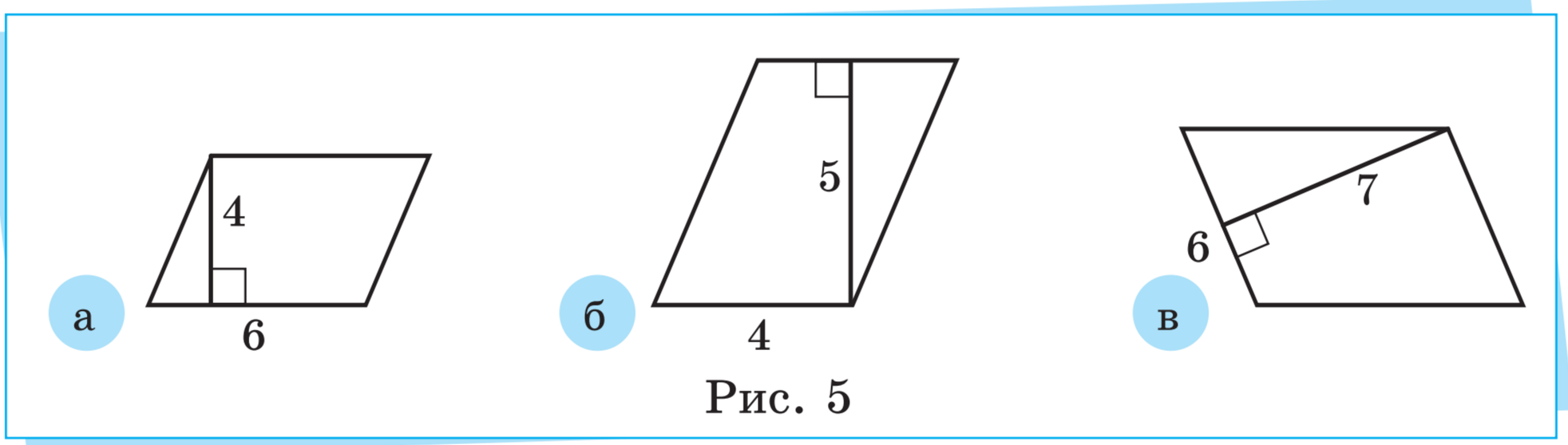


Рис. 5

6. За рис. 6 знайдіть довжину сторони a паралелограма й довжину висоти h, проведеної до цієї сторони. Обчисліть площу S паралелограма за формулою $S = a \cdot h$.

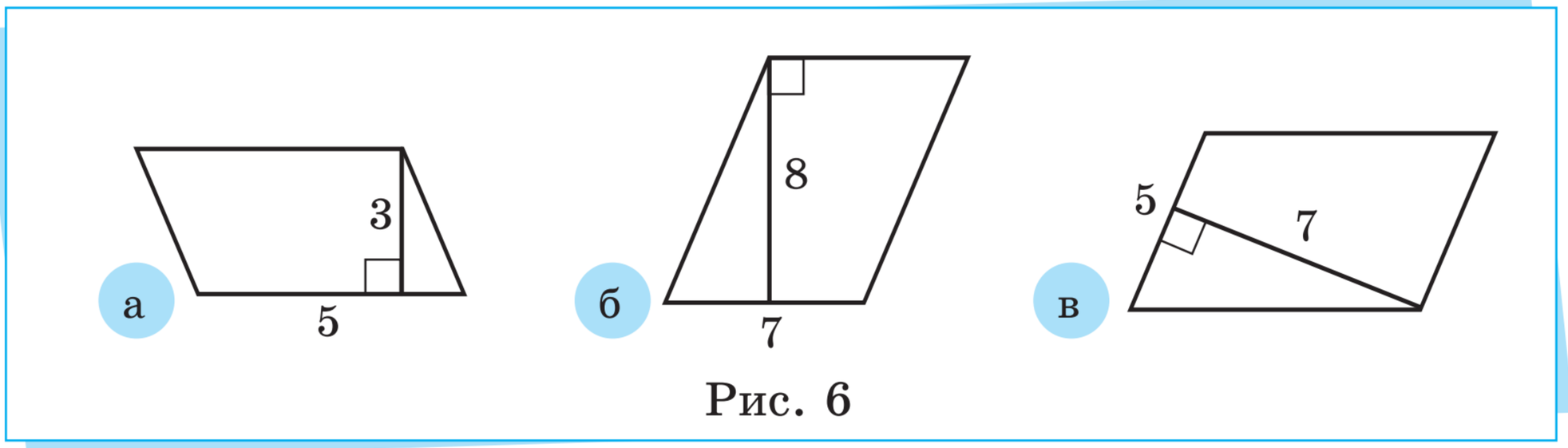


Рис. 6

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. За рис. 7 знайдіть довжину сторони a трикутника й довжину висоти h, проведеної до цієї сторони. Обчисліть площу S трикутника за формулою $S = \frac{1}{2} a \cdot h$.

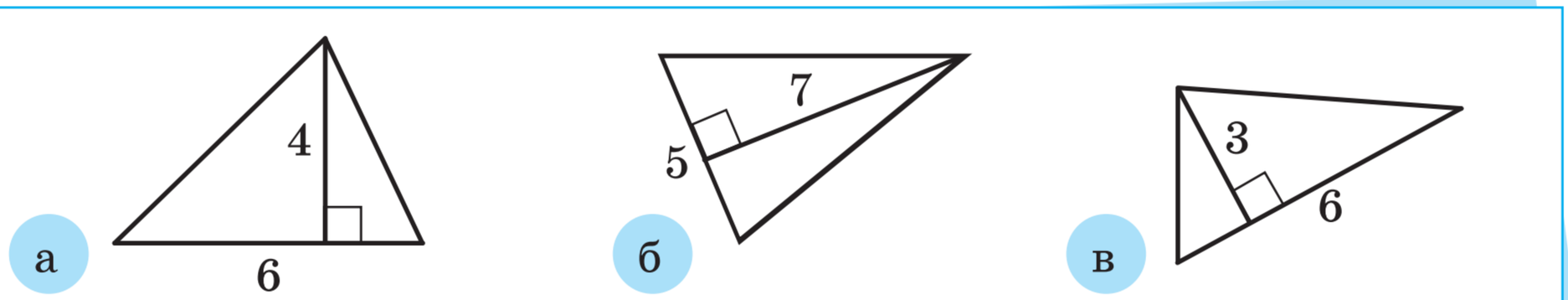


Рис. 7

8. За рис. 8 знайдіть довжину сторони a трикутника й довжину висоти h, проведеної до цієї сторони. Обчисліть площу S трикутника за формулою $S = \frac{1}{2} a \cdot h$.

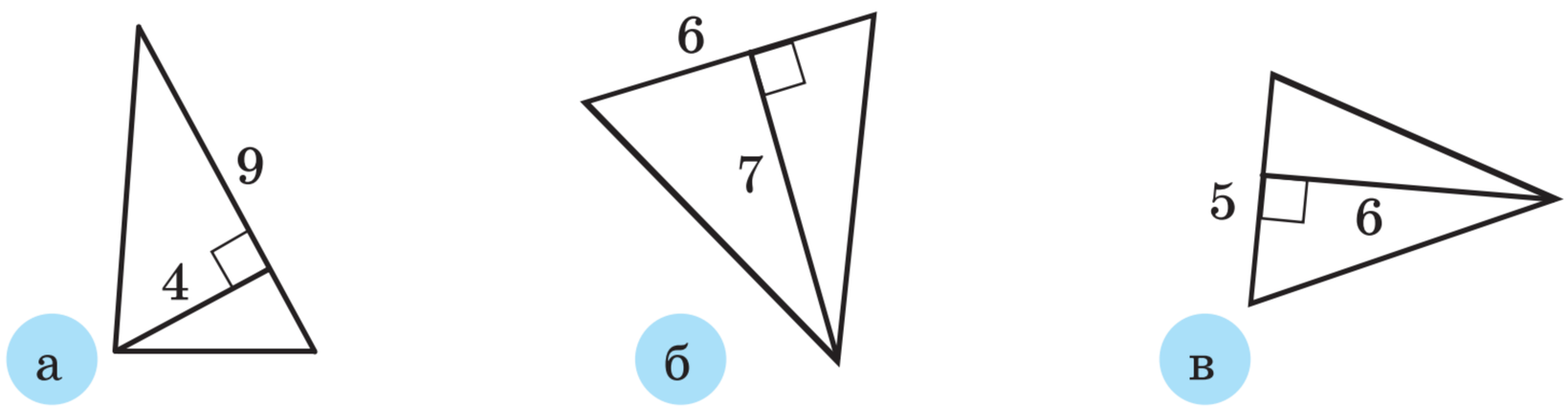


Рис. 8

9. За рис. 9 знайдіть довжини основ a, b та довжину висоти h трапеції. Обчисліть площу S трапеції за формулою $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$.

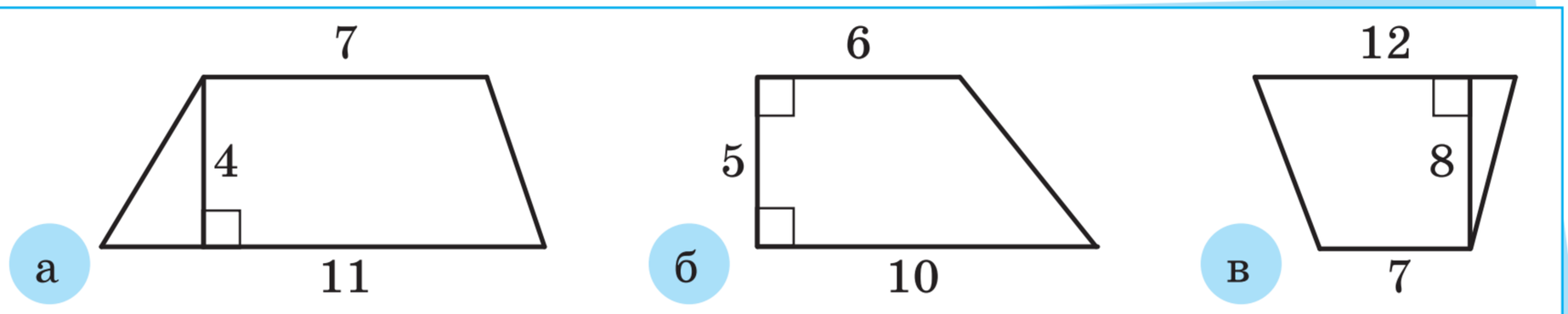


Рис. 9

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

10. За рис. 10 знайдіть довжини основ a, b та довжину висоти h трапеції. Обчисліть площу S цієї трапеції за формулою $S=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$.

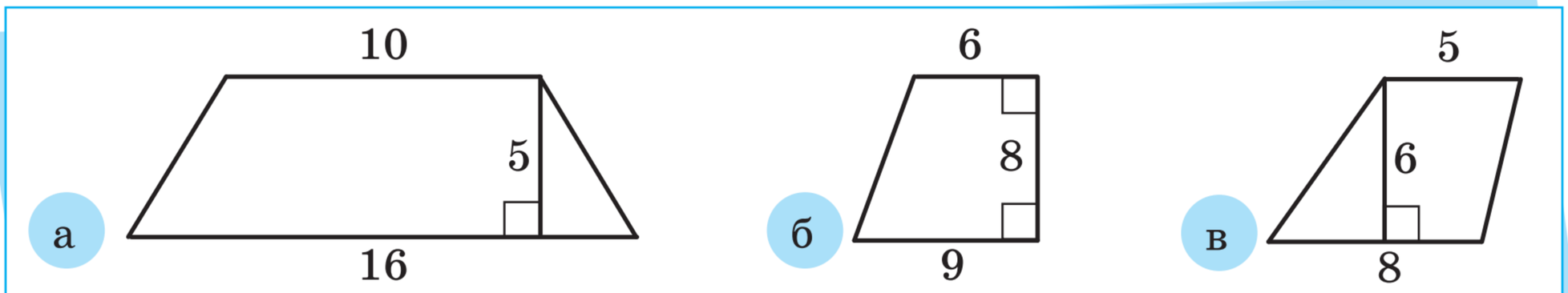


Рис. 10

11. Відомо, що діагоналі ромба $d_1=12$ см, $d_2=15$ см. Знайдіть площу S ромба за формулою $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$.

12. Відомо, що діагоналі дельтоїда $d_1=7$ см, $d_2=16$ см. Знайдіть площу S дельтоїда за формулою $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$.

Середній рівень

13. Із квадрата, довжина сторони якого дорівнює 7 см, вирізали прямокутник, довжини сторін якого дорівнюють 2 см і 4 см (рис. 11). Знайдіть площу зафарбованої фігури.

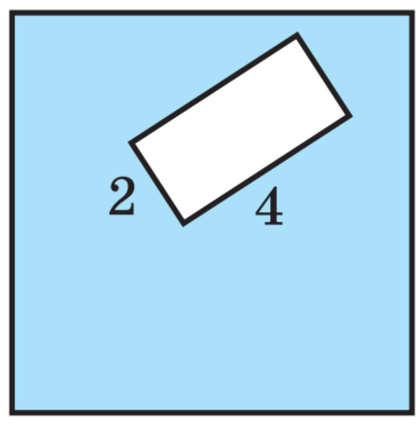


Рис. 11

14. Із прямокутника, довжини сторін якого дорівнюють 6 см і 9 см, вирізали квадрат із довжиною сторони 4 см (рис. 12). Знайдіть площу зафарбованої фігури.

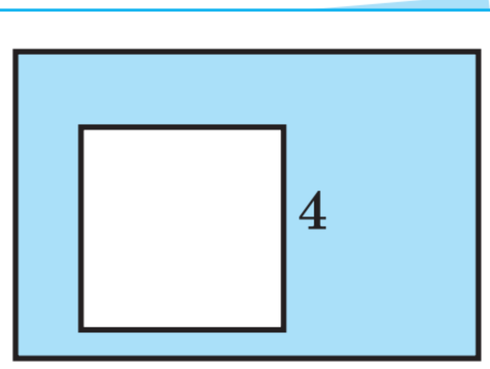


Рис. 12

15. Використовуючи дані рис. 13, знайдіть площу паралелограма. Чи всі дані були необхідними для розв'язування задачі? Якщо ні, то які виявилися надлишковими?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

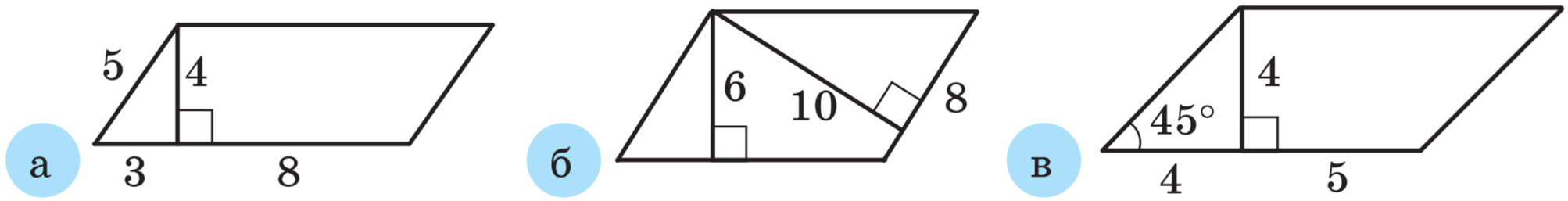


Рис. 13

16. Використовуючи дані рис. 14, знайдіть площу паралелограма. Чи всі дані були необхідними для розв'язування задачі? Якщо ні, то які дані виявилися надлишковими?

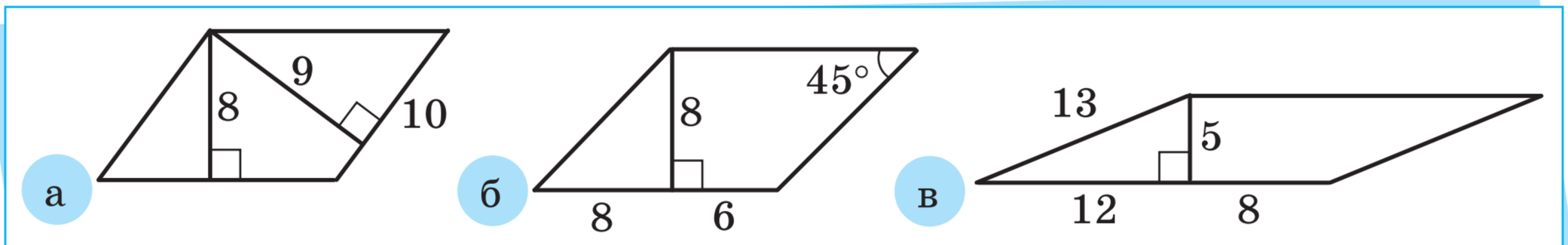


Рис. 14

17. Знайдіть площу трикутника (рис. 15), якщо довжина сторони однієї клітинки дорівнює 1 см. Чи є серед наведених трикутників рівновеликі? Якщо так, то які саме?

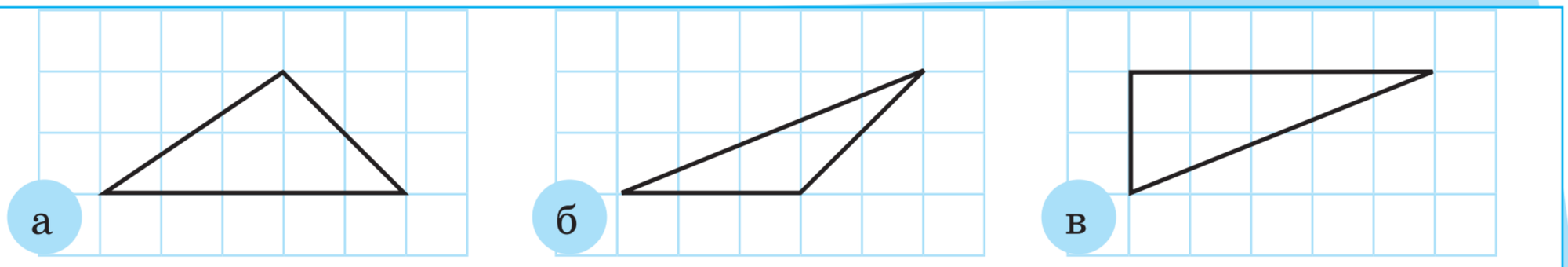


Рис. 15

18. Знайдіть площу трикутника (рис. 16), якщо довжина сторони однієї клітинки дорівнює 1 см. Чи є серед наведених трикутників рівновеликі? Якщо так, то які саме?

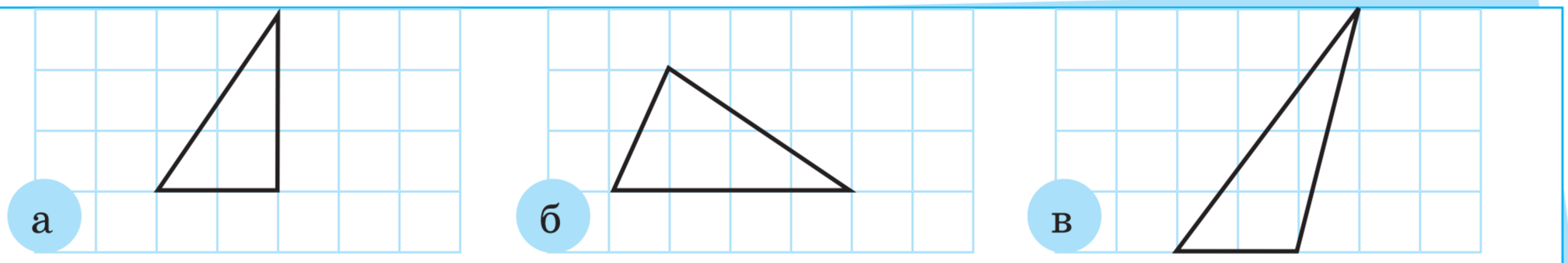


Рис. 16

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

19. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 8 см, а градусна міра кута між ними — 30°.

20. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 10 см і 12 см, а градусна міра кута між ними — 60°.

21. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 20 см і 28 см.

22. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 30 см і 14 см.

23. Знайдіть площу трапеції (рис. 17), якщо довжина сторони однієї клітинки дорівнює 1 см.

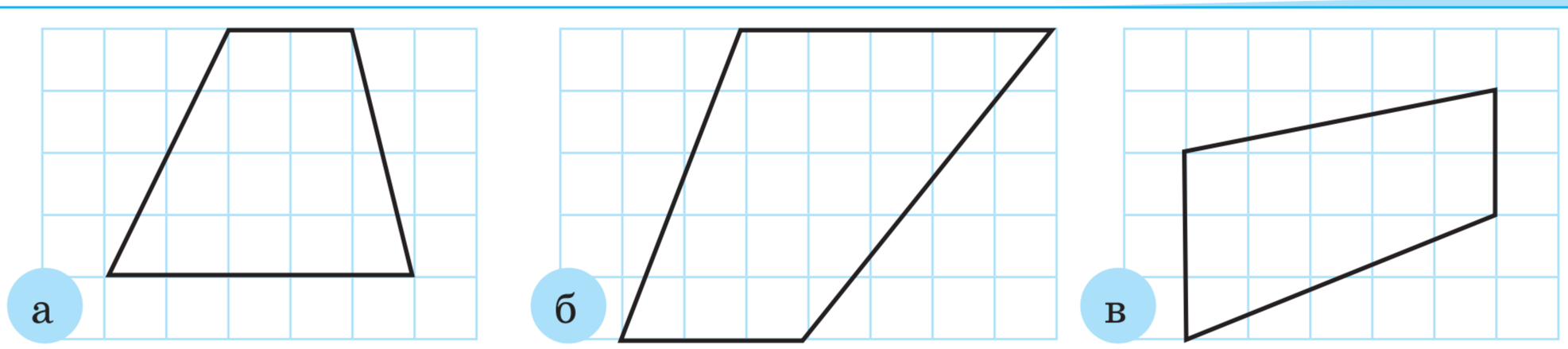


Рис. 17

24. Знайдіть площу трапеції (рис. 18), якщо довжина сторони однієї клітинки дорівнює 1 см.

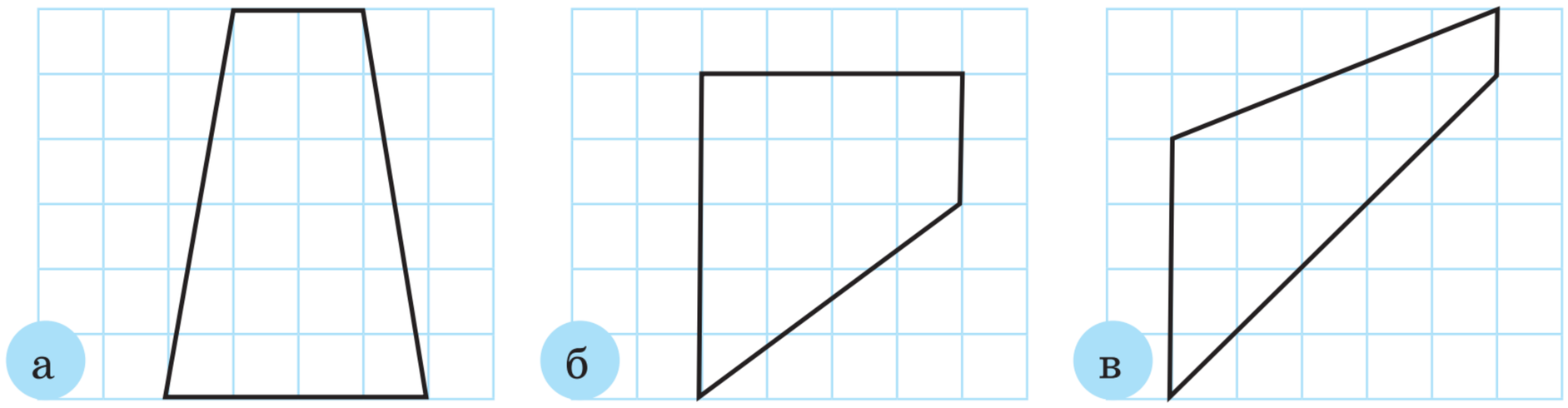


Рис. 18

Достатній рівень

25. Підлогу, що має форму квадрата зі стороною 4 м, треба викласти паркетними дощечками прямокутної форми. Довжина кожної дощечки — 20 см, ширина — 10 см. Скільки таких дощечок знадобиться для виконання цієї роботи?

26. Прямокутну стіну, розміри якої 5 м і 3 м, планують викласти плиткою, що має форму квадрата зі стороною 20 см. Скільки таких плиток знадобиться для виконання цієї роботи?

27. Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а його сторони — 3 см і 4 см. Знайдіть довжину висоти цього паралелограма, проведеної до меншої його сторони.

28. Гострий кут паралелограма дорівнює 45°, а його сторони — 5 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти цього паралелограма, проведеної до меншої його сторони.

29. Більша сторона паралелограма дорівнює 12 см, а висоти паралелограма, проведені з однієї його вершини, — 5 см і 6 см. Знайдіть меншу сторону цього паралелограма.

30. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 12 см, а менша його висота — 6 см. Знайдіть більшу висоту цього паралелограма.

31. Площа трикутника дорівнює 24 см^2. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його сторони довжиною 8 см.

32. Площа трикутника дорівнює 36 см^2. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його сторони довжиною 9 см.

33. Периметр ромба дорівнює 64 см, а градусна міра одного з його кутів — 30°. Знайдіть площу цього ромба та його висоту.

34. Периметр ромба дорівнює 80 см, а градусна міра одного з його кутів — 60°. Знайдіть площу цього ромба та його висоту.

35. Сторона ромба дорівнює 9 см, а відстань від точки перетину діагоналей цього ромба до його сторони — 2 см. Обчисліть площу даного ромба.

36. Сторона ромба дорівнює 12 см, а відстань від точки перетину діагоналей цього ромба до його сторони — 3 см. Обчисліть площу даного ромба.

37. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 9 см, а градусна міра одного з її кутів — 45°. Обчисліть площу цієї трапеції.

38. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 см і 10 см, а градусна міра одного з її кутів — 135°. Обчисліть площу цієї трапеції.

39. У прямокутників $ABCD$ і $KLMN$ $AB = KL$, а $BC = LM$ (рис. 19). Доведіть, що трикутники ABC і LQM рівновеликі, якщо точка Q належить стороні KN.

40. Діагоналі прямокутника $HTML$ перетинаються в точці O (рис. 20). Доведіть, що трикутники HOL і MOL рівновеликі.

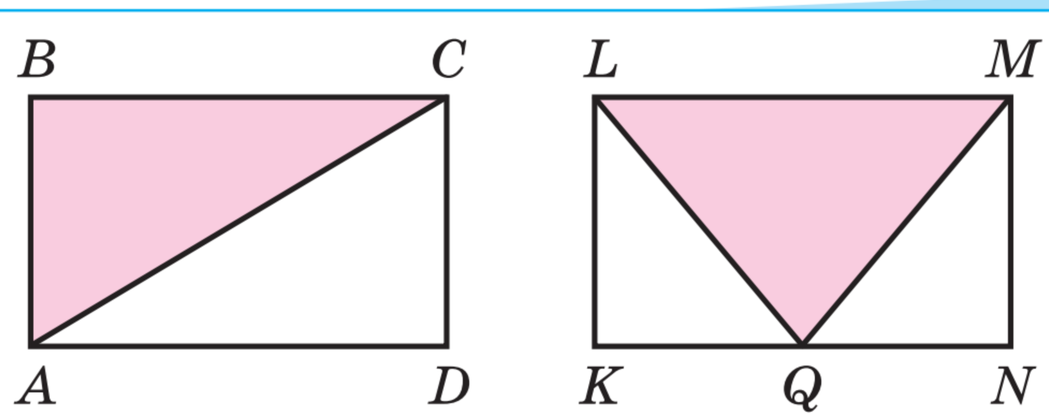


Рис. 19

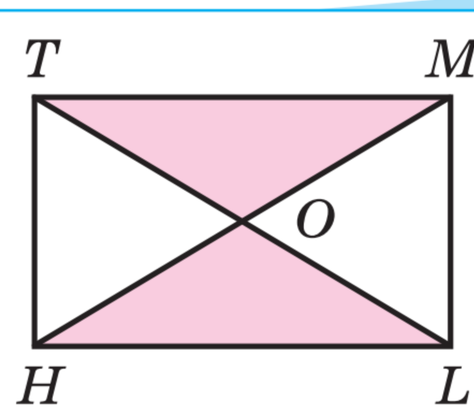


Рис. 20

Високий рівень

41. Доведіть, що площу ромба й дельтоїда можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$, де d_1 і d_2 — діагоналі даного чотирикутника.

42. Доведіть, що площу довільного описаного n-кутника можна обчислити за формулою $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$, де P_n — периметр многокутника, r — радіус кола, вписаного в многокутник.

43. Знайдіть площу правильного трикутника зі стороною a.

44. Знайдіть площу правильного шестикутника зі стороною a.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

45. Доведіть, що відношення площ двох подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

46. Доведіть, що відношення площ двох подібних прямокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

47. Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликі трикутники.

48. Доведіть, що три медіани трикутника розбивають його на шість рівновеликих трикутників.

49. Усередині правильного трикутника вибрали довільну точку. Доведіть, що сума відстаней від цієї точки до всіх сторін трикутника дорівнює довжині висоти трикутника.

50. Усередині паралелограма вибрали довільну точку. Цю точку з'єднали з усіма вершинами паралелограма. Доведіть, що сума площ двох трикутників, прилеглих до протилежних сторін паралелограма, дорівнює половині площі паралелограма.

51. Довжина катета рівнобічного прямокутного трикутника ABC дорівнює 4 см. На сторонах цього трикутника побудовано квадрати $ABKF$, $BCMN$, $ACPD$ (рис. 21). Знайдіть площу шестикутника $DFKNMP$.

52. Довжина сторони рівностороннього трикутника ABC дорівнює 4 см. На сторонах цього трикутника побудовано квадрати $ACIH$, $BCED$, $ABFG$ (рис. 22). Знайдіть площу шестикутника $EDFGHI$.

53. Діагоналі трапеції розбивають її на чотири трикутники (рис. 23). Доведіть, що трикутники, прилеглі до бічних сторін трапеції, рівновеликі.

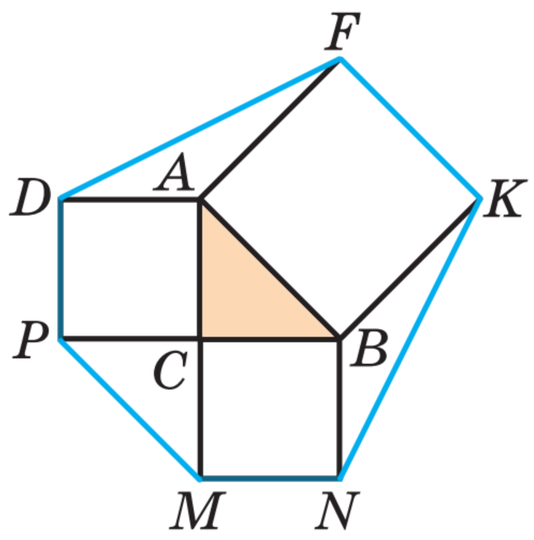


Рис. 21

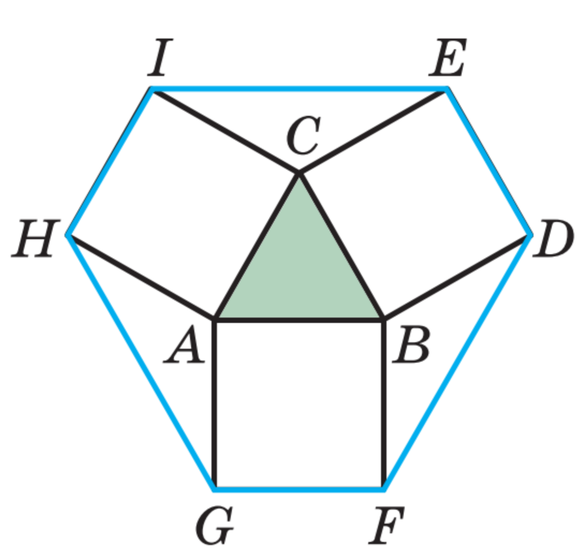


Рис. 22

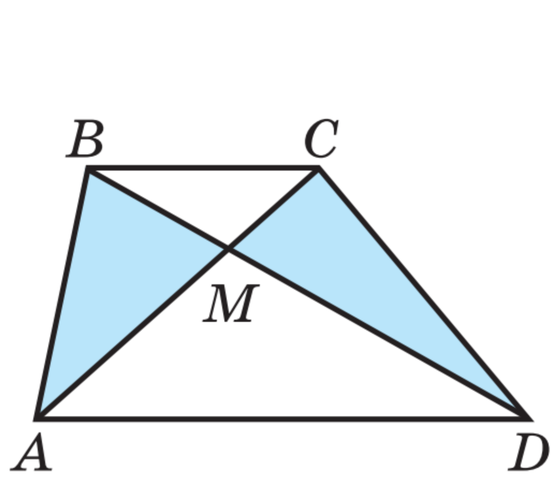


Рис. 23

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

54. У трапеції через середину її середньої лінії провели пряму, яка перетинає обидві основи трапеції. Доведіть, що ця пряма розбиває трапецію на дві рівновеликі частини.

55. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Доведіть, що площа цієї трапеції дорівнює квадрату її висоти й дорівнює квадрату довжини її середньої лінії.

56. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 8 см, а її діагоналі перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції.

57. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 25 см. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

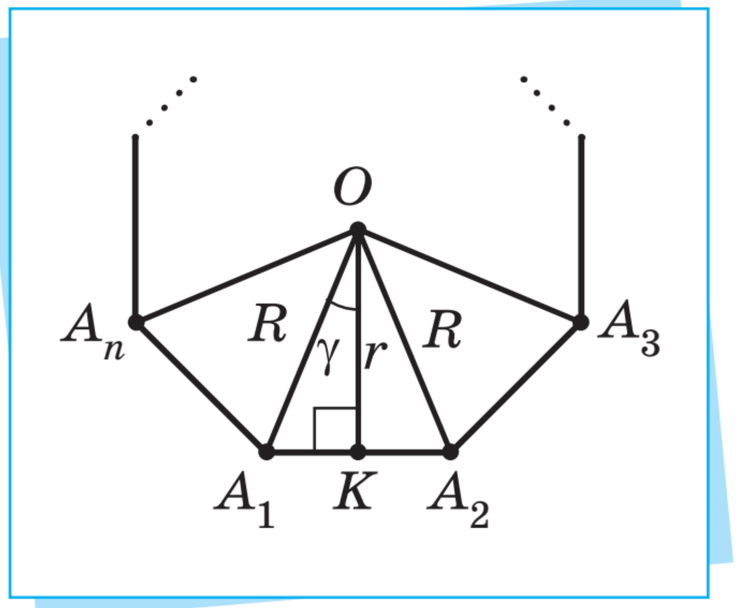
58. Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а гострий кут — 45°. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.



Цікавинки від дідуся Тараса

Площі можна знаходити й для більш складних многокутників, ніж трикутники та чотирикутники. Наприклад, у § 14 ви вивчали правильні многокутники, які мають численні практичні застосування. Дізнаємось, як обчислюють їх площі.

Зрозуміло, що кожен правильний n-кутник можна подати у вигляді об'єднання n рівних між собою рівнобічних трикутників, вершина кожного з яких розташована в центрі O цього многокутника, а основа — навпроти кута із цією вершиною. Наприклад, ΔA_1OA_2 — один із таких трикутників (рисунок). Цей трикутник, своєю чергою, розбивається висотою OK на два рівні прямокутні трикутники A_1OK і A_2OK. Тому площа правильного n-кутника $S_n = 2n \cdot S_{\Delta A_1OK}$.



Нехай сторона правильного n-кутника дорівнює a, радіус описаного навколо нього кола дорівнює R, а радіус вписаного в нього кола дорівнює r. Тоді в прямокутному трикутнику A_1OK катет $A_1K = \frac{a}{2}$, катет $OK = r$, гіпотенуза $A_1O = R$, а $\angle A_1OA_2 = \gamma = \frac{180^\circ}{n}$. Оскільки $S_{\Delta A_1OK} = \frac{1}{2}A_1K \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot r = \frac{ar}{4}$, то $S_n = 2n \cdot \frac{ar}{4}$, або $S_n = \frac{1}{2}nar$. Останню формулу також записують у вигляді $S_n = \frac{1}{2}P_n \cdot r$, де $P_n = n \cdot a$ — периметр n-кутника.

Ураховуючи, що $a = 2r \cdot \operatorname{tg}\gamma$, а $r = \frac{1}{2}a \cdot \operatorname{ctg}\gamma$, формулу $S_n = \frac{1}{2}nar$ можна записати у вигляді $S_n = nr^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, або $S_n = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Площу правильного n-кутника можна виразити й через радіус описаного кола. Справді, оскільки $a = 2R \cdot \sin\gamma$, а $r = R \cdot \cos\gamma$, то $S_n = \frac{1}{2}n \cdot 2R \cdot \sin\gamma \cdot R \cdot \cos\gamma$, або $S_n = nR^2 \sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$.

Таким чином, площа правильного n-кутника однозначно визначається кількістю n його сторін, а також якимось лінійним розміром (стороною, радіусом вписаного кола або радіусом описаного кола).



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Використовуючи формули площі правильного n-кутника, виведіть формули площі правильного трикутника, правильного чотирикутника (квадрата) і правильного шестикутника залежно від довжини сторони, радіуса вписаного кола й радіуса описаного кола.
2. Чи доводилося вам у практичній діяльності знаходити площі многокутників? Якщо так, то яких саме? Поділіться своїм досвідом.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу та спростіть вираз.

а) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{10}{4-\sqrt{6}}$;

г) $\dfrac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}$.

2. Розв'яжіть рівняння.

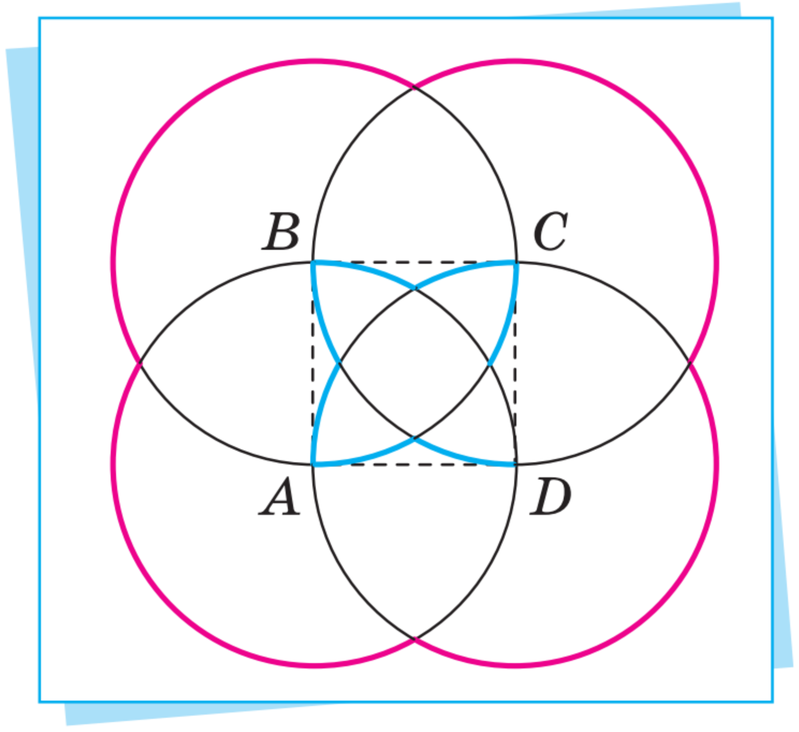
а) $6x+\sqrt{x}-2=0$;

б) $3x^4-10x^2+8=0$.

3. У мінікав'ярні «Равлик» у меню є 4 види кави та 6 видів макарунів. До кав'ярні завітала туристична група з 25 осіб, кожна з яких замовила собі каву з макаруном. Доведіть, що принаймні дві особи із цієї туристичної групи зроблять однакове замовлення.



4. На рисунку зображено чотири кола радіуса $R=9$ см із центрами в точках A, B, C, D. Знайдіть довжини ліній, позначених на рисунку червоним і синім кольорами, якщо $ABCD$ — квадрат зі стороною 9 см.



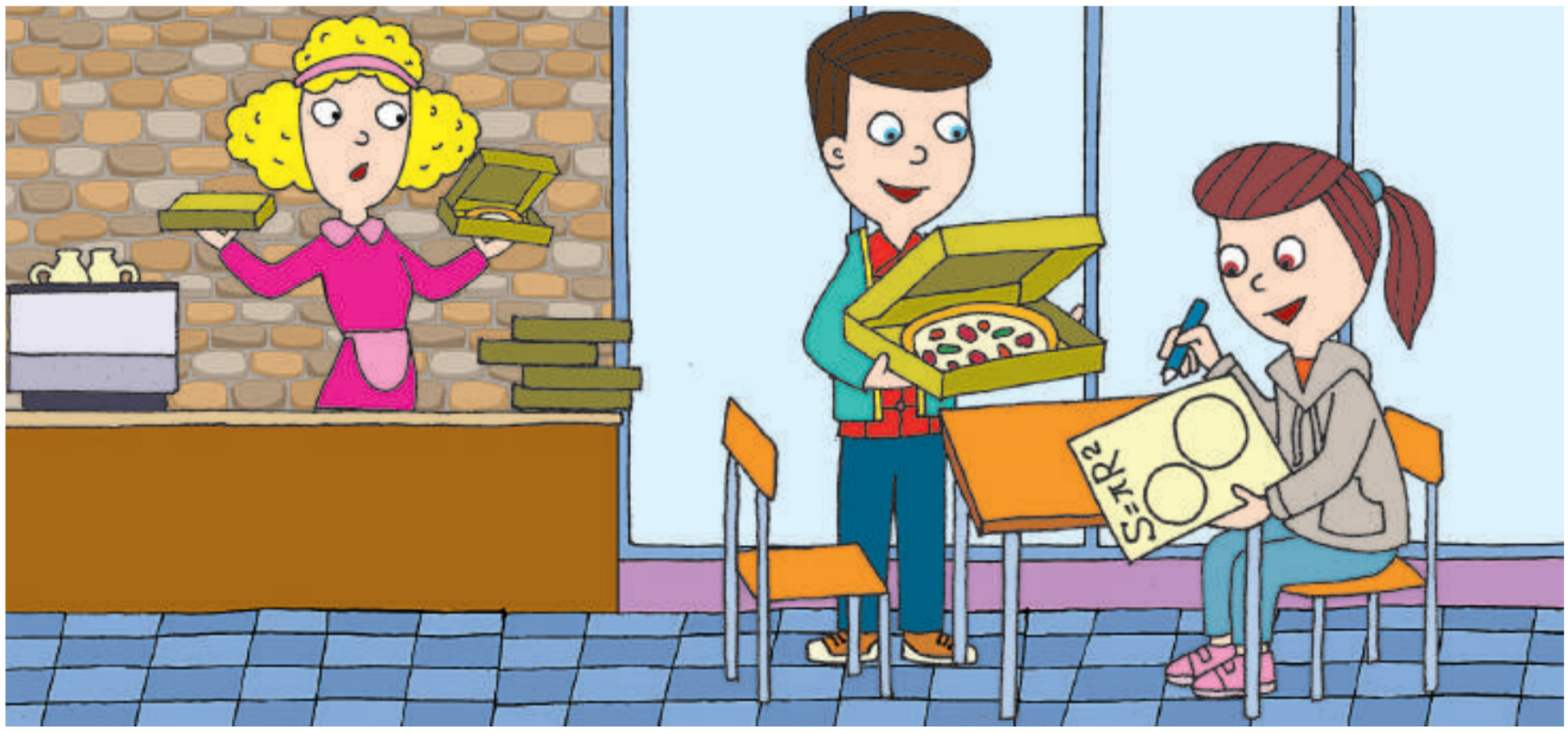
5. Знайдіть невідоме число, яке слід поставити в дужках замість знака питання.

ДИСПЕТЧЕР (ДОТЕП) СУДОМА

234082 (?) 419573802

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 16. Площа круга та його частин





Тетянко, недавно побачив у одній із соціальних мереж пост із мемом, де йшлося: «Спочатку вони не вчать математику, а потім обирають дві піци діаметром 30 см замість однієї діаметром 45 см, вважаючи, що так вигідніше!» І під цим повідомленням купа веселих смайликів і коментарі на кшталт: «Дійсно, тільки той, хто не знає математики, може зробити такий вибір». Щось я не розумію, у чому річ. Допоможи розібратися.



Мені теж траплялася ця задачка в інтернеті. Треба знайти площу двох піц діаметром 30 см і порівняти її з площею піци діаметром 45 см. Що більша площа, то вигідніше, бо на більшу площу можна покласти більше начинки. Я заглянула в довідник із математики й знайшла формулу площі круга радіуса R: $S = \pi R^2$. Радіус круга вдвічі менший за його діаметр. Тому за цією формулою площа однієї піци діаметром 30 см буде $S_1 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ см^2, а площа однієї піци діаметром 45 см буде $S_2 = \pi \cdot (22{,}5)^2 = 506{,}25\pi$ см^2. Оскільки $S_2 > 2S_1$, то брати одну піцу діаметром 45 см справді вигідніше, ніж дві піци діаметром 30 см кожна.

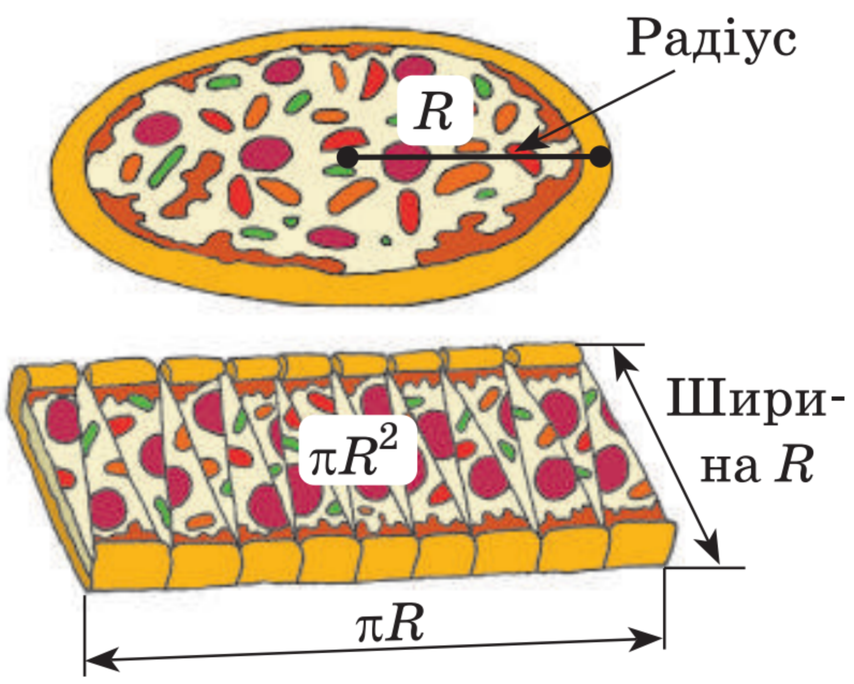
Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Дякую, тепер зрозуміло, із чого люди сміялися. Але звідки взялася ця формула площі круга? Я пам'ятаю ще із 7 класу, що число π — це відношення довжини кола C до його діаметра d. Власне, саме тому формула довжини кола $C = \pi d$, або $C = 2\pi R$, де R — радіус кола. Ми нещодавно вивчили формули площ многокутників, але коло зовсім не схоже на многокутник. Цікаво, як вивели формулу площі круга.



Я колись дивилася в інтернеті відео з простим поясненням виведення площі круга. Круглу піцу нарізали на тоненькі скибочки й виклали так, що вони утворили фігуру, схожу на прямокутник, одна сторона якого дорівнює радіусу R круга, а інша — половині довжини кола, яке обмежує цей круг, тобто πR. Тоді можна використати формулу площі прямокутника, за якою площа круга $S = \pi R \cdot R = \pi R^2$. Ось, я знайшла рисунок!





Ніби інтуїтивно зрозуміло, проте інтуїція — річ непевна й часто підводить. Хотілося б мати детальніше пояснення. Мені здається, що тут не все так просто. Пропоную звернутися до вчителів, вони напевно знають більше.



Петрик має рацію, поняття площі круга справді непросте, і строге доведення формули площі круга ви будете готові зрозуміти лише у вищій школі. Але більш детально про те, як визначають площу круга, звісно, ми розповімо.

Нагадаємо, що коло — це множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра кола), а круг — це частина площини,

обмежена колом. Центр кола також є і центром круга, який воно визначає.

Радіус кола або круга — це відрізок, що сполучає центр кола з точкою на колі. Усі точки кола розташовані від його центра на відстані, яка дорівнює довжині радіуса кола. Цю відстань також називають радіусом. Усі точки круга розташовані від центра круга на відстані, не більшій за довжину радіуса кола, яке його обмежує.

Хорда кола або круга — це відрізок, що сполучає дві точки кола. Якщо хорда проходить через центр, то таку хорду називають діаметром. Довжину діаметра також називають діаметром і позначають буквою d. Наприклад, на рис. 16.1 зображено коло й круг із центром у точці O, відрізок OM — радіус кола й круга, відрізок KM — діаметр кола й круга, $OM = R$, $KM = d$. Очевидно також, що $d = 2R$.

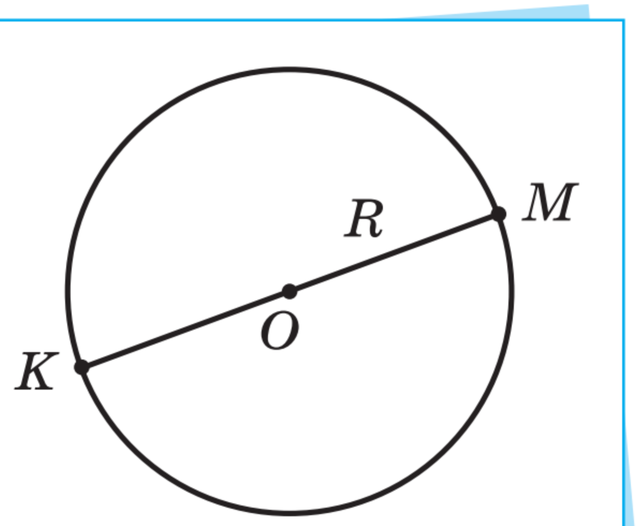


Рис. 16.1



Зі спостережень і вимірювань круглих об'єктів було встановлено, що відношення довжини кола C до його діаметра d — це стала величина (константа), яка не залежить від розмірів кола. Цю константу традиційно позначають буквою π, тобто $\frac{C}{d} = \frac{C}{2R} = \pi$.

Саме із цієї рівності виводять формули довжини кола:

$$\boxed{C = \pi d}, \text{ або } \boxed{C = 2\pi R}.$$

Однак вивчення правильних многокутників дає можливість пояснити іншим способом те, що відношення $\frac{C}{d} = \pi$ не залежить від розмірів кола.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/112997







У § 15 ми визначили поняття площі многокутника. Щоб визначити поняття площі круга, обмеженого даним колом радіуса R, розгляне-мо правильний n-кутник, вписаний у це коло, і правильний n-кутник, описаний навколо цього кола (див. рис. 16.2 для випадку $n=6$ і $n=8$). Зрозуміло, що *за необмеженого збільшення числа n* кожен із цих двох многокутників стає як завгодно близьким до кола радіуса R, а відповідні плоскі много-кутники стають як завгодно близькими до круга такого самого радіуса. Природно вважати, що периметри обох многокутників за необмеженого збільшення n будуть ставати як завгодно близь-кими до довжини C згаданого кола, а площі відповідних пло-ских многокутників ставатимуть як завгодно близькими до того самого числа S, яке й будемо називати площею круга.

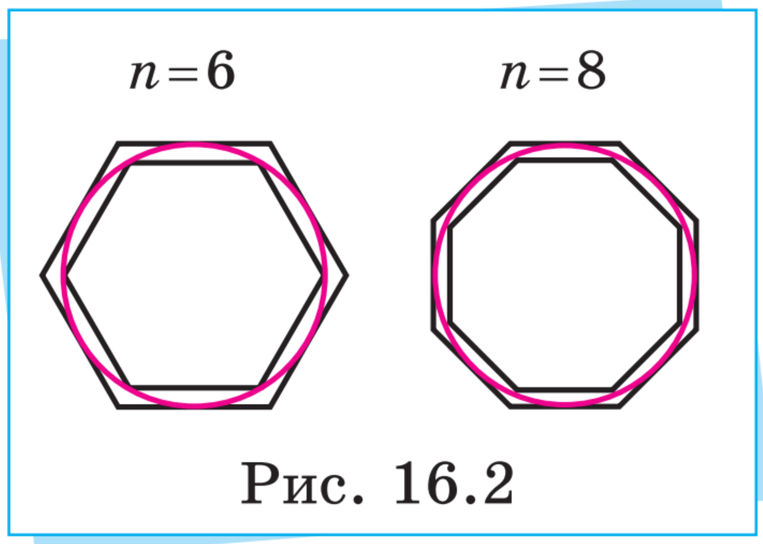


Рис. 16.2



Таким чином, щоб знайти площу круга радіуса R, досить знайти площу, наприклад, описаного навколо нього n-кутника, а потім з'ясувати, до якого числа наближатиметься ця площа за необме-женого збільшення числа n. Нескладно показати, що для кожного натурального числа $n \geqslant 3$ площу S_n цього n-кутника можна обчислити за формулою $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R$, де P_n — периметр n-кутника, а R — радіус круга, вписаного в даний n-кутник (детальніше про це розказано в «Цікавинках від дідуся Тараса» в § 15).

За необмеженого збільшення числа n периметр P_n описаного n-кутника буде ставати як завгодно близьким до довжини C кола, що обмежує круг радіуса R, а площа S_n відповідного плос-кого многокутника ставатиме як завгодно близькою до площі S цього круга. Тому $S = \frac{1}{2} C \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Отже, площу S круга радіуса R можна обчислити за формулою: $\boxed{S = \pi R^2}$.



Нагадаємо, що плоский кут, вершина якого розташована в центрі даного кола або круга, називають центральним кутом. Наприклад, на рис. 16.3 зображено коло із центром у точці O й два доповняльні центральні кути 1 і 2, які визначаються радіусами OA і OB. Як ви вже знаєте, $\angle 1 + \angle 2 = 360°$. Кожен центральний кут визначає певну дугу — частину кола, що міститься між двома точками цього кола. На рис. 16.3 кут 1 визначає дугу синього кольору, а кут 2 — дугу червоного кольору.

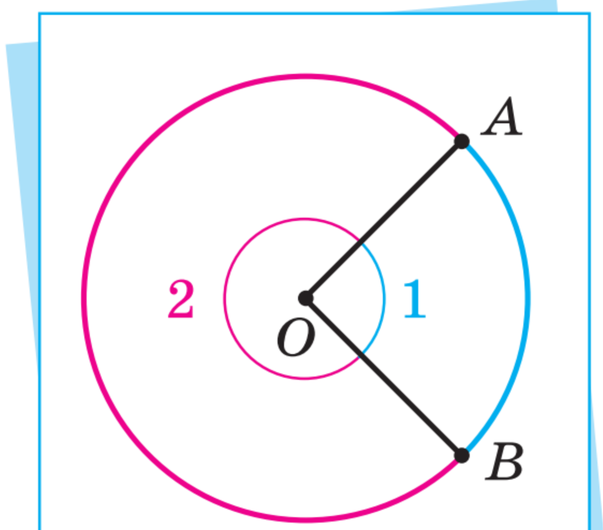


Рис. 16.3

Нагадаємо також, що довжину дуги l_α кола радіуса R, що відповідає центральному куту α (у градусах), обчислюють за формулою $l_\alpha = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360°}$. Тобто фактично для обчислення довжини дуги кола потрібно:

- дізнатися, яку частину від 360° становить градусна міра α центрального кута, який цю дугу визначає;
- знайти цю частину від довжини всього кола.



Частину круга, обмежену двома радіусами й дугою, називають сектором. На рис. 16.3 зображено два сектори, обмежені радіусами OA і OB: перший, крім радіусів, обмежений дугою синього кольору, а другий — дугою червоного кольору.

Під час обчислення площі сектора діють аналогічно до обчислення довжини дуги, тобто:

- дізнаються, яку частину від 360° становить градусна міра α центрального кута, який визначає дугу, що обмежує сектор;
- знаходять цю частину від площі всього круга.

Іншими словами, площу сектора S_α круга радіуса R, що відповідає центральному куту α (у градусах), обчислюють за формулою $S_\alpha = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$.

Наприклад, площа сектора круга радіуса $R=6$ см, обмеженого дугою, що відповідає центральному куту $\alpha=150^\circ$, дорівнює $\pi\cdot 6^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=36\pi\cdot\frac{5}{12}=15\pi$ (см^2).



Ви знаєте, що частину круга, обмежену хордою та дугою, називають сегментом. Наприклад, на рис. 16.4 зображено два сегменти, обмежені хордою AB і дугою з кінцями в точках A і B: перший сегмент зафарбовано синім кольором, а другий — жовтим.

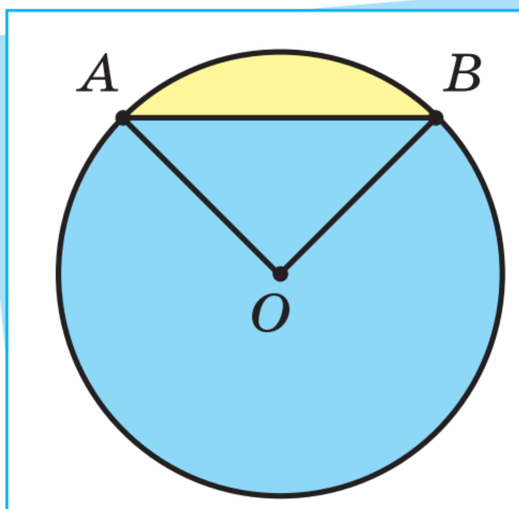


Рис. 16.4

Як видно з рис. 16.4, для обчислення площі меншого сегмента (жовтого кольору) потрібно знайти площу сектора, що містить цей сегмент, а потім *відняти* від нього площу трикутника AOB. Для обчислення площі більшого сегмента (синього кольору) потрібно знайти площу сектора, що міститься в цьому сегменті, а потім *додати* до нього площу трикутника AOB.

Іншими словами, площу сегмента обчислюють за формулою $S_{\text{сегмента}}=S_{\text{сектора}}\pm S_{\triangle}$, причому знак «–» чи «+» вибирають залежно від того, площу меншого чи більшого сегмента потрібно знайти.



Розглянемо *приклад обчислення площі сегмента.*

Приклад

Нехай коло радіуса $R=10$ см із центром у точці O описано навколо квадрата $ABCD$ (рис. 16.5). Знайдемо площу S_1 меншого й площу S_2 більшого сегментів, які визначаються хордою AB і дугою з кінцями в точках A і B.

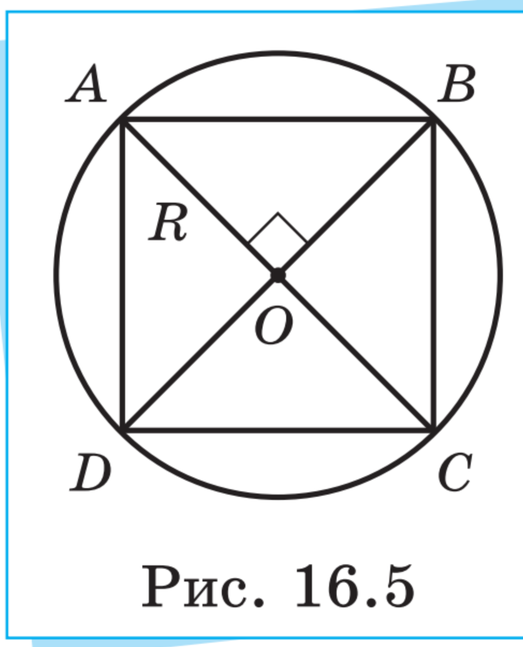


Рис. 16.5

Розв'язання. Центр кола, описаного навколо квадрата $ABCD$, є точкою перетину

його діагоналей AC і BD. Крім того, за властивістю квадрата, $AC \perp BD$. Тому центральний кут, що визначає менший сектор, обмежений радіусами OA і OB, дорівнює $90°$, а центральний кут, що визначає більший сектор, обмежений цими радіусами, дорівнює $270°$. Площу прямокутного трикутника AOB знаходимо за формулою $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$ (см^2). Отже, площа меншого сегмента $S_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{90°}{360°} - S_{\triangle AOB} = 25\pi - 50 = 25(\pi - 2)$ (см^2), а площа більшого сегмента $S_2 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{270°}{360°} + S_{\triangle AOB} = 75\pi + 50 = 25(3\pi + 2)$ (см^2).



Уважні учні й учениці могли помітити, що для обчислення площі сегмента ми використали одну з визначальних властивостей площі: *якщо многокутник розбивається на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників*. Але ані сектор, ані сегмент не є многокутниками! Насправді згадана властивість залишається правильною і для більш складних геометричних фігур, зокрема для частин круга. Строге доведення цього факту вивчають у вищій школі.

Перевірте себе!

1. Наведіть означення: а) кола; б) круга; в) радіуса кола (круга); г) хорди; д) діаметра; е) дуги кола; є) центрального кута; ж) сектора; з) сегмента.

2. За якою формулою можна обчислити: а) довжину кола; б) площу круга; в) довжину дуги; г) площу сектора; д) площу сегмента?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено коло із центром у точці O. Запишіть усі відрізки, які є: а) радіусами кола; б) діаметрами кола; в) хордами.

2. На рис. 2 зображено круг із центром у точці O. Запишіть усі відрізки, які є: а) радіусами круга; б) діаметрами круга; в) хордами.

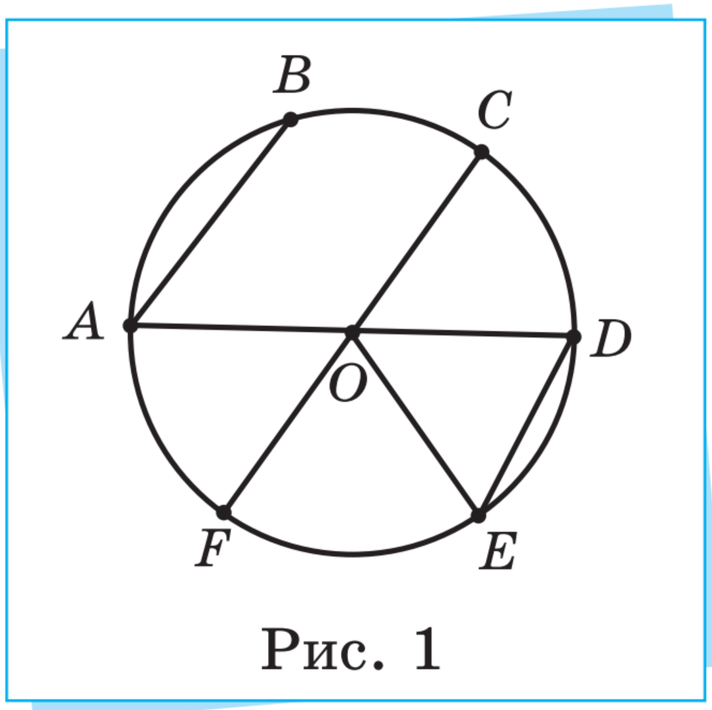


Рис. 1

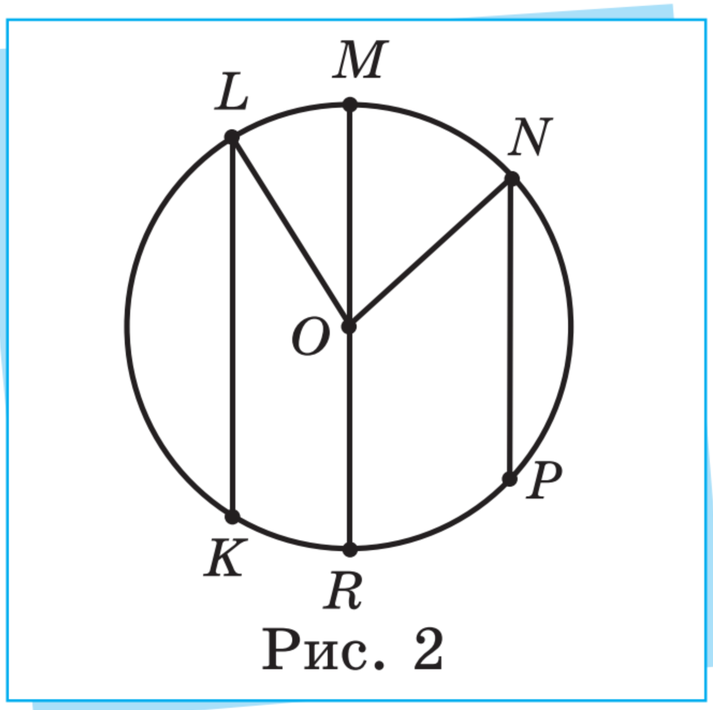


Рис. 2

3. На рис. 3 зображено круг, частину якого зафарбовано. Установіть, сектором чи сегментом є зафарбована частина круга.

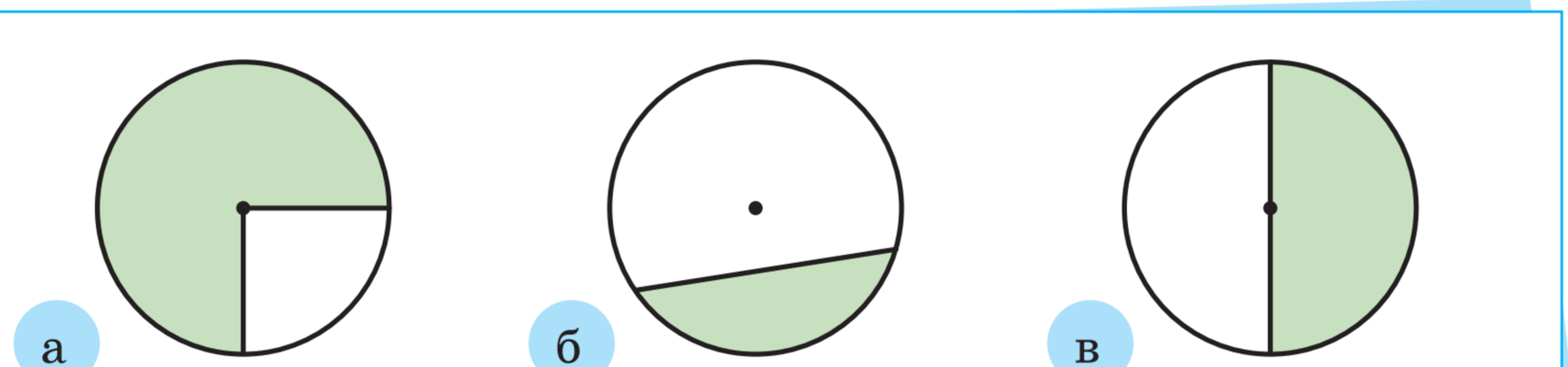


Рис. 3

4. На рис. 4 зображено круг, частину якого зафарбовано. Установіть, сектором чи сегментом є зафарбована частина круга.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

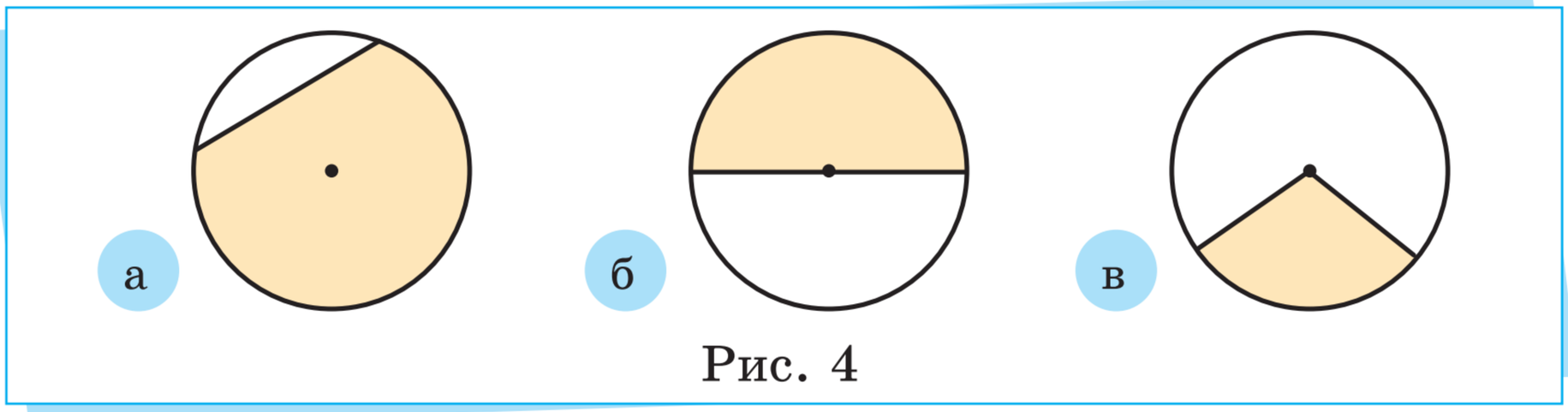


Рис. 4

5. Побудуйте коло та два радіуси цього кола, кут між якими дорівнює 90°. Зафарбуйте більший сектор, обмежений цими радіусами й дугою кола.

6. Побудуйте коло та два радіуси цього кола, кут між якими дорівнює 120°. Зафарбуйте менший сектор, обмежений цими радіусами й дугою кола.

7. Побудуйте коло й хорду цього кола, яка не є діаметром. Зафарбуйте менший сегмент, обмежений хордою та дугою кола.

8. Побудуйте коло й хорду цього кола, яка не є діаметром. Зафарбуйте більший сегмент, обмежений хордою та дугою кола.

9. За формулою $C = \pi d$ обчисліть довжину кола, якщо діаметр кола дорівнює: а) 5 см; б) 7 м; в) 12 км; г) 0,7 дм.

10. За формулою $C = 2\pi R$ обчисліть довжину кола, якщо радіус кола дорівнює: а) 3 см; б) 6 м; в) 0,2 км; г) 8 дм.

11. За формулою $S = \pi R^2$ обчисліть площу круга, якщо радіус круга дорівнює: а) 4 см; б) 5 м; в) 0,6 км; г) 7 дм.

12. За формулою $S = \pi R^2$ обчисліть площу круга, якщо радіус круга дорівнює: а) 9 см; б) 8 м; в) 0,4 км; г) 3 дм.

Середній рівень

13. Обчисліть довжину дуги l кола радіуса R, що відповідає центральному куту α, якщо: а) $R = 2$ м, $\alpha = 60°$; б) $R = 6$ м, $\alpha = 120°$; в) $R = 12$ см, $\alpha = 45°$.

14. Обчисліть довжину дуги l кола радіуса R, що відповідає центральному куту α, якщо: а) $R = 4$ см, $\alpha = 90°$; б) $R = 7$ см, $\alpha = 180°$; в) $R = 10$ дм, $\alpha = 30°$.

15. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює: а) 20 см; б) 0,4 дм; в) 2 м.

16. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює: а) 16 см; б) 0,2 дм; в) 4 м.

17. Із центра кола проведено радіуси OA і OB, кут між якими дорівнює $120°$ (рис. 5). Знайдіть площу сектора AOB, якщо $OA = 12$ см.

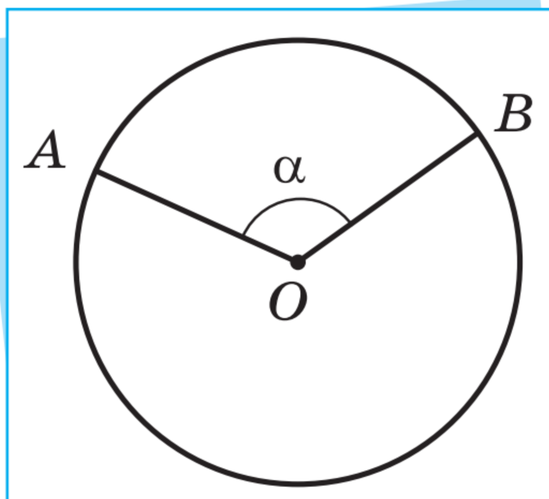


Рис. 5

18. Із центра кола проведено радіуси OA і OB, кут між якими дорівнює $60°$ (рис. 6). Знайдіть площу сектора AOB, якщо $OA = 18$ см.

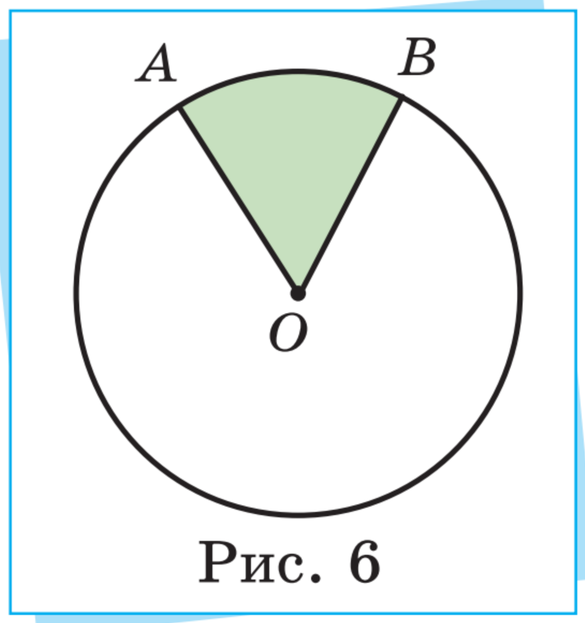


Рис. 6

19. Площа круга дорівнює 144π см^2. Обчисліть діаметр цього круга.

20. Площа круга дорівнює 225π см^2. Обчисліть діаметр цього круга.

21. Довжина кола дорівнює 8π см. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

22. Довжина кола дорівнює 18π см. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

23. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 9$. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

24. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 49$. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

Достатній рівень

25. Навколо прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 40 см і 42 см, описано коло. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

26. Навколо прямокутного трикутника з катетами 18 см і 24 см описано коло. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

27. Архітекторка хоче спроєктувати круглу альтанку так, щоб вона якнайкраще розташувалася на ділянці парку, яка має форму прямокутного трикутника з катетами 6 м і 8 м. Визначте найбільший можливий радіус альтанки, яку можна розмістити всередині цієї ділянки парку. Обчисліть, скільки квадратних метрів займатиме ця альтанка. Відповідь округліть до сотих; $\pi \approx 3{,}14$.

28. Інженер планує встановити круглу трубу для відкачування води всередині приміщення, підлога якого має форму прямокутного трикутника з катетами 3 м і 4 м. Знайдіть максимально можливий діаметр труби, яка може бути встановлена для відкачування води в цьому приміщенні, і площу поперечного перерізу цієї труби. Відповідь округліть до сотих; $\pi \approx 3{,}14$.

29. Визначте, у скільки разів збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшити: а) у 2 рази; б) у 3 рази; в) у k разів.

30. Визначте, у скільки разів збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшити: а) у 4 рази; б) у 5 разів; в) у m разів.

31. Запишіть формулу для обчислення площі заштрихованої фігури на рис. 7, якщо радіус R внутрішнього кола вдвічі менший, ніж радіус зовнішнього кола.

32. Запишіть формулу для обчислення площі заштрихованої фігури на рис. 8, якщо радіус OB зовнішнього кола втричі більший, ніж радіус OA внутрішнього кола, і $OA = r$.

33. На прямокутній ділянці, ширина якої 10 м, а довжина 20 м, облаштували круглий басейн радіуса 3 м (див. схему на рис. 9). Знайдіть площу ділянки, яка не зайнята басейном. Відповідь округліть до сотих; $\pi \approx 3{,}14$.

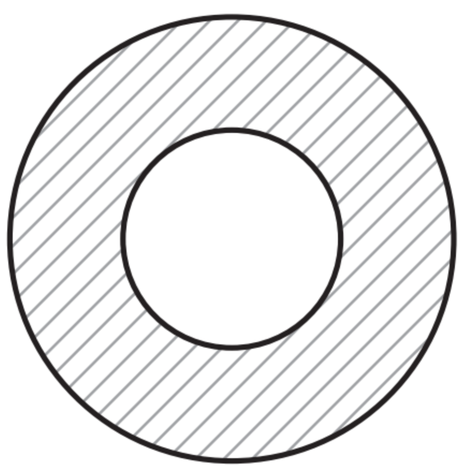


Рис. 7

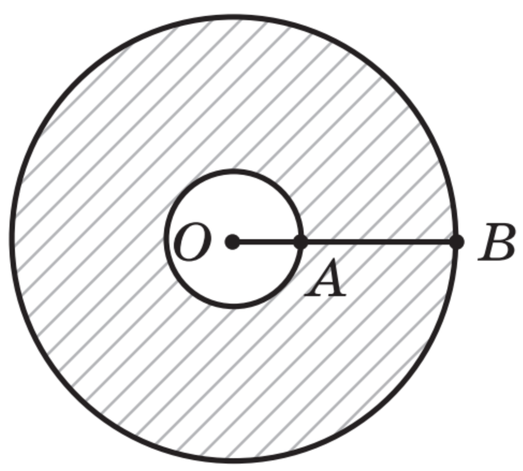


Рис. 8

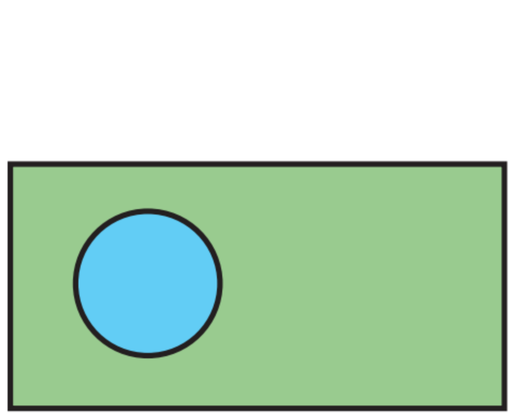


Рис. 9

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

34. На ділянці, яка має форму квадрата з довжиною сторони 6 м, облаштували круглу клумбу для квітів радіуса 1,5 м (див. схему на рис. 10). Знайдіть площу ділянки, яка не зайнята клумбою. Відповідь округліть до тисячних; $\pi \approx 3{,}14$.

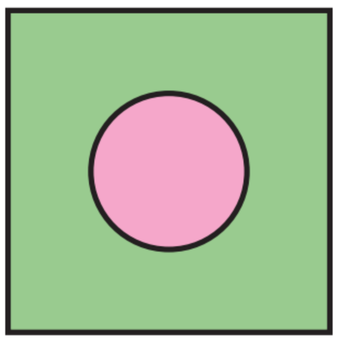


Рис. 10

35. Дві труби, які мають діаметри 6 см і 8 см відповідно, планують замінити однією трубою, площа поперечного перерізу якої має дорівнювати сумі площ поперечних перерізів вихідних труб. Яким має бути діаметр нової труби?

36. Дві труби, які мають діаметри 30 см і 16 см відповідно, планують замінити однією трубою, площа поперечного перерізу якої має дорівнювати сумі площ поперечних перерізів вихідних труб. Яким має бути діаметр нової труби?

37. Площа сектора круга, який визначається центральним кутом 72°, дорівнює 20π см^2. Знайдіть радіус цього круга.

38. Площа сектора круга, який визначається центральним кутом 45°, дорівнює 32π см^2. Знайдіть радіус цього круга.

Високий рівень

39. Навколо круглої клумби, діаметр якої дорівнює 6 м, зробили доріжку у вигляді кільця шириною 1 м. Скільки потрібно піску, щоб посипати цю доріжку, якщо на 1 м^2 потрібно 0,9 дм^3 піску? Відповідь округліть до цілих; $\pi \approx 3{,}14$.

40. Діаметри кіл стрілецької мішені дорівнюють 10 см, 20 см, 30 см і 40 см (рис. 11). Знайдіть площу кожного кільця мішені. Відповідь округліть до десятих; $\pi \approx 3{,}14$.

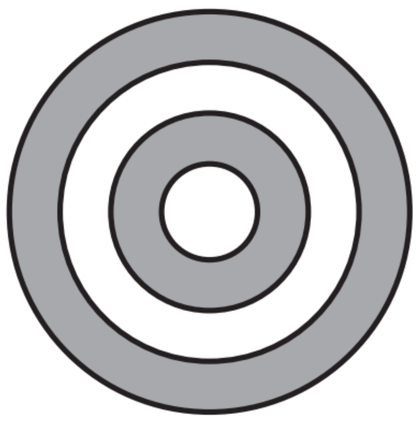


Рис. 11

41. Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутного трикутника з катетом 10 см і протилежним кутом 30°, і площу круга, вписаного в цей трикутник.

42. Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 12 см і 5 см, і площу круга, вписаного в цей трикутник.

43. Дано правильний трикутник зі стороною 4 см. Побудовані три сектори із центрами у вершинах трикутника й радіусами 2 см (рис. 12). Знайдіть площу частини трикутника, зафарбованої жовтим.

44. На рис. 13 зображено три круги однакового радіуса площею 24 см^2, центри яких розташовані у вершинах деякого трикутника. Знайдіть суму площ трьох зафарбованих секторів цих кругів.

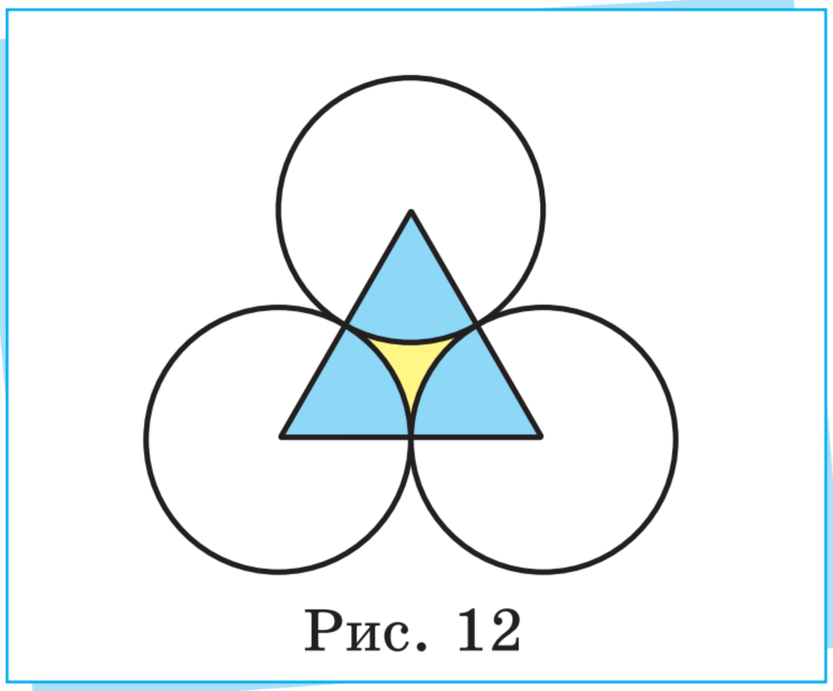


Рис. 12

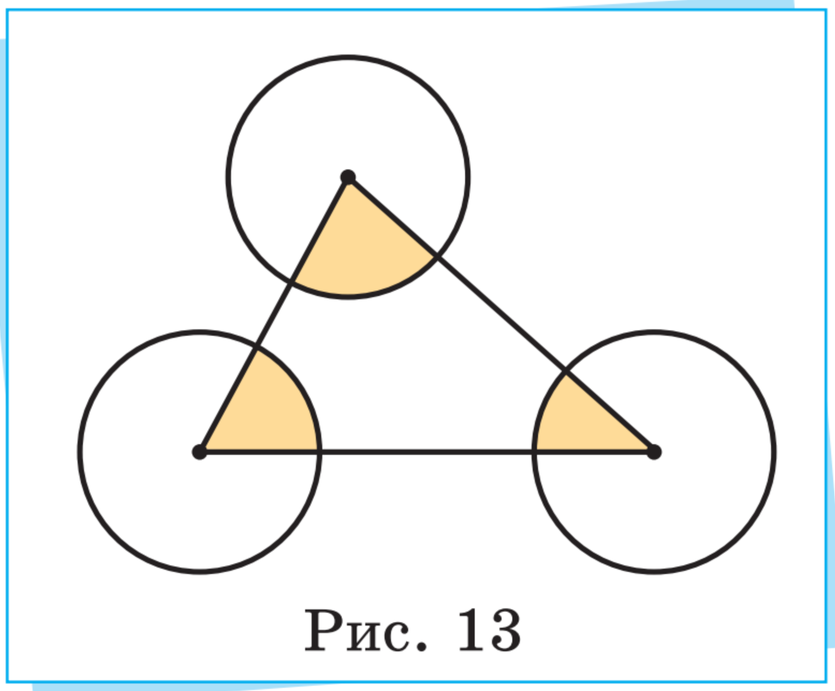


Рис. 13

45. Знайдіть площу круга, вписаного в сектор круга радіуса R із кутом 60° (рис. 14).

46. Знайдіть площу круга, вписаного в сегмент круга радіуса R із кутом 120° (рис. 15).

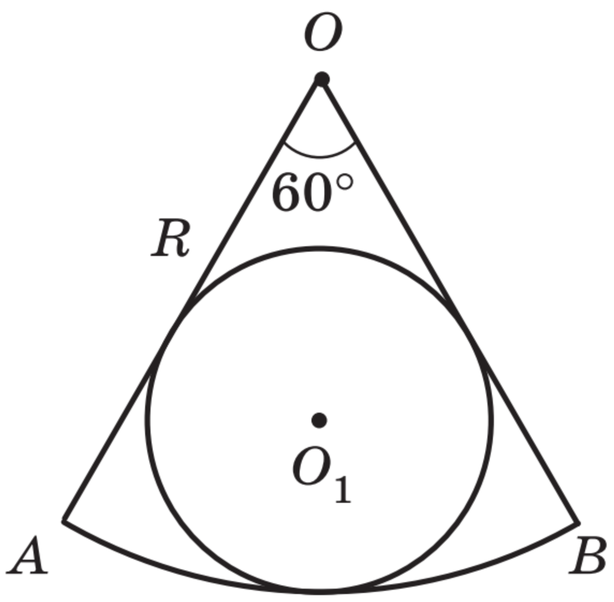


Рис. 14

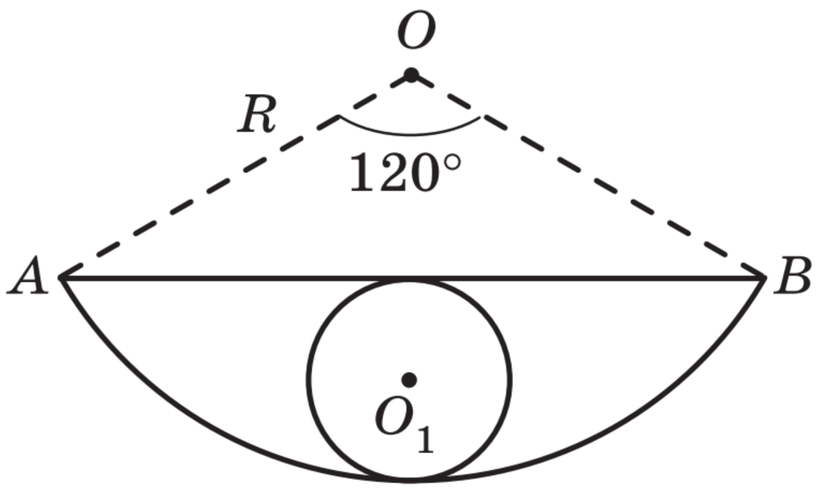


Рис. 15

47. Через кінець діаметра півкруга проведено дві хорди, які ділять півколо на три рівні частини (рис. 16). Знайдіть, яка частина площі півкруга розташована між цими хордами.

48. На двох сусідніх сторонах квадрата, як на діаметрах, побудували круги (рис. 17). Знайдіть площу частини квадрата, яка не прикрита цими кругами, якщо сторона квадрата дорівнює 1 дм.

49. Два кола радіуса 1 см проходять через центри один одного (рис. 18). Знайдіть площу перетину кругів, які обмежують ці кола.

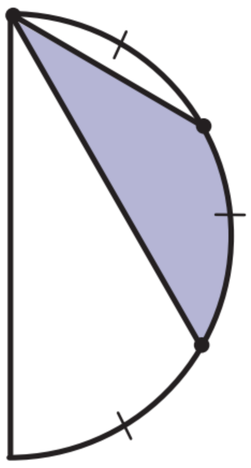


Рис. 16

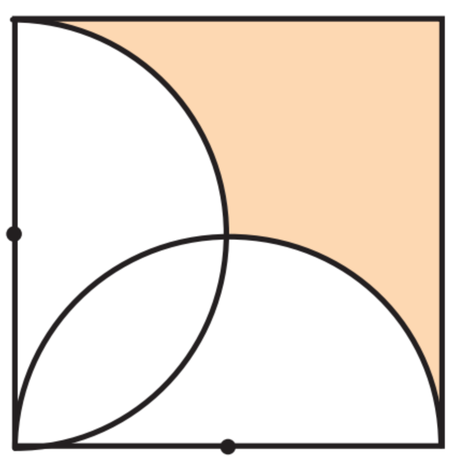


Рис. 17

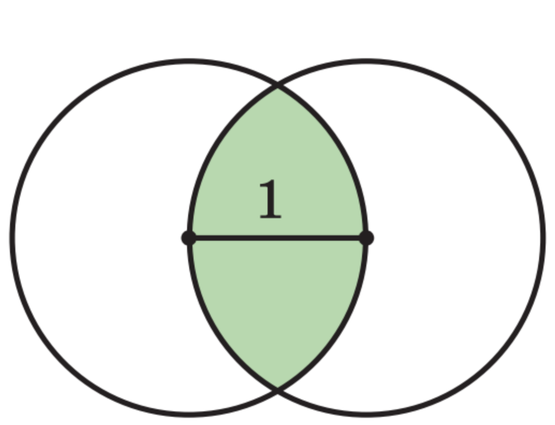


Рис. 18

50. Плоску фігуру, яка обмежена трьома півколами з кінцями в точках A, B, C, що лежать на одній прямій, називають *арбелос Архімеда* (зафарбована частина на рис. 19). Знайдіть площу арбелоса, якщо довжина відрізка CK, який перпендикулярний до діаметрів півкіл, дорівнює h.

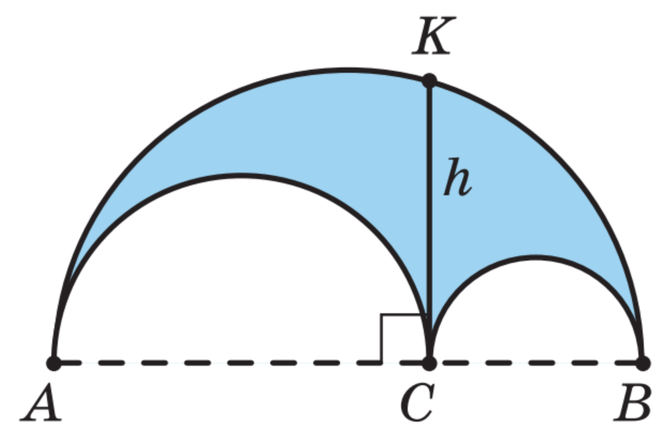


Рис. 19

Арбелосом у стародавніх Сіракузах називали шевський ніж аналогічної форми для розрізання шкір тварин. У точці C (див. рис. 19) його насаджували на дерев'яну ручку.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Цікавинки від дідуся Тараса

Із § 15 ви дізналися, що два многокутники називають *рівновеликими*, якщо вони мають рівні площі. Зрозуміло, що це означення можна поширити й на інші геометричні фігури, тобто вважати рівновеликими будь-які дві геометричні фігури, що мають рівні площі. Наприклад, рівновеликими можуть бути круг радіуса R і квадрат зі стороною a. У цьому випадку $a^2 = \pi R^2$, звідки $a = \sqrt{\pi} \cdot R$. У давнину задача побудови (за допомогою циркуля й лінійки) квадрата, площа якого дорівнює площі заданого круга, дістала назву *квадратура круга*.

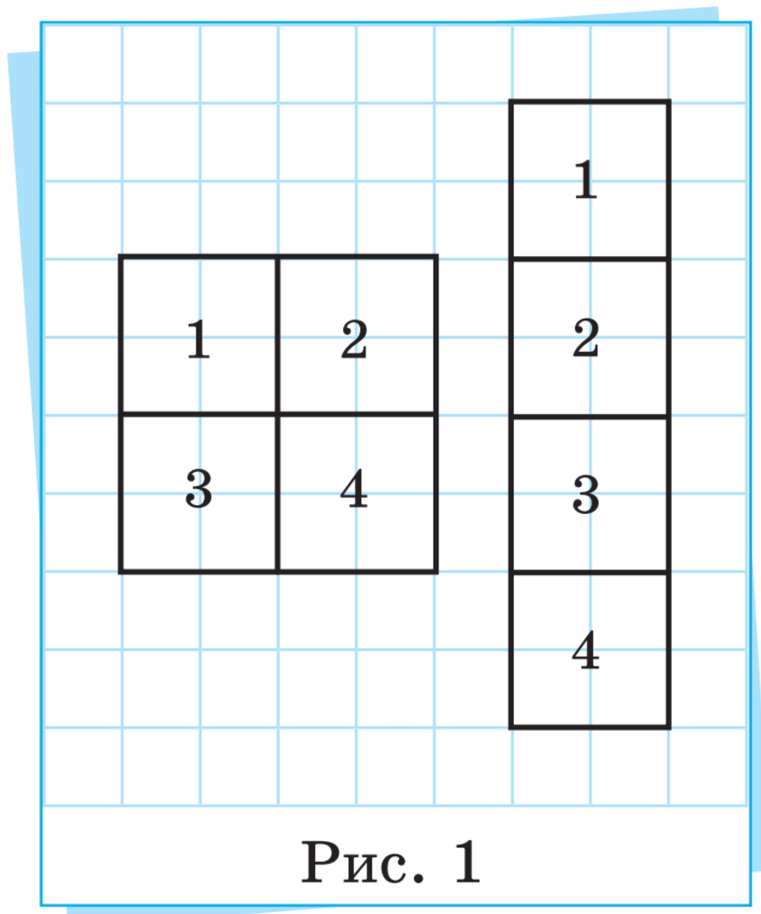


Рис. 1

Крім рівновеликих, також часто розглядають *рівноскладені* геометричні фігури, тобто такі, які можна утворити одну з однієї шляхом розрізання на менші частини. Наприклад, зображені на рис. 1 квадрат і прямокутник є рівноскладеними, бо квадрат можна розрізати на 4 менші квадрати (позначені цифрами), з яких потім скласти прямокутник.

Зрозуміло, що рівноскладеними можуть бути й складніші геометричні фігури. Зокрема, всі геометричні фігури, утворені за допомогою головоломки *танграм* (класичний її варіант наведено на рис. 2), є рівноскладеними.



Рис. 2

Між рівновеликими та рівноскладеними геометричними фігурами є зв'язок. Очевидно, що будь-які рівноскладені фігури є і рівновеликими. Обернене твердження правильне не для будь-яких геометричних фігур, але для плоских многокутників воно правильне. Тобто будь-які два рівновеликі многокутники завжди є і рівноскладеними.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Це твердження довели незалежного один від одного *Вільям Воллес*, *Фаркаш Бояї*, *Пол Гервін*.

Фаркаш Бояї (1775–1856) — угорський математик і поет, батько одного з творців неевклідової геометрії *Яноша Бояї* (1802–1860). Фаркаш Бояї відомий завдяки своїм дослідженням із геометрії, теорії функцій і математичного аналізу, а також як автор поетичних драм і перекладач на угорську класичної європейської поезії.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про квадратуру круга. Чи можна розв'язати цю задачу за допомогою циркуля та лінійки? Підготуйте невелике повідомлення.
2. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про *теорему Воллеса — Бояї — Гервіна* про рівноскладеність рівновеликих многокутників. Підготуйте невелике повідомлення.
3. Чи подобається вам складати танграм та інші подібні головоломки? Якщо так, то поділіться досвідом.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Задано функцію $f(x)=x^2-4x+2$. Знайдіть: а) $f\left(\sqrt{5}+3\right)$; б) усі значення аргументу x, за яких $f(x)=-1$ (якщо такі існують).
2. Задано коло ω радіуса $R=4$ із центром у точці $A(-2;3)$ і пряму l, що проходить через точки $B(0;-1)$ і $C(1;1)$. Визначте: а) канонічне рівняння кола ω; б) загальне рівняння прямої l; в) взаємне розташування кола ω і прямої l.
3. У червні середня вартість оренди житла на одному з курортів становила 25 євро за добу, у липні — 28 євро за добу, у серпні — 30 євро за добу. На скільки відсотків зростала в середньому ціна оренди житла на цьому курорті протягом зазначеного періоду? Відповідь округліть до сотих.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. Розв'яжіть прямокутний трикутник KMP (знайдіть усі його невідомі сторони й кути), у якого гіпотенуза $KM = 10$ см, а градусна міра кута M дорівнює $25°$. Довжини сторін округліть до десятих.

5. Знайдіть невідоме число, позначене знаком питання.

МАСЛО, 1745, → МОРОКА

РЕБРО, 2970285, → ?

КНОПКА, 31296, →

§ 17. Розв'язування трикутників (опційно)





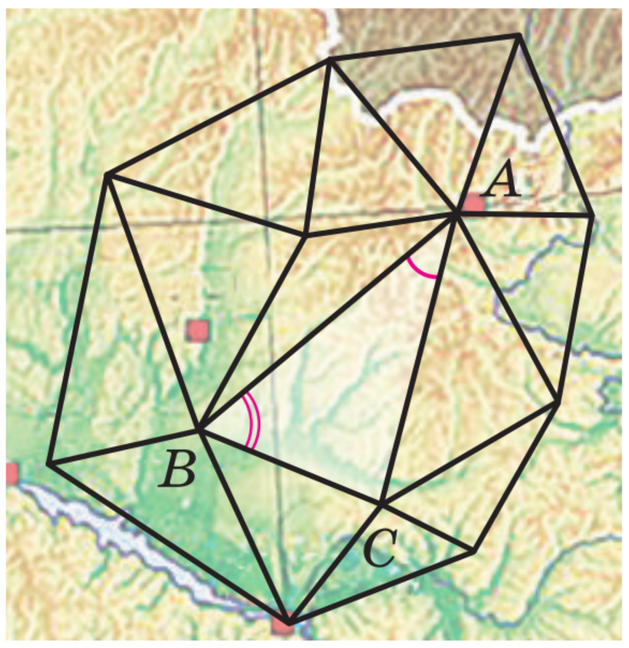
Слухай, Петрику, розглядаючи в підручниках і книжках з історії карти XVIII і XIX століть, я задумалась. За тих часів ще не було ні супутників, ні сучасної системи GPS, ні літаків, ні фотоапаратів. Але карти різних країн і земель вже існували й були досить точними. Ти не знаєш, як створювали такі карти?



Я читав, що для цього будували систему веж, за допомогою яких територія всієї країни розбивалася на великі трикутники (я навіть запам'ятав, що таке розбиття має назву *тріангуляція*). Важливим принципом побудови цих веж є те, що з кожної вежі має бути добре видно дві сусідні вежі. Піднявшись

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

на таку вежу, спеціально навчений фахівець (геодезист) вимірював кути між напрямками на сусідні вежі. Так він знаходив кути в кожному трикутнику з вершинами в цих вежах. Ось подивися на рисунок. Досить виміряти одну чи дві відстані між вежами, щоб знайти всі інші відстані між ними. Але як це робилося, я не зрозумів, бо там здебільшого утворювалися довільні трикутники, а не лише прямокутні, які ми вже вміємо розв'язувати з 8 класу.





Дуже цікаво. І мені чомусь здається, що, знаючи три сторони трикутника, усі його кути також можна знайти. Запитаймо про це у вчителів.



Дійсно, для знаходження сторін і кутів довільного трикутника є дві спеціальні теореми, які й використовували геодезисти для створення карт, — теорема синусів і теорема косинусів.

Для вивчення цих теорем згадаємо, як ми у 8 класі означали тригонометричні функції кутів від 0° до 180°. Для цього ми будували одиничне півколо із центром у початку координат і від додатного напрямку осі Ox відкладали кут α (рис. 17.1).

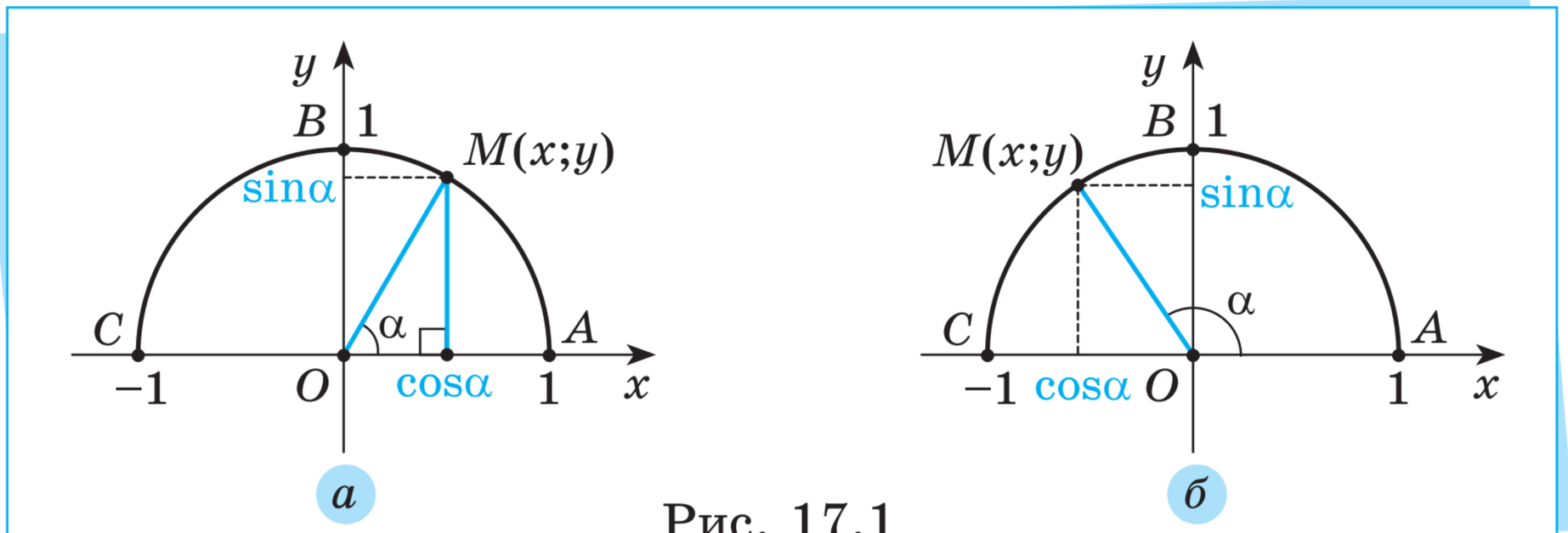


Рис. 17.1

Косинусом кута α (від 0° до 180°) називають абсцису, а синусом — ординату відповідної точки $M(x; y)$ одиничного півкола, тобто

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

$\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$. Тангенсом кута α (від $0°$ до $180°$) називають відношення $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а котангенсом кута α — відношення $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



За щойно наведеними означеннями одержуємо, що $\sin 0° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\sin 180° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = -1$. Зауважимо, що $\operatorname{tg} 90°$ не існує, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати 0. Саме тому також не існують $\operatorname{ctg} 0°$ і $\operatorname{ctg} 180°$. Значення тригонометричних функцій кутів (зокрема, тупих) можна знаходити за допомогою калькулятора. Наприклад, $\sin 150° = 0{,}5$; $\cos 150° = -0{,}5$; $\cos 130° \approx -0{,}643$ (з точністю до тисячних).



Згадаємо також, що рівняння кола із центром у початку координат і радіусом 1 має вигляд: $x^2 + y^2 = 1$. Тоді координати всіх точок одиничного півкола задовольняють цій рівності і, враховуючи означення синуса й косинуса кута від $0°$ до $180°$, одержуємо рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, яку називають основною тригонометричною тотожністю.

Також, ураховуючи відповідні означення, ми обґрунтували, що для всіх кутів від $0°$ до $180°$ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. (Згадайте відповідне обґрунтування, використовуючи рис. 17.2).

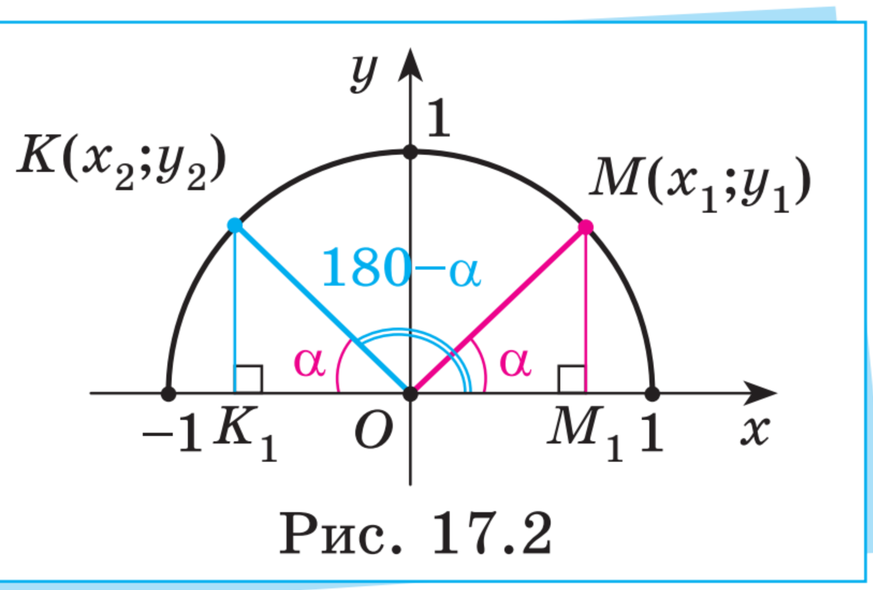


Рис. 17.2



Ураховуючи формулу $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, можна стверджувати, що площа довільного трикутника дорівнює половині добутку його сторін на синус кута між ними.

Перевірте самостійно, що для трикутників ABC, зображених на рис. 17.3, формула $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$ виконується незалежно від того, який кут C — гострий, тупий чи прямий.

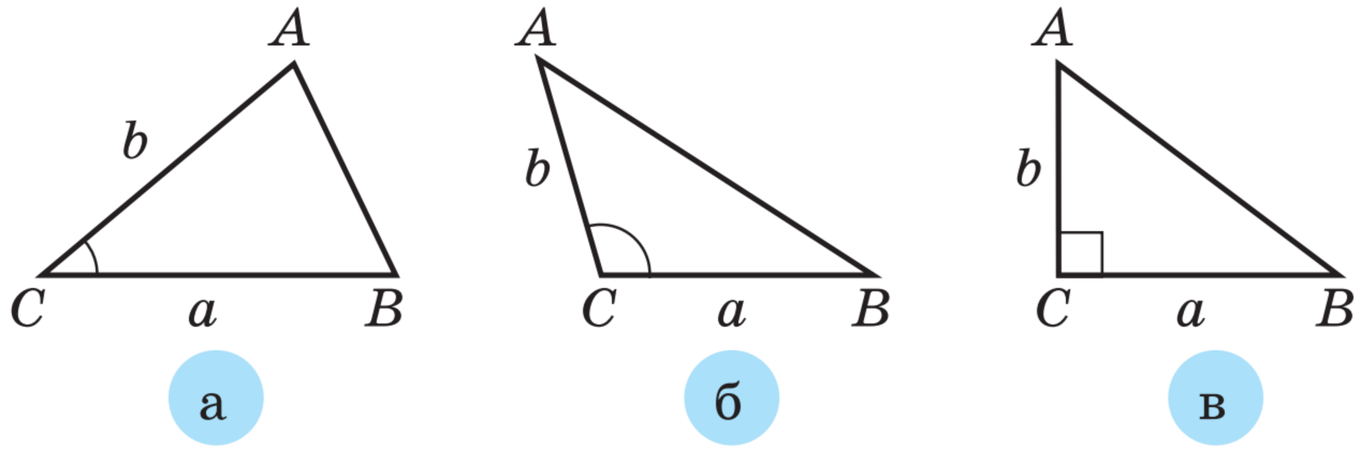


Рис. 17.3



Тепер ми можемо сформулювати *теореми, які використовують для розв'язування довільних трикутників.*

ТЕОРЕМА (косинусів).

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Нехай $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$ (рис. 17.4). Доведемо, наприклад, що $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$. Нехай $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = \angle C$. Тоді $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Після знаходження скалярного квадрата вектора $\vec{c}$ одержуємо: $\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$. Як було обґрунтовано у 8 класі, скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, а скалярний квадрат вектора — квадрату його довжини. Тому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$, що й потрібно було довести.

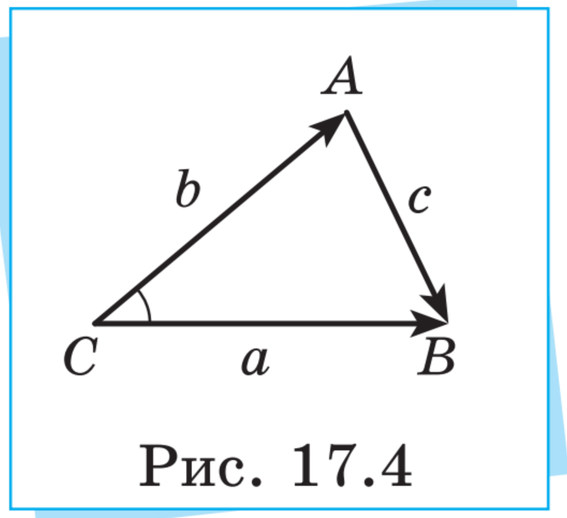


Рис. 17.4

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Зауважимо, що теорема косинусів дає змогу за даними довжинами трьох сторін трикутника знайти косинус відповідного кута. Наприклад, $\cos\angle C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Ураховуючи, що косинус гострого кута є додатним числом, косинус тупого кута є від'ємним числом, а косинус прямого кута дорівнює нулю, одержуємо таке твердження.

Наслідок *(із теореми косинусів про визначення виду кута трикутника)*.

Нехай у деякому трикутнику кути α, β, γ лежать навпроти сторін a, b, c відповідно, а також $a^2+b^2-c^2=\delta$. Тоді:

- якщо $\delta>0$ (тобто $a^2+b^2>c^2$), то кут γ є гострим;
- якщо $\delta<0$ (тобто $a^2+b^2<c^2$), то кут γ є тупим;
- якщо $\delta=0$ (тобто $a^2+b^2=c^2$), то кут γ є прямим.

Переконайтеся в правильності цього твердження самостійно.



Наведемо приклад застосування теореми косинусів до обґрунтування властивості паралелограма.

Задача. Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Розв'язання. Нехай у паралелограма $ABCD$: $AB=DC=a$, $AD=BC=b$ (рис. 17.5). Позначимо $\angle BAD=\alpha$, тоді $\angle ADC=180^\circ-\alpha$. Із трикутника ABD за теоремою косинусів $BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$. Із трикутника ADC за теоремою косинусів $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)$. Ураховуючи, що $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, одержуємо рівність $AC^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$. Таким чином, $BD^2+AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha+a^2+b^2+2ab\cos\alpha=$ $=2a^2+2b^2$, що й потрібно було довести.

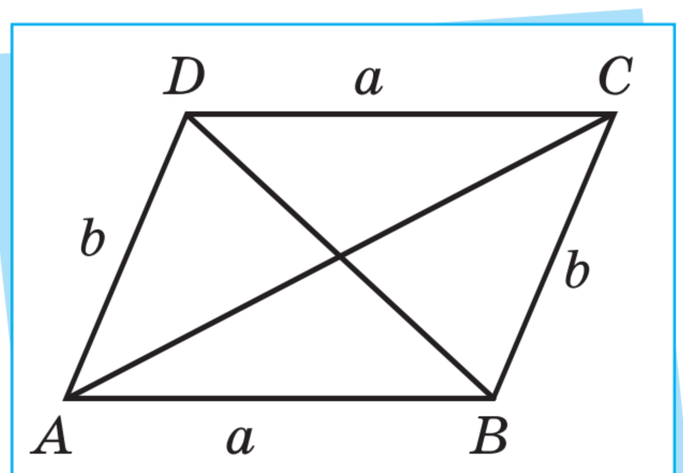


Рис. 17.5

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Використовуючи теорему косинусів і відому формулу площі трикутника, можна одержати вираження площі трикутника через довжини всіх його сторін — формулу Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — довжини сторін трикутника;

$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника.

Обґрунтування формули Герона:
rnk.com.ua/112998





Сформулюємо другу теорему, яку використовують для розв'язування довільних трикутників.



ТЕОРЕМА (синусів).

Довжини сторін трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.

Наприклад, якщо в трикутнику ABC: $CB=a$, $CA=b$, $AB=c$ (див. рис. 17.6), **то** $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{b}{\sin\angle B}=\dfrac{c}{\sin\angle C}$.

Доведення. Позначимо площу трикутника ABC через S. Тоді $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\angle C$, $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle A$, $S=\dfrac{1}{2}ac\sin\angle B$. Із перших двох рівностей одержуємо: $\dfrac{1}{2}ab\sin\angle C=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle A$, звідки $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{c}{\sin\angle C}$. Аналогічно з другої і третьої рівностей одержуємо $\dfrac{1}{2}bc\sin\angle A=\dfrac{1}{2}ac\sin\angle B$,

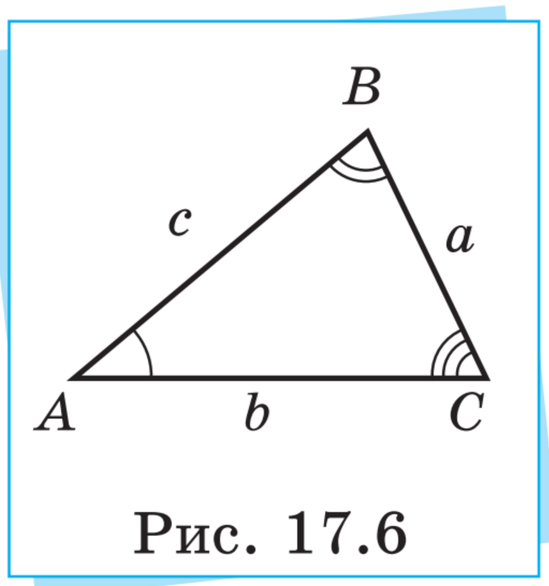


Рис. 17.6

звідки $\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{a}{\sin\angle A}$. Отже, $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$, що й потрібно було довести.



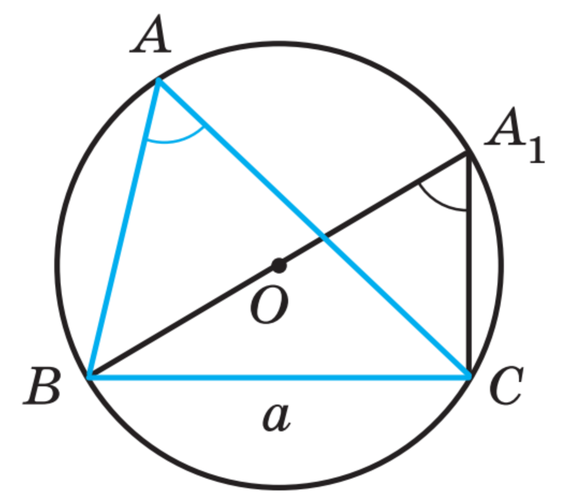
Корисним для розв'язування задач є також таке твердження.

ТЕОРЕМА (про відношення довжини сторони до синуса протилежного до неї кута).

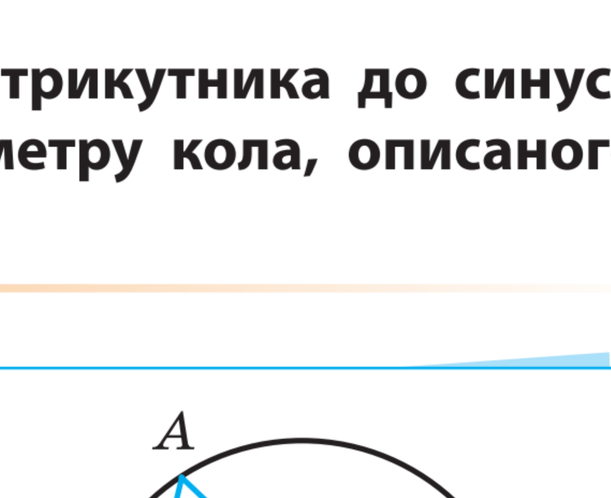
Відношення довжини будь-якої сторони трикутника до синуса протилежного до неї кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника.

Доведення. Нехай R — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC. Доведемо, що, наприклад, $\frac{BC}{\sin\angle A}=2R$.

Проведемо діаметр BA_1 (рис. 17.7) і розглянемо трикутник A_1BC (випадок, коли точки A_1 і C збігаються, *розгляньте самостійно*). Кут C цього трикутника прямий (як вписаний кут, що спирається на діаметр), тому $BC=BA_1\cdot\sin\angle A_1$. Але $\sin\angle A_1=\sin\angle A$. Дійсно, якщо точка A_1 лежить на дузі BAC (рис. 17.7, *а*), то $\angle A_1=\angle A$, а якщо точка A_1 лежить на дузі BDC (рис. 17.7, *б*), то $\angle A_1=180^\circ-\angle A$. Ураховуючи, що $\sin(180^\circ-\angle A)=\sin\angle A$, одержуємо, що в обох випадках $\sin\angle A_1=\sin\angle A$. Тоді $BC=BA_1\cdot\sin\angle A$, тобто $BC=2R\cdot\sin\angle A$, отже, $\frac{BC}{\sin\angle A}=2R$, що й потрібно було довести.



а



б

Рис. 17.7

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Ураховуючи останню теорему, можна зазначити, що в трикутнику ABC зі сторонами $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$ має місце рівність:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Також доведені рівності дають змогу записати формулу для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{a}{2\sin\angle A}$$



Якщо в останній формулі чисельник і знаменник дробу помножити на добуток bc і врахувати, що площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A$, то одержуємо ще одну формулу для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{a}{2\sin\angle A} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A} = \frac{abc}{4S}$$



Ми знаємо, що площу многокутника (зокрема, трикутника), описаного навколо кола радіуса r, можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2}P \cdot r$, де P — периметр многокутника. Із цієї формули одержуємо, що радіус r кола, вписаного в трикутник зі сторонами a, b, c, можна обчислити за формулою:

$$r = \frac{2S}{P}, \text{ або } r = \frac{2S}{a+b+c}$$



Нагадаємо, що розв'язати трикутник означає за певними відомими його елементами (сторонами або кутами) знайти всі інші

невідомі його елементи (сторони або кути). Теореми синусів і косинусів дають змогу розв'язати трикутник за трьома відомими його елементами, якщо хоча б один із цих елементів є стороною трикутника.

Справді, розглянемо довільний трикутник ABC. Нехай $CB=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$ (рис. 17.8). Можна виділити чотири основні типи задач на розв'язування трикутників:

1. за стороною і двома кутами;
2. за двома сторонами та кутом між ними;
3. за трьома сторонами;
4. за двома сторонами та кутом, протилежним одній із цих сторін.

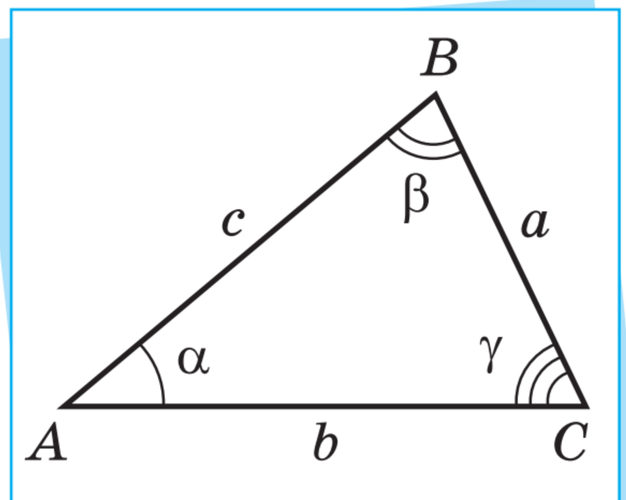


Рис. 17.8



Розглянемо *перший тип задач* на розв'язування довільного трикутника. Нехай у трикутнику відомі сторона a і два кути: $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. За теоремою про суму кутів трикутника можна знайти третій кут: $\angle A=180^\circ-(\beta+\gamma)$. Потім за теоремою синусів знаходимо невідомі сторони трикутника. Розглянемо приклад.

Приклад 1

Розв'яжемо трикутник, у якого $a=10$ см, $\angle B=30^\circ$, $\angle C=45^\circ$.

Розв'язання. Знайдемо невідомий кут: $\angle A=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$.

За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{b}{\sin\angle B}$, звідки $b=\dfrac{a\sin\angle B}{\sin\angle A}=\dfrac{10\cdot\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}\approx$ $\approx\dfrac{10\cdot 0{,}5}{0{,}966}\approx 5{,}18$ (см). Аналогічно за теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{c}{\sin\angle C}$, звідки $c=\dfrac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}=\dfrac{10\cdot\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}\approx\dfrac{10\cdot 0{,}707}{0{,}966}\approx 7{,}32$ (см). Трикутник розв'язано.



Розглянемо *четвертий тип задач* на розв'язування довільного трикутника. Нехай у трикутнику відомі сторони a і b та кут A, протилежний до сторони a (див. рис. 17.8). За теоремою синусів можна знайти, наприклад, синус кута B. (Для знаходження кута B слід урахувати, що $\sin\beta=\sin(180^\circ-\beta)$ і що в трикутнику навпроти більшої сторони лежить більший кут.) Потім знаходимо третій кут трикутника та за теоремою синусів (або косинусів) можемо знайти невідому сторону трикутника.
Розглянемо приклад.

Приклад 2

Розв'яжемо трикутник, у якого $a=12$ см, $b=16$ см і $\angle A=30^\circ$.

Розв'язання. За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{b}{\sin\angle B}$, звідки $\sin\angle B=\dfrac{b\sin\angle A}{a}=\dfrac{16\cdot\sin 30^\circ}{12}=\dfrac{16\cdot 0{,}5}{12}\approx 0{,}667$. Цьому значенню синуса відповідають два кути: $\angle B=\beta_1\approx 42^\circ$ і $\angle B=\beta_2\approx 138^\circ$.

Розглянемо спочатку випадок, коли кут $\angle B=\beta_1\approx 42^\circ$. Тоді третій кут трикутника дорівнює: $\angle C=\gamma_1=180^\circ-(30^\circ+42^\circ)=108^\circ$. За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{c}{\sin\angle C}$, тоді $c_1=\dfrac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}=\dfrac{12\cdot\sin 108^\circ}{\sin 30^\circ}\approx\dfrac{12\cdot 0{,}951}{0{,}5}\approx$ $\approx 22{,}82$ (см).

Аналогічно, якщо кут $\angle B=\beta_2\approx 138^\circ$, то $\angle C=\gamma_2=180^\circ-(30^\circ+138^\circ)=$ $=12^\circ$ і $c_1=\dfrac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}=\dfrac{12\cdot\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ}\approx\dfrac{12\cdot 0{,}208}{0{,}5}\approx 4{,}99$ (см). Трикутник розв'язано.



Розв'язання трикутників
у задачах *другого і третього типів*:
rnk.com.ua/112999



Перевірте себе!

1. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса й котангенса кута α градусною мірою від $0°$ до $180°$.
2. Сформулюйте теорему косинусів і наслідки з неї.
3. Сформулюйте теорему синусів і теорему про відношення довжини сторони трикутника до синуса протилежного їй кута.
4. За якими формулами можна знайти: а) радіус кола, описаного навколо трикутника; б) радіус кола, вписаного в даний трикутник?
5. Сформулюйте зміст основних типів задач на розв’язування довільних трикутників.
6. Запропонуйте план розв’язування для кожного з основних типів задач на розв’язування трикутників.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено трикутник і позначено числами довжини сторін a і b та градусну міру кута C між цими сторонами. За рис. 1 знайдіть значення a, b і градусної міри кута C, а також запишіть рівняння зі змінною x відповідно до формули $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$.

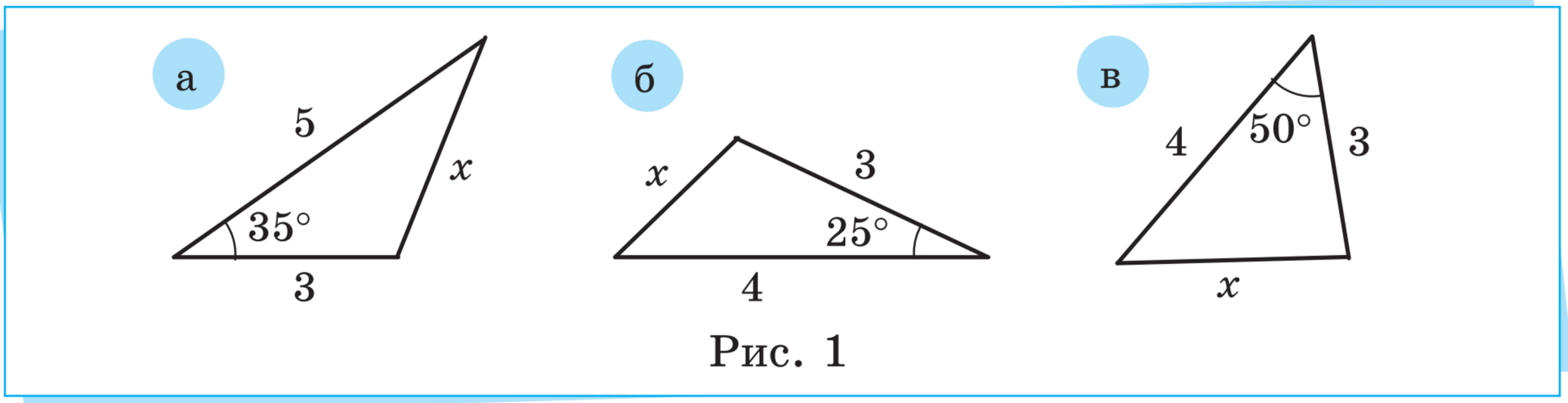
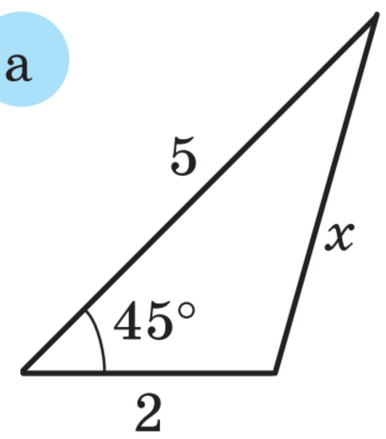


Рис. 1

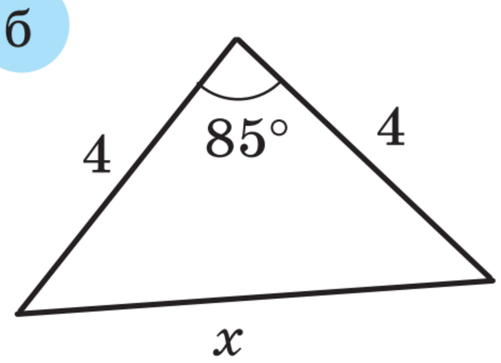
Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. На рис. 2 зображено трикутник зі сторонами a, b, c, на якому позначено числами довжини сторін a і b та градусну міру кута C між цими сторонами. За рис. 2 знайдіть значення a, b і градусної міри кута C й запишіть рівняння зі змінною x відповідно до формули $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$.

а



б



в

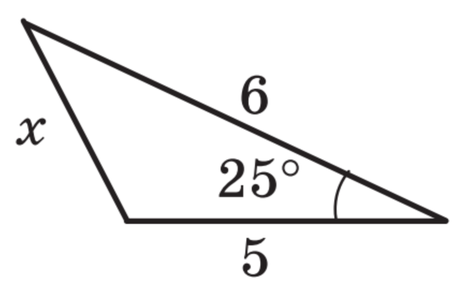
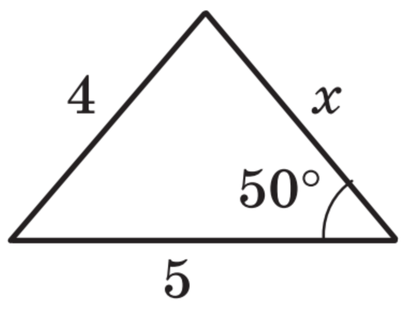


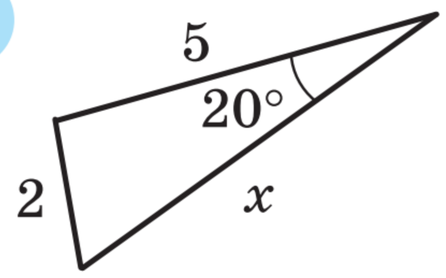
Рис. 2

3. На рис. 3 зображено трикутник зі сторонами a, b, c, на якому позначено числами довжини сторін a і c та градусну міру кута C між сторонами a і b. За рис. 3 знайдіть значення a, c й градусної міри кута C, а також запишіть рівняння зі змінною x відповідно до формули $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$.

а



б



в

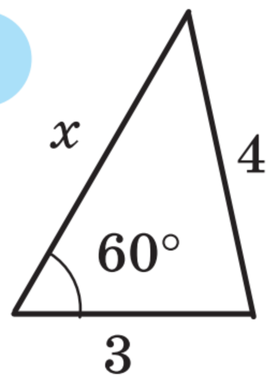
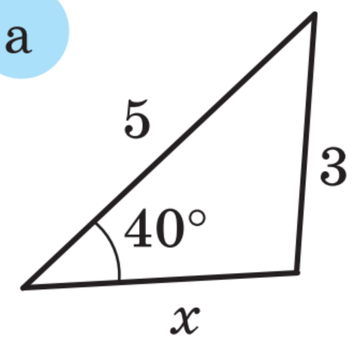


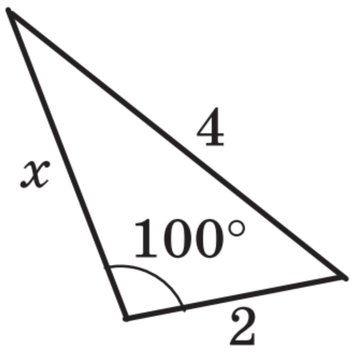
Рис. 3

4. На рис. 4 зображено трикутник зі сторонами a, b, c, на якому позначено числами довжини сторін a і c та градусну міру кута C між сторонами a і b. За рис. 4 знайдіть значення a, c й градусної міри кута C, а також запишіть рівняння зі змінною x відповідно до формули $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$.

а



б



в

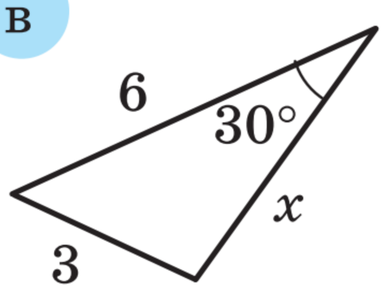


Рис. 4

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

5. Відомо, що довжини двох сторін трикутника дорівнюють 7 см і 3 см, а косинус кута між ними — 0,4. За формулою $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ знайдіть квадрат довжини невідомої сторони.

6. Відомо, що довжини двох сторін трикутника дорівнюють 5 см і 4 см, а косинус кута між ними — 0,7. За формулою $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ знайдіть квадрат невідомої сторони.

7. На рис. 5 зображено трикутник ABC, на якому позначено числом довжину сторони b й градусні міри кутів A та B (сторона b лежить навпроти кута B). За рис. 5 знайдіть довжину сторони b й градусні міри кутів A та B, а також запишіть рівняння зі змінною x відповідно до формули $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$.

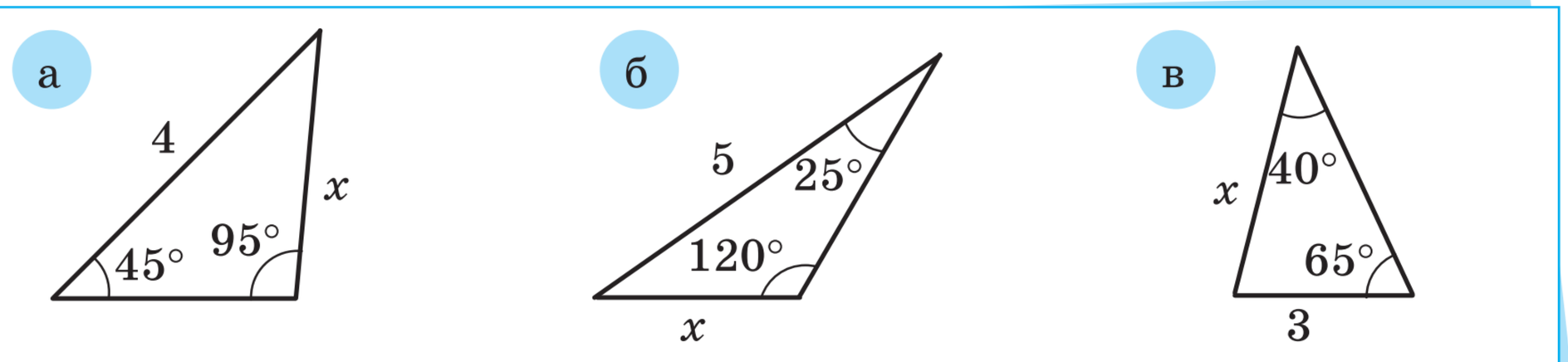


Рис. 5

8. На рис. 6 зображено трикутник ABC, на якому позначено числом довжину сторони b й градусні міри кутів A та B (сторона b лежить навпроти кута B). За рис. 6 знайдіть довжину сторони b й градусні міри кутів A та B, а також запишіть рівняння зі змінною x відповідно до формули $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$.

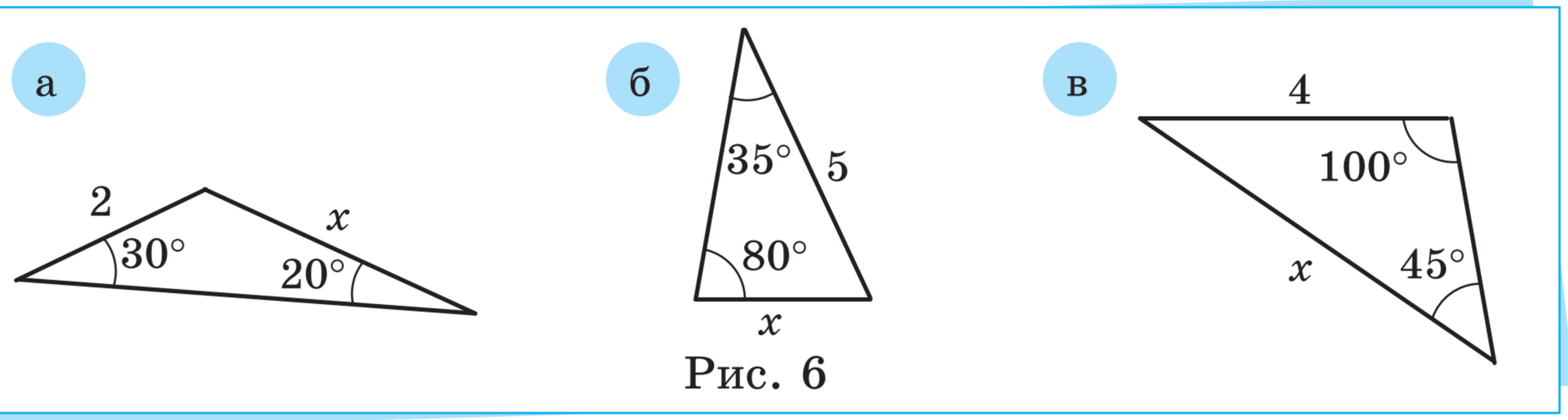


Рис. 6

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

9. Відомо, що в трикутника ABC $BC = a = 6$ см, а $AC = b = 8$ см. Користуючись теоремою синусів $\left(\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}\right)$, установіть, чи можуть значення $\sin\angle A$ і $\sin\angle B$ відповідно дорівнювати: а) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{3}$; в) 0,4 і 0,3.

10. Відомо, що в трикутника ABC $BC = a = 5$ см, а $AB = c = 4$ см. Користуючись теоремою синусів $\left(\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}\right)$, установіть, чи можуть значення $\sin\angle A$ і $\sin\angle C$ відповідно дорівнювати: а) $\frac{1}{5}$ і $\frac{1}{4}$, б) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{10}$; в) 0,4 та 0,5.

11. Довжина сторони трикутника дорівнює 12 см, а синус протилежного до неї кута — 0,4. За формулою $R = \frac{a}{2\sin\angle A}$ знайдіть радіус описаного навколо цього трикутника кола.

12. Довжина сторони трикутника дорівнює 18 см, а синус протилежного до неї кута — 0,3. За формулою $R = \frac{a}{2\sin\angle A}$ знайдіть радіус описаного навколо цього трикутника кола.

Середній рівень

13. Відомо, що в трикутника ABC: а) $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $\cos\angle A = 0{,}3$; б) $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $\cos\angle A = -0{,}2$. Зобразіть схематично трикутник ABC. Використовуючи теорему косинусів, знайдіть значення BC^2.

14. Відомо, що в трикутника ABC: а) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos\angle B = 0{,}4$; б) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos\angle B = -0{,}1$. Зобразіть схематично трикутник ABC. Використовуючи теорему косинусів, знайдіть значення AC^2.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

15. Задано трикутник зі сторонами a, b, c, причому c — найбільша його сторона. Знайдіть значення виразу $\delta = a^2 + b^2 - c^2$ і визначте вид кута, що лежить навпроти найбільшої сторони (гострий, прямий, тупий), якщо:

а) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см;

б) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см;

в) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см.

16. Задано трикутник зі сторонами k, l, m, причому m — найбільша його сторона. Знайдіть значення виразу $\delta = k^2 + l^2 - m^2$ і визначте вид кута, що лежить навпроти найбільшої сторони (гострий, прямий, тупий), якщо:

а) $m = 4$ см, $l = 6$ см, $m = 8$ см;

б) $k = 8$ см, $l = 10$ см, $m = 12$ см;

в) $k = 6$ см, $l = 8$ см, $m = 10$ см.

17. Задано трикутник зі сторонами a, b, c і кутами α, β, γ (рис. 7). Використовуючи формулу $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, знайдіть значення $\cos\gamma$, якщо $a = 15$ см, $b = 20$ см, $c = 24$ см (за потреби відповідь округліть до сотих). За допомогою калькулятора знайдіть градусну міру кута γ з точністю до градусів.

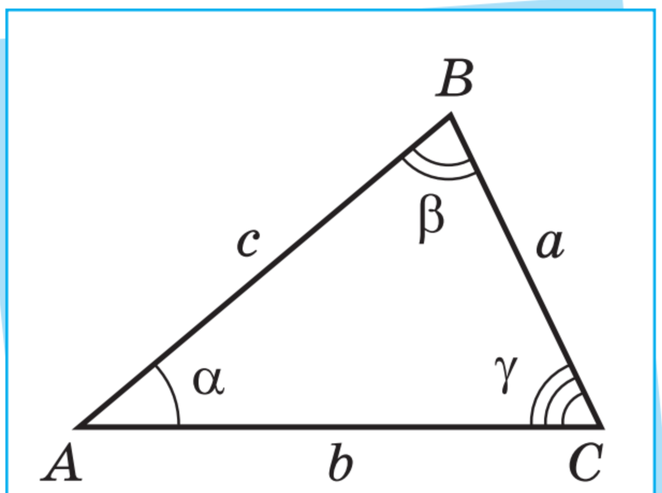


Рис. 7

18. Задано трикутник зі сторонами a, b, c і кутами α, β, γ (див. рис. 7). Використовуючи формулу $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, знайдіть значення $\cos\beta$, якщо $a = 20$ см, $b = 35$ см, $c = 25$ см (за потреби відповідь округліть до сотих). За допомогою калькулятора знайдіть градусну міру кута β з точністю до градусів.

19. Клумба в міському парку має форму трикутника зі сторонами 6 м, 7 м, 9 м. Знайдіть площу цієї клумби. Відповідь округліть до цілих.

20. Дослідна ділянка екологічного гуртка має форму трикутника зі сторонами 5 м, 6 м, 7 м. Знайдіть площу цієї ділянки. Відповідь округліть до десятих.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

21. Відомо, що в трикутника ABC $AB = 10$ см, $BC = 12$ см. Зобразіть схематично трикутник ABC. Знайдіть: а) $\sin\angle C$, якщо $\sin\angle A = 0{,}2$; б) $\sin\angle A$, якщо $\sin\angle C = 0{,}7$.

22. Відомо, що в трикутника ABC $AC = 8$ см, $BC = 10$ см. Зобразіть схематично трикутник ABC. Знайдіть: а) $\sin\angle B$, якщо $\sin\angle A = 0{,}3$; б) $\sin\angle A$, якщо $\sin\angle B = 0{,}1$.

23. Відомо, що в трикутника ABC $\sin\angle A = 0{,}4$, $\sin\angle B = 0{,}6$. Зобразіть схематично трикутник ABC. Знайдіть: а) AC, якщо $BC = 6$ см; б) BC, якщо $AC = 15$ см.

24. Відомо, що в трикутника ABC $\sin\angle B = 0{,}3$, $\sin\angle C = 0{,}2$. Зобразіть схематично трикутник ABC. Знайдіть: а) AC, якщо $AB = 4$ см; б) AB, якщо $AC = 18$ см.

25. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо: а) $AB = 8$ см, $\sin\angle C = 0{,}8$; б) $BC = 10$ см, $\sin\angle A = \frac{2}{3}$.

26. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо: а) $AB = 12$ см, $\sin\angle C = 0{,}6$; б) $AC = 9$ см, $\sin\angle B = \frac{3}{7}$.

Достатній рівень

27. Довжини сторін трикутника дорівнюють 5 см, 6 см, 7 см. Знайдіть косинуси кутів цього трикутника. Цей трикутник є гострокутним, тупокутним чи прямокутним?

28. Довжини сторін трикутника дорівнюють 10 см, 12 см, 17 см. Знайдіть косинуси кутів цього трикутника. Цей трикутник є гострокутним, тупокутним чи прямокутним?

29. У паралелограма $ABCD$ $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, а $\angle BAD = 60°$. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма $ABCD$.

30. У паралелограма $ABCD$ $AB = 12$ см, $BC = 24$ см, а $\angle ABC = 120°$. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма $ABCD$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

31. У трикутника ABC $\angle ABC = 30°$, $\angle BCA = 45°$, $BC = 5$ см. Знайдіть довжини сторін AB і AC та градусну міру кута BAC цього трикутника. Під час розрахунків застосовуйте округлення до сотих.

32. У трикутника EFH $\angle EFH = 75°$, $\angle FHE = 60°$, $EH = 20$ см. Знайдіть довжини сторін EF і FH та градусну міру кута FEH цього трикутника. Під час розрахунків застосовуйте округлення до сотих.

33. Довжина сторони AC трикутника ABC дорівнює 12 см, а $\angle ABC = 150°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника, і площу круга, обмеженого цим колом.

34. Довжина сторони CE трикутника CDE дорівнює 16 см, а $\angle CDE = 135°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника, і площу круга, обмеженого цим колом.

35. Сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші сторони утворюють кут 60° і відносяться як 8 : 3. Знайдіть периметр цього трикутника.

36. Сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші сторони утворюють кут 120° і відносяться як 5 : 3. Знайдіть периметр цього трикутника.

37. Обчисліть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 32 см, 12 см, 28 см.

38. Обчисліть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 28 см, 12 см, 20 см.

Високий рівень

39. Доведіть, що площа довільного паралелограма дорівнює добутку двох сусідніх сторін на синус кута між ними.

40. Доведіть, що площа довільного опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

41. Запропонуйте план для обчислення висоти вежі $CD = h$, якщо вдалося виміряти відстань $AB = a$ і кути α і β (рис. 8). Знайдіть висоту вежі в метрах, якщо $a = 4$ м, $\alpha = 68°$, $\beta = 48°$. Відповідь округліть до цілих.

42. Запропонуйте план для знаходження відстані AC до недоступної точки C, якщо вдалося виміряти відстань $AB = c$ і кути α і β (рис. 9). Знайдіть відстань AC в метрах, якщо $c = 30$ м, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$. Відповідь округліть до цілих.

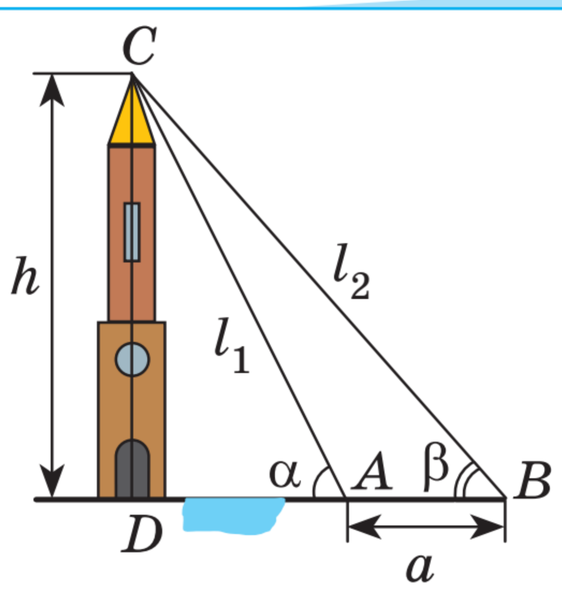


Рис. 8

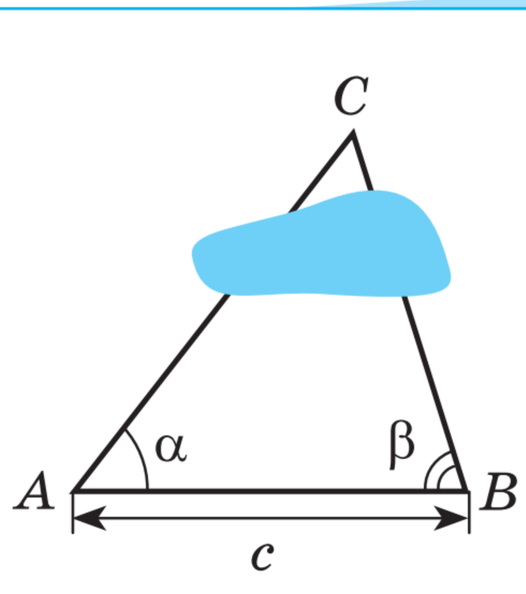


Рис. 9

43. Доведіть, що в трикутнику зі сторонами a, b, c довжину медіани, проведеної до сторони c, можна обчислити за формулою $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

44. Доведіть, що відношення суми квадратів усіх медіан трикутника до суми квадратів усіх його сторін дорівнює $\frac{3}{4}$.

45. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 13 см, 12 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до більшої сторони.

46. Сторони трикутника дорівнюють 11 см і 23 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 10 см. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.

47. Знайдіть площу трапеції з основами 5 см і 14 см та бічними сторонами 10 см і 17 см.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

48. Знайдіть площу трапеції з основами 3 см і 12 см та діагоналями 13 см і 14 см.

49. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами a і b $(a>b)$ та гострим кутом $45°$.

50. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами a і $3a$ та бічною стороною $2a$.

51. Знайдіть площу паралелограма, якщо його суміжні сторони дорівнюють a і b $(a>b)$, а гострий кут між його діагоналями — φ.

52. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють d_1 і d_2 $(d_1>d_2)$, а гострий кут паралелограма — α.



Цікавинки від дідуся Тараса

Як відомо, *будь-який трикутник можна вписати в коло*. Також, як було доведено в § 17, *площу будь-якого трикутника* можна знайти *за формулою Герона*: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c — довжини сторін трикутника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — його півпериметр.

Виявляється, *що площу будь-якого чотирикутника, вписаного в коло*, можна знайти *за формулою Брахмагупти*:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де a, b, c, d — довжини сторін чотирикутника;

$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ — півпериметр чотирикутника.

Формула Герона є, так би мовити, «виродженим» випадком формули Брахмагупти: якщо довжина однієї зі сторін чотирикутника дорівнює нулю (наприклад, $d=0$), то чотирикутник стає трикутником,

Герон Александрійський (бл. 10–75 рр.) — давньогрецький математик і винахідник. Крім досліджень із математики, відомий також як винахідник багатьох приладів і автоматів. Саме Герон уперше висунув ідею парової машини.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

а формула Брахмагупти перетворюється на формулу Герона. Формулу Брахмагупти, своєю чергою, також можна *узагальнити для довільного чотирикутника* (не обов'язково вписаного в коло):

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cdot\cos^2\varphi},$$

де S — площа чотирикутника; a, b, c, d — довжини його сторін;

$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ — півпериметр чотирикутника;

φ — півсума двох протилежних кутів чотирикутника.

Брахмагупта (598–668 рр.) — давньоіндійський математик і астроном. Уперше дав означення нуля й вивчив його властивості, довів кілька важливих алгебраїчних тотожностей і геометричних теорем. Його праці також справили значний вплив на розвиток астрономії, поклавши початок застосуванню алгебраїчних методів для астрономічних обчислень.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя або вчительки математики доведіть формулу Брахмагупти та покажіть, як її можна застосовувати для обчислення площ чотирикутників, які можна вписати в коло. Дізнайтеся більше про узагальнення формули Брахмагупти та їх застосування.
2. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про біографії Герона Александрійського й Брахмагупти та їхній внесок у математику та інші науки. Підготуйте невеликі повідомлення.
3. Як ви вважаєте, чи зручно використовувати формули Герона й Брахмагупти для розв'язування задач на знаходження площ многокутників? Поясніть свою відповідь.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть: $1{,}6 : 1\frac{2}{15} - 2{,}1 \cdot \frac{5}{42}$.

2. Задано функції $f(x) = 2x^2 - 2x + 7$ і $g(x) = -x + 10$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$ графічним способом і аналітично. Переконайтеся в ідентичності відповідей.

3. За допомогою діаграм Венна покажіть співвідношення між обсягами таких понять: «транспортний засіб», «рейковий транспортний засіб», «автобус», «тролейбус», «трамвай», «поїзд».

4. Виготовіть із паперу модель правильної чотирикутної піраміди, ребра основи якої дорівнюють 6 см, а бічні ребра мають довжину 5 см. Спробуйте за цими даними знайти площу всієї поверхні піраміди.

5. Задано послідовність натуральних чисел: 2, 5, 11, 23, 47, 95, ... Знайдіть закономірність і за нею визначте наступні два числа цієї послідовності.

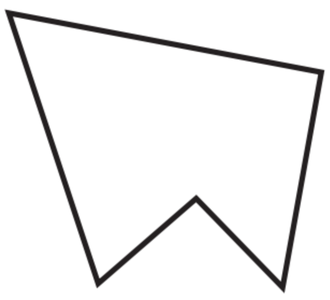
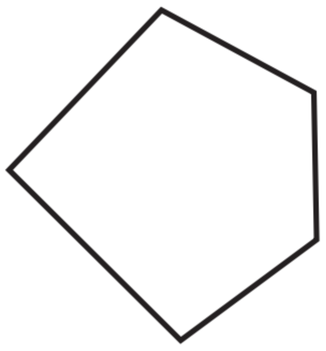
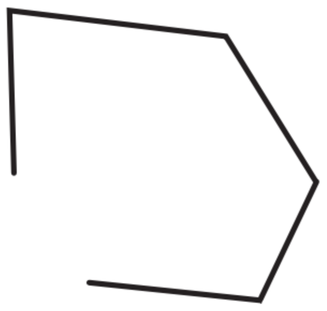
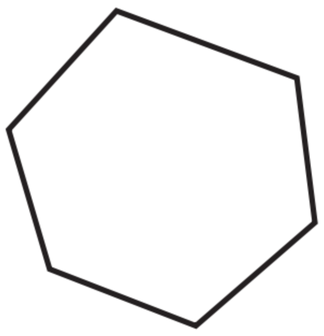
ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 5



rnk.com.ua/114534

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть рисунок, на якому зображено опуклий п'ятикутник.

А	Б	В	Г
			

2. На рис. 1 зображено прямокутний трикутник ABC із катетами a, b і гіпотенузою c. Укажіть формулу, за якою можна обчислити площу S цього трикутника.

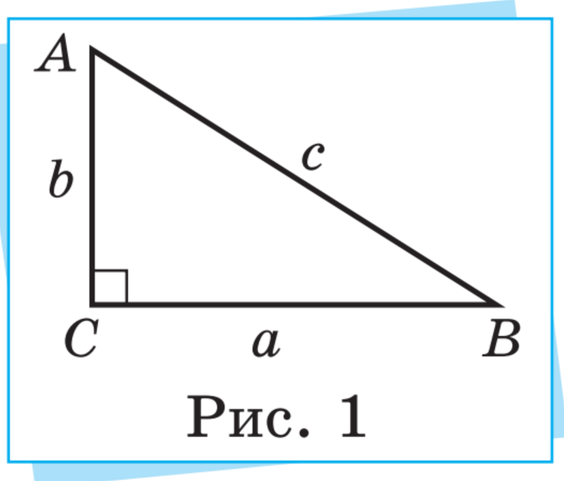


Рис. 1

А	Б	В	Г
$S=\frac{1}{2}ac$	$S=\frac{1}{2}bc$	$S=\frac{1}{2}ab$	$S=\frac{1}{2}abc$

3. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г
100π см^2	20π см^2	10π см^2	25π см^2

4. Внутрішній кут правильного n-кутника дорівнює $150°$. Тоді $n=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
8	9	10	12	15

5. Довжини сторін квадрата й правильного шестикутника рівні; r_4 і r_6 — радіуси кіл, *вписаних* у цей квадрат і в цей шестикутник відповідно. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$r_4=r_6$	$r_4=2r_6$	$2r_4=r_6$	$r_4=r_6\cdot\sqrt{3}$	$r_4\cdot\sqrt{3}=r_6$

6. Круг, що має площу a, обмежений колом, довжина якого дорівнює b. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$a=\frac{b^2}{4\pi}$	$a=\frac{b^2}{4\pi^2}$	$a=\frac{4b^2}{\pi}$	$a=\frac{2b^2}{\pi^2}$	$a=\frac{b^2}{2\pi}$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Зовнішній кут правильного n-кутника дорівнює $9°$. Знайдіть кількість діагоналей цього n-кутника.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

8. У прямокутного трикутника ABC довжина катета AC дорівнює 12 см, а довжина медіани, проведеної до катета BC, — 13 см. Знайдіть площу S круга, описаного навколо трикутника ABC (у $см^2$). У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

9. На рис. 2 наведено план підлоги конференц-залу. Для ламінування цієї підлоги майстру потрібно знати її площу (у $м^2$). Допоможіть майстру.

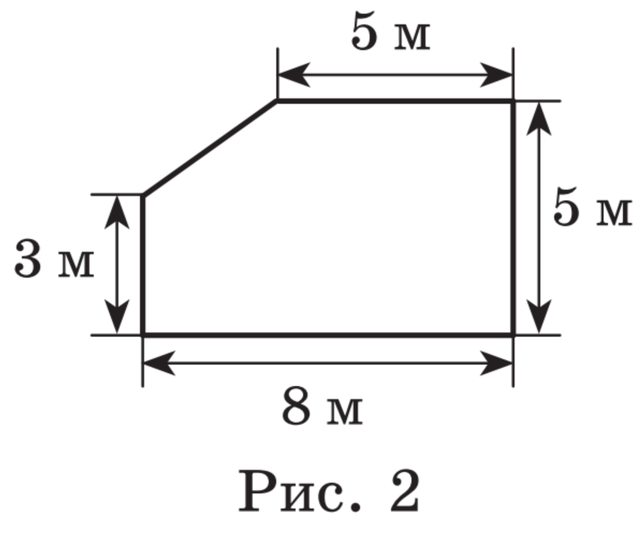


Рис. 2

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Два з внутрішніх кутів опуклого п'ятикутника — прямі, а градусні міри інших трьох внутрішніх кутів відносяться як 2:2:1. Знайдіть градусні міри всіх *зовнішніх* кутів цього п'ятикутника.

11. Міський сквер має форму опуклого чотирикутника. У вершинах цього чотирикутника розташовані входи до скверу, які сполучені між собою прямолінійними доріжками довжиною 120 м і 150 м відповідно. Знайдіть площу міського скверу, якщо його доріжки перетинаються під кутом 30°. Відповідь запишіть у гектарах.

12. У рівнобічній трапеції $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою її гострого кута A й утворює з її більшою основою AD кут 30°. Периметр трапеції $ABCD$ дорівнює 50 см. Знайдіть: а) довжини всіх сторін трапеції; б) площу S трапеції.

13. Знайдіть довжину C кола, вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 32 см. Якою є площа S круга, обмеженого цим колом?

14. У квадрат вписано круг, у який вписаний ще один квадрат (рис. 3). Знайдіть площу зафарбованої фігури, якщо сторона найбільшого квадрата дорівнює 10 см.

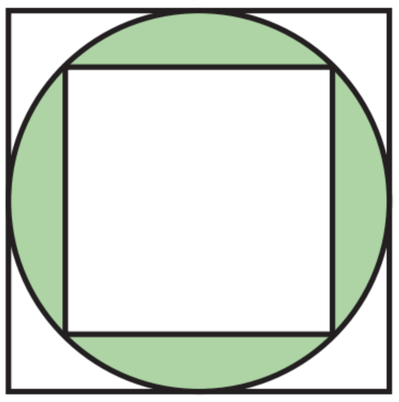


Рис. 3

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. У паралелограмі зробили отвір прямокутної форми (рис. 1). Проведіть пряму, яка ділить частину паралелограма, що залишилася, на дві рівновеликі частини. Відповідь обґрунтуйте.

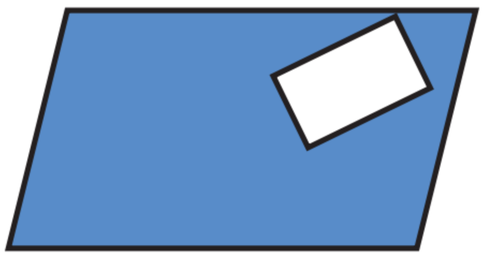


Рис. 1

2. Фігуру на рис. 2 складено з трьох квадратів. Через точку A цієї фігури провели пряму, яка розбиває фігуру на дві рівновеликі частини. Знайдіть, у якому відношенні ця пряма ділить сторону даної фігури.

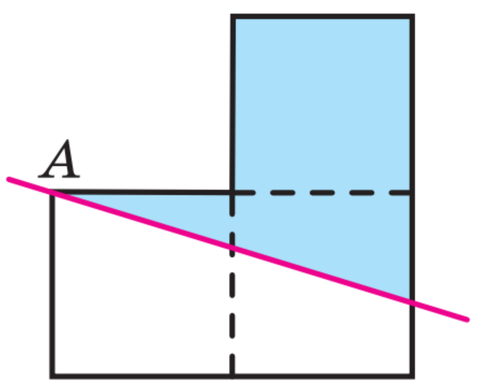


Рис. 2

3. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники. Доведіть, що добуток площ двох протилежних трикутників дорівнює добутку площ двох інших трикутників.

4. У трапеції проведено діагоналі, які розбивають її на чотири трикутники. Площі двох трикутників, прилеглих до основ трапеції, дорівнюють 4 см^2 і 9 см^2. Знайдіть площу трапеції.

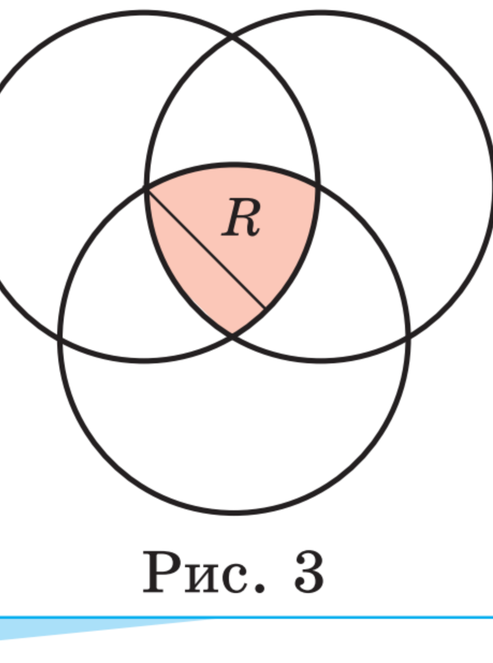


Рис. 3

5. *Трикутник Рело* утворений перетином трьох кругів радіуса R, коло кожного з яких проходить через центри двох інших кіл (рис. 3). Знайдіть периметр і площу цього трикутника. Знайдіть інформацію про властивості та використання трикутника Рело.

6. Радіус кожного кола на рис. 4 дорівнює 1 см. Знайдіть площу зафарбованої фігури.

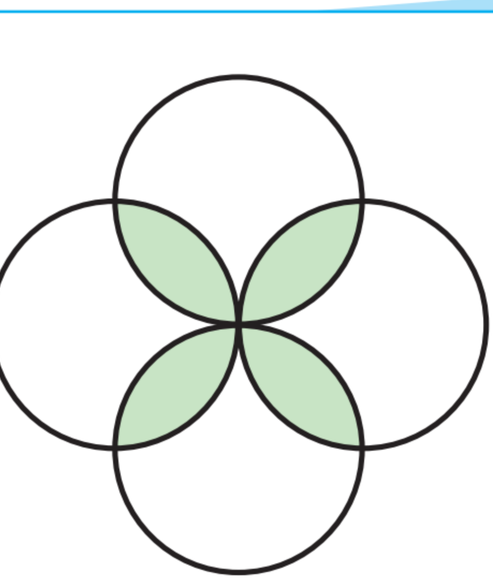


Рис. 4

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. Навколо прямокутника описано коло й на кожній стороні прямокутника, як на діаметрі, побудувано півколо (рис. 5). Доведіть, що сума площ зафарбованих фігур (так званих *серпиків Гіппократа*) дорівнює площі прямокутника.

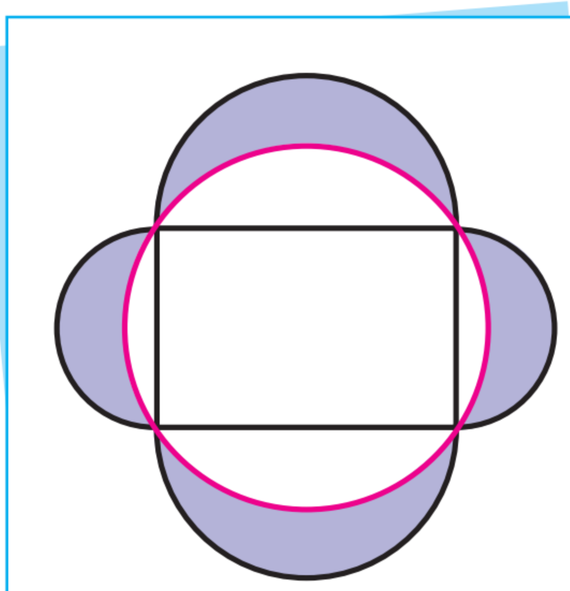


Рис. 5

8. Сторона трикутника дорівнює 26 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 30 см і 39 см. Знайдіть площу трикутника.

9. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 16 см. Знайдіть її площу, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло й навколо неї можна описати коло.

10. Кути трикутника дорівнюють α, β, γ; площа трикутника — S. Знайдіть сторону трикутника, протилежну до кута α.

11. Довжина кожної сторони трикутника не перевищує 1. Доведіть, що площа цього трикутника не перевищує $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

12. Периметр опуклого чотирикутника дорівнює 4. Доведіть, що площа цього чотирикутника не перевищує 1.

Словничок

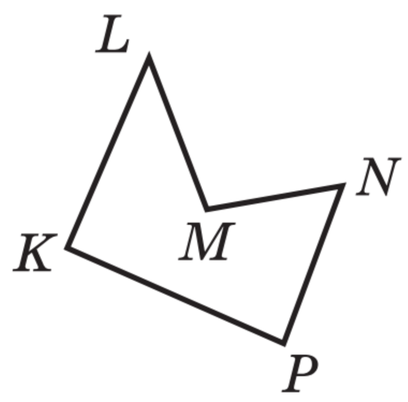
Опуклий (неопуклий) многокутник — convex (non-convex) polygon
Кількість діагоналей многокутника — number of polygon diagonals
Сума внутрішніх (зовнішніх) кутів многокутника — sum of interior (exterior) polygon angles
Правильний многокутник — regular polygon
Радіус вписаного (описаного) кола — radius of the inscribed (circumscribed) circle
Многокутник, вписаний у коло — polygon inscribed in a circle
Многокутник, описаний навколо кола — polygon circumscribed around a circle
Площа многокутника (трикутника, чотирикутника) — area of polygon (triangle, quadrilateral)
Площа круга (сектора, сегмента) — area of a circle (sector, segment)

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 5

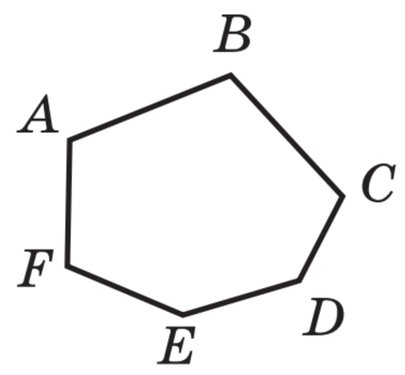
Многокутник (n-кутник)

Неопуклий



$KLMNP$ — неопуклий п'ятикутник

Опуклий



$ABCDEF$ — опуклий шестикутник

Довільний опуклий n-кутник

1) $k = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$ — кількість діагоналей

2) $180^\circ(n-2)$ — сума внутрішніх кутів

3) 360° — сума зовнішніх кутів

Довільний правильний n-кутник

a — сторона n-кутника

1) $\alpha_n = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$ — внутрішній кут

2) $\beta_n = \dfrac{360^\circ}{n}$ — зовнішній кут

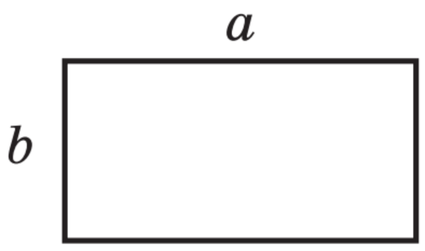
3) $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ — радіус описаного кола

4) $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ — радіус вписаного кола

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

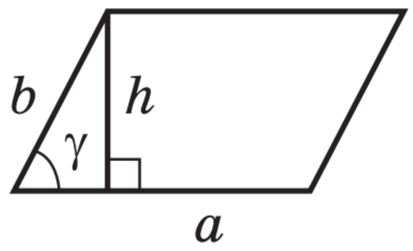
Формули площі

1 Площа прямокутника



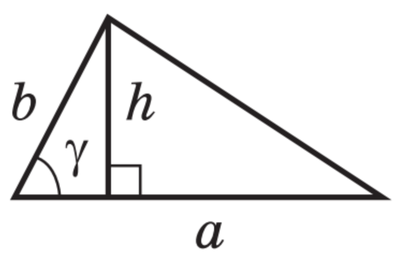
$$S = a \cdot b$$

2 Площа паралелограма



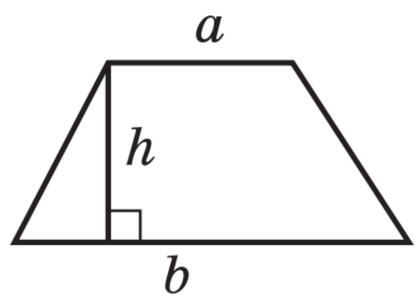
$$S = a \cdot h;\ S = a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

3 Площа трикутника



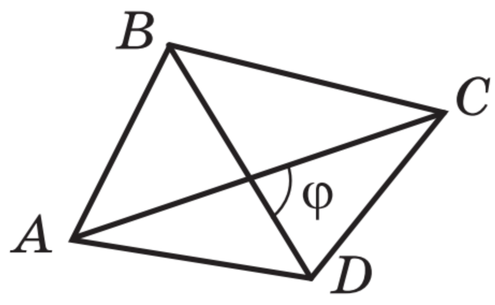
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h;\ S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

4 Площа трапеції



$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$$

5 Площа опуклого чотирикутника

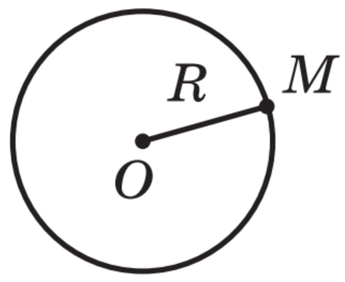


$AC = d_1$

$BD = d_2$

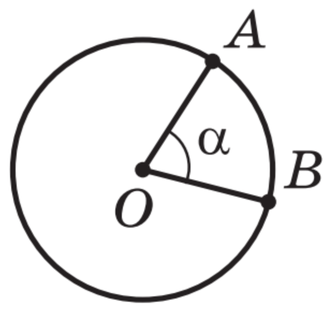
$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$

6 Площа круга



$$S = \pi R^2$$

7 Площа сектора



$$S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

РОЗДІЛ 6.
ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ І ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

CHAPTER 6.
SURFACE AREAS OF POLYHEDRONS AND SOLIDS OF ROTATION. GEOMETRIC PROBABILITIES

§ 18. Площі поверхонь прямої призми та правильної піраміди





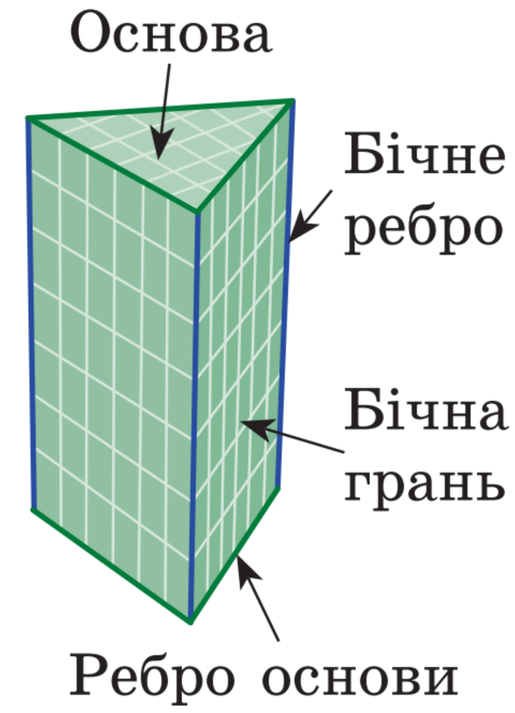
Слухай, Петрику, ми вирішили на дачі зробити теплицю для вирощування овочів. І тато дав мені завдання створити її дизайн і розрахувати, скільки квадратних метрів прозорої плівки потрібно, щоб її обтягнути. Я знайшла ось такий варіант — поглянь на фото. Це такий собі паралелепіпед із дахом. Навіть не знаю, як це геометричне тіло називається.



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

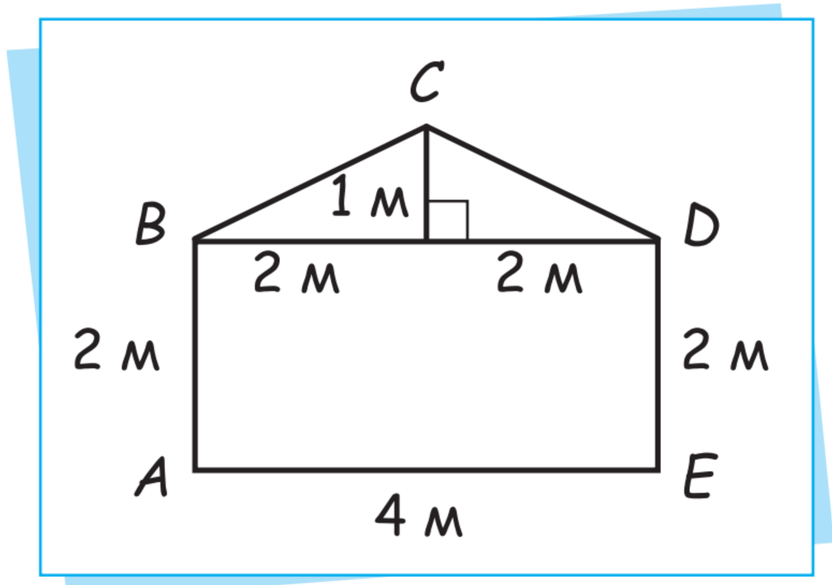


Я десь читав, що таке геометричне тіло називають *прямою призмою*. Це тіло складається з двох однакових плоских многокутників (основ), а інші його грані (бічні) — це прямокутники, які наче перпендикулярні до основ. Одна пара протилежних сторін кожної бічної грані — це ребра основи, а інша пара протилежних сторін — це бічні ребра, причому всі бічні ребра рівні. Подивися, на рисунку зображено правильну трикутну призму. Правильна вона тому, що її основа — правильний трикутник. У цієї призми всі бічні грані — однакові прямокутники. А от у твоєї теплиці-призми основа — п'ятикутник, причому неправильний.





Ага, зрозуміла. А для знаходження кількості прозорої плівки треба порахувати площу поверхні цієї прямої п'ятикутної призми, але без площі нижньої грані. Тут не має бути труднощів, бо п'ятикутник основи легко розбити на прямокутник і трикутник, а бічні грані цієї призми є прямокутниками. Площі всіх цих фігур ми вже вміємо обчислювати. Виконаймо разом ці розрахунки. Зараз намалюю схематично п'ятикутник основи. А «протяжність» теплиці, тобто довжина бічних ребер призми, буде 10 м.





Площу S_o п'ятикутника основи $ABCDE$ на твоїй схемі можна обчислити так: $S_o = S_{ABDE} + S_{\Delta BCD} = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 8 + 2 = 10$ (м^2).

А площу бічних граней призми, які слід обтягнути плівкою, $S_б = 2 \cdot 10 + BC \cdot 10 + CD \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 40 + 10(BC + CD)$.



А я знаю, як знайти довжини сторін BC і CD! Скористаємося теоремою Піфагора: $BC = CD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$ (м). Тоді $S_б \approx 40 + 2 \cdot 2{,}236 \cdot 10 = 84{,}72$ (м^2). Тобто треба закупити приблизно 85 м^2 прозорої плівки.



Я взяв би із запасом — 90 м^2, бо іноді доводиться робити перекриття плівки в місцях, де її скріплюють. До речі, підозрюю, що знаходження площ поверхонь многогранників часто використовують на практиці. Але многогранників багато — це не лише призми. Наприклад, у 7 класі ми вивчали ще й піраміди. Цікаво, як знаходити площі їхніх поверхонь.



Це справді цікаво й корисно — зараз усе розповімо. Але спочатку згадаймо, що многогранником називають геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників. Многогранниками є призма й піраміда.

Поверхня (або повна поверхня) прямої n-кутної призми складається з двох рівних n-кутників, які називають основами призми, а також із n прямокутників — бічних граней, які утворюють бічну поверхню цієї призми.

Наприклад, на рис. 18.1 зображено пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — основи призми, а прямокутники ABB_1A_1, BCC_1B_1 і ACC_1A_1 утворюють її бічну поверхню. При цьому відрізки AB, BC і AC називають ребрами основи, а відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — бічними ребрами. Загалом, будь-яка пряма трикутна призма має 9 ребер.

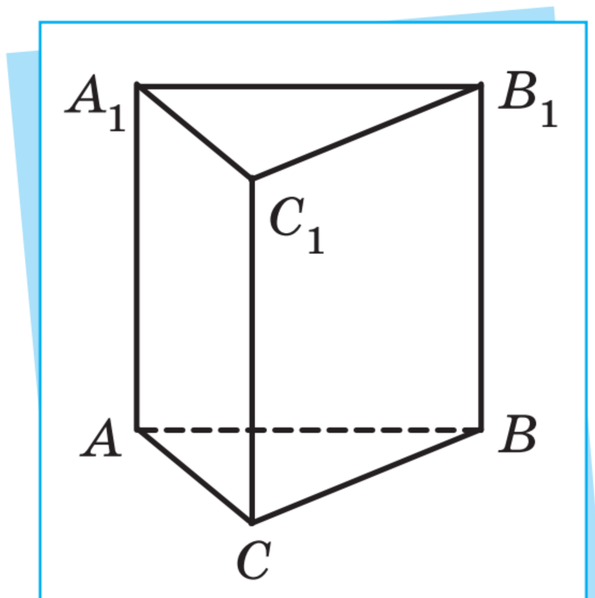


Рис. 18.1



Позначимо $S_п$ площу повної поверхні прямої призми, $S_о$ — площу її основи, $S_б$ — площу її бічної поверхні. Тоді очевидно:

$$S_п = 2S_о + S_б$$

Щоб знайти площу бічної поверхні прямої призми, потрібно знайти суму площ усіх прямокутників, що її утворюють. Наприклад, для прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ $S_б = AB \cdot AA_1 + BC \cdot BB_1 + AC \cdot CC_1$. Оскільки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = l$ (як протилежні сторони прямокутників), то $S_б = (AB + BC + AC) \cdot l$, або

$$S_б = P_o \cdot l,$$

де P_o — периметр основи прямої призми;

l — довжина бічного ребра цієї призми.

Остання формула правильна не лише для трикутної призми, а й для довільної прямої n-кутної призми. *Переконайтеся в цьому самостійно.*



Зрозуміло, що прямокутний паралелепіпед є окремим випадком прямої чотирикутної призми. Прямокутний паралелепіпед — це пряма чотирикутна призма, основою якої є прямокутник. Особливістю прямокутного паралелепіпеда є те, що будь-які дві його протилежні грані можна вважати основами. Тоді решта граней будуть утворювати його бічну поверхню.

Справді, нехай на рис. 18.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За такого розташування природно вважати, що прямокутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ є його основами, а решта прямокутників утворюють його бічну поверхню. Але так само основами цього прямокутного паралелепіпеда можуть бути грані ABB_1A_1 і CDD_1C_1 або ADD_1A_1 і BCC_1B_1.

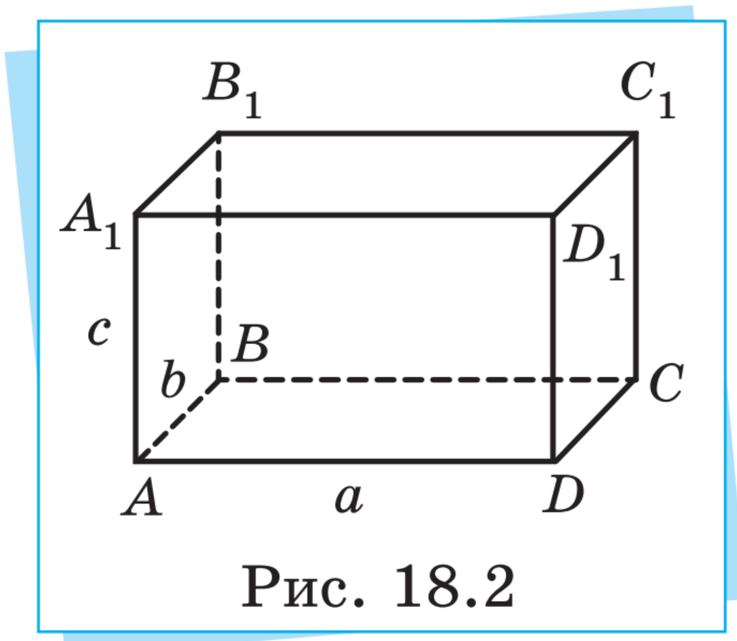


Рис. 18.2



Якщо позначити виміри прямокутного паралелепіпеда $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$, то, наприклад, площа його основи $S_o = ab$, периметр основи $P_o = 2a + 2b$, довжина бічного ребра $l = c$. Отже, площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда $S_п = 2S_o + S_б = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ac)$. Цю формулу ви вже знаєте з курсу математики 7 класу.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Якщо основою прямої призми є правильний многокутник, то таку призму називають правильною призмою. Зрозуміло, що для правильної призми формули площі бічної поверхні та площі повної поверхні залишаються такими самими, як і для довільної прямої призми.

Приклад 1

Знайдемо площу бічної та повної поверхонь правильної шестикутної призми, у якої довжина сторони основи $a = 5$ см, а довжина бічного ребра $l = 8$ см.

Розв'язання. Оскільки периметр основи $P_{\text{о}} = 6a = 30$ см, а $l = 8$ см, то $S_{\text{б}} = 30 \cdot 8 = 240$ см^2. Оскільки в правильний шестикутник можна вписати коло радіуса $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ см, то його площа $S_{\text{о}} = \dfrac{1}{2} P_{\text{о}} \cdot r = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{75\sqrt{3}}{2}$ см^2. Отже, шукана площа повної поверхні $S_{\text{п}} = 2S_{\text{о}} + S_{\text{б}} = 75\sqrt{3} + 240$ (см^2).



Як і для прямокутного паралелепіпеда, для будь-якої прямої n-кутної призми (зокрема й для правильної) можна виготовити розгортку. Наприклад, щоб виготовити розгортку прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, можна її «розрізати» вздовж ребер AC, BC, A_1C_1, B_1C_1 і CC_1 та «розгорнути». Для виготовлення прямої призми слід побудувати її розгортку, наприклад, на аркуші паперу (рис. 18.3), потім вирізати її, зігнути вздовж усіх сторін прямокутника $AA_1B_1C_1$, а потім склеїти.

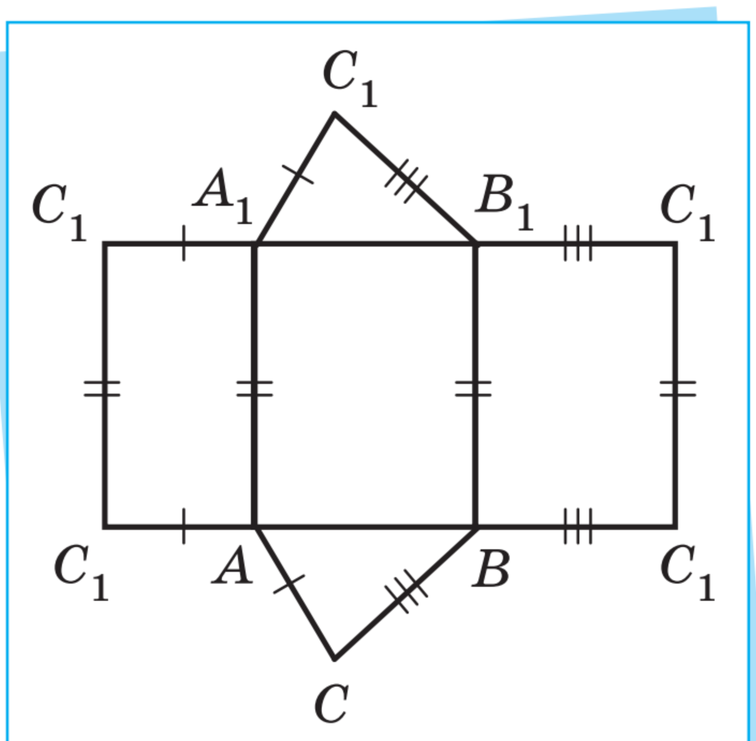


Рис. 18.3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Детальніше про виготовлення трикутної призми: rnk.com.ua/113083





У 7 класі ви вже вивчали розгортки правильної трикутної піраміди та правильної чотирикутної піраміди.

У математиці пірамідою називають многогранник, одна з граней якого — деякий плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину. Плоский многокутник називають основою піраміди, трикутні грані — бічними гранями, а спільну вершину трикутних граней — вершиною піраміди. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називають бічними ребрами піраміди. Піраміду називають правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні. Наприклад, на рис. 18.4 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, основою якої є правильний трикутник ABC, бічними гранями — рівнобічні трикутники SAB, SBC і SAC, а вершиною — точка S.

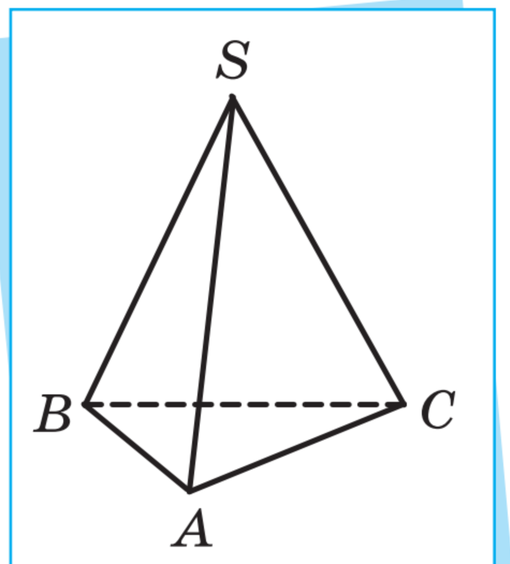


Рис. 18.4



Поверхня (або повна поверхня) правильної трикутної піраміди $SABC$ складається з основи ABC і трьох рівних між собою рівнобічних трикутників SAB, SBC і SAC, які утворюють її бічну поверхню. Розгортку піраміди $SABC$ зображено на рис. 18.5.

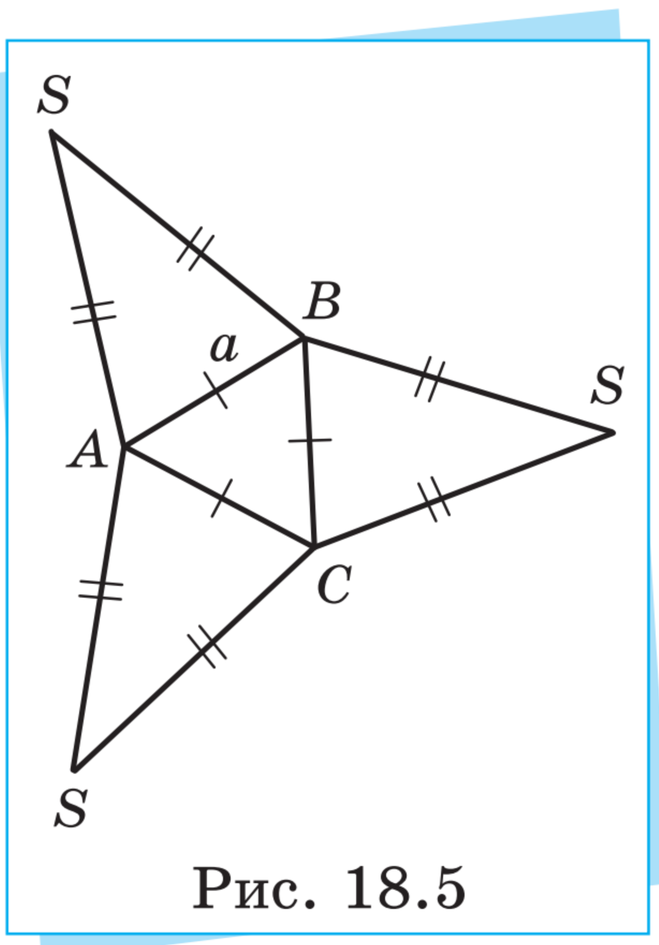


Рис. 18.5

Очевидно, що площа $S_п$ повної поверхні правильної трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою:

$$S_п = S_о + S_б,$$

де $S_о$ — площа основи цієї піраміди;
$S_б$ — площа бічної поверхні цієї піраміди.



Щоб знайти площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди $SABC$, потрібно знайти суму площ усіх трикутників, що її утворюють.

Нехай $AB = BC = AC = a$, а висота кожного з рівних рівнобічних трикутників SAB, SBC, SAC, проведена до його основи, дорівнює m. Цю висоту називають апофемою правильної піраміди. За відомою вам формулою площі трикутника

$S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} a \cdot m$, звідки бічна поверхня піраміди $SABC$ $S_б = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot m$, або

$$\boxed{S_б = \frac{1}{2} P_o \cdot m},$$

де P_o — периметр основи правильної піраміди;
m — довжина апофеми цієї піраміди.



Розглянемо *приклад обчислення площі поверхні правильної піраміди*.

Приклад 2

Знайдемо площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, сторона основи якої $a = 10$ см, а довжина апофеми $m = 12$ см.

Розв'язання. Площу правильного трикутника зі стороною a можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а отже, площа основи піраміди $S_o = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ см^2. Оскільки периметр основи піраміди $P_o = 3 \cdot 10 = 30$ см, то площа її бічної поверхні $S_б = \frac{1}{2} P_o \cdot m = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 12 = 180$ см^2. Таким чином, площа повної поверхні піраміди $S_п = S_o + S_б = 25\sqrt{3} + 180$ (см^2).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Якщо основою правильної піраміди є правильний n-кутник, то таку піраміду називають правильною n-кутною пірамідою. Його бічна поверхня складається з n рівних рівнобічних трикутників. Зокрема, в 7 класі ви вже вивчали правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ і розгортку її поверхні (рис. 18.6).

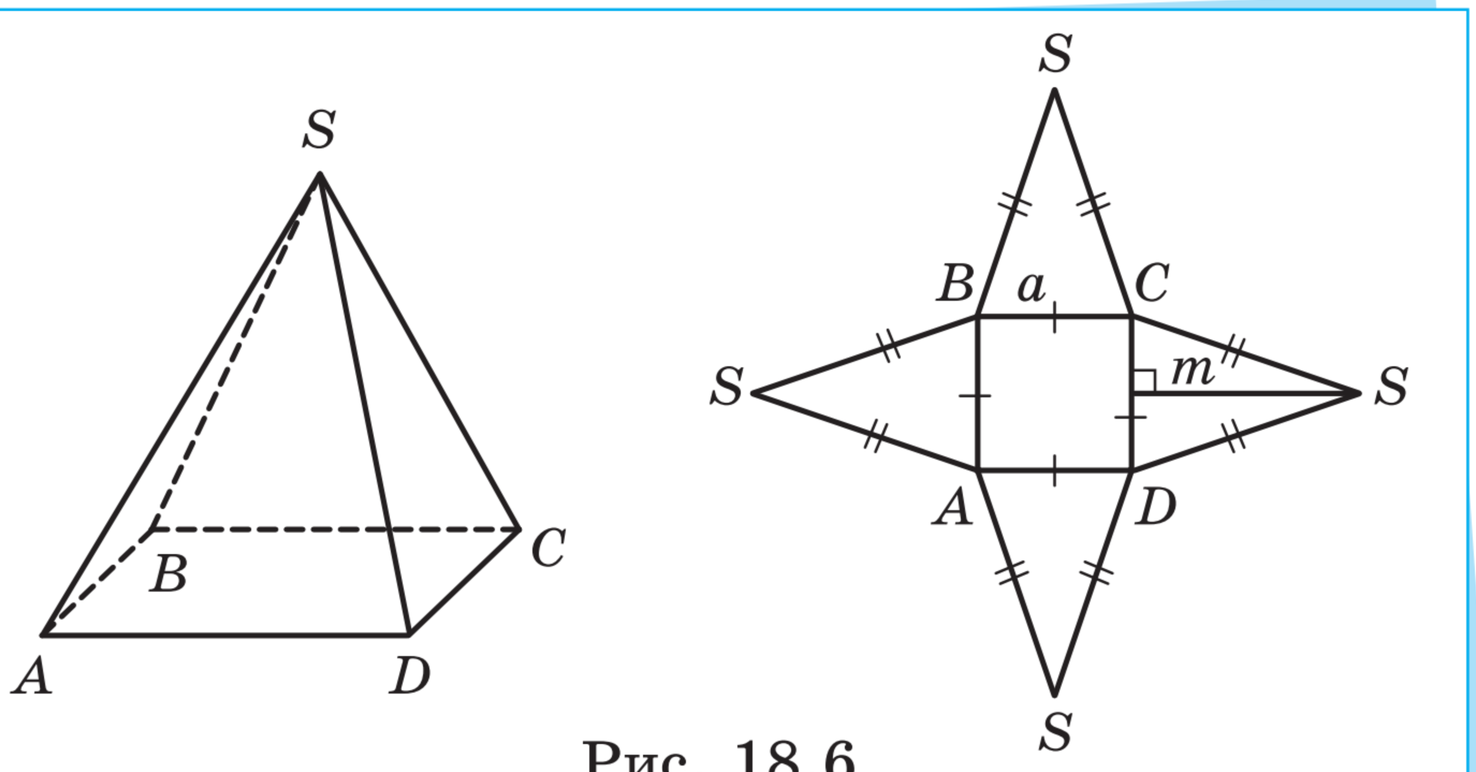


Рис. 18.6

Для будь-якої правильної n-кутної піраміди формули площі повної та бічної поверхонь такі самі, як і для правильної трикутної піраміди. *Переконайтеся в цьому самостійно.*

Більше про правильні n-кутні піраміди й обчислення площ їх поверхонь: rnk.com.ua/113084





Якщо піраміда не є правильною, для неї також можна побудувати розгортку. Наприклад, на рис. 18.7 зображено розгортку трикутної піраміди $SABC$, яка не є правильною. Для пірамід, що не є правильними, формула площі повної поверхні $S_п = S_о + S_б$ також справедлива, але потрібно більше даних, щоб знайти площу основи й площу кожного трикутника бічної поверхні окремо.

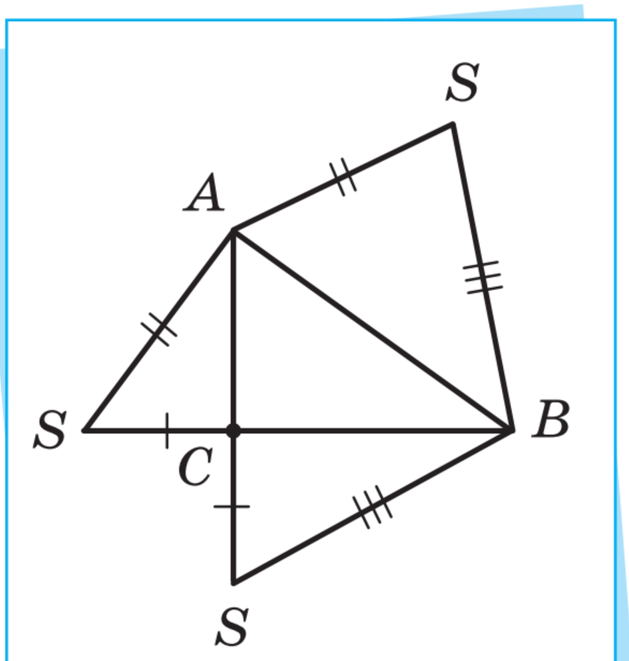


Рис. 18.7

Перевірте себе!

1. Із яких многокутників складається поверхня: а) прямої n-кутної призми; б) правильної n-кутної призми; в) правильної n-кутної піраміди?
2. Як побудувати розгортку прямої n-кутної призми?
3. Запишіть формули повної поверхні: а) прямої n-кутної призми; б) правильної n-кутної піраміди.
4. Запишіть формули бічної поверхні: а) прямої n-кутної призми; б) правильної n-кутної піраміди.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які твердження є правильними?

а) Поверхня чотирикутної призми складається з двох основ і чотирьох бічних граней.

б) Поверхня чотирикутної призми складається із чотирьох основ і двох бічних граней.

в) Поверхня чотирикутної призми складається з основи та чотирьох бічних граней.

г) Поверхня чотирикутної призми складається з двох основ і бічної поверхні.

д) Чотирикутна призма має чотири бічні ребра.

е) Чотирикутна призма має чотири ребра основи.

2. Які твердження є правильними?

а) Поверхня шестикутної призми складається із шести основ і двох бічних граней.

б) Поверхня шестикутної призми складається з двох основ і шести бічних граней.

в) Поверхня шестикутної призми складається з основи та шести бічних граней.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

г) Поверхня шестикутної призми складається з основи та бічної поверхні.
д) Шестикутна призма має шість бічних ребер.
е) Шестикутна призма має дванадцять ребер основи.

3. За формулою $S_{п} = 2S_{о} + S_{б}$ обчисліть площу повної поверхні прямої призми, якщо площа основи та площа бічної поверхні цієї призми відповідно дорівнюють: а) $S_{о} = 12$ см^2, $S_{б} = 19$ см^2; б) $S_{о} = 3{,}6$ м^2, $S_{б} = 5{,}1$ м^2; в) $S_{о} = 23$ дм^2, $S_{б} = 14$ дм^2.

4. За формулою $S_{п} = 2S_{о} + S_{б}$ обчисліть площу повної поверхні прямої призми, якщо площа основи та площа бічної поверхні цієї призми відповідно дорівнюють: а) $S_{о} = 7$ см^2, $S_{б} = 22$ см^2; б) $S_{о} = 6{,}4$ м^2, $S_{б} = 11{,}3$ м^2; в) $S_{о} = 31$ дм^2, $S_{б} = 45$ дм^2.

5. На рис. 1 зображено правильну п’ятикутну призму. Бічне ребро призми дорівнює 7 см, а ребро основи — 4 см. Обчисліть периметр основи та площу бічної поверхні призми. Для обчислення площі скористайтеся формулою $S_{б} = P_{о} \cdot l$.

6. На рис. 2 зображено правильну шестикутну призму. Бічне ребро призми дорівнює 9 см, а ребро основи — 5 см. Обчисліть периметр основи та площу бічної поверхні призми. Для обчислення площі скористайтеся формулою $S_{б} = P_{о} \cdot l$.

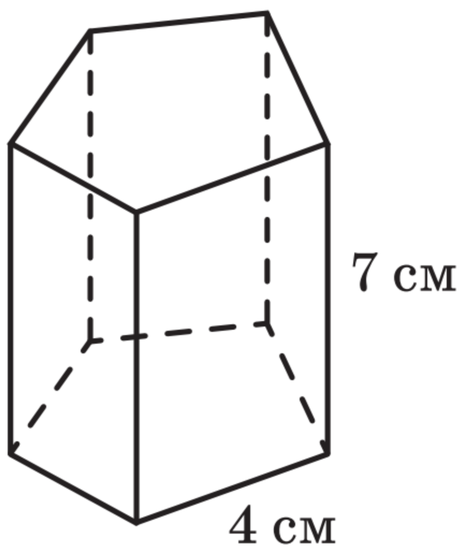


Рис. 1

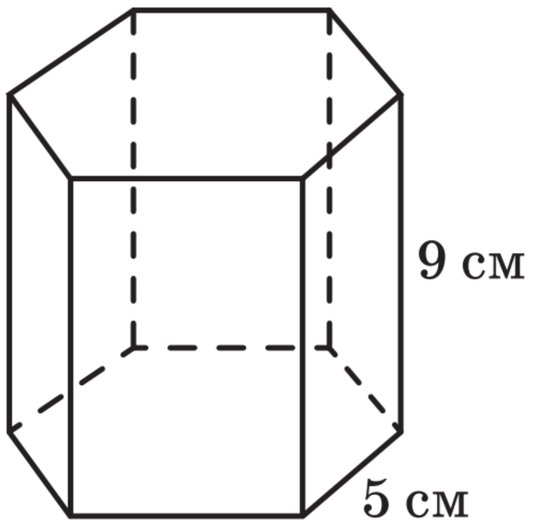


Рис. 2

7. Які твердження є правильними?
а) Поверхня п’ятикутної піраміди складається з двох основ і п’яти бічних граней.
б) Поверхня п’ятикутної піраміди складається з основи та п’яти бічних граней.

в) Поверхня п'ятикутної піраміди складається з основи та бічної поверхні.
г) Поверхня п'ятикутної піраміди складається з двох основ і бічної поверхні.
д) П'ятикутна піраміда має п'ять бічних ребер.
е) П'ятикутна піраміда має десять ребер основи.

8. Які твердження є правильними?
а) Поверхня чотирикутної піраміди складається із чотирьох основ і двох бічних граней.
б) Поверхня чотирикутної піраміди складається з основи та чотирьох бічних граней.
в) Поверхня чотирикутної піраміди складається з двох основ і чотирьох бічних граней.
г) Поверхня чотирикутної піраміди складається з основи та бічної поверхні.
д) Чотирикутна піраміда має чотири бічних ребра.
е) Чотирикутна піраміда має чотири ребра основи.

9. За формулою $S_п = S_о + S_б$ обчисліть площу повної поверхні правильної піраміди, якщо площа основи та площа бічної поверхні цієї піраміди відповідно дорівнюють: а) $S_о = 9$ см^2, $S_б = 32$ см^2; б) $S_о = 3{,}7$ м^2, $S_б = 8{,}1$ м^2; в) $S_о = 15$ дм^2, $S_б = 38$ дм^2.

10. За формулою $S_п = S_о + S_б$ обчисліть площу повної поверхні правильної піраміди, якщо площа основи та площа бічної поверхні цієї піраміди відповідно дорівнюють: а) $S_о = 17$ см^2, $S_б = 54$ см^2; б) $S_о = 4{,}1$ м^2, $S_б = 9{,}8$ м^2; в) $S_о = 34$ дм^2, $S_б = 62$ дм^2.

11. На рис. 3 зображено правильну п'ятикутну піраміду. Апофема піраміди дорівнює 12 см, ребро основи — 5 см. Обчисліть периметр основи та площу бічної поверхні цієї піраміди. Для обчислення площі скористайтеся формулою $S_б = \frac{1}{2} P_о \cdot l$.

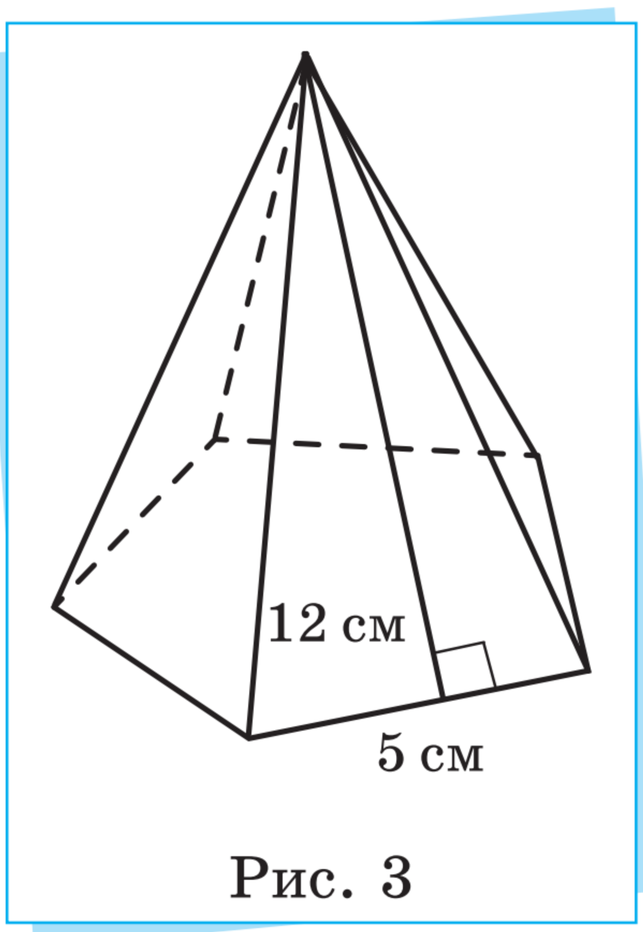


Рис. 3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. На рис. 4 зображено правильну чотирикутну піраміду. Апофема піраміди дорівнює 14 см, ребро основи — 6 см. Обчисліть периметр основи та площу бічної поверхні цієї піраміди. Для обчислення площі скористайтеся формулою $S_б = \frac{1}{2} P_о \cdot l$.

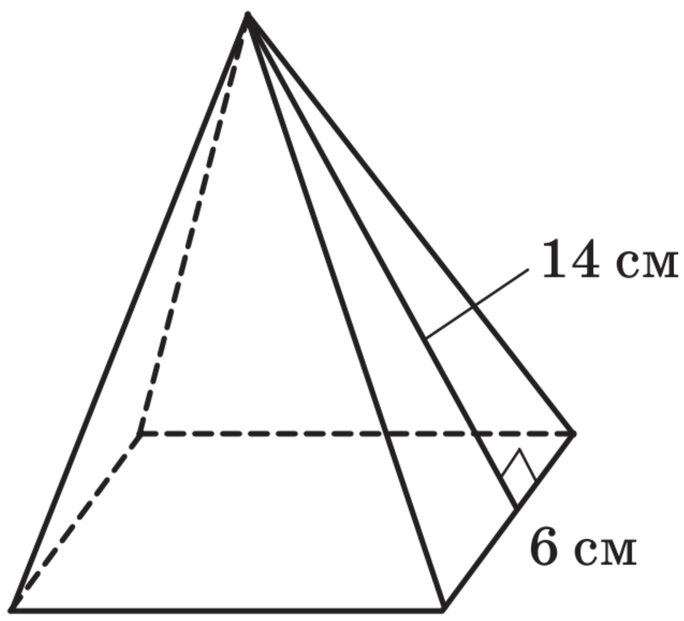


Рис. 4

Середній рівень

13. Скільки граней має семикутна призма? Скільки граней є основами, а скільки — бічними гранями?

14. Скільки граней має восьмикутна призма? Скільки граней є основами, а скільки — бічними гранями?

15. Скільки ребер має семикутна призма? Скільки ребер є ребрами основи, а скільки — бічними ребрами?

16. Скільки ребер має восьмикутна призма? Скільки ребер є ребрами основи, а скільки — бічними ребрами?

17. У правильній десятикутній призмі довжина бічного ребра дорівнює 6 см, а довжина ребра основи — 3 см. Обчисліть площу бічної поверхні цієї призми.

18. У правильній п’ятнадцятикутній призмі довжина бічного ребра дорівнює 9 см, а довжина ребра основи — 2 см. Обчисліть площу бічної поверхні цієї призми.

19. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Довжина бічного ребра призми — 4 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї призми.

20. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Довжина бічного ребра призми — 7 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї призми.

21. Скільки граней має семикутна піраміда? Скільки граней є основами, а скільки — бічними гранями?

22. Скільки граней має восьмикутна піраміда? Скільки граней є основами, а скільки — бічними гранями?

23. Скільки ребер має семикутна піраміда? Скільки ребер є ребрами основи, а скільки — бічними ребрами?

24. Скільки ребер має восьмикутна піраміда? Скільки ребер є ребрами основи, а скільки — бічними ребрами?

25. У правильній дванадцятикутній піраміді довжина апофеми дорівнює 20 см, а довжина ребра основи — 3 см. Обчисліть площу бічної поверхні цієї піраміди.

26. У правильній десятикутній піраміді довжина апофеми дорівнює 12 см, а довжина ребра основи — 2 см. Обчисліть площу бічної поверхні цієї піраміди.

27. У правильній чотирикутній піраміді довжина апофеми дорівнює 11 см, а довжина ребра основи — 3 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї піраміди.

28. У правильній чотирикутній піраміді довжина апофеми дорівнює 16 см, а довжина ребра основи — 5 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї піраміди.

Достатній рівень

29. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, усі ребра якої мають довжину 4 см.

30. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, усі ребра якої мають довжину 3 см.

31. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота цієї призми — 7 см. Знайдіть площу повної поверхні цієї призми.

32. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а висота цієї призми — 4 см. Знайдіть площу повної поверхні цієї призми.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

33. Знайдіть площу повної поверхні призми, розгортку якої зображено на рис. 5.

34. Знайдіть площу повної поверхні прямої призми, розгортку якої зображено на рис. 6.

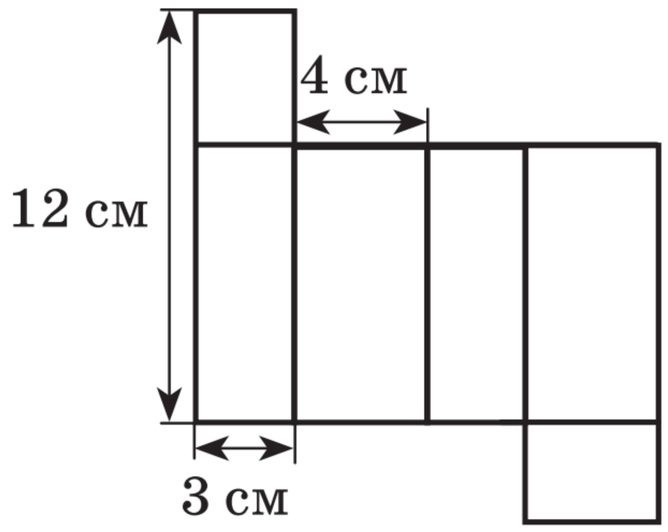


Рис. 5

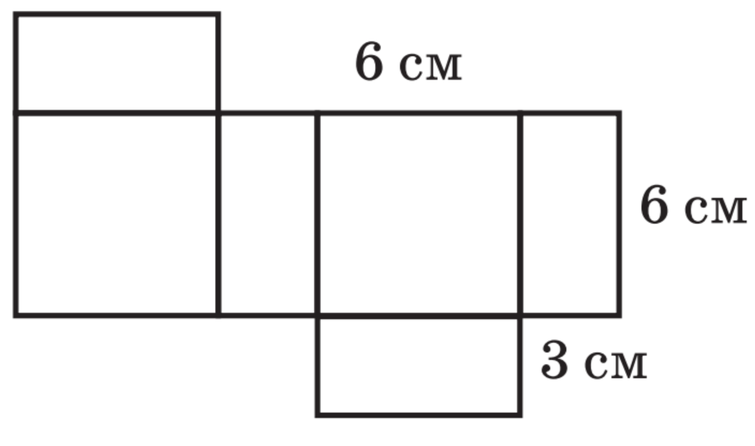


Рис. 6

35. В основі трикутної призми лежить трикутник зі сторонами 5 см, 9 см, 12 см. Знайдіть висоту цієї призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 260 см^2.

36. В основі трикутної призми лежить трикутник зі сторонами 5 см, 12 см, 13 см. Знайдіть висоту цієї призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 450 см^2.

37. Периметр бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює 40 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 10 см.

38. Периметр бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює 30 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.

39. Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 48 см, а довжина бічного ребра цієї піраміди — 18 см. Знайдіть: а) довжину апофеми піраміди; б) площу повної поверхні піраміди.

40. Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 64 см, а довжина бічного ребра цієї піраміди — 24 см. Знайдіть: а) довжину апофеми піраміди; б) площу повної поверхні піраміди.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

41. Довжина сторони основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 22 см, а довжина бічного ребра цієї піраміди — 61 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

42. Довжина сторони основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 20 см, а довжина бічного ребра цієї піраміди — 26 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Високий рівень

43. Доведіть, що загальна кількість усіх ребер довільної прямої призми кратна трьом.

44. Доведіть, що загальна кількість усіх ребер довільної піраміди є парним числом.

45. Суми площ протилежних бічних граней прямої чотирикутної призми рівні. Доведіть, що в основу цієї призми можна вписати коло.

46. Покажіть, що в кубі можна вибрати чотири вершини, які є вершинами правильної піраміди.

47. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа бічної поверхні цієї призми дорівнює 48 $см^2$. Знайдіть площу повної поверхні призми.

48. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, бічні грані якої є правильними трикутниками, а апофема дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

49. Знайдіть площу повної поверхні прямої трикутної призми, основою якої є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см, а діагональ найбільшої бічної грані дорівнює 13 см.

50. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди з бічним ребром 6 см і кутом у бічній грані між бічними ребрами 60°.

51. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює S. Знайдіть площу основи цієї піраміди, якщо її апофема дорівнює l.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

52. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди з площею основи $9\sqrt{3}$ см^2 і бічним ребром 5 см.



Цікавинки від дідуся Тараса

Площі поверхонь можна знаходити не лише для призм і пірамід, а й для більш складних многогранників. У 7 класі ми вже розповідали про правильні многогранники, поверхня яких складається з однакових правильних многокутників. Можна довести, що *існує лише п'ять правильних многогранників: тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр, ікосаедр* (рис. 1).

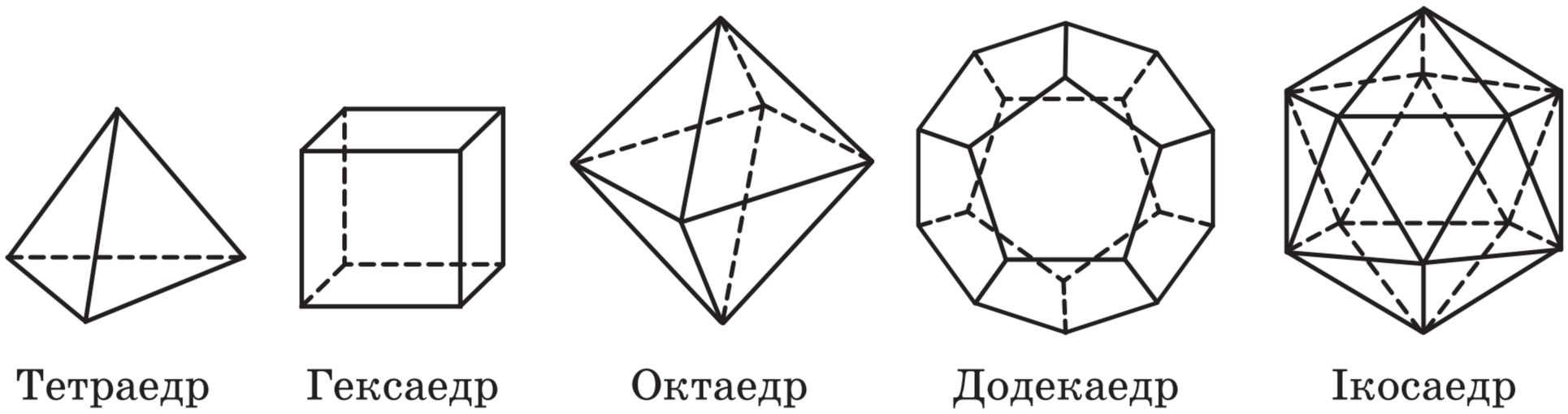


Рис. 1

Зрозуміло, що всі ребра правильного многогранника (сторони многокутників, які утворюють його поверхню) рівні. Нехай довжина ребра правильного многогранника дорівнює a. Виведемо формулу площі поверхні октаедра. Октаедр складається з 8 правильних трикутників зі стороною a, а отже, його площа $S_8 = 8 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.

Цікавими геометричними тілами є також напівправильні многогранники. Їхня поверхня також складається лише з правильних многокутників, але ці многокутники не обов'язково є однаковими. Прикладом напівправильного многогранника є зрізаний тетраедр, поверхня якого складається із чотирьох правильних шестикутників і чотирьох правильних трикутників. Щоб утворити зрізаний тетраедр, потрібно кожне ребро тетраедра довжиною a поділити на три рівні частини

і з'єднати послідовно точки поділу відрізками довжиною $\frac{a}{3}$. Далі від початкового тетраедра потрібно «відрізати» чотири менші тетраедри з ребром $\frac{a}{3}$. Тіло, що залишиться, і буде зрізаним тетраедром. Паперову розгортку цього напівправильного многогранника зображено на рис. 2.

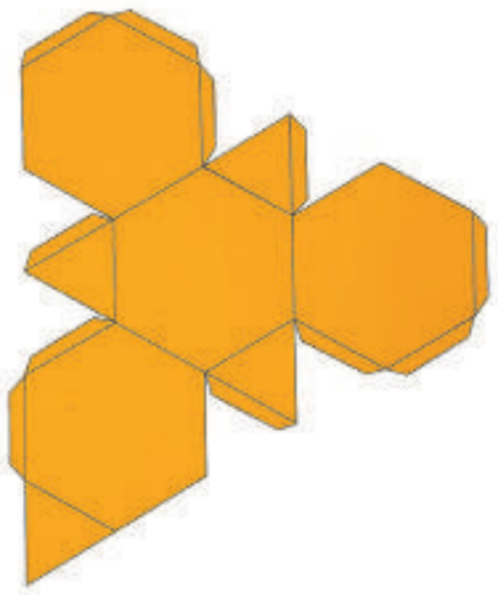


Рис. 2

Усі бачили футбольний м'яч. Поверхня більшості сучасних футбольних м'ячів складається з 32 многокутників: 12 із них є п'ятикутниками, а 20 — шестикутниками. Многогранник, поверхня якого складається з таких 32 многокутників, називають зрізаним ікосаедром (див. рис. 3). Це ще один приклад напівправильного многогранника. Зрозуміло, що через тиск повітря футбольний м'яч має форму кулі, а не многогранника.



Рис. 3



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Виведіть формули площі поверхонь інших правильних многогранників із ребром a: тетраедра, куба, додекаедра, ікосаедра. За потреби зверніться по допомогу до вчителя або вчительки математики.
2. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про напівправильні многогранники, зокрема про *архімедові тіла*. Підготуйте невелике повідомлення.
3. Спробуйте виготовити за розгортками паперові моделі зрізаного тетраедра та ще кількох інших напівправильних многогранників. З допомогою вчителя або вчительки математики виведіть формули площі поверхні цих тіл.
4. Чи траплялися вам у повсякденному житті об'єкти, що мають форму напівправильних многогранників? Якщо так, то поділіться досвідом.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Скоротіть дріб $\dfrac{2x^2+5x-12}{x^2+2x-8}$.

2. Використовуючи геометричні перетворення, побудуйте графік функції.

   а) $y=3-\sqrt{x+2}$; б) $y=\dfrac{2}{x-4}-5$.

3. Під час тренування з бігу на 100 м Оксана перші 60 м пробігла з певною незмінною швидкістю, а наступні 40 метрів — зі швидкістю, яка на 2 м/с більша за початкову. Знайдіть початкову швидкість бігу Оксани, якщо всю дистанцію в 100 м вона подолала за 15 секунд.

4. У прямокутному трикутнику ABC із прямим кутом C катет $AC=10$ см, а $\angle A=20^\circ$. Знайдіть невідомі сторони й кути цього трикутника. Довжини сторін округліть до десятих.

5. Виготовіть паперові моделі:

   а) циліндра, радіус основи якого $R=6$ см, твірна $L=8$ см;

   б) конуса, радіус основи якого $R=3$ см, твірна $L=5$ см.

§ 19. Площі поверхонь циліндра і конуса



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Привіт, Тетянко! Як справи з облаштуванням теплиці для вирощування овочів? Сподобалися татові твій проєкт і розрахунки витратних матеріалів?



Звичайно. Але я за цей час, так би мовити, заглибилася в тематику й знайшла ще один цікавий проєкт теплиці. Поглянь, ось фото: теплиця має форму половини циліндра. Тобто беремо циліндр і ніби розрізаємо його навпіл через висоту й діаметри обох основ. Якщо обидва ці діаметри будуть довжиною 4 м, а «протяжність» теплиці (тобто довжина висоти циліндра) — 10 м, то ця теплиця накриє таку саму ділянку землі, як і попередня, у формі п'ятикутної призми. Цікаво, для циліндричної теплиці треба більше прозорої плівки чи менше, ніж для призматичної?





Можемо обчислити. Поверхня теплиці, яку треба обтягнути плівкою, складається з половини бічної поверхні циліндра й двох півкругів — половин основ. У 8 класі ми вивчали, що площа бічної поверхні циліндра $S_б = 2\pi RH$, де R — радіус основи циліндра, а H — довжина висоти циліндра. Основою циліндра є круг радіуса R. Два півкруги якраз утворюють один повний круг, а площа круга основи $S_о = \pi R^2$. Тому шукана площа плівки $S = \frac{1}{2} S_б + S_о = \pi RH + \pi R^2$.



Далі я сама! У нас $R = 2$ м (бо діаметр циліндра $d = 4$ м), а $H = 10$ м. Тепер підставляємо у твою формулу ці числа й отримуємо, що $S = 20\pi + 4\pi = 24\pi$ (м^2). Візьмемо $\pi \approx 3{,}14$ й одержимо, що для циліндричної теплиці треба приблизно $24 \cdot 3{,}14 = 75{,}36$ м^2 плівки.



Я знову порадив би взяти більше — 80 м^2, бо під час склеювання плівки можливі перекриття. Але бачиш, циліндричний проєкт потребує на 10 м^2 менше плівки, ніж призматичний. Як на мене, це значна економія.



Так-то воно так, але за такого проєкту під стінками теплиці буде менше простору для росту рослин, а отже, корисна площа зменшиться. Але все одно дякую: коли є з чого вибирати — це завжди краще! До речі, цікава тема ці площі поверхонь тіл. Для призм і пірамід площу поверхні нескладно знаходити, для циліндрів теж. А як щодо конуса?



Зараз усе розповімо. Але спочатку згадаємо, що циліндром називають геометричне тіло, яке можна утворити внаслідок обертання плоского прямокутника навколо прямої, яка містить одну з його сторін.

Поверхня (або повна поверхня) циліндра складається з двох однакових кругів — основ циліндра, а також із бічної поверхні циліндра, розгорткою якої є прямокутник зі сторонами H і $2\pi R$, де H — висота циліндра, а R — радіус його основи (рис. 19.1). Тому площа бічної поверхні циліндра $S_б = 2\pi RH$, а площа основи циліндра $S_о = \pi R^2$.

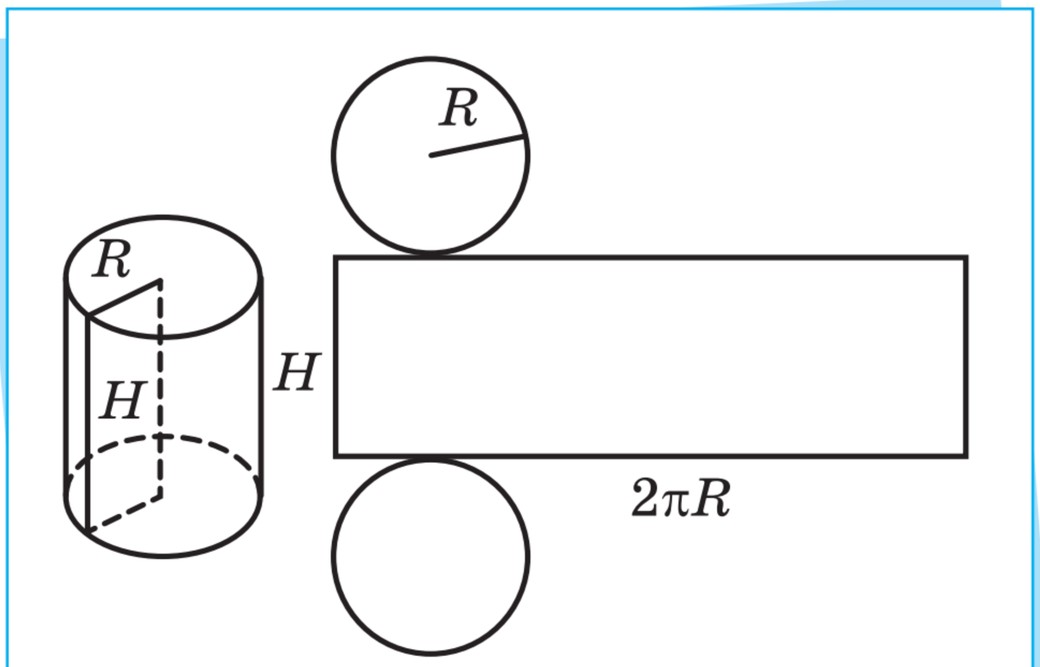


Рис. 19.1

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Очевидно, що площу повної поверхні циліндра обчислюють за формулою:

$$S_{\text{п}} = 2S_{\text{о}} + S_{\text{б}},$$

де $S_{\text{о}}$ — площа основи циліндра;
$S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні циліндра.

Ураховуючи формули площі основи та площі бічної поверхні, формулу площі повної поверхні циліндра можна записати у вигляді:

$$S_{\text{п}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH, \text{ або } S_{\text{п}} = 2\pi R(R + H)$$



Також ви вже знаєте, що конусом називають геометричне тіло, яке можна утворити внаслідок обертання плоского прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один із його катетів. Поверхня (або повна поверхня) конуса складається з круга радіуса R — основи конуса, а також із бічної поверхні конуса, розгорткою якої є сектор круга радіуса L, де L — твірна конуса (рис. 19.2). Зрозуміло, що площа основи конуса $S_{\text{о}} = \pi R^2$, а площа повної поверхні конуса обчислюється за формулою:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{о}} + S_{\text{б}},$$

де $S_{\text{о}}$ — площа основи конуса;
$S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні конуса.

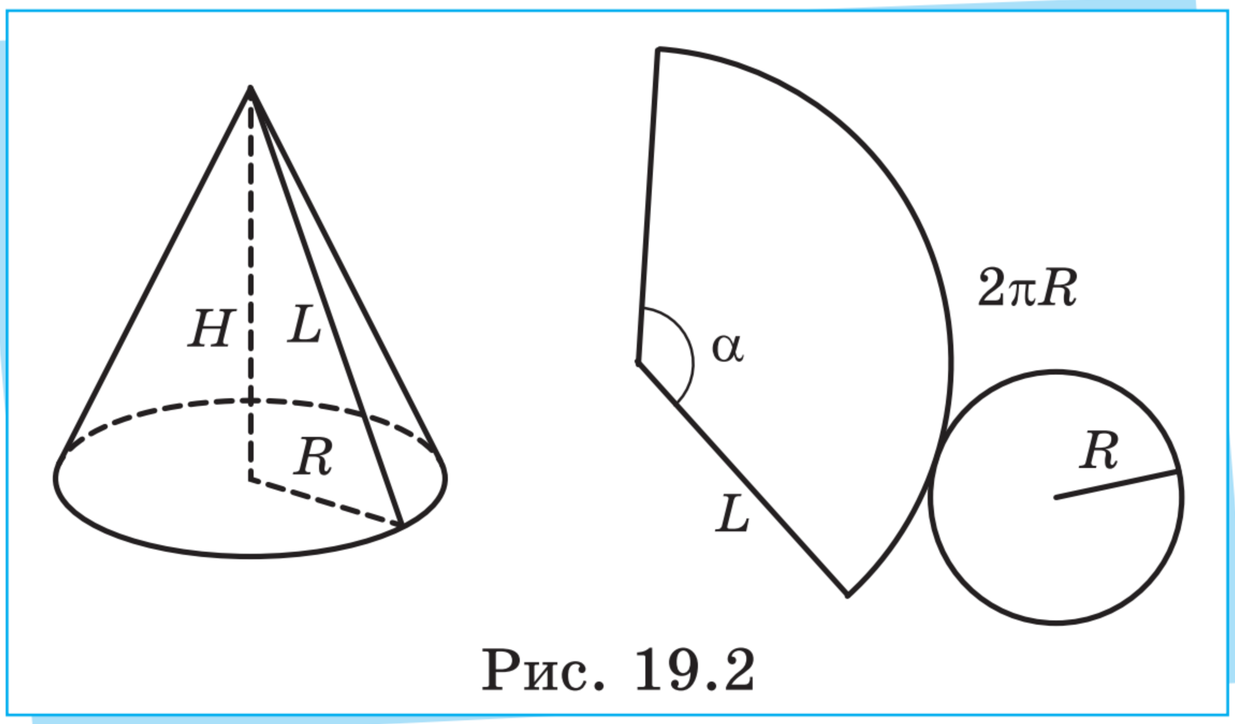


Рис. 19.2

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Щоб знайти площу бічної поверхні конуса, використаємо формулу площі сектора $S_\alpha = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$, де r — радіус круга, α — градусна міра центрального кута, що визначає цей сектор. У нашому випадку $r = L$, а з курсу математики 8 класу ми знаємо, що $\alpha = \dfrac{R}{L} \cdot 360^\circ$ (*згадайте, як виводиться ця формула*). Тому площа бічної поверхні конуса $S_б = S_\alpha = \dfrac{\pi L^2}{360^\circ} \cdot \dfrac{R}{L} \cdot 360^\circ$, звідки

$$S_б = \pi RL$$

Ураховуючи формули площі основи та площі бічної поверхні, формулу площі повної поверхні конуса можна записати у вигляді:

$$S_п = \pi R^2 + \pi RL, \text{ або } S_п = \pi R(R + L)$$



Розглянемо *приклад знаходження площі повної поверхні конуса.*

Приклад

Конус утворено обертанням прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см навколо меншого з них. Знайдемо площу повної поверхні конуса.

Розв'язання. У нашому випадку висота конуса $H = 6$ см, радіус основи конуса $R = 8$ см, а твірна $L = \sqrt{H^2 + R^2} = 10$ см. Отже, площа повної поверхні цього конуса $S_п = \pi R^2 + \pi RL = 64\pi + 80\pi = 144\pi$ (см^2).



Більше прикладів знаходження площ поверхонь циліндра й конуса: rnk.com.ua/113085



Перевірте себе!

1. Дайте означення циліндра. Із чого складається його поверхня?
2. Запишіть формули: а) площі бічної поверхні циліндра; б) площі повної поверхні циліндра.
3. Дайте означення конуса. Із чого складається його поверхня?
4. Запишіть формули: а) площі бічної поверхні конуса; б) площі повної поверхні конуса.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які твердження є правильними?

а) Поверхня циліндра складається з двох основ і бічної поверхні.

б) Бічна поверхня циліндра може мати форму прямокутної трапеції.

в) Бічна поверхня циліндра може мати форму квадрата.

г) Бічна поверхня циліндра може мати форму прямокутного трикутника.

2. Які твердження є правильними?

а) Поверхня циліндра складається з основи й бічної поверхні.

б) Бічна поверхня циліндра може мати форму рівнобічної трапеції.

в) Бічна поверхня циліндра може мати форму прямокутника.

г) Бічна поверхня циліндра може мати форму рівностороннього трикутника.

3. За формулою $S_{п} = 2S_{о} + S_{б}$ знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо площа основи й площа бічної поверхні циліндра відповідно дорівнюють: а) $S_{о} = 7$ см^2, $S_{б} = 15$ см^2; б) $S_{о} = 2{,}5$ м^2, $S_{б} = 8{,}3$ м^2; в) $S_{о} = 41$ дм^2, $S_{б} = 18$ дм^2.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. За формулою $S_{п} = 2S_{о} + S_{б}$ знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо площа основи й площа бічної поверхні циліндра відповідно дорівнюють: а) $S_{о} = 9$ см^2, $S_{б} = 13$ см^2; б) $S_{о} = 4{,}7$ м^2, $S_{б} = 3{,}5$ м^2; в) $S_{о} = 31$ дм^2, $S_{б} = 14$ дм^2.

5. За формулою $S_{п} = 2\pi R(R + H)$ знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо радіус основи й висота циліндра відповідно дорівнюють: а) $R = 7$ см, $H = 12$ см; б) $R = 5$ м, $H = 3{,}5$ м; в) $R = 6$ дм, $H = 20$ дм.

6. За формулою $S_{п} = 2\pi R(R + H)$ знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо радіус основи й висота циліндра відповідно дорівнюють: а) $R = 5$ см, $H = 17$ см; б) $R = 6{,}5$ м, $H = 2{,}5$ м; в) $R = 9$ дм, $H = 11$ дм.

7. Яке твердження є правильним?
а) Поверхня конуса складається з двох основ і бічної поверхні.
б) Бічна поверхня конуса може мати форму ромба.
в) Бічна поверхня конуса може мати форму сектора.
г) Бічна поверхня конуса може мати форму прямокутного трикутника.

8. Яке твердження є правильним?
а) Поверхня конуса складається з основи й бічної поверхні.
б) Бічна поверхня конуса може мати форму сегмента.
в) Бічна поверхня конуса може мати форму рівнобічної трапеції.
г) Бічна поверхня конуса може мати форму рівностороннього трикутника.

9. За формулою $S_{п} = S_{о} + S_{б}$ знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа основи й площа бічної поверхні конуса відповідно дорівнюють: а) $S_{о} = 9$ см^2, $S_{б} = 37$ см^2; б) $S_{о} = 3{,}8$ м^2, $S_{б} = 7{,}1$ м^2; в) $S_{о} = 21$ дм^2, $S_{б} = 95$ дм^2.

10. За формулою $S_{п} = S_{о} + S_{б}$ знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа основи й площа бічної поверхні конуса відповідно дорівнюють: а) $S_{о} = 7$ см^2, $S_{б} = 51$ см^2; б) $S_{о} = 6{,}4$ м^2, $S_{б} = 13{,}8$ м^2; в) $S_{о} = 12$ дм^2, $S_{б} = 63$ дм^2.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

11. За формулою $S_{\text{п}} = \pi R(R+L)$ знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо радіус основи й твірна конуса відповідно дорівнюють: а) $R=6$ см, $L=14$ см; б) $R=3{,}7$ м, $L=6{,}3$ м; в) $R=9$ дм, $L=16$ дм.

12. За формулою $S_{\text{п}} = \pi R(R+L)$ знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо радіус основи й твірна конуса відповідно дорівнюють: а) $R=8$ см, $L=22$ см; б) $R=2{,}9$ м, $L=7{,}1$ м; в) $R=6$ дм, $L=29$ дм.

Середній рівень

13. На рис. 1 зображено циліндри, які мають такі розміри: а) $R_1=3$ см, $H_1=6$ см; б) $R_2=6$ см, $H_2=3$ см. Який циліндр має більшу площу повної поверхні й на скільки?

14. На рис. 2 зображено циліндри, які мають такі розміри: а) $R_1=4$ см, $H_1=4$ см; б) $R_2=8$ см, $H_2=2$ см. Який циліндр має більшу площу повної поверхні й на скільки?

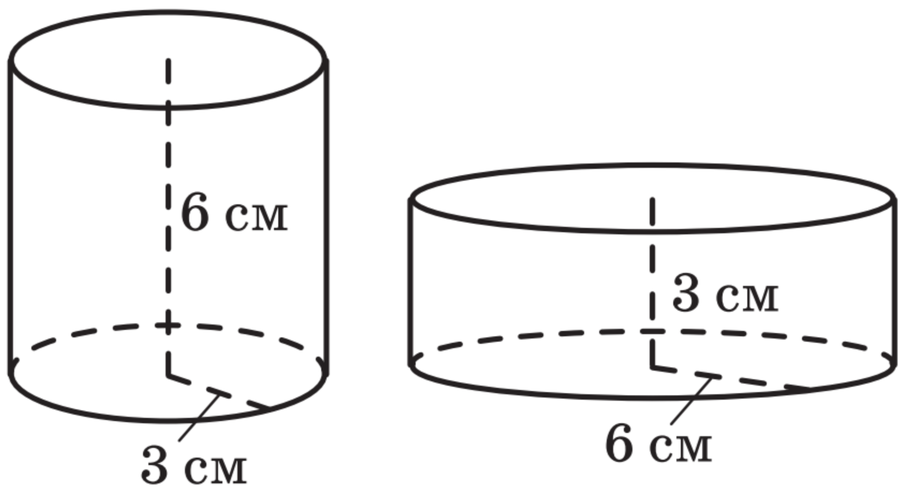


Рис. 1

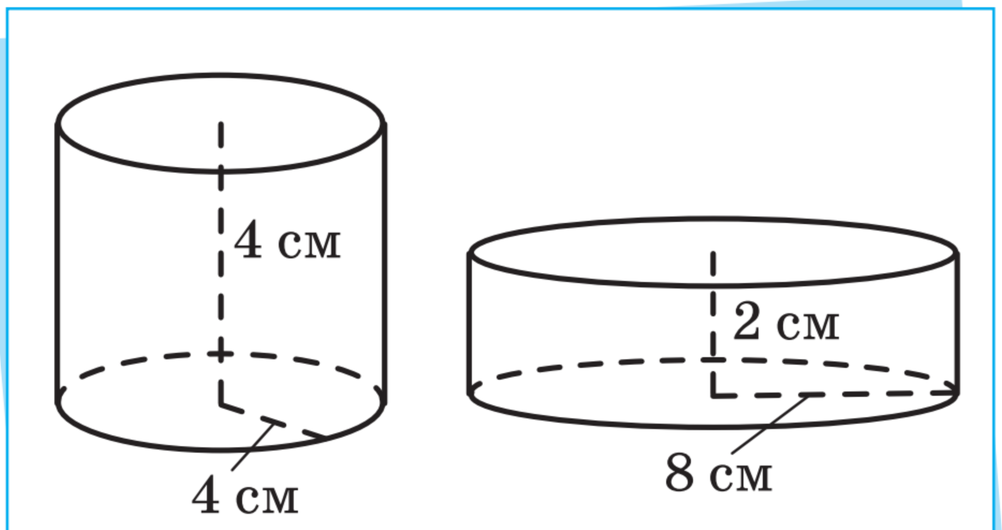


Рис. 2

15. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 136π см^2, а площа його бічної поверхні — 72π см^2. Визначте радіус основи цього циліндра.

16. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 92π см^2, а площа його бічної поверхні — 56π см^2. Визначте радіус основи цього циліндра.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

17. На заводі потрібно пофарбувати металевий резервуар у формі циліндра. Висота резервуара дорівнює 3 м, а радіус основи — 1 м. Фарбують усю зовнішню поверхню резервуара, включаючи бокову частину й обидві основи. Скільки квадратних метрів площі треба пофарбувати? Відповідь надайте з точністю до сотих.

18. На дачі встановили металевий бак у формі циліндра для збирання дощової води. Бокову частину й обидві основи цього бака потрібно обшити ізоляційним матеріалом. Скільки квадратних метрів такого матеріалу потрібно, якщо радіус основи бака дорівнює 2 м, а висота — 1,5 м? Відповідь надайте з точністю до сотих.

19. На рис. 3 зображено розгортку конуса. Обчисліть площу повної поверхні цього конуса.

20. На рис. 4 зображено розгортку конуса. Обчисліть площу повної поверхні цього конуса.

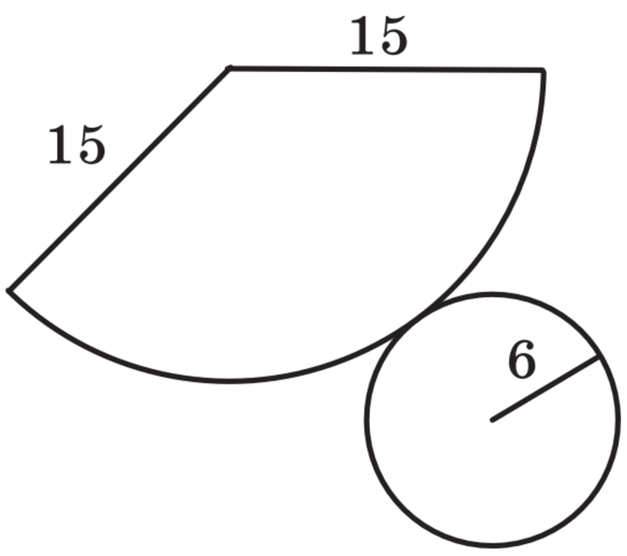


Рис. 3

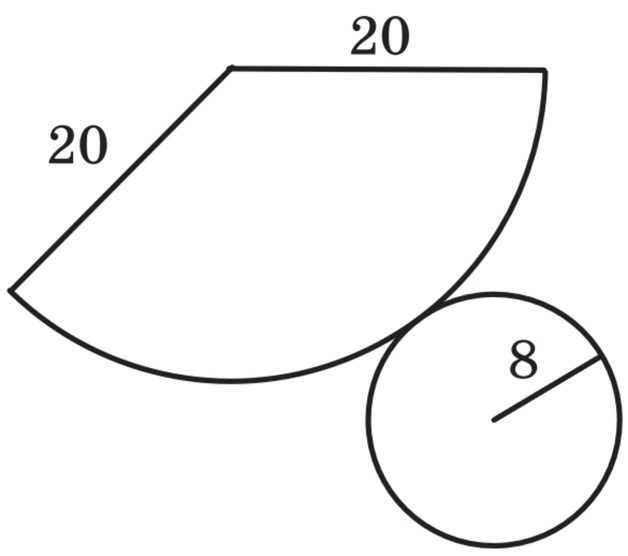


Рис. 4

21. Площа основи конуса дорівнює 9π см^2, а площа його повної поверхні — 24π см^2. Обчисліть площу бічної поверхні цього конуса й довжину його твірної.

22. Площа основи конуса дорівнює 25π см^2, а площа його повної поверхні — 55π см^2. Обчисліть площу бічної поверхні цього конуса й довжину його твірної.

23. Фабрика виготовляє паперові обгортки для вафельних стаканчиків у формі конуса. Щоб визначити, скільки матеріалу потрібно

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

на одну обгортку, треба знайти площу повної поверхні конуса, включаючи основу. Скільки квадратних сантиметрів паперу піде на виготовлення однієї обгортки, якщо радіус основи конуса дорівнює 4 см, а довжина його твірної — 9 см? Відповідь надайте з точністю до сотих.

24. Для святкування Івана Купала на подвір'ї встановлюють тент у формі конуса. Скільки квадратних метрів тканини потрібно для виготовлення цього тенту, якщо радіус основи конуса дорівнює 3 м, а довжина його твірної — 5 м? Відповідь надайте з точністю до сотих.

Достатній рівень

25. Циліндр утворено обертанням прямокутника $ABCD$ зі сторонами $AB = 8$ см і $AD = 4$ см навколо сторони AB. Обчисліть площу повної поверхні утвореного циліндра.

26. Циліндр утворено обертанням прямокутника $ABCD$ зі сторонами $AB = 10$ см і $AD = 5$ см навколо сторони AB. Обчисліть площу повної поверхні утвореного циліндра.

27. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π, а довжина кола його основи — 4π. Визначте довжину висоти цього циліндра й площу його повної поверхні.

28. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 32π, а довжина кола його основи — 2π. Визначте довжину висоти цього циліндра й площу його повної поверхні.

29. У циліндра з радіусом основи R і висотою H площа бічної поверхні циліндра відноситься до площі основи циліндра як $1:2$. Обчисліть відношення $H:R$.

30. У циліндра з радіусом основи R і висотою H площа основи відноситься до площі бічної поверхні як $1:3$. Обчисліть відношення $H:R$.

31. Конус утворено обертанням прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см навколо більшого катета. Обчисліть площу повної поверхні утвореного конуса.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

32. Конус утворено обертанням прямокутного трикутника з катетами 8 см і 15 см навколо більшого катета. Обчисліть площу повної поверхні утвореного конуса.

33. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 240π см^2, а довжина його твірної — 20 см. Знайдіть довжину висоти цього конуса та площу його повної поверхні.

34. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 65π см^2, а довжина його твірної — 13 см. Знайдіть довжину висоти цього конуса та площу його повної поверхні.

35. Учень вирішив зробити паперовий конус для моделі вулкана. Він має аркуш картону у формі сектора круга з радіусом $L = 10$ см і кутом сектора $\alpha = 144°$. Учень склеїв бічні сторони сектора, щоб утворити конус, а з іншого аркуша картону виготовив круг, щоб зробити основу конуса. Знайдіть: а) радіус основи конуса; б) висоту конуса; в) площу повної поверхні конуса.

36. Дизайнерка створює прикрасу для інтер'єру у вигляді конуса. Для виготовлення прикраси вона взяла аркуш картону у формі сектора круга з радіусом $L = 12$ см і кутом сектора $\alpha = 90°$. Після склеювання бічних сторін сектора утворився конус, для якого потрібно також виготовити круглу основу. Знайдіть: а) радіус основи конуса; б) висоту конуса; в) площу повної поверхні конуса.

Високий рівень

37. Площа бічної поверхні циліндра — 100π см^2, а висота дорівнює діаметру основи. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

38. Площа бічної поверхні конуса — 32π см^2, а твірна дорівнює діаметру основи. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

39. Твірна конуса дорівнює 13 см, а площа повної поверхні — 90π см^2. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

40. Висота циліндра дорівнює 6 см, а площа повної поверхні — 80π см^2. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

41. Висота циліндра на 5 см більша за його радіус, а площа повної поверхні дорівнює 150π см^2. Знайдіть радіус основи й висоту циліндра.

42. Твірна конуса на 4 см більша за його радіус, а площа повної поверхні дорівнює 96π см^2. Знайдіть радіус основи й висоту конуса.

43. Відношення довжини висоти конуса до довжини його радіуса дорівнює m. Знайдіть відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи.

44. Відношення довжини висоти циліндра до довжини його радіуса дорівнює k. Знайдіть відношення площі повної поверхні циліндра до площі його основи.

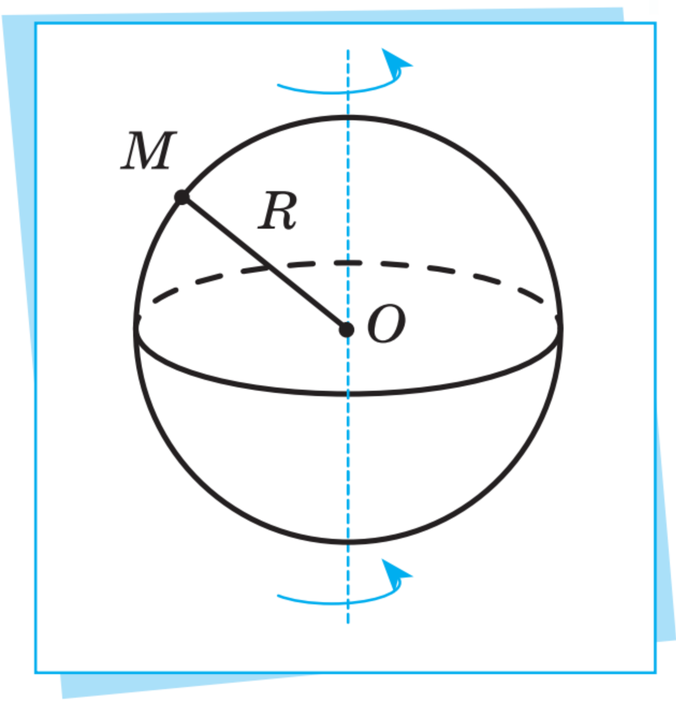
45. Прямокутна трапеція з більшою бічною стороною 6 см і гострим кутом 45° обертається навколо більшої основи. Обґрунтуйте, що бічна поверхня утвореного тіла обертання складається з бічних поверхонь циліндра та конуса. Знайдіть площу повної поверхні утвореного тіла обертання, якщо менша основа трапеції дорівнює її меншій бічній стороні.

46. Прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і гострим кутом 30° обертається навколо гіпотенузи. Обґрунтуйте, що поверхня утвореного тіла обертання складається з бічних поверхонь двох конусів. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла обертання.



Цікавинки від дідуся Тараса

Крім циліндра й конуса, корисним у застосуваннях є ще одне тіло обертання — куля. Кулю можна утворити обертанням круга навколо будь-якого з діаметрів цього круга (див. рисунок). При цьому центр круга (точку O) називають центром кулі, а радіус круга (відрізок OM) — радіусом кулі. Радіусом кулі також називають довжину відрізка OM і записують $OM = R$.



З іншого боку, усі точки кулі розташовані від її центра на відстані, не більшій за радіус круга. Тобто куля — це просторовий аналог круга.

Просторовим аналогом кола на площині є поверхня кулі — сфера. Сферу можна утворити обертанням кола навколо будь-якого з діаметрів цього кола. При цьому центр цього кола називають центром сфери, а радіус кола — радіусом сфери. Зрозуміло, що всі точки сфери розташовані від її центра на відстані, що дорівнює радіусу сфери.

Об'єкти у формі кулі та сфери мають численні застосування в науці, техніці та повсякденному житті. Наприклад, форму кулі мають м'ячі для різних видів спорту, елементи підшипників, зірки, планети тощо. Астрономи моделюють розташування зірок на небесній сфері, а географи використовують сферу як модель поверхні Землі.

Площу сфери обчислюють за формулою $S = 4\pi R^2$, де R — радіус сфери. Із доведенням цієї формули ви ознайомитесь у старшій або вищій школі.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи доводилося вам у повсякденному житті мати справу з об'єктами, що мають форму кулі або сфери? Якщо так, то поділіться досвідом.

2. На заняттях гуртка з математики проведіть конкурс на найцікавішу задачу практичного змісту, яка потребує обчислення площі поверхні геометричного тіла (многогранника або тіла обертання).

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}+\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$.

2. Розв'яжіть нерівність.

   а) $2x-1>4(x+2)$; б) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{3x}{4}\leqslant x$.

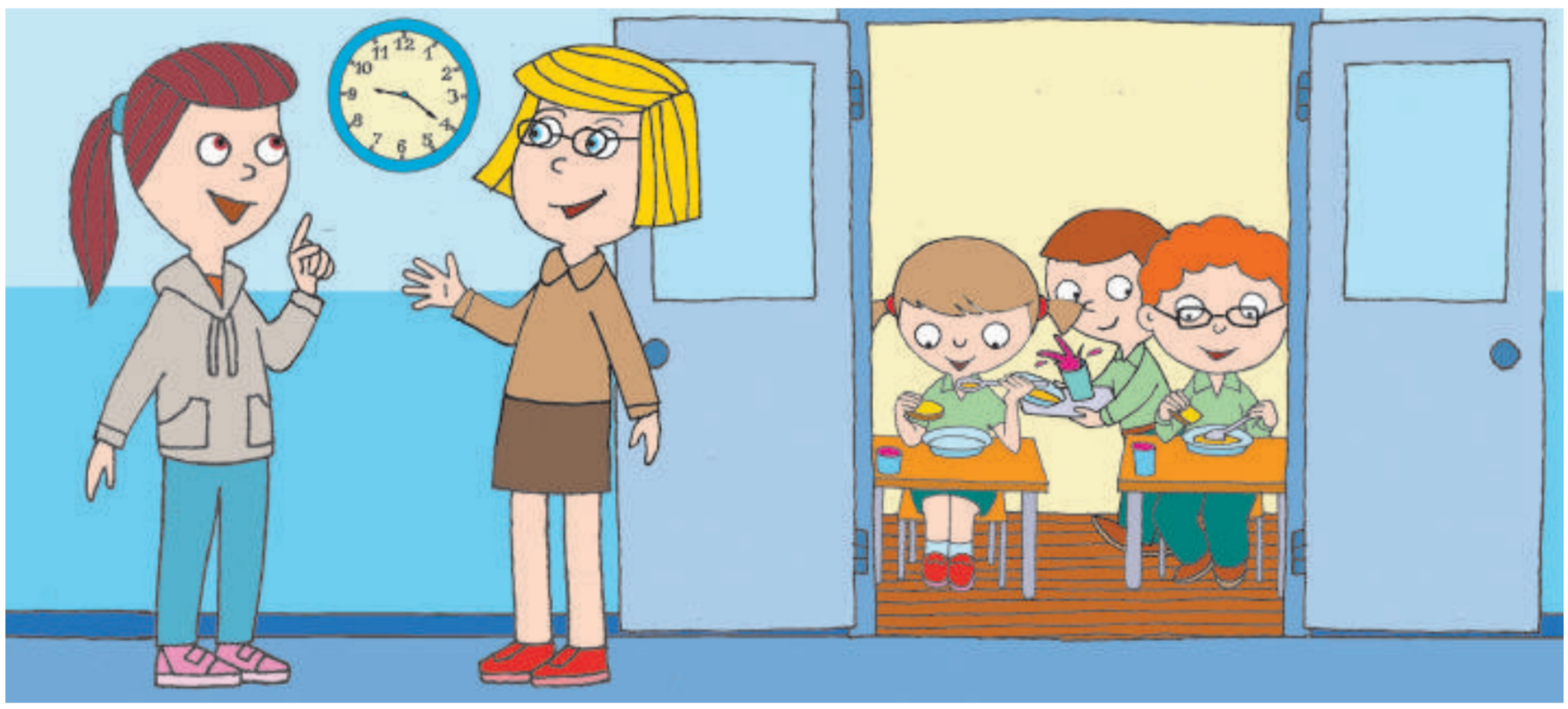
3. Задано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-1;4)$, $B(3;0)$, $C(2;-7)$. Знайдіть довжину медіани CM цього трикутника.

4. Задано квадрат $ABCD$ зі стороною 9 см, точка O є точкою перетину діагоналей AC і BD квадрата. Якою геометричною фігурою є множина X усіх точок площини, відстань від яких до точки O не перевищує 3 см? Яку частину площі квадрата займає множина X?

5. Запишіть у дужках слово, що одночасно є завершенням слова зліва від дужок і початком слова справа від дужок. Кількість крапок у дужках позначає кількість букв шуканого слова.

а) ПА (. . . .) КА; б) ПРИ (. . . .) ФОН.

§ 20. Геометричний підхід до обчислення ймовірностей. Використання формул площ многокутників для обчислення ймовірностей





Слухай, Петрику, нещодавно зі мною трапився цікавий випадок. Я домовилася з подружкою з паралельного класу зустрітися біля їдальні на перерві між уроками. Але ніхто з нас двох точно не знав, коли прийде. Тому ми домовилися, що та з нас, яка прийде першою, чекатиме іншу не більше 5 хвилин і, якщо не дочекається, то піде, а зустріч перенесемо на наступну перерву. Тривалість перерви 15 хвилин. Мені здавалося, що ймовірність

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

того, що ми зустрінемось, невелика: $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. Але, на мій подив, ми таки зустрілися. І я задумалася, що, можливо, помилилась у своїх розрахунках і ця ймовірність була не така вже й мала.



Справді цікавий випадок. Спробуймо розібратися. Імовірності подій ми вже вміємо знаходити, причому навіть двома способами — класичним і статистичним. Статистичний тут не підійде, бо ви лише один раз зустрічалися. Тому спробуємо класичний. Для цього способу треба розібратися, якими є найпростіші наслідки для випадкового експерименту, тобто для твоєї зустрічі з подружкою. Час твого приходу до їдальні від початку перерви — це будь-яке число від 0 до 15, а час приходу твоєї подружки — також те саме число. Виходить, що елементарною подією в цьому випадку буде впорядкована пара чисел $(x;y)$, де $x\in[0;15]$, $y\in[0;15]$. Але ж таких пар чисел — нескінченна кількість! Тому класичний спосіб тут теж не підходить.

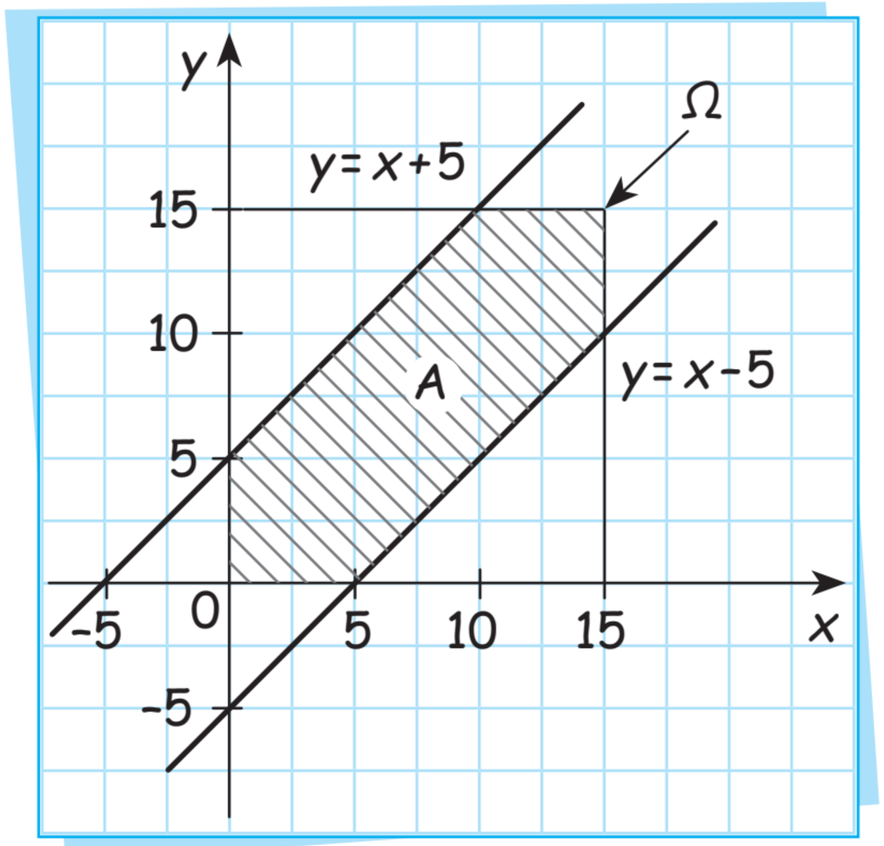


Нічого, вигадаємо ще один. Головне, що всі ці пари чисел — рівноможливі, бо час приходу кожної з нас, по суті, обирається навмання. Ти добре придумав назвати час приходу буквами x і y. Зобразимо всі можливі варіанти для нашої зустрічі в системі координат. У мене якраз є аркуш паперу й ручка. Бачимо, що всі елементарні події для нашого експерименту в системі координат задають квадрат зі стороною 15. Потрапити в цей квадрат за нашої домовленості — це достовірна подія, тому пропоную позначити його Ω.



Здається, я знаю як далі діяти. Дивись, щоб ви зустрілися (тобто щоб відбулася подія A), потрібно, аби різниця між вашими часами приходу була не більша за 5 хвилин, тобто $x-y\leqslant 5$ або $y-x\leqslant 5$ (залежно від того, хто з вас прийде першою). Це означає, що $x-5\leqslant y\leqslant x+5$. Усі ці точки в системі координат лежатимуть усередині квадрата Ω, але вище за пряму $y=x-5$ і нижче за пряму $y=x+5$. Я зафарбую відповідну геометричну

фігуру й позначу її буквою A. Ось, поглянь на рисунок. Якщо знайти, яку частину квадрата Ω займає фігура A, то це й буде ймовірність того, що ви зустрінетесь.





А це вже зовсім просто! Для характеристики величини плоских фігур зазвичай використовують площу. Площа квадрата $S(\Omega)=15^2=225$, а площу фігури A можна знайти, якщо відняти від площі квадрата площу двох однакових рівнобічних прямокутних трикутників, катети яких дорівнюють 10. Навіть можна зробити простіше: ці два трикутники разом теж утворюють квадрат зі стороною 10. Тому $S(A)=225-10^2=125$. Тепер імовірність моєї зустрічі з подружкою $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{125}{225}=\dfrac{5}{9}\approx 0{,}56=56\,\%$. І справді, я помилялася: ця ймовірність навіть більша за 50 %, тому не дивно, що ми зустрілися.



Я б назвав такий спосіб обчислення ймовірностей випадкових подій *геометричним способом*. Гм, чомусь упевнений, що ми з тобою, Тетянко, вчергове винайшли велосипед і про цей спосіб давно всім відомо. Проте мені все одно подобається така робота, бо це — наш із тобою велосипед, а не чийсь іще! Але я також упевнений, що вчителі знають про геометричні ймовірності ще більше цікавого.

Запитайте про значення фразеологізму «винаходити велосипед» у вчительки або вчителя української мови. Чи згодні ви, що Петрик і Тетянка щойно винайшли велосипед у традиційному значенні цього фразеологізму?



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Справді, Петрику, тут дійсно ще багато цікавого. Але спочатку згадаємо, що всі події, імовірності яких ми обчислюємо, відбуваються внаслідок певної сукупності умов навколишнього світу, яку називають випадковим (стохастичним) експериментом або просто експериментом. Будь-який наслідок випадкового експерименту називають випадковою подією або просто подією та зазвичай позначають великою латинською буквою (A, B, C тощо).

Якщо внаслідок експерименту деяка випадкова подія не може відбутися, то таку подію називають неможливою і позначають символом $\varnothing$ (порожня множина). Якщо ж унаслідок експерименту деяка випадкова подія відбувається завжди, то таку подію називають достовірною та позначають символом Ω (омега).



Імовірністю випадкової події A називають дійсне число $P(A) \in [0;1]$, яке характеризує ступінь можливості її здійснення. Домовились, що $P(\varnothing)=0$ і $P(\Omega)=1$.

Підхід до обчислення ймовірності випадкової події залежить від експерименту, внаслідок якого вона може відбутися. Ви вже знаєте два підходи до обчислення ймовірностей — класичний і статистичний.

Класичний підхід використовують тоді, коли серед усіх наслідків експерименту можна виокремити його найпростіші наслідки — елементарні події. Вони задовольняють такі вимоги:

- усі елементарні події є рівноможливими;
- принаймні одна з елементарних подій внаслідок експерименту має відбутися;
- дві різні елементарні події унаслідок експерименту одночасно не відбуваються.

Якщо загальна кількість елементарних подій скінченна, то ймовірність випадкової події можна обчислити за формулою:

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

де n — загальна кількість елементарних подій,

k — кількість елементарних подій, з яких складається подія A (сприятливих для A елементарних подій).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Імовірності випадкових подій також можна обчислювати й за статистичним підходом. Суть цього підходу полягає в проведенні серії з n однакових випробувань, унаслідок кожного з яких подія A може відбутися. Якщо після цієї серії випробувань подія A відбулася k разів, то число $\omega(A)=\frac{k}{n}$ називають відносною частотою події A в даній серії випробувань. *За досить великих значень* n значення $\omega(A)$ вважають наближеним значенням імовірності події A, тобто

$$P(A)\approx\omega(A)=\frac{k}{n}.$$

Більше про обчислення ймовірностей за класичним і статистичним підходами: rnk.com.ua/113086





Однак існує ще один підхід до обчислення ймовірностей. Якщо серед усіх наслідків випадкового експерименту можна виокремити *нескінченну* множину елементарних подій, яка задає певну фігуру на прямій або на площині, то ймовірності випадкових подій можна обчислити за геометричним підходом. Розглянемо приклад.

Приклад 1

У квадраті зі стороною $a=10$ см навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка опиниться всередині вписаного в цей квадрат круга (рис. 20.1)?

Розв'язання. Множина елементарних подій для описаного випадкового експерименту — це множина всіх точок квадрата. Позначимо її Ω. Ця множина задовольняє всі вимоги до множини елементарних подій (*переконайтеся в цьому самостійно*).

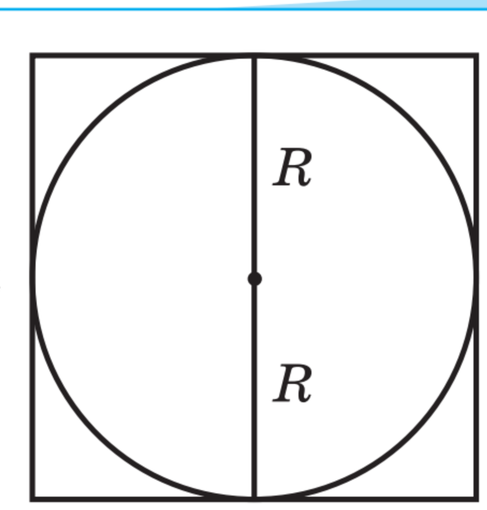


Рис. 20.1

За умовою подія A складається з елементарних подій — усіх точок круга, вписаного в квадрат Ω. Зрозуміло, що і квадрат Ω, і вписаний у нього круг A містять нескінченну кількість точок, а отже, застосувати класичний підхід до обчислення ймовірності події A в цьому випадку неможливо. Ця ймовірність має бути тим більшою, чим більшу частину становить «величина» фігури, заданої всіма точками, що відповідають події A, від «величини» фігури, яку задає множина всіх елементарних подій Ω. Як слушно зауважила Тетянка, характеристикою «величини» геометричної фігури на площині є площа. Тому природно вважати в цьому випадку, що *ймовірність події A можна обчислити за формулою*:

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

де $S(\Omega)$ — площа геометричної фігури, яка задана множиною Ω всіх елементарних подій, а $S(A)$ — площа геометричної фігури, яка задана всіма точками, що відповідають випадковій події A.

Для прикладу 1 очевидно, що $S(\Omega)=10^2=100$ см^2. Оскільки радіус круга, вписаного в квадрат зі стороною $a=10$ см, $R=\frac{a}{2}=5$ см, то $S(A)=\pi R^2=25\pi$. Отже, $P(A)=\frac{25\pi}{100}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785=78{,}5\,\%$.



Розглянемо ще один приклад.

Приклад 2

Компанія з доставки води завжди привозить воду в інтервал часу, визначений замовником, але не може передбачити, коли саме, через невизначеність трафіку на дорогах. Родина Мотренків замовила доставку води в цій компанії в період із 12:00 до 15:00. Якою є ймовірність того, що воду доставлять не пізніше 12:30?

Розв'язання. За умовою всі моменти часу доставки є рівномож-ливими. Крім того, воду обов'язково доставлять у якийсь один кон-кретний момент часу x від 12:00 до 15:00, тобто $12 \leqslant x \leqslant 15$. Дана нерівність задає відрізок від 12 до 15 на числовій прямій, який можна вважати множиною всіх елементарних подій для описаного в прикладі 2 випадкового експерименту. Цей відрізок позначимо Ω (рис. 20.2).

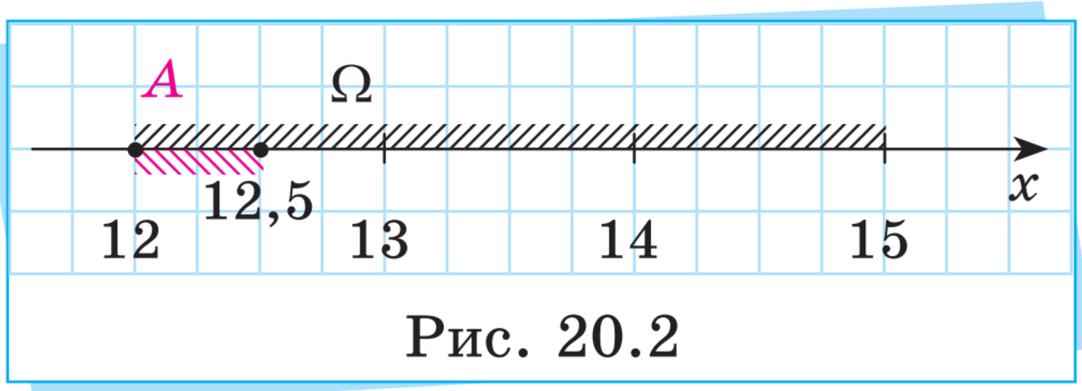


Рис. 20.2

Подія A полягає в тому, що час x доставки води буде між 12:00 і 12:30, тобто $12 \leqslant x \leqslant 12{,}5$. На числовій прямій остання нерівність задає відрізок від 12 до 12,5. Заштрихуємо на рис. 20.2 цей від-різок іншим кольором і позначимо його буквою A. За аналогією з прикладом 1, імовірність події A має бути тим більшою, чим більшу частину становить «величина» відрізка, що задає множина всіх елементарних подій A, від «величини» відрізка, який задає множина всіх елементарних подій Ω. Характеристикою «величини» геометричної фігури на прямій є довжина. Тому природно вважати в цьому випадку, що *ймовірність події A можна обчислити за формулою*:

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)},$$

де $l(\Omega)$ — довжина відрізка, який задає множина Ω всіх елементар-них подій; $l(A)$ — довжина відрізка, який задає множина всіх еле-ментарних подій випадкової події A.

Для прикладу 2 очевидно, що $l(\Omega) = 15 - 12 = 3$, а $l(A) = 12{,}5 - 12 = 0{,}5$. Тому $P(A) = \frac{0{,}5}{3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 = 17\,\%$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Отже, за геометричним підходом імовірність випадкової події A можна обчислити за формулою:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

де $m(\Omega)$ — довжина або площа геометричної фігури, яку задає множина Ω всіх елементарних подій; $m(A)$ — довжина або площа геометричної фігури, яку задає множина всіх елементарних подій випадкової події A.

Для випадку, коли A і Ω є частиною прямої, в останній формулі замість букви m записують букву l, а для випадку, коли A і Ω є частиною площини, то замість букви m записують букву S.



Для знаходження площ геометричних фігур у задачах на обчислення ймовірностей подій за геометричним підходом можуть використовуватися всі відомі вам раніше формули площ многокутників, а також формули площі круга та площі сектора.

Більше про це:
rnk.com.ua/113087



Перевірте себе!

1. Дайте означення: а) випадкового експерименту; б) випадкової події; в) неможливої події; в) достовірної події.
2. Що таке ймовірність випадкової події і як її можна обчислити: а) за класичним підходом; б) за статистичним підходом; в) за геометричним підходом?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Прочитайте опис випадкової події. Чи є ця подія достовірною? Чи є ця подія неможливою?

а) У порожній кошик поклали 10 зелених груш. З кошика витягли жовту грушу.

б) Марко розгорнув підручник із математики й побачив там цифри.

в) Ольга гуляла парком і зустріла свою подругу Олену.

г) Роман зайшов у кафе та купив пиріжок із вишнею.

2. Прочитайте опис випадкової події. Чи є ця подія достовірною? Чи є ця подія неможливою?

а) У коробці лежать 8 чорних шкарпеток. Із коробки витягли чорну шкарпетку.

б) Марія розгорнула підручник з історії і побачила там цифри.

в) Степан пішов у кіно та зустрів свого дядька Семена.

г) Оксана гуляла берегом озера та зустріла справжнього живого динозавра.

3. Придумайте та запишіть випадковий експеримент і дві достовірні події, які є його наслідками.

4. Придумайте та запишіть випадковий експеримент і дві неможливі події, які є його наслідками.

5. На числовій прямій зображено точки A, B, C та D (рис. 1). На відрізку AD випадковим чином вибирають точку з координатою, яка є цілим числом. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку BC? Для виконання завдання порахуйте всі точки із цілочисельними координатами на відрізку BC, потім — на відрізку AD. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

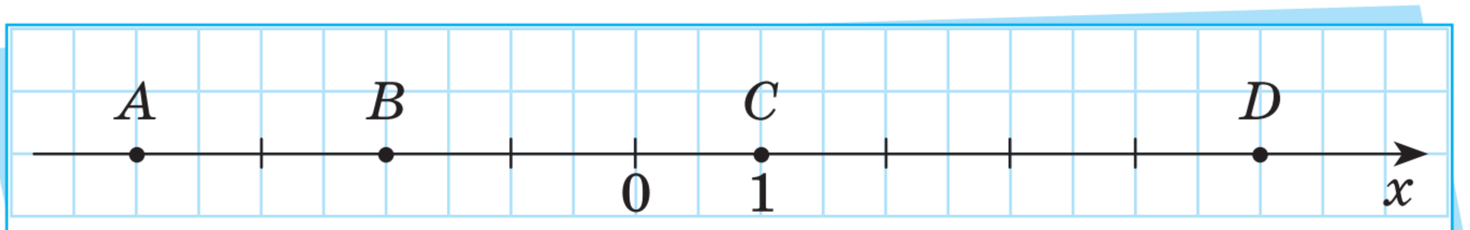


Рис. 1

6. На числовій прямій зображено точки K, L, M і N (рис. 2). На відрізку KN випадковим чином вибирають точку з координатою, яка є цілим числом. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку LM? Для виконання завдання порахуйте всі точки із цілочисельними координатами на відрізку LM, потім — на відрізку KN. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

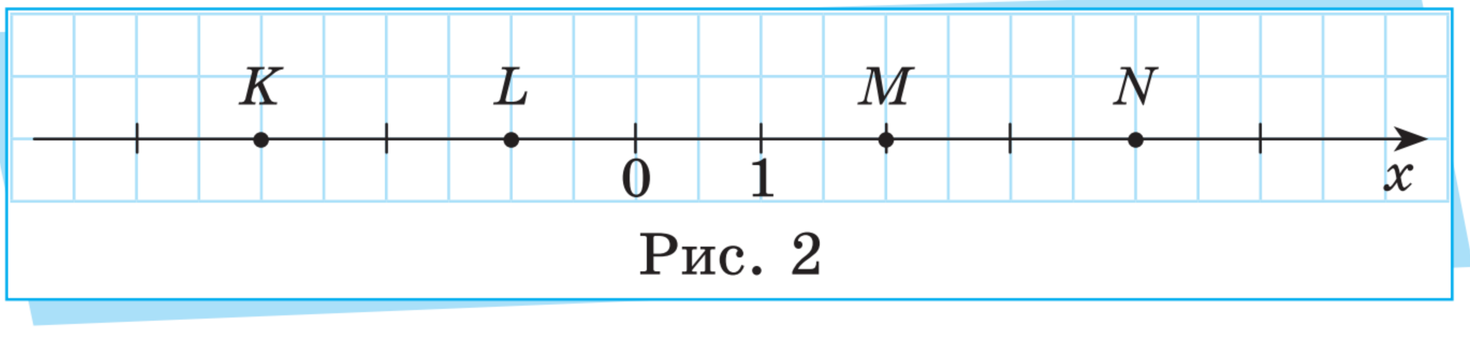


Рис. 2

7. На числовій прямій зображено точки A, B, C, D (див. рис. 1). На відрізку AD випадковим чином вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку BC? Для виконання завдання обчисліть довжину відрізка BC, потім — відрізка AD. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

8. На числовій прямій зображено точки K, L, M, N (див. рис. 2). На відрізку KN випадковим чином вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку LM? Для виконання завдання обчисліть довжину відрізка LM, потім — відрізка KN. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

9. У ПДСК зображено прямокутник, квадрат і точки, обидві координати яких є цілими числами (рис. 3). У прямокутнику навмання вибирають одну з таких точок. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме квадрату? Для виконання завдання порахуйте всі точки із цілочисельними координатами у квадраті, потім — у прямокутнику. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

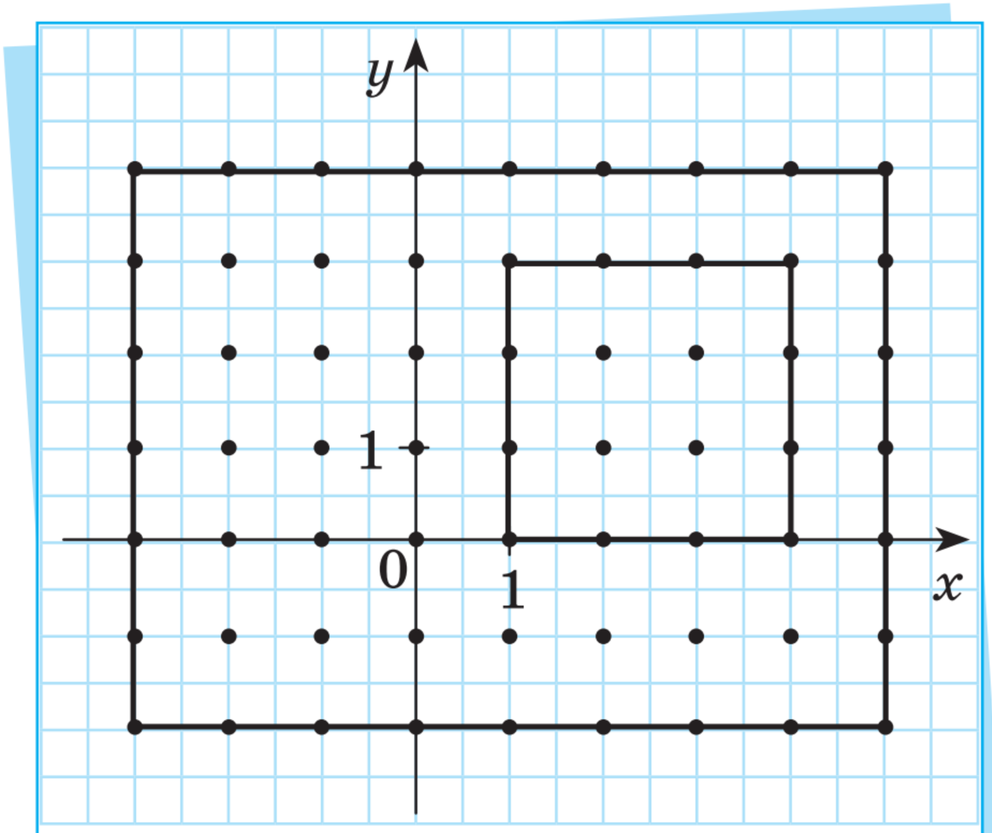


Рис. 3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

10. У ПДСК зображено два квадрати й точки із цілочисельними координатами (рис. 4). У більшому квадраті навмання вибирають одну з таких точок. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме меншому квадрату? Для виконання завдання порахуйте всі точки із цілочисельними координатами в меншому квадраті, потім — у більшому. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

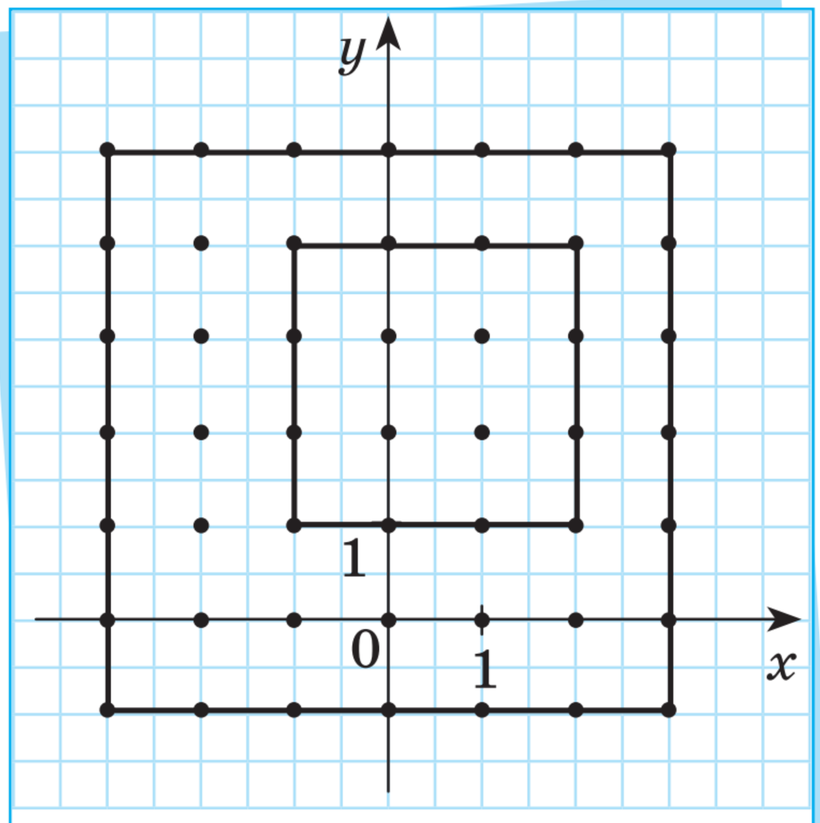


Рис. 4

11. У ПДСК зображено прямокутник і квадрат (рис. 5). У прямокутнику навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме квадрату? Для виконання завдання обчисліть площу квадрата, потім — прямокутника. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

12. У ПДСК зображено два квадрати (рис. 6). У більшому квадраті навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме меншому квадрату? Для виконання завдання обчисліть площу меншого квадрата, потім — більшого. Тоді знайдіть відношення першого числа до другого.

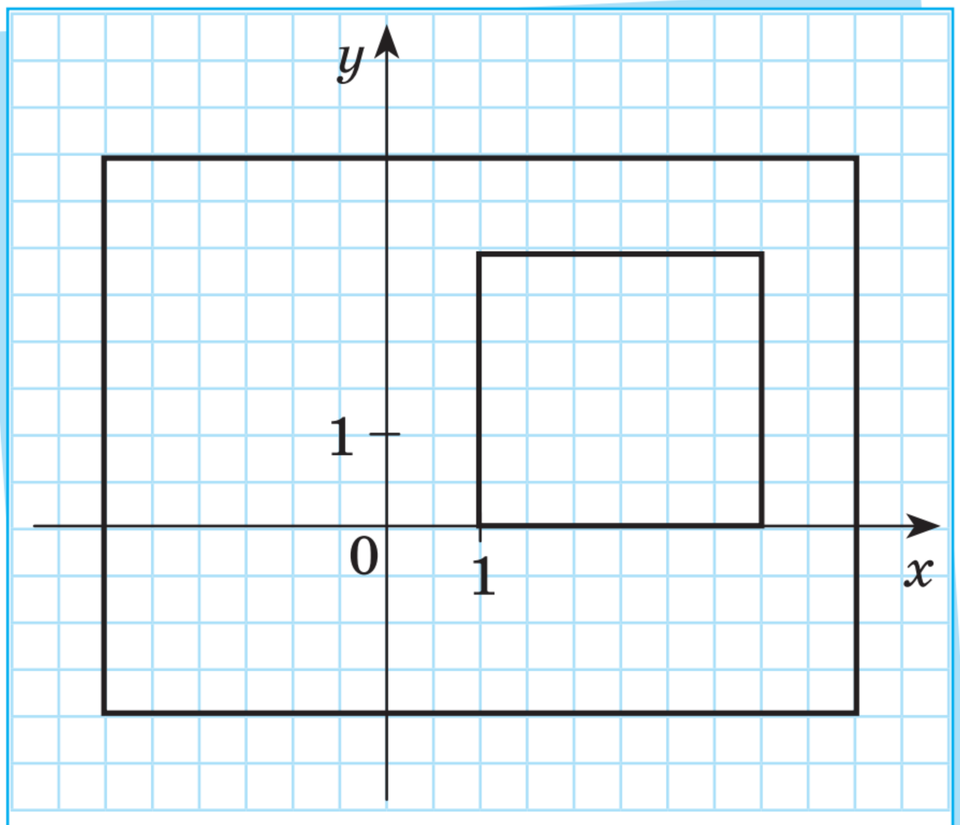


Рис. 5

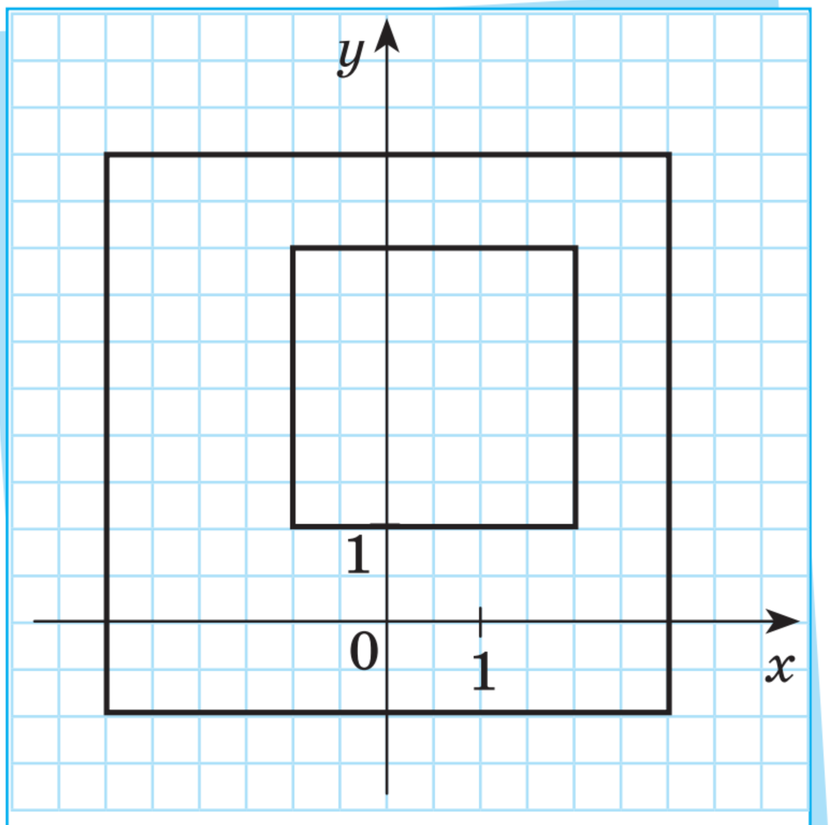


Рис. 6

Середній рівень

13. Придумайте й запишіть випадковий експеримент, пов'язаний зі шкільним життям, а також дві випадкові події, які не є ні достовірними, ні неможливими, що є наслідками цього експерименту.

14. Придумайте й запишіть випадковий експеримент, пов'язаний з покупками в магазині, а також дві випадкові події, які не є ні достовірними, ні неможливими, що є наслідками цього експерименту.

15. На відрізку AB, довжина якого дорівнює 8 см, взято точки K, L і M так, що $AK = KL = LM = MB = 2$ см. Після цього на відрізку AB навмання поставили точку S. Якою є ймовірність того, що точка S опиниться між точками M і B?

16. На відрізку AB, довжина якого дорівнює 10 см, взято точки C і D так, що $AC = DB = 4$ см. Після цього на відрізку AB навмання поставили точку O. Якою є ймовірність того, що точка O опиниться між точками D і B?

17. Після бурі на лісовій ділянці площею 90 га виявлено місце влучання блискавки. Якою є ймовірність того, що блискавка влучила в межах східної частини ділянки площею 10 га?

18. У Національному парку площею 200 га проводиться моніторинг переміщення вовчої зграї. Якою є ймовірність того, що під час випадкового спостереження зграю буде виявлено в західному секторі Національного парку? Площа західного сектора парку — 40 га.

19. У кімнаті, площа якої 12 м^2 (рис. 7), у випадковому місці стелі виникло протікання дощової води. Обчисліть імовірність того, що краплі води внаслідок протікання потраплять на прямокутний стіл, який стоїть у кімнаті, якщо довжина стола 1,5 м, а ширина — 0,6 м. Одержане значення ймовірності округліть до сотих.

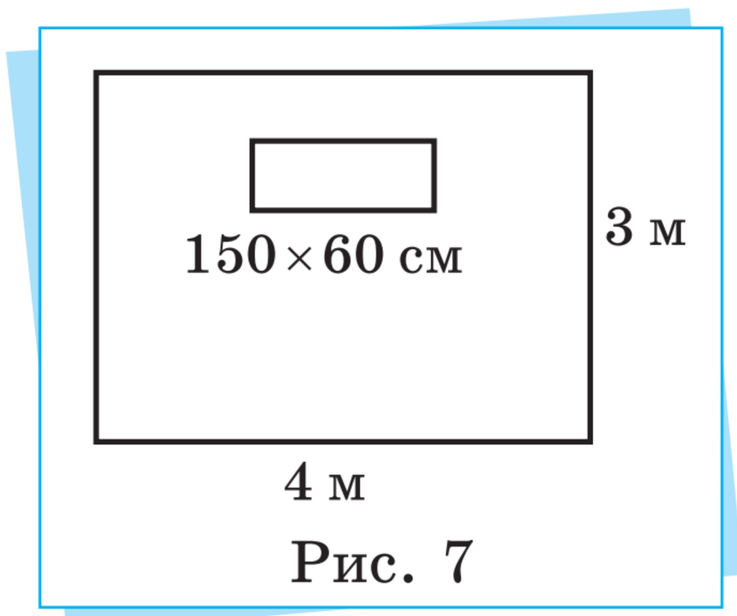


Рис. 7

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

20. У теплиці площею 20 м^2 у випадковому місці даху з'явилася дірка, через яку під час дощу затікає вода. Відомо, що 8 м^2 площі теплиці займають грядки з огірками, а решта 12 м^2 — грядки з помідорами. Знайдіть ймовірність того, що вода потрапить саме на грядку з огірками. Одержане значення ймовірності округліть до сотих.

21. У ПДСК зображено трикутник і прямокутник (рис. 8). У прямокутнику навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме трикутнику?

22. У ПДСК зображено трикутник і квадрат (рис. 9). У квадраті навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме трикутнику?

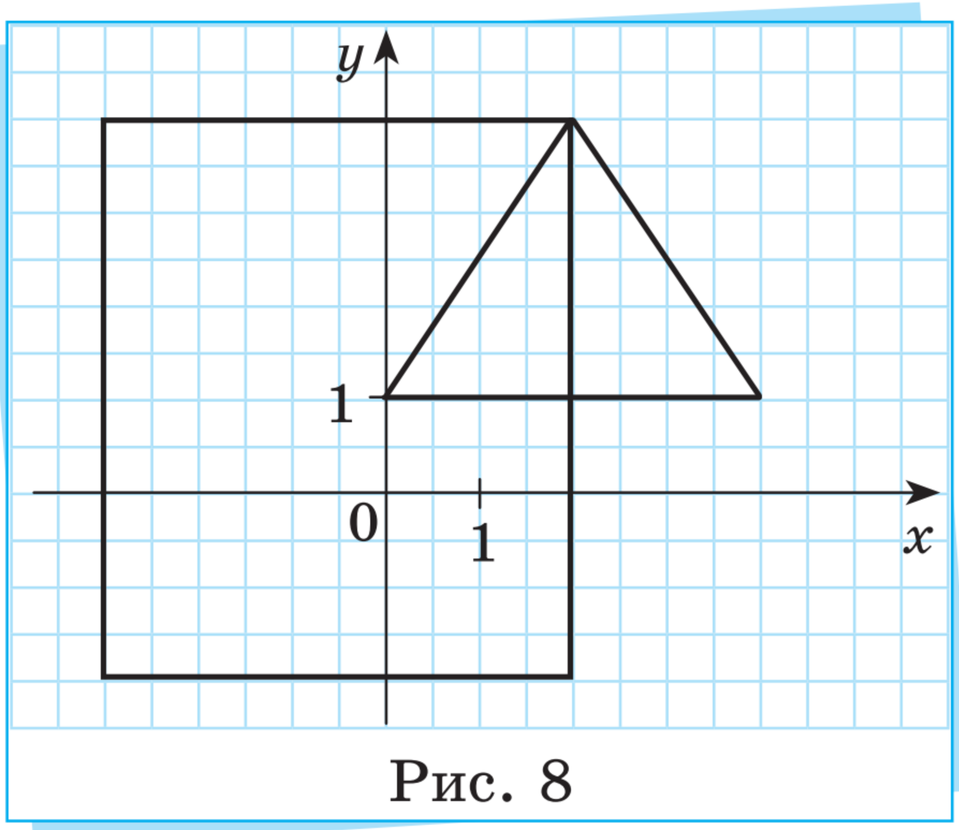


Рис. 8

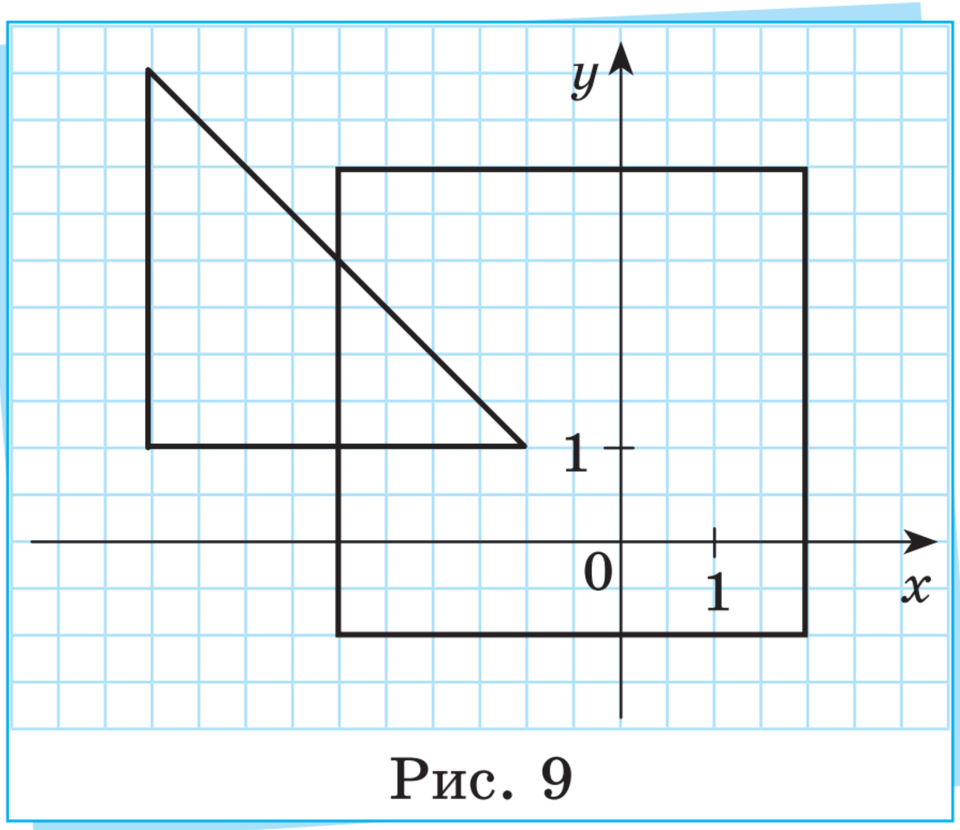
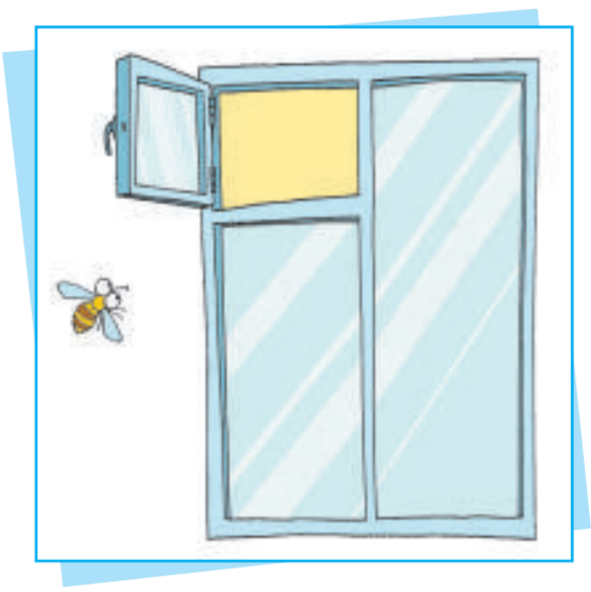


Рис. 9

23. У ПДСК зображено трикутник і прямокутник (див. рис. 8). У трикутнику навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме прямокутнику?

24. У ПДСК зображено трикутник і квадрат (див. рис. 9). У трикутнику навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме квадрату?

25. Бджола навмання прямує у вікно. Якою є ймовірність того, що вона не потрапить у кімнату через відчинену кватирку, якщо розміри вікна 80 см × 120 см, а розміри кватирки — 35 см × 40 см?



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

26. Джміль навмання прямує у вікно. Якою є ймовірність того, що він потрапить у кімнату через відчинену кватирку, якщо розміри вікна 90 см × 140 см, а розміри кватирки — 40 см × 50 см?

Достатній рівень

27. Після бурі на ділянці між 100-м і 150-м кілометрами електричної лінії стався обрив кабелю. Якою є ймовірність того, що обрив стався між 120-м і 130-м кілометрами? Вважайте, що електрична лінія прямолінійна, а обрив міг статися рівноможливо в будь-якому місці кабелю на цій ділянці.

28. Під час грози рівноможливо в будь-який момент часу з 14:00 до 16:00 на електростанції міг статися збій у роботі системи. Якою є ймовірність того, що цей збій стався між 15:30 і 16:00?

29. У крузі, радіус якого дорівнює $2\sqrt{2}$ см, навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка опиниться всередині квадрата, вписаного в цей круг? Відповідь округліть до сотих; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

30. У крузі, радіус якого дорівнює 6 см, навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка опиниться всередині квадрата, вписаного в цей круг? Відповідь округліть до десятих; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

31. У трикутник, площа якого дорівнює 84 $см^2$, а периметр — 42 см, вписано круг. У цьому трикутнику навмання вибирають точку. Обчисліть імовірність того, що ця точка потрапить всередину вписаного круга. Відповідь округліть до тисячних; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

32. У трикутник, площа якого дорівнює 48 $см^2$, а периметр — 32 см, вписано круг. У цьому трикутнику навмання вибирають точку. Обчисліть імовірність того, що ця точка потрапить усередину вписаного круга. Відповідь округліть до тисячних; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

33. У круг діаметра 10 см вписано прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. З'ясуйте, якою є ймовірність того, що точка, навмання вибрана в крузі, обмеженому цим колом: а) потрапить

у трикутник; б) не потрапить у трикутник. Відповідь округліть до сотих; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

34. У коло діаметра 26 см вписано прямокутний трикутник із катетами 10 см і 24 см. З'ясуйте, якою є ймовірність того, що точка, навмання вибрана в крузі, обмеженому цим колом: а) потрапить у трикутник; б) не потрапить у трикутник. Відповідь округліть до сотих; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

35. Дві вантажні машини можуть прибути на завантаження в проміжок часу від 18:00 до 19:30. Завантаження першої вантажівки триватиме 15 хв, а завантаження другої — 20 хв. Якою є ймовірність того, що одній із вантажних машин доведеться чекати завершення завантаження іншої?

36. Тарас і Максим щосереди заходять до бібліотеки в проміжок часу з 14:00 до 15:00. Кожен із них проводить у бібліотеці 15 хв. Якою є ймовірність того, що хлопці зустрінуться в бібліотеці?

Високий рівень

37. На відрізку AB довжиною a довільним чином вибрали точку M, яка розбиває його на два відрізки AM і MB. Знайдіть імовірність того, що менший із цих відрізків має довжину, більшу за $\frac{a}{3}$.

38. Нитка довжиною 20 см розірвалася в довільній точці. Знайдіть імовірність того, що якась із одержаних частин матиме довжину, не меншу за 16 см.

39. Випадковим чином вибирають одне із чисел, яке є розв'язком нерівності $|x| \leqslant 5$. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться розв'язком нерівності $3x - 2 \leqslant 4$.

40. Випадковим чином вибирають одне із чисел, яке є розв'язком нерівності $|x| \leqslant 6$. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться розв'язком нерівності $2x + 1 \geqslant 5$.

41. Навмання вибирають два невід'ємні числа, кожне з яких не більше за 4. Знайдіть імовірність того, що сума цих чисел не більша за 2.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

42. Навмання вибирають два невід'ємні числа, кожне з яких не більше за 2. Знайдіть імовірність того, що сума цих чисел не менша від 1.

43. Навмання вибирають два недодатні числа, кожне з яких не менше за -3. Знайдіть імовірність того, що сума квадратів цих чисел не більша за 4. Відповідь округліть до сотих; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

44. Навмання вибирають два невід'ємні числа, кожне з яких не більше за 4. Знайдіть імовірність того, що сума квадратів цих чисел не менша від 1. Відповідь округліть до сотих; вважайте, що $\pi \approx 3{,}14$.

45. Катруся й Тетянка домовилися зустрітися біля театру між 19:00 і 20:00. Кожна приходить у випадковий момент із указаного проміжку часу й чекає іншу не більше 15 хв у вказаному проміжку, після чого йде у своїх справах. Знайдіть імовірність того, що Тетянка зустрінеться з Катрусею, яка прийшла першою.

46. Петрик і Дмитрик домовилися зустрітися біля школи між 17:00 і 18:00. Кожен приходить у випадковий момент з указаного проміжку й чекає іншого, але Петрик чекає на Дмитрика не більше 20 хв, а Дмитрик чекає на Петрика не більше 10 хв. Знайдіть імовірність того, що зустріч хлопців відбудеться.

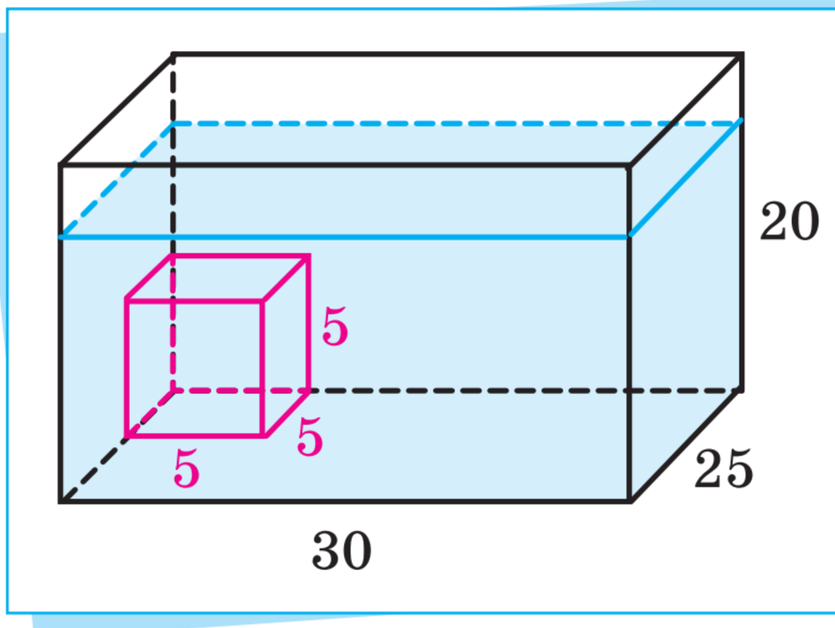


Цікавинки від дідуся Тараса

Геометричний підхід до обчислення ймовірностей може бути узагальнений і на просторовий випадок, якщо найпростіші наслідки деякого випадкового експерименту (елементарні події) можна описати за допомогою нескінченної множини (геометричної фігури), яка є частиною простору. Характеристикою «величини» просторової геометричної фігури є об'єм. Тому природно вважати в цьому випадку, що *ймовірність події A можна обчислити за формулою* $P(A)=\dfrac{V(A)}{V(\Omega)}$,

де $V(\Omega)$ — об'єм геометричної фігури, яка відповідає множині Ω всіх елементарних подій, а $V(A)$ — об'єм геометричної фігури, яка відповідає випадковій події A.

Наприклад, нехай в акваріумі, що має форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами дна 30 см і 25 см, висота стовпа води становить 20 см (див. рисунок). У цьому акваріумі плаває мальок золотої рибки. Знайдемо ймовірність того, що під час фотографування він перебуватиме в дальньому кутку акваріума — у кубі з ребром 5 см.



Оскільки мальок рибки дуже маленький, то будемо вважати його точкою. Передбачити його рух в акваріумі неможливо, а отже, природно вважати всі точки виявлення малька на фото рівноможливими. Тому в цьому випадку множиною всіх елементарних подій є всі точки прямокутного паралелепіпеда Ω з вимірами 30 см, 25 см і 20 см, а множиною, яка відповідає випадковій події A = «Мальок перебуватиме в дальньому кутку акваріума», є всі точки куба A з ребром 5 см.

Отже, $P(A)=\dfrac{V(A)}{V(\Omega)}=\dfrac{5^3}{30\cdot 25\cdot 20}=\dfrac{125}{15000}=\dfrac{1}{120}\approx 0{,}0083=0{,}83\,\%$.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи доводилося вам у повсякденному житті користуватися геометричним способом для обчислення ймовірностей випадкових подій? Якщо так, то поділіться досвідом.

2. Користуючись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про визначні математичні задачі, пов'язані з геометричним підходом до обчислення ймовірностей подій, зокрема про *парадокс Бертрана*. Підготуйте невелике повідомлення.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$ і геометричні перетворення площини, побудуйте графік функції: а) $y=4-\sqrt{x}$; б) $y=2\sqrt{3-x}$.

2. Розв'яжіть нерівність: а) $x^2 > 256$; б) $x^2 \leqslant 256x$.

3. Задано паралелограм $ABCD$, точка O є точкою перетину діагоналей AC і BD цього паралелограма. Виразіть вектор $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

4. Четверо працівників фірми «Борисфен» наприкінці кварталу отримали премію в розмірі 2000 грн, 2500 грн, 3600 грн і 4500 грн. Яке середнє значення доцільно використати для знаходження середнього розміру премії цих працівників? Знайдіть це середнє значення $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення σ.

5. Задано дві послідовності чисел: а) 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...; б) 3, 6, 12, 24, 48, 96, ... Для кожної послідовності чисел знайдіть одну з можливих закономірностей і, використовуючи цю закономірність, запишіть наступні два елементи послідовності.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 6



rnk.com.ua/114535

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Скільки граней має правильна десятикутна призма?

А	Б	В	Г
10	11	11	20

2. Правильна піраміда має загалом 18 ребер. Який многокутник є основою цієї піраміди?

А	Б	В	Г
6-кутник	8-кутник	9-кутник	15-кутник

3. Задано конус із висотою H, радіусом основи R і твірною L. Укажіть формулу, за якою можна обчислити площу $S_б$ *бічної* поверхні конуса.

А	Б	В	Г
$S_б = \pi RL$	$S_б = 2\pi RH$	$S_б = \pi R(R + L)$	$S_б = 2\pi R(R + H)$

4. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює m, а сторона її основи — a. Укажіть формулу, за якою обчислюється площа S *повної* поверхні цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$S=a^2+4am$	$S=2a^2+4am$	$S=2am$	$S=a^2+2am$	$S=4am$

5. На координатній прямій позначено точки $M(2)$ і $K(7)$ (рис. 1). Точку $A(a)$ навмання вибирають на відрізку MK. Знайдіть імовірність того, що $a \geqslant 3$.

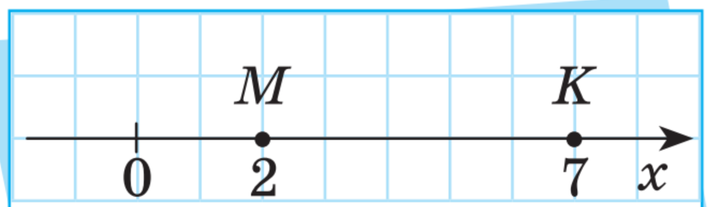


Рис. 1

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$

6. У крузі радіуса $R=10$ см із центром у точці O (рис. 2) навмання вибирають точку F. Якою є ймовірність того, що точка F опиниться *всередині* круга радіуса $r=7$ см із тим самим центром?

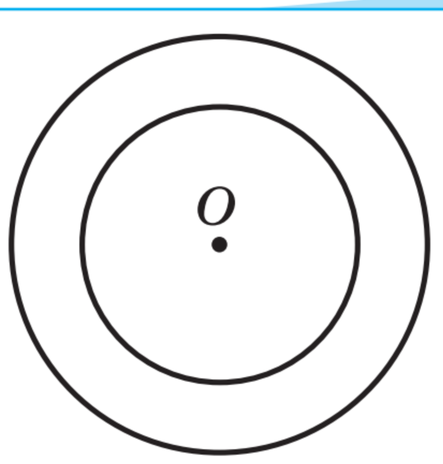


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
0,7	0,51	0,3	0,5	0,49

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Площа повної поверхні правильної десятикутної призми дорівнює 340 см^2, а площа її бічної поверхні — 160 см^2. Знайдіть площу нижньої основи цієї призми (у см^2).

8. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 150π см^2, а його твірна має довжину 30 см. Знайдіть площу S основи цього конуса (у см^2). У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

9. На прямокутний письмовий стіл Оленки розмірами 120 см × 80 см навмання сідає маленька комаха, розмірами

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

якої можна знехтувати. Знайдіть імовірність того, що ця комаха сяде на ноутбук Оленки, який має форму прямокутника розмірами 36 см × 25 см. Відповідь запишіть у відсотках.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. У правильній трикутній піраміді апофема $m = 15$ см, а площа бічної поверхні піраміди $S_б = 270$ см. Знайдіть площу S основи цієї піраміди.

11. Циліндр і конус мають однакові радіус і площу бічної поверхні. Знайдіть відношення довжини висоти циліндра до твірної конуса.

12. Знайдіть площу повної поверхні конуса, утвореного обертанням рівнобічного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, навколо одного з його катетів.

13. Дві команди тягнуть мотузку довжиною 7 м у різні боки доти, доки вона не розірветься. Мотузка з однаковою імовірністю може порватися в будь-якій своїй точці. Якою є ймовірність того, що після розриву в кожної команди залишиться шматок мотузки завдовжки не менш ніж 2 м?

14. Учні 9 класу Макар і Генадій домовилися зустрітися біля кінотеатру між 18:30 і 18:50. Час приходу кожного з них є випадковим і не може бути передбачений заздалегідь. За домовленістю кожен із учнів чекає іншого після свого приходу не довше 10 хвилин, а потім іде. Якою є ймовірність того, що хлопці зустрінуться?

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи дорівнює S, а діагональ бічної грані утворює зі стороною основи кут α.

2. Основою прямої призми є рівнобічний трикутник з кутом α між рівними сторонами. У бічній грані, що проходить через основу рівнобічного трикутника, провели діагональ, яка дорівнює d й утворює із цією основою кут β. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

3. Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10 см, 17 см, $3\sqrt{29}$ см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

4. З'ясуйте, скільки існує різних пірамід, усі ребра яких дорівнюють a. Відповідь обґрунтуйте.

5. Доведіть, що квадрат може бути розгорткою деякої трикутної піраміди.

6. Діагональ квадрата, який лежить в основі правильної чотирикутної піраміди, дорівнює бічному ребру цієї піраміди та становить a. Знайдіть повну поверхню піраміди.

7. Прямокутник з площею S обертається навколо сторони. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного циліндра.

8. Сторони прямокутника дорівнюють a і b. Він обертається спочатку навколо сторони a, потім — навколо сторони b. Знайдіть відношення площ повних поверхонь утворених циліндрів.

9. Площа повної поверхні конуса дорівнює 63π дм^2. Розгорткою бічної поверхні конуса є круговий сектор із дугою 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

10. Відношення бічної і повної поверхонь конуса дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть кут між висотою та твірною цього конуса.

11. Паркетна підлога складена з прямокутних дощок розмірами 6×24 (см). Знайдіть імовірність того, що монета діаметром 2 см, яка випадково впала на підлогу, повністю ляже на одну дошку.

Словничок

Правильна призма (піраміда) — regular prism (pyramid)
Апофема правильної піраміди — apothem of the regular pyramid
Повна (бічна) поверхня циліндра — full (side) surface of a cylinder
Повна (бічна) поверхня конуса — full (side) surface of a cone
Площа поверхні многогранника (тіла обертання) — polyhedron (body of rotation) surface area
Геометричний (класичний, статистичний) підхід до обчислення ймовірностей випадкових подій — geometric (classic, statistical) approach to calculating the probabilities of random events

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

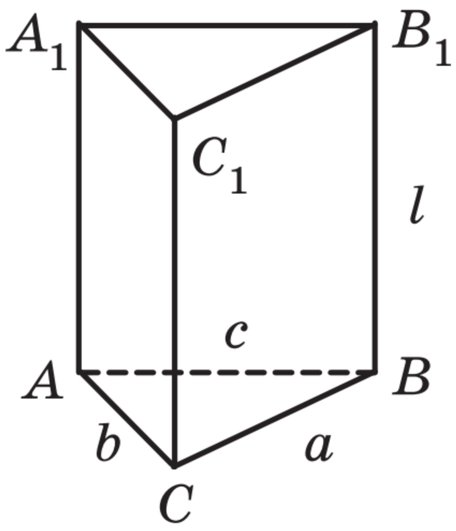
ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 6

Площі поверхонь

$S_{\text{п}}$ — площа повної поверхні, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні,
$S_{\text{о}}$ — площа основи

Многогранники

1 Пряма n-кутна призма



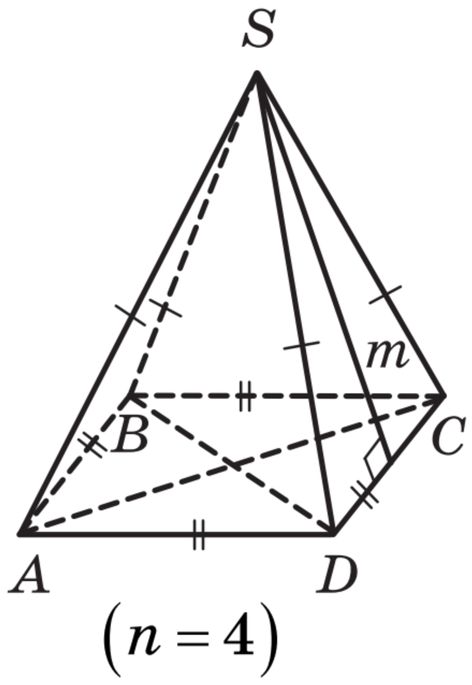
$(n=3)$

$S_{\text{п}} = 2S_{\text{о}} + S_{\text{б}}$

$P_{\text{о}} = a+b+c$

$S_{\text{б}} = P_{\text{о}} \cdot l$

2 Правильна n-кутна піраміда



$(n=4)$

$S_{\text{п}} = S_{\text{о}} + S_{\text{б}}$

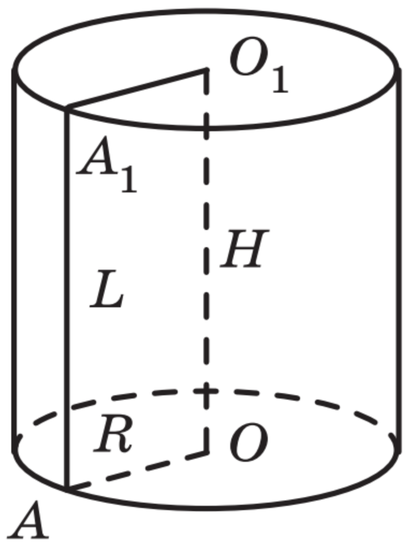
$P_{\text{о}} = AB + BC + CD + AD$

m — *апофема*

$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} P_{\text{о}} \cdot m$

Тіла обертання

1 Циліндр $(L=H)$

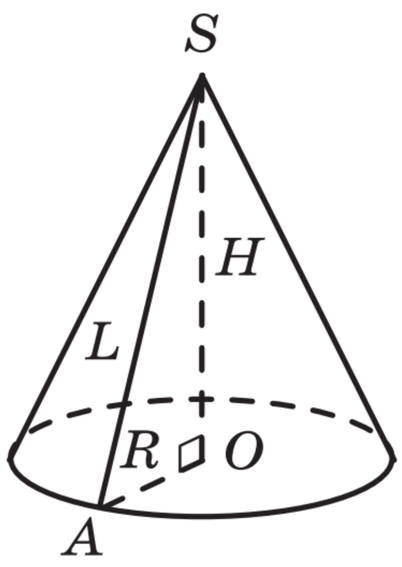


$S_{\text{п}} = 2S_{\text{о}} + S_{\text{б}}$

$S_{\text{б}} = 2\pi R \cdot H$

$S_{\text{о}} = \pi R^2$

2 Конус $\left(L^2 = H^2 + R^2\right)$



$S_{\text{п}} = S_{\text{о}} + S_{\text{б}}$

$S_{\text{б}} = \pi RL$

$S_{\text{о}} = \pi R^2$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Обчислення ймовірностей випадкових подій

Класичний підхід

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

n — загальна кількість елементарних подій

k — кількість елементарних подій, що сприяють події A

Геометричний підхід

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

m — довжина (l) або площа (S)

Ω — множина всіх елементарних подій

A — множина елементарних подій, що відповідають події A

Статистичний підхід

$$P(A)\approx\omega(A)=\frac{k}{n}$$

n — *досить велика* кількість випробувань

k — кількість здійснень події A в серії з n випробувань

$\omega(A)$ — відносна частота події A

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

РОЗДІЛ 7.
ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКАХ

CHAPTER 7.
NUMBER SEQUENCES AND THEIR USE IN FINANCIAL CALCULATIONS

§ 21. Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей



Тетянко, ось знайшов в інтернеті на одному сайті тести на визначення рівня IQ. Поглянь, яке цікаве завдання: «Яка з наведених послідовностей букв зайва: АРПМИЗ, ДІПАРІМА, СОНУК?». Або отаке завдання, теж є над чим подумати: «Знайдіть закономірність у нескінченній послідовності чисел і вкажіть наступне число цієї послідовності: 2, 5, 10, 17, 26, … .»

Як на мене, ці завдання зовсім нескладні. Я так розумію, що послідовність — це впорядкована множина чогось: букв, чисел, символів тощо. Слово — це теж певна послідовність букв. Із трьох заданих послідовностей букв, переставляючи ці букви,

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

легко отримати слова: ПРИЗМА, ПІРАМІДА, КОНУС. Ясно, що зайвим із цих трьох об'єктів є конус, бо він — тіло обертання, а призма й піраміда — многогранники.



А от і не факт! Я теж розшифрував ці слова і вважаю, що зайвою є призма, бо в конуса й піраміди є лише одна основа, а в призми їх дві. У другому завданні, до речі, теж ніби все нескладно, але все одно є певні запитання. От яку закономірність ти тут бачиш?



Мені здається, що наступне число має бути 37. Бо $2=1^2+1$, $5=2^2+1$, $10=3^2+1$, $17=4^2+1$, $26=5^2+1$. Отже, наступне число має бути $6^2+1=37$. Тут можна навіть формулу вивести. Ми це ще в п'ятому чи шостому класі вчили. Якщо всю послідовність позначити як множину $A=\{2;\ 5;\ 10;\ 17;\ 26;\ \ldots\}$, а її елементи відповідно a_1, a_2, …, a_n, …, то характеристичну властивість усіх елементів множини A можна записати так: $a_n=n^2+1$. За цією формулою не лише шостий елемент цієї послідовності можна визначити, а й узагалі будь-який!



Не жени коней, Тетянко. А хто тобі сказав, що формула буде саме такою? Чим тобі, наприклад, така формула для характеристичної властивості елементів множини A не подобається: $a_n=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n^2+1$? Якщо підставити в неї замість n числа 1, 2, 3, 4, 5, то вийде відповідно 2, 5, 10, 17, 26. Але шосте число вже буде не 37, а $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+6^2+1=157$. І я можу ще хоч тисячу таких формул придумати! І яка з них правильна?



А й справді, не все так просто... Петрику, я не дуже довіряла б тестам із інтернету. Краще брати їх із перевірених джерел чи книжок. Я колись чула про тести рівня інтелекту (IQ), які створив німецький психолог *Ганс Айзенк* ще в середині минулого століття. Можливо, там немає таких от двозначностей

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

із послідовностями? Але краще запитати в учителів, вони точно знають більше про послідовності.

Ганс Юрген Айзенк (1916–1997) — німецько-британський психолог, творець факторної теорії особистості, автор популярного тесту інтелекту.





Звичайно, Тетянко, ти маєш рацію, не всі відомості з інтернету є надійними. Ми радимо вам, перш ніж використовувати якісь дані звідти, знаходити принаймні два *незалежні* альтернативні джерела, які підтверджують ці дані. Але зосередимось на послідовностях.

Справді, послідовністю називають будь-яку впорядковану множину, тобто множину, у якій взято до уваги порядок її елементів. Наприклад, послідовності $\{4; 3; 2; 1\}$ і $\{1; 3; 2; 4\}$ — різні, хоч і мають однакові елементи.

Послідовності, як і множини, можна позначати великими латинськими буквами, а їх елементи — відповідними маленькими буквами з індексами, які вказують на номер елемента. Наприклад, якщо задано послідовність $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, то a_1 — перший елемент послідовності, a_2 — другий елемент послідовності, ..., a_n — n-й елемент послідовності. Для послідовності A також використовують позначення (a_n), а елементи послідовності іноді називають її членами.



Послідовності бувають скінченні або нескінченні залежно від того, скінченну чи нескінченну кількість елементів вони містять. Наприклад, послідовності букв із першого завдання на перевірку IQ, знайденого Петриком, — скінченні, а послідовність чисел із другого завдання — нескінченна. Можна навести й інші приклади: послідовність назв усіх місяців року та послідовність назв усіх днів тижня — скінченні, а послідовність усіх парних натуральних чисел — нескінченна.

Якщо елементами послідовності є *лише* числа, то такі послідовності називають числовими послідовностями. Зрозуміло, що послідовність усіх парних натуральних чисел — це числова послідовність, а послідовність назв усіх днів тижня не є числовою.



Скінченні послідовності, як і скінченні множини, найпростіше задавати переліком усіх їх елементів у потрібному порядку. Наприклад, послідовність усіх цифр десяткової системи числення можна задати так: $D=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Тут $d_1=0$, $d_2=1$, ..., $d_{10}=9$. Але цю послідовність можна задати й описово за допомогою характеристичної властивості: D — послідовність усіх цифр десяткової системи числення, записаних у порядку зростання чисел, позначених цими цифрами (від найменшого до найбільшого). Для задання нескінченних послідовностей (зокрема, числових) зазвичай використовують характеристичну властивість усіх її елементів, яка може формулюватись описово, за допомогою формули n-го елемента або рекурентно. Для простоти також часто говорять, що нескінченна послідовність задана описово, за допомогою формули n-го елемента або рекурентно.



Справді, можна сказати, що M — це послідовність усіх парних натуральних чисел, розташованих за зростанням (описовий спосіб задання). Після цього зрозуміло, що $m_1=2$, $m_2=4$, $m_3=6$ і так далі. Але ту саму послідовність M можна задати формулою n-го елемента: $m_n=2\cdot n$, тобто $M=\{m_n=2\cdot n,\ n\in \boldsymbol{N}\}$.
Формула n-го елемента є зручною, бо дає змогу знайти будь-який елемент цієї послідовності. Наприклад, сотий елемент $m_{100}=2\cdot 100=200$, а тисячний $m_{1000}=2\cdot 1000=2000$.



Уважні учні й учениці могли помітити, що перший елемент послідовності M парних натуральних чисел дорівнює 2, а кожен наступний її елемент на 2 більший за попередній, тобто: $m_1=2$, $m_2=m_1+2$, $m_3=m_2+2$ і так далі. Цю закономірність можна виразити так: $m_1=2$, $m_{n+1}=m_n+2$ для всіх $n\in \boldsymbol{N}$. Такий спосіб задання послідовності називають рекурентним (від латин. *recursio* — «повертатися назад»). Рекурентні співвідношення містять початкові умови, які стосуються значень одного чи кількох перших елементів послідовності, а також рекурентну формулу, яка дає змогу визначати наступний елемент послідовності, знаючи попередній її елемент чи кілька попередніх її елементів.



Найвідомішою нескінченною числовою послідовністю, яка задається рекурентно, є послідовність Фібоначчі F. Для неї початкові умови рекурентного співвідношення: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, а рекурентна формула: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ для всіх $n \in N$. Цю послідовність можна задати й описово: перші два елементи послідовності Фібоначчі дорівнюють 1, а кожен наступний її елемент є сумою двох попередніх елементів цієї послідовності: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 і так далі.



Докладніше про рекурсію в різних сферах життя й науки і про послідовність Фібоначчі та її застосування дивіться в «Цікавинках дідуся Тараса» наприкінці цього параграфа.

Більше прикладів послідовностей і різних способів їх задання: rnk.com.ua/113248





Якщо нескінченну числову послідовність X задано описово, формулою n-го елемента або рекурентно, то за будь-якого із цих способів задання визначене певне правило f, за яким кожному натуральному числу $n \in N$ ставиться у відповідність єдине число $x_n = f(n)$. Іншими словами, нескінченну числову послідовність можна вважати функцією, визначеною на множині всіх натуральних чисел. Якщо числова послідовність скінченна й містить k елементів, то очевидно, що її також можна вважати функцією, визначеною на множині перших k натуральних чисел.



Якщо нескінченну послідовність X задано формулою $x_n = f(n) = \dfrac{n+1}{n+2}$, то легко знайти всі елементи цієї послідовності, підставляючи в цю формулу замість n натуральні числа 1, 2, 3 і т. д. Це можна записати так: $X = \left\{\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots\right\}$, або так:

(x_n): $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; ... . Однак, як правильно зауважив Петрик, за кількома заданими першими елементами нескінченної числової послідовності неможливо визначити єдину формулу n-го елемента, який її задає. Наприклад, якщо першими трьома елементами послідовності є числа $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$, то таких послідовностей існує безліч: крім тієї, що задається формулою $x_n = \frac{n+1}{n+2}$, такими будуть усі послідовності, n-й елемент яких має вигляд $y_n = c \cdot (n-1)(n-2)(n-3) + \frac{n+1}{n+2}$, де c — будь-яке число.

Перевірте себе!

1. Дайте означення послідовності. Наведіть приклади скінченних і нескінченних послідовностей.
2. Які послідовності називають числовими послідовностями? Яким чином можна задавати ці послідовності? Наведіть приклади числових послідовностей, заданих різними способами.
3. Чи можна вважати числову послідовність функцією? Чи можна за кількома заданими першими елементами числової послідовності однозначно визначити всі наступні її елементи? Відповідь поясніть.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Чи є послідовність числовою? Чи є послідовність скінченною?
   а) Послідовність днів місяця;
   б) послідовність назв книжок на полиці;
   в) послідовність номерів машин на стоянці;
   г) послідовність усіх чисел, які закінчуються нулем.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. Чи є послідовність числовою? Чи є послідовність скінченною?
а) Послідовність усіх чисел, які діляться на 5;
б) послідовність імен друзів у записнику;
в) послідовність усіх оцінок з математики в класному журналі;
г) послідовність назв застосунків у смартфоні.

3. Розгляньте слова як послідовності букв. Чи однакові ці послідовності? Чи з однакових елементів складаються ці послідовності?
а) Кіт, тік; б) кури, руки; в) марка, рамка, г) старий, айстра.

4. Розгляньте слова як послідовності букв. Чи однакові ці послідовності? Чи з однакових елементів складаються ці послідовності?
а) Мул, гул; б) гори, роги; в) лісок, сокіл, г) дошка, шкода.

5. Запишіть три наступні елементи послідовності, яка складається з усіх натуральних чисел, кратних числу 7, розташованих за зростанням: 7, 14, 21, … .

6. Запишіть чотири наступні елементи послідовності, яка складається з усіх непарних натуральних чисел, розташованих за зростанням: 1, 3, 5, 7, … .

7. Запишіть п’ятий і десятий елементи послідовності, заданої за допомогою формули n-го елемента $a_n = n^2 - 3$.

8. Запишіть третій і восьмий елементи послідовності, заданої за допомогою формули n-го елемента $b_n = 5n + 2$.

9. Запишіть другий, третій і четвертий елементи послідовності, заданої рекурентно, якщо відомо, що $a_1 = 8$, $a_n = a_{n-1} - 3$.

10. Запишіть другий, третій і четвертий елементи послідовності, заданої рекурентно, якщо відомо, що $b_1 = 4$, $b_n = b_{n-1} + 7$.

11. Заборгованість компанії «Тут є все» перед клієнтами в січні становила 600 тис. грн, у лютому — 500 тис. грн, у березні — 400 тис. грн. У компанії сподіваються, що заборгованість і надалі щомісяця зменшуватиметься на 100 тис. грн порівняно з попереднім місяцем. У якому місяці відповідно до прогнозу зникне заборгованість компанії?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. Обсяги щомісячних продажів компанії «Купи-продай» у січні становили 200 тис. грн, у лютому — 250 тис. грн, у березні — 300 тис. грн. У компанії сподіваються, що продажі й надалі щомісяця зростатимуть на 50 тис. грн порівняно з попереднім місяцем. Якими будуть прогнозовані обсяги продажів компанії у травні?

Середній рівень

13. Запишіть перші п’ять елементів послідовності, яка складається з усіх натуральних двоцифрових чисел, кратних числу 4, що розташовані за зростанням.

14. Запишіть перші чотири елементи послідовності, яка складається з усіх натуральних трицифрових чисел, кратних числу 5, що розташовані за зростанням.

15. Запишіть третій і десятий елементи послідовності, заданої за допомогою формули n-го елемента $b_n = 2n \cdot (n - 9)$.

16. Запишіть четвертий і восьмий елементи послідовності, заданої за допомогою формули n-го елемента $a_n = 3n^2 - 5n$.

17. Запишіть третій, четвертий і п’ятий елементи послідовності, заданої рекурентно, якщо відомо, що $a_1 = 50$, $a_2 = 6$, $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$.

18. Запишіть третій, четвертий і п’ятий елементи послідовності, заданої рекурентно, якщо відомо, що $b_1 = 5$, $b_2 = 3$, $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$.

19. Послідовність складається з усіх натуральних чисел, кратних числу 13, що розташовані за зростанням. Запишіть цю послідовність за допомогою формули n-го елемента.

20. Послідовність складається з усіх натуральних чисел, кратних числу 7, що розташовані за зростанням. Запишіть цю послідовність за допомогою формули n-го елемента.

21. Перший елемент послідовності дорівнює 12. Кожний наступний елемент послідовності дорівнює добутку попереднього елемента й числа 4, зменшеному на число 9. Запишіть цю послідовність рекурентно.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

22. Перший елемент послідовності дорівнює 42. Кожний наступний елемент послідовності дорівнює сумі попереднього елемента й числа 3, збільшеній у 5 разів. Запишіть цю послідовність рекурентно.

23. Микола вирішив накопичити гроші на новий смартфон. У перший місяць він відклав 500 грн і кожного наступного місяця відкладав на 100 грн більше, ніж попереднього. Яку суму відкладе Микола на шостий місяць накопичень? Скільки грошей накопичить Микола за пів року?

24. Василина веде освітній блог в інстаграмі. Вона помітила, що кількість її підписників щотижня зростає за такою закономірністю: 1-й тиждень — 500 підписників, 2-й тиждень — 550 підписників, 3-й тиждень — 600 підписників. Якщо ця закономірність зберігатиметься, скільки підписників матиме Василина через 10 тижнів?

Достатній рівень

25. Тетянка склала деяку числову послідовність і записала сім її перших елементів, але припустилася помилки під час обчислення одного з елементів цієї послідовності. Знайдіть і виправте помилку, якої припустилася Тетянка, якщо записані нею числа такі: 3, 6, 9, 11, 15, 18, 21. Словесно сформулюйте характеристичну властивість елементів числової послідовності, складеної Тетянкою.

26. Петрик склав деяку числову послідовність і записав сім її перших елементів, але припустився помилки під час обчислення одного з елементів цієї послідовності. Знайдіть і виправте помилку, якої припустився Петрик, якщо записані ним числа такі: 1, 10, 19, 28, 38, 46, 55. Словесно сформулюйте характеристичну властивість елементів числової послідовності, складеної Петриком.

27. Знайдіть одну з можливих закономірностей і запишіть три наступні елементи послідовності: 1, 3, 6, 10, 15, … .

28. Знайдіть одну з можливих закономірностей і запишіть три наступні елементи послідовності: 2, 9, 28, 65, 126, … .

29. У числовій послідовності $a_1 = 4$, $a_2 = 9$. Виберіть формулу, якою може бути задана ця послідовність.
а) $a_n = 7 + 3n$; б) $a_n = 5 - n$; в) $a_n = -1 + 5n$; г) $a_n = 1 + 3n$.

30. У числовій послідовності $a_1 = 4$, $a_2 = -1$. Виберіть формулу, якою може бути задана ця послідовність.
а) $a_n = 7 - 3n$; б) $a_n = 9 - 5n$; в) $a_n = 1 - 5n$; г) $a_n = -1 - 3n$.

31. В інструкції до медичного препарату вказано, що пацієнт має приймати його щоденно протягом 20 діб, причому першої доби треба випити 37 мл препарату, а кожної наступної доби — на однакову кількість мілілітрів менше. Остання доза препарату повинна містити 8,5 мл препарату. На скільки мілілітрів має зменшуватися доза препарату щодня?

32. Згідно з планом тренувань спортсмен має тренуватися щоденно протягом 15 днів, виконуючи присідання. У перший день він має зробити 80 присідань, а потім щодня робити на однакову кількість присідань більше, щоб виконати 150 присідань в останній день тренувань. На скільки присідань більше має робити спортсмен щодня згідно із цим планом тренувань?

33. Числову послідовність задано формулою загального елемента $b_n = -17n + 123$. Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени цієї послідовності є меншими від 13.

34. Числову послідовність задано формулою загального елемента $a_n = 6n - 7$. Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени цієї послідовності є більшими за 70.

35. Під час виробничого процесу кількість осаду в розчині щогодини подвоюється. Скільки осаду було в розчині на початку виробничого процесу, якщо через 5 год у розчині з'явилося 3200 г осаду?

36. Компанія розробляє новий алгоритм виробництва, який дає змогу щомісяця зменшувати шкідливі викиди в атмосферу вдвічі. Відомо, що через 6 місяців обсяг шкідливих викидів на цьому підприємстві становив 4000 т/місяць. Знайдіть, яким був початковий обсяг викидів.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Високий рівень

37. На рис. 1 зображено три кроки побудови фігур із сірників. Скільки сірників буде використано на п'ятому кроці побудови аналогічної фігури? Запишіть формулу для знаходження потрібної кількості a_n сірників на n-му кроці побудови.

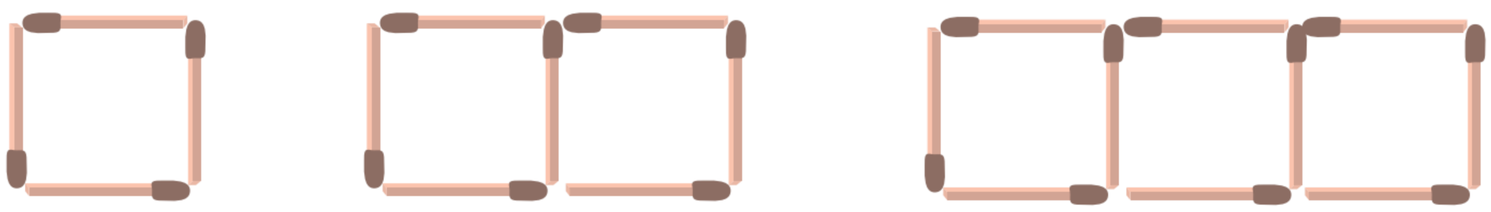


Рис. 1

38. На рис. 2 зображено три кроки побудови фігур із сірників. Скільки сірників буде використано на шостому кроці побудови аналогічної фігури? Запишіть формулу для знаходження потрібної кількості a_n сірників на n-му кроці побудови.

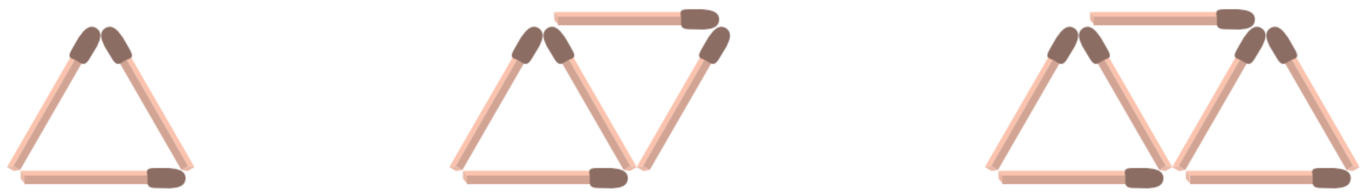


Рис. 2

39. Числову послідовність задано формулою загального елемента $b_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Запишіть формули для знаходження наступного й попереднього елементів для b_n $(n \geqslant 2)$.

40. Числову послідовність задано формулою загального елемента $a_n = 7 + 5n$. Запишіть формули для знаходження наступного й попереднього елементів для a_n $(n \geqslant 2)$.

41. Числову послідовність задано формулою загального елемента $b_n = 15 \cdot 9^{n-1}$. Задайте послідовність рекурентним способом.

42. Числову послідовність задано формулою загального елемента $a_n = 8 - 12(n-1)$. Задайте послідовність рекурентним способом.

43. Підберіть одну з можливих формул n-го елемента послідовності, першими елементами якого є дані числа. За отриманою формулою задайте послідовність також рекурентно.

а) $-7,\ -2,\ 3,\ 8,\ \ldots$; б) $8,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \ldots$.

44. Підберіть одну з можливих формул n-го елемента послідовності, першими елементами якого є дані числа. За отриманою формулою задайте послідовність також рекурентно.

а) $\frac{1}{2},\ -2,\ 8,\ -32,\ \ldots$; б) $2,\ -3,\ -8,\ -13,\ \ldots$.

45. Скільки від'ємних елементів має послідовність, задана формулою n-го елемента $a_n = n^2 - 12n + 27$?

46. Скільки додатних елементів має послідовність, задана формулою n-го елемента $a_n = -n^2 + 20n - 75$?

47. Знайдіть найменший елемент числової послідовності, заданої формулою n-го елемента $a_n = n^2 - 17n + 21$.

48. Знайдіть найбільший елемент числової послідовності, заданої формулою n-го елемента $a_n = 10 + 9n - 2n^2$.



Цікавинки від дідуся Тараса

Крім задання послідовностей, *рекурсію* використовують у багатьох інших задачах математики, інформатики, фізики, лінгвістики, логіки тощо. Наприклад, за допомогою рекурсії легко визначити *факторіал* будь-якого натурального числа n. Справді, за означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Але очевидно, що $1! = 1$ і $n! = (n-1)! \cdot n$. Тому для визначення факторіала натурального числа n досить знати, чому дорівнює факторіал числа 1 (початкову умову) і наведену вище рекурентну формулу. Такий спосіб обчислення факторіала зручний у програмуванні.

Рекурсивним способом визначаються й самоподібні фрактальні множини, зокрема *трикутний килим Серпінського*, який ми вже розглядали в «Цікавинках від дідуся Тараса» в § 3. Класичним прикладом

нескінченної рекурсії у фізиці є два поставлені одне проти одного дзеркала: в них утворюються два коридори відображень дзеркал, розміри яких зменшуються. Рекурсивні зображення також досить популярні в дизайні (див. рисунок).



Цікавою є *історія відкриття послідовності Фібоначчі*. У XIII ст. італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі) розв'язував таку задачу: «Фермер годує кроликів. Кожна пара кроликів народжує одну пару кроликів, коли парі виповнюється два місяці, а потім дає потомство в одну пару щомісяця. Скільки пар кроликів буде у фермера через n місяців, якщо спочатку в нього була лише одна пара кроликів (вважаємо, що кролики не гинуть і кожна пара кроликів дає потомство за описаною схемою)?».

Нескладно переконатися, що якщо позначити через f_n кількість пар кроликів у фермера в перший день n-го місяця, то $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, а також $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ для всіх $n \in N$. Тобто отримуємо вже відому вам із теоретичного матеріалу цього параграфа послідовність Фібоначчі. Що цікаво, цю послідовність можна задати й за допомогою формули n-го елемента:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Останню формулу називають *формулою Біне*, хоч уперше її довів Абрахам де Муавр сторіччям раніше.

Абрахам де Муавр (1667–1754) — англійський математик французького походження. Відомий своїми роботами з алгебри, математичного аналізу й теорії ймовірностей.

Жак Філіп Марі Біне (1786–1856) — французький математик, механік і астроном, академік Паризької академії наук, один із засновників матричної алгебри.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Переконайтеся принаймні для перших чотирьох елементів, що формула Біне задає послідовність Фібоначчі. Це справді несподівано! Чи знайомі ви із числом $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$? Якщо так, то як називають це число?

2. Дізнайтеся більше про рекурсивні процедури та функції в програмуванні від учителя або вчительки інформатики. Чи доводилося вам під час написання комп'ютерних програм на уроках інформатики використовувати рекурсивні алгоритми? Якщо так, то поділіться досвідом.

3. Чи траплялися вам у повсякденному житті рекурсивні об'єкти? Якщо так, то в яких саме сферах? Поділіться власним досвідом.

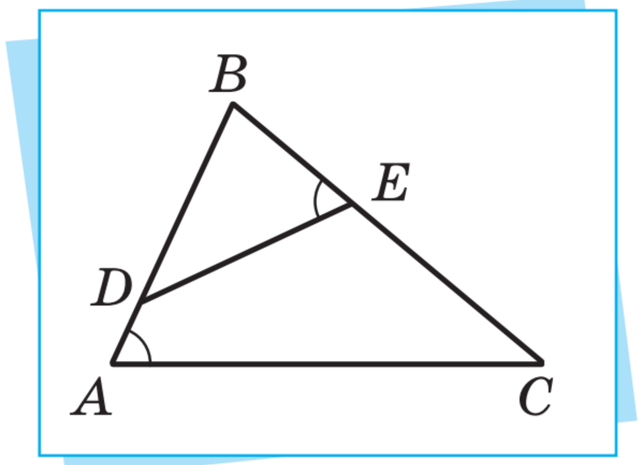
Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $5x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2$, де x_1, x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x - 3 = 0$.

2. Побудуйте ескіз графіка функції $y = -2x^2 + 4x - 3$. За цим ескізом знайдіть: а) $D(y)$; б) $E(y)$; в) проміжки зростання й спадання функції.

3. Родина Андрієнків оформила в банку позику, за умовами якої має повернути 100 тис. грн через 2 роки від теперішнього часу. Однак родина вирішила повернути позику раніше — через 1,5 року від теперішнього часу. Яку суму мають повернути Андрієнки згідно зі своїм рішенням, якщо гроші у вибраному ними банку коштують $r_4 = 12\,\%$?

4. На сторонах трикутника ABC взято точки D і E так, що $\angle BAC = \angle BED$ (див. рисунок). Знайдіть невідомі сторони трикутника ABC, якщо $BE = 3$ см, $BD = 5$ см, $DE = 6$ см, $AC = 9$ см.



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

5. У дитячому садочку «Квітка» вихованці середньої групи склали величезну піраміду з кубиків. У найвищому ряду піраміди був один кубик, а в кожному наступному ряду, рахуючи згори донизу, — на 1 кубик більше, ніж у попередньому. Скільки кубиків у цій піраміді, якщо всього в ній 25 рядів кубиків? Спробуйте розв'язати задачу найпростішим способом.

§ 22. Арифметична прогресія. Формула n-го елемента та суми n перших елементів арифметичної прогресії





Слухай, Петрику, у межах нашого волонтерського проєкту «Зелене місто» ми збираємось облаштувати нову клумбу з трояндами у сквері біля пам'ятника Тарасу Шевченку. Ділянку для цієї клумби нам виділили у вигляді рівнобічного трикутника з тупим кутом при вершині. Тому я запланувала посадити кущі троянд рядами: у першому ряду має бути 2 кущі, у другому — 4, у третьому — 6 тощо. Усього має вийти 12 рядів. Як би оце *швидко* порахувати, скільки загалом буде кущів троянд?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



О, я знаю такий швидкий спосіб додавання! Колись дідусь Тарас мені розповідав чи то правдиву історію, чи то легенду, що один математик, коли йому було лише п'ять років, придумав, як швидко додати 100 перших натуральних чисел. Він помітив, що $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$ тощо. Загалом таких пар у цій сумі буде 50, а отже, $1+2+3+\ldots+98+99+100=101\cdot 50=5050$. Може й тут такий спосіб підійде? У тебе вийшла послідовність, чимось схожа на послідовність натуральних чисел. У натуральних чисел кожне наступне число на 1 більше за попереднє, у твоєму ж випадку так само, але більше не на 1, а на 2.

Петрик згадав легенду про відомого німецького математика, астронома та фізика *Карла Фрідріха Гаусса* (1777–1855).





Так, і починається моя послідовність не з одиниці, а з двійки. Але спробуймо твій спосіб. Загальна кількість кущів троянд на клумбі у сквері буде такою: $2+4+6+\ldots+20+22+24$. Бачимо, що $2+24=26$, $4+22=26$, $6+20=26$ тощо. Усього доданків у моїй сумі 12. Тому буде 6 пар чисел, кожна з яких у сумі дає 26. Тому $2+4+6+\ldots+20+22+24=26\cdot 6=156$. Немало кущів троянд вийшло! Слухай, а хороший спосіб додавання елементів послідовностей. Мені здається, що його десь іще можна використати.



Так, спосіб хороший, але не універсальний. Бо якщо взяти, наприклад, послідовність перших 10 квадратів натуральних чисел 1; 4; 9; …; 64; 81; 100, то $1+100=101$, $4+81=85$, $9+64=73$ тощо. Бачимо, що нічого подібного до твого випадку не спостерігається. Мабуть, такий спосіб підрахунку суми кількох перших елементів «працює» лише для якихось особливих послідовностей. Пропоную запитати про це в учителів, вони точно знають більше.



Звісно, Петрику, цікавих і корисних видів числових послідовностей існує багато. Ви з Тетянкою згадали про один із таких видів, який має спеціальну назву.

Арифметична прогресія — це числова послідовність, у якій кожен наступний елемент, починаючи з другого, є *сумою* попереднього елемента й деякого числа d. Іншими словами, послідовність $A=\{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots\}=(a_n)$ називають арифметичною прогресією, якщо $a_{n+1}=a_n+d$ (або $a_{n+1}-a_n=d$) для всіх $n\in N$. Число d при цьому називають різницею арифметичної прогресії A.



У наведеному означенні арифметичну прогресію задано описово й за допомогою рекурентної формули. Із описового задання добре зрозумілий *спосіб утворення* елементів арифметичної прогресії, а рекурентна формула дає змогу, знаючи перший елемент a_1 і різницю d арифметичної прогресії, знаходити всі інші її елементи. Наприклад, якщо $a_1=4$ і $d=5$, то $A=\{4;\ 9;\ 14;\ 19;\ 24;\ \ldots\}$, а якщо $a_1=7$ і $d=-3$, то $A=\{7;\ 4;\ 1;\ -2;\ -5;\ \ldots\}$.



Арифметичну прогресію можна задати й за допомогою формули n-го елемента. Справді, з рекурентної формули $a_{n+1}=a_n+d$ одержуємо, що $a_2=a_1+d$, $a_3=a_2+d=a_1+2d$, $a_4=a_3+d=a_1+3d$, $a_5=a_4+d=a_1+4d$ тощо. Тому природним видається, що для всіх $n\in N$ n-й елемент арифметичної прогресії A можна знайти за формулою:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d,$$

де a_1 — перший елемент арифметичної прогресії; d — її різниця.



Зрозуміло, що наведені міркування не є строгим доведенням формули n-го елемента арифметичної прогресії. Для строго обґрунтування цього твердження зазвичай використовують *метод*

математичної індукції, з яким ви ознайомитесь у старшій або вищій школі.



Формула n-го елемента дає змогу обчислювати будь-який елемент арифметичної прогресії за її першим елементом і різницею. Наприклад, якщо $a_1 = 4$ і $d = 5$, то $a_{21} = a_1 + 20d = 4 + 100 = 104$, а якщо $a_1 = 7$ і $d = -3$, то $a_{36} = a_1 + 35d = 7 + (-105) = -98$.
Також, на відміну від довільної послідовності, якщо задано навіть два перших елементи арифметичної прогресії, то можна визначити формулу її n-го елемента, а отже, і будь-який елемент цієї послідовності.
Наприклад, нехай в арифметичній прогресії A відомі перші два її елементи $a_1 = -10$ і $a_2 = -15$. Тоді різниця $d = a_2 - a_1 = -5$, а формула n-го елемента має вигляд $a_n = -10 + (n-1)\cdot(-5)$, або $a_n = -5n - 5$.



Цікаво, а звідки пішла назва арифметичної прогресії? Чому вона саме *арифметична*, а не якась інша?



Походження цієї назви досить просто пояснити. Розглянемо три послідовні елементи a_{n-1}, a_n, a_{n+1} деякої арифметичної прогресії A $(n \in N,\ n \geqslant 2)$. Оскільки за означенням арифметичної прогресії $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = d$, то $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$, звідки одержимо формулу:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \in N,\ n \geqslant 2.$$

Іншими словами, будь-який елемент арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх елементів цієї послідовності. Це твердження називають властивістю арифметичної прогресії.



Ми щойно довели: якщо A — арифметична прогресія, то для її елементів виконується рівність $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \in N,\ n \geqslant 2$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Однак правильним є і *обернене твердження:* якщо для елементів деякої числової послідовності A виконується рівність $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$, то ця послідовність є арифметичною прогресією. Це твердження називають ознакою арифметичної прогресії.

Доведення цього твердження:
rnk.com.ua/113249





Зважаючи на властивість і ознаку арифметичної прогресії, можна дати інше означення цієї послідовності: числову послідовність A називають арифметичною прогресією, якщо для її елементів виконується рівність $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$. Це означення є *еквівалентним* означенню, введеному на початку § 22.



Ознаку арифметичної прогресії зручно використовувати, щоб переконатися, чи є якісь три числа трьома послідовними елементами арифметичної прогресії. Справді, числа 2, 8, 14 є послідовними трьома елементами арифметичної прогресії, бо $\frac{2+14}{2} = 8$, а три числа 10, 20, 40 не є трьома послідовними елементами арифметичної прогресії, бо $\frac{10+40}{2} = 25 \neq 20$.



Ознаку арифметичної прогресії можна використовувати й для розв'язування складніших задач. Розглянемо приклад.

Приклад 1

З'ясуємо, за яких значень змінної x відповідні значення виразів x^2, $2x$ і 3 будуть трьома послідовними елементами арифметичної прогресії, а також знайдемо різницю d цієї арифметичної прогресії.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розв'язання. Якщо $a_1 = x^2$, $a_2 = 2x$, $a_3 = 3$ — три послідовні елементи деякої послідовності A, то для того, щоб ця послідовність була арифметичною прогресією, має виконуватися рівність $\frac{x^2+3}{2} = 2x$, звідки $x^2 - 4x + 3 = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Це й будуть шукані значення змінної x.

Для $x = 1$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, а отже, різниця арифметичної прогресії $d = a_2 - a_1 = 1$; для $x = 3$ $a_1 = 9$, $a_2 = 6$, $a_3 = 3$, а отже, $d = a_2 - a_1 = -3$.



То виявляється, що ми з Тетянкою для знаходження кількості кущів троянд на клумбі обчислювали суму 12 перших елементів арифметичної прогресії. Тепер зрозуміло, чому сума першого й останнього, другого й передостаннього тощо елементів була однаковою!

Справді, $a_1 + a_n = a_1 + d - d + a_n = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_2 + a_{n-1}$ тощо. Але є одна проблема: якщо кількість перших елементів прогресії в цій сумі *непарна*, такий спосіб уже не підійде, бо немає цілої кількості пар. Цікаво, як діяти в такому випадку? Упевнений, що має бути якийсь універсальний підхід.



Такий підхід справді є. Позначимо через S_n суму n перших елементів арифметичної прогресії A, тобто $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

Оскільки $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, ..., $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$, $a_n = a_1 + (n-1)d$, а також $a_{n-1} = a_n - d$, $a_{n-2} = a_n - 2d$, ..., $a_2 = a_n - (n-2)d$, $a_1 = a_n - (n-1)d$, то суму n перших елементів арифметичної прогресії можна записати двома способами:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$

або $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$.

Після почленного додавання останніх двох рівностей одержимо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Права частина останнього виразу є сумою n однакових доданків (a_1+a_n), а отже, $2S_n=(a_1+a_n)\cdot n$, звідки отримуємо формулу суми n перших елементів арифметичної прогресії:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$



Розглянемо ще два приклади.

Приклад 2

Відомо, що в арифметичній прогресії A $a_3=7$, $a_{13}=27$. Знайдемо суму S_{15} перших 15 елементів цієї послідовності.

Розв'язання. Оскільки $a_3=a_1+2d$, а $a_{13}=a_1+12d$, то одержуємо систему рівнянь $\begin{cases}a_1+2d=7,\\a_1+12d=27.\end{cases}$ Віднімемо почленно від другого рівняння перше. Маємо: $10d=20$, $d=2$. Підставимо значення різниці d у перше рівняння системи: $a_1+4=7$, $a_1=3$.

За відомою формулою $S_{15}=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15$.

Оскільки $a_{15}=a_1+14d=3+28=31$, то $S_{15}=\frac{3+31}{2}\cdot 15=17\cdot 15=255$.

Приклад 3

Знайдемо суму всіх двоцифрових чисел, які діляться націло на 4.

Розв'язання. Зрозуміло, що всі двоцифрові натуральні числа, які діляться націло на 4, утворюють арифметичну прогресію A з першим елементом 12 і різницею 4, тобто $a_1=12$, $d=4$. Тоді $a_n=12+(n-1)\cdot 4=4n+8$. Щоб знайти кількість елементів у цій числовій послідовності, розв'яжемо нерівність $a_n<100$, або $4n+8<100$, звідки $4n<92$, $n<23$. Усього таких чисел 22, бо n — натуральне число. Отже, сума всіх двоцифрових чисел, які діляться

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

націло на 4, $S_{22}=\frac{a_1+a_{22}}{2}\cdot 22$. Оскільки $a_{22}=a_1+21d=12+84=96$, то $S_{22}=\frac{12+96}{2}\cdot 22=108\cdot 11=1188$.



Формулу суми n перших елементів арифметичної прогресії можна записати в іншому вигляді. Справді, оскільки $a_n=a_1+(n-1)d$, то $S_n=\frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, або

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

Ця формула дає змогу одразу знаходити суму n перших елементів арифметичної прогресії S_n без попереднього знаходження її n-го елемента a_n. *Самостійно застосуйте цю формулу* для розв'язування прикладів 1 і 2 та переконайтеся в ідентичності відповідей.



Як ви вже, мабуть, здогадалися, арифметична прогресія має численні практичні застосування, зокрема й у повсякденному житті.

Більше про це:
rnk.com.ua/113250



Перевірте себе!

1. Яку послідовність називають арифметичною прогресією? Наведіть описове означення й означення за допомогою рекурентної формули. Що називають різницею арифметичної прогресії?
2. Запишіть формулу n-го елемента арифметичної прогресії. Наведіть приклади її застосування.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

3. Чому арифметичну прогресію називають саме так? Сформулюйте властивість і ознаку арифметичної прогресії.

4. Запишіть відомі вам формули суми n перших елементів арифметичної прогресії. Наведіть приклади застосування цих формул.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть перші чотири елементи послідовності непарних трицифрових чисел, розташованих за зростанням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією?

2. Запишіть перші п'ять елементів послідовності парних двоцифрових чисел, розташованих за зростанням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією?

3. Знайдіть різницю d арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 8$, $a_2 = 12$; б) $a_3 = 7$, $a_4 = 2$; в) $a_5 = -2$, $a_6 = 4{,}5$.

4. Знайдіть різницю d арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 9$, $a_2 = 3$; б) $a_4 = -5$, $a_5 = -2$; в) $a_8 = 1{,}5$, $a_9 = -3{,}5$.

5. Задано арифметичну прогресію A з різницею d. Знайдіть:
а) a_3, якщо $a_2 = 7$, $d = 6$;
б) a_{10}, якщо $a_9 = 8$, $d = -3$;
в) a_7, якщо $a_8 = 10$, $d = 4$;
г) a_{24}, якщо $a_{25} = -12$, $d = -5$.

6. Задано арифметичну прогресію A з різницею d. Знайдіть:
а) a_4, якщо $a_3 = 9$, $d = 10$;
б) a_{12}, якщо $a_{11} = -7$, $d = -2$;
в) a_6, якщо $a_7 = -12$, $d = 8$;
г) a_{17}, якщо $a_{18} = 13$, $d = -3$.

7. Скориставшись формулою $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, знайдіть другий, десятий і двадцятий елементи арифметичної прогресії A, якщо:
а) $a_1 = 3$, $d = 2$; б) $a_1 = 5$, $d = -1$; в) $a_1 = 15$, $d = -3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

8. Скориставшись формулою $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, знайдіть третій, дванадцятий і тридцятий елементи арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 4$, $d = 3$; б) $a_1 = 7$, $d = -2$; в) $a_1 = -19$, $d = 4$.

9. Перевірте, чи є послідовними елементами деякої арифметичної прогресії такі три числа: а) 3, 7, 11; б) −8, 0, 8; в) 2, 3, 5; г) −20, 15, −10.

10. Перевірте, чи є послідовними елементами деякої арифметичної прогресії такі три числа: а) 5, 10, 20; б) −12, 1, 12; в) 4, 16, 28; г) −30, −15, 0.

11. Скориставшись формулою $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$, знайдіть суму перших чотирнадцяти елементів арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 3$, $a_{14} = 50$; б) $a_1 = -15$, $a_{14} = 45$; в) $a_1 = 18$, $a_{14} = -35$.

12. Скориставшись формулою $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$, знайдіть суму перших двадцяти елементів арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 5$, $a_{20} = 41$; б) $a_1 = 13$, $a_{20} = -28$; в) $a_1 = 44$, $a_{20} = -32$.

13. Скориставшись формулою $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n$, знайдіть суму перших дванадцяти елементів арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 5$, $d = 2$; б) $a_1 = 10$, $d = -2$; в) $a_1 = -35$, $d = 5$.

14. Скориставшись формулою $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n$, знайдіть суму перших десяти елементів арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 7$, $d = 2$; б) $a_1 = -16$, $d = 3$; в) $a_1 = 25$, $d = -4$.

15. На заводі з виробництва безпілотників за січень виготовили 500 дронів. Протягом кожного наступного місяця року виготовляли на 40 дронів більше, ніж попереднього. Обчисліть кількість дронів, виготовлених щомісяця в період із січня по червень включно. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то знайдіть її різницю.

16. У понеділок жорсткий диск комп'ютера заповнили даними обсягом 40 Мб. Протягом кожного наступного дня на жорсткий диск завантажували на 5 Мб більший обсяг даних, ніж попереднього

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

дня. Обчисліть обсяги даних, якими заповнювали жорсткий диск комп'ютера щодня протягом цього тижня. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то знайдіть її різницю.

Середній рівень

17. Запишіть перші чотири елементи послідовності двоцифрових чисел, які кратні числу 3 й розташовані за спаданням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то обчисліть різницю цієї арифметичної прогресії.

18. Запишіть перші чотири елементи послідовності двоцифрових чисел, які закінчуються цифрою 5 і розташовані за спаданням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то обчисліть різницю цієї арифметичної прогресії.

19. Запишіть перші шість елементів послідовності трицифрових чисел, які містять у своєму записі цифру 3 й розташовані за зростанням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то обчисліть різницю цієї арифметичної прогресії.

20. Запишіть перші шість елементів послідовності трицифрових чисел, які містять у своєму записі цифру 2 й розташовані за зростанням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то обчисліть різницю цієї арифметичної прогресії.

21. Задано арифметичну прогресію A. Знайдіть:

а) a_3, якщо $a_1 = 6$, $a_2 = 10$;

б) a_7, якщо $a_5 = -2$, $a_6 = -5$;

в) a_1, якщо $a_2 = 12$, $a_3 = 7$;

г) a_{15}, якщо $a_{16} = -8$, $a_{17} = -1$.

22. Задано арифметичну прогресію A. Знайдіть:

а) a_3, якщо $a_1 = 5$, $a_2 = 1$;

б) a_6, якщо $a_4 = -10$, $a_5 = -3$;

в) a_2, якщо $a_3 = -18$, $a_4 = 2$;

г) a_{19}, якщо $a_{20} = 6$, $a_{21} = -3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

23. Знайдіть різницю арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 2$, $a_4 = 14$; б) $a_1 = -7$, $a_5 = 1$; в) $a_1 = 10$, $a_6 = -5$.

24. Знайдіть різницю арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = -3$, а $a_4 = 3$; б) $a_1 = 2$, $a_3 = -12$; в) $a_1 = 4$, $a_5 = 44$.

25. Задано арифметичну прогресію A. Знайдіть:

а) суму перших восьми її елементів S_8, якщо сума перших семи її елементів $S_7 = 125$ і $a_8 = 35$;

б) суму перших десяти її елементів S_{10}, якщо сума перших одинадцяти її елементів $S_{11} = -100$ і $a_{11} = 50$.

26. Задано арифметичну прогресію A. Знайдіть:

а) суму перших шести її елементів S_6, якщо сума перших п'яти її елементів $S_5 = -300$ і $a_6 = -100$;

б) суму перших двадцяти її елементів S_{20}, якщо сума перших двадцяти одного її елемента $S_{21} = 65$ і $a_{21} = -20$.

27. Знайдіть суму шести перших елементів арифметичної прогресії, якщо її перший елемент дорівнює 9, а шостий елемент — 14.

28. Знайдіть суму восьми перших елементів арифметичної прогресії, якщо її перший елемент дорівнює 32, а восьмий елемент — 18.

29. Перший елемент арифметичної прогресії дорівнює 8, а різниця цієї прогресії $d = 5$. Знайдіть:

а) суму перших чотирьох елементів цієї прогресії;

б) суму перших одинадцяти елементів цієї прогресії;

в) суму перших ста елементів цієї прогресії.

30. Перший елемент арифметичної прогресії дорівнює 7, а різниця цієї прогресії $d = -3$. Знайдіть:

а) суму перших п'яти елементів цієї прогресії;

б) суму перших десяти елементів цієї прогресії;

в) суму перших двохсот елементів цієї прогресії.

31. Марина вирішила щодня ходити більше, щоб покращити фізичну форму. У перший день вона зробила 3000 кроків і щодня збільшувала кількість кроків на 500. Скільки кроків Марина зробить за 7 днів, якщо дотримуватиметься такого темпу?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

32. Олег вирішив зменшити час, який витрачає на комп'ютерні ігри. У перший день він грав на комп'ютері 240 хв, а потім щодня скорочував тривалість гри на 15 хв. Скільки часу Олег витратить на комп'ютерні ігри за 10 днів, якщо дотримуватиметься такого графіка?

Достатній рівень

33. Знайдіть перший елемент арифметичної прогресії, якщо п'ятий елемент дорівнює 16, а різниця прогресії $d=3$.

34. Знайдіть перший елемент арифметичної прогресії, якщо п'ятий елемент дорівнює 20, а різниця прогресії $d=4$.

35. В арифметичній прогресії A відомо, що $a_n=25$. Знайдіть n, якщо її перший елемент $a_1=7$, а різниця $d=3$.

36. В арифметичній прогресії A відомо, що $a_n=25$. Знайдіть n, якщо її перший елемент $a_1=6$, а різниця $d=4$.

37. В арифметичній прогресії A відомо, що $a_7-a_2=25$. Знайдіть значення виразу a_7-a_4.

38. В арифметичній прогресії A відомо, що $a_8-a_3=30$. Знайдіть значення виразу a_8-a_5.

39. В арифметичній прогресії третій елемент дорівнює 20, а різниця прогресії $d=-3{,}2$. Знайдіть суму перших п'яти елементів цієї прогресії.

40. В арифметичній прогресії третій елемент дорівнює 30, а різниця прогресії $d=-4{,}8$. Знайдіть суму перших дев'яти елементів цієї прогресії.

41. Суму n перших елементів арифметичної прогресії задано формулою $S_n=\dfrac{5{,}6+0{,}6n}{2}\cdot n$. Знайдіть четвертий елемент цієї прогресії.

42. Суму n перших елементів арифметичної прогресії задано формулою $S_n=\dfrac{4{,}2+0{,}8n}{2}\cdot n$. Знайдіть п'ятий елемент цієї прогресії.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

43. Анна влаштувалася на нову роботу, де їй пообіцяли щомісячне підвищення зарплати. Першого місяця вона отримала 12 000 грн, а кожного наступного місяця її зарплата збільшувалася на однакову суму. Скільки становила сума збільшення зарплати Анни щомісяця, якщо за перший рік роботи вона заробила 196 800 грн?

44. Ігор працює в компанії, де щомісяця отримує бонус до зарплати за успішне виконання плану. Цей бонус він повністю перераховує на накопичувальний рахунок. У січні Ігор отримав бонус у розмірі 1000 грн. Кожного наступного місяця бонус Ігоря збільшувався на 250 грн, оскільки результати його роботи покращувалися. За скільки місяців роботи Ігор накопичить 15 000 грн бонусів?

45. Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які діляться націло на 17.

46. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які діляться націло на 25.

Високий рівень

47. Доведіть: якщо задана послідовність є арифметичною прогресією, то її елементи, узяті через один, також утворюють арифметичну прогресію. Наведіть відповідний приклад.

48. Доведіть: якщо кожен елемент заданої арифметичної прогресії помножити на те саме число, то одержана послідовність також буде арифметичною прогресією. Наведіть відповідний приклад.

49. В амфітеатрі концертного залу декілька рядів, і кількість крісел у кожному ряду збільшується на 2 порівняно з попереднім. В останньому ряду 35 крісел. Загальна кількість крісел в амфітеатрі становить 315. Знайдіть кількість крісел у першому ряду й кількість рядів у амфітеатрі.

50. Турист Микола, рухаючись по гірській місцевості, за першу годину пройшов 800 м, а за кожну наступну годину долав на 25 м менше, ніж за попередню. Знайдіть, за який час Микола пройде відстань у 5700 м.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

51. Чи є послідовність арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n-го елемента: а) $a_n = n^2 + 1$; б) $a_n = 7n - 5$? Відповідь обґрунтуйте.

52. Чи є послідовність арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n-го елемента: а) $a_n = -5n + 2$; б) $a_n = \frac{2}{n} + 3$? Відповідь обґрунтуйте.

53. Доведіть, що в скінченній арифметичній прогресії $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ суми елементів, рівновіддалених від кінців прогресії, рівні, тобто: $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$ (де $k \leqslant \frac{n}{2}$).

54. Доведіть, що в арифметичній прогресії $\{a_1, a_2, \ldots\}$ різницю d можна обчислити за формулою: $d = \frac{a_m - a_k}{m - k}$, де $m \neq k$.

55. Знайдіть усі значення змінних, за яких значення виразів $x^2 - 8$; $5x + 3$; $3x + 6$ будуть послідовними елементами арифметичної прогресії.

56. Знайдіть усі значення змінних, за яких значення виразів $x^2 + 5$; $x^2 + x$; $8x - 14$ будуть послідовними елементами арифметичної прогресії.

57. Між числами -8 і -35 вставте два числа так, щоб отримати чотири послідовні елементи арифметичної прогресії. Укажіть різницю цієї прогресії.

58. Між числами -6 і -15 вставте два числа так, щоб отримати чотири послідовні елементи арифметичної прогресії. Укажіть різницю цієї прогресії.



Цікавинки від дідуся Тараса

Суму перших n елементів можна знаходити не лише для арифметичної прогресії, а й для окремих інших послідовностей.

Наприклад, знайдемо значення суми $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{9900}$. Для цього розглянемо послідовність X, задану формулою n-го елемента $x_n=\frac{1}{n(n+1)}$, і позначимо $S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$. Нескладно помітити, що $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{9900}=S_{99}$. Оскільки $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, то $\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, …, $\frac{1}{9900}=\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$.

Тому $S_{99}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{9900}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$, звідки $S_{99}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}=0{,}99$.

Аналогічними міркуваннями, використовуючи метод математичної індукції, можна показати, що $S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. За необмеженого збільшення номера n значення дробу $\frac{1}{n+1}$ стає як завгодно близьким до 0, а значення суми n перших елементів послідовності X — як завгодно близьким до 1. Тому можна вважати, що сума *всіх* елементів цієї послідовності $S=x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots=1$, тобто *сума нескінченної кількості доданків може бути скінченною*. Цей факт, на перший погляд, є *парадоксальним*, але тим не менш він відповідає дійсності.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя або вчительки дізнайтеся більше про метод математичної індукції та доведіть з його використанням кілька формул для визначення суми n перших елементів інших послідовностей, відмінних від арифметичної прогресії.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. Згадайте відмінність між парадоксом і софізмом (ми розглядали їх у 7 класі — див. § 15, «Цікавинки від дідуся Тараса»). Наведіть приклади кількох софізмів і кількох парадоксів.

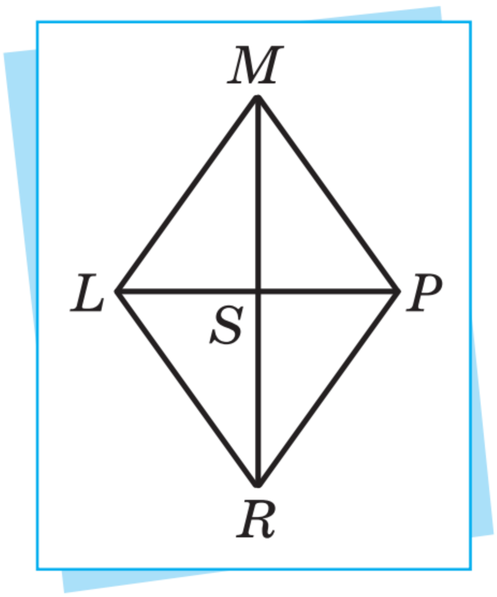
3. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про *Зенона Елейського* та його *апорії*. Підготуйте невелике повідомлення. Як апорії Зенона пов'язані з твердженням про те, що сума всіх елементів деякої послідовності може бути скінченною? Відповідь поясніть.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $\dfrac{2a-8}{\sqrt{a}+2}+4$ і знайдіть його значення, якщо $a=0{,}36$.

2. Розв'яжіть рівняння $x^2-6x+11=\dfrac{6}{x}$ графічним способом, використовуючи графічний калькулятор. Виконайте перевірку правильності розв'язання за означенням кореня рівняння.

3. У ромбі $LMPR$ проведено діагоналі LP і MR, які перетинаються в точці S (див. рисунок). Знайдіть градусні міри кутів ромба, якщо $LP=16$ см, а $MR=16\sqrt{3}$ см.



4. Родина Максимчуків поклала в банк на депозит 50 000 грн терміном на 2 роки. Банк на цей депозит нараховує відсотки в розмірі 12 % річних щокварталу. Яка сума буде на рахунку Максимчуків у цьому банку: а) через 1 рік; б) через 2,5 року; в) через 3 роки й 9 місяців? Відповіді округліть до копійок.

5. Під час лабораторного експерименту в колбу поміщено 10 бактерій. Через кожну хвилину від початку експерименту кількість бактерій у колбі подвоюється. Знайдіть, скільки бактерій буде в колбі через: а) 5 хв після початку експерименту; б) 10 хв після початку експерименту. Відомо також, що вся колба заповнилася бактеріями через 50 хв після початку експерименту. Скільки часу було б для цього потрібно, якби в колбу на початку експерименту помістили 5 бактерій?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 23. Геометрична прогресія. Формула n-го елемента та суми n перших елементів геометричної прогресії





Слухай, Тетянко, нещодавно в інтернеті прочитав легенду про виникнення шахів. Так цікаво! У ній ідеться, що цю гру винайшов індійський мудрець, але вона настільки сподобалась одному шаху, що той затявся купити її в нього за будь-які гроші. На що винахідник гри тільки усміхнувся й сказав: «Мені багато не треба. Ти тільки поклади на першу клітинку шахівниці одне зернятко пшениці, на другу — два, на третю — чотири й так далі, подвоюючи від клітинки до клітинки кількість зернин доти, доки не заповниш усю шахівницю».



Знаю, знаю цю історію! Щойно шах порахував загальну кількість зерен, які йому доведеться віддати за цю справді королівську гру, то зрозумів, що навіть за все своє життя не зможе виконати обіцянку, — настільки великим було це число. Кажуть, що для того, аби отримати стільки зерен, потрібно засіяти весь земний суходіл пшеницею і разів зо п’ять зібрати врожай.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



І все-то ти знаєш! А скажи-но мені, будь ласка, як порахувати цю кількість зерен? Ми вже вміємо знаходити суму n перших елементів арифметичної прогресії. Але послідовність чисел, що позначають кількість зерен, які слід покласти на клітинки шахівниці, не буде арифметичною прогресією, бо вона має вигляд: 1; 2; 4; 8; 16; 32 тощо. У цій послідовності кожен наступний елемент більший від попереднього не *на* однакове число, а *в* однакову кількість разів, а саме — удвічі.



Не сердься. Звісно, я поки що знаю далеко не все. Мабуть, послідовності з такою закономірністю теж мають якусь спеціальну назву, а також для них існують формули знаходження суми n перших елементів. Зараз підемо на урок математики й про все дізнаємось.



Так, Тетянко, ти маєш рацію, послідовності, схожі на послідовність із легенди про шахи, дійсно мають спеціальну назву.



Геометрична прогресія — це числова послідовність, у якій кожен наступний елемент, починаючи з другого, є *добутком* попереднього елемента й деякого числа q, відмінного від нуля. Іншими словами, послідовність $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n; \ldots\} = (b_n)$ називають геометричною прогресією, якщо $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (або $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, якщо $b_n \neq 0$) для всіх $n \in N$. Число $q \neq 0$ при цьому називають знаменником геометричної прогресії B.



Зрозуміло, що якщо перший елемент геометричної прогресії дорівнює нулю, то за будь-якого знаменника всі наступні її елементи також будуть дорівнювати нулю. Також якби знаменник геометричної прогресії міг дорівнювати нулю, то всі її елементи, крім, можливо, першого, теж дорівнювали б нулю. Тому такі

геометричні прогресії ми розглядати не будемо й *вважатимемо, що всі елементи будь-якої геометричної прогресії відмінні від нуля.*



Як і для арифметичної прогресії, у наведеному означенні геометричну прогресію задано описово й за допомогою рекурентної формули. Із описового задання добре зрозумілий *спосіб утворення* елементів геометричної прогресії, а рекурентна формула дає змогу, знаючи перший елемент b_1 і знаменник q, знаходити всі інші елементи геометричної прогресії. Наприклад, якщо $b_1 = 3$ і $q = -2$, то $B = \{3;\ -6;\ 12;\ -24;\ 48;\ \ldots\}$, а якщо $b_1 = -6$ і $q = \frac{1}{3}$, то $B = \left\{-6;\ -2;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{9};\ -\frac{2}{27};\ \ldots\right\}$.



Геометричну прогресію можна задати й за допомогою формули n-го елемента. Справді, з рекурентної формули $b_{n+1} = b_n \cdot q$ отримуємо, що $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$, $b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$, $b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^4$ тощо. Природним видається, що для всіх $n \in N$ n-й елемент геометричної прогресії B можна знайти за формулою:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

де b_1 — перший елемент геометричної прогресії; q — її знаменник.



Як і в § 22, зауважимо, що наведені міркування не є строгим доведенням формули n-го елемента геометричної прогресії. Строге обґрунтування цього твердження виконують зазвичай *методом математичної індукції*, з яким ви ознайомитесь у старшій або вищій школі.



Аналогічно до арифметичної прогресії, формула n-го елемента дає змогу обчислювати будь-який елемент геометричної прогресії

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

за її першим елементом і знаменником. Наприклад, якщо $b_1 = 3$ і $q = -2$, то $b_{11} = b_1 \cdot q^{10} = 3 \cdot 1024 = 3072$, а якщо $b_1 = -6$ і $q = \frac{1}{3}$, то $b_{22} = b_1 \cdot q^{21} = \frac{-6}{3^{21}} = -\frac{2}{3\,486\,784\,401}$.

Також, зрозуміло, що якщо задано навіть два перших елементи геометричної прогресії, то можна визначити формулу її n-го елемента, а отже, і будь-який елемент цієї послідовності.

Наприклад, нехай у геометричній прогресії B відомі перші два її елементи $b_1 = 10$ і $b_2 = -5$. Тоді знаменник $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$, а формула n-го елемента має вигляд $b_n = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.



Пам'ятаю, що назва арифметичної прогресії походить від середнього арифметичного. Природно було б, щоб назва геометричної прогресії походила від середнього геометричного.



Саме так, Петрику. Розглянемо три послідовні елементи b_{n-1}, b_n, b_{n+1} деякої геометричної прогресії B $(n \in N,\ n \geqslant 2)$. За означенням геометричної прогресії $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, звідки одержуємо формулу:

$$b_n^{\,2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1},\ n \in N,\ n \geqslant 2.$$

Остання формула виражає властивість геометричної прогресії. Якщо всі елементи геометричної прогресії B є додатними, то з останньої формули отримуємо, що $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$, тобто будь-який елемент геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх елементів цієї послідовності.



Аналогічно до арифметичної прогресії, для геометричної прогресії правильним є твердження, обернене до її характеристичної

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

властивості: якщо для елементів деякої числової послідовності B виконується рівність $b_n^{\,2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$, то ця послідовність є геометричною прогресією.

Це твердження називають ознакою геометричної прогресії.

Доведення цього твердження:
rnk.com.ua/113251





Зважаючи на властивість і ознаку геометричної прогресії, можна дати інше означення цієї послідовності: числову послідовність B називають геометричною прогресією, якщо для її елементів виконується рівність $b_n^{\,2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$. Це означення є еквівалентним до введеного на початку § 23.



Ознаку геометричної прогресії часто використовують для того, щоб переконатися, чи є якісь три числа трьома послідовними елементами геометричної прогресії. Справді, числа 2, 8 і 14 не є послідовними трьома елементами геометричної прогресії, бо $2 \cdot 14 = 28 \neq 8^2$, а три числа 10, 20 і 40 є трьома послідовними елементами геометричної прогресії, оскільки $10 \cdot 40 = 400 = 20^2$.



Ознаку геометричної прогресії можна використовувати й для розв'язування складніших задач. Розглянемо приклад.

Приклад 1

З'ясуємо, за яких значень змінної x відповідні значення виразів $x+4$, x і 2 будуть трьома послідовними елементами геометричної прогресії, а також знайдемо знаменник q цієї геометричної прогресії.

Розв'язання. Якщо $b_1 = x+4$, $b_2 = x$, $b_3 = 2$ — три послідовні елементи деякої послідовності B, то для того, щоб ця послідовність була геометричною прогресією, має виконуватися рівність $x^2 = (x+4) \cdot 2$, звідки $x^2 - 2x - 8 = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Це й будуть шукані значення змінної x.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Для $x=-2$ $b_1=2$, $b_2=-2$, $b_3=2$, а отже, знаменник геометричної прогресії $q=\dfrac{b_2}{b_1}=-1$; для $x=4$ $b_1=8$, $b_2=4$, $b_3=2$, а отже, $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{2}$.



Бачу, що геометрична прогресія зовсім не схожа на арифметичну за властивостями. Аж горю з нетерпіння — так цікаво дізнатися, як знаходити суму n її перших елементів! Заодно й кількість зерен у легенді про шахи можна буде порахувати.



Добре, зараз покажемо, як це робити. Знову позначимо через S_n суму n перших елементів геометричної прогресії B, тобто $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}+b_n$.

Знайдемо значення виразу $S_n\cdot q$.

Маємо: $S_n\cdot q=b_1\cdot q+b_2\cdot q+\ldots+b_{n-1}\cdot q+b_n\cdot q$. Але за означенням геометричної прогресії $b_1\cdot q=b_2$, $b_2\cdot q=b_3$, ..., $b_{n-1}\cdot q=b_n$, $b_n\cdot q=b_{n+1}$. Тому $S_n\cdot q=b_2+b_3+\ldots+b_n+b_{n+1}$, а $S_n\cdot q-S_n=b_{n+1}-b_1$, звідки $S_n\left(q-1\right)=b_1\cdot q^n-b_1$, або $S_n\left(q-1\right)=b_1\left(q^n-1\right)$.

Якщо $q\neq 1$, то одержуємо формулу суми n перших елементів геометричної прогресії:

$$S_n=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$$



Якщо $q=1$, то всі елементи геометричної прогресії рівні між собою, а отже, для цього випадку $S_n=n\cdot b_1$.



Розглянемо ще два приклади.

Приклад 2

У геометричній прогресії B, усі елементи якої є додатними числами, $b_3=9$, $b_5=36$. Знайдемо суму S_8 перших восьми елементів цієї послідовності.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розв'язання. Оскільки $b_3 = b_1 \cdot q^2$, а $b_5 = b_1 \cdot q^4$, то $\frac{b_5}{b_3} = \frac{b_1 q^4}{b_1 q^2} = q^2$. З іншого боку, $\frac{b_5}{b_3} = \frac{36}{9} = 4$. Отже, $q^2 = 4$, звідки $q = \pm 2$. За умовою задачі всі елементи B є додатними. Тому $q = 2$. Крім того, з рівності $b_3 = b_1 \cdot q^2$ маємо: $b_1 \cdot 4 = 9$, $b_1 = \frac{9}{4}$. За відомою формулою

$$S_8 = \frac{b_1\left(q^8 - 1\right)}{q - 1} = \frac{\frac{9}{4} \cdot \left(2^8 - 1\right)}{2 - 1} = \frac{9 \cdot 255}{4} = \frac{2295}{4} = 573{,}75.$$

Приклад 3

Знайдемо кількість зерен, що попросив мудрець у шаха в легенді про винайдення шахів.

Розв'язання. Кількість зерен, які мудрець попросив у шаха, утворює геометричну прогресією з першим елементом $b_1 = 1$ і знаменником $q = 2$. Оскільки клітинок на шахівниці 64, то загальна кількість зерен

$$S_{64} = \frac{1 \cdot \left(2^{64} - 1\right)}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$



Кількість зерен у легенді про винайдення шахів справді є дуже великою: $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$. Навіть якщо вважати, що в одному колоску 50 зерен (середній показник), то це приблизно 368 934 881 474 191 032 колосків. На одному гектарі поля зазвичай росте від 3 до 6 мільйонів колосків. Тому для вирощування такої кількості пшениці потрібно не менше 62 мільярдів гектарів поля. Для довідки: площа всього земного суходолу становить приблизно 15 мільярдів гектарів.



Якщо в геометричній прогресії $|q| < 1$, то таку прогресію називають нескінченно спадною геометричною прогресією. Наприклад,

якщо $b_1 = 1$, а $q = \frac{1}{3}$, то $B = \left\{1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \ldots\right\}$, тобто модулі елементів геометричної прогресії зі збільшенням номера n справді зменшуються.

Для такої геометричної прогресії запишемо формулу суми n її перших елементів у вигляді: $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q}\left(1 - q^n\right)$.

За необмеженого збільшення номера n, за умови $|q| < 1$, значення q^n ставатиме як завгодно близьким до нуля, а отже, значення S_n ставатиме як завгодно близьким до числа $\frac{b_1}{1 - q}$, яке й вважають сумою всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії.

Отже, суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ обчислюють за формулою:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$



За останньою формулою сума всіх елементів геометричної прогресії $B = \left\{1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \ldots\right\}$, про яку йшлося вище, $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Розглянемо ще один приклад застосування цієї формули.

Приклад 4

Знайдемо значення *нескінченного періодичного дробу* $0,(7) = 0,7777\ldots$.

Розв'язання. Оскільки $0,(7) = 0,7777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10\,000} + \ldots$, то очевидно, що доданки останньої суми утворюють геометричну прогресію з першим елементом $b_1 = \frac{7}{10}$ і знаменником $q = \frac{1}{10}$. Ця

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

геометрична прогресія є нескінченно спадною, бо $|q|=\frac{1}{10}<1$. Тому сума всіх її елементів $S=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$. Отже, $0,(7)=\frac{7}{9}$. Можете додатково переконатися в цьому, виконавши ділення числа 7 на число 9 у стовпчик або на калькуляторі.



Ще більше цікавих прикладів
на застосування геометричної прогресії
в математиці та повсякденному житті:
rnk.com.ua/113252



Перевірте себе!

1. Яку послідовність називають геометричною прогресією? Наведіть описове означення й означення за допомогою рекурентної формули. Що називають знаменником арифметичної прогресії?

2. Запишіть формулу n-го елемента геометричної прогресії. Наведіть приклади її застосування.

3. Чому геометричну прогресію називають саме так? Сформулюйте характеристичну властивість і ознаку геометричної прогресії.

4. Запишіть відомі вам формули суми n перших елементів геометричної прогресії. Наведіть приклади застосування цих формул.

5. Яку геометричну прогресію називають нескінченно спадною? Запишіть формулу суми всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Біологи стверджують, що в сприятливому середовищі кількість бактерій певного виду щогодини збільшується у 2 рази. Якщо на початку досліду було 100 бактерій, то скільки їх буде через 4 год? через 6 год? Чи є ця послідовність чисел геометричною прогресією?

2. Медики дослідили, що під час поширення деякого вірусу кожна хвора людина заражає трьох інших. Якщо на першому етапі поширення вірусу була одна хвора людина, то на другому етапі заразилися три людини. Скільки людей заразиться на третьому, четвертому та п'ятому етапах поширення вірусу? Чи є ця послідовність чисел геометричною прогресією?

3. Першим елементом послідовності є найменше двоцифрове число, а кожне наступне число вдвічі більше за попереднє. Запишіть усі елементи цієї послідовності, які є двоцифровими числами. Чи є ця послідовність геометричною прогресією?

4. Першим елементом послідовності є найменше трицифрове число, а кожне наступне число вдвічі більше за попереднє. Запишіть усі елементи цієї послідовності, які є трицифровими числами. Чи є ця послідовність геометричною прогресією?

5. Знайдіть знаменник q геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 6$, $b_2 = 12$; б) $b_3 = 24$, $b_4 = 3$; в) $b_5 = -2$, $b_6 = 8$.

6. Знайдіть знаменник q геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 5$, $b_2 = 40$; б) $b_7 = 36$, $b_8 = -4$; в) $b_{15} = -6$, $b_{16} = 18$.

7. Задано геометричну прогресію B зі знаменником q. Знайдіть:
а) b_2, якщо $b_1 = 3$, $q = 5$;
б) b_7, якщо $b_6 = 9$, $q = -4$;
в) b_3, якщо $b_4 = 36$, $q = -3$;
г) b_{20}, якщо $b_{21} = -75$, $q = 3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

8. Задано геометричну прогресію B зі знаменником q. Знайдіть:
а) b_2, якщо $b_1 = 7$, $q = 3$;
б) b_9, якщо $b_8 = 2$, $q = -9$;
в) b_2, якщо $b_3 = 24$, $q = 6$;
г) b_{15}, якщо $b_{16} = -60$, $q = -12$.

9. Скориставшись формулою $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, знайдіть другий, п'ятий і восьмий елементи геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 2$, $q = 3$; б) $b_1 = \frac{1}{625}$, $q = -5$; в) $b_1 = -6$, $q = -2$.

10. Скориставшись формулою $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, знайдіть другий, п'ятий і сьомий елементи геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 5$, $q = 2$; б) $b_1 = \frac{1}{32}$, $q = -2$; в) $b_1 = -4$, $q = 3$.

11. Перевірте, чи є послідовними елементами деякої геометричної прогресії такі три числа: а) 5, −10, 15; б) 3, 12, 48; в) 3, −12, 48; г) −1, 10, −100.

12. Перевірте, чи є послідовними елементами деякої геометричної прогресії такі три числа: а) 4, 12, 20; б) 4, 12, 36; в) −4, −12, −36; г) 2, −10, 50.

13. Скориставшись формулою $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$, знайдіть суму перших чотирьох елементів геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 7$, $q = 3$; б) $b_1 = -7$, $q = -3$; в) $b_1 = 7$, $q = -3$.

14. Скориставшись формулою $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$, знайдіть суму перших п'яти елементів геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 5$, $q = 2$; б) $b_1 = 5$, $q = -2$; в) $b_1 = -5$, $q = -2$.

15. Скориставшись формулою $S = \frac{b_1}{1 - q}$, знайдіть суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{3}$; б) $b_1 = -8$, $q = -\frac{1}{3}$; в) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{3}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

16. Скориставшись формулою $S=\dfrac{b_1}{1-q}$, знайдіть суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1=9$, $q=\dfrac{1}{2}$; б) $b_1=9$, $q=-\dfrac{1}{2}$; в) $b_1=-9$, $q=-\dfrac{1}{2}$.

Середній рівень

17. Першим елементом послідовності є найбільше трицифрове число, а кожне наступне число втричі менше від попереднього. Запишіть усі елементи послідовності, які є трицифровими числами. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник цієї геометричної прогресії.

18. Першим елементом послідовності є найбільше двоцифрове число, а кожне наступне число втричі менше від попереднього. Запишіть усі елементи послідовності, які є двоцифровими числами. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник цієї геометричної прогресії.

19. Перші два елементи послідовності — числа 4 і 10. Кожний наступний елемент є добутком двох попередніх елементів. Запишіть перші шість елементів цієї послідовності. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник цієї геометричної прогресії.

20. Перші два елементи послідовності — числа 2 і 5. Кожний наступний елемент є подвоєним добутком двох попередніх елементів. Запишіть перші шість елементів цієї послідовності. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник цієї геометричної прогресії.

21. Задано геометричну прогресію B. Знайдіть:

а) b_3, якщо $b_1=2$, $b_2=10$;

б) b_8, якщо $b_6=-2$, $b_7=6$;

в) b_1, якщо $b_2=12$, $b_3=3$;

г) b_{10}, якщо $b_{11}=-15$, $b_{12}=-45$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

22. Задано геометричну прогресію B. Знайдіть:
а) b_3, якщо $b_1 = 3$, $b_2 = 6$;
б) b_{12}, якщо $b_{10} = -2$, $b_{11} = 8$;
в) b_1, якщо $b_2 = 48$, $b_3 = -24$;
г) b_7, якщо $b_8 = -12$, $b_9 = -36$.

23. Знайдіть знаменник геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 7$, $b_3 = 63$; б) $b_2 = -3$, $b_4 = -75$; в) $b_{15} = 96$, $b_{17} = 24$.

24. Знайдіть знаменник геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 5$, $b_3 = 20$; б) $b_{11} = 48$, $b_{13} = 3$; в) $b_8 = -1$, $b_{10} = -36$.

25. Знайдіть перші шість елементів геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 160$, $b_2 = -80$; б) $b_3 = 3$, $b_4 = 30$; в) $b_4 = -54$, $b_5 = -162$.

26. Знайдіть перші п'ять елементів геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = -5$, $b_2 = -10$; б) $b_2 = 54$, $b_3 = 18$; в) $b_4 = -32$, $b_5 = 128$.

27. Сума перших п'яти елементів геометричної прогресії дорівнює 45, а сума перших чотирьох її елементів — 30. Чому дорівнює п'ятий елемент цієї прогресії?

28. Сума перших семи елементів геометричної прогресії дорівнює 49, а сума перших шести її елементів — 36. Чому дорівнює сьомий елемент цієї прогресії?

29. Знайдіть суму п'яти перших елементів геометричної прогресії, якщо її перший елемент дорівнює 4, а її восьмий елемент утричі більший, ніж її сьомий елемент.

30. Знайдіть суму семи перших елементів геометричної прогресії, якщо її перший елемент дорівнює 5, а її дев'ятий елемент удвічі менший, ніж її десятий елемент.

31. Борг підприємця Семена Непутящого перед кредиторами становить 500 тис. грн. Семен щомісяця зменшує заборгованість на 20 % від залишку боргу. Яким буде залишок боргу на другий, третій, четвертий місяці? Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник цієї геометричної прогресії.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

32. За перший місяць року компанія «За перемогу!» виготовила 3000 комплектів першої медичної допомоги. Кожного наступного місяця компанія запланувала виготовляти на 10 % більше комплектів, ніж попереднього місяця. Скільки комплектів планує виготовити компанія за другий, третій, четвертий місяці? Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник цієї геометричної прогресії.

Достатній рівень

33. У геометричній прогресії B $b_3 = 1{,}8$, а $b_5 = 16{,}2$. Знайдіть: а) знаменник цієї прогресії; б) перший елемент цієї прогресії.

34. У геометричній прогресії B $b_4 = 2{,}4$, а $b_6 = 9{,}6$. Знайдіть: а) знаменник цієї прогресії; б) перший елемент цієї прогресії.

35. Добуток другого та четвертого елементів геометричної прогресії дорівнює 64. Усі елементи цієї прогресії є додатними числами. Визначте: а) третій елемент цієї прогресії; б) перший елемент цієї прогресії, якщо він утричі більший за її другий елемент.

36. Добуток третього та п'ятого елементів геометричної прогресії дорівнює 225. Усі елементи цієї прогресії є додатними числами. Визначте: а) четвертий елемент цієї прогресії; б) перший елемент цієї прогресії, якщо він удвічі більший за її другий елемент.

37. Укажіть ненульове значення x, за якого значення виразів x, $2x$, 16 будуть послідовними елементами геометричної прогресії.

38. Укажіть додатне значення y, за якого значення виразів 4, $2y$, $2y+15$ будуть послідовними елементами геометричної прогресії.

39. Кількість переглядів відео щодня зростає втричі. Якщо в перший день відео переглянули 100 разів, скільки переглядів матиме відео за сім днів?

40. Популяція деякого виду тварин щороку зростає в 1,5 раза. У 2025 р. в заповідник випустили 1000 особин тварин цього виду. Скільки особин налічуватиметься в заповіднику у 2029 р. за умови, що коефіцієнт зростання популяції залишається незмінним? Відповідь округліть до цілих.

41. Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{3}{4}$, а сума її чотирьох перших елементів — 175. Знайдіть перший елемент цієї прогресії.

42. Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{1}{2}$, а сума її п'яти перших елементів — 31. Знайдіть перший елемент цієї прогресії.

43. Знайдіть суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії B, у якої $b_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

44. Знайдіть суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії B, у якої $b_n = \frac{3}{3^n}$.

45. Щомісяця кількість завантажень популярного мобільного застосунку зростає в 1,8 раза. Якщо за перший місяць здійснено 500 завантажень, скільки завантажень цього застосунку відбудеться за три місяці?

46. Щотижня кількість учасників навчального онлайн-курсу зростає в 1,25 раза. Якщо в перший тиждень на курсі зареєстровано 800 учасників, скільки учасників стане на курсі за три тижні?

Високий рівень

47. Доведіть, що послідовність B, задана формулою $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$, $n \in N$, є геометричною прогресією.

48. Доведіть, що послідовність B, задана формулою $b_n = 7^{2n}$, $n \in N$, є геометричною прогресією.

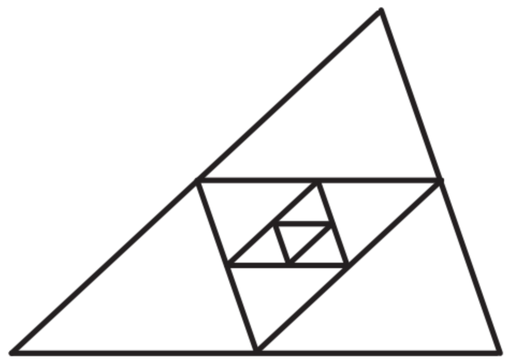
49. У геометричній прогресії B $b_7 = 1458$ і $b_9 = 13122$. Запишіть формулу для обчислення n-го елемента цієї прогресії.

50. У геометричній прогресії B $b_6 = 96$ і $b_8 = 384$. Запишіть формулу для обчислення n-го елемента цієї прогресії.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

51. Задано квадрат зі стороною 4 см. Середини його сторін є вершинами другого квадрата. Середини сторін другого квадрата є вершинами третього квадрата й так далі. Доведіть, що послідовність чисел, які виражають площі цих квадратів, є геометричною прогресією. Знайдіть площу сьомого квадрата.

52. Задано трикутник із периметром 64 см. Середини його сторін є вершинами другого трикутника (див. рисунок). Середини сторін другого трикутника є вершинами третього трикутника і так далі. Доведіть, що послідовність чисел, які виражають периметри цих трикутників, є геометричною прогресією. Знайдіть периметр восьмого трикутника.



53. Сума трьох чисел, які є послідовними елементами арифметичної прогресії, дорівнює 24. Якщо друге число збільшити на 1, а останнє — на 14, то одержимо послідовні елементи геометричної прогресії. Знайдіть ці числа.

54. Сума трьох чисел, які є послідовними елементами геометричної прогресії, дорівнює 26. Якщо до цих чисел відповідно додати числа 1, 6 і 3, то одержимо послідовні елементи арифметичної прогресії. Знайдіть ці числа.

55. Обчисліть.

а) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2^n\right)^2}+\ldots,\ n\in \boldsymbol{N}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{8}}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2^n}}+\ldots,\ n\in \boldsymbol{N}$.

56. Обчисліть.

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,\ n\in \boldsymbol{N}$;

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\ldots,\ n\in \boldsymbol{N}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

57. Знайдіть значення нескінченного періодичного дробу $0,1(27) = 0,127\,272\,727\ldots$.

58. Знайдіть значення нескінченного періодичного дробу $0,2(36) = 0,236\,363\,636\ldots$.

59. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 1, а сума квадратів її елементів — 2. Знайдіть перший елемент і знаменник цієї прогресії.

60. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 1, а сума квадратів її елементів — 100. Знайдіть перший елемент

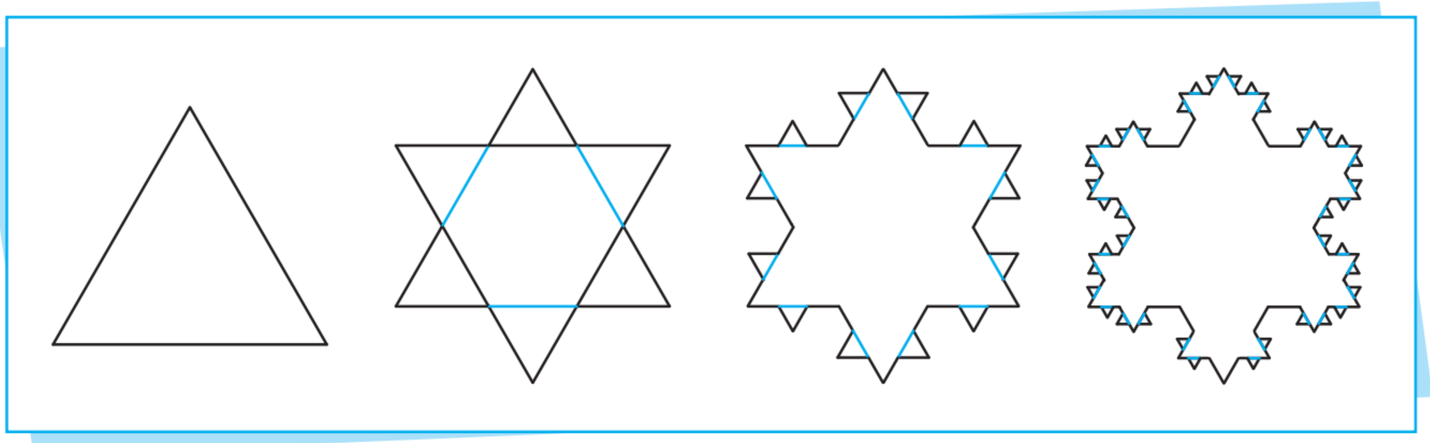


Цікавинки від дідуся Тараса

Міркування щодо суми всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії підтверджують парадоксальний висновок із «Цікавинок дідуся Тараса» у § 22, що *сума нескінченної кількості доданків може бути скінченною*. Цей факт можна використати для знаходження площі цікавих геометричних об'єктів.

Наприклад, розглянемо рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює 1. Кожну з його сторін поділимо на три рівні відрізки й на середніх із них побудуємо зовні трикутника три рівносторонніх трикутники. Утвориться ламана, яка має 12 ланок. На кожній із цих ланок виконаємо таку саму процедуру, як на попередньому кроці. Утвориться ламана, що має 48 ланок. Продовжимо процедуру до нескінченності (див. рисунок). Лінію, що утвориться внаслідок описаної побудови, називають *сніжинкою Коха*. Ця лінія обмежує частину площини, яку називають *островом Коха*.

Нільс Фабіан Гельге фон Кох (1870–1924) — шведський математик, відомий роботами з теорії чисел; запропонував приклад фрактальної лінії, яку назвали на його честь *сніжинкою Коха*.

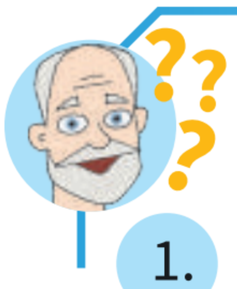


Нескладно помітити, що площа кожного з рівносторонніх трикутників, побудованих на кожному наступному кроці процедури зображення острова Коха, у 9 разів менша за площу трикутників, побудованих на попередньому кроці. При цьому кількість трикутників, побудованих на кожному наступному кроці, починаючи з третього, у 4 рази більша за кількість трикутників, побудованих на попередньому кроці. Отже, площа острова Коха $S_{KI} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{1}{81} + 48 \cdot \frac{1}{729} + \dots$. У цій сумі числа, починаючи з другого, утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію з першим елементом $b_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ і знаменником $q = \frac{4}{9}$. Тому $S_{KI} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{3}{5} = 1{,}6$.

Однак уважні учні й учениці могли помітити, що острів Коха не є многокутником, а отже, для визначення його площі не можна користуватися означенням площі многокутника. Більше того, для многокутників ми вважали: *якщо многокутник розбивається на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників*. Тут малося на увазі розбиття многокутника на *скінченну* кількість многокутників, а острів Коха розбивається на *нескінченну* кількість рівносторонніх трикутників. Тому для цього та подібних випадків потрібне окреме теоретичне обґрунтування поняття площі відповідних геометричних фігур. Це обґрунтування зробив французький математик *Анрі Лебег*, увівши в 1902 р. поняття *міри* плоскої геометричної фігури, яке є узагальненням відомого вам поняття площі та з яким ви ознайомитесь у вищій школі. Ми можемо в подальшому користуватися цим узагальненням не лише для знаходження площі острова Коха, а й для знаходження площ інших геометричних фігур, які розбиваються на нескінченну кількість многокутників, кругів або частин круга.

Анрі Леон Лебег (1875–1941) — французький математик, відомий роботами з математичного аналізу й теорії ймовірностей, засновник теорії міри та інтеграла, названих на його честь *мірою Лебега* та *інтегралом Лебега*.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя або вчительки математики переконайтеся, що сніжинка Коха має нескінченну довжину. Іншими словами, переконайтеся, що острів Коха є геометричною фігурою, яка має скінченну площу, але обмежений лінією, що має нескінченну довжину.
2. Дізнайтеся більше про інші лінії, які мають нескінченну довжину, але при цьому обмежують геометричну фігуру, що має скінченну площу. Підготуйте невелике повідомлення. Як ви вважаєте, чи існують такі лінії в реальному світі?
3. Запитайте у вчителя або вчительки географії про спроби визначення довжини берегової лінії Норвегії. Як ви вважаєте, чи є скінченною ця довжина? А чи скінченною є площа суходолу Норвегії?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $\sqrt{17+12\sqrt{3}}+\sqrt{33-20\sqrt{3}}$.
2. Петрик і Тетянка вдвох з'їдять святковий десерт за 6 хв. Скільки часу на це знадобилося б кожному з них окремо, якщо відомо, що Петрик впорався б із цим завданням на 5 хв швидше за Тетянку.
3. Побудуйте прямокутник за його стороною й радіусом описаного кола.
4. Пан Олег планує позичити гроші в пані Марини, яка позичає кошти під 15 % річних. Яку суму має просити пан Олег, якщо планує повернути пані Марині 5500 грн через 8 місяців?
5. Укажіть слово, яке є: а) спільним початком слів; б) спільним закінченням слів. Кількість крапок у дужках дорівнює кількості букв у шуканому слові.

а) (. . . . .) → ТУЛ
→ ТЕЛА
→ ТАС

б) РА → (. . . .)
ЕКС →
ПАС →

§ 24. Послідовності датованих сум. Ануїтети. Довічна рента





Петрику, нещодавно побачила в інтернеті таку рекламу: «Поспішай накопичити кошти й одержати додаткову пенсію! Якщо тобі зараз 30 років, то досить відкладати всього 500 грн на місяць, щоб отримувати щомісячно понад 30 тис. грн довічної ренти після виходу на пенсію в 65 років. Не втрать свій шанс на забезпечене життя в поважному віці!». Якщо чесно, я мало що зрозуміла в цьому оголошенні. Може, тобі дідусь Тарас щодо цього щось розповідав?



У дідуся Тараса начебто непогана пенсія, тому він мені такого не розповідав. Але я знаю, що пенсійні програми надзвичайно популярні в багатьох країнах зі стабільною банківською системою. Люди все життя працюють, відкладаючи із заробітної плати якусь суму на депозитний рахунок під відсотки. А коли на рахунку накопичується певна сума, то її заморожують і подальші відсотки з неї щомісяця довічно сплачують власнику. Можливо, такі виплати й називають довічною рентою?



Як на мене, це природна назва. До речі, так можна накопичувати кошти не лише на пенсійне забезпечення, а й для додаткових

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

виплат, скажімо, дітям після досягнення ними повноліття, доки вони ще, так би мовити, не стали на ноги. Але як розрахувати суму періодичних внесків на депозитний рахунок, щоб накопичити на ньому потрібну суму?



Щодо виплат дітям після повноліття — це цікава ідея, треба буде батькам натякнути, час іще є! А потрібний розмір внесків, мабуть, розраховують із використанням формули складних відсотків, яку ми вивчали в минулому році. Пропоную запитати в учителів, щоб дізнатися більше.



Періодичні платежі у фінансовій математиці називають ануїтетами. Цей термін виник ще в XVII ст. й походить від латинського слова *annuitas* — щорічний платіж. Спочатку так називали лише щорічні платежі, а зараз ануїтетом називають будь-яку серію платежів (здебільшого однакового розміру), які сплачуються через однакові проміжки часу.

Проміжок часу між двома послідовними платежами називають інтервалом платежу, а проміжок часу від початку першого до завершення останнього інтервалу платежу — строком ануїтету.



Якщо платежі ануїтету здійснюються в моменти закінчення інтервалів платежу, то такий ануїтет називають звичайним ануїтетом, а якщо ці платежі здійснюються на початку інтервалу платежу, то такий ануїтет називають належним ануїтетом. Далі в цьому параграфі будемо розглядати лише звичайні ануїтети, називаючи їх просто ануїтетами без додаткових уточнень.

Наприклад, якщо пані Катерина купує автомобіль на виплат, сплачуючи відразу 100 тис. грн, а потім наприкінці кожного місяця ще 20 тис. грн протягом двох років, то всі щомісячні платежі утворюють звичайний ануїтет. При цьому інтервал платежу становить 1 місяць, а строк ануїтету — 24 місяці.



Зрозуміло, що фінансові установи надають послуги, використовуючи певну норму відсотка або річну відсоткову ставку з певною

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

кількістю періодів конверсії на рік. Наприклад, для пані Катерини під час придбання нею авто на виплат банк може використовувати річну відсоткову ставку $r_{12} = 12\,\%$, або 12 % річних щомісяця. Бачимо, що в цьому випадку інтервали платежу ануїтету збігаються з періодами конверсії. Якщо це так, то відповідний ануїтет називають простим ануїтетом, у протилежному випадку його називають загальним ануїтетом. Далі в цьому параграфі будемо розглядати лише прості ануїтети.



У 8 класі в розділі «Основи фінансової грамотності» ми розглядали формули простих і складних відсотків, датовані суми та еквівалентні платежі.

Згадайте ці відомості:
rnk.com.ua/113253



Під час практичних застосувань ануїтетів зазвичай важливими є поняття «теперішня вартість ануїтету» і «підсумкова вартість ануїтету». Справді, для прикладу з придбанням авто пані Катериною цікаво, скільки коштувало це авто в салоні в момент укладання угоди про оплату. Також цікаво, скільки потрібно було б сплатити пані Катерині, якби вона вирішила погасити всю суму позики одним платежем наприкінці строку ануїтету. Наведемо означення вже згаданих термінів.



Теперішньою вартістю ануїтету називають датовану суму, еквівалентну всьому ануїтету на початок строку ануїтету.

Підсумковою вартістю ануїтету називають датовану суму, еквівалентну всьому ануїтету на завершення строку ануїтету.

Зазвичай теперішню вартість ануїтету позначають буквою A, а підсумкову вартість ануїтету — буквою S.



Розглянемо приклад із придбанням авто більш детально.

Приклад 1

Нехай пані Катерина купує авто в салоні на таких умовах: перший внесок становить 100 тис. грн і сплачується одразу, а наступні 24 внески становлять 20 тис. грн і сплачуються наприкінці кожного наступного місяця, причому гроші коштують $r_{12}=12\,\%$. Знайдемо теперішню та кінцеву вартості ануїтету, а також вартість авто в салоні.

Розв'язання. Для знаходження початкової та кінцевої вартостей ануїтету скористаємося відомим рівнянням еквівалентності. Ми знаємо, що якщо за норми відсотка i суми K_1, K_2, ..., K_n і C потрібно виплатити відповідно через k_1, k_2, ..., k_n і c періодів конверсії від теперішнього часу, то сума C буде еквівалентною до серії платежів K_1, K_2, ..., K_n, за умови що $C=K_1\cdot(1+i)^{c-k_1}+K_2\cdot(1+i)^{c-k_2}+\ldots+K_n\cdot(1+i)^{c-k_n}$.

Для знаходження початкової вартості ануїтету маємо: $i=\frac{r_{12}}{12}=1\,\%=0{,}01$; $n=24$; $K_1=K_2=\ldots=K_n=20\,000$; $k_1=1$, $k_2=2$, ..., $k_{24}=24$; $c=0$, $C=A$ — шукана сума. Після підстановки в рівняння еквівалентності одержуємо:

$$A=20\,000\cdot(1+0{,}01)^{0-1}+20\,000\cdot(1+0{,}01)^{0-2}+\ldots+20\,000\cdot(1+0{,}01)^{0-24}=$$
$$=20\,000\cdot\left(1{,}01^{-1}+1{,}01^{-2}+\ldots+1{,}01^{-24}\right).$$

Зрозуміло, що сума в останніх дужках є сумою 24 перших елементів геометричної прогресії з першим елементом $b_1=1{,}01^{-1}$ і знаменником $q=1{,}01^{-1}$. За відомою формулою суми n перших елементів геометричної прогресії маємо: $A=20\,000\cdot S_{24}=20\,000\cdot\frac{b_1\left(q^{24}-1\right)}{q-1}=$
$$=20\,000\cdot\frac{1{,}01^{-1}\left(1{,}01^{-24}-1\right)}{1{,}01^{-1}-1}\approx 424\,867{,}75$$ грн. Крім того, у день покупки пані Катерина додатково мала сплатити ще 100 тис. грн. Отже, авто в салоні коштувало 524 867 грн 75 коп.

Для знаходження підсумкової вартості ануїтету маємо: $i=1\,\%=0{,}01$; $n=24$; $K_1=K_2=\ldots=K_n=20000$; $k_1=1$, $k_2=2$, ..., $k_{24}=24$; $c=24$, $C=S$ — шукана сума. Після підстановки в рівняння еквівалентності одержуємо:

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

$$S = 20\,000 \cdot (1+0{,}01)^{24-1} + 20\,000 \cdot (1+0{,}01)^{24-2} + \ldots + 20\,000 \cdot (1+0{,}01)^{24-24} =$$
$$= 20\,000 \cdot \left(1{,}01^{23} + 1{,}01^{22} + \ldots + 1{,}01 + 1\right).$$

Після зміни порядку доданків на зворотний сума в останніх дужках є сумою 24 перших елементів геометричної прогресії з першим елементом $b_1 = 1$ і знаменником $q = 1{,}01$. За відомою формулою суми n перших елементів геометричної прогресії маємо:

$$S = 20\,000 \cdot S_{24} = 20\,000 \cdot \frac{b_1\left(q^{24}-1\right)}{q-1} = 20\,000 \cdot \frac{1 \cdot \left(1{,}01^{24}-1\right)}{1{,}01-1} \approx 539\,469{,}30 \text{ грн.}$$

Отже, якби пані Катерина вирішила замінити весь ануїтет на один платіж наприкінці його строку, то цей платіж становив би 539 469 грн 30 коп.



Можливо, дехто з вас подумав, що вартість авто пані Катерини в момент завершення строку ануїтету становитиме $539\,469{,}30 + 100\,000 = 639\,469{,}30$ грн. Але це не так, бо суми 539 469,30 грн і 100 000 грн стосуються різних моментів часу, а отже, їх не можна додавати.



Формули для початкової та кінцевої вартостей ануїтету можна вивести і в загальному випадку.

ТЕОРЕМА (про теперішню та підсумкову вартості простого звичайного ануїтету).

Нехай задано простий звичайний ануїтет, який передбачає n однакових платежів у R грн (або інших грошових одиниць) за норми відсотка i. Тоді:

- **теперішню вартість ануїтету A можна обчислити за формулою** $A = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$;
- **підсумкову вартість ануїтету S можна обчислити за формулою** $S = R \cdot \dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Спосіб доведення цієї теореми аналогічний до знаходження теперішньої та підсумкової вартостей ануїтету з прикладу 1.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/113254





Зрозуміло також, що теперішня та підсумкова вартості ануїтету є еквівалентними датованими сумами, бо кожна з них еквівалентна тій самій серії платежів. Справді, нескладно помітити, що $S = A \cdot (1+i)^n$. Тому часто після знаходження, наприклад, підсумкової вартості ануїтету для знаходження її теперішньої вартості користуються останньою формулою, а не формулою з теореми.

Також множники $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ і $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ у фінансовій математиці мають спеціальні позначення: $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{\overline{n}|i}$ (читається «a куточок n за i») і $\frac{(1+i)^n-1}{i} = s_{\overline{n}|i}$ (читається «s куточок n за i»). Ці множники зазвичай є вбудованими в комп'ютерні програми, якими користуються в банку для розрахунку теперішньої та підсумкової вартостей ануїтету за формулами $A = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ і $S = R \cdot s_{\overline{n}|i}$ відповідно.



Розглянемо ще один приклад.

Приклад 2

Пан Михайло вирішив за 10 років накопичити на депозитному рахунку в банку суму в 2 млн грн для придбання квартири. Яку суму йому потрібно класти на цей депозитний рахунок щокварталу, якщо відсотки за депозитами банк нараховує за річною ставкою $r_4 = 10\,\%$?

Розв'язання. За умовою підсумкова вартість ануїтету (вартість квартири) $S = 2\,000\,000$ грн, $n = 10 \cdot 4 = 40$, $i = \frac{r_4}{4} = 2{,}5\,\% = 0{,}025$. Потрібно знайти розмір щоквартального платежу R. Оскільки $S = R \cdot s_{\overline{40}|0{,}025}$, то $R = \frac{S}{s_{\overline{40}|0{,}025}}$. А оскільки $s_{\overline{40}|0{,}025} = \frac{(1+0{,}025)^{40} - 1}{0{,}025} \approx 67{,}4$, то $R = \frac{2\,000\,000}{67{,}4} \approx 29\,672{,}47$ грн. Отже, пан Микола для досягнення мети має класти на свій депозитний рахунок у банку 29 672 грн і 47 коп. щокварталу.



Довічною рентою (вічною рентою або просто рентою) називають ануїтет, платежі якого продовжуються необмежено довго. Зазвичай платежі довічної ренти розраховують за формулою $R = A \cdot i$, де A — теперішня вартість довічної ренти, i — норма відсотка.

Теперішня вартість довічної ренти — це сума на рахунку в банку, з якої нараховуються відсотки для кожного з платежів. Вона може бути внесена в банк одразу або накопичена на рахунку протягом певного часу й виступати, наприклад, як підсумкова сума якогось іншого ануїтету.

Наприклад, для щомісячних виплат у розмірі 30 тис. грн за річної ставки $r_{12} = 18\,\%$ (тобто за норми відсотка $i = \frac{r_{12}}{12} = 1{,}5\,\% = 0{,}015$) теперішня вартість ренти становить $A = \frac{R}{i} = \frac{30\,000}{0{,}015} = 2\,000\,000$ грн. Тобто для щомісячних виплат у 30 тис. грн довічної ренти за норми відсотка $i = 1{,}5\,\%$ на рахунку в банку слід накопичити 2 млн грн. Під час виплат довічної ренти ця сума залишатиметься на рахунку незмінною, а відсотки за нею щомісячно довічно сплачуватимуться власнику рахунку.



Розглянемо приклад із реклами щодо додаткової пенсії, про яку говорила Тетянка.

Приклад 3

Нехай банк пропонує накопичувати кошти для формування теперішньої вартості довічної ренти за відсотковою ставкою $r_{12}=12\,\%$ і після накопичення сплачує ренту за цією самою ставкою. Розмір щомісячних платежів накопичувального ануїтету пропонується 500 грн, а строк ануїтету становить 35 років. Розрахуємо платежі довічної ренти за цих умов і перевіримо правдивість реклами.



Розв'язання. За умовою теперішня вартість довічної ренти $A_{\text{р}}$ має дорівнювати підсумковій вартості $S_{\text{а}}$ ануїтету, для якого $n=35\cdot 12=420$, $i=\dfrac{r_{12}}{12}=1\,\%=0{,}01$, $R_{\text{а}}=500$ грн. Тому $A_{\text{р}}=S_{\text{а}}=500\cdot\dfrac{1{,}01^{420}-1}{0{,}01}\approx 3\,215\,480$ грн, а платежі ренти становитимуть $R=3\,215\,480\cdot 0{,}01=32\,154{,}80$ грн, тобто за норми відсотка $i=1\,\%$ реклама є правдивою.

Перевірте себе!

1. Дайте означення простого звичайного ануїтету. Що називають: а) інтервалом платежу; б) строком ануїтету?
2. Дайте означення теперішньої та підсумкової вартостей ануїтету. За якими формулами їх можна обчислити? Сформулюйте відповідну теорему.
3. Що називають довічною рентою та її теперішньою вартістю? Як розрахувати розмір платежів довічної ренти?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Пан Іван сплачує позику в банку протягом трьох років однаковими платежами в розмірі 1000 грн наприкінці кожного місяця. Відомо, що в цьому банку гроші коштують 16 % річних щокварталу.

а) Чи є ця серія платежів ануїтетом?

б) Чи є цей ануїтет звичайним?

в) Чи є цей ануїтет простим?

г) Яким є інтервал платежу?

д) Яким є строк ануїтету в інтервалах платежу?

е) Скільки платежів має здійснити пан Іван для виплати позики?

2. Пані Оксана сплачує кредит у кредитній спілці протягом чотирьох років однаковими платежами на початку кожного кварталу. Відомо, що в цій кредитній спілці гроші коштують 14 % річних щокварталу.

а) Чи є ця серія платежів ануїтетом?

б) Чи є цей ануїтет звичайним?

в) Чи є цей ануїтет простим?

г) Яким є інтервал платежу?

д) Яким є строк ануїтету в інтервалах платежу?

е) Скільки платежів має здійснити пані Оксана для виплати позики?

3. Задано простий звичайний ануїтет, який має інтервал платежу 1 квартал, строк платежу — 6 кварталів, розмір платежу — 2000 грн. Виплати ануїтету здійснюються за річною ставкою $r_4 = 12\ \%$. Знайдіть норму відсотка i. Запишіть формулу для обчислення теперішньої вартості A ануїтету та підсумкової вартості S ануїтету.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. Задано простий звичайний ануїтет, який має інтервал платежу 1 місяць, строк платежу — 12 місяців, розмір платежу — 1500 грн. Виплати ануїтету здійснюються за річною ставкою $r_{12} = 6\ \%$. Знайдіть норму відсотка i. Запишіть формулу для обчислення теперішньої вартості A ануїтету та підсумкової вартості S ануїтету.

5. Пані Василина накопичила на рахунку в банку суму в 750 000 грн для наступних постійних щомісячних виплат після досягнення нею пенсійного віку. Відомо, що ці виплати банк здійснює за норми відсотка $i = 0{,}01$.

а) Чи є ці виплати довічною рентою?

б) Яка теперішня вартість цієї довічної ренти?

в) Яким є розмір щомісячних платежів цієї довічної ренти?

6. Пан Кузьма накопичив на рахунку в банку суму в 600 000 грн для наступних постійних щомісячних виплат після досягнення ним пенсійного віку. Відомо, що ці виплати банк здійснює за норми відсотка $i = 0{,}02$.

а) Чи є ці виплати довічною рентою?

б) Яка теперішня вартість цієї довічної ренти?

в) Яким є розмір щомісячних платежів цієї довічної ренти?

Середній рівень

7. Знайдіть теперішню вартість A та підсумкову вартість S простого звичайного ануїтету, який полягає в щоквартальній сплаті 5000 грн протягом року, якщо норма відсотка $i = 4\ \%$.

8. Знайдіть теперішню вартість A та підсумкову вартість S простого звичайного ануїтету, який полягає в щомісячній сплаті 3000 грн протягом року, якщо норма відсотка $i = 1\ \%$.

9. Банк «Потужний» пропонує щоквартальну довічну ренту за річною відсотковою ставкою $r_4 = 8\ \%$. Знайдіть: а) розмір щоквартальних платежів цієї ренти, якщо її теперішня вартість становить 2 млн грн; б) теперішню вартість цієї ренти, якщо розмір щоквартальних платежів становить 25 тис. грн.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

10. Банк «Стабільний» пропонує щоквартальну довічну ренту за річною відсотковою ставкою $r_2 = 10\,\%$. Знайдіть: а) розмір щоквартальних платежів цієї ренти, якщо її теперішня вартість становить 3 млн грн; б) теперішню вартість цієї ренти, якщо розмір щоквартальних платежів становить 200 тис. грн.

Достатній рівень

11. Пан Дмитро сплачував у кредитній спілці кредит по 150 євро наприкінці кожного місяця протягом двох років. Яку суму позичив у цій спілці пан Дмитро, якщо гроші в цьому банку коштують 6 % річних щомісяця?

12. Пані Анастасія сплачувала банку кредит по 400 доларів наприкінці кожного кварталу протягом трьох років. Яку суму позичила в цьому банку пані Анастасія, якщо гроші в цьому банку коштують 8 % річних щоквартальну?

13. Пані Ірина кладе на депозит у банку наприкінці місяця по 100 євро, а гроші в цьому банку коштують 6 % річних щомісяця. Яка сума буде на рахунку пані Ірини через два роки, якщо: а) на її рахунку спочатку зовсім не було грошей; б) на початку серії платежів на її рахунку було 1000 євро?

14. Пан Сергій кладе на депозит у банку наприкінці місяця по 5 000 грн, а гроші в цьому банку коштують 12 % річних щомісяця. Яка сума буде на рахунку пана Дмитра через 1,5 роки, якщо: а) на його рахунку спочатку зовсім не було грошей; б) на початку серії платежів на його рахунку було 80 000 грн?

Високий рівень

15. Вартість автомобіля в автосалоні становить 15 тис. євро. Кредитна програма банку передбачає придбання цього автомобіля на таких умовах: одразу сплачується 20 % вартості автомобіля, а потім протягом п’яти років наприкінці кожного півріччя потрібно вносити однакові платежі. Знайдіть розмір цих платежів, якщо гроші в цьому банку коштують 10 % річних щопівроку.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

16. Вартість квартири в будівельній компанії становить 40 тис. доларів. Кредитна програма банку передбачає придбання цієї квартири на таких умовах: одразу сплачується 15 % вартості квартири, а потім протягом десяти років наприкінці кожного кварталу потрібно вносити однакові платежі. Знайдіть розмір цих платежів, якщо гроші в цьому банку коштують 8 % річних щоквартало.

17. Пан Микита кладе на накопичувальний рахунок у банк 2000 грн щомісяця й планує це робити протягом 25 років, а потім отримувати довічну ренту з накопиченого капіталу. Банк нараховує відсотки за ставкою 9 % річних щомісяця й сплачує ренту за такою самою відсотковою ставкою і з тією самою періодичністю. Знайдіть розмір щомісячних платежів довічної ренти, яку планує отримувати пан Микита.

18. Пані Ольга кладе на накопичувальний рахунок у банк певну однакову суму R грн щоквартало й планує це робити протягом двадцяти років, а потім отримувати довічну ренту в розмірі 150 тис. грн щоквартало з накопиченого капіталу. Банк нараховує відсотки за ставкою 10 % річних щоквартало й сплачує ренту за такою самою відсотковою ставкою і з тією самою періодичністю. Знайдіть потрібне для пані Ольги значення R.



Цікавинки від дідуся Тараса

Розглянемо інші види ануїтетів, про які йшлося в § 24. Якщо виплати ануїтету здійснюються на початку інтервалу платежу, то, як ви вже знаєте, його називають *належним ануїтетом*. Такі ануїтети є більш природними, скажімо, для накопичення грошей на депозитному рахунку, оскільки найчастіше перший внесок при цьому сплачується відразу, а не наприкінці першого інтервалу платежу.

Нехай A — теперішня вартість належного ануїтету, S — його підсумкова вартість, R — розмір платежу, i — норма відсотка належного ануїтету, який складається з n платежів. Тоді можна показати, що правильними є такі формули вартостей належного ануїтету:

$$A=(1+i)\cdot R\cdot a_{\overline{n}|i}=R\cdot\left(1+a_{\overline{n-1}|i}\right) \text{ і } S=(1+i)\cdot R\cdot s_{\overline{n}|i}=R\cdot\left(s_{\overline{n+1}|i}+1\right).$$

Справді, для належного ануїтету нарахування відсотків починається фактично на один період раніше аналогічного звичайного ануїтету, а отже, вартість належного ануїтету має бути в $(1+i)$ разів більшою за вартість звичайного ануїтету. За наведеними формулами вартостей належних ануїтетів можна розв'язувати фінансові задачі, аналогічні до задач на звичайні ануїтети, наведених у «Тренажерному залі» цього параграфа.

Якщо інтервали платежів ануїтету (звичайного чи належного) не збігаються з періодами конверсії, то такий ануїтет, як ви теж уже знаєте, називають *загальним ануїтетом*. Наприклад, інтервали платежу можуть становити 1 квартал (3 місяці), а періоди конверсії — 1 півріччя (6 місяців). Будь-який загальний ануїтет можна звести до простого шляхом визначення *еквівалентної річної відсоткової ставки*. Аналогічно до визначення еквівалентної ефективної річної норми, можна вважати дві річні відсоткові ставки r_k і r_n еквівалентними, якщо вони дають наприкінці року однаковий складний підсумок для тієї самої початкової суми, тобто $P\left(1+\frac{r_k}{k}\right)^k = P\left(1+\frac{r_n}{n}\right)^n$. Із останньої рівності одержуємо рівняння еквівалентності річних відсоткових ставок:

$$\left(1+\frac{r_k}{k}\right)^k = \left(1+\frac{r_n}{n}\right)^n.$$

Наприклад, якщо виплати ануїтету здійснюються щоквартально, а банк нараховує відсотки за ставкою $r_2 = 10\,\%$, то для знаходження теперішньої та підсумкової вартостей цього ануїтету можна спочатку знайти відсоткову ставку r_4, еквівалентну ставці $r_2 = 10\,\%$. Із рівняння еквівалентності маємо: $\left(1+\frac{r_4}{4}\right)^4 = \left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^2$; $\left(1+\frac{r_4}{4}\right)^2 = 1{,}05$;

$1+\frac{r_4}{4} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}0247$; $r_4 \approx 0{,}0988 = 9{,}88\,\%$.

Після знаходження потрібної еквівалентної річної відсоткової ставки (і норми відсотка) загальні ануїтети стають простими. Однак існують і інші підходи до розв'язування фінансових задач, що містять загальні ануїтети. Із цими підходами ви ознайомитесь у старшій і вищій школах.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя або вчительки математики розв'яжіть фінансові задачі практичного змісту, які стосуються простих належних, загальних звичайних і загальних належних ануїтетів.

2. Чи доводилося вам у повсякденному житті стикатися з ануїтетами? Якщо так, то поділіться досвідом.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть $\left(2^{-3}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}\right):\left(\dfrac{2^2\cdot 2^8}{\left(2^3\right)^3}-0{,}75^2\right)$.

2. Не виконуючи побудов графіків, установіть, скільки точок перетину мають графіки функцій $y=x-15$ і $y=2\sqrt{x}$. Якщо ці точки існують, то знайдіть їх координати.

3. Задано прямокутник $ABCD$, у якого $AB=12$ см, $BC=16$ см. Знайдіть площу S круга, обмеженого колом, яке описане навколо цього прямокутника. Опишіть усі симетрії прямокутника $ABCD$.

4. Виготовте паперову розгортку повної поверхні циліндра, у якого висота дорівнює діаметру основи, а площа бічної поверхні — площі бічної поверхні конуса з твірною 9 см і радіусом основи 4 см. Після виготовлення розгортки склейте її, утворивши циліндр.

5. Наведено чотири послідовності букв. Із кожної послідовності утворіть слово шляхом перестановки букв. Знайдіть одну з можливих спільних змістових ознак, які мають три слова з утворених. Зазначте слово, яке такої ознаки не має.

УНСОКИС АБОЛАРП СЕНГАНТ ОСКЕНКАС

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 7



rnk.com.ua/114536

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Які з трьох наведених чисел є трьома послідовними елементами деякої арифметичної прогресії?

А	Б	В	Г
3; 30; 300	3; 13; 23	3; 0,3; 0,03	3; 3,3; 6,3

2. Які з трьох наведених чисел є трьома послідовними елементами деякої геометричної прогресії?

А	Б	В	Г
4; 14; 24	4; 2; $\sqrt{2}$	4; 104; 204	4; 0,4; 0,04

3. Укажіть число, яке є елементом послідовності X, якщо $x_n = 2^n - 1$ для всіх натуральних n.

А	Б	В	Г
33	16	7	5

4. В арифметичній прогресії A $a_5 = x$, а $a_6 = y$. Укажіть формулу, за якою обчислюється різниця d цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$d = x + y$	$d = \frac{x}{y}$	$d = x - y$	$d = \frac{y}{x}$	$d = y - x$

5. У геометричній прогресії B, усі елементи якої є додатними, а знаменник дорівнює q, $b_7 = m$. Укажіть формулу, за якою обчислюється восьмий елемент b_8 цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$b_8 = m + q$	$b_8 = m \cdot q$	$b_8 = m \cdot q^7$	$b_8 = \frac{m}{q}$	$b_8 = m - q$

6. Задано простий звичайний ануїтет, що складається з восьми платежів розміром $R = 1000$ грн, а норма відсотка $i = 2\,\% = 0{,}02$. Укажіть формулу, за якою обчислюється *теперішня* вартість A цього ануїтету.

А	Б	В
$A = \frac{1000\left(1 - 1{,}02^{-8}\right)}{0{,}02}$	$A = \frac{1000\left(1{,}02^{-8} - 1\right)}{0{,}02}$	$A = \frac{1000\left(1 + 1{,}02^{-8}\right)}{0{,}02}$
Г	**Д**	
$A = \frac{1000\left(1{,}02^{8} - 1\right)}{0{,}02}$	$A = \frac{1000\left(1 - 1{,}02^{8}\right)}{0{,}02}$	

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. В арифметичній прогресії A $a_3 = 10$, $a_7 = 50$. Знайдіть суму S_{10} перших десяти елементів цієї прогресії.

8. У геометричній прогресії B $b_4 = -8$, $b_7 = 512$. Знайдіть перший елемент цієї прогресії.

9. Пан Панько вирішив придбати на виплат телевізор. Банк «Терплячий» дає можливість сплачувати за телевізор 2000 грн наприкінці кожного кварталу протягом двох років. Знайдіть

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

вартість цього телевізора в магазині, якщо гроші в банку «Терплячий» коштують $r_4 = 8\,\%$. Відповідь округліть до цілого числа гривень.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Знайдіть одну з можливих формул n-го елемента послідовності X, перші чотири елементи якої є такими: $\frac{2}{9}$; $-\frac{4}{27}$; $\frac{8}{81}$; $-\frac{16}{243}$.

11. Скільки існує двоцифрових чисел, які за ділення на 7 дають в остачі 1? Знайдіть суму всіх таких чисел.

12. Крісла в залі кінотеатру «Оригінальний» розташовані таким чином, що кожен наступний ряд містить на три крісла більше, ніж попередній. Відомо, що в першому ряду 12 крісел. Скільки рядів у залі кінотеатру «Оригінальний», якщо загальна кількість місць для глядачів у ньому дорівнює 255?

13. Перший елемент арифметичної прогресії A з додатною різницею d дорівнює 10. Відомо також, що числа a_1, a_2, $(a_3 + 10)$ є першими трьома елементами деякої геометричної прогресії B. Знайдіть: а) різницю d арифметичної прогресії A; б) знаменник q геометричної прогресії B.

14. Пані Одарка, щойно їй виповнилося 45 років, вирішила відкладати 100 євро щомісяця на додаткову пенсію. Банк «Надійний» пропонує 6 % річних щомісяця на такі внески з таким самим відсотком нарахування довічної ренти з моменту, коли пані Одарці виповниться 60 років. Знайдіть: а) підсумкову вартість ануїтету, який сплатить пані Одарка до досягнення нею 60 років; б) розмір щомісячних платежів довічної ренти, які отримуватиме пані Одарка в банку «Надійний» після того, як вийде на пенсію в 60 років.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Знайдіть усі значення a, за яких послідовність, задана формулою n-го елемента $x_n = n^2 - 20n + 100 - a$, містить точно п'ять від'ємних елементів.

2. В арифметичній прогресії сума перших m елементів дорівнює сумі перших n елементів $m \neq n$. Доведіть, що в цій прогресії сума перших $(m+n)$ елементів дорівнює нулю.

3. Знайдіть усі значення параметра a, за яких корені рівняння $3x^3 - (2a+10)x^2 + (6a+3)x = 0$, узяті в деякому порядку, є послідовними членами арифметичної прогресії.

4. Доведіть: якщо числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{c+b}$ є послідовними елементами арифметичної прогресії, то числа a^2, b^2, c^2 теж є послідовними елементами деякої арифметичної прогресії.

5. Доведіть: якщо сторони прямокутного трикутника є послідовними елементами арифметичної прогресії, то її різниця дорівнює радіусу кола, вписаного в цей трикутник.

6. Спростіть вираз.

а) $x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{100}$, де $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$;

б) $x + 5x + 9x + \ldots + 201x$.

7. Відомо, що числа x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 - 3x + a = 0$, а числа x_3, x_4 — корені рівняння $x^2 - 12x + b = 0$. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 є послідовними елементами геометричної прогресії. Знайдіть a і b.

8. З'ясуйте, чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника бути послідовними елементами геометричної прогресії.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Словничок

Числова послідовність — numerical sequence
Формула n-го елемента послідовності — formula for the n-th element of the sequence
Рекурентна формула — recurrence formula
Арифметична (геометрична) прогресія — arithmetic (geometric) progression
Сума n перших елементів послідовності — sum of the first n elements of the sequence
Ануїтет — annuity
Теперішня (підсумкова) вартість ануїтету — present (final) value of an annuity
Вічна рента — perpetual annuity

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 7

Послідовність

Послідовність — упорядкована множина

$X = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots\}$ — послідовність; x_n — n-й елемент X

Числова послідовність $(x_n \in \boldsymbol{R})$

Способи задання

описовий

M — послідовність усіх натуральних чисел, кратних 10

приклад

формула n-го елемента

$x_n = f(n) = n^2$
функція натурального аргумента

приклад

рекурентний

$f_1 = 1,\ f_2 = 1,$
$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ — послідовність Фібоначчі

приклад

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Арифметична прогресія (АП)

$a_{n+1} = a_n + d$
(d — різниця)

- $a_n = a_1 + (n-1)d$ — формула n-го елемента АП
- $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — сума n перших елементів АП
- $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$

$A \in$ АП $\Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
властивість і ознака АП

Інші числові послідовності

Геометрична прогресія (ГП)

$b_{n+1} = b_1 \cdot q$
(q — знаменник)

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула n-го елемента ГП
- $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ — сума n перших елементів ГП
- $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$B \in$ ГП $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
властивість і ознака ГП

Ануїтети

- *Ануїтет* — серія n однакових платежів розміру R за норми відсотка i
- *Теперішня вартість*
$A = R \cdot \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$
- *Підсумкова вартість*
$S = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
- *Платіж довічної ренти* $R = A \cdot i$

Нескінченно спадна ГП

$|q| < 1$

- $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ — сума всіх елементів ГП
- $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$

РОЗДІЛ 8.
ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ 7–9 КЛАСІВ

CHAPTER 8.
REPETITION AND SYSTEMATIZATION OF EDUCATIONAL MATERIAL FOR GRADES 7–9

Початковий рівень

1. У якому з випадків *а*–*г* (рис. 1) пара зображень є образом і прообразом за симетрії відносно прямої m?

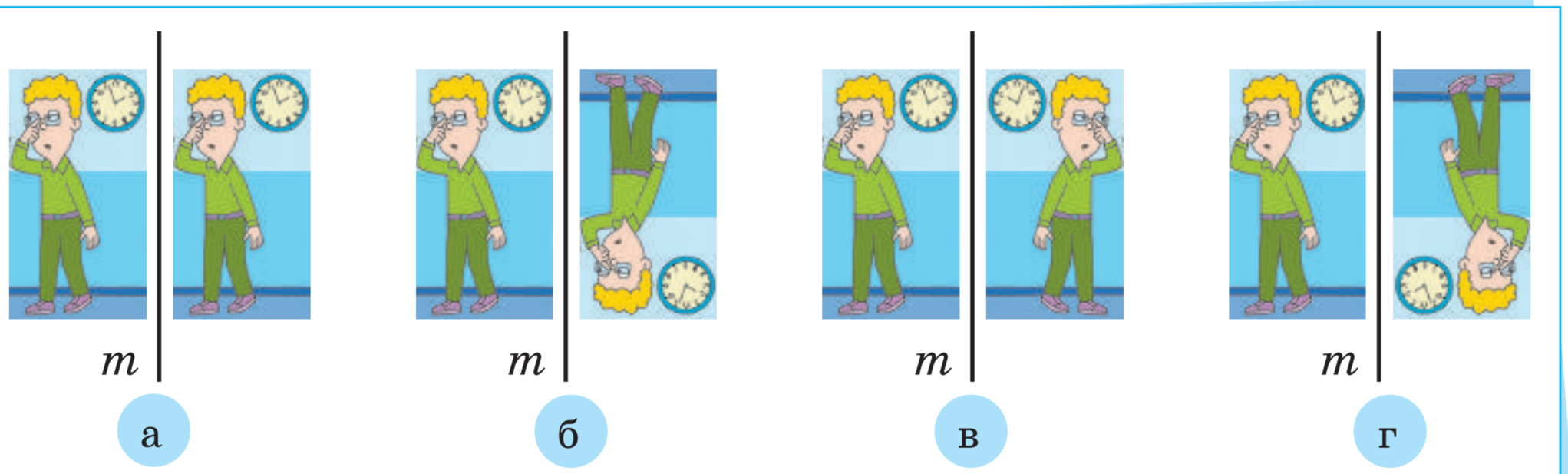


Рис. 1

2. У якому з випадків *а*–*г* (рис. 2) пара зображень є образом і прообразом за симетрії відносно точки O?

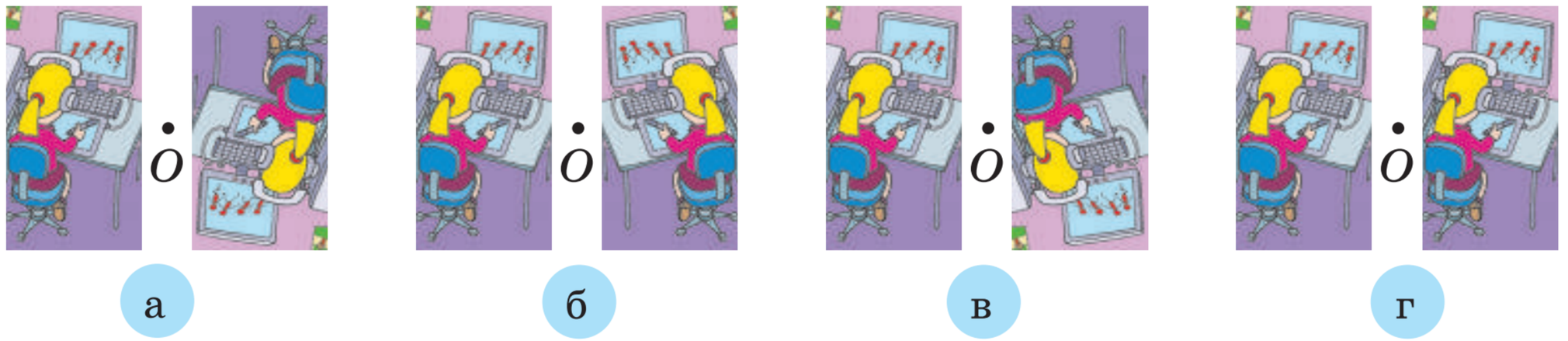


Рис. 2

3. Два зображення на рис. 3 є прообразом і образом за повороту на кут 90° проти руху годинникової стрілки. Яка точка є центром повороту?

А	Б	В	Г
K	L	M	N

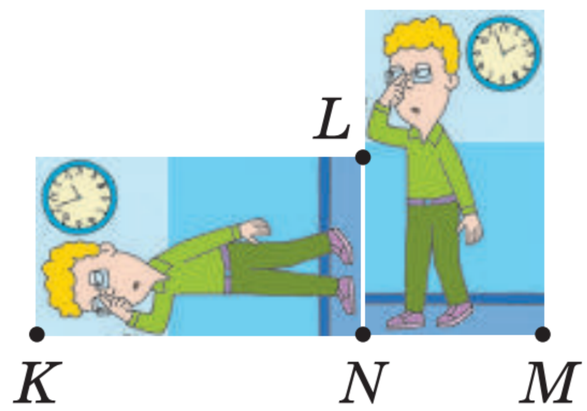


Рис. 3

4. Паралельне перенесення задано аналітично: $\begin{cases} x' = x + 5, \\ y' = y - 3. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $A(0;4)$, $B(2;-6)$, $C(-3;2)$.

5. Деформацію задано аналітично: $\begin{cases} x' = 4x, \\ y' = y. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $K(5;3)$, $F(-7;2)$, $M(0;-9)$.

6. Перетворення g переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$ так, як зображено на рис. 4. У якому з випадків *а*–*г* перетворення g є паралельним перенесенням на вектор $\vec{c}$?

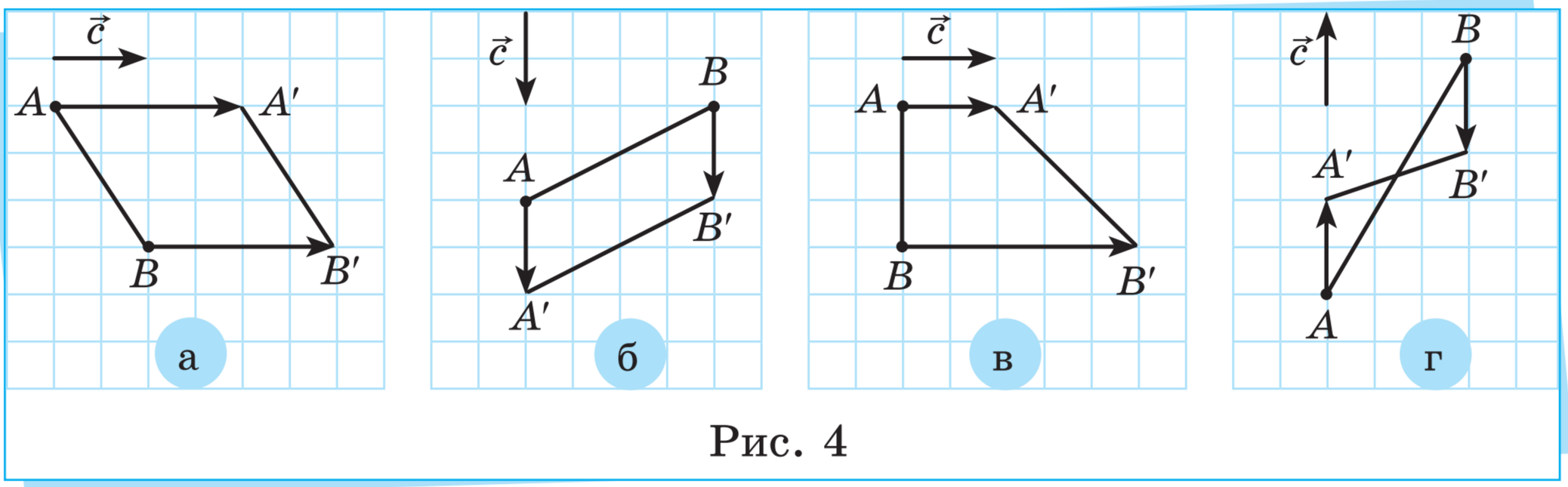


Рис. 4

7. Перетворення f переводить відрізок BC у відрізок $B'C'$ так, як зображено на рис. 5. У якому з випадків *а*–*г* перетворення f є поворотом відносно точки O на кут 90° за рухом годинникової стрілки?

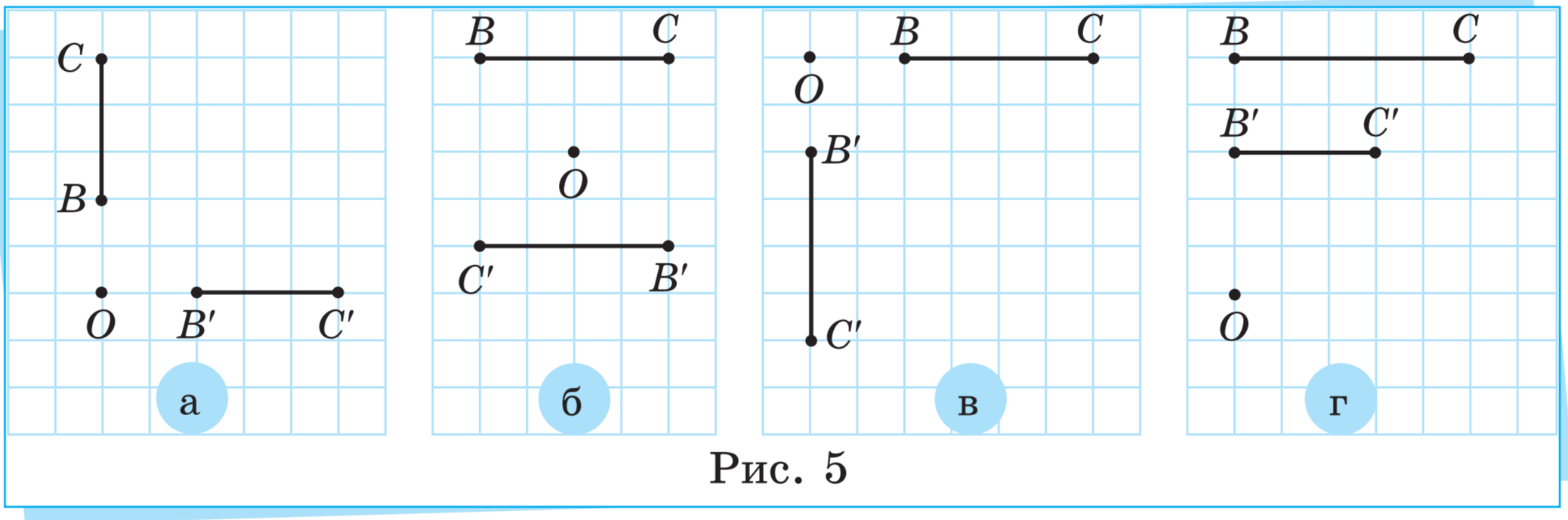


Рис. 5

8. Перетворення g переводить відрізок CD у відрізок $C'D'$ так, як зображено на рис. 6. У якому з випадків $а$–$г$ перетворення g є симетрією відносно точки O?

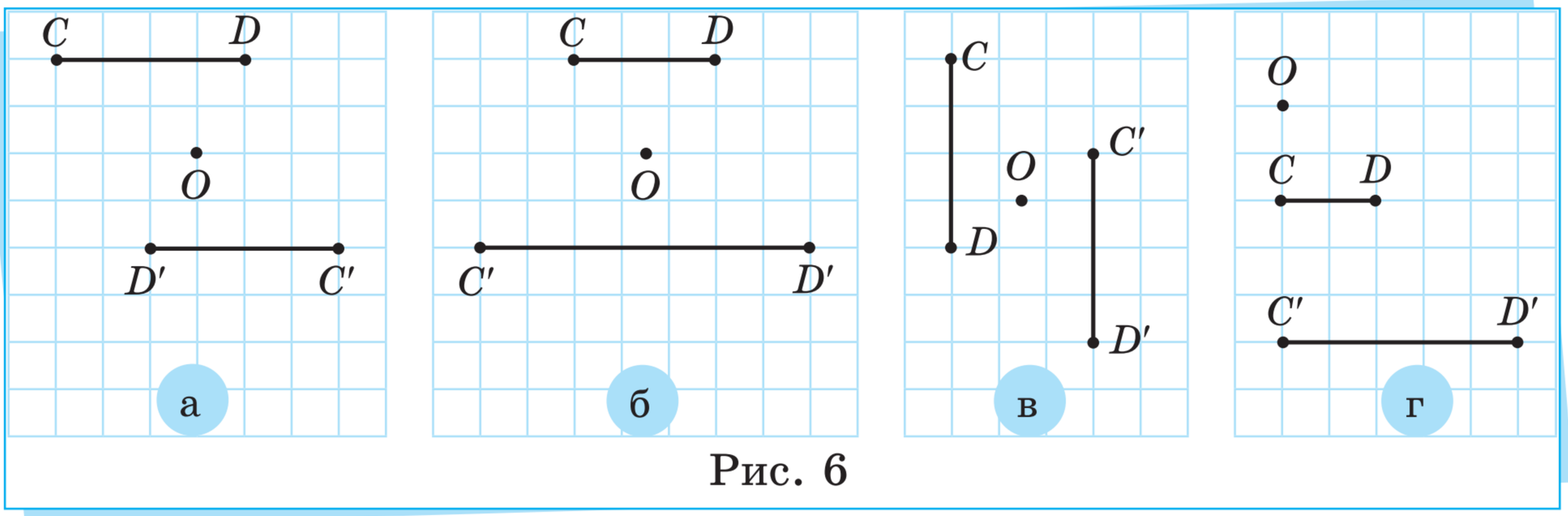


Рис. 6

9. Перетворення f переводить відрізок KL у відрізок $K'L'$ так, як зображено на рис. 7. У якому з випадків $а$–$г$ перетворення f є симетрією відносно прямої n?

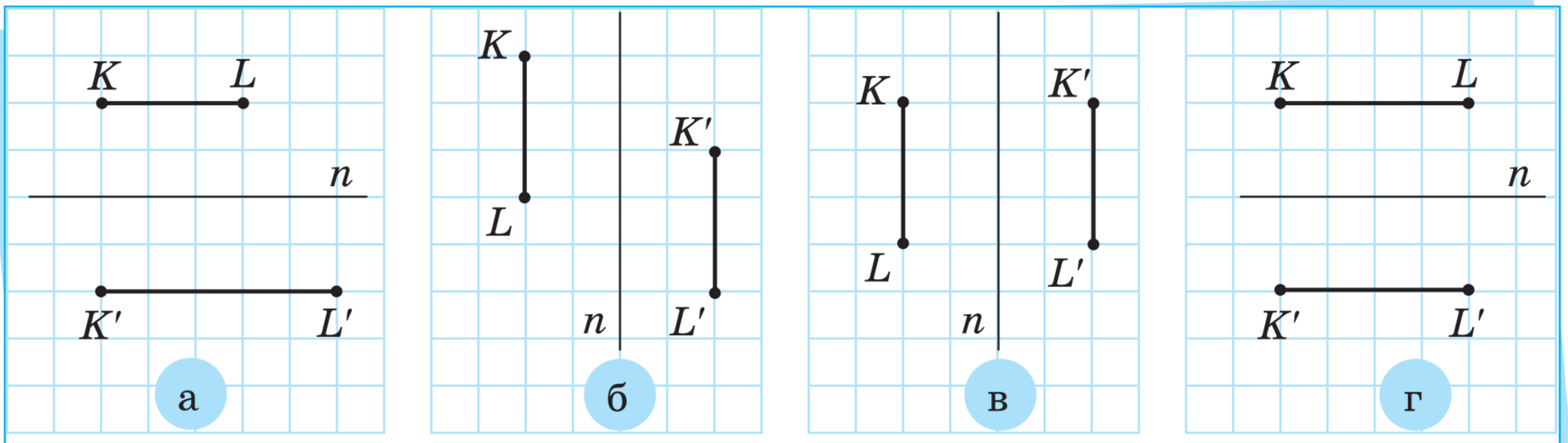


Рис. 7

10. Перетворення g переводить відрізок EF у відрізок $E'F'$ так, як зображено на рис. 8. У якому з випадків *а–г* перетворення g є гомотетією із центром у точці O?

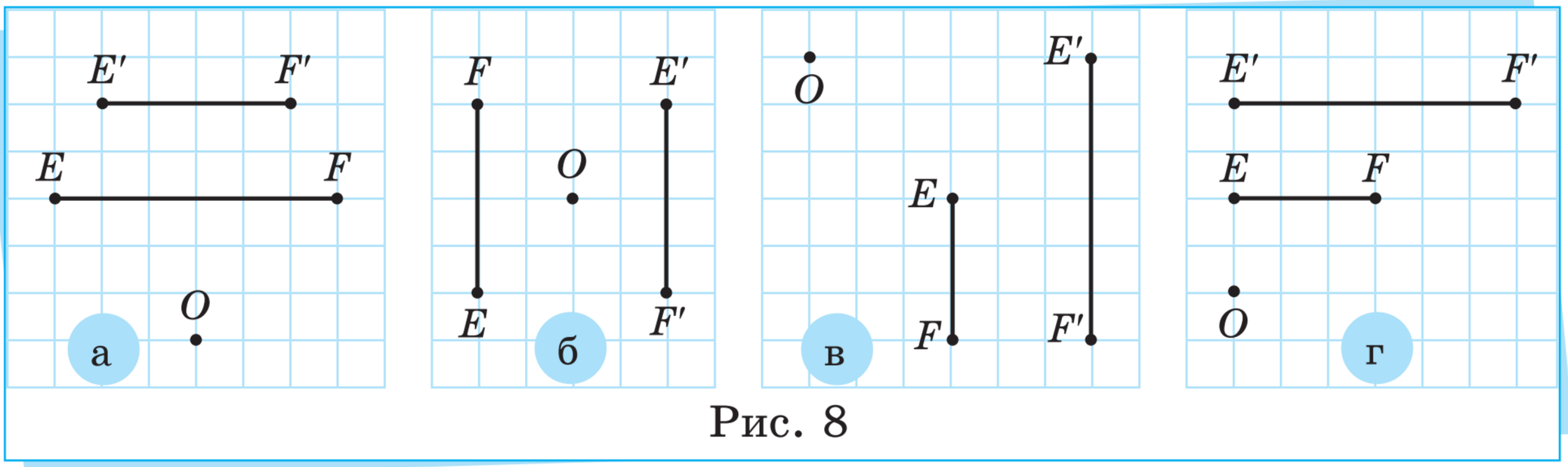


Рис. 8

11. Фігура K перейшла у фігуру M за деякого перетворення. За якого перетворення фігури K і M не будуть рівними?

а) За паралельного перенесення на вектор $\vec{c}$;

б) за гомотетії із центром у точці O та коефіцієнтом 5;

в) за повороту відносно точки O на кут 150° проти руху годинникової стрілки;

г) за симетрії відносно прямої n.

12. Яка фігура є симетричною відносно прямої n (рис. 9)?

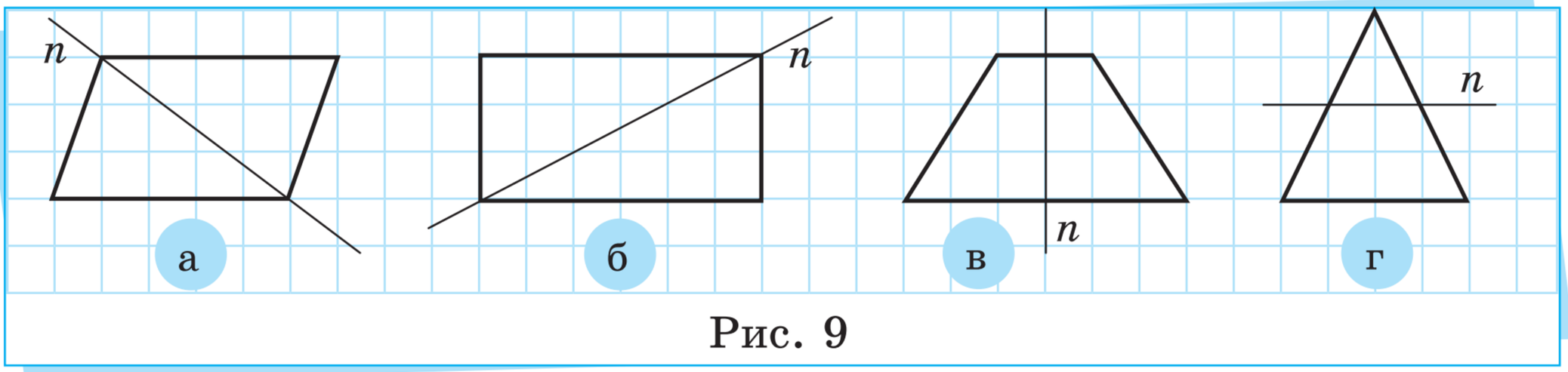


Рис. 9

13. Яка фігура є симетричною відносно точки O (рис. 10)?

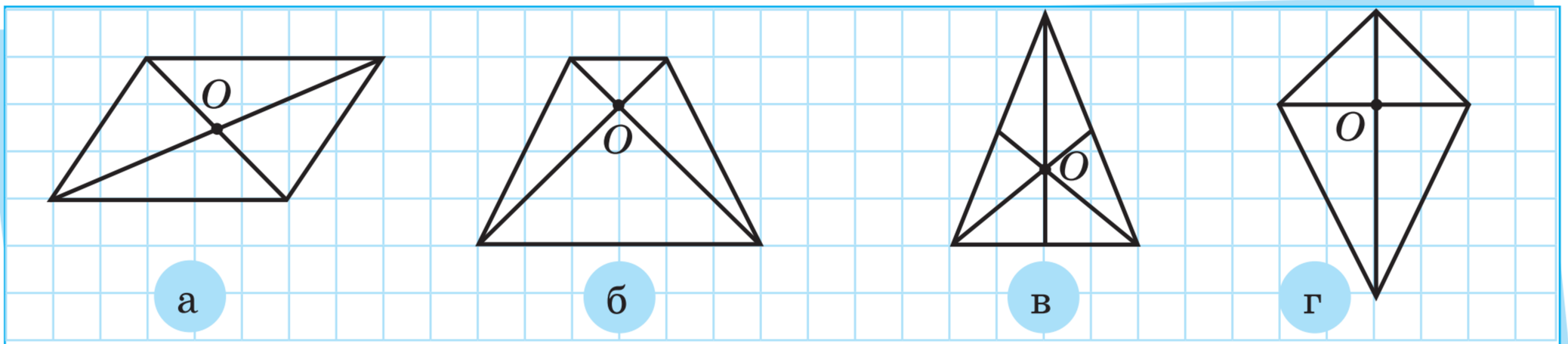


Рис. 10

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

14. Які із зображених на рис. 11 букв мають вісь симетрії?

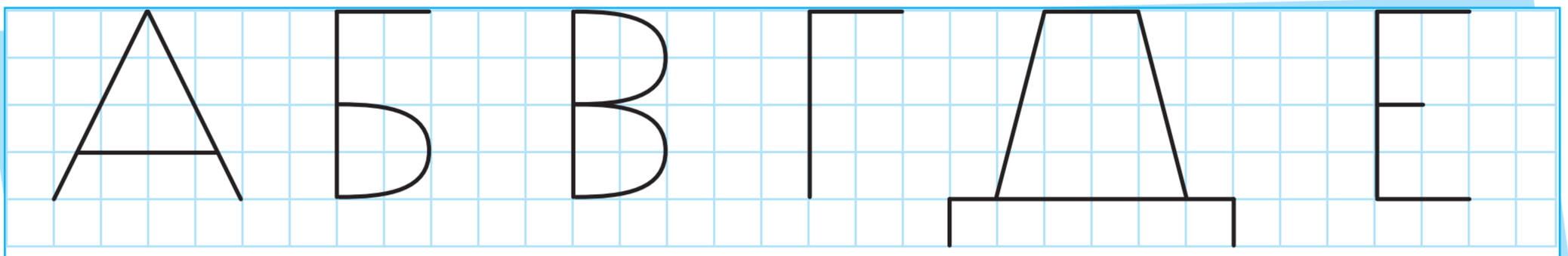


Рис. 11

15. Які із зображених букв на рис. 12 мають центр симетрії?

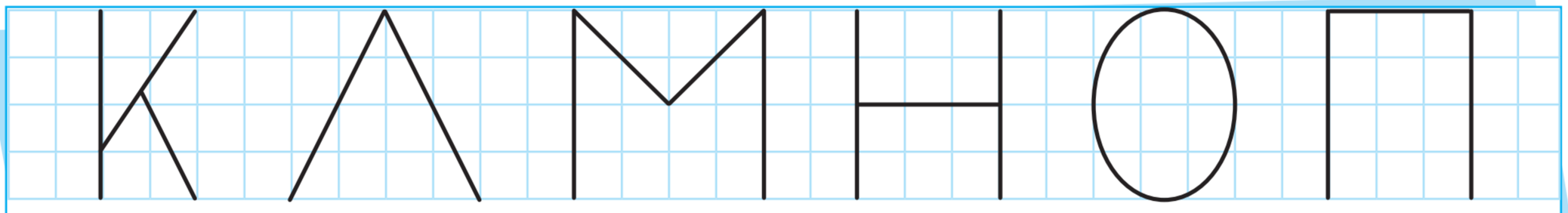


Рис. 12

16. На координатній прямій позначено точки d, e, f (рис. 13). Порівняйте числа: а) d і e; б) e і f.

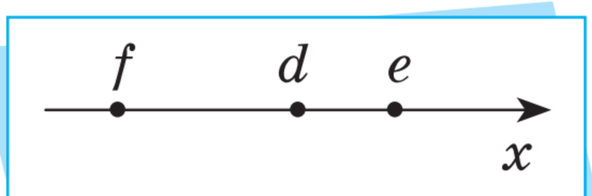


Рис. 13

17. Які нерівності з поданих є правильними числовими нерівностями?

а) $5{,}6 < 20$;
б) $6 \geqslant -23{,}5$;
в) $-3{,}6 > -32$;
г) $0 \leqslant -9{,}7$.

18. Порівняйте числа a і b, якщо: а) $a-b=3{,}9$; б) $a-b=0$; в) $a-b=-7$; г) $a-b=\frac{2}{7}$.

19. Відомо, що $x > y$. Запишіть нерівність, яка утвориться, якщо:
а) обидві частини нерівності помножити на 6;
б) обидві частини нерівності помножити на -7;
в) від обох частин нерівності відняти 8;
г) до обох частин нерівності додати 9.

20. Порівняйте вирази, якщо $a < b$.

а) $a-9$ і $b-9$;
б) $a+10$ і $b+10$;
в) $-11a$ і $-11b$;
г) $12a$ і $12b$.

21. Запишіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок:
а) $(-\infty;-7)$; б) $[9;+\infty)$; в) $(-4;+\infty)$; г) $(-\infty;10]$.

22. Запишіть нерівність, множиною розв'язків якої є зображений на рис. 13 проміжок.

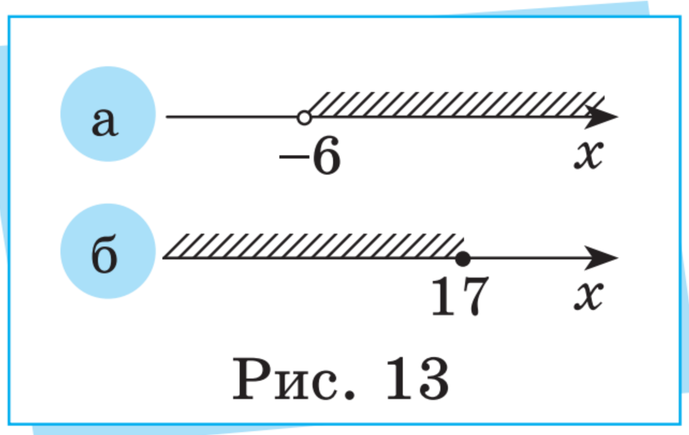


Рис. 13

23. Розв'яжіть нерівність.
а) $y+6<70$; в) $y-6>-18$;
б) $y-4\geqslant 32$; г) $y+9\leqslant -37$.

24. Розв'яжіть нерівність.
а) $5x<45$; б) $-3x\geqslant 39$; в) $7x>-42$; г) $-2x\leqslant -7$.

25. Іван планує придбати ноутбук із монітором, не меншим від 15 дюймів по діагоналі. Позначимо довжину діагоналі монітора змінною d. Запишіть нерівність, яка описує ситуацію. Запишіть множину розв'язків цієї нерівності у вигляді проміжку. Зобразіть цей проміжок на числовій прямій.

26. Укажіть значення змінної x, яке є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x<15, \\ x\geqslant -4. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$x=-16$	$x=-7$	$x=-2$	$x=16$

27. Розв'яжіть систему нерівностей.
а) $\begin{cases} x>5, \\ x>-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x<7, \\ x>-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\leqslant 9, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x>-6, \\ x\geqslant 4. \end{cases}$

28. Розв'яжіть систему нерівностей.
а) $\begin{cases} x+3>7, \\ x\geqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x<8, \\ x\geqslant -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+10>4, \\ x\leqslant 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x<9, \\ 7x<28. \end{cases}$

29. Ціна яблук у супермаркеті залежить від сорту й становить від 45 до 72 грн за кілограм. Позначимо вартість яблук змінною v. Опишіть цю ситуацію за допомогою системи нерівностей.

30. Яка пара чисел є розв'язком нерівності з двома змінними $2x-4y<3$?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

А	Б	В	Г
$(2;-4)$	$(5;0)$	$(-3;-6)$	$(2;3)$

31. Запишіть область визначення та множину значень функції, заданої графічно (рис. 14).

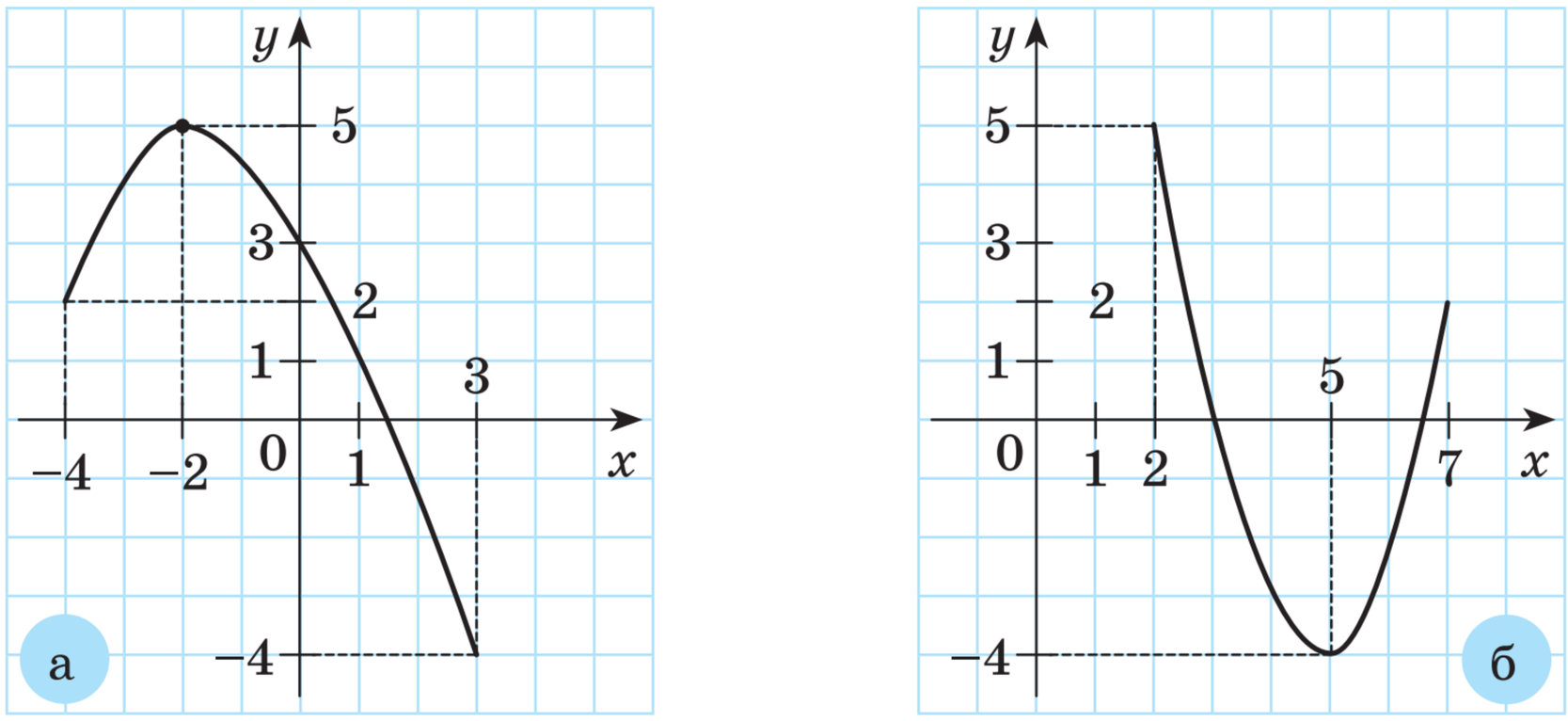


Рис. 14

32. На рис. 15 зображено графік функції $y=f(x)$. На якому з наведених проміжків ця функція зростає?

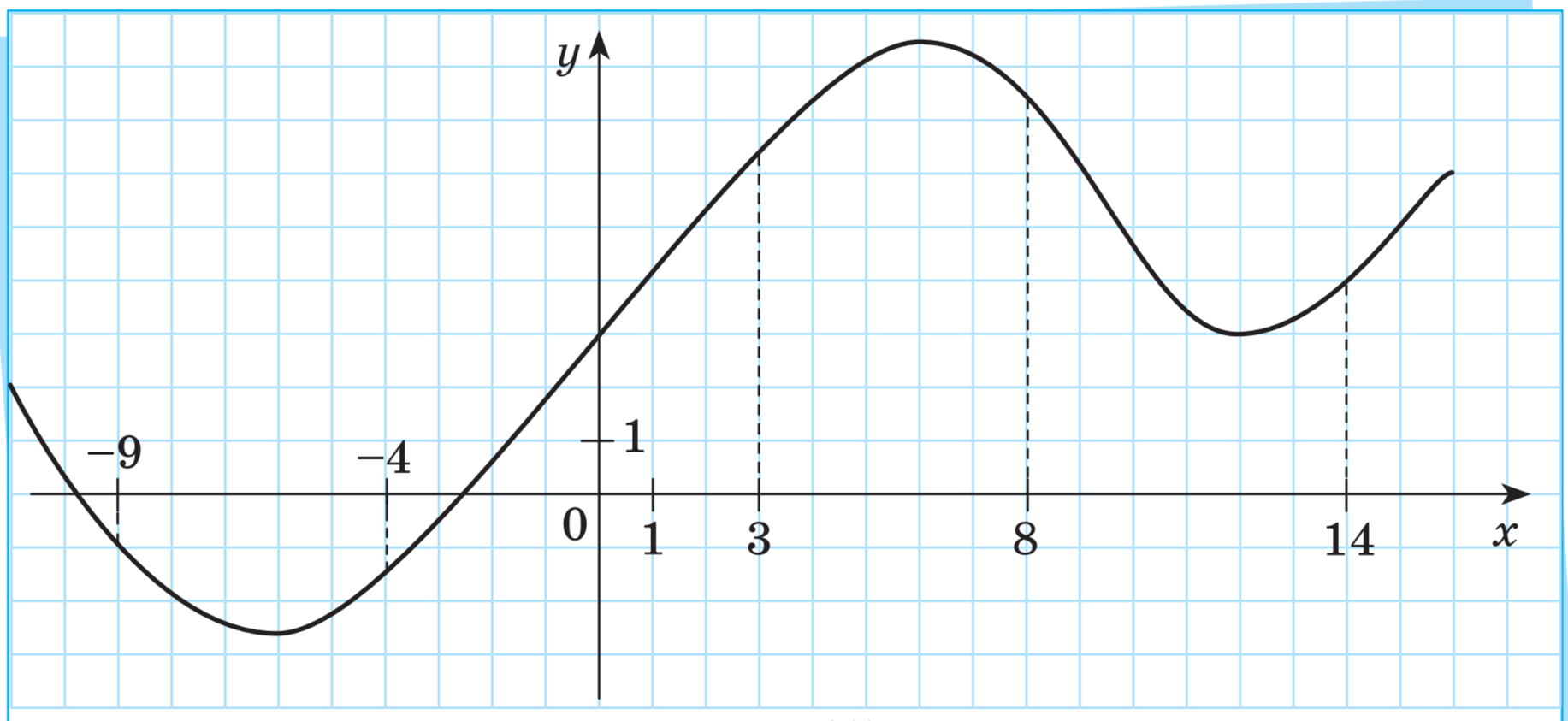


Рис. 15

А	Б	В	Г
$[-9;-4]$	$[-4;3]$	$[3;8]$	$[8;14]$

33. За паралельного перенесення на вектор $\left(\overrightarrow{0;3}\right)$ точка K перейшла в точку K_1 (рис. 16). Побудуйте точки, у які перейдуть точки L і M за цього паралельного перенесення. Побудуйте графік функції, у який перейде графік функції $y=f\left(x\right)$ за цього паралельного перенесення. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

34. За симетрії відносно осі Oy точка B перейшла в точку B_1 (рис. 17). Побудуйте точки, у які перейдуть точки A і C за цієї симетрії. Побудуйте графік функції, у який перейде графік функції $y=f\left(x\right)$ за цієї симетрії. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

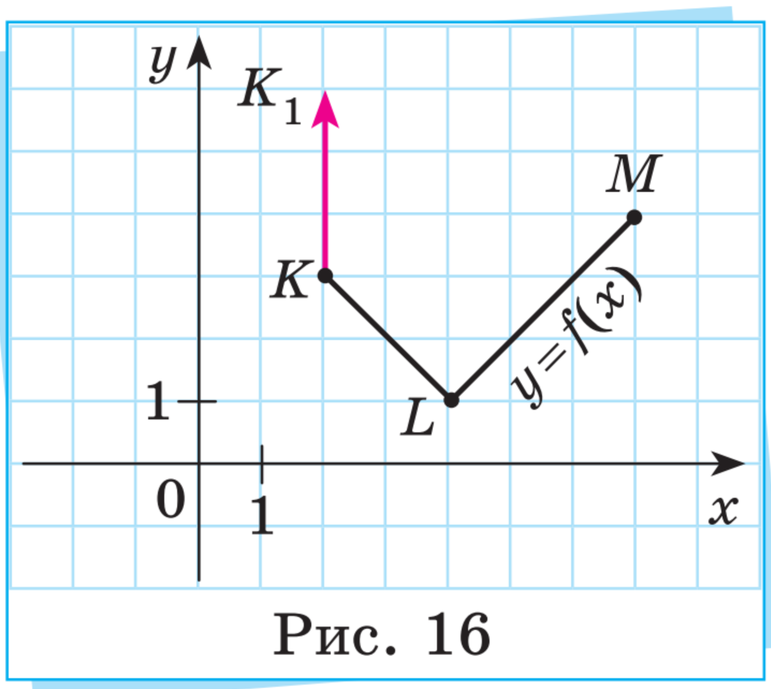


Рис. 16

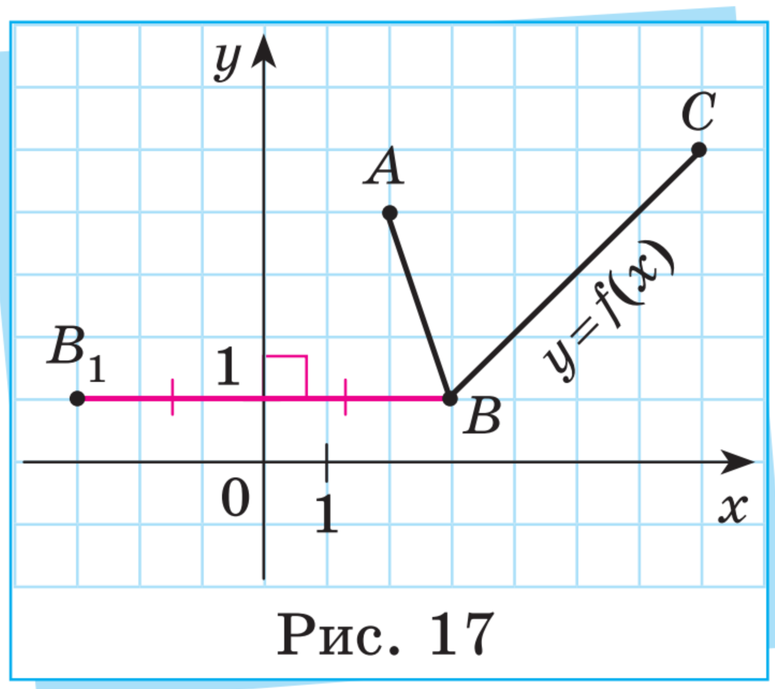


Рис. 17

35. За деформації з коефіцієнтом 3 до осі Ox точка M перейшла в точку M_1 (рис. 18). Побудуйте точки, у які перейдуть точки K і L за цієї деформації. Побудуйте графік функції, у який перейде графік функції $y=f\left(x\right)$ за цієї деформації. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

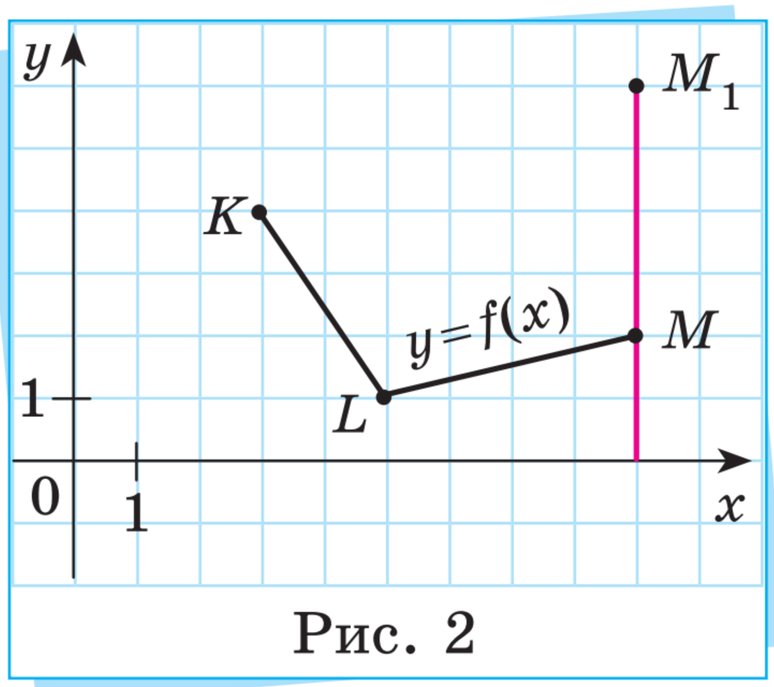


Рис. 2

36. Яка з наведених функцій є квадратичною?

а) $y=5x^2-12$; б) $y=14x+1$; в) $y=-2x^2+3x-4$; г) $y=7x^4+3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

37. Запишіть значення коефіцієнтів a, b, c для квадратичної функції.

а) $y = 6x^2 - 5x + 4$; б) $y = 7x^2 + x - 9$; в) $y = x^2 + 6x$; г) $y = 12x^2 - 5$.

38. Куди спрямовані вітки графіка квадратичної функції: угору чи вниз?

а) $y = 5x^2 - 6x + 7$; б) $y = -3x^2 + 5x$; в) $y = x^2 - 9$.

39. Запишіть координати вершини параболи, яку зображено на рис. 19.

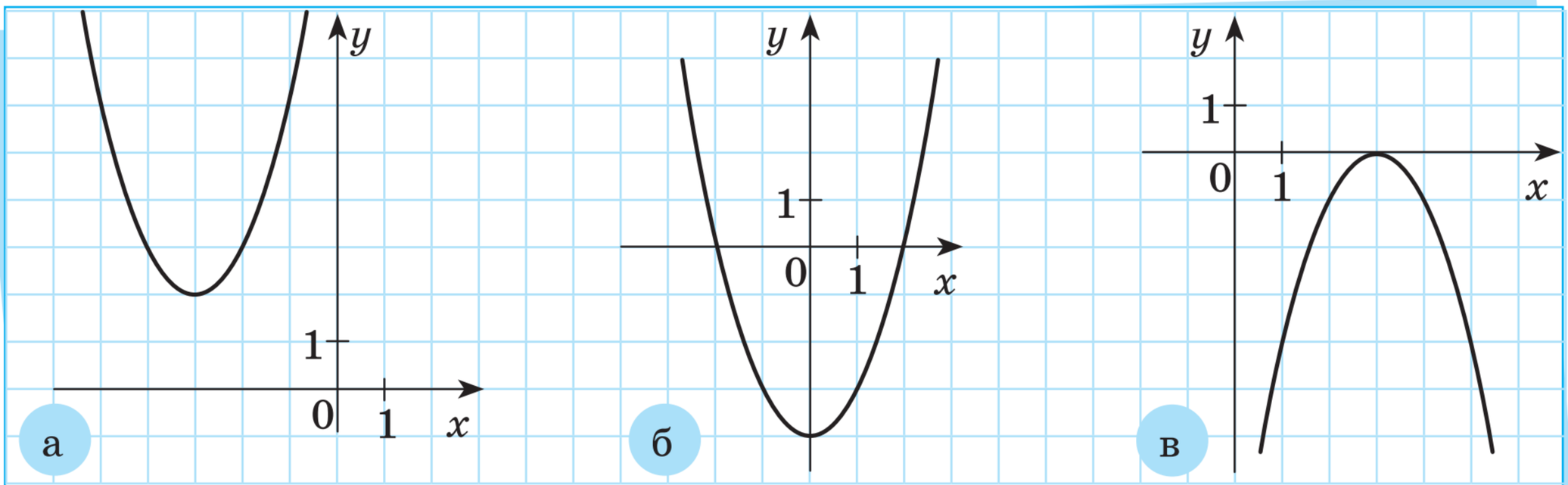


Рис. 19

40. Запишіть нулі функції, графік якої зображено на рис. 20.

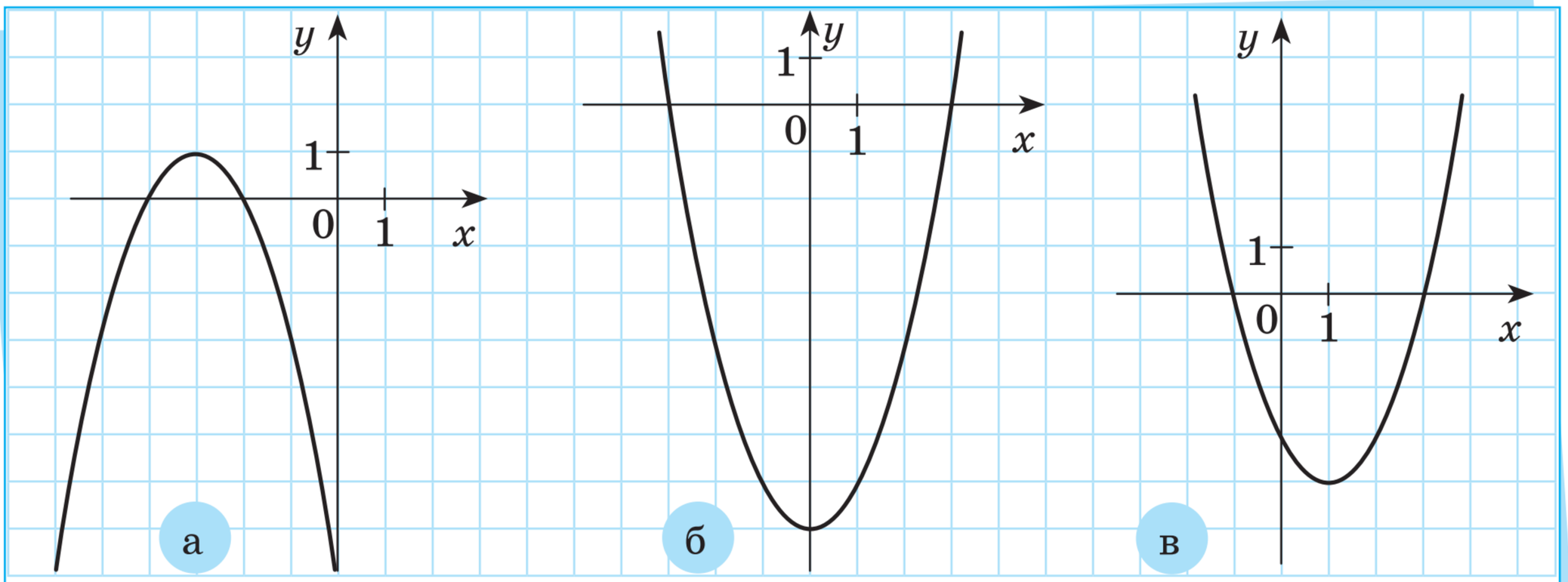


Рис. 20

41. Довжина меншої сторони прямокутника на 5 см менша від довжини більшої сторони. Площа прямокутника більша за 45 см^2. Позначимо довжину меншої сторони прямокутника змінною x. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю описаної ситуації.

42. Яка з наведених квадратних нерівностей відповідає квадратичній функції $y = 3x^2 - 2x + 1$?

а) $3x^2 - 2x + 1 > 0$;
в) $3x^2 - 2x + 1 \le 0$;
б) $3x^2 + 2x - 1 \ge 0$;
г) $3x^2 - 2x + 1 < 0$.

43. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо вітки графіка спрямовані вниз і нулями квадратичної функції є числа: а) -2 і 4; б) 0 і 5.

44. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо вітки графіка спрямовані вгору й вершина параболи має координати: а) $(2; -3)$; б) $(-4; 1)$.

45. Запишіть проміжок (проміжки), де графік квадратичної функції (рис. 21) лежить вище осі абсцис.

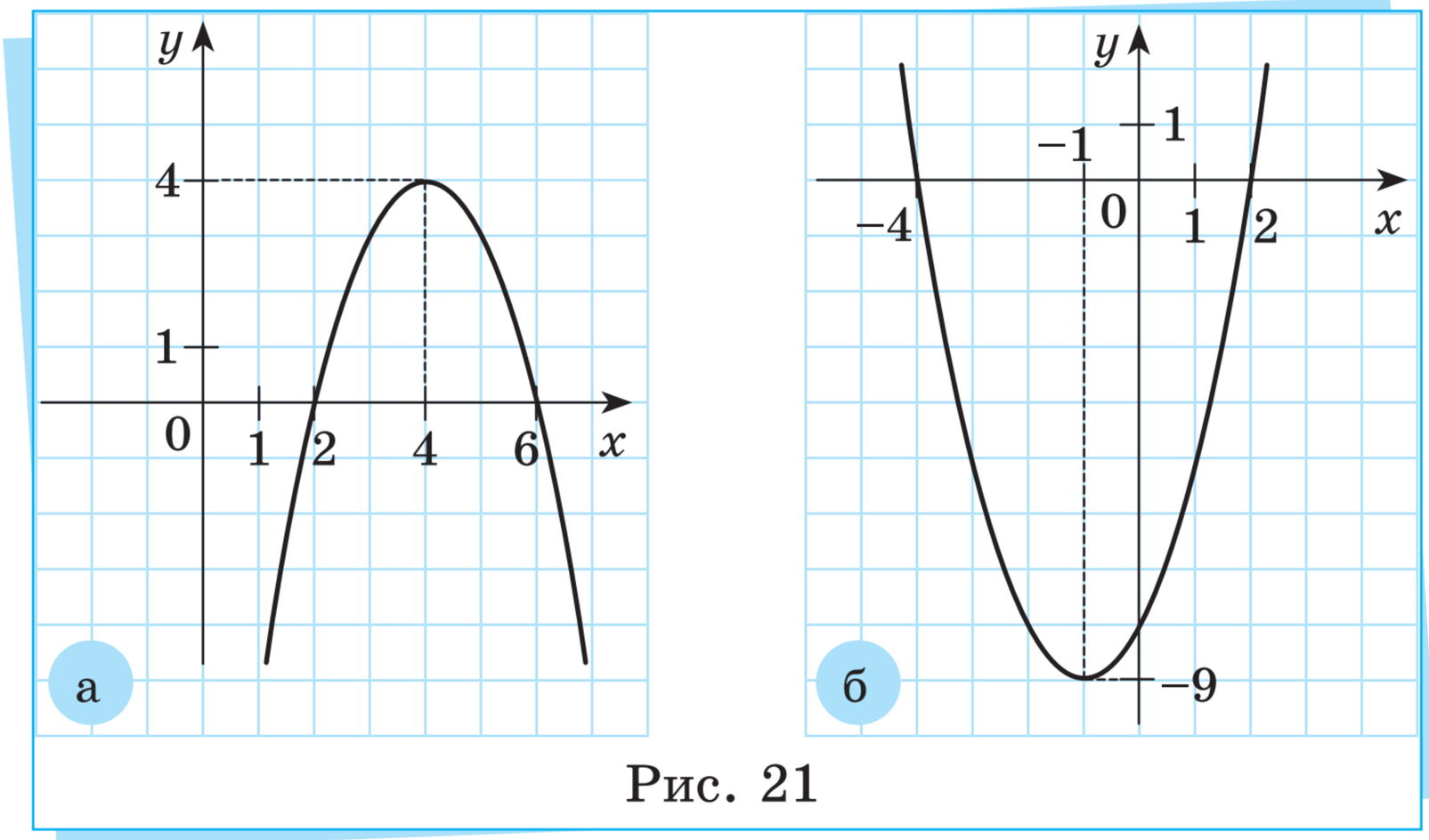


Рис. 21

46. Дано рівняння $\dfrac{x-5}{x+4} = 0$. Яка з наведених систем рівнянь є рівносильною даному рівнянню?

а) $\begin{cases} x - 5 \ne 0, \\ x + 4 \ne 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ x + 4 = 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ x + 4 \ne 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x - 5 \ne 0, \\ x + 4 = 0. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

47. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\dfrac{x-6}{x+7}=0$?

а) 6; б) -6; в) 7; г) -7.

48. Яка з наведених множин є областю допустимих значень рівняння $\dfrac{x+2}{x-9}=0$?

а) $(-2;9)$; б) $(-\infty;9)\cup(9;+\infty)$; в) $(-\infty;-9)\cup(2;+\infty)$; г) $[-2;9)$.

49. Яке з наведених чисел належить множині розв'язків нерівності $\dfrac{x+4}{x-7}<0$?

а) 4; б) -4; в) 7; г) -7; д) -2; е) 0.

50. За x хвилин прокату електросамоката Наталка заплатила 140 грн. Вартість однієї хвилини прокату не перевищує 5 грн. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

51. Площа монітора комп'ютера дорівнює 3500 $см^2$, а його периметр — 240 см. Позначимо розміри монітора (у сантиметрах) змінними x і y. Запишіть систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

52. З'ясуйте, яка пара чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x-y=8, \\ x^2+3y=16. \end{cases}$

а) $(10;2)$; б) $(4;-4)$; в) $(5;-3)$; г) $(1;5)$.

53. Виразіть із рівняння змінну x через змінну y.

а) $x-5y=1$; б) $-x+3y=4$; в) $-x+9y=0$; г) $x+2y=-5$.

54. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними, знайшовши спочатку корінь першого рівняння.

а) $\begin{cases} 5x-4=16, \\ y=x^2-7x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y+8=-7, \\ x-y^2=2. \end{cases}$

55. З'ясуйте, яка пара чисел є розв'язком системи нерівностей з двома змінними $\begin{cases} x+3y<12, \\ y-x^2\geqslant -5. \end{cases}$

а) $(-1;5)$; б) $(3;4)$; в) $(-5;3)$; г) $(1;-2)$.

56. Які з описаних ситуацій містять число, що є абсолютним статистичним показником, а які містять число, що є відносним статистичним показником?

а) У меблевому магазині продають 140 видів стільців.

б) Середня швидкість руху трамвая становить 38 км/год.

в) За минулий тиждень на сайті шкільного парламенту опубліковано 23 статті.

г) Після модернізації двигуна дальність польоту дронів збільшилася на 80 %.

57. У саду росте 50 яблунь і 20 груш. У скільки разів більше яблунь, ніж груш, росте в саду? Якого виду цей обчислений відносний показник?

58. Учні й учениці 9-В класу за тиждень виготовили 490 окопних свічок. Скільки свічок вони виготовляли за день? Якого виду цей обчислений відносний показник?

59. За рік кількість виготовлених компанією дронів зросла від 4 тис. до 20 тис. У скільки разів збільшилася кількість виготовлених дронів? Якого виду цей обчислений відносний показник?

60. Згідно з проєктом відбудови громади в 2025 р. відновили 50 будівель. На 2026 р. запланували відновити 40 будівель. Обчисліть показник планового завдання.

61. Укажіть слово, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «У позаурочний час в березні дев'ятикласниці й дев'ятикласники виготовили 7 маскувальних сіток, у квітні — 10, у травні — 5. Тоді середня щомісячна кількість виготовлених маскувальних сіток буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним;

б) геометричним;

в) гармонійним;

г) квадратичним.

62. Знайдіть середнє геометричне таких індивідуальних значень деякої ознаки: а) $x_1 = 3$, $x_2 = 12$; б) $x_1 = 16$, $x_2 = 4$.

63. Знайдіть середнє арифметичне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1 = 2$, $x_2 = 9$, $x_3 = 7$;

б) $x_1 = 8$, $x_2 = 9$, $x_3 = 6$, $x_4 = 5$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

64. За формулою $\bar{x} = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$ знайдіть середнє гармонійне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1 = 4,\ x_2 = 3$; б) $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6$.

65. За формулою $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}{n}}$ знайдіть середнє квадратичне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1 = 4,\ x_2 = 6$; б) $x_1 = 1,\ x_2 = 7,\ x_3 = 4$.

66. На рис. 22 зображено опуклий шестикутник, у якому проведено три діагоналі. Запишіть:

а) усі точки, які є вершинами цього шестикутника;

б) усі точки, які не є вершинами шестикутника;

в) три відрізки, які є сторонами шестикутника;

г) три відрізки, які не є сторонами шестикутника.

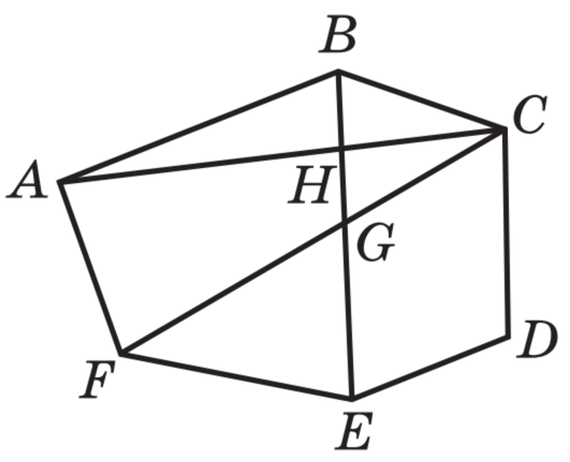


Рис. 22

67. На рис. 23 зображено опуклий п'ятикутник, у якому проведено три діагоналі. Запишіть:

а) три відрізки, які є діагоналями п'ятикутника;

б) три відрізки, які не є ні діагоналями, ні сторонами п'ятикутника.

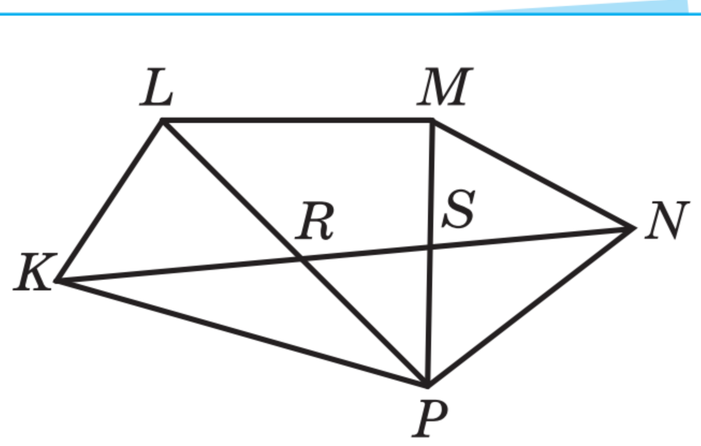


Рис. 23

68. Побудуйте опуклий восьмикутник. Проведіть із однієї з вершин усі можливі діагоналі. Скільки діагоналей можна провести із цієї вершини? На скільки трикутників розбили восьмикутник ці діагоналі?

69. За формулою $k=\dfrac{n(n-3)}{2}$ обчисліть кількість діагоналей:

а) десятикутника; б) прямокутника.

70. За формулою $180^\circ\cdot(n-2)$ обчисліть суму внутрішніх кутів:
а) восьмикутника; б) паралелограма.

71. Обчисліть площу многокутника на рис. 24 (1 клітинка — 1 квадратна одиниця).

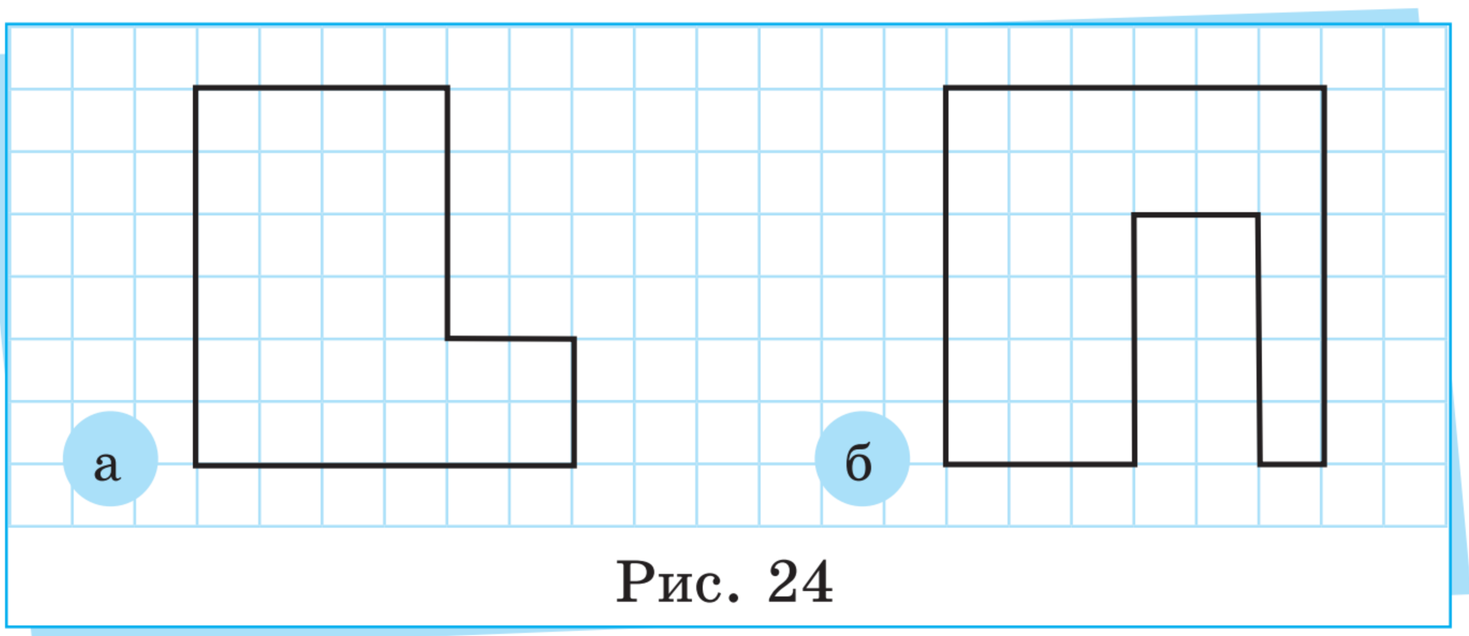


Рис. 24

72. Обчисліть площу паралелограма на рис. 25.

73. Обчисліть площу трикутника на рис. 26.

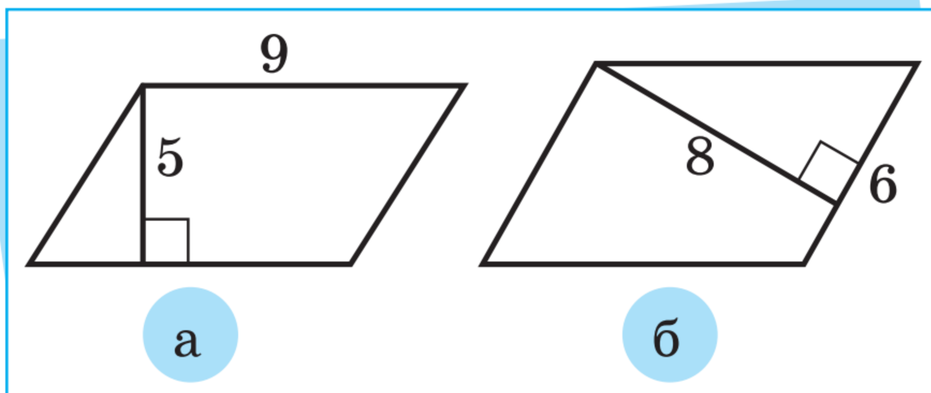


Рис. 25

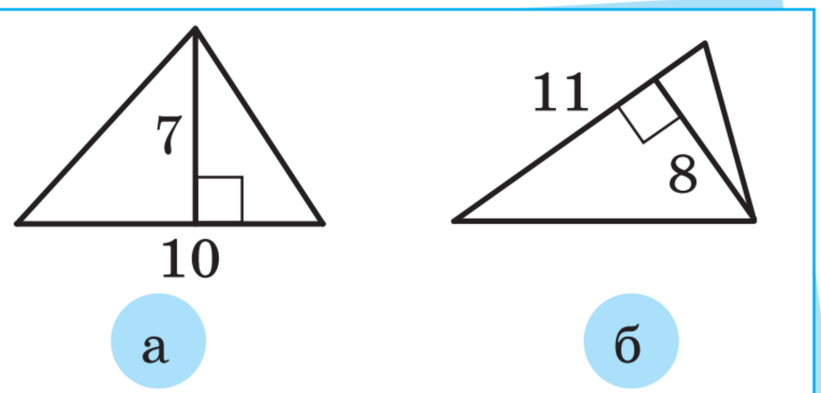


Рис. 26

74. Обчисліть площу трапеції на рис. 27.

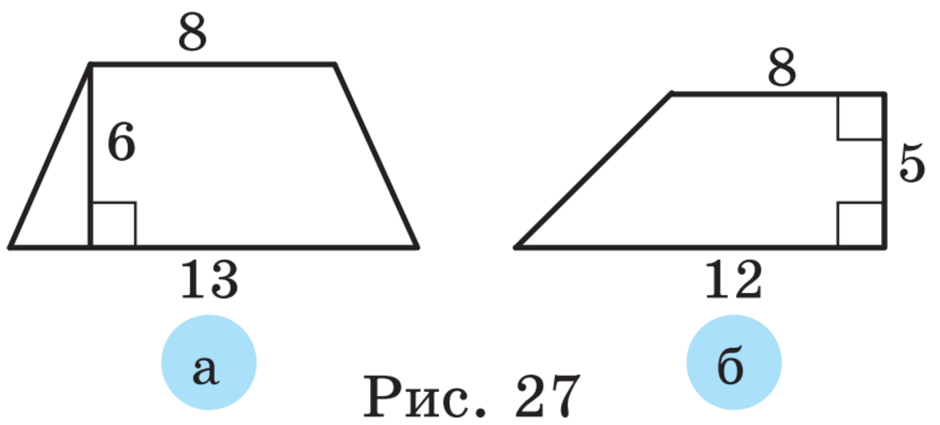


Рис. 27

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

75. Відомо, що діагоналі ромба $d_1 = 8$ см і $d_2 = 11$ см. Обчисліть площу ромба.

76. На рис. 28 зображено коло із центром у точці O. Серед зображених відрізків назвіть усі, що є: а) радіусами кола; б) діаметрами кола; в) хордами.

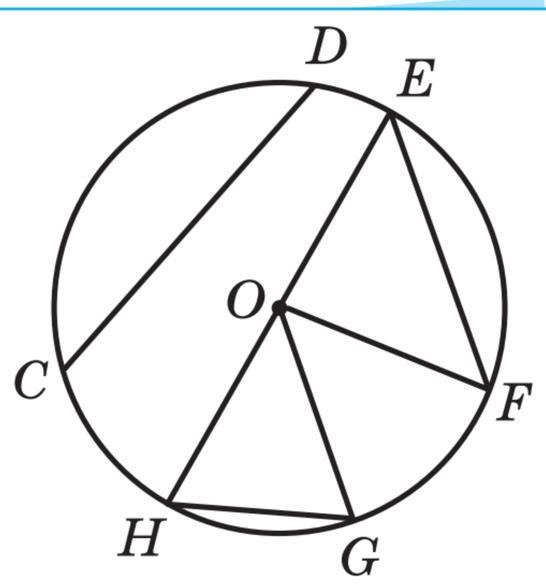


Рис. 28

77. Побудуйте коло й два радіуси цього кола, кут між якими становить 40°. Заштрихуйте менший сектор, обмежений цими радіусами й дугою кола.

78. Побудуйте коло й хорду цього кола, яка не є діаметром. Заштрихуйте більший сегмент, обмежений хордою та дугою кола.

79. Обчисліть довжину кола, якщо радіус кола дорівнює: а) 7 см, б) 0,6 дм.

80. Обчисліть площу круга, якщо радіус круга дорівнює: а) 8 см, б) 0,3 м.

81. За даними рис. 28 запишіть рівняння зі змінною x, скориставшись теоремою косинусів.

82. За даними рис. 29 запишіть рівняння зі змінною x, скориставшись теоремою косинусів.

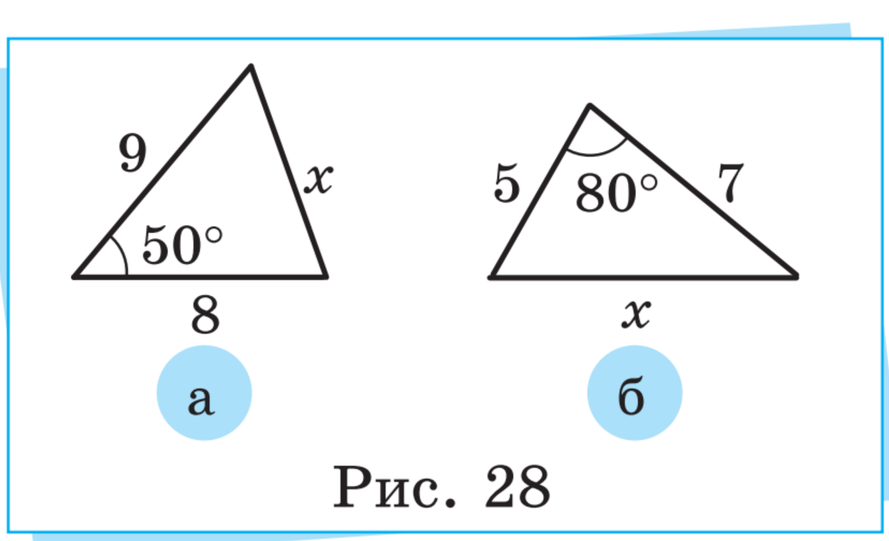


Рис. 28

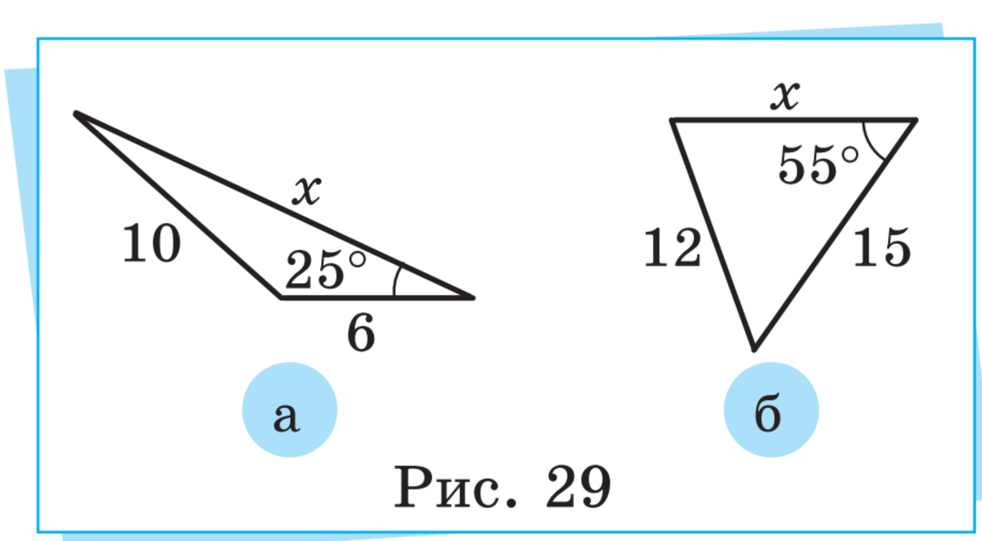


Рис. 29

83. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 3 см і 5 см, а косинус кута між ними — 0,4. Скориставшись теоремою косинусів, знайдіть квадрат довжини невідомої сторони.

84. За даними рис. 30 запишіть рівняння зі змінною x, скориставшись теоремою синусів.

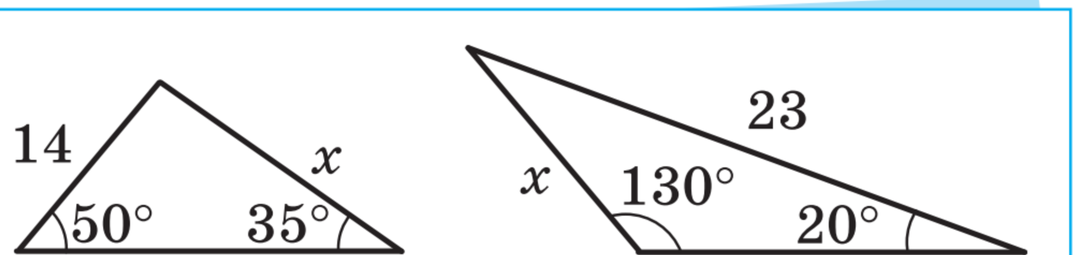


Рис. 30

85. Довжина сторони трикутника дорівнює 18 см, а синус протилежного до неї кута — 0,3. За формулою $R = \dfrac{a}{2\sin \angle A}$ знайдіть радіус описаного навколо цього трикутника кола.

86. Знайдіть площу повної поверхні прямої призми, якщо площа основи та площа бічної поверхні відповідно дорівнюють: а) $S_о = 17$ см^2, $S_б = 29$ см^2; б) $S_о = 5{,}2$ м^2, $S_б = 9{,}5$ м^2.

87. На рис. 31 зображено правильну шестикутну призму. Бічне ребро призми дорівнює 11 см, ребро основи — 5 см. Знайдіть периметр основи призми та площу її бічної поверхні.

88. Знайдіть площу повної поверхні правильної піраміди, якщо її площа основи та площа бічної поверхні відповідно дорівнюють: а) $S_о = 14$ см^2, $S_б = 45$ см^2; б) $S_о = 1{,}6$ м^2, $S_б = 7{,}8$ м^2.

89. На рис. 32 зображено правильну шестикутну піраміду. Апофема піраміди дорівнює 15 см, ребро основи — 7 см. Знайдіть периметр основи піраміди та площу її бічної поверхні.

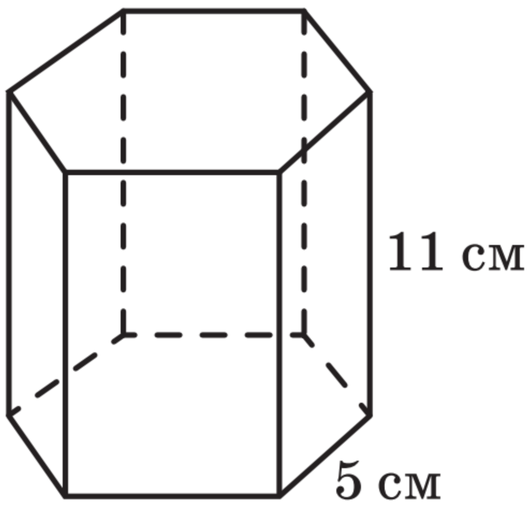


Рис. 31

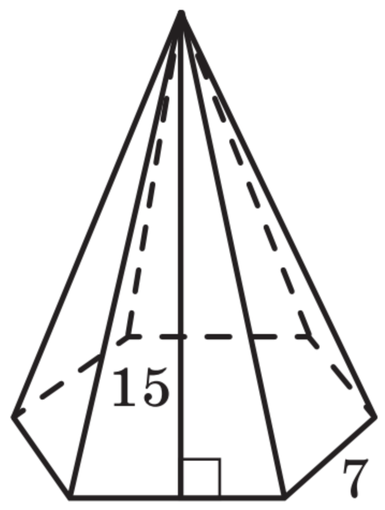


Рис. 32

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

90. Які твердження є правильними?

а) Поверхня семикутної піраміди складається з двох основ і семи бічних граней.

б) Поверхня семикутної призми складається з двох основ і семи бічних граней.

в) Семикутна піраміда має сім бічних ребер.

г) Семикутна призма має сім бічних ребер.

д) Семикутна піраміда має сім ребер основи.

е) Семикутна призма має чотирнадцять ребер основи.

91. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо площа основи та площа бічної поверхні циліндра відповідно дорівнюють: а) $S_{\text{о}} = 12$ см^2, $S_{\text{б}} = 9$ см^2; б) $S_{\text{о}} = 4{,}3$ м^2, $S_{\text{б}} = 5{,}8$ м^2.

92. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо радіус основи та висота циліндра відповідно дорівнюють: а) $R = 8$ см, $H = 7$ см; б) $R = 6$ м, $H = 7{,}5$ м.

93. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа основи та площа бічної поверхні конуса відповідно дорівнюють: а) $S_{\text{о}} = 12$ см^2, $S_{\text{б}} = 45$ см^2; б) $S_{\text{о}} = 2{,}7$ м^2, $S_{\text{б}} = 6{,}4$ м^2.

94. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо радіус основи та твірна конуса відповідно дорівнюють: а) $R = 7$ см, $L = 18$ см; б) $R = 2{,}9$ м, $L = 7{,}1$ м.

95. Які твердження є правильними?

а) Поверхня циліндра складається з основи й бічної поверхні.

б) Поверхня конуса складається з основи й бічної поверхні.

в) Бічна поверхня циліндра може мати форму дельтоїда.

г) Бічна поверхня конуса може мати форму дельтоїда.

д) Бічна поверхня циліндра може мати форму квадрата.

е) Бічна поверхня конуса може мати форму рівнобічного трикутника.

96. Прочитайте опис випадкової події. Чи є ця подія достовірною? Чи є ця подія неможливою?

а) У порожній кошик поклали 30 синіх слив. Із кошика витягли синю сливу.

б) Остап розгорнув свій підручник із хімії та побачив у ньому малюнки.

в) Світлана зайшла в книжковий магазин і купила «Енциклопедію птахів».

г) У порожню коробку поклали 45 червоних ручок. Із коробки витягли чорну ручку.

97. На числовій прямій зображено точки A, B, C (рис. 33). На відрізку AC випадковим чином вибирають точку з координатою, яка є цілим числом. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку BC?

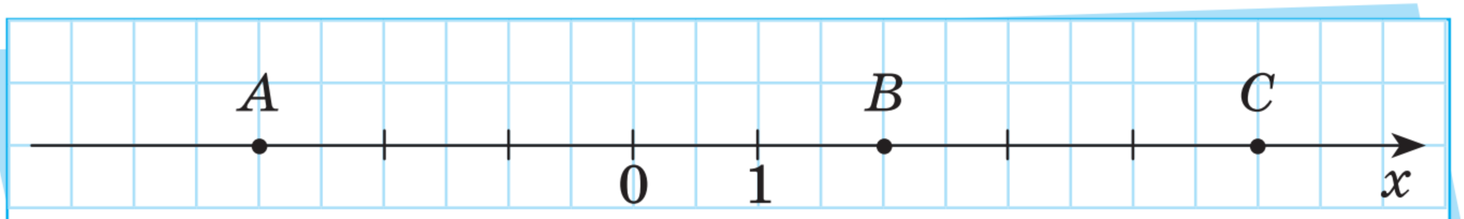


Рис. 33

98. На числовій прямій зображено точки A, B, C (див. рис. 33). На відрізку AC випадковим чином вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку BC?

99. У ПДСК зображено квадрат, прямокутник і точки, обидві координати яких є цілими числами (рис. 34). У квадраті навмання вибирають одну з таких точок. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме прямокутнику?

100. У ПДСК зображено квадрат і прямокутник (рис. 35). У квадраті навмання вибирають одну точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме прямокутнику?

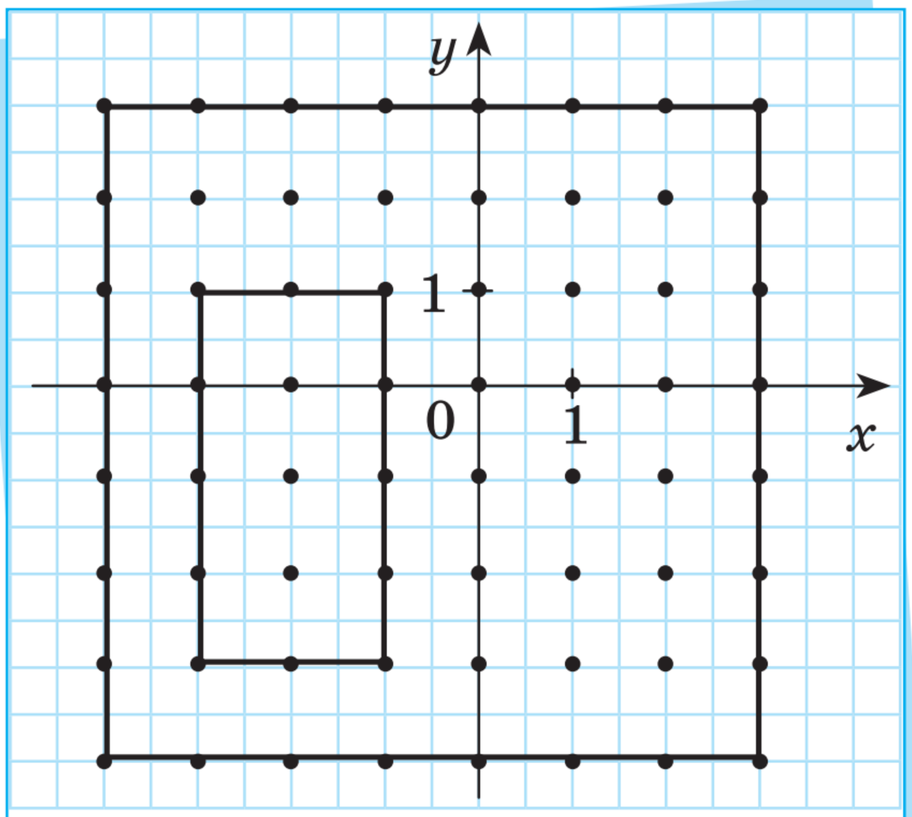


Рис. 34

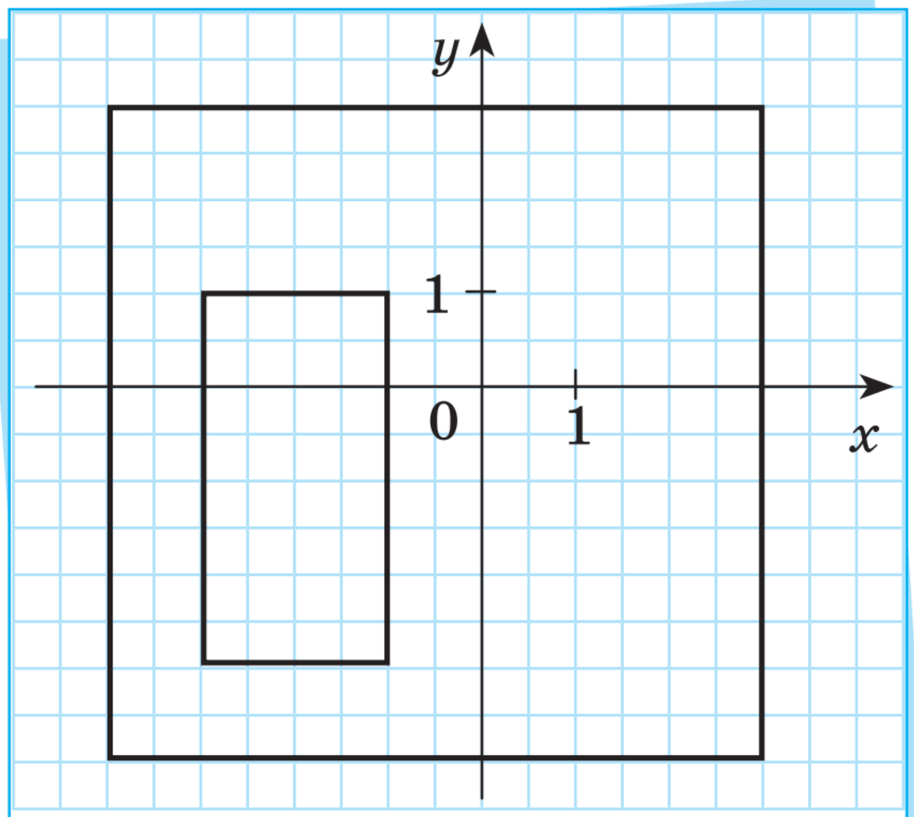


Рис. 35

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

101. Чи є послідовність числовою? Чи є послідовність скінченною?

а) Послідовність прізвищ у класному журналі.
б) Послідовність чисел, які є дільниками числа 1000.
в) Послідовність усіх чисел, які діляться на 7.
г) Послідовність номерів учасників марафонського забігу.
д) Послідовність друзів на сторінці соціальної мережі.

102. Розгляньте слова як послідовності букв. Чи однаковими є ці послідовності? Чи з однакових елементів складаються ці послідовності?

а) літо, тіло; б) атлас, салат; в) корсет, сектор, г) правда, кривда.

103. Запишіть усі наступні елементи послідовності, яка складається з усіх натуральних чисел, що є дільниками числа 100, розташованих за зростанням: 1, 2, 4, 5, 10, ...

104. Запишіть четвертий і дев'ятий елементи послідовності, заданої за допомогою формули n-го елемента: $b_n = 3n + 2$.

105. На військовому заводі в лютому було виготовлено 3500 дронів, у березні — 4000 дронів, у квітні — 4500 дронів. На заводі планують, що виробництво дронів і надалі щомісяця зростатиме на 500 штук порівняно з попереднім місяцем. Яким буде прогнозоване виробництво дронів на цьому заводі в липні?

106. Запишіть перші чотири елементи послідовності двоцифрових чисел, які закінчуються цифрою 3 й розташовані за зростанням. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією?

107. Знайдіть різницю d арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$; б) $a_5 = 6$, $a_6 = 4{,}5$.

108. Знайдіть другий і дванадцятий елементи арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 5$, $d = 3$; б) $a_1 = 10$, $d = -2$.

109. Знайдіть суму перших тридцяти елементів арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1 = 5$, $a_{30} = 115$; б) $a_1 = 46$, $a_{30} = -60$.

110. У квітні кафе «Gelato vero» продало 800 кг морозива, а в травні — 900 кг. У кафе сподіваються, що протягом літніх місяців продажі морозива й надалі щомісяця зростатимуть на 100 кг. Обчисліть масу морозива, яку планують продавати щомісяця влітку. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то знайдіть її різницю.

111. Першим елементом послідовності є найменше непарне трицифрове число, а кожне наступне число втричі більше від попереднього. Запишіть усі елементи цієї послідовності, які є трицифровими числами. Чи є ця послідовність геометричною прогресією?

112. Знайдіть знаменник q геометричної прогресії B, якщо:
а) $b_1 = 8$, $b_2 = 56$; б) $b_{15} = -4$, $b_{16} = 60$.

113. Задано геометричну прогресію B зі знаменником q. Знайдіть:
а) b_2, якщо $b_1 = 7$, $q = 5$; б) b_9, якщо $b_8 = 11$, $q = -3$; в) b_1, якщо $b_2 = 45$, $q = 9$.

114. Знайдіть другий і шостий елементи геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = 3$, $q = 2$; б) $b_1 = \frac{1}{27}$, $q = -3$.

115. Знайдіть суму перших п'яти елементів геометричної прогресії B, якщо: а) $b_1 = -4$, $q = 2$; б) $b_1 = 7$, $q = -2$.

116. Пан Андрій сплачує кредит у банку протягом 5 років однаковими платежами в розмірі 2500 грн наприкінці кожного місяця. Відомо, що в цьому банку гроші коштують 12 % річних щомісяця. Дайте відповіді на запитання.
а) Чи є дана серія платежів ануїтетом?
б) Чи є цей ануїтет звичайним?
в) Чи є цей ануїтет простим?
г) Яким є інтервал платежу?
д) Яким є строк ануїтету в інтервалах платежу?
е) Скільки платежів має зробити пан Андрій для сплати кредиту?

117. Пані Юлія накопичила на рахунку в банку суму в 3 млн грн для постійних щоквартальних виплат після досягнення нею пенсійного віку. Відомо, що ці виплати банк здійснює за норми відсотка $i = 0{,}015$. Дайте відповіді на запитання.
а) Чи є ці виплати довічною рентою?
б) Яка теперішня вартість цієї довічної ренти?
в) Яким є розмір щомісячних платежів цієї довічної ренти?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Середній рівень

118. За паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(7;-2)$ точка K переходить у точку $K'(1;3)$. Знайдіть координати точки K.

А	Б	В	Г
$K(6;-5)$	$K(8;1)$	$K(-6;5)$	$K(8;-1)$

119. Які координати матиме образ точки $B(4;-7)$ за деформації з коефіцієнтом $k=3$ до осі Ox?

А	Б	В	Г
$B'(7;-7)$	$B'(12;-7)$	$B'(12;-28)$	$B'(4;-28)$

120. Побудуйте образ точки A (див. рис. 36) за симетрії відносно прямої n^*.

121. Побудуйте образ точки B (див. рис. 37) за повороту на $90°$ відносно точки O за ходом годинникової стрілки.

122. Побудуйте образ точки C (див. рис. 38) за гомотетії із центром у точці O та з коефіцієнтом $\lambda=3$.

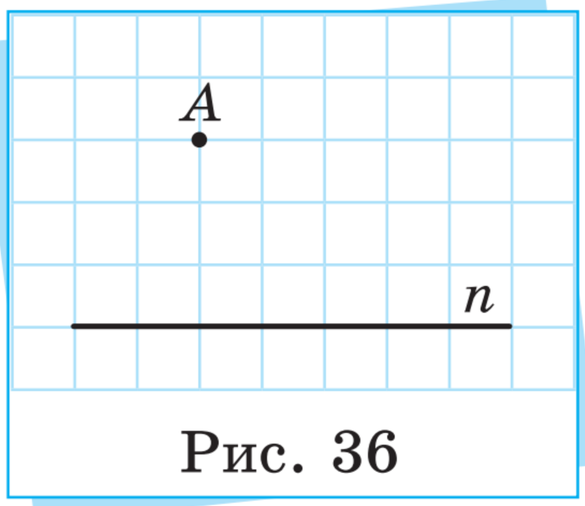


Рис. 36

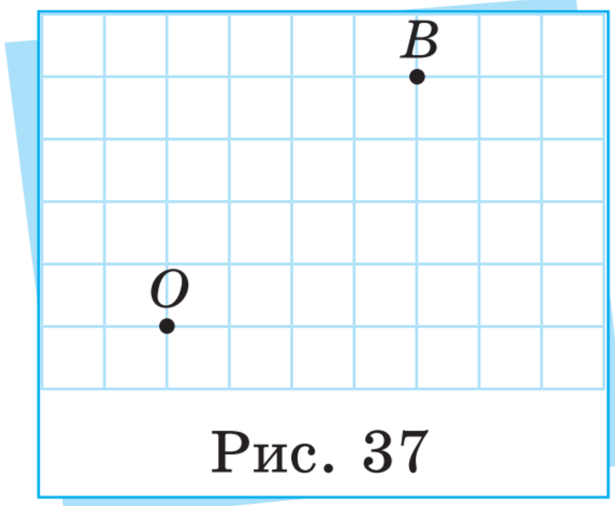


Рис. 37

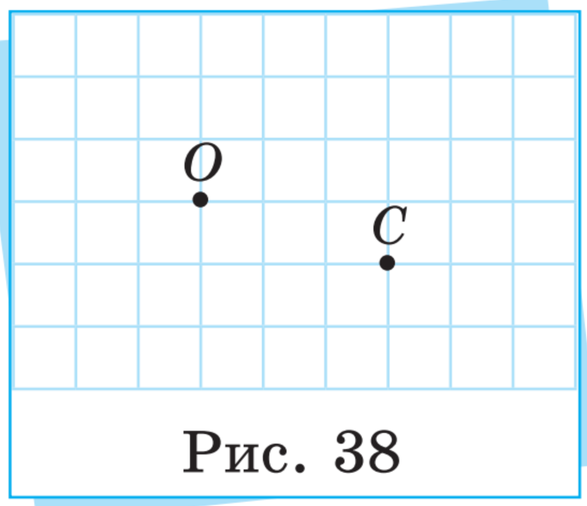


Рис. 38

123. На координатній площині задано точки $A(2;5)$ і $B(2;1)$. Симетрія відносно точки B переводить точку A в точку A'. Укажіть координати точки A'.

А	Б	В	Г
$A'(2;-3)$	$A'(4;6)$	$A'(2;-5)$	$A'(-2;-5)$

* Зрозуміло, що в цьому та подібних випадках рисунок слід перенести в зошит.

124. На координатній площині задано точку $D(4;-2)$. Симетрія відносно осі Oy переводить точку D в точку D'. Укажіть координати точки D'.

А	Б	В	Г
$D'(-4;2)$	$D'(4;2)$	$D'(-2;-4)$	$D'(-4;-2)$

125. На координатній площині задано точки $O(0;0)$ і $K(-4;3)$. Гомотетія із центром у точці O й коефіцієнтом 2 переводить точку K в точку K'. Укажіть координати точки K'.

А	Б	В	Г
$K'(8;-6)$	$K'(-2;1{,}5)$	$K'(-8;6)$	$K'(-16;9)$

126. Побудуйте образ відрізка CD (див. рис. 39) за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$.

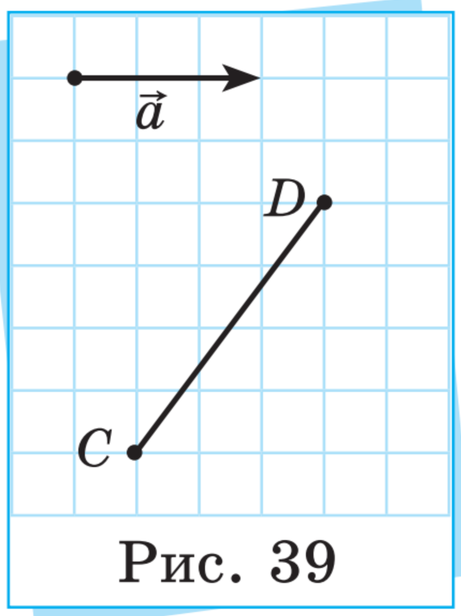


Рис. 39

127. Побудуйте образ відрізка AB (див. рис. 40) за повороту відносно точки O на 180° проти ходу годинникової стрілки.

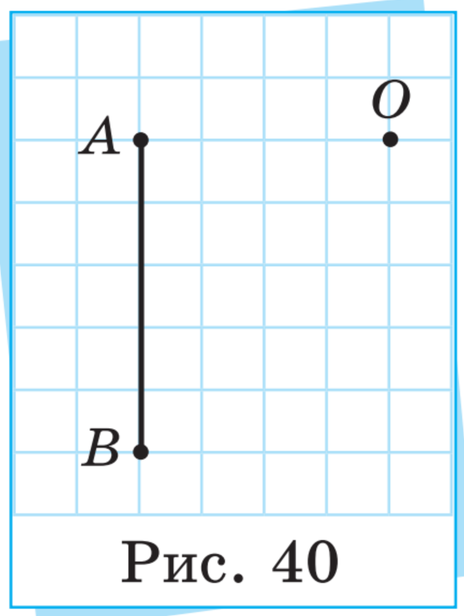


Рис. 40

128. Фігура C перейшла у фігуру D за деякого перетворення. За якого перетворення фігури C і D не будуть подібними?

А) За деформації з коефіцієнтом 4 до осі Oy;

Б) за гомотетії із центром у точці O та коефіцієнтом 2;

В) за повороту відносно точки O на кут 30° за рухом годинникової стрілки;

Г) за симетрії відносно точки A.

129. Яка з фігур на рис. 41 має вісь симетрії?

130. Яка з фігур на рис. 41 має центр симетрії?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

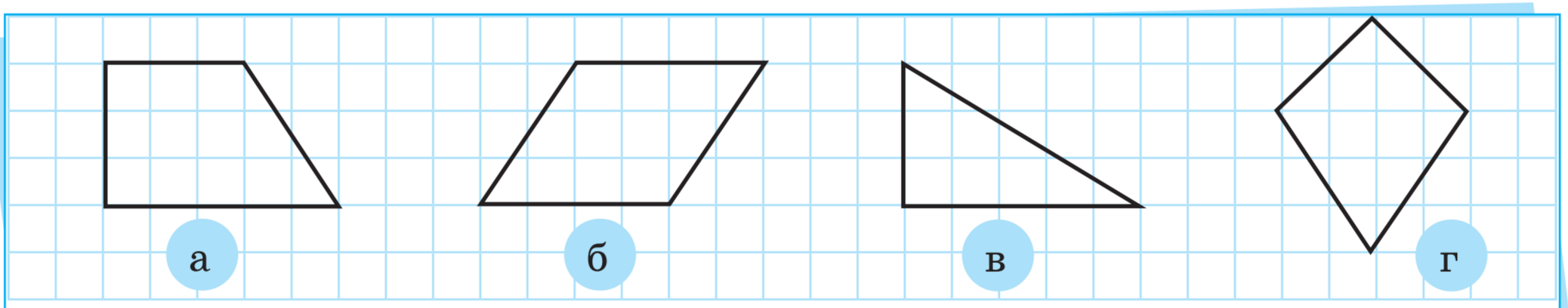


Рис. 41

131. На рис. 42 зображено половину деякої букви та її вісь симетрії — пряму n. Запишіть цю букву.

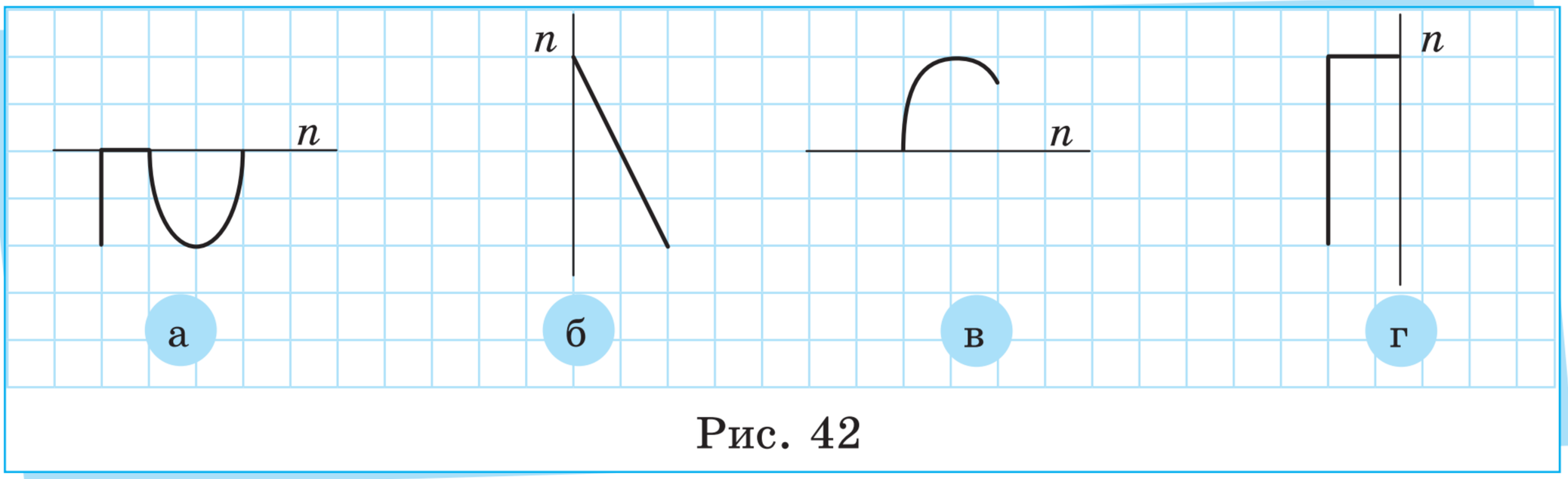


Рис. 42

132. На рис. 43 зображено половину деякої букви та її центр симетрії — точку O. Запишіть цю букву.

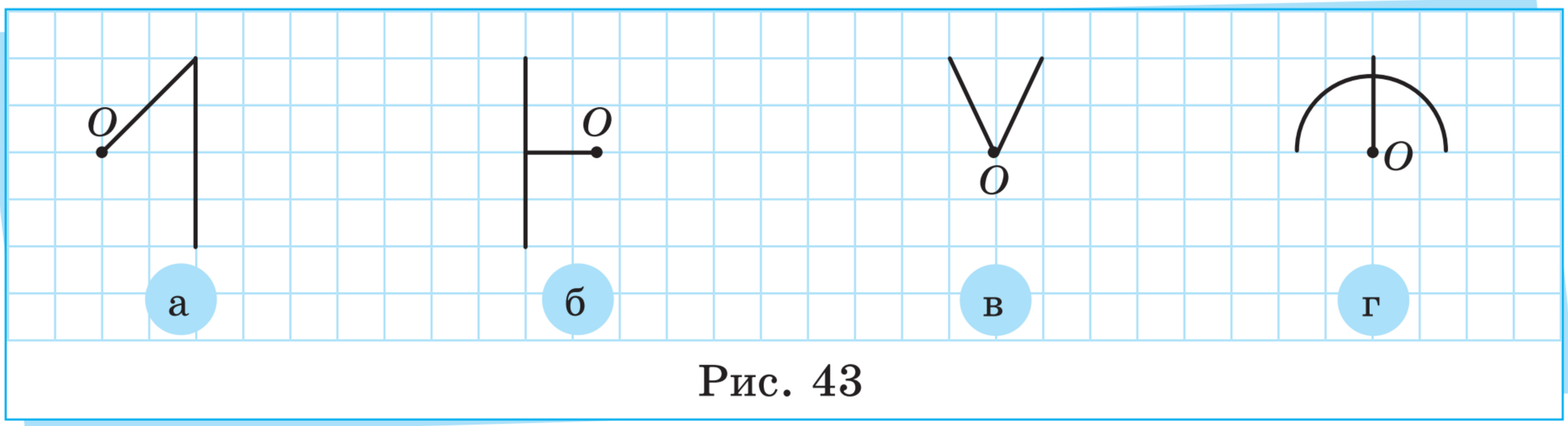


Рис. 43

133. Запишіть за допомогою подвійної нерівності таку ситуацію:

а) маса автомобіля (a) менша від маси локомотива (l), але більша за масу велосипеда (v);

б) зріст учня (h) протягом навчання в школі змінювався в межах від 120 см до 175 см включно.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

134. Які з наведених нерівностей є правильними числовими нерівностями?

а) $\frac{2}{15} < \frac{7}{15}$; б) $\frac{1}{8} > \frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{9} < \frac{2}{7}$; г) $\frac{2}{3} > \frac{3}{4}$.

135. Відомо, що $a^2 + 2a < 0$.

а) Підберіть додатне число a, щоб утворилася правильна числова нерівність;

б) підберіть від'ємне число a, щоб утворилася правильна числова нерівність.

136. Відомо, що $x > y > 0$. Порівняйте вирази.

а) $x+3$ і $y+2$; в) $\frac{4}{3}x$ і $\frac{4}{3}y$; д) $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{y}$.

б) $x-4$ і $y-5$; г) $-\frac{2}{3}x$ і $-\frac{2}{3}y$;

137. Укажіть усі цілі числа, що задовольняють подвійну нерівність $-4 \leqslant x < 5$.

138. Задано нерівність $2x - 3 \geqslant 1$. Укажіть, які з наведених значень x є розв'язками цієї нерівності.

а) $x = -2$; б) $x = 0$; в) $x = 2$; г) $x = 10$.

139. Зобразіть на числовій прямій множину розв'язків кожної з нерівностей і запишіть її у вигляді числового проміжку.

а) $x - 4 > 3$; б) $2x + 5 < -7$; в) $-2x + 1 \leqslant 9$; г) $-3x - 9 \geqslant 0$.

140. Запишіть подвійну нерівність, розв'язком якої є заданий проміжок.

а) $(-2; 5)$; б) $[4; 10)$; в) $(-6; 0]$; г) $[-9; -5]$.

141. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $3 < x - 2 \leqslant 5$; б) $-8 \leqslant x + 2 < 0$; в) $-36 \leqslant 3x \leqslant -12$; г) $5 < \frac{x}{2} < 15$.

142. З'ясуйте, які з наведених значень змінної y є розв'язками системи нерівностей $\begin{cases} 2y > -10, \\ y - 4 < 3. \end{cases}$

а) $y = -8$; б) $y = -4$; в) $y = 0$; г) $y = 7$; д) $y = 12$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

143. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 3x < -12, \\ x + 2 \leqslant -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x > -20, \\ 2x \geqslant 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6 - x \leqslant 4, \\ x - 5 > 12. \end{cases}$

144. За x ручок, ціна кожної з яких 35 грн, та y олівців, ціна кожного з яких 12 грн 50 коп., разом заплатили понад 450 грн. Опишіть цю ситуацію за допомогою нерівності з двома змінними. Побудуйте в ПДСК множину розв'язків цієї нерівності.

145. Задано функцію $y = \frac{1}{x}$. З'ясуйте, графік якої функції отримаємо, якщо:

а) графік заданої функції паралельно перенесемо на вектор $\left(\overrightarrow{0; -3}\right)$;

б) графік заданої функції паралельно перенесемо на вектор $\left(\overrightarrow{-2; 0}\right)$;

в) графік заданої функції симетрично відобразимо відносно осі Ox;

г) графік заданої функції симетрично відобразимо відносно осі Oy;

д) до графіка заданої функції застосуємо деформацію з коефіцієнтом $k = 4$ до осі Ox;

е) до графіка заданої функції застосуємо деформацію з коефіцієнтом $k = 2$ до осі Oy.

146. Точки $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(3; 5)$, $D(4; 6)$, $E(5; 5)$ належать графіку функції $y = f(x)$. Побудуйте графік цієї функції, позначивши задані точки в ПДСК та з'єднавши їх плавною лінією. Побудуйте в цій самій ПДСК образи заданих точок за таких перетворень:

а) паралельне перенесення на вектор $\left(\overrightarrow{4; 0}\right)$;

б) паралельне перенесення на вектор $\left(\overrightarrow{0; 5}\right)$;

в) симетрія відносно осі абсцис;

г) симетрія відносно осі ординат.

Побудовані образи для кожного з перетворень з'єднайте плавною лінією. Запишіть формули для функцій, графіки яких побудовані за перетворень *а–г*.

147. За допомогою перетворень із графіка функції $y=\sqrt{x}$ отримали графіки функцій, зображені на рис. 44. Запишіть формули для функцій, графіки яких зображено.

148. На рис. 45 зображено графік функції $y=-x$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій: а) $y=-x+2$; б) $y=-x-3$; в) $y=-\frac{1}{2}x$; г) $y=3x$.

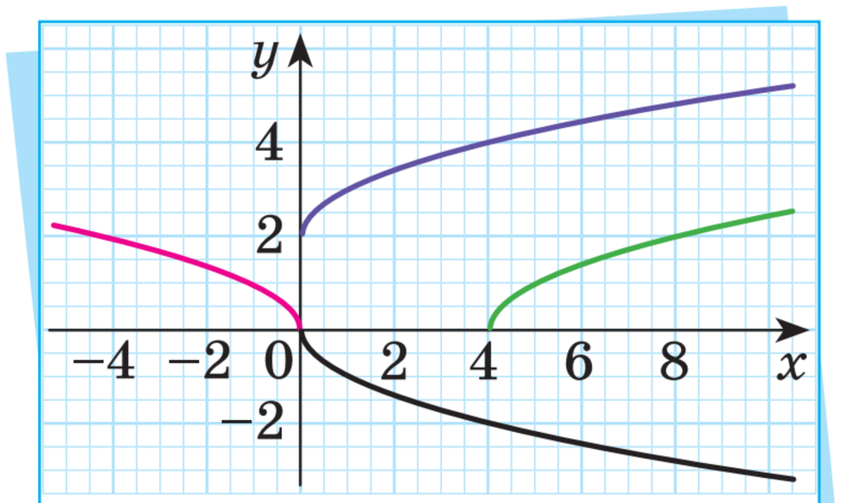


Рис. 44

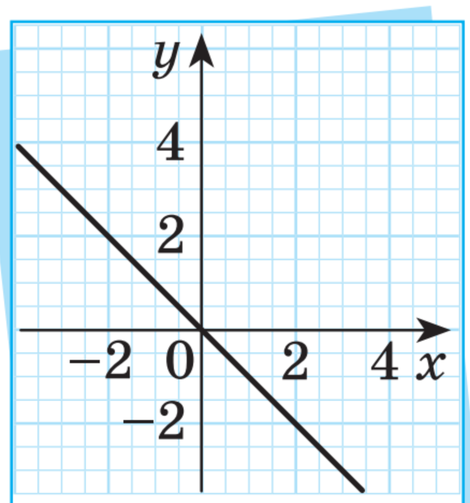


Рис. 45

149. Побудуйте графік заданої функції, використовуючи графік функції $y=x^2$. Які геометричні перетворення слід виконати для побудови?

а) $y=x^2+5$; б) $y=x^2-7$; в) $y=(x-6)^2$; г) $y=(x+8)^2$.

150. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо відомо, що вершина параболи, яка є її графіком, розташована в точці $(3;-2)$, вітки параболи спрямовані вгору, а графік перетинає вісь ординат у точці $(0;7)$.

151. Для заданої квадратичної функції вкажіть напрямок віток параболи, яка є її графіком, і знайдіть координати вершини параболи, скориставшись формулами $m=-\frac{b}{2a}$ і $n=\frac{4ac-b^2}{4a}=am^2+bm+c$.

а) $y=2x^2-8x+3$; б) $y=-3x^2+6x-2$.

152. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка заданої функції з віссю Ox і віссю Oy.

а) $y=x^2-4x+3$; б) $y=-x^2-2x+8$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

153. Знайдіть нулі квадратичної функції та побудуйте ескіз графіка цієї функції.

а) $y = x^2 - 16$; в) $y = -x^2 + x + 12$.

б) $y = x^2 + 5x - 6$;

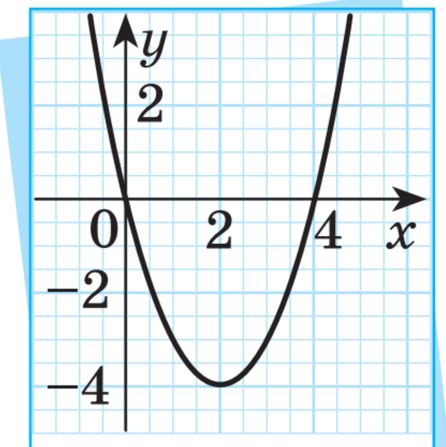


Рис. 46

154. Користуючись ескізом графіка функції $y = x^2 - 4x$ (див. рис. 46), запишіть усі розв'язки нерівності:

а) $x^2 - 4x > 0$; в) $x^2 - 4x < 0$;

б) $x^2 - 4x \geqslant 0$; г) $x^2 - 4x \leqslant 0$.

155. Користуючись графіком функції $y = -x^2 + 5x - 6$ (див. рис. 47), запишіть усі розв'язки нерівності:

а) $-x^2 + 5x - 6 > 0$; в) $-x^2 + 5x - 6 < 0$;

б) $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$; г) $-x^2 + 5x - 6 \leqslant 0$.

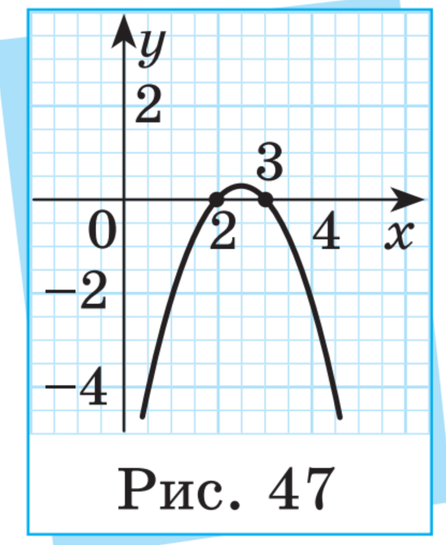


Рис. 47

156. Розв'яжіть нерівність.

а) $x^2 + 6x > 0$; б) $-x^2 + 49 \geqslant 0$; в) $x^2 + 8 \geqslant 0$.

157. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{7}{x} = 2$; б) $\frac{3}{2x - 1} = 0$; в) $\frac{x - 3}{2x} = 2$.

158. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{-2}{x + 10} \geqslant 0$; б) $\frac{x}{x + 5} \leqslant 0$; в) $\frac{x - 10}{3x} > 0$.

159. Задано задачу: «Літнього вечора з двох сусідніх сіл назустріч одне одному з незмінними швидкостями вирушили Степан і Оксана. Швидкість руху Степана на 1 км/год більша за швидкість руху Оксани. Через певний час вони зустрілися, причому Степан пройшов до зустрічі 4 км, а Оксана — 3 км. Знайдіть швидкості руху Степана й Оксани, якщо відомо, що під час руху вони не зупинялися».

Позначте швидкість руху Степана через x км/год і складіть рівняння, яке може бути математичною моделлю цієї задачі.

160. Задано задачу: «Приватна кондитерська отримала замовлення на виготовлення 400 кг цукерок ручної роботи та має виконати його не більш ніж за 5 год, виготовляючи x кг цукерок щогодини. Знайдіть множину всіх можливих значень x».

Запишіть дробово-раціональну нерівність, яка може бути математичною моделлю цієї задачі. Використовуючи цю нерівність, розв'яжіть задачу.



161. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} y = x + 1, \\ xy = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3 - y, \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

162. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} 5x + xy = 12, \\ -3x - xy = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2y = 10, \\ -x^2 + 5y = -7. \end{cases}$

163. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом.

а) $\begin{cases} y = -x^2, \\ y = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x - 5. \end{cases}$

164. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ 2x \leqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x < 6, \\ x^2 \leqslant 25. \end{cases}$

165. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності.

а) $y \geqslant -x^2 + 2$; б) $y < x^2 - 1$.

166. У 9-А класі на початку навчального року навчалося 32 учні й учениці, а наприкінці року їх було вже 36. Знайдіть темп зростання кількості учнів і учениць цього класу за навчальний рік.

167. За статистикою, зараз у Гренландії проживає приблизно 57 000 осіб. Площа Гренландії приблизно дорівнює 2 170 000 км^2. Знайдіть густоту населення Гренландії. Для обчислень скористайтеся калькулятором, відповідь округліть до тисячних.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

168. Середній радіус Землі приблизно дорівнює 6371 км, а середній радіус Марса — 3390 км. Обчисліть показник порівняння середнього радіуса Землі до середнього радіуса Марса. Для обчислень скористайтеся калькулятором, відповідь округліть до сотих.

169. За останній тиждень майстерня з виробництва меблів виготовила 200 одиниць виробів, з яких 60 — меблі для вітальні, 90 — меблі для спальні, а решта — меблі для кухні. Обчисліть показники структури для кожного з наведених видів меблів. Відповідь запишіть у відсотках.

170. Туристична агенція продала в травні 250 путівок і запланувала в червні продати 400 путівок. Однак фактично в червні було продано 450 путівок. Знайдіть:

а) показник динаміки фактичного продажу путівок у червні порівняно з травнем;

б) показник планового завдання;

в) показник виконання плану.

На скільки відсотків перевиконано план?

171. Укажіть слово, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Якщо загальний обсяг ознаки *є добутком її індивідуальних значень*, то середнє значення даної ознаки є *середнім* ... цих індивідуальних значень».

а) арифметичним;
б) геометричним;
в) гармонійним;
г) квадратичним.

172. Укажіть слово, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «На будівництві будинку працює троє мулярів. Перший із них, працюючи самостійно, може викласти ту саму стіну із цегли за 2 год, другий — за 3 год, третій — за 5 год. Тоді середній час, витрачений кожним із мулярів на викладання цегляної стіни під час спільної роботи, буде середнім ... значенням цих трьох індивідуальних значень».

а) арифметичним;
б) геометричним;
в) гармонійним;
г) квадратичним.

173. Укажіть формулу, за якою обчислюють середнє квадратичне двох чисел m і p.

а) $\bar{x}=\dfrac{\sqrt{m^2+p^2}}{2}$; б) $\bar{x}=\sqrt{\dfrac{m\cdot p}{2}}$; в) $\bar{x}=\sqrt{\dfrac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{p}}}$; г) $\bar{x}=\sqrt{\dfrac{m^2+p^2}{2}}$.

174. Першого дня котик з'їв 32 г корму, другого — 40 г корму, третього — 45 г корму. Скільки грамів корму з'їдав котик у середньому на день за ці три дні?

175. Для чисел 2, 4, 8 і 10 знайдіть: а) середнє арифметичне; б) середнє гармонійне; в) середнє квадратичне. Порівняйте ці значення. Для обчислень використайте калькулятор. Відповідь за потреби округліть до десятих.

176. Задано опуклий дванадцятикутник. Знайдіть: а) суму градусних мір його внутрішніх кутів; б) суму градусних мір його зовнішніх кутів; в) кількість його діагоналей.

177. Задано правильний п'ятнадцятикутник. Знайдіть: а) градусну міру його внутрішнього кута; б) градусну міру його зовнішнього кута; в) кількість його діагоналей.

178. Задано правильний шестикутник зі стороною 10 см. Знайдіть радіус R описаного навколо нього кола й радіус r вписаного в нього кола.

179. Задано правильний чотирикутник. Радіус кола, описаного навколо цього чотирикутника, $R=12$ см. Знайдіть радіус r кола, вписаного в цей чотирикутник.

180. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 16 см.

181. Знайдіть площу ромба $ABCD$, якщо $CD=10$ см, $\angle A=150°$.

182. Знайдіть площі геометричних фігур, зображених на рис. 48, якщо довжина сторони однієї клітинки дорівнює 1 см.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

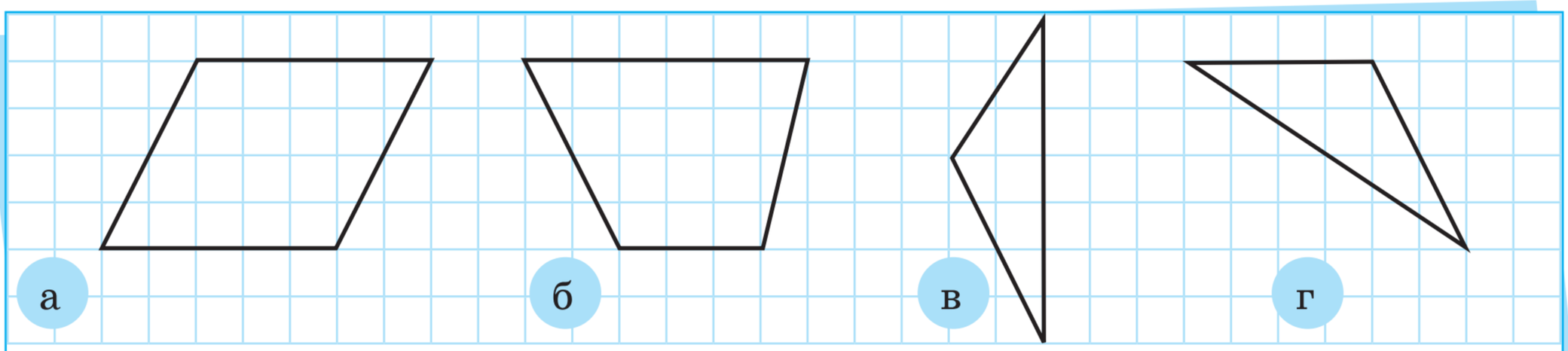


Рис. 48

183. Знайдіть площу трикутника ABC, у якого $AB = 10$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 30°$.

184. Знайдіть довжину дуги l кола радіуса R, що відповідає центральному куту α, якщо: а) $R = 9$ см, $\alpha = 60°$; б) $R = 16$ см, $\alpha = 270°$.

185. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює: а) 12 см; б) 10 дм; в) 8 мм.

186. Задано коло із центром у точці O (рис. 49). Із цього центра проведено радіуси OA і OB кола, кут між якими дорівнює $150°$. Знайдіть площу обох секторів (більшого й меншого), які при цьому утворилися, якщо $OA = OB = 6$ см.

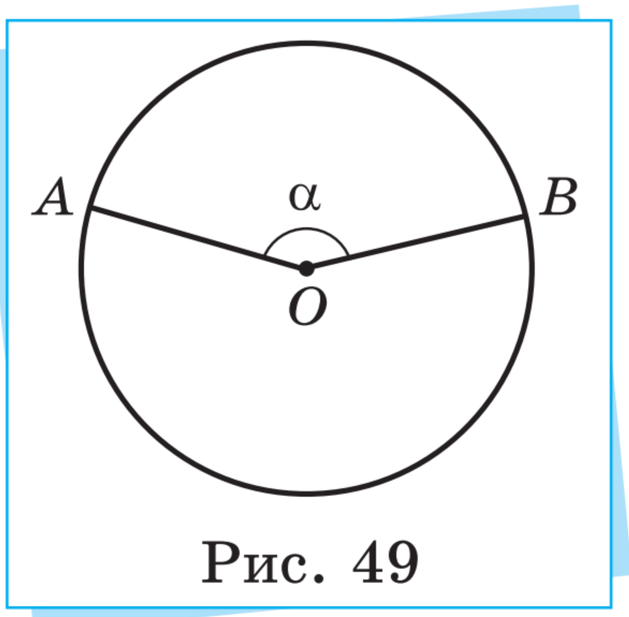


Рис. 49

187. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 100$. Знайдіть довжину кола C і площу круга S, обмеженого цим колом.

188. У трикутнику ABC: а) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $\cos\angle C = 0{,}4$; б) $AC = 4$ см, $BC = 3$ см, $\cos\angle C = -0{,}1$.
Зобразіть схематично трикутник ABC. Використовуючи теорему косинусів, знайдіть значення AB^2.

189. Задано трикутник зі сторонами a, b, c та кутами α, β, γ, які відповідно лежать навпроти цих сторін. Використовуючи формулу $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, знайдіть значення $\cos\alpha$, якщо: а) $a = 10$ см, $b = 6$ см, $c = 5$ см; б) $a = 7$ см, $b = 6$ см, $c = 4$ см. За потреби відповідь округліть до сотих.

За допомогою калькулятора знайдіть градусну міру кута α з точністю до градуса. Визначте вид цього трикутника (прямокутний, гострокутний, тупокутний).

190. Дизайнерська листівка має форму трикутника зі сторонами 10 см, 12 см, 16 см. Знайдіть площу цієї листівки. Відповідь округліть до цілих.

191. Задано трикутник ABC. Знайдіть:

а) $\sin\angle B$, якщо $\sin\angle A = 0{,}2$, $BC = 8$ см, $AC = 9$ см;

б) AB, якщо $BC = 3$ см, $\sin\angle C = 0{,}3$, $\sin\angle A = 0{,}7$.

192. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника KLM, якщо $KL = 12$ см, $\sin\angle M = 0{,}6$. Знайдіть площу S круга, обмеженого цим колом.

193. Скільки граней і ребер має: а) шестикутна призма; б) 20-кутна призма?

194. Скільки граней і ребер має: а) восьмикутна піраміда; б) 12-кутна піраміда?

195. У правильній шестикутній призмі довжина ребра основи дорівнює 10 см, а довжина бічного ребра — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

196. У правильній двадцятикутній піраміді довжина ребра основи дорівнює 5 см, а довжина апофеми — 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

197. Задано два циліндри. Радіус основи й висота першого відповідно дорівнюють $R_1 = 6$ см, $H_1 = 4$ см. Відповідні розміри другого циліндра: $R_2 = 4$ см, $H_2 = 6$ см. Знайдіть площі S_1 і S_2 повних поверхонь цих двох циліндрів і порівняйте їх.

198. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор круга радіуса $r = 12$ см із центральним кутом $\alpha = 120°$. Знайдіть площу повної поверхні цього конуса.

199. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 80π см^2, а площа його бічної поверхні — 48π см^2. Визначте діаметр основи цього циліндра.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

200. Задано конус і циліндр, радіуси основ яких рівні. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 100π см^2, а площа його бічної поверхні — 36π см^2. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа його бічної поверхні становить 70π см^2.

201. Точка C належить відрізку AB довжиною 20 см, причому $AC = 8$ см. На відрізку AB навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме також і відрізку AC?

202. Діагоналі плоского квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O. У цьому квадраті навмання вибирають точку. Якою є ймовірність того, що ця точка належатиме плоскому трикутнику BOC?

203. Петрик і Тетянка під час гри тягнуть стару мотузку довжиною 5 м у різні боки. Відомо, що мотузка може порватися рівномożливо в будь-якому місці. Якою є ймовірність того, що після розриву в руках у Тетянки залишиться шматок мотузки довжиною не менше 2 м?

204. На прямокутну парту, розміри якої 150 см і 80 см, навмання сідає муха. Якою є ймовірність того, що вона сяде на прямокутний зошит, який лежить на парті й розміри якого 20 см і 15 см?

205. Запишіть перші сім елементів послідовності, яка складається з усіх натуральних чисел, кратних 20, розташованих за зростанням.

206. Запишіть другий і восьмий елементи послідовності C, заданої за допомогою формули n-го елемента $c_n = n^2 - 3n$.

207. Послідовність P складається з усіх розташованих за зростанням натуральних чисел, які за ділення на 4 дають в остачі 2. Запишіть цю послідовність за допомогою формули n-го елемента.

208. Кожен наступний елемент послідовності X, починаючи з третього, є добутком двох попередніх її елементів. Знайдіть x_6, якщо $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

209. Запишіть перші п'ять елементів послідовності двоцифрових натуральних чисел, розташованих за зростанням, остання цифра яких дорівнює 7. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією? Якщо так, то обчисліть різницю цієї арифметичної прогресії.

210. Задано арифметичну прогресію A. Знайдіть: а) a_{12}, якщо $a_{10}=8$, $a_{11}=17$; б) a_{24}, якщо $a_{25}=-10$, $a_{26}=-18$.

211. Знайдіть різницю d арифметичної прогресії A, якщо: а) $a_1=10$, $a_5=30$; б) $a_1=4$, $a_{11}=-36$.

212. Задано арифметичну прогресію A. Знайдіть суму перших 10 її елементів S_{10}, якщо:
а) сума перших 9 її елементів $S_9=100$ і $a_{10}=-15$;
б) сума перших 11 її елементів $S_{11}=350$ і $a_{11}=40$.

213. Перший елемент арифметичної прогресії $a_1=10$, а різниця цієї прогресії дорівнює $d=-8$. Знайдіть суму: а) перших 6 елементів цієї прогресії; б) перших 25 елементів цієї прогресії.

214. Михайло вивчав китайську мову. Першого дня він вивчив 5 ієрогліфів і кожного наступного дня вивчав їх на 2 більше, ніж попереднього. Скільки ієрогліфів вивчив Михайло за перші 10 днів вивчення китайської мови за описаною схемою?

215. Першим елементом послідовності є найменше двоцифрове число, а кожне наступне число утворюється дописуванням нуля справа до попереднього числа. Запишіть усі елементи цієї послідовності, які не перевищують 100 000. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть знаменник q цієї геометричної прогресії.

216. Задано геометричну прогресію B. Знайдіть: а) b_4, якщо $b_2=3$, $b_3=12$; б) b_{10}, якщо $b_{11}=-10$, $b_{12}=5$.

217. Знайдіть суму перших п’яти елементів геометричної прогресії B, якщо $b_2=-6$, $b_3=12$.

218. Знайдіть знаменник q геометричної прогресії B, якщо $b_{10}=-6$, $b_{12}=-54$, а всі елементи цієї прогресії є від’ємними числами.

219. Сума перших десяти елементів геометричної прогресії B дорівнює 100, а сума перших одинадцяти елементів цієї геометричної прогресії — 80. Знайдіть b_{11}.

220. Відомий знавець анекдотів Михайло Сміх щодня протягом тижня розповідає анекдоти на центральній площі села, причому кожного наступного дня він розповідає їх у два рази більше,

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ніж попереднього. Скільки анекдотів почують від пана Михайла односельці за тиждень, якщо щопонеділка він розповідає три анекдоти?

221. Знайдіть теперішню вартість A та підсумкову вартість S простого звичайного ануїтету, який полягає в щоквартальній сплаті 6000 грн протягом трьох років, якщо норма відсотка $i = 5\,\%$.

222. Банк пропонує щомісячну довічну ренту за річною відсотковою ставкою $r_{12} = 9\,\%$. Знайдіть:
а) розмір щомісячних платежів цієї ренти, якщо її теперішня вартість становить 2,5 млн грн;
б) теперішню вартість цієї ренти, якщо розмір щоквартальних платежів становить 30 тис. грн.



Достатній рівень

223. Задано точки $C(-3;5)$ і $B(1;-2)$. Знайдіть координати образів цих точок за таких геометричних перетворень:
а) тотожного перетворення;
б) паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(-2;3)$;
в) симетрії відносно точки $O(0;0)$;
г) симетрії відносно осі абсцис.
Побудуйте в ПДСК точки C і D та їх образи за вказаних перетворень.

224. Задано точки $P(-5;3)$ і $N(6;-7)$. Знайдіть координати образів цих точок за таких геометричних перетворень:
а) гомотетії із центром у точці $O(0;0)$ і коефіцієнтом $\lambda = \frac{1}{10}$;
б) деформації з коефіцієнтом $k = 5$ до осі ординат;
в) деформації з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ до осі абсцис.

225. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. З'ясуйте, чи будуть вершини A і C симетричними відносно точки O, якщо: а) $ABCD$ — квадрат; б) $ABCD$ — довільна трапеція; в) $ABCD$ — паралелограм.
Відповідь поясніть.

226. Перетворення f є симетрією відносно точки K, за якої $f(C)=D$, причому $C(-2;5)$, а $D(4;-1)$. Знайдіть координати точки K.

227. У рівносторонньому трикутнику ABC проведено лінію PQ, яка з'єднує середини сторін AB й BC відповідно. Доведіть, що перетворення гомотетії f із центром у точці B та коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ переводить трикутник ABC у трикутник PBQ.

228. Знайдіть образ прямої $3x+2y-5=0$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(-2;4)$.

229. Знайдіть образ кола $(x+2)^2+(y-4)^2=16$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(-5;3)$.

230. Перетворення g переводить точку $A(2;0)$ у точку A'. Знайдіть координати точки A', якщо перетворення g є поворотом навколо точки $O(0;0)$ проти руху годинникової стрілки на кут: а) $45°$; б) $60°$; в) $90°$; г) $180°$.

231. На площині задано прямі a і b, які перетинаються в точці O. Побудуйте образ прямої a за симетрії відносно прямої b. Чи буде образ прямої a проходити паралельно прямій b?

232. На площині задано трикутник ABC й точку O. Побудуйте образ трикутника ABC за центральної симетрії відносно точки O, якщо: а) точка O лежить поза межами трикутника ABC; б) точка O лежить всередині трикутника ABC.

233. На площині задано рівносторонній трикутник MNC. Визначте, чи будуть симетріями цього трикутника:

а) тотожне перетворення;

б) центральна симетрія відносно вершини N;

в) осьова симетрія відносно прямої l, яка проходить через вершину M і середину сторони NC;

г) поворот на кут $240°$ відносно точки перетину медіан трикутника.

234. Побудуйте довільний трикутник ABC. Побудуйте образ трикутника ABC за гомотетії із центром у точці A й коефіцієнтом $k=2$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

235. Гомотетія із центром у початку координат точку $A(-4;5)$ переводить у точку $A'(-8;10)$. Знайдіть коефіцієнт гомотетії λ.

236. Паралельне перенесення на вектор $\vec{b}(b_1;b_2)$ переводить точку $M(3;-1)$ у точку $M'(-2;5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$.

237. У ПДСК задано прямокутник із вершинами в точках $A(-3;5)$, $B(4;5)$, $C(4;-2)$, $D(-3;-2)$. Деформація до осі ординат із коефіцієнтом $k=2$ переводить точки A, B, C, D у точки A', B', C', D' відповідно. Переконайтесь, що $A'B'C'D'$ — прямокутник, а потім знайдіть його периметр.

238. Порівняйте вирази.

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ і $\frac{\sqrt{2}}{5}$; в) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ і $\frac{5}{\sqrt{5}}$.

239. Відомо, що $x<y$, причому $x>0$, $y>0$. З'ясуйте, чи правильними є такі нерівності: а) $3x>3y$; б) $-10x>-10y$; в) $x>-y$; г) $x^2<yx$.

240. Оцініть значення виразів $2d$, $2d-1$, $-2d$, $1-2d$, якщо: а) $2<d<3$; б) $-2\leqslant d\leqslant -1$.

241. Задано прямокутник зі сторонами a і b, причому відомо, що $2{,}5<a<3{,}5$ і $3<b<4$. Оцініть значення площі S і периметра P цього прямокутника.

242. Доведіть нерівність.

а) $8a-16-a^2\leqslant 16a$; б) $5x-25-x^2\leqslant -5x$.

243. На фабриці пакують однакові подарункові коробки із цукерками до різдвяних свят. Для пакування кожної коробки потрібні стрічка довжиною a метрів і папір площею b квадратних метрів. Відомо, що $1{,}8<a<2{,}2$ і $0{,}9<b<1{,}1$. Вартість одного метра стрічки становить 12 грн, а вартість одного квадратного метра паперу — 20 грн. Оцініть загальну вартість пакування однієї коробки цукерок.

244. Знайдіть *найбільше* значення виразу $1+4x-x^2$.

245. Відомо, що довжини двох сторін трикутника дорівнюють 5 см і 9 см. Укажіть проміжок значень, яких може набувати довжина третьої сторони цього трикутника.

246. Укажіть, які з поданих нерівностей є рівносильними.

а) $3x-5>7$; б) $6x>24$; в) $x<4$; г) $-3x>12$; д) $9x-15<21$.

247. Укажіть нерівності, які не мають розв'язків.

а) $2x-4>10$; б) $2x+2<2x+5$; в) $5x-1<5x-3$; г) $0x>2$.

248. Розв'яжіть нерівність і вкажіть найбільше натуральне число, яке є її розв'язком.

а) $25-2(x+5)>10x$; б) $8(y-3)<50-12(y+1)$.

249. Розв'яжіть нерівність $3<\frac{2x+1}{5}<6$ і вкажіть усі натуральні значення, які є її розв'язками.

250. Функцію задано формулою $f(x)=-3x+5$. Знайдіть усі значення аргументу x, за яких значення функції є: а) додатними; б) невід'ємними; в) від'ємними; г) недодатними.

251. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases}2(x+12)+3x>-x,\\3(x+5)\geqslant 2(x-10);\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+7\leqslant -2(x-17),\\-2(x+1)+3\leqslant 3(2x-1);\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x-8\leqslant -5(x-8),\\2(x+3)-4\leqslant 4(x-5);\end{cases}$ г) $\begin{cases}4x-2>3,4-2x,\\2(x+3)+1\geqslant -20-x.\end{cases}$

252. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases}x\geqslant -4,\\x<12,\\x\geqslant \frac{1}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}y\leqslant 2,4,\\y>-13,\\y<-5.\end{cases}$

253. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{2x}+\sqrt{4-x}$; б) $y=\sqrt{3x+7,5}+\sqrt{1-x}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

254. Запишіть подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей, розв'яжіть її.

а) $-1 < 4x + 6 \leqslant 16$;
в) $3{,}2 \leqslant 1 - 2x \leqslant 5{,}6$;
б) $5 < 2 - x < 9$;
г) $0{,}5 < 4 - 5x < 4{,}2$.

255. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності.

а) $3x - y + 2 > 0$;
б) $2x - y - 1 < 0$;
в) $x + y - 3 \geqslant 0$.

256. Маса трьох кошенят не більша за 801 г, а маса двох кошенят — не менша від 500 г. Чи може одне із цих кошенят важити: а) 260 г; б) 270 г? Відповідь обґрунтуйте.

257. На рис. 49 зображено графік функції $f(x)$. За даними графіка визначте:

а) область визначення $D(f)$ функції $f(x)$;
б) множину значень $E(f)$ функції $f(x)$;
в) множину, на якій функція спадає.

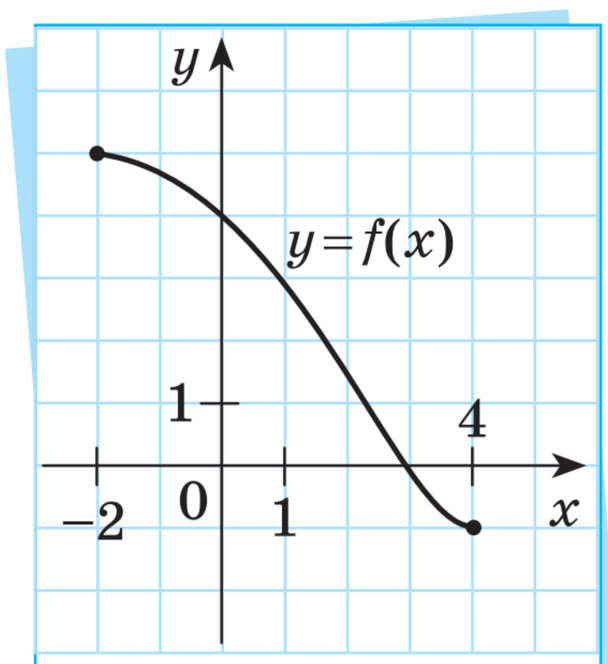


Рис. 49

258. Точки $A(-4;0)$, $B(-3;2)$, $C(-2;1)$, $D(0;3)$, $E(1;0)$ належать графіку функції $y = g(x)$.

а) Побудуйте графік функції $g(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.
б) Знайдіть координати точок A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, які належать образу графіка функції $g(x)$ за деформації з коефіцієнтом $k = 2$ до осі Ox.
в) Побудуйте образ графіка функції $g(x)$, позначивши точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

259. Точки $P(-4;0)$, $Q(-2;-3)$, $R(0;-4)$, $S(2;-3)$, $T(4;0)$ належать графіку функції $y = f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК та з'єднавши їх плавною лінією.
б) Знайдіть координати точок P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за деформації з коефіцієнтом $p = 0{,}5$ до осі Oy.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 на ПДСК та з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

260. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій: а) $y=\sqrt{x+2}$; б) $y=\sqrt{x}+2$; в) $y=-\sqrt{x}$; г) $y=2\sqrt{x}$.

261. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{8}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій: а) $y=\dfrac{8}{x}+2$; б) $y=\dfrac{8}{x+2}$; в) $y=-\dfrac{8}{x}$; г) $y=\dfrac{8}{2-x}$.

262. Побудуйте графік функції $y=x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій: а) $y=(x+3)^2$; б) $y=x^2-1$; в) $y=2x^2$; г) $y=-x^2-4$.

263. Побудуйте графік функції $y=(x-2)^2+1$. Користуючись цим графіком, знайдіть:
а) область визначення функції;
б) множину значень функції;
в) множину, на якій функція зростає;
г) множину, на якій функція спадає.

264. Знайдіть координати вершини й побудуйте ескіз параболи, яка є графіком функції:
а) $y=x^2-6x+1$;
б) $y=2x^2+8x+1$;
в) $y=-x^2+4x+5$;
г) $y=-3x^2-6x-1$.

265. За графіком квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ (рис. 50) укажіть:
а) знак a;
б) координати вершини параболи;
в) нулі функції;
г) проміжки зростання й спадання функції;
д) проміжки знакосталості функції.

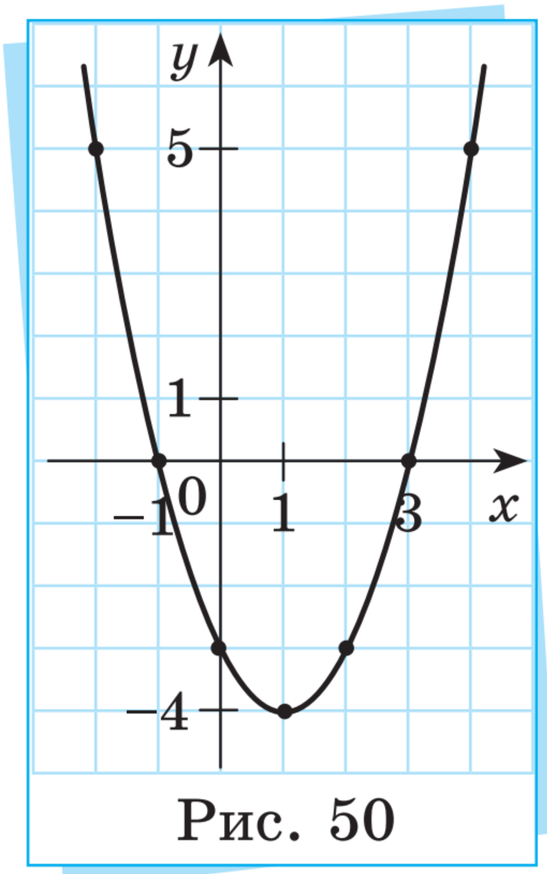


Рис. 50

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

266. Розв'яжіть нерівність.

а) $x^2-8x+15\geqslant 0$; в) $(3x-4)(x-2)<0$;

б) $x^2-7x-18\leqslant 0$; г) $(x-3)(2x-5)>0$.

267. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{x^2+4x}$; в) $y=\sqrt{-3x^2-12x}$; д) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$;

б) $y=\sqrt{-x^2+36}$; г) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$; е) $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$.

268. Розв'яжіть рівняння.

а) $\dfrac{2x+5}{x+2}=0$; б) $\dfrac{2x+3}{x-1}=1$; в) $\dfrac{x}{9-x}=\dfrac{1}{2}$; г) $x-\dfrac{42}{x}=19$.

269. Розв'яжіть нерівність.

а) $\dfrac{2x-1}{x-8}>0$; б) $\dfrac{x-8}{x+3}<0$; в) $\dfrac{5x+1}{x-10}\geqslant 0$; г) $\dfrac{2x+6}{x-5}\leqslant 0$.

270. Аліса може підготувати дослідницький проєкт на 6 днів швидше, ніж її однокласниця Майя. Працюючи разом, дівчата завершать проєкт за 10 днів. За скільки днів може підготувати цей проєкт кожна учениця, працюючи самостійно?

271. Відстань між Львовом і Чернівцями становить 270 км. Автобус вирушає зі Львова о 9:30 і має прибути до Чернівців не пізніше 13:00. Складіть нерівність, яка є математичною моделлю цієї задачі. Визначте, з якою швидкістю має рухатись автобус, щоб прибути до пункту призначення вчасно.

272. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ y=2x+1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y^2-x=3, \\ x+y=7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy=6, \\ x+y=5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y=10, \\ x-y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x+y=5; \end{cases}$

273. Учні й учениці 9-Б класу вирішили створити квітник біля школи на честь свого випуску. Для цього їм виділили ділянку прямокутної форми. Відомо, що площа ділянки становить 8,75 м^2,

а довжина огорожі навколо квітника — 12 м. Знайдіть довжину та ширину квітника.

274. Зобразіть на координатній площині всі розв'язки нерівності.

а) $y \leqslant -x^2 - 4x + 1$;
в) $y < x^2 - 2x - 8$;
б) $y > x^2 + 2x - 5$;
г) $y \geqslant x^2 + 5x + 6$.

275. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей.

а) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$
б) $\begin{cases} y < x^2, \\ x > 3; \end{cases}$
в) $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ x < 4. \end{cases}$

276. Укажіть види відносних показників.

а) У районі на кожну 1000 учнів і учениць шкіл припадає 1200 підручників.

б) У бібліотеці на кожні 100 книжок — 15 дитячих видань.

277. На деякому виробництві показник планового завдання $\text{ППЗ} = 1{,}5$, а показник виконання плану $\text{ПВП} = 1{,}3$. Обчисліть показник динаміки ПД.

278. За планом, за звітний період фірма мала виготовити 500 виробів, але через поломку двох конвеєрних ліній фактично виготовила тільки 425 виробів. Знайдіть показник виконання плану. На скільки відсотків недовиконано план?

279. Планове завдання щодо обсягу виробництва на підприємстві «Прогрес» на 2025 р., порівнюючи з фактичним обсягом виробництва за 2024 р., становить 120 %. Виконання плану в 2025 р. — 95 %. Знайдіть показник динаміки.

280. На міжнародній освітній конференції в залі «Альфа» може бути розміщено на 20 % менше учасників, ніж у залі «Омега». Скільки учасників буде розміщено в залі «Альфа», якщо в залі «Омега» розміщується 500 осіб?

281. Під час шкільного ярмарку проведено опитування серед 64 учнів і учениць щодо їхніх улюблених напоїв. Результати такі: газовані напої — 20 осіб, сік — 18 осіб, какао — 16 осіб, чай — 10 осіб. Знайдіть усі відносні показники структури та подайте їх у відсотках.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

282. За сім днів спостережень в Антарктиді було зафіксовано такі показники температури о 12:00:

01.10. 2025	02.10. 2025	03.10. 2025	04.10. 2025	05.10. 2025	06.10. 2025	07.10. 2025
−8 °C	−11 °C	−12 °C	−8 °C	−9 °C	−7 °C	−4 °C

Обчисліть середнє значення температури в Антарктиді за ці сім днів. Відповідь округліть до десятих.

283. У школі протягом чотирьох днів учні й учениці щодня економили в середньому 2,4 кВт·год електроенергії на день, вимикаючи світло під час перерв. У п'ятницю, коли проходила акція «Година без електрики», удалося зекономити 6 кВт·год. Скільки в середньому електроенергії було зекономлено на день протягом п'яти днів?

284. У січні магазин продавав лижі зі знижкою 15 % від грудневої ціни, а в лютому — зі знижкою 30 % від січневої ціни. Яка середня знижка на лижі була в цьому магазині за січень і лютий? Відповідь округліть до десятих.

285. Інвестиційна компанія аналізує два стартапи — «ТехноСвіт» і «ЕкоФлора». Реалізація кожного із цих проєктів може піти за несприятливим, помірним або сприятливим сценарієм. Прибутки у випадку реалізації кожного із цих сценаріїв для стартапу «ТехноСвіт» становлять 100 млн грн, 140 млн грн, 180 млн грн відповідно, а для стартапу «ЕкоФлора» — 120 млн грн, 140 млн грн, 160 млн грн відповідно. За допомогою дисперсії визначте, який зі стартапів є менш ризикованим для інвестора.

286. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо градусна міра кожного його внутрішнього кута дорівнює 160°?

287. Сума внутрішніх кутів деякого правильного многокутника дорівнює 1260°. Визначте:

а) кількість сторін цього многокутника;

б) градусну міру внутрішнього кута цього многокутника;

в) градусну міру зовнішнього кута цього многокутника;

г) кількість діагоналей цього многокутника.

288. Коло вписано в квадрат зі стороною 8 см. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

289. Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною 6 см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

290. Для шкільного концерту сцену, що має форму прямокутника з розмірами 6 м і 3 м, потрібно застелити килимовими плитками прямокутної форми. Довжина кожної плитки 40 см, а ширина 30 см. Скільки плиток знадобиться для покриття сцени?

291. Гострий кут паралелограма дорівнює 35°, а довжина його сторін 7 см і 9 см. Знайдіть довжину висоти цього паралелограма, проведеної до більшої сторони.

292. Більша сторона паралелограма дорівнює 8 см, а висоти паралелограма, проведені з однієї його вершини, дорівнюють 4 см і 6 см. Знайдіть меншу сторону цього паралелограма.

293. Площа трикутника дорівнює 72 $см^2$. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його сторони довжиною 16 см.

294. Периметр ромба дорівнює 144 см, а градусна міра одного з його кутів — 150°. Знайдіть площу цього ромба та його висоту.

295. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 14 см, а градусна міра одного з її кутів — 120°. Знайдіть площу цієї трапеції.

296. До шкільного свята планується виготовити банер, який буде розміщено на фасаді актової зали. Учні й учениці вибирають форму банера з трьох варіантів:

а) прямокутник з розмірами 4 м і 2 м;

б) рівнобічна трапеція з основами 3 м і 5 м та висотою 2 м;

в) ромб зі стороною 3 м й гострим кутом 60°.

Який із запропонованих банерів забезпечує найбільшу площу для розміщення написів і малюнків?

297. Навколо прямокутного трикутника з катетами 10 см і 24 см описано коло. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

298. Архітекторка хоче спроєктувати круглий ігровий майданчик так, щоб він якнайкраще розташувався на ділянці міського парку, яка має форму прямокутного трикутника з катетами

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

20 м і 21 м. Визначте найбільший можливий радіус майданчика, який можна розмістити всередині цієї ділянки. Обчисліть, скільки квадратних метрів займатиме цей майданчик. Відповідь округліть до сотих; $\pi \approx 3{,}14$.

299. Як зміниться площа круга, якщо його радіус: а) збільшити в 3 рази; б) зменшити в 2 рази.

300. У шкільній теплиці планують замінити дві круглі труби опалювальної системи, діаметри яких становлять 5 см і 7 см, на одну нову трубу, причому площа поперечного перерізу нової труби має дорівнювати сумі площ поперечних перерізів вихідних труб. Яким має бути діаметр нової труби? Відповідь округліть до десятих.



301. Площа сектора круга, який визначається центральним кутом $108°$, дорівнює 30π см^2. Знайдіть радіус цього круга.

302. Довжини сторін трикутника дорівнюють 7 см, 8 см, 9 см. Знайдіть косинуси кутів цього трикутника. Цей трикутник є гострокутним, тупокутним чи прямокутним?

303. У паралелограма $ABCD$ $AB = 7\sqrt{2}$ см, $AD = 9$ см, $\angle BAD = 45°$. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма $ABCD$.

304. У трикутника ABC $\angle ABC = 80°$, $\angle BCA = 50°$, $AC = 18$ см. Знайдіть довжини сторін AB і BC та градусну міру кута BAC цього трикутника. (Примітка: під час розрахунків застосовуйте округлення до сотих.)

305. Довжина сторони CE трикутника CDE дорівнює 18 см, а $\angle CDE = 120°$. Обчисліть радіус кола, описаного навколо цього трикутника, і площу круга, обмеженого цим колом.

306. Обчисліть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см, 15 см.

307. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а її висота — 3 см. Знайдіть площу повної поверхні цієї призми.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

308. В основі трикутної призми лежить трикутник зі сторонами 6 см, 8 см, 10 см. Знайдіть висоту призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 240 см^2.

309. Периметр бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює 36 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо сторона її основи — 10 см.

310. Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60 см, а довжина її бічного ребра — 20 см. Знайдіть довжину апофеми піраміди; відповідь округліть до сотих. Обчисліть площу повної поверхні цієї піраміди.

311. Циліндр утворено обертанням прямокутника $ABCD$ зі сторонами $AB=6$ см і $AD=18$ см навколо сторони AB. Обчисліть площу повної поверхні утвореного циліндра.

312. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 180π, а довжина його твірної — 15 см. Обчисліть довжину висоти цього конуса та площу його повної поверхні. Відповідь округліть до десятих, вважаючи, що $\pi\approx 3{,}14$.

313. Під час технічного обслуговування рівноможливо в будь-який момент часу з 09:00 до 12:00 в університеті можуть вимкнути електропостачання. Якою є ймовірність того, що електропостачання вимкнеться між 11:00 і 12:00?

314. У трикутник, площа якого дорівнює 72 см^2, а периметр — 36 см, вписано коло. У цьому трикутнику навмання вибирають точку. Обчисліть імовірність того, що ця точка потрапить усередину вписаного кола. Вважайте, що $\pi\approx 3{,}14$. Відповідь округліть до тисячних.

315. Знайдіть одну з можливих закономірностей і запишіть три наступні елементи нескінченної послідовності: 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, ...

316. У числовій послідовності $x_1=10$, $x_2=5$. Укажіть формулу, яка *може* бути формулою n-го елемента цієї послідовності.

а) $x_n=10^n$; б) $x_n=15-5n$; в) $x_n=\dfrac{10}{2^{n-1}}$; г) $x_n=10n$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

317. За планом підготовки до змагань плавець має тренуватися щодня протягом десяти днів, пропливаючи кожного дня певну відстань у басейні. Першого дня він має пропливти 250 м, а потім щодня збільшувати відстань на однакову кількість метрів, щоб пропливти 700 м на десятий день. На скільки метрів більше має пропливати плавець щодня згідно з планом тренувань?

318. Числову послідовність задано формулою n-го елемента $y_n = 12n - 130$. Скільки елементів цієї послідовності є додатними й меншими від 300?

319. В арифметичній прогресії A відомо, що $a_6 = 7$, $a_8 = 13$. Знайдіть її перший елемент a_1 і різницю d.

320. В арифметичній прогресії A відомо, що $a_n = -100$. Знайдіть n, якщо її перший елемент $a_1 = 12$, а різниця $d = -4$.

321. В арифметичній прогресії четвертий елемент дорівнює 25, а різниця прогресії $d = 5$. Обчисліть суму перших десяти елементів цієї прогресії.

322. За якого значення параметра a значення виразів $3a$, $2a + 3$, $10 - a$ будуть трьома послідовними елементами деякої арифметичної прогресії? Знайдіть різницю d цієї прогресії.

323. Квіти на клумбі розташовані рядами, причому в першому ряду росте 10 квіток, а в кожному наступному ряду — на дві квітки більше, ніж у попередньому. Скільки рядів квітів на цій клумбі, якщо всього на ній росте 252 квітки?

324. Добуток сьомого й дев'ятого елементів геометричної прогресії дорівнює 36. Усі елементи цієї прогресії є від'ємними числами. Знайдіть восьмий елемент прогресії.

325. За якого додатного значення параметра a значення виразів $2a - 1$, $\sqrt{a}$, 5 будуть послідовними елементами деякої геометричної прогресії? Знайдіть знаменник q цієї прогресії.

326. Дослідники експериментально встановили, що кількість коропів в озері щороку зростає приблизно в 1,25 раза. 1 травня 2025 р. в озеро випустили перших 500 коропів. Скільки приблизно коропів буде в цьому озері 1 травня 2030 р. за умови, що темп зростання популяції коропів залишатиметься сталим? Для обчислень скористайтеся калькулятором. Відповідь округліть до цілих.

327. У геометричній прогресії B знаменник $q=\frac{3}{2}$, а сума її чотирьох перших елементів дорівнює $S_4=65$. Знайдіть перший елемент цієї прогресії b_1.

328. Знайдіть суму всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії B, якщо $b_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

329. Родина Косянчуків сплачувала кредит у банку платежами в розмірі 5000 грн наприкінці кожного місяця протягом п'яти років. Знайдіть суму позики родини Косянчуків, якщо гроші в цьому банку коштують 12 % річних щомісяця.

330. Родина Бугайців кладе на депозит у банку наприкінці кожного місяця 4000 грн, а гроші в цьому банку коштують 9 % річних щомісяця. З'ясуйте, яку суму в такий спосіб накопичить родина Бугайців за три роки, якщо:
а) на їхньому рахунку спочатку зовсім не було грошей;
б) на початку серії платежів на їхньому рахунку було 50 000 грн.



Високий рівень

331. Точці $A(2;-4)$ за симетрії відносно початку координат відповідає точка B, а точці B за симетрії відносно осі абсцис — точка C. Знайдіть координати точок B і C. Відповідь обґрунтуйте.

332. Доведіть, що точки $M(0;a)$ і $N(-a;0)$ є симетричними відносно прямої $y=-x$.

333. Точка $M'(-4;\ldots)$ є образом точки $M(\ldots;1)$ за гомотетії із центром $Q(2;2)$ і коефіцієнтом $k=2$. Відновіть пропущені координати. Відповідь обґрунтуйте.

334. Доведіть, що існує поворот, за якого образом кожної вершини квадрата буде сусідня вершина. Укажіть центр і кут такого повороту.

335. Кожній точці $A(x;y)$ площини поставили у відповідність точку $A_1(-x;y)$. Доведіть, що задане перетворення є рухом.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

336. Центральна симетрія f переводить точку $M(-3;7)$ у точку $M'(1;-1)$. Знайдіть координати точки N, якщо $f(N)=N'$ і $N'(3;-7)$.

337. Знайдіть образи кола $(x-2)^2+(y+4)^2=16$ і прямої $2x-7y+3=0$:

а) за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(-5;2)$;

б) за симетрії відносно точки $O_1(-3;5)$.

338. Задано коло й точку, яка лежить поза цим колом. Доведіть, що образом заданого кола за гомотетії із центром у даній точці й довільним коефіцієнтом k буде коло.

339. Кожній точці $M(x;y)$ площини поставили у відповідність точку $M_1(-5x;5y)$. Доведіть, що задане перетворення є перетворенням подібності.

340. За повороту навколо точки A на кут $90°$ проти руху годинникової стрілки кінець B відрізка BC переходить у точку C, а за повороту навколо точки C на кут $90°$ проти руху годинникової стрілки точка A переходить у точку D. Доведіть, що точки A, B, C, D є вершинами квадрата.

341. На стороні прямокутника $ABCD$ позначили точку M (рис. 51). Проведіть через точку M пряму, яка ділить прямокутник на два рівні многокутники. Відповідь обґрунтуйте.

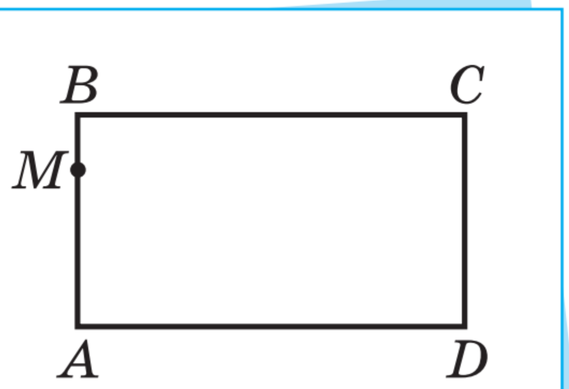


Рис. 51

342. Доведіть, що трикутник, який має дві осі симетрії, є рівностороннім.

343. Доведіть, що чотирикутник, який має рівно чотири осі симетрії, є квадратом.

344. Побудуйте ромб, точкою перетину діагоналей якого є дана точка, а три його вершини розташовані на трьох даних попарно непаралельних прямих.

345. Доведіть нерівність $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, де $a>0$, $b>0$.

346. Доведіть нерівність $a^2+b^2+9\geqslant ab+3a+3b$.

347. Доведіть нерівність $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$, де $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

348. Порівняйте значення виразів $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ і $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, не користуючись калькулятором.

349. Доведіть нерівність $\sqrt{(a+u)^2+(b+v)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{u^2+v^2}$.

350. Розв'яжіть нерівність.

а) $(x+3)^2 < (x+1)(x+5)$; б) $(x-2)^2 \geqslant (x+1)(x-1)$.

351. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{-15-5x}$; в) $f(x)=\sqrt{21-7x}+\dfrac{2-x}{\sqrt{3+2x}}$;

б) $g(x)=\dfrac{x-6}{\sqrt{6-4x}}$; г) $v(x)=\dfrac{\sqrt{36-4x}-2x}{\sqrt{6-5x}}$.

352. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $-\sqrt{3} < (\sqrt{3}-2)x+2 \leqslant \sqrt{3}$; б) $-\sqrt{7} \leqslant (\sqrt{7}-2)x-2 < \sqrt{7}$;

353. Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $x^2-8x+2a=0$: а) має два різні корені; б) не має коренів; в) має корені.

354. Запишіть дану подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей і розв'яжіть її.

а) $(x-3)^2 < (3+x)x \leqslant 12+x^2$; б) $(x-3)x \leqslant (x-4)^2 < 2x+x^2$.

355. Знайдіть усі значення a, за яких подана система нерівностей:
а) має розв'язки;
б) не має розв'язків;
в) має розв'язком тільки одне число.

$$\begin{cases} 3-2x \leqslant a-x, \\ 4x-1 \geqslant 6x+9. \end{cases}$$

356. Зобразіть у ПДСК множину всіх розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x+y+1 \leqslant 0, \\ 6x+2y+4 \geqslant 0, \\ x \geqslant -2, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Якою геометричною фігурою є ця множина?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

357. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання й спадання функції та множину значень функції.

а) $y=(x-5)^2-3$; в) $y=-(x-4)^2+2$;

б) $y=(2-x)^2+1$; г) $y=3-(x+6)^2$.

358. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть множину значень функції.

а) $y=\sqrt{x-2}+3$; в) $y=-\sqrt{2x}-2$;

б) $y=2\sqrt{x+1}-4$; г) $y=\sqrt{3x-6}+1$.

359. Побудуйте графік функції.

а) $y=\dfrac{1}{2-x}+1$; б) $y=\dfrac{2}{x+3}-2$; в) $y=\dfrac{-2}{x-5}+1$; г) $y=\dfrac{1}{2x-4}-4$.

360. Знайдіть усі значення p і q, за яких вершиною параболи $y=x^2+px+q$ є точка $(-5;-3)$.

361. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання та спадання функції.

а) $y=-3x^2+6x+1$; б) $y=0{,}5x^2-x+2$.

362. Побудуйте графік функції $y=-2x^2-8x+1$. Користуючись графіком, знайдіть усі значення a, для яких рівняння $-2x^2-8x+1=a$ має корені.

363. Знайдіть нулі даної функції та побудуйте її графік. Користуючись графіком функції, укажіть проміжки її знакосталості.

а) $y=-x^2-x+2$; б) $y=0{,}5x^2+2x-6$.

364. Побудуйте графік функції $y=2x^2-x+1$ і доведіть, що дана функція набуває лише додатних значень.

365. Побудуйте графік функції $y=-2x^2+2x-1$ і доведіть, що дана функція набуває лише від'ємних значень.

366. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{2x^2-5x-7}$; б) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$.

367. Знайдіть усі значення m, за яких рівняння $x^2+2mx+3m-2=0$: а) має корені; б) не має коренів; в) має два різні корені.

368. Знайдіть усі значення a, за яких нерівність $3x^2+ax+3<0$ не має розв'язків.

369. Знайдіть усі значення a, за яких розв'язками нерівності $-2x^2+3ax-8\leqslant 0$ будуть усі дійсні числа.

370. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a.

а) $-x^2+3ax>0$; б) $x^2-(a+3)x+3a\leqslant 0$.

371. Перша бригада може виконати певну роботу на 10 днів швидше, ніж друга, а разом вони виконають цю роботу за 12 днів. За скільки днів може виконати цю роботу кожна бригада, працюючи окремо?

372. Є шматок сплаву олова з міддю загальною масою 12 кг, який містить 45 % міді. Скільки олова потрібно додати, щоб отримати сплав, який містить 40 % міді?

373. Розв'яжіть нерівність.

а) $\dfrac{x-3}{4x-x^2}\geqslant 0$; б) $\dfrac{25-x^2}{2x-3}\leqslant 0$; в) $\dfrac{5x}{4-x^2}>0$; г) $\dfrac{x^2+3x}{8-2x}<0$.

374. Розв'яжіть нерівність.

а) $\dfrac{9}{x}\geqslant x$; б) $\dfrac{3}{2-x}>x+2$; в) $\dfrac{3x+4}{x-1}\leqslant x+8$.

375. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{5x-x^2}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-16}{2x+5}}$; в) $y=\sqrt{2x-\dfrac{8}{x-3}}$.

376. Розв'яжіть нерівність.

а) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-6x+8}<0$; б) $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-2x+2}\geqslant 0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

377. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

378. Маємо два сплави, які містять мідь. У першому сплаві маса міді — 6 кг, а в другому — 12 кг. Відсотковий склад міді в першому сплаві на 40 % менший, ніж у другому. Після того як їх сплавили, отримали новий сплав, що містить 36 % міді. Знайдіть масу кожного сплаву.

379. Знайдіть усі значення параметра a, за яких задана система:

а) має два різні розв'язки;
б) має єдиний розв'язок;
в) не має розв'язків.

1) $\begin{cases} x^2 - y = 5, \\ x - y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ x + y = a: \end{cases}$

380. Знайдіть область визначення функції.

а) $y = \sqrt{4x - x^2} + \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

381. За планом підприємство в 2025 р. мало випустити продукції на 8 % більше, ніж у 2024 р., а фактично випустило продукції на 18,8 % більше, ніж у 2024 р. Визначте показник виконання плану випуску продукції. На скільки відсотків перевиконано план?

382. Дві працівниці банку «Підтримка» виконують однакові операції з обслуговування клієнтів. Протягом трьох годин вони обслуговували клієнтів, причому перша працівниця витрачала на кожного клієнта 20 хв, а друга — 30 хв. Знайдіть:

а) скільки часу в середньому потрібно на обслуговування одного клієнта в цьому банку;
б) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
в) середнє квадратичне відхилення (за потреби відповіді округліть до сотих).

383. Доведіть, що всі діагоналі правильного шестикутника є рівними.

384. Доведіть, що зовнішній кут правильного n-кутника дорівнює його центральному куту, який спирається на сторону.

385. П'ятикутник $ABCDE$ — правильний (рис. 52). Доведіть, що п'ятикутник $HKLFG$ теж правильний.

386. Від кожної вершини квадрата $ABCD$ відклали відрізки, які дорівнюють половині його діагоналі. Доведіть, що отримані вісім точок є вершинами правильного восьмикутника (рис. 53).

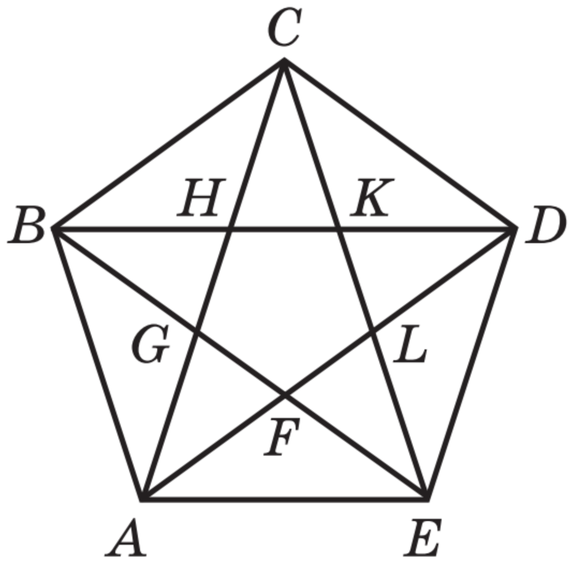


Рис. 52

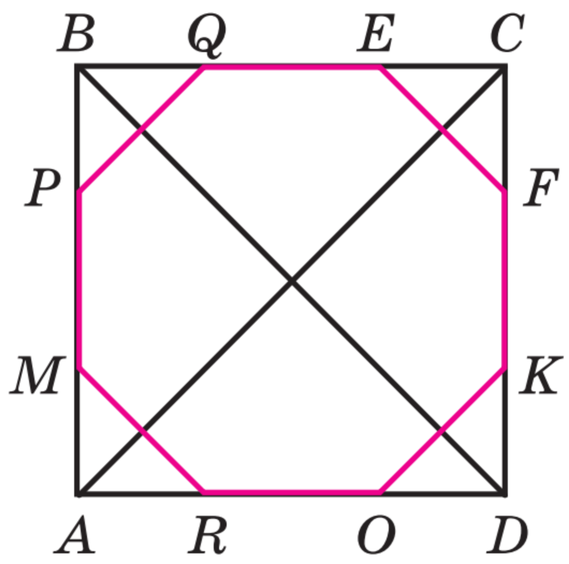


Рис. 53

387. Площа прямокутника дорівнює 24 см^2. Знайдіть площу чотирикутника з вершинами в серединах сторін прямокутника.

388. Доведіть, що діагоналі розбивають паралелограм на чотири рівновеликі трикутники.

389. Пряма, проведена через вершину C трапеції $ABCD$ паралельно діагоналі BD перетинає продовження основи AD у точці M. Доведіть, що трикутник ACM рівновеликий трапеції $ABCD$.

390. Основи трапеції дорівнюють a і b $(a > b)$, а гострий кут дорівнює $45°$. Знайдіть площу трапеції.

391. Медіани AM і CN трикутника ABC перетинаються в точці K. Знайдіть площу трикутника BKN, якщо площа трикутника ABC дорівнює 24 см^2.

392. На сторонах прямокутного трикутника як на діаметрах побудовано три півкруги. Доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на катетах.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

393. Точка дотику вписаного круга ділить гіпотенузу прямокутного трикутника на відрізки, довжини яких дорівнюють 4 см і 6 см. Знайдіть площу круга, вписаного в цей трикутник.

394. Медіани трикутника ABC, проведені з вершин B і C, дорівнюють 6 см і 9 см та перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle BMC = 120^\circ$. Знайдіть сторони трикутника.

395. Довжини сторін трикутника дорівнюють 10 см, 13 см, 13 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної до сторони 13 см.

396. Коло, вписане в прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, дотикається до гіпотенузи в точці M. Знайдіть відстань від точки M до вершини прямого кута.

397. У колі проведено хорди AB і BC. Відомо, що $AB = \sqrt{3}$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 60^\circ$. Знайдіть довжину хорди кола, яка ділить кут ABC навпіл.

398. Знайдіть площу повної поверхні прямої трикутної призми, якщо її основою є прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см, а діагональ найменшої бічної грані цієї призми дорівнює 13 см.

399. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди з площею основи $16\sqrt{3}$ см^2 і бічним ребром 5 см.

400. Висота циліндра на 2 см більша за його радіус, а площа повної поверхні дорівнює 80π см^2. Знайдіть радіус основи й висоту циліндра.

401. Твірна конуса на 2 см більша за його радіус, а площа повної поверхні дорівнює 24π см^2. Знайдіть радіус основи й висоту конуса.

402. Випадковим чином вибирають одне із чисел, яке є розв'язком нерівності $|x| \leqslant 8$. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться розв'язком нерівності $3x - 1 \geqslant 5$.

403. Навмання вибирають два невід'ємних числа, кожне з яких не перевищує 6. Знайдіть імовірність того, що сума цих чисел не перевищує 3.

404. Визначте, скільки від'ємних елементів має послідовність, задана формулою n-го елемента $a_n = 2n^2 - 3n - 20$.

405. Визначте, скільки додатних елементів має послідовність, задана формулою n-го елемента $a_n = -3n^2 + 10n + 8$.

406. Знайдіть усі значення змінних, за яких значення виразів $x^2 - 6$; $3x + 1$; $x + 12$ будуть послідовними елементами арифметичної прогресії:.

407. Між числами -6 і -18 вставте два числа так, щоб одержати чотири послідовні елементи арифметичної прогресії. Укажіть різницю цієї прогресії.

408. Сума трьох чисел, які є послідовними елементами арифметичної прогресії, дорівнює 12. Якщо третє число збільшити на 2, то одержимо послідовні елементи геометричної прогресії. Знайдіть ці числа.

409. Сума трьох чисел, які є послідовними елементами геометричної прогресії, дорівнює 14. Якщо від третього числа відняти 2, то одержимо послідовні елементи арифметичної прогресії. Знайдіть ці числа.

410. Обчисліть.

а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \ldots, \ n \in N$;

б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \ldots, \ n \in N$.

411. Пан Василь вирішив придбати новий мікроавтобус у кредит. Вартість мікроавтобуса в автосалоні становить 30 тис. доларів. Кредитна програма банку передбачає придбання мікроавтобуса на таких умовах: одразу сплачується 25 % вартості автомобіля, а потім протягом трьох років наприкінці кожного кварталу потрібно вносити однакові платежі. Знайдіть розмір цих платежів, якщо гроші в цьому банку коштують 8 % річних щоквартал у.

412. Пані Галина кладе на накопичувальний рахунок у банк певну однакову суму R грн щомісяця й планує це робити протягом 20 років, а потім отримувати довічну ренту в розмірі 40 тис. грн щомісяця з накопиченого капіталу. Банк нараховує відсотки за ставкою 12 % річних щомісяця й сплачує ренту за такою самою відсотковою ставкою і з тією самою періодичністю. Знайдіть потрібне для пані Галини значення R.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкти за наведеними нижче схемами.

Проєкт до інтегрованого модуля 5. Многокутники та їх використання

Етап 1. Самостійно або з допомогою вчителя / вчительки сформуйте групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть у групах разом із учителем / учителькою тематику доцільного та цікавого для кожної групи дослідження, що стосується використання многокутників у побуті, мистецтві та повсякденному житті, складіть план дослідження та спрогнозуйте його можливі результати.

Етап 3. Проведіть дослідження щодо використання многокутників у повсякденному житті, побуті й мистецтві у формі спостереження, пошуку належних матеріалів, аналізу історії розвитку побутових, повсякденних і промислових товарів і механізмів, живопису, скульптури, архітектури, народних промислів тощо.

Етап 4. Спробуйте проаналізувати, як ефективно застосовувати многокутники (зокрема, правильні многокутники) та їх властивості для досягнення кінцевої мети у вашому дослідженні. Обґрунтуйте, чому саме такі многокутники та їх властивості доцільно використовувати.

Етап 5. За можливості виготовте певні побутові предмети чи твори мистецтва або виконайте технічне креслення об'єктів чи механізмів із повсякденного життя, в яких використано многокутники, зокрема правильні многокутники. Поясніть, як саме ви використали властивості многокутників.

Етап 6. Оформте результати дослідження у вигляді презентації, відеоролика або театралізованого виступу. Представте результати дослідження учням і ученицям свого класу на уроці математики, фізики, хімії, біології, інформатики, технологій, мистецтва, бінарному уроці тощо.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку в своїй групі (або проведіть саморефлексію), а потім з учителем / учителькою у класі. Визначте позитивні та проблемні моменти, напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності щодо виконання та представлення проєктів.

Проєкт до інтегрованого модуля 6 «Тіла обертання в побуті та мистецтві»,
Проєкт до інтегрованого модуля 7 «Використання комп'ютера для фінансових розрахунків»:



rnk.com.ua/114538

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ВІДПОВІДІ

Розділ 5. ПЛОСКІ МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ. ПЛОЩА КРУГА

§ 14. Многокутники, правильні многокутники. Вписані й описані многокутники

Тренажерний зал

1. а) Трикутник, опуклий; б) чотирикутник, неопуклий; в) п'ятикутник, неопуклий; г) шестикутник, опуклий.

2. а) Трикутник, опуклий; б) чотирикутник, опуклий; в) п'ятикутник, неопуклий; г) шестикутник, неопуклий.

3. 1) A, B, E, G, F; 2) C, D. **4.** 1) K, L, M, P, R, S; 2) N, D, O.

5. Сторони, наприклад, LM, MP, PR; не сторони LR, KM, KP.

6. Сторони, наприклад, AB, BE, FG; не сторони AE, BF, BG.

7. AE, BF, BG. **8.** LR, KM, KP. **9.** 3; 4. **10.** 4; 5.

11. а) 20; б) 54; в) 0; г) 2. **12.** а) 27; б) 170; в) 2; г) 2.

13. а) 720°; б) 1800°; в) 360°; г) 360°.

14. а) 540°; б) 1440°; в) 180°; г) 360°.

15. а) 5; б) 14; в) 35. **16.** а) 9; б) 44; в) 77. **17.** 1080°. **18.** 1260°.

19. а) 135°; б) 150°; в) 162°. **20.** а) 140°; б) 144°; в) 157,5°.

21. а) 72°; б) 40°; в) 24°. **22.** а) 45°; б) 30°; в) 20°.

23. $R=12$; $r=6\sqrt{3}$. **24.** $R=5\sqrt{2}$ см; $r=5$ см.

25. $R=6$ см. **26.** $r=5\sqrt{3}$ см. **27.** 15 сторін. **28.** 18 сторін.

29. а) 8 сторін; б) 135°; в) 45°; г) 20.

30. а) 12 сторін; б) 150°; в) 30°; г) 54.

31. а) $R=3\sqrt{2}$; $r=3$; б) $a=4\sqrt{2}$; $r=2\sqrt{2}$; в) $a=4$; $R=2\sqrt{2}$.

32. а) $R=2\sqrt{3}$; $r=\sqrt{3}$; б) $a=3\sqrt{3}$; $r=1{,}5$; в) $a=4\sqrt{3}$; $R=4$.

33. $\angle AKB=36°$. **34.** $\angle AKB=108°$, $\angle KAB=\angle KBA=36°$.

35. а) 14; б) 154,3°; 15,7 см. **36.** а) 9; б) 140°; 37,1 см.

37. $3\sqrt{3}$ см. **38.** 12 см. **39.** $30\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **40.** 11 см.

45. $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **46.** $a\sqrt{3}$, $2a$.

49. Ні. Наприклад, прямокутник (який не є квадратом), вписаний у коло, має всі рівні кути, але не є правильним.

50. Ні. Наприклад, ромб (який не є квадратом), описаний навколо кола, має всі рівні сторони, але не є правильним.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 3,5. **2.** $D(y)=[0;4)\cup(4;7,5]$. **3.** 21,9. **4.** 25 см × 40 см. **5.** Так. Наприклад, перший спосіб: $31+73-3+1-2=100$; другий спосіб: $(3-1)\cdot(7+3)\cdot(3\cdot1+2)=100$.

§ 15. Площі многокутників

Тренажерний зал

1. а) У 8 разів; б) у 7 разів; в) у 6 разів; г) у 5 разів.
2. а) У 9 разів; б) у 8 разів; в) у 8 разів; г) у 7 разів.
3. а) 17 кв. од.; б) 18 кв. од.; в) 19 кв. од.
4. а) 19 кв. од.; б) 22 кв. од.; в) 16 кв. од.
5. а) $a=6$; $h=4$; $S=24$ б) $a=4$; $h=5$; $S=20$; в) $a=6$; $h=7$; $S=42$.
6. а) $a=5$; $h=3$; $S=15$; б) $a=7$; $h=8$; $S=56$; в) $a=5$; $h=7$; $S=35$.
7. а) $a=6$; $h=4$; $S=12$; б) $a=5$; $h=7$; $S=17,5$; в) $a=6$; $h=3$; $S=9$.
8. а) $a=9$; $h=4$; $S=18$; б) $a=6$; $h=7$; $S=21$; в) $a=5$; $h=6$; $S=15$.
9. а) $a=11$; $b=7$; $h=4$; $S=36$; б) $a=10$; $b=6$; $h=5$; $S=40$; в) $a=7$; $b=12$; $h=8$; $S=76$.
10. а) $a=16$; $b=10$; $h=5$; $S=65$; б) $a=9$; $b=6$; $h=8$; $S=60$; в) $a=8$; $b=5$; $h=6$; $S=39$.
11. 90 см^2. **12.** 56 см^2. **13.** 41 см^2. **14.** 38 см^2.
15. а) 44 кв. од.; надлишкова сторона 5; б) 80 кв. од.; надлишкова висота 6; в) 36 кв. од.; надлишковий кут 45°.
16. а) 90 кв. од.; надлишкова висота 8; б) 112 кв. од.; надлишковий кут 45°; в) 100 кв. од.; надлишкова сторона 13.
17. а) 5 см^2; б) 3 см^2; в) 5 см^2; рівновеликі *а* і *в*.
18. а) 3 см^2; б) 4 см^2; в) 4 см^2; рівновеликі *б* і *в*.
19. 24 см^2. **20.** $60\sqrt{3}$ см^2. **21.** 280 см^2. **22.** 210 см^2.
23. а) 14 см^2; б) 20 см^2; в) 12,5 см^2. **24.** а) 18 см^2; б) 14 см^2; в) 12,5 см^2.
25. 800. **26.** 375. **27.** $2\sqrt{3}$. **28.** $3\sqrt{2}$. **29.** 10 см. **30.** 7,5 см.
31. 6 см. **32.** 8 см. **33.** 128 см^2; 8 см. **34.** $200\sqrt{3}$ см^2; $10\sqrt{3}$ см.
35. 36 см^2. **36.** 72 см^2. **37.** 14 см^2. **38.** 21 см^2. **43.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **44.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
51. 96 см^2. **52.** $\left(48+16\sqrt{3}\right)$ см^2.
56. 49 см^2. **57.** 410 см^2. **58.** $72\left(\sqrt{2}+1\right)$ см^2.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $2\sqrt{5}$; б) $\sqrt{3}$; в) $4+\sqrt{6}$; г) $\sqrt{11}-\sqrt{8}$. **2.** а) $x=\frac{1}{4}$; б) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. **3.** *Вказівка.* Використайте комбінаторне правило множення й проведіть доведення методом від супротивного. **4.** Довжина червоної лінії — 30π см, синьої лінії — 12π см. **5.** 57 304.

§ 16. Площа круга та його частин

Тренажерний зал

1. а) OA; OC; OD; OE; OF; б) AD; CF; в) AB; AD; CF; DE.
2. а) OL; ON; OR; б) MR; в) LK; MR; NP.
3. а) Сектор; б) сегмент; в) сектор і сегмент.
4. а) Сегмент; б) сектор і сегмент; в) сектор.
9. а) 5π см; б) 7π м; в) 12π км; г) $0{,}7\pi$ дм.
10. а) 6π см; б) 12π м; в) $0{,}4\pi$ км; г) 16π дм.
11. а) 16π см^2; б) 25π м^2; в) $0{,}36\pi$ км^2; г) 49π дм^2.
12. а) 81π см^2; б) 64π м^2; в) $0{,}16\pi$ км^2; г) 9π дм^2.
13. а) $l=\frac{4}{3}\pi$ м; б) $l=4\pi$ м; в) $l=3\pi$ см.
14. а) $l=2\pi$ см; б) $l=7\pi$ см; в) $l=\frac{5}{3}\pi$ см.
15. а) 100π см^2; б) $0{,}04\pi$ дм^2; в) π м^2.
16. а) 64π см^2; б) $0{,}01\pi$ дм^2; в) 4π м^2.
17. 48π см^2. **18.** 54π см^2. **19.** 24 см. **20.** 30 см.
21. 16π см^2. **22.** 81π см^2. **23.** 9π. **24.** 49π.
25. 841π см^2. **26.** 225π см^2.
27. Радіус альтанки — 2 м, площа — 12,57 м^2.
28. Діаметр труби — 2 м, площа перерізу — 3,14 м^2.
29. а) У 4 рази; б) у 9 разів; в) у k^2 разів.
30. а) У 16 разів; б) у 25 разів; в) у m^2 разів.
31. $3\pi R^2$. **32.** $8\pi r^2$. **33.** 171,74 м^2. **34.** 28,935 м^2. **35.** 10 см. **36.** 34 см.
37. 10 см. **38.** 16 см. **39.** ≈ 20 дм^3. **40.** 235,5 см^2; 392,5 см^2; 549,5 см^2.
41. 100π см^2; $50\left(2-\sqrt{3}\right)\pi$ см^2. **42.** $42{,}25\pi$ см^2; 4π см^2.
43. $\left(4\sqrt{3}-2\pi\right)$ см^2. **44.** 12 см^2. **45.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **46.** $\frac{\pi R^2}{16}$. **47.** $\frac{1}{3}$. **48.** $\frac{6-\pi}{8}$ дм^2.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

49. $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ см^2.

50. $\frac{\pi h^2}{4}$. *Вказівка.* Позначте $AC=a$, $BC=b$ і врахуйте, що $h=\sqrt{ab}$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $4+2\sqrt{5}$; б) $x_1=1$; $x_2=3$. **2.** а) $(x+2)^2+(y-3)^2=16$; б) $2x-y-1=0$; в) пряма l є січною кола ω. **3.** 9,54 %. **4.** $\angle P=90°$; $\angle P=65°$; $KP=4{,}2$ см; $MP=9{,}1$ см. **5.** 152 536.

§ 17. Розв'язування трикутників (опційно)

Тренажерний зал

1. а) $x^2=34-30\cos 35°$; б) $x^2=25-24\cos 25°$; в) $x^2=25-24\cos 50°$.

2. а) $x^2=29-20\cos 45°$; б) $x^2=32-32\cos 85°$; в) $x^2=61-60\cos 25°$.

3. а) $16=25+x^2-10x\cos 50°$; б) $4=25+x^2-10x\cos 25°$;
в) $16=9+x^2-6x\cos 60°$.

4. а) $9=25+x^2-10x\cos 40°$; б) $16=4+x^2-4x\cos 100°$;
в) $9=36+x^2-12x\cos 30°$.

5. 41,2. **6.** 13.

7. а) $\frac{x}{\sin 45°}=\frac{4}{\sin 95°}$; б) $\frac{x}{\sin 25°}=\frac{5}{\sin 120°}$; в) $\frac{x}{\sin 65°}=\frac{3}{\sin 40°}$.

8. а) $\frac{x}{\sin 30°}=\frac{2}{\sin 20°}$; б) $\frac{x}{\sin 35°}=\frac{5}{\sin 80°}$; в) $\frac{x}{\sin 100°}=\frac{4}{\sin 45°}$.

9. а) Так; б) так; в) ні. **10.** а) Ні; б) так; в) ні.

11. 15 см. **12.** 30 см. **13.** а) 29; б) 49. **14.** а) 37; б) 67.

15. а) Прямий, б) гострий; в) тупий. **16.** а) Тупий; б) гострий; в) прямий.

17. $\cos\gamma\approx 0{,}08$; $\gamma\approx 85°$. **18.** $\cos\beta=-0{,}2$; $\beta\approx 102°$. **19.** 21 м^2. **20.** 14,7 м^2.

21. а) $\frac{1}{6}$; б) 0,84. **22.** а) 0,24; б) $\frac{1}{8}$.

23. а) 9 см; б) 10 см. **24.** а) 6 см; б) 12 см.

25. а) $R=5$ см; б) $R=7{,}5$ см. **26.** а) $R=10$ см; б) $R=10{,}5$ см.

27. $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{19}{35}$; гострокутний. **28.** $-\frac{3}{16}$; $\frac{49}{68}$; $\frac{111}{136}$; тупокутний.

29. $BD=\sqrt{52}$; $AC=\sqrt{148}$. **30.** $BD=12\sqrt{3}$; $AC=12\sqrt{7}$.

31. $\angle BAC=105°$; $AB=3{,}66$ см; $AC=2{,}58$ см.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

32. $\angle FEH = 45°$; $EF = 24{,}5$ см; $FH = 27{,}32$ см.

33. $R = 12$ см; $S = 144\pi$ см^2. **34.** $R = 8\sqrt{2}$ см; $S = 128\pi$ см^2.

35. 90 см. **36.** 75 см. **37.** $96\sqrt{3}$ см^2. **38.** $60\sqrt{3}$ см^2.

39. *Вказівка.* Розгляньте випадки, коли кут між сусідніми сторонами гострий, тупий і прямий.

40. *Вказівка.* Розгляньте випадки, коли кут між діагоналями гострий, тупий і прямий.

41. ≈ 8 м. **42.** ≈ 34 м.

43. *Вказівка.* Продовжте медіану за сторону на довжину медіани й доповніть рисунок до паралелограма.

45. 9,5 см. **46.** 30 см. **47.** 76 см^2. **48.** 84 см^2. **49.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. **50.** $a\sqrt{\frac{7}{3}}$.

51. $\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\operatorname{tg}\varphi$. **52.** $\frac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)\operatorname{tg}\alpha$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 0,5. **2.** $x_1 = -1$; $x_2 = 1{,}5$. **4.** 84 см^2. **5.** 191, 383.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	В	Г	Г	Д	А	170	61	37

10. 36°, 36°, 90°, 90°, 108°. **11.** 0,45 га.

12. а) $AB = BC = CD = 10$ см, $AD = 20$ см; б) $S = 75\sqrt{3}$ см^2.

13. $C = 19{,}2\pi$ см, $S = 92{,}16\pi$ см^2. **14.** $25(\pi - 2)$ см^2.

Завдання підвищеної складності

1. Пряма, яка проходить через точки перетину діагоналей паралелограма й прямокутника. **2.** 1:3. **4.** 25 см^2. *Вказівка.* Використайте результат завдання № 3 та ключового завдання № 53 із § 15. **5.** πR; $\frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)R^2$. **6.** $(2\pi - 4)$ см^2. **7.** *Вказівка.* Візьміть до уваги, що суму площ зафарбованих фігур можна одержати, якщо від площі всієї зображеної фігури відняти площу круга, обмеженого даним колом.

8. 720 см^2. **9.** 80 см^2. **10.** $\sqrt{\frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розділ 6. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ І ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

§ 18. Площі поверхонь прямої призми та правильної піраміди

Тренажерний зал

1. а; г; д. **2.** б; д; е.
3. а) 43 см^2; б) 12,3 м^2; в) 60 дм^2. **4.** а) 36 см^2; б) 24,1 м^2; в) 107 дм^2.
5. $P_o = 20$ см, $S_1 = 140$ см^2. **6.** $P_o = 30$ см, $S_б = 270$ см^2.
7. б; в; д. **8.** б; г; д; е.
9. а) 41 см^2; б) 11,8 м^2; в) 53 дм^2. **10.** а) 71 см^2; б) 13,9 м^2; в) 96 дм^2.
11. $P_o = 25$ см, $S_б = 150$ см^2. **12.** $P_o = 24$ см, $S_б = 168$ см^2.
13. 9, 2, 7. **14.** 10, 2, 8. **15.** 21, 14, 7. **16.** 24, 16, 8.
17. 180 см^2. **18.** 270 см^2. **19.** 144 см^2. **20.** 210 см^2.
21. 8, 1, 7. **22.** 9, 1, 8. **23.** 14, 7, 7. **24.** 16, 8, 8. **25.** 360 см^2. **26.** 120 см^2.
27. 75 см^2. **28.** 185 см^2. **29.** 96 см^2. **30.** 54 см^2. **31.** 102 см^2. **32.** 130 см^2.
33. 136 см^2. **34.** 144 см^2. **35.** 10 см. **36.** 15 см.
37. $150\sqrt{2}$ см^2. **38.** $12\sqrt{105}$ см^2.
39. а) $12\sqrt{2}$; б) $\left(144+288\sqrt{2}\right)$ см^2. **40.** а) $16\sqrt{2}$; б) $\left(256+512\sqrt{2}\right)$ см^2.
41. 3240 см^2. **42.** 1440 см^2.
46. Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можна вибрати вершини A, B_1, C, D_1.
47. $\left(48+8\sqrt{3}\right)$ см^2. **48.** $16\left(\sqrt{3}+1\right)$ см^2.
49. 156 см^2. **50.** $36+36\sqrt{3}$ см^2. **51.** $\dfrac{S^2}{4l^2}$. **52.** 36 см^2.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $\dfrac{2x-4}{x-2}$. **3.** 6 м/с. **4.** $\angle B = 70°$, $BC \approx 3{,}6$ см, $AB \approx 10{,}6$ см.

§ 19. Площі поверхонь циліндра і конуса

Тренажерний зал

1. а; в. **2.** в.
3. а) 29 см^2; б) 13,3 м^2; в) 100 дм^2. **4.** а) 31 см^2; б) 12,9 м^2; в) 76 дм^2.
5. а) 266π см^2; б) 85π м^2; в) 312π дм^2.
6. а) 220π см^2; б) 117π м^2; в) 360π дм^2.
7. в. **8.** а.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

9. а) 46 см^2; б) $10{,}9$ м^2; в) 116 дм^2. **10.** а) 58 см^2; б) $20{,}2$ м^2; в) 75 дм^2.
11. а) 120π см^2; б) 37π м^2; в) 225π дм^2.
12. а) 160π см^2; б) 29π м^2; в) 210π дм^2.
13. Більшу площу поверхні має циліндр *б*; на 54π см^2.
14. Більшу площу поверхні має циліндр *б*; на 96π см^2.
15. $4\sqrt{2}$ см. **16.** $3\sqrt{2}$ см. **17.** $25{,}12$ м^2. **18.** $43{,}96$ м^2.
19. 126π см^2. **20.** 224π см^2. **21.** 15π см^2, 5 см. **22.** 30π см^2, 6 см.
23. $163{,}28$ см^2. **24.** $75{,}36$ м^2. **25.** 96π см^2. **26.** 150π см^2.
27. 6 см, 32π см^2. **28.** 8 см, 34π см^2. **29.** $\frac{H}{R}=\frac{1}{4}$. **30.** $\frac{H}{R}=\frac{3}{2}$.
31. 24π см^2. **32.** 200π см^2. **33.** 16 см, 384π см^2. **34.** 12 см, 90π см^2.
35. *Вказівка.* Для знаходження радіуса основи конуса скористайтеся формулою довжини дуги l_α кола радіуса R, що відповідає центральному куту α (у градусах), $l_\alpha=2\pi R\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}$.
а) 4 см; б) $2\sqrt{21}$ см; в) 56π см^2.
36. *Вказівка.* Для знаходження радіуса основи конуса скористайтеся формулою довжини дуги l_α кола радіуса R, що відповідає центральному куту α (у градусах), $l_\alpha=2\pi R\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}$.
а) 3 см; б) $3\sqrt{15}$ см; в) 45π см^2.
37. 150π см^2. **38.** 48π см^2. **39.** 65π см^2. **40.** 48π см^2.
41. 5 см і 10 см. **42.** 6 см і 8 см. **43.** $\sqrt{m^2+1}$. **44.** $2k+2$.
45. $18\left(\sqrt{2}+3\right)\pi$ см^2. **46.** $8\left(\sqrt{3}+3\right)\pi$ см^2.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 5. **2.** а) $(-\infty;-1{,}5)$; б) $[0{,}4;+\infty)$. **3.** $\sqrt{82}$. **4.** Множина X є кругом радіуса 4 см із центром у точці O. Ця множина займає $\frac{\pi}{9}$ площі квадрата. **5.** а) ТРОН; б) МАРА.

§ 20. Геометричний підхід до обчислення ймовірностей. Використання формул площ многокутників для обчислення ймовірностей

Тренажерний зал

1. а) Ні; так; б) так; ні; в) ні; ні; г) ні; ні.
2. а) Так; ні; б) так; ні; в) ні; ні; г) ні; так.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

5. 4; 10; $\frac{2}{5}$. **6.** 4; 8; $\frac{1}{2}$. **7.** 3; 9; $\frac{1}{3}$. **8.** 3; 7; $\frac{3}{7}$.

9. 16; 63; $\frac{16}{63}$. **10.** 16; 49; $\frac{16}{49}$. **11.** 9; 48; $\frac{9}{48}$. **12.** 9; 36; $\frac{1}{4}$.

15. $\frac{1}{4}$. **16.** $\frac{2}{5}$. **17.** $\frac{1}{9}$. **18.** $\frac{1}{5}$. **19.** 0,08. **20.** 0,4. **21.** 0,1. **22.** 0,8.

23. 0,5. **24.** 0,25. **25.** 0,4. **26.** $\frac{10}{63}$. **27.** 0,2. **28.** 0,25. **29.** 0,64. **30.** 0,6.

31. 0,598. **32.** 0,589. **33.** а) 0,31; б) 0,69. **34.** а) 0,23; б) 0,77.
35. 0,35. **36.** 0,4375.

37. $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Розбийте відрізок AB на три рівні частини та з'ясуйте, за якого розміщення точки M буде виконуватися вимога задачі.

38. 0,4.

39. 0,3. **40.** $\frac{2}{3}$. **41.** 0,125. **42.** 0,875. **43.** $\frac{\pi}{9} \approx 0{,}35$. **44.** $\frac{64-\pi}{64} \approx 0{,}95$.

45. $\frac{7}{32}$. **46.** $\frac{31}{72}$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

2. а) $(-\infty;-16)\cup(16;+\infty)$; б) $[0;256]$. **3.** $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD}$. **4.** Середнє арифметичне; $\bar{x} = 3150$ грн; $\sigma \approx 971$ грн. **5.** а) 27, 31; б) 192, 384.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	В	А	Г	Б	Д	90	25	9,375

10. $S = 36\sqrt{3}$ см^2; **11.** $\frac{1}{2}$; **12.** $50\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ см^2; **13.** $\frac{3}{7}$; **14.** 0,75.

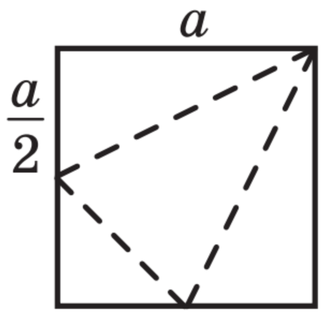
Завдання підвищеної складності до розділу 6

1. $4S\operatorname{tg}\alpha$. **2.** $d^2 \sin\beta\cos\beta\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. **3.** 516 см^2.

4. Три: трикутна, чотирикутна, п'ятикутна.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

5. Приклад розгортки див. на рисунку. **6.** $\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{7}+1\right)$.



7. $2\pi S$. **8.** $\frac{b}{a}$. **9.** 54π дм^2. **10.** $30°$. **11.** $\frac{11}{18}$.

Розділ 7. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКАХ

§ 21. Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей

Тренажерний зал

1. а) Так, так; б) ні, так; в) ні, так; г) так, ні.
2. а) Так, ні; б) ні, так; в) так, так; г) ні, так.
3. а) Ні, так; б) ні, так; в) ні, так; г) ні, ні.
4. а) Ні, ні; б) ні, так; в) ні, так; г) ні, так.
5. 28, 35, 42. **6.** 9, 11, 13, 15. **7.** $a_5=22$; $a_{10}=97$. **8.** $b_3=17$; $b_8=42$.
9. $a_2=5$; $a_3=2$; $a_4=-1$. **10.** $b_2=11$; $b_3=18$; $b_4=25$.
11. У липні. **12.** 400 тис. грн.
13. 12, 16, 20, 24, 28. **14.** 100, 105, 110, 115.
15. $b_3=-36$; $b_{10}=20$. **16.** $a_4=28$; $a_8=152$.
17. $a_3=44$; $a_4=-38$; $a_5=82$. **18.** $b_3=13$; $b_4=19$; $b_5=45$.
19. $a_n=13n$. **20.** $a_n=7n$.
21. $a_1=12$; $a_n=4a_{n-1}-9$. **22.** $a_1=42$; $a_n=5\left(a_{n-1}+3\right)$.
23. 1000 грн; 4500 грн. **24.** 950 підписників.
25. Замість 11 має бути 12. Кожне наступне число на 3 більше за попереднє.
26. Замість 38 має бути 37. Кожне наступне число на 9 більше за попереднє.
27. 21, 28, 34. **28.** 217, 344, 513. **29.** в. **30.** б.
31. На 1,5 мл. **32.** На 5 присідань. **33.** 7. **34.** 13.
35. 100 г. **36.** 128 000 т/місяць.
37. 16; $a_n=1+3n$, $n\in N$. **38.** 13; $a_n=1+2n$, $n\in N$.
39. $b_{n+1}=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_{n-1}=243\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n\in N$.
40. $a_{n+1}=12+5n$, $a_{n-1}=2+5n$, $n\in N$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

41. $b_1 = 15$, $b_{n+1} = b_n \cdot 9$, $n \in N$. **42.** $a_1 = 8$, $a_{n+1} = a_n - 12$, $n \in N$.
43. Наприклад: а) $x_n = -12 + 5n$; $x_1 = -7$, $x_{n+1} = x_n + 5$, $n \in N$;

б) $x_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$; $x_1 = 8$, $x_{n+1} = x_n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$, $n \in N$.

44. Наприклад: а) $x_n = -\frac{1}{8} \cdot (-4)^n$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n \cdot (-4)$, $n \in N$;

б) $x_n = 7 - 5n$; $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n - 5$, $n \in N$.

45. 5. **46.** 9. **47.** $a_8 = a_9 = -51$. **48.** $a_2 = 20$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. -18. **2.** а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; б) $E(y) = (-\infty; -1]$; в) функція зростає на проміжку $(-\infty; 1]$ і спадає на проміжку $[1; +\infty)$. **3.** 94 259,59 грн. **4.** $AB = 4{,}5$ см; $BC = 7{,}5$ см. **5.** 325.

§ 22. Арифметична прогресія. Формула n-го елемента та суми n перших елементів арифметичної прогресії

Тренажерний зал

1. 101, 103, 105, 107; так. **2.** 10, 12, 14, 16, 18; так.
3. а) 4; б) -5; в) 6,5. **4.** а) -6; б) 3; в) -5.
5. а) 13; б) 5; в) 6; г) -7. **6.** а) 19; б) -9; в) -18; г) 16.
7. а) $a_2 = 5$, $a_{10} = 21$, $a_{20} = 41$; б) $a_2 = 4$, $a_{10} = -4$, $a_{20} = -14$;
в) $a_2 = 12$, $a_{10} = -12$, $a_{20} = -42$.
8. а) $a_3 = 10$, $a_{12} = 37$, $a_{30} = 61$; б) $a_3 = 3$, $a_{12} = -15$, $a_{30} = -51$;
в) $a_3 = -11$, $a_{12} = 25$, $a_{30} = 97$.
9. а) Так; б) так; в) ні; г) ні. **10.** а) Ні; б) ні; в) так; г) так.
11. а) $S_{14} = 371$; б) $S_{14} = 210$; в) $S_{14} = -119$.
12. а) $S_{20} = 460$; б) $S_{20} = -150$; в) $S_{20} = 120$.
13. а) $S_{12} = 192$; б) $S_{12} = -12$; в) $S_{12} = -90$.
14. а) $S_{10} = 160$; б) $S_{10} = -25$; в) $S_{10} = 70$.
15. $a_1 = 500$, $a_2 = 540$, $a_3 = 580$, $a_4 = 620$, $a_5 = 660$, $a_6 = 700$;
так, $d = 40$.
16. $a_1 = 40$, $a_2 = 45$, $a_3 = 50$, $a_4 = 55$, $a_5 = 60$, $a_6 = 65$, $a_7 = 70$;
так, $d = 5$.
17. 99, 96, 93, 90; так, $d = -3$. **18.** 95, 85, 75, 65; так, $d = -10$.
19. 103, 113, 123, 130, 131, 132; ні. **20.** 102, 112, 120, 121, 122, 123; ні.
21. а) 14; б) -8; в) 17; г) -15. **22.** а) -3; б) 4; в) -38; г) 15.
23. а) 4; б) 2; в) -3. **24.** а) 2; б) -7; в) 10.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

25. а) 160; б) −150. **26.** а) −400; б) 85. **27.** 69. **28.** 200.
29. а) 62; б) 363; в) 25550. **30.** а) 5; б) −65; в) −58300.
31. 31500 кроків. **32.** 1725 хвилин. **33.** 4. **34.** 4. **35.** 7. **36.** 8.
37. 15. **38.** 18. **39.** 100. **40.** 270. **41.** 4,9. **42.** 5,7.
43. 800 грн. **44.** 8 місяців. **45.** 255. **46.** 19 350.
49. У першому ряду 7 крісел; 15 рядів. **50.** За 8 год.
51. а) Ні; б) так. **52.** а) Так; б) ні. **55.** −1 і 8. **56.** 3.
57. −17; −26; $d=-9$. **58.** −9; −12; $d=-3$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 1,2. **2.** $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$. **3.** $\angle M=\angle R=60^\circ,\ \angle L=\angle P=120^\circ$.
4. а) 56 275 грн 44 коп.; б) 67 195 грн 82 коп.; в) 77 898 грн 37 коп.
5. а) 320; б) 10 240; 51 хв.

§ 23. Геометрична прогресія. Формула n-го елемента та суми n перших елементів геометричної прогресії

Тренажерний зал

1. 1600, 6400; так. **2.** 9, 27, 81; так.
3. 10, 20, 40, 80; так. **4.** 100, 200, 400, 800; так.
5. а) 2; б) $\frac{1}{8}$; в) −4. **6.** а) 8; б) $-\frac{1}{9}$; в) −3.
7. а) 15; б) −36; в) −12; г) −25. **8.** а) 21; б) −18; в) 4; г) 5.
9. а) $b_2=6,\ b_5=162,\ b_8=4374$; б) $b_2=-\frac{1}{125},\ b_5=1,\ b_8=-125$;
в) $b_2=12,\ b_5=-96,\ b_8=768$.
10. а) $b_2=10,\ b_5=80,\ b_7=320$; б) $b_2=-\frac{1}{16},\ b_5=\frac{1}{2},\ b_7=2$;
в) $b_2=-12,\ b_5=-324,\ b_7=-2916$.
11. а) Ні; б) так; в) так; г) так. **12.** а) Ні; б) так; в) ні; г) так.
13. а) $S_4=288$; б) $S_4=140$; в) $S_4=-140$.
14. а) $S_5=155$; б) $S_5=55$; в) $S_5=-55$.
15. а) $S=12$; б) $S=-6$; в) $S=6$. **16.** а) $S=18$; б) $S=6$; в) $S=-6$.
17. 999, 333, 111; так, $q=\frac{1}{3}$. **18.** 99, 33, 11; так, $q=\frac{1}{3}$.
19. 4, 10, 40, 400, 16 000, 6 400 000; ні.
20. 2, 5, 20, 200, 8000, 3 200 000; ні.
21. а) 50; б) −18; в) 48; г) −5. **22.** а) 12; б) −32; в) −96; г) −4.
23. а) −3 або 3; б) −5 або 5; в) −0,5 або 0,5.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

24. а) -2 або 2; б) $-0{,}25$ або $0{,}25$; в) -6 або 6.
25. а) $160, -80, 40, -20, 10, -5$; б) $0{,}03, 0{,}3, 3, 30, 300, 3000$;
в) $-2, -6, -18, -54, -162, -486$.
26. а) $-5, -10, -20, -40, -80$; б) $162, 54, 18, 6, 2$;
в) $0{,}5, -2, 8, -32, 128$.
27. 15. **28.** 13. **29.** 484. **30.** 635.
31. 400 000 грн, 320 000 грн, 196 000 грн; так, 0,8.
32. 3300, 3630, 3993; так, 1,1.
33. а) 3 або -3; б) 0,2 або $-0{,}2$. **34.** а) 2 або -2; б) 0,3 або $-0{,}3$.
35. а) 8; б) 72. **36.** а) 15; б) 120. **37.** 4. **38.** 5. **39.** 109 300. **40.** 5063.
41. 64. **42.** 16. **43.** $10\frac{2}{3}$. **44.** $\frac{3}{2}$. **45.** 3020. **46.** 3050.
49. $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ або $b_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$. **50.** $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ або $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$.
51. $0{,}25$ см^2. **52.** $0{,}5$ см.
53. 3; 8; 13 або 27; 8; -1. **54.** 2; 6; 18 або 18; 6; 2.
55. а) $\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{2}-1$. **56.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$. **57.** $\frac{7}{55}$. **58.** $\frac{13}{55}$.
59. $b_1 = \frac{4}{3}$, $q = -\frac{1}{3}$. **60.** $b_1 = \frac{200}{101}$, $q = -\frac{99}{101}$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 8. **2.** Петрику знадобилося б 10 хв, Тетянці — 15 хв. **4.** 5000 грн.
5. а) ТАРАН; б) ПОРТ.

§ 24. Послідовності датованих сум. Ануїтети. Довічна рента

Тренажерний зал

1. а) Так; б) так; в) ні; г) 1 місяць; д) 36 місяців; е) 36 платежів.
2. а) Так; б) ні; в) так; г) 1 квартал; д) 16 кварталів; е) 16 платежів.
3. $i = 3\,\% = 0{,}03$; $A = 2000 \cdot \frac{1-(1{,}03)^{-6}}{0{,}03}$; $S = 2000 \cdot \frac{(1{,}03)^{6}-1}{0{,}03}$.
4. $i = 0{,}5\,\% = 0{,}005$; $A = 1500 \cdot \frac{1-(1{,}005)^{-12}}{0{,}005}$; $S = 1500 \cdot \frac{(1{,}005)^{12}-1}{0{,}005}$.
5. а) Так; б) 750 000 грн; в) 7500 грн.
6. а) Так; б) 600 000 грн; в) 12 000 грн.
7. $A = 18\,149{,}48$ грн; $S = 21\,232{,}32$ грн.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

8. $A = 33\,765{,}23$ грн; $S = 38\,047{,}51$ грн.
9. а) 40 тис. грн: б) 1,25 млн грн. **10.** а) 150 тис. грн; б) 4 млн грн.
11. 3384,43 євро. **12.** 4230,14 дол. **13.** а) 2543,2 євро; б) 3670,36 євро.
14. а) 98 073,74 грн; б) 193 765,54 грн.
15. 1554,05 євро. **16.** 1242,90 дол. **17.** 16 816,83 грн. **18.** 24 156,27 грн.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 0,4. **2.** Одна точка перетину $M(25;10)$. **3.** $S = 100\pi$ см^2; симетріями прямокутника $ABCD$ є: тотожне перетворення, центральна симетрія відносно точки перетину його діагоналей, осьові симетрії відносно прямих, що проходять через середини його протилежних сторін. **5.** Слова, утворені з першої, третьої та четвертої послідовностей букв, є назвами тригонометричних функцій; із другої послідовності букв назву тригонометричної функції утворити не можна.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Г	В	Д	Б	А	350	0,125	14 651

10. $x_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$. **11.** 12 чисел, їх сума дорівнює 684. **12.** 10 рядів. **13.** а) $d = 10$; б) $q = 2$. **14.** а) 29 081,87 євро; б) 145,41 євро.

Завдання підвищеної складності до розділу 7

1. $(4;9]$. **3.** -5; 1,75; 8,5. **6.** а) $\dfrac{x^{102}-x^2}{x^2-1}$; б) $5151x$. **7.** $a = 2$, $b = 32$ або $a = -18$, $b = -288$. **8.** Можуть, якщо знаменник прогресії дорівнює $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Розділ 8. ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ 7–9 КЛАСІВ

Початковий рівень

1. в. **2.** а. **3.** Г. **4.** $A'(5;1)$, $B'(7;-9)$, $C'(2;-1)$. **5.** $K'(20;3)$, $F'(-28;2)$, $M'(0;-9)$. **6.** б. **7.** в. **8.** а. **9.** в. **10.** г. **11.** б. **12.** в. **13.** а. **14.** А, В, Д, Е. **15.** Н, О. **16.** а) $d < e$; б) $e > f$. **17.** а; б; в. **18.** а) $a > b$; б) $a = b$;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

в) $a<b$; г) $a>b$. **19.** а) $6x>6y$; б) $-7x<-7y$; в) $x-8>y-8$; г) $x+9>y+9$. **20.** а) $a-9<b-9$; б) $a+10<b+10$; в) $-11a>-11b$; г) $12a<12b$. **21.** а) $x<-7$; б) $x\geq 9$; в) $x>-4$; г) $x\leq 10$. **22.** а) $x>-6$; б) $x\geqslant 17$. **23.** а) $(-\infty;64)$; б) $[36;+\infty)$; в) $(-12;+\infty)$; г) $(-\infty;-46]$. **24.** а) $(-\infty;9)$; б) $(-\infty;-13]$; в) $(-6;+\infty)$; г) $[3,5;+\infty)$. **25.** $d\geqslant 15$; $[15;+\infty)$. **26.** В. **27.** а) $(5;+\infty)$; б) $(-4;7)$; в) $[0;9]$; г) $[4;+\infty)$. **28.** а) $[12;+\infty)$; б) $[-7;4)$; в) $(-6;5]$; г) $(-\infty;4)$. **29.** $\begin{cases} v>45, \\ v<72. \end{cases}$ **30.** Г. **31.** а) $[-4;3]$ — область визначення, $[-4;5]$ — множина значень; б) $[2;7]$ — область визначення, $[-4;5]$ — множина значень. **32.** Б. **33.** $y=f(x)+4$. **34.** $y=f(-x)$. **35.** $y=3f(x)$. **36.** а; в. **37.** а) $a=6$, $b=-5$, $c=4$; б) $a=7$, $b=1$, $c=-9$; в) $a=1$, $b=6$, $c=0$; г) $a=12$, $b=0$, $c=-5$. **38.** а) Угору; б) униз; в) угору. **39.** а) $(-3;2)$; б) $(0;-4)$; в) $(3;0)$. **40.** а) -4, -2; б) -3, 3; в) -1, 3. **41.** $x(x+5)>45$. **42.** а; в; г. **45.** а) $(2;6)$; б) $(-\infty;-4)$, $(2;+\infty)$. **46.** в. **47.** а. **48.** б. **49.** а; д; е. **50.** $\frac{140}{x}\leqslant 5$. **51.** $\begin{cases} xy=3500, \\ 2(x+y)=240. \end{cases}$ **52.** в. **53.** а) $x=1+5y$; б) $x=3y-4$; в) $x=9y$; г) $x=-2y-5$. **54.** а) $(4;-12)$; б) $(-5;27)$. **55.** г. **56.** а, в — абсолютні; б, г — відносні. **57.** 2,5; показник порівняння. **58.** 70 свічок за день; показник інтенсивності. **59.** У 5 разів; показник динаміки. **60.** 0,8. **61.** а. **62.** а) 6; б) 8. **63.** а) 6; б) 7. **64.** а) $\frac{12}{7}$; б) $\frac{30}{41}$. **65.** а) $\sqrt{26}$; б) $\sqrt{22}$. **66.** а) A, B, C, D, E, F; б) H, G; в) наприклад, AB, BC, EF; г) наприклад, AC, EG, HB. **67.** а) LP, MP, KN; б) наприклад, KR, RS, PS. **68.** 5; 6. **69.** а) 35; б) 2. **70.** а) 1080°; б) 360°. **71.** а) 28 кв. од.; б) 28 кв. од. **72.** а) 45; б) 48. **73.** а) 35; б) 44. **74.** а) 63; б) 50. **75.** 44 см^2. **76.** а) OE, OF, OG, OH; б) HE; в) CD, HE, EF, HG. **79.** а) 14π см; б) $1,2\pi$ дм. **80.** а) 64π см^2; б) $0,09\pi$ м^2. **81.** а) $x^2=145-144\cos 50°$; б) $x^2=74-70\cos 80°$. **82.** а) $100=36+x^2-12x\cos 25°$; б) $144=225+x^2-30x\cos 55°$. **83.** 22. **84.** а) $\frac{x}{\sin 50°}=\frac{14}{\sin 35°}$, б) $\frac{x}{\sin 20°}=\frac{23}{\sin 130°}$. **85.** 30 см. **86.** а) 63 см^2; б) 19,9 м^2. **87.** $P_o=30$ см; $S_б=330$ см^2. **88.** а) 59 см^2; б) 9,4 м^2. **89.** $P_o=42$ см, $S_б=315$ см^2. **90.** б; в; г; д; е. **91.** а) 33 см^2; б) 14,4 м^2. **92.** а) 240π см^2; б) 162π м^2. **93.** а) 57 см^2; б) 9,1 м^2. **94.** а) 175π см^2; б) 29π м^2, **95.** б; д. **96.** а) Так; ні; б) ні; ні; в) ні; ні;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

г) ні; так. **97.** $\frac{4}{9}$. **98.** $\frac{3}{8}$. **99.** $\frac{15}{63}$. **100.** $\frac{8}{49}$. **101.** а) Ні; так; б) так; так; в) так; ні; г) ні; так. **102.** а) Ні; так; б) ні; так; в) ні; так; г) ні; ні. **103.** 20, 25, 50, 100. **104.** $b_4 = 14$, $b_9 = 29$. **105.** 6000. **106.** 13, 23, 33, 43; так. **107.** а) 4; б) -5; в) $-1{,}5$. **108.** а) $a_2 = 8$, $a_{12} = 38$; б) $a_2 = 8$, $a_{12} = -12$; **109.** а) $S_{30} = 1800$; б) $S_{30} = -210$. **110.** 1000, 1100, 1200; так; 100. **111.** 101, 303, 909; так. **112.** а) 7; б) -15. **113.** а) 35; б) -33; в) 5. **114.** а) $b_2 = 6$, $b_6 = 96$; б) $b_2 = -\frac{1}{9}$, $b_6 = -9$. **115.** а) $S_5 = -124$; б) $S_5 = 77$. **116.** а) Так; б) так; в) так; г) 1 місяць; д) 60 місяців; е) 60 платежів. **117.** а) Так; б) 3 млн грн; в) 45 тис. грн.

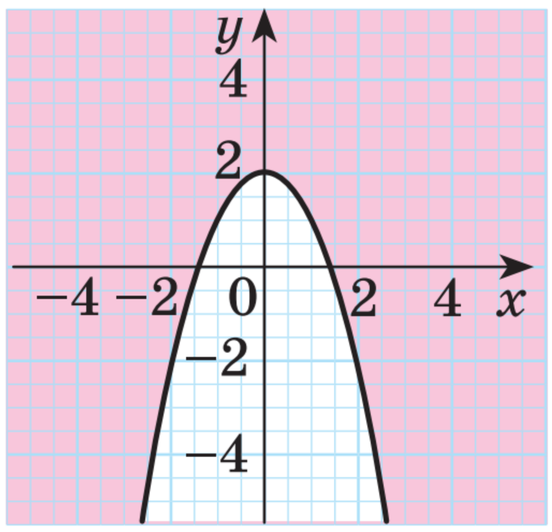
Середній рівень

118. В. **119.** Б. **123.** А. **124.** Г. **125.** В. **128.** А. **129.** Г. **130.** Б. **131.** Ю, Л, С, П. **132.** И, Н, Х, Ф. **133.** а) $v < a < l$; б) $120 \leqslant h \leqslant 175$. **134.** а; в. **136.** а) $x + 3 > y + 2$; б) $x - 4 > y - 5$; в) $\frac{4}{3}x > \frac{4}{3}y$; г) $-\frac{2}{3}x < -\frac{2}{3}y$; д) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$. **137.** -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4. **138.** в; г. **139.** а) $(7; +\infty)$; б) $(-\infty; -6)$; в) $[-4; +\infty]$; г) $(-\infty; -3]$. **140.** а) $-2 < x < 5$; б) $4 \leqslant x < 10$; в) $-6 < x \leqslant 0$; г) $-9 \leqslant x \leqslant -5$. **141.** а) $(4; 7]$; б) $[-10; -2)$; в) $[-12; -4]$; г) $(10; 30)$. **142.** б; в. **143.** а) $(-\infty; -8]$; б) $[2{,}5; 5)$; в) $(17; +\infty)$. **144.** $35x + 12{,}5y > 450$. **145.** а) $y = \frac{1}{x} - 3$; б) $y = \frac{1}{x+2}$; в) $y = -\frac{1}{x}$; г) $y = -\frac{1}{x}$; д) $y = \frac{4}{x}$; е) $y = \frac{2}{x}$. **146.** а) $y = f(x-4)$; б) $y = f(x) + 5$; в) $y = -f(x)$; г) $y = f(-x)$. **147.** Чорний графік: $y = -\sqrt{x}$; синій графік: $y = \sqrt{x} + 2$; зелений графік: $y = \sqrt{x-4}$; червоний графік: $y = \sqrt{-x}$. **149.** а) Паралельне перенесення на вектор $(\overrightarrow{0; 5})$; б) паралельне перенесення на вектор $(\overrightarrow{0; -7})$; в) паралельне перенесення на вектор $(\overrightarrow{6; 0})$; г) паралельне перенесення на вектор $(\overrightarrow{-8; 0})$. **151.** а) Вітки спрямовані вгору, $(2; -5)$; б) вітки спрямовані вниз, $(1; 1)$. **152.** а) $(1; 0)$, $(3; 0)$, $(0; 3)$; б) $(-4; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 8)$. **153.** а) -4 і 4; б) -6 і 1; в) -3 і 4. **154.** а) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; в) $(0; 4)$; г) $[0; 4]$. **155.** а) $(2; 3)$; б) $[2; 3]$;

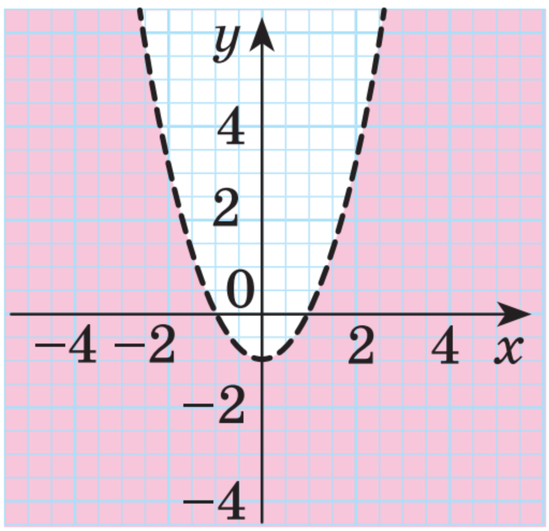
в) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; г) $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$. **156.** а) $(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$; б) $[-7;7]$; в) $(-\infty;+\infty)$. **157.** а) 3,5; б) немає розв'язків; в) -1. **158.** а) $(-\infty;-10)$; б) $(-5;0]$; в) $(-\infty;0)\cup(10;+\infty)$. **159.** $\frac{4}{x}=\frac{3}{x-1}$. **160.** $\frac{400}{x}\leqslant 5$; $[80;+\infty)$. **161.** а) $(3;4)$, $(-4;-3)$; б) $(2;1)$, $(-1;4)$. **162.** а) $(10;-3{,}8)$; б) $(\sqrt{12};1)$, $(-\sqrt{12};1)$. **163.** а) $(0;0)$, $(-1;-1)$; б) немає розв'язків. **164.** а) $(-\infty;-3)\cup(3;6]$; б) $(-2;5]$.

165.

а)



б)



166. 1,125. **167.** 0,026 осіб/км^2. **168.** 1,87. **169.** Меблі для вітальні — 30 %; для спальні — 45 %; для кухні — 35 %. **170.** а) 1,8; б) 1,6; в) 1,125; план перевиконано на 12,5 %. **171.** б. **172.** в. **173.** г. **174.** 39 г. **175.** а) 6; б) 4,1; в) 6,8. **176.** а) 1800°; б) 360°; в) 54. **177.** а) 156°; б) 24°; в) 90. **178.** $R=10$ см; $r=5\sqrt{3}$ см. **179.** $r=6\sqrt{2}$ см. **180.** 96 см^2. **181.** 50 см^2. **182.** а) 20 см^2; б) 18 см^2; в) 7 см^2; г) 8 см^2. **183.** 20 см^2. **184.** а) $l=3\pi$ см; б) $l=24\pi$ см. **185.** а) 36π см^2; б) 25π дм^2; в) 16π мм^2. **186.** 15π см^2; 21π см^2. **187.** $C=20\pi$; $S=100\pi$. **188.** а) 72,4; б) 27,4. **189.** а) $\cos\alpha=-0{,}65$; $\alpha\approx131°$; тупокутний; б) $\cos\alpha=0{,}06$; $\alpha\approx86°$; гострокутний. **190.** 60 см^2. **191.** а) $\frac{9}{40}$; б) $\frac{9}{7}$ см. **192.** $R=10$ см; $S=100\pi$ см^2. **193.** а) 8 граней, 18 ребер; б) 22 грані, 60 ребер. **194.** а) 9 граней, 16 ребер; б) 13 граней, 24 ребра. **195.** 300 см^2. **196.** 500 см^2. **197.** $S_1=120\pi$ см^2; $S_2=80\pi$ см^2; $S_1>S_2$. **198.** 64π см^2. **199.** 8 см. **200.** 102π см^2. **201.** 0,4. **202.** 0,25. **203.** 0,6. **204.** $\frac{1}{40}$. **205.** 20, 40, 60, 80, 100, 120. **206.** $c_2=-2$, $c_8=40$. **207.** $p_n=4n+2$. **208.** 864. **209.** 17, 27, 37, 47, 57; так; $d=10$. **210.** а) 26; б) -2. **211.** а) $d=5$; б) $d=-4$. **212.** а) $S_{10}=85$; б) $S_{10}=310$. **213.** а) -60; б) -2150.

214. 140 ієрогліфів. **215.** 10, 100, 1000, 10 000, 100 000; так; $q=10$. **216.** а) 48; б) 20. **217.** 33. **218.** $q=3$. **219.** -20. **220.** 381. **221.** $A=30\,454{,}15$ грн; $S=40\,811{,}48$ грн. **222.** а) 18 750 грн; б) 4 млн грн.

Достатній рівень

223. а) $C'(-3;5)$ і $D'(1;-2)$; б) $C'(-5;8)$ і $D'(-1;1)$; в) $C'(3;-5)$ і $D'(-1;2)$; г) $C'(-3;-5)$ і $D'(1;2)$. **224.** а) $P'(-0{,}5;0{,}3)$ і $Q'(0{,}6;-0{,}7)$; б) $P'(-25;3)$ і $Q'(30;-7)$; в) $P'(-5;1{,}5)$ і $Q'(6;-3{,}5)$. **225.** а) Так; б) ні; в) так. **226.** $K(1;2)$. **228.** $3x+2y-7=0$. **229.** $(x+7)^2+(y-7)^2=16$. **230.** а) $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; б) $(1;\sqrt{3})$; в) $(0;2)$; г) $(-2;0)$. **231.** Ні. **233.** а) Так; б) ні; в) так; г) так. **235.** 3. **236.** $\vec{b}(-5;6)$. **237.** $P=42$. **238.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{2}}>\frac{\sqrt{2}}{5}$; в) $\frac{3}{\sqrt{5}}<\frac{5}{\sqrt{5}}$. **239.** а) Ні; б) так; в) так; г) так. **240.** а) $4<2d<6$; $3<2d-1<5$; $-6<-2d<-4$; $-5<1-2d<-3$; б) $-4\leqslant 2d\leqslant -2$; $-5\leqslant 2d-1\leqslant -3$; $1\leqslant -2d\leqslant 2$; $2\leqslant 1-2d\leqslant 3$. **241.** $7{,}5<S<14$; $11<P<15$. **243.** Від 39,6 грн до 48,4 грн. **244.** 5. **245.** $(4;14)$. **246.** а і б; в і д. **247.** в; г. **248.** а) 1; б) 3. **249.** $\{8;\,9;\,10;\,11;\,12;\,13;\,14\}$. **250.** а) $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$; б) $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right]$; в) $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; г) $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$. **251.** а) $(-4;+\infty)$; б) немає розв'язків; в) $\left[\frac{1}{2};9\right]$; г) $[0{,}9;+\infty)$. **252.** а) $\left[\frac{1}{2};12\right)$; б) $(-13;-5)$. **253.** а: $[0;4]$; б) $[-2{,}5;1]$. **254.** а) $(-1{,}75;2{,}4]$; б) $(-7;-3)$; в) $[-2{,}3;-1{,}1]$; г) $\left[\frac{1}{25};\frac{7}{10}\right)$. **256.** а) Так; б) ні. За умовою задачі, маса кошеняти може бути від 250 г до 267 г. **257.** а) $D(f)=[-2;4]$; б) $E(f)=[-1;5]$; в) $[-2;4]$. **258.** б) $A_1(-4;0)$; $B_1(-3;4)$; $C_1(-2;2)$; $D_1(0;6)$; $E_1(1;0)$; $y=2g(x)$. **259.** б) $P_1(-2;0)$; $Q_1(-1;3)$; $R_1(0;4)$; $S_1(1;-3)$; $T_1(2;0)$; $y=f(2x)$ або $y=f\left(\frac{x}{0{,}5}\right)$. **263.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $[1;+\infty)$; в) $(2;+\infty)$; г) $(-\infty;2)$. **264.** а) $(3;-8)$; б) $(-2;-7)$; в) $(2;9)$; г) $(-1;2)$. **265.** а) $a>0$; б) $(-4;1)$;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

в) -1; 3; г) зростає на $(1;+\infty)$, спадає на $[-\infty;1)$; д) функція додатна на $(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$; функція від'ємна на проміжку $(-1;3)$.

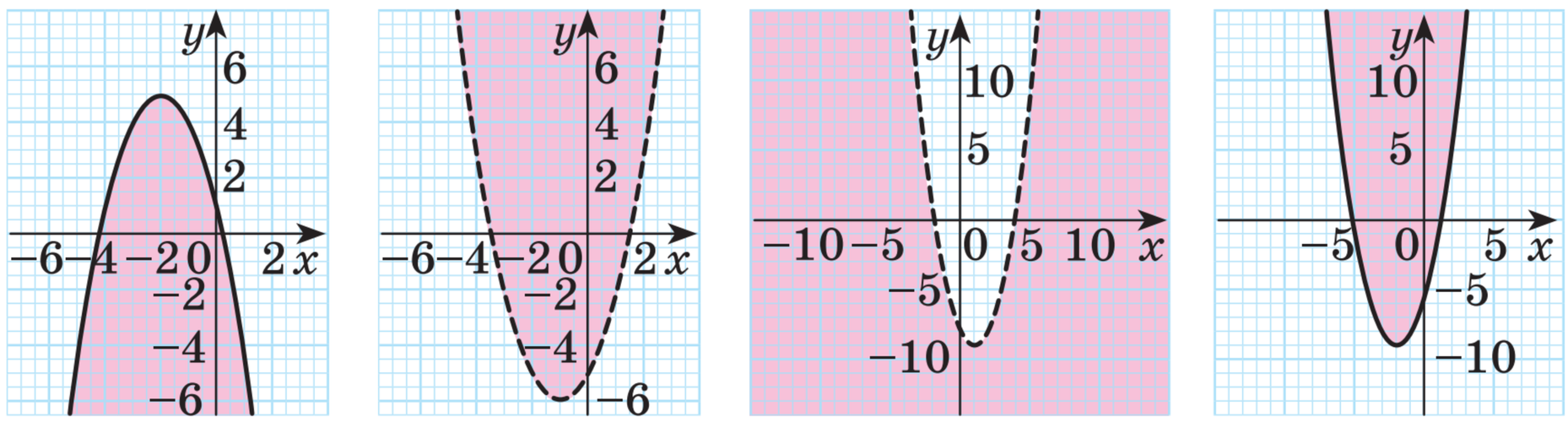
266. а) $(-\infty;3]\cup[5;+\infty)$; б) $[-2;9]$; в) $\left(\frac{4}{3};2\right]$; г) $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cup(3;+\infty)$.

267. а) $(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$; б) $[-6;6]$; в) $[-2;2]$; г) $[-3;2)\cup(2;+\infty)$; д) $(-3;+\infty)$; е) $(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$. **268.** а) $-2{,}5$; б) -4; в) 3; г) -2 і 21.

269. а) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ і $(8;+\infty)$; б) $(-3;8)$; в) $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right]$ і $(10;+\infty)$; г) $[-3;5)$.

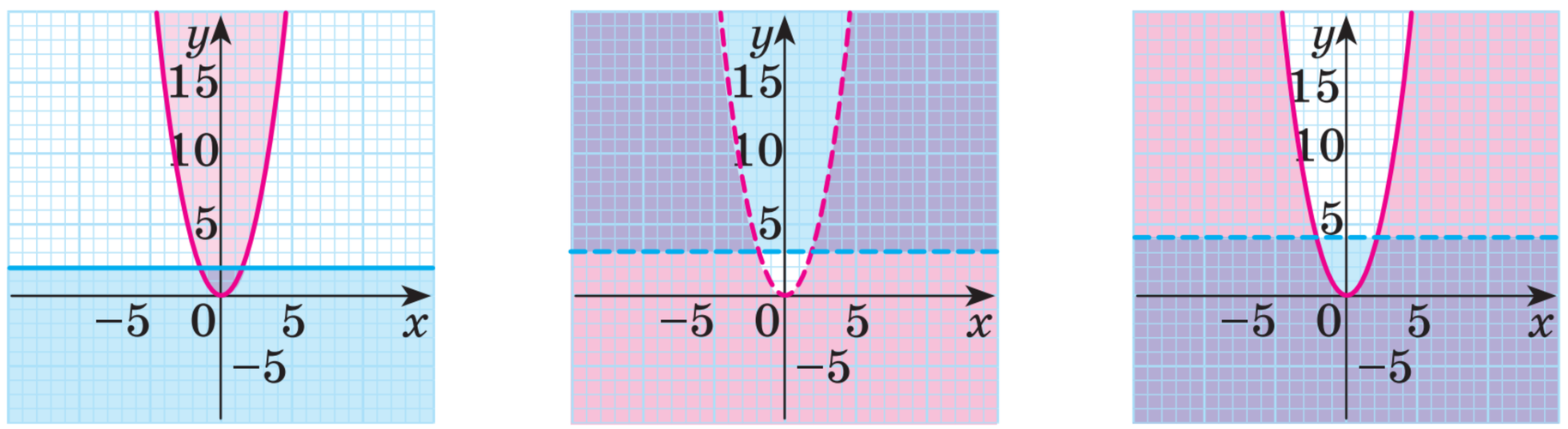
270. Аліса — за 15 днів; Майя — за 21 день. **271.** $\frac{270}{v}\leqslant 3{,}5$; $v\leqslant 77{,}14$ км/год. **272.** а) $(-2;-3)$, $(1{,}2;3{,}4)$; б) $(2;-2)$, $(-7;-11)$; в) $(5;2)$, $(12;-5)$; г) $(3;2)$; д) $(2;3)$, $(3;2)$. **273.** 2,5 м; 3,5 м.

274.



а) б) в) г)

275.



а) б) в)

276. а) Порівняння; б) структури. **277.** 1,95. **278.** 0,85; на 15 %. **279.** 1,14. **280.** 400. **281.** Газовані напої — 31,25 %, сік — 28,13 %, какао — 25 %, чай — 15,63 %. **282.** $-8{,}4$ °C. **283.** 3,12 кВт·год. **284.** 20,3 %. **285.** Оскільки середня прибутковість для обох стартапів однакова (140 млн грн), а дисперсія в «ЕкоФлори» менша $(\approx 266{,}7)$, то менш ризикованим проєктом є «ЕкоФлора». **286.** 18 сторін. **287.** а) 9 сторін; б) 140°; в) 40°; г) 27. **288.** $4\sqrt{3}$ см. **289.** $3\sqrt{6}$ см.

290. 15. **291.** 3,5 см. **292.** $5\frac{1}{3}$ см. **293.** 9 см. **294.** 648 см^2; 18 см. **295.** $40\sqrt{3}$ см^2. **296.** Прямокутник і трапеція мають однакову найбільшу площу 8 м^2. **297.** 169π см^2. **298.** Радіус 6 м; площа майданчика 113,04 м^2. **299.** а) Збільшиться в 9 разів; б) зменшиться в 4 рази. **300.** 8,6 см. **301.** 10 см. **302.** $\frac{2}{7}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{2}{3}$; трикутник гострокутний. **303.** $BD=\sqrt{53}$, $AC=\sqrt{305}$. **304.** $\angle BAC=50°$, $AB=BC=13{,}99$ см. **305.** $R=6\sqrt{3}$ см, $S=108\pi$ см^2. **306.** 84 см^2. **307.** 144 см^2. **308.** 10 см. **309.** 180 см^2. **310.** 18,53 см; 781 см^2. **311.** $36\pi\left(1+\sqrt{10}\right)$ см^2. **312.** 14,5 см; 225,9 см^2. **313.** $\frac{1}{3}$. **314.** 0,697. **315.** Наприклад: перший елемент послідовності дорівнює 2, а різниця двох сусідніх елементів починається з 1 і весь час збільшується на 1; наступні три елементи послідовності за такої закономірності: 30, 38, 47. **316.** б; в. **317.** На 50 метрів. **318.** 25. **319.** $a_1=-8$, $d=3$. **320.** 29. **321.** 325. **322.** $a=2$, $d=1$. **323.** 12. **324.** -6. **325.** $a=\frac{5}{9}$, $q=3\sqrt{5}$. **326.** 1526. **327.** 8. **328.** 10. **329.** 224 775,19 грн. **330.** а) 164 610,86 грн; б) 230 043,13 грн.

Високий рівень

331. $B(-2;4)$; $C(-2;-4)$. **333.** $M'(-4;0)$, $M(-1;1)$. **334.** Центр повороту — точка перетину діагоналей, кут повороту — 90°. **336.** $N(-5;13)$. **337.** а) $(x+3)^2+(y+2)^2=16$; $2x-7y+27=0$; б) $(x+8)^2+(y-14)^2=16$; $2x-7y+79=0$. **341.** Пряма, яка проходить через точку M і точку перетину діагоналей прямокутника. **348.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}>\sqrt{2}+\sqrt{6}$. **349.** *Вказівка.* Розгляньте вектори $\vec{m}(a;b)$ і $\vec{n}(u;v)$ та їх суму. **350.** а) Розв'язків немає; б) $(-\infty;1{,}25]$. **351.** а) $(-\infty;-3]$; б) $(-\infty;1{,}5)$; в) $(-1{,}5;3]$; г) $(-\infty;1{,}2)$. **352.** а) $\left[1;7+4\sqrt{3}\right)$; б) $\left[-1;\frac{11+4\sqrt{7}}{3}\right]$. **353.** а) $(-\infty;8)$; б) $(8;+\infty)$; в) $(-\infty;8]$. **354.** а) $(1;4]$; б) $(1{,}6;3{,}2]$. **355.** а) $[8;+\infty)$; б) $(-\infty;8)$; в) 8. **356.** Паралелограм. **357.** а) Спадає на $(-\infty;5]$, зростає на $[5;+\infty)$;

$E(y)=[-3;+\infty)$; б) спадає на $(-\infty;2]$, зростає на $[2;+\infty)$; $E(y)=[1;+\infty)$; в) зростає на $(-\infty;4]$; спадає на $[4;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;2]$; г) зростає на $(-\infty;-6]$; спадає на $[-6;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;3]$. **358.** а) $E(y)=[3;+\infty)$; б) $E(y)=[-4;+\infty)$; в) $E(y)=(-\infty;-2]$; г) $E(y)=[1;+\infty)$. **360.** $p=10$; $q=22$. **361.** а) Зростає на $(-\infty;1]$, спадає на $[1;+\infty)$; б) спадає на $(-\infty;1]$, зростає на $[1;+\infty)$. **362.** $a\in(-\infty;9]$. **363.** а) 1 і -2; функція додатна на проміжку $(-2;1)$; функція від'ємна на кожному з проміжків $(-\infty;-2)$ і $(1;+\infty)$; б) 2 і -6; функція додатна на кожному з проміжків $(-\infty;-6)$ і $(2;+\infty)$; функція від'ємна на проміжку $(-6;2)$. **366.** а) $(-\infty;-1]\cup[3,5;+\infty)$; б) $(-1;5)$. **367.** а) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$; б) $(1;2)$; в) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **368.** $[-6;6]$. **369.** $\left[-\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right]$. **370.** а) якщо $a<0$, то всі $x\in(3a;0)$; якщо $a=0$, то розв'язків немає; якщо $a>0$, то всі $x\in(0;3a)$; б) якщо $a<3$, то всі $x\in[a;3]$; якщо $a=3$, то $x=3$; якщо $a>3$, то всі $x\in[3;a]$. **371.** За 20 днів; за 30 днів. **372.** 1,5 кг. **373.** а) $(-\infty;0)\cup[3;4)$; б) $[-5;1,5)\cup[5;+\infty)$; в) $(-\infty;-2)\cup(0;2)$; г) $[0;2)\cup[4;+\infty)$. **374.** а) $(-\infty;-3]\cup(0;3]$; б) $(-\infty;-1)\cup(1;2)$; в) $[-6;1)\cup[2;+\infty)$. **375.** а) $(-\infty;-3]\cup(0;5)$; б) $[-4;2,5)\cup[4;+\infty)$; г) $[-1;3)\cup[4;+\infty)$. **376.** а) $(2;3)\cup(3;4)$; б) $(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$. **377.** а) $(3;2)$; $(-3;-2)$; б) $(2;3)$; $(3;2)$; $(-2;-3)$; $(-3;-2)$. **378.** 30 кг; 20 кг. **379.** 1) а) $a>-5,25$; б) $a=-5,25$; в) $a<-5,25$; 2) а) $-10<a<10$; б) $a=-10$; $a=10$; в) $a<-10$ або $a>10$. **380.** а) $[0;3]$; б) $(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$. **381.** 1,1; на 10 %. **382.** а) 24 хв; б) -4 хв; $+6$ хв; в) 7,21 хв. **387.** 12 см^2. **390.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **391.** 4 см^2. **393.** 4π см^2. **394.** $4\sqrt{7}$ см; $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{19}$ см. **395.** $9\frac{3}{13}$ см. **396.** $2\sqrt{\frac{29}{5}}$ см. **397.** 4 см. **398.** 390 см^2. **399.** 36 см^2. **400.** 4 см; 6 см. **401.** 3 см; 4 см. **402.** $\frac{3}{8}$. **403.** 0,125. **404.** 6. **405.** 4. **406.** 1 і 4. **407.** -10; -14; $d=-4$. **408.** 2;4; 6 або 8; 4; 0. **409.** 2; 4; 8 або 8; 4; 2. **410.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{4}$. **411.** 2127,59 дол. **412.** 4043,45 грн.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Зміст

Вступ 3

Розділ 5. ПЛОСКІ МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ. ПЛОЩА КРУГА

§ 14. Многокутники, правильні многокутники. Вписані й описані многокутники 5

§ 15. Площі многокутників 21

§ 16. Площа круга та його частин 43

§ 17. Розв'язування трикутників (опційно) 59

Готуємося до контрольної роботи до розділу 5 79

Завдання підвищеної складності 82

Головне в розділі 5 84

Розділ 6. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ І ТІЛ ОБЕРТАННЯ. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

§ 18. Площі поверхонь прямої призми та правильної піраміди 86

§ 19. Площі поверхонь циліндра і конуса 103

§ 20. Геометричний підхід до обчислення ймовірностей. Використання формул площ многокутників для обчислення ймовірностей 116

Готуємося до контрольної роботи до розділу 6 133

Завдання підвищеної складності 136

Головне в розділі 6 138

Розділ 7. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКАХ

§ 21. Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей 139

§ 22. Арифметична прогресія. Формула n-го елемента та суми n перших елементів арифметичної прогресії 153

§ 23. Геометрична прогресія. Формула n-го елемента та суми n перших елементів геометричної прогресії 170

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 24. Послідовності датованих сум. Ануїтети. Довічна рента 189
Готуємося до контрольної роботи до розділу 7 203
Завдання підвищеної складності 206
Головне в розділі 7 207

Розділ 8. ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ 7–9 КЛАСІВ

Початковий рівень 209
Середній рівень 229
Достатній рівень 243
Високий рівень 256

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Проєкт до інтегрованого модуля 5. Многокутники та їх використання 265

ВІДПОВІДІ 266

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Підручник інтегрованого курсу для 8 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)

МАТЕМАТИКА 9

ЧАСТИНА 2

Підручник написаний в інноваційному стилі та містить такі матеріали:

- діалоги між учнями та вчителями для мотивації навчальної діяльності
- відповідь на запитання «Навіщо ми це вивчаємо?» для кожного параграфа
- запитання для самоперевірки засвоєння теоретичних знань
- завдання різних рівнів для формування практичних навичок із математики
- завдання для повторення та підготовки до вивчення нового матеріалу
- завдання підвищеної складності
- логічні блок-схеми «Головне в розділі» для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу
- «цікавинки» — матеріал щодо історії виникнення математичних знань і їх застосування
- відомості про досягнення українських математиків і їх внесок у науку

Інтерактивний електронний додаток до підручника містить:

- тестові завдання за кожною темою з автоматичною перевіркою результату
- авторські відео, що доповнюють і поглиблюють навчальний матеріал, сприяють його кращому усвідомленню та розширюють математичний кругозір

Проєкт підручника видавництва «Ранок»