ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Миляник
Юлія Простакова

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

МАТЕМАТИКА 9

ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 1



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Олександр Школьний, Євген Нелін,
Андрій Миляник, Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

підручник інтегрованого курсу
для 9 класу закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)

Частина 1

Видавництво «Ранок»
2026

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Створено відповідно до модельної навчальної програми
«Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В.,
Простакова Ю. С., Школьний О. В.)

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Миляник
Юлія Простакова

Математика

Підручник інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)

Частина 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/111352

Інтерактивний
електронний додаток

Київ • Харків
Видавництво «Ранок»
2026

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

УДК 51:37.016(075.3)
Ш 67

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 № 110)

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.)

Підручник успішно пройшов апробацію у 2025/2026 навчальному році
(наказ Міністерства освіти і науки України від 02.02.2026 № 142)

Ілюстрації *Володимира Хорошенка*

Школьний О. В.
Ш 67 Математика : підруч. інтегр. курсу для 9 кл. закл. загал. серед. освіти (у 2-х ч.). Ч. 1 / О. В. Школьний, Є. П. Нелін, А. І. Миляник, Ю. С. Простакова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2026.

УДК 51:37.016(075.3)

Інтерактивний електронний додаток до підручника доступний за QR-кодом або посиланням **rnk.com.ua/111352**

© Школьний О. В., Нелін Є. П., Миляник А. І., Простакова Ю. С., 2026
© Хорошенко В. Д., ілюстрації, 2026
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2026

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Вельмишановне панство!

Ви продовжуєте вивчати математику. І користь від вивчення математики подвійна: з одного боку, за її допомогою можна знаходити розв'язки багатьох проблем, що виникають у повсякденному житті, а з іншого боку, математика — це своєрідний фітнес для розуму, який допомагає тримати ваше мислення в тонусі, готовим до багатьох сюрпризів навколишнього світу.

Щоб вивчення цієї науки було цікавішим, вам знову допомагатимуть Петрик і Тетянка (вони теж навчаються у 9 класі), а також учитель, учителька та дідусь Тарас — учитель математики на пенсії.



Тетянка Петрик Учителька Учитель Дідусь Тарас

Теоретичний матеріал підручника подано у формі *чату*, у якому беруть участь згадані персонажі. Нижче — невеличка «екскурсія» підручником. Сподіваємося, вона буде цікавою та корисною!

Мотиваційна частина (для розуміння, «навіщо ми це вивчаємо»)

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ **CHAPTER 1. QUADRATIC FUNCTION**

§ 7. Функції та їх властивості. Перетворення графіків функцій



Привіт, Петрику! На канікулах були на екскурсії, і в одному з київських парків я побачила цікавий фонтан — ось, поглянь на фото. Можливо, ти будеш сміятися, але я чомусь одразу подумала про функцію $y = x^2$, коли поглянула на цю чашу.



А чому я маю сміятися? Дідусь Тарас каже, що *математика завжди навколо нас, треба тільки уважно придивитися*. Проте на $y = x^2$ чаша фонтана насправді не дуже схожа: вона такої самої

Вивчимо тепер властивості рухів. Для зручності подальших міркувань дамо означення простого відношення трьох точок на прямій.

Нехай точки A, B, C лежать на одній прямій, причому точка C належить відрізку AB (рис. 2.2). Простим відношенням трьох точок на прямій будемо називати число $m=\frac{AC}{CB}$.

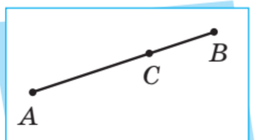


Рис. 2.2

Просте відношення трьох точок на прямій іноді записують так: $(C, AB)=m$.

А тепер доведемо важливе твердження.

ТЕОРЕМА (основна властивість рухів).

Будь-який рух f довільні три точки, що лежать на одній прямій, переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок.

Тобто, якщо A, B, C — довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB, $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB}$.

Теоретичний матеріал

Основні означення — їх формулювання слід запам'ятати

Основні властивості й теореми, зміст яких слід запам'ятати

Приклади розв'язувань

Приклад

Конус утворено обертанням прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см навколо меншого з них. Знайдемо площу повної поверхні конуса.

Розв'язання. У нашому випадку висота конуса $H=6$ см, радіус основи конуса $R=8$ см, а твірна $L=\sqrt{H^2+R^2}=10$ см. Отже, площа повної поверхні цього конуса $S_{\text{п}}=\pi R^2+\pi RL=64\pi+80\pi=144\pi$ (см^2).

Більше про використання властивостей числових нерівностей: rnk.com.ua/112070, rnk.com.ua/112071

Електронний інтерактивний додаток

Перевірте себе!

1. Наведіть приклади правильних числових нерівностей.
2. Яким чином можна порівнювати два дійсних числа? Наведіть відповідне означення.
3. Сформулюйте властивості числових нерівностей.

Контрольні запитання, які дозволять зрозуміти, чи добре ви засвоїли теоретичний матеріал

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть за допомогою нерівності таку ситуацію:
   а) довжина ручки (r) менша від довжини олівця (o);
   б) вага телефона (t) не перевищує 200 грам;
   в) дальність польоту безпілотника (d) становить понад 500 км.

Тренувальні вправи чотирьох рівнів: початкового, середнього, достатнього, високого. Пам'ятаємо, що математика — це фітнес для розуму!

Завдання для роботи в класі

Завдання для роботи вдома

39. Планове завдання щодо обсягу виробництва на фірмі «Успіх» на 2024 р., порівнюючи з фактичним обсягом виробництва за 2023 р., становило 105 %. Виконання плану в 2024 р. становило 102 %. Знайдіть показник динаміки.

40. Планове завдання щодо обсягу виробництва на фірмі «Мрія» на 2024 р., порівнюючи з фактичним обсягом виробництва за 2023 р., становило 110 %. Виконання плану в 2024 р. становило 103 %. Знайдіть показник динаміки.



Ключові завдання: результати або методи їх розв'язування можуть бути корисними під час розв'язування інших завдань

Високий рівень

39. Доведіть, що площа довільного паралелограма дорівнює добутку двох сусідніх сторін на синус кута між ними.

40. Доведіть, що площа довільного опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

Матеріал для розширення кругозору та додаткового вивчення.

Відомості про фото та джерела інформації, використані в підручнику, зокрема для матеріалів цієї рубрики: rnk.com.ua/112157





Цікавинки від дідуся Тараса

Ви вже знаєте, що для запису множини розв'язків нерівності, яка не має розв'язків, використовують символ $\varnothing$. Наприклад, так можна записати множину розв'язків нерівності $|x|<-10$. Однак іноді в інтернеті можна побачити запис $x\in\varnothing$ як відповідь до згаданої нерівності. Але такий запис є математично некоректним. Справді, за означенням порожня множина $(\varnothing)$ — це множина, яка не містить жодного елемента. Тому очевидно, що жоден елемент x не може належати цій множині, а запис $x\in\varnothing$ саме це і стверджує. Отже, запис $x\in\varnothing$ не можна вживати як відповідь до нерівності, яка не має розв'язків.

Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи траплявся вам в інтернеті запис $x\in\varnothing$? Якщо так, то радимо на відповідному ресурсі зробити коментар або зауваження щодо математичної некоректності такого запису. Дбаймо разом про чистоту математичної мови!
2. Дізнайтеся більше про символи для скорочення математичних записів. Підготуйте невелике повідомлення.
3. Чи використовуєте ви власні спеціальні символи для скорочення математичних записів? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.

Цей матеріал збагатить вас новими знаннями та вміннями. За можливості обов'язково опрацюйте його

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть графічним способом рівняння $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$.
2. У крамниці три пачки гречаної крупи та дві пачки рисової крупи коштують 340 грн, а чотири пачки рисової крупи — на 20 грн більше, ніж п'ять пачок гречаної крупи. Скільки коштує одна пачка гречаної крупи й одна пачка рисової крупи в цій крамниці?

Завдання, які дозволять вам не забути вивчене раніше та бути готовими до нових сюжетних поворотів у вивченні математики 9 класу

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 4

rnk.com.ua/114533

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Котик Байрон 10 грудня мав масу 6,5 кг, а 10 січня — 7,2 кг. Тоді відношення $\frac{7,2}{6,5}$ є відносним показником...

А	Б	В	Г
планового завдання	виконання плану	динаміки	порівняння

Завдання для тематичного оцінювання (у двох варіантах) допоможуть згадати вивчене та підготуватися до контрольних робіт

Завдання для тих, хто хоче досягти більшого

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. У паралелограмі зробили отвір прямокутної форми (рис. 1). Проведіть пряму, яка ділить частину паралелограма, що залишилася, на дві рівновеликі частини. Відповідь обґрунтуйте.

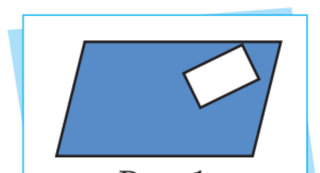


Рис. 1

Систематизація вивченого матеріалу у вигляді блок-схем

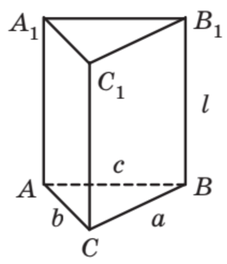
ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 6

Площі поверхонь

$S_п$ — площа повної поверхні, $S_б$ — площа бічної поверхні, $S_о$ — площа основи

Многогранники

❶ **Пряма n-кутна призма**



$S_п = 2S_о + S_б$

$P_о = a + b + c$

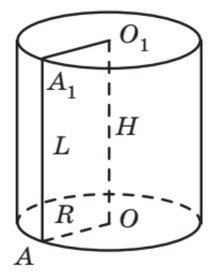
$S_б = P_о \cdot l$

$(n = 3)$

❷ **Правильна n-кутна піраміда**

Тіла обертання

❶ **Циліндр** $(L = H)$



$S_п = 2S_о + S_б$

$S_б = 2\pi R \cdot H$

$S_о = \pi R^2$

❷ **Конус** $(L^2 = H^2 + R^2)$

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкти за наведеними нижче схемами.

Проєкт до інтегрованого модуля 1. Симетрія в мистецтві

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя / вчительки сформуйте групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Робота над навчальними проєктами допоможе усвідомити важливість математики в реальному житті

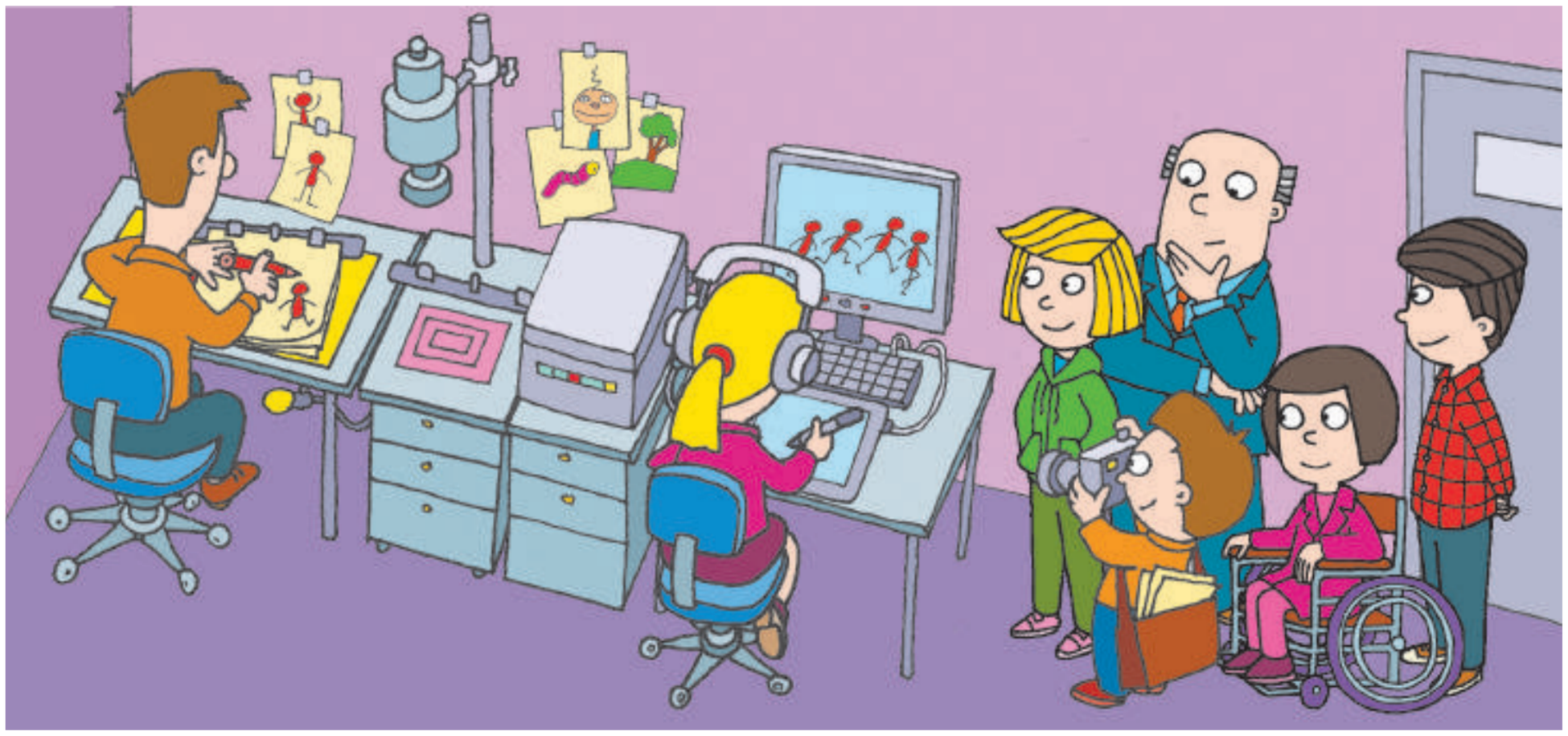
Бажаємо вам успіхів у вивченні математики!

Усе у вас вийде, вірте в себе!

РОЗДІЛ 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

CHAPTER 1. GEOMETRIC TRANSFORMATIONS AND THEIR USE

§ 1. Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання





Привіт, Петрику! От іще одне літо промайнуло, і ми вже в 9 класі. Яке твоє найяскравіше враження за час канікул?



Привіт! Так, літо завжди минає швидко. А щодо вражень, то мені найбільше запам'яталася екскурсія на студію анімаційних фільмів. Там нам спочатку розповіли, як створювали мультики раніше: показали ляльки та маріонеток, які рухали й після кожної зміни положення фотографували. А потім зі світлин робили рухому картинку, яку переносили на плівку. Складний процес, але доволі цікавий.



Думаю, сучасні мультфільми створюють не так. Напевно, використовують комп'ютер. Спочатку малюють героя, а потім переміщують його зображення по екрану. При цьому, якщо треба, за допомогою комп'ютера героя можна збільшити чи зменшити, зробити худим і високим чи низеньким і товстеньким. Я таке можу робити в графічному редакторі.



Я теж умію працювати в простому графічному редакторі, але на студії програми складніші. Щоб їх опанувати, треба багато вчитися. І взагалі, створення мультфільму — це доволі складно. Але мене турбує інше: як комп'ютерні програми рухають об'єкти та змінюють їхню форму на екрані? Я запитав про це працівника студії, але він лише усміхнувся і сказав, що для цього треба добре знати математику.



Думаю, що мають бути якісь формули, за допомогою яких виконують різні *перетворення* плоских об'єктів. І кожна формула, мабуть, визначає певне перетворення: одна — *рух* об'єкта площиною, інша — зміну його розмірів. При цьому напевно є формула, що визначає збільшення всіх розмірів об'єкта, а є й така, за якою знаходять його *стиск* чи *розтяг* лише по горизонталі або вертикалі.



Як цікаво! У 8 класі ми вчили, що в разі збільшення довжин усіх сторін трикутника в ту саму кількість разів отримаємо подібний трикутник. Тож, мабуть, якщо збільшити всі відстані між точками в якомусь плоскому об'єкті, вийде *подібний* йому об'єкт. Думаю, треба спитати про все це у вчителів.



Звісно, про все розповімо, адже геометричні перетворення площини — дуже цікавий розділ математики — мають численні практичні застосування. Почнімо, як завжди, з означень.

Нехай задано деяке правило f, згідно з яким кожній точці M площини відповідає *лише одна* точка M' цієї самої площини.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Точку M' називають образом точки M, а точку M — прообразом точки M' для правила f і записують $f(M)=M'$ або $f: M \to M'$. Також говорять, що правило f точку M переводить у точку M'.

Правило f називають геометричним перетворенням площини, якщо:

1) для будь-якої точки M' площини у цій самій площині існує її прообраз — точка M, тобто $f(M)=M'$;
2) для будь-яких двох різних точок M і K площини їхні образи M' і K' також різні, тобто $f(M) \neq f(K)$.



Геометричні перетворення площини (далі будемо називати їх також просто перетвореннями, без додаткових уточнень) зазвичай позначають маленькими латинськими або грецькими літерами: f, g, h, θ, ω тощо.

Множину образів Φ' усіх точок деякої геометричної фігури Φ за перетворення f називають образом цієї геометричної фігури, а геометричну фігуру Φ — прообразом геометричної фігури Φ'. При цьому говорять, що перетворення f переводить геометричну фігуру Φ у фігуру Φ', і записують $f(\Phi)=\Phi'$ або $f: \Phi \to \Phi'$. Також можна сказати, що фігура Φ переходить у фігуру Φ' за перетворення f.

Наприклад, якщо перетворення f переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$, тобто відрізок AB переходить у відрізок $A'B'$ за перетворення f, то це записують так: $f(AB)=A'B'$ або $f: AB \to A'B'$.



Наведемо кілька *прикладів геометричних перетворень площини*.

Приклад 1

Найпростішим геометричним перетворенням площини є тотожне перетворення. Таке перетворення будь-якій точці площини ставить у відповідність саму себе, тобто тотожне перетворення будь-яку точку і будь-яку геометричну фігуру площини переводить

саму в себе. Іншими словами, якщо тотожне перетворення позначити літерою θ, то $\theta(M)=M$ і $\theta(\Phi)=\Phi$ для будь-якої точки M і будь-якої геометричної фігури Φ площини.

Приклад 2

Нехай задано деякий вектор $\vec{a}$. Якщо будь-якій точці M площини перетворення f ставить у відповідність точку M' так, що $\overrightarrow{MM'}=\vec{a}$, то таке перетворення f називають паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$.

На рис. 1.1 показано, як побудувати образ M' точки M за такого перетворення.

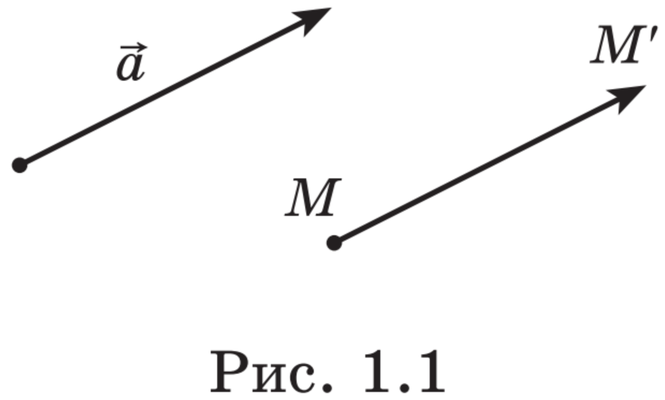


Рис. 1.1



Здається, що саме завдяки цьому перетворенню можна *рухати* героїв мультфільму по екрану в певному напрямку.



Саме так, Петрику, але про це ми детальніше поговоримо в наступному параграфі. А зараз продовжимо розглядати приклади перетворень.

Приклад 3

Нехай задано деяку точку O. Якщо будь-якій точці M площини перетворення f ставить у відповідність точку M' так, що точка O є серединою відрізка MM' (див. рис. 1.2), то таке перетворення f називають симетрією відносно точки O або центральною симетрією із центром у точці O. Також будемо вважати, що центральна симетрія точку O (центр симетрії) переводить саму в себе.

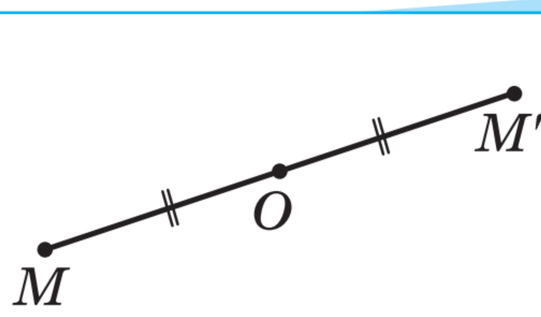


Рис. 1.2

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Приклад 4

Нехай задано деяку пряму l. Якщо будь-якій точці M площини, що належить прямій l, перетворення f ставить у відповідність саму себе, а будь-якій точці M площини, що не належить прямій l, — точку M' так, що відрізок MM' перпендикулярний до прямої l і перетинає її в точці P, а ця точка P є серединою відрізка MM' (див. рис. 1.3), то таке перетворення f називають симетрією відносно прямої l або осьовою симетрією з віссю l.

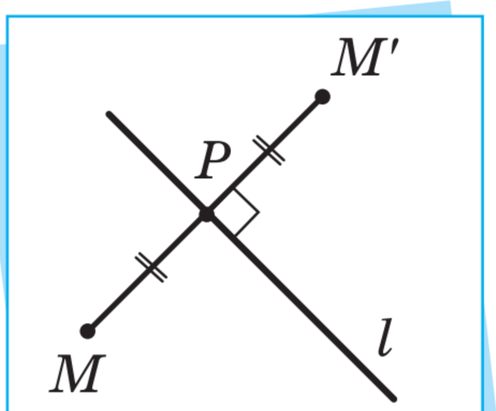


Рис. 1.3

Приклад 5

Нехай задано деяку точку O і кут φ. Якщо будь-якій точці M площини перетворення ставить у відповідність точку M_1 так, що $OM_1 = OM$ і $\angle MOM_1 = \varphi$ (див. рис. 1.4), то таке перетворення називають поворотом на кут φ відносно точки O проти ходу годинникової стрілки. А якщо точці M перетворення ставить у відповідність точку M_2 так, що $OM_2 = OM$ і $\angle MOM_2 = \varphi$, то таке перетворення називають поворотом на кут φ відносно точки O за ходом годинникової стрілки. Також будемо вважати, що поворот точку O (центр повороту) переводить саму в себе. При цьому точку O називають центром повороту, а кут φ — кутом повороту.

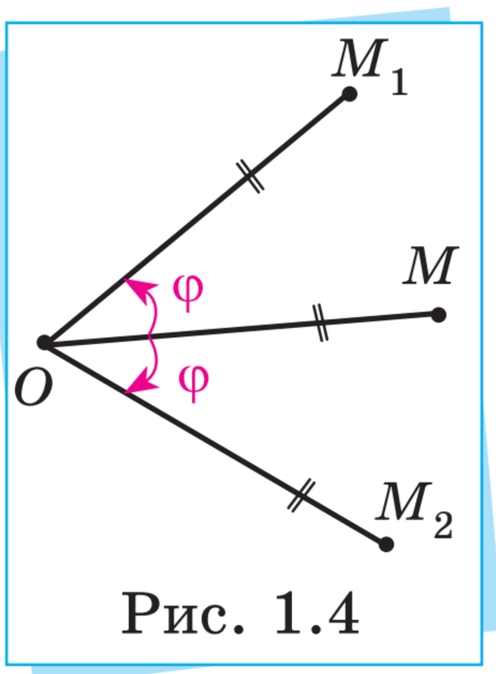


Рис. 1.4

У § 2 ми покажемо, що всі наведені вище перетворення певною мірою схожі — вони переводять довільний відрізок у рівний йому відрізок. Але є перетворення, які не мають такої властивості.

Приклад 6

Нехай задано деяку точку O і деяке число $\lambda > 0$. Якщо перетворення g будь-якій точці M площини ставить у відповідність

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

точку M' так, що $\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$ (див. рис. 1.5), то таке перетворення називають гомотетією із центром у точці O і коефіцієнтом λ. Також будемо вважати, що гомотетія точку O (центр гомотетії) переводить саму в себе.

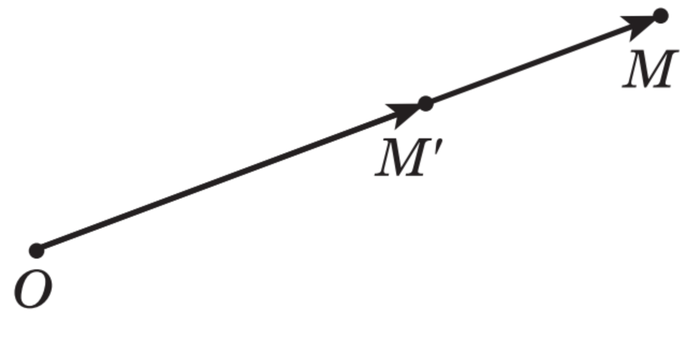


Рис. 1.5

Приклад 7

Нехай задано деяку пряму l і деяке число $k > 0$ і нехай перетворення h будь-якій точці прямої l ставить у відповідність саму себе, а будь-якій точці M площини, що не належить прямій l, ставить у відповідність точку M' так, що (див. рис. 1.6):

1) точки M і M' лежать в одній півплощині відносно прямої l;

2) пряма MM' перпендикулярна до прямої l і перетинає її в точці P;

3) $PM' = k \cdot PM$.

Таке перетворення h називають деформацією з коефіцієнтом k до прямої l.

Природно вважати цю деформацію стиском, якщо $k < 1$, і розтягом, якщо $k > 1$.

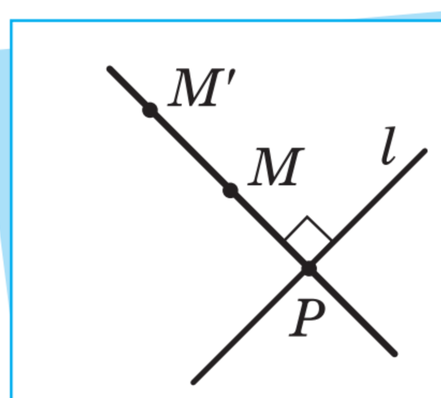


Рис. 1.6



Зверніть увагу: якщо $k = 1$, то деформація до прямої є тотожним перетворенням. *Переконайтеся в цьому самостійно.*



Зрозуміла, деформація до прямої якраз і є тим перетворенням, яке дає змогу зробити героїв мультфільмів або худими й високими, або низенькими й товстенькими. Для першого випадку використовується розтяг, а для другого — стиск. Цікаво, а як навчити комп'ютер виконувати і паралельне перенесення, і деформацію, і інші перетворення? Він же не розуміє слів, а отже, мають бути якісь формули.



Звісно, Тетянко, такі формули є, хоч їх не завжди просто вивести. Їх називають аналітичним заданням геометричного перетворення площини. Ці формули пов'язують координати довільної точки M площини та її образу M' за перетворення f у деякій прямокутній декартовій системі координат (ПДСК).

Наприклад, нехай f — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$. Виведемо його аналітичне задання. Нехай у деякій ПДСК $\vec{a}(a_1; a_2)$, $M(x; y)$ — довільна точка площини, а $M'(x'; y')$ — її образ за перетворення f, тобто $f(M) = M'$. За означенням паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$ маємо рівність векторів $MM' = \vec{a}$. Оскільки $\overrightarrow{MM'}(x' - x; y' - y)$, то $x' - x = a_1$ і $y' - y = a_2$, звідки $\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2. \end{cases}$

Ці формули і є аналітичним заданням паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$.



Аналітичне задання перетворення дає змогу шукати для цього перетворення координати образу точки за даними координатами її прообразу й навпаки.

Справді, нехай f — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}(3; -4)$. Знайдемо координати образу точки $A(-4; 5)$ і прообразу точки $B'(7; 0)$ за цього перетворення. Запишемо аналітичне задання перетворення f: $\begin{cases} x' = x + 3, \\ y' = y - 4. \end{cases}$

Нехай $f(A) = A'$ і $f(B) = B'$. Оскільки точка A' є образом точки A, то $A'(x'; y')$, і з аналітичного задання f маємо: $x' = -4 + 3 = -1$, $y' = 5 - 4 = 1$. Отже, $A'(-1; 1)$. Оскільки точка B є прообразом точки B', то $B(x; y)$, і з того самого аналітичного задання маємо: $7 = x + 3$ і $0 = y - 4$, звідки $x = 4$ і $y = 4$. Отже, $B(4; 4)$.



Власне, образ даної точки за перетворення f не обов'язково позначати тією самою літерою зі штрихом. Наприклад, для попереднього прикладу можна було вважати, що $f(A) = C$, і знаходити координати точки C так само, як і точки A'. Також в умові

попереднього прикладу можна було не позначати точку, прообраз якої ми знаходили як B', а позначити її як D і вважати, що $f(B)=D$. При цьому координати точки B за даними координатами точки D знаходили б так само, як і за даними координатами точки B'.



Виведемо також аналітичне задання симетрії f відносно даної точки O.

Розглянемо на площині деяку ПДСК. Нехай у цій ПДСК $O(x_0;y_0)$ — центр симетрії, $M(x;y)$ — довільна точка площини, $f: M \to M'(x';y')$ (рис. 1.7).

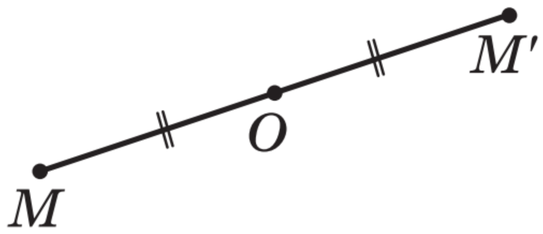


Рис. 1.7

За означенням симетрії відносно точки O ця точка має бути серединою відрізка MM', а отже, $x_0=\dfrac{x+x'}{2}$, $y_0=\dfrac{y+y'}{2}$. Із останніх двох рівностей отримуємо: $\begin{cases} x'=2x_0-x, \\ y'=2y_0-y. \end{cases}$ Ці формули є аналітичним заданням симетрії відносно точки $O(x_0;y_0)$.

Якщо $O(0;0)$, то аналітичне задання центральної симетрії набуде вигляду $\begin{cases} x'=-x, \\ y'=-y. \end{cases}$ Ці формули є аналітичним заданням симетрії відносно початку координат.



Зауважимо, що наведене аналітичне задання симетрії відносно даної точки враховує і випадок, коли точка M збігається із центром симетрії O. Справді, у цьому випадку за формулами аналітичного задання $f(O(x_0;y_0))=O(x_0;y_0)$, що й має бути за означенням.



Для центральної симетрії також можна шукати координати образів і прообразів даних точок.

Наприклад, знайдемо образ і прообраз точки $A(-1;2)$ за симетрії f відносно точки $O(3;-2)$. Для цього запишемо аналітичне

задання цієї симетрії. У нас $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, а отже, шукане аналітичне задання має вигляд $\begin{cases} x' = 6 - x, \\ y' = -4 - y. \end{cases}$ Нехай тепер $f(B) = A$ і $f(A) = C$, тобто точка B є прообразом точки A, а точка C — образом точки A за перетворення f.

Для знаходження координат точки C потрібно в аналітичне задання перетворення f підставити координати точки A замість координат без штрихів: $\begin{cases} x' = 6 - (-1) = 7, \\ y' = -4 - 2 = -6, \end{cases}$ тобто $C(7; -6)$. А для знаходження координат точки B потрібно в аналітичне задання перетворення f підставити координати точки A замість координат зі штрихами і розв'язати відповідні рівняння: $\begin{cases} -1 = 6 - x, \\ 2 = -4 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7, \\ y = -6. \end{cases}$ Отже, $B(7; -6)$, тобто точки C і B збігаються. Цей висновок також можна отримати й безпосередньо, користуючись означенням симетрії відносно даної точки.



Аналогічно до аналітичного задання паралельного перенесення та центральної симетрії можна вивести й аналітичне задання тотожного перетворення, симетрії відносно осі абсцис, симетрії відносно осі ординат, деформації з коефіцієнтом k до осі абсцис та деформації з коефіцієнтом k до осі ординат.

Для тотожного перетворення θ аналітичне задання матиме вигляд: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases}$ для симетрії відносно осі Ox: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases}$ для симетрії відносно осі Oy: $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \end{cases}$ для деформації з коефіцієнтом k до осі Ox: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky, \end{cases}$ для деформації з коефіцієнтом k до осі Oy: $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases}$

Детальніше про це:
rnk.com.ua/111766





Насамкінець виведемо аналітичне задання гомотетії g із центром у точці O і коефіцієнтом λ.

Розглянемо на площині деяку ПДСК. Нехай у цій ПДСК $O(x_0; y_0)$ — центр гомотетії, λ — деяке додатне число, $M(x; y)$ — довільна точка площини, а $f: M \to M'(x'; y')$ (див. рис. 1.5). За означенням гомотетії $\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$. Оскільки $\overrightarrow{OM'}(x' - x_0; y' - y_0)$, $\overrightarrow{OM}(x - x_0; y - y_0)$, то $x' - x_0 = \lambda(x - x_0)$ і $y' - y_0 = \lambda(y - y_0)$, звідки після перетворень отримуємо: $\begin{cases} x' = \lambda x + x_0(1 - \lambda), \\ y' = \lambda y + y_0(1 - \lambda). \end{cases}$ Ці формули і є аналітичним заданням гомотетії із центром у точці $O(x_0; y_0)$ та коефіцієнтом λ.



Якщо $O(-3; 7)$, а $\lambda = 2$, то аналітичне задання гомотетії матиме вигляд $\begin{cases} x' = 2x - 3(1 - 2), \\ y' = 2y + 7(1 - 2) \end{cases}$ або $\begin{cases} x' = 2x + 3, \\ y' = 2y - 7. \end{cases}$

На окрему увагу заслуговує аналітичне задання гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом λ. Неважко переконатися, що воно має вигляд $\begin{cases} x' = \lambda x, \\ y' = \lambda y. \end{cases}$

Для гомотетії, як і для інших перетворень, за її аналітичним заданням можна шукати образи й прообрази точок з даними координатами. Наприклад, для розглянутої вище гомотетії із центром у точці $O(-3; 7)$ і коефіцієнтом $\lambda = 2$ образом точки $P(2; 1)$ буде точка $P'(x'; y')$, де $x' = 2 \cdot 2 + 3 = 7$, $y' = 2 \cdot 1 - 7 = -5$, тобто $P'(7; -5)$.



Аналітичне задання повороту відносно даної точки на заданий кут у загальному випадку є досить складним, із ним ви познайомитесь у вищій школі.

Детальніше про побудову образів точок за перетворень із прикладів, розглянутих у § 1: rnk.com.ua/111767



Перевірте себе!

1. Дайте означення геометричного перетворення площини.
2. Як записати, що: а) точка A' є образом точки A за перетворення f; б) перетворення f переводить геометричну фігуру Ф у фігуру Ф′?
3. Дайте означення:
   а) тотожного перетворення;
   б) паралельного перенесення на даний вектор;
   в) симетрії відносно даної точки;
   г) симетрії відносно даної прямої;
   д) повороту відносно даної точки на даний кут;
   е) гомотетії із центром у даній точці й заданим коефіцієнтом;
   є) деформації з даним коефіцієнтом до даної прямої.
4. Що називають аналітичним заданням геометричного перетворення? Наведіть аналітичне задання:
   а) тотожного перетворення;
   б) паралельного перенесення на даний вектор;
   в) симетрії відносно даної точки;
   г) симетрії відносно даної осі абсцис (ординат);
   д) гомотетії із центром у даній точці й заданим коефіцієнтом;
   е) деформації з даним коефіцієнтом до осі абсцис (ординат).

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Укажіть, яка точка є образом, а яка прообразом за перетворення f, якщо:
   а) $f(A)=B$; б) $f(C)=D$; в) $f(E)=G$; г) $f(H)=K$.
2. Укажіть, яка точка є образом, а яка прообразом за перетворення g, якщо:
   а) $g(X)=Y$; б) $g(Z)=V$; в) $g(N)=L$; г) $g(M)=P$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

3. У якому з випадків *а*–*в* (рис. 1) зображено фотографії Тетянки, які є образом і прообразом за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$?

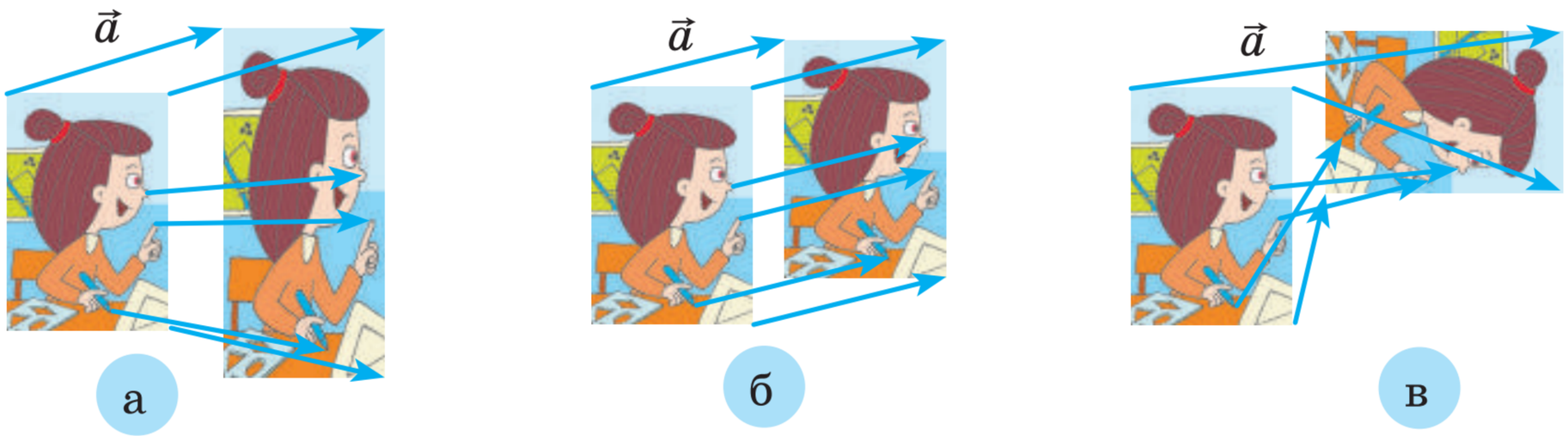


Рис. 1

4. У якому з випадків *а*–*в* (рис. 2) зображено фотографії Петрика, які є образом і прообразом за паралельного перенесення на вектор $\vec{b}$?

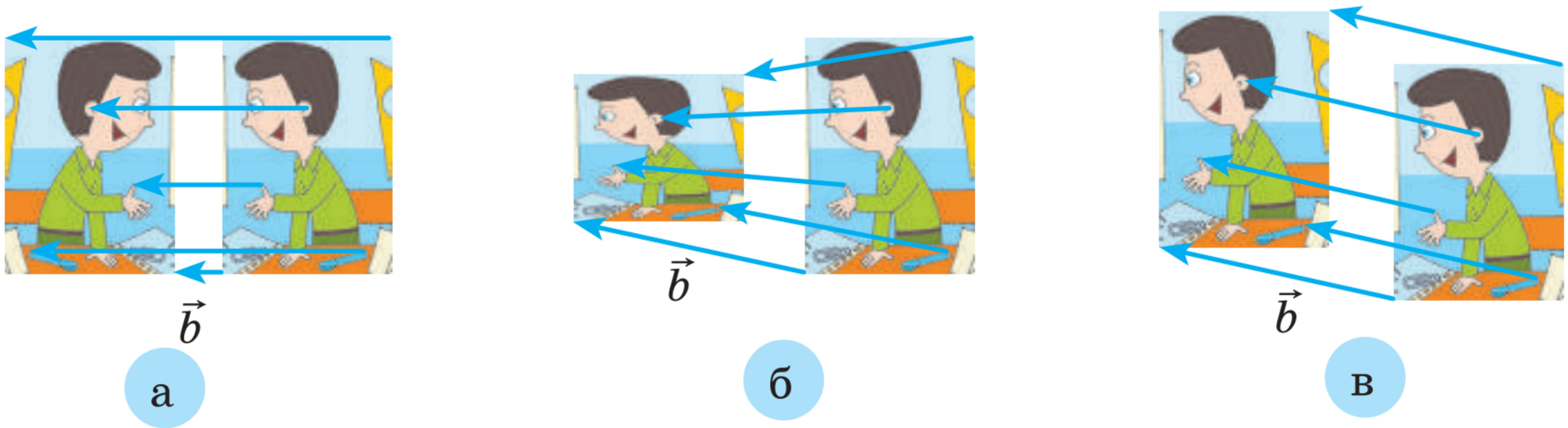


Рис. 2

5. У якому з випадків *а*–*в* (рис. 3) зображено фотографії Петрика, які є образом і прообразом за симетрії відносно точки O?

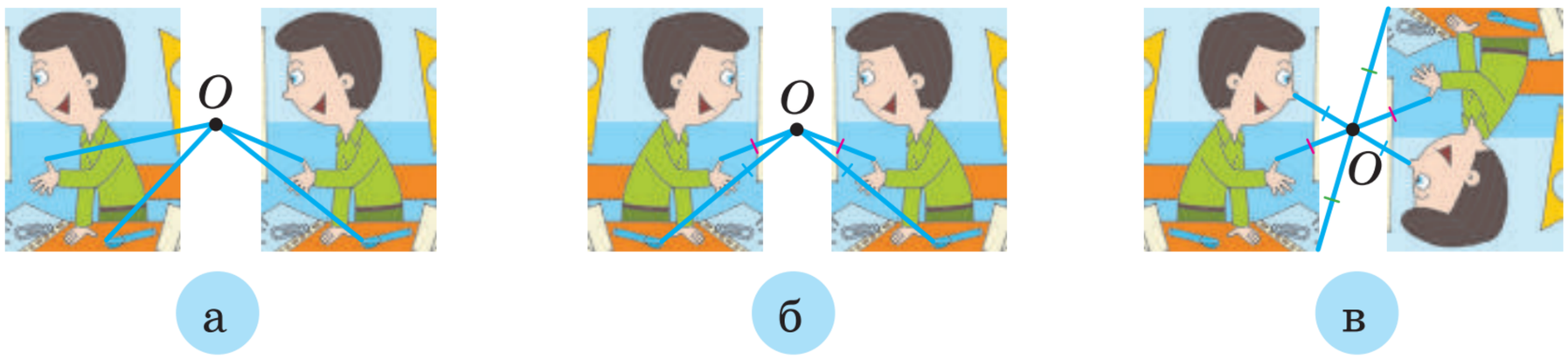


Рис. 3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

6. У якому з випадків *а*–*в* (рис. 4) зображено фотографії Тетянки, які є образом і прообразом за симетрії відносно прямої n?

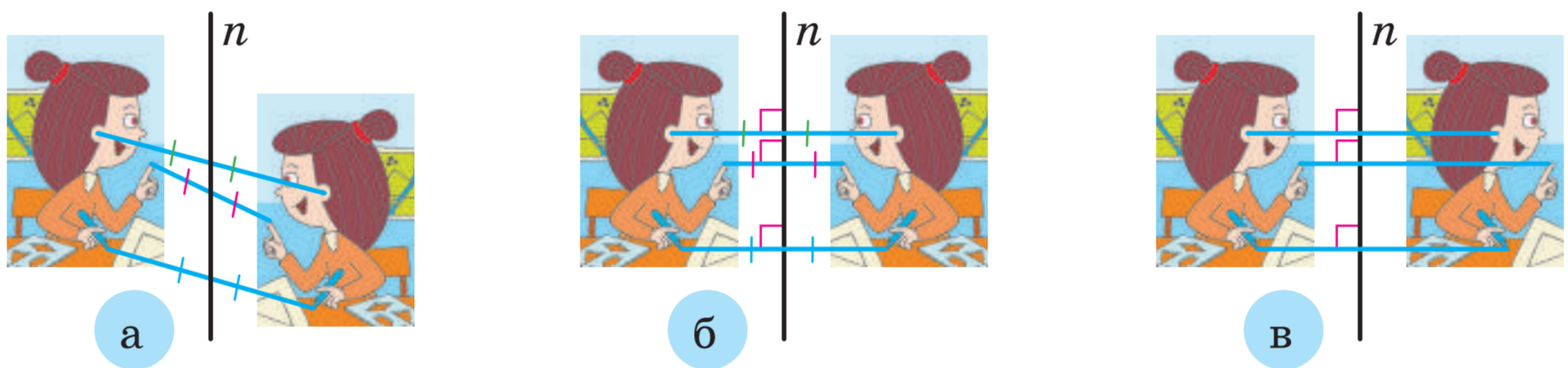


Рис. 4

7. Перетворення f точку K переводить у точку K' так, як зображено на рис. 5. Чи є перетворення f симетрією відносно точки O?

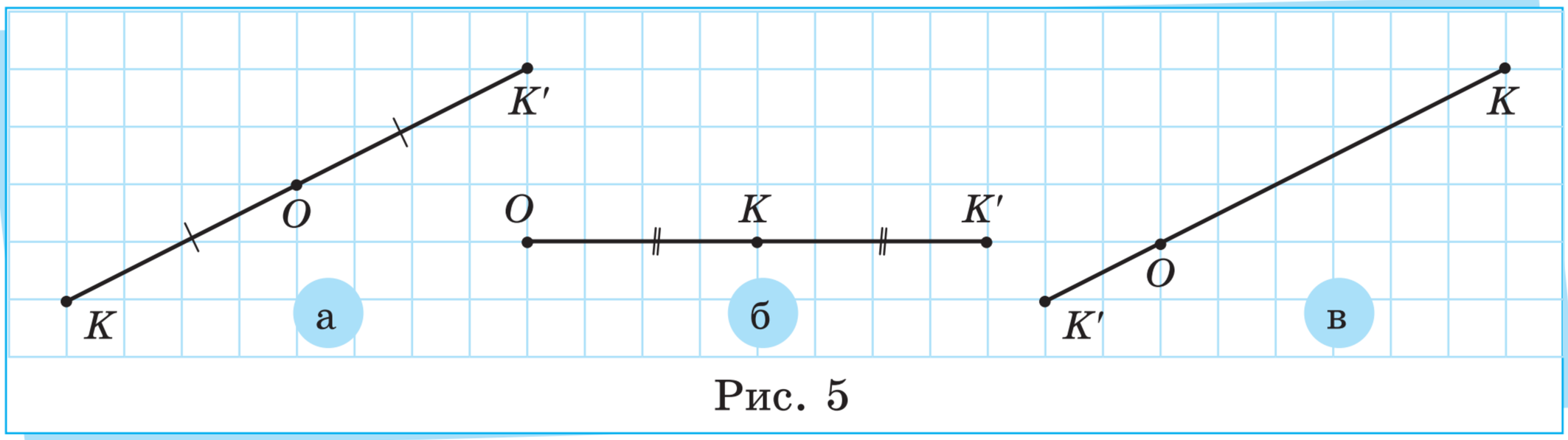


Рис. 5

8. Перетворення g точку B переводить у точку B' так, як зображено на рис. 6. Чи є перетворення g симетрією відносно точки O?

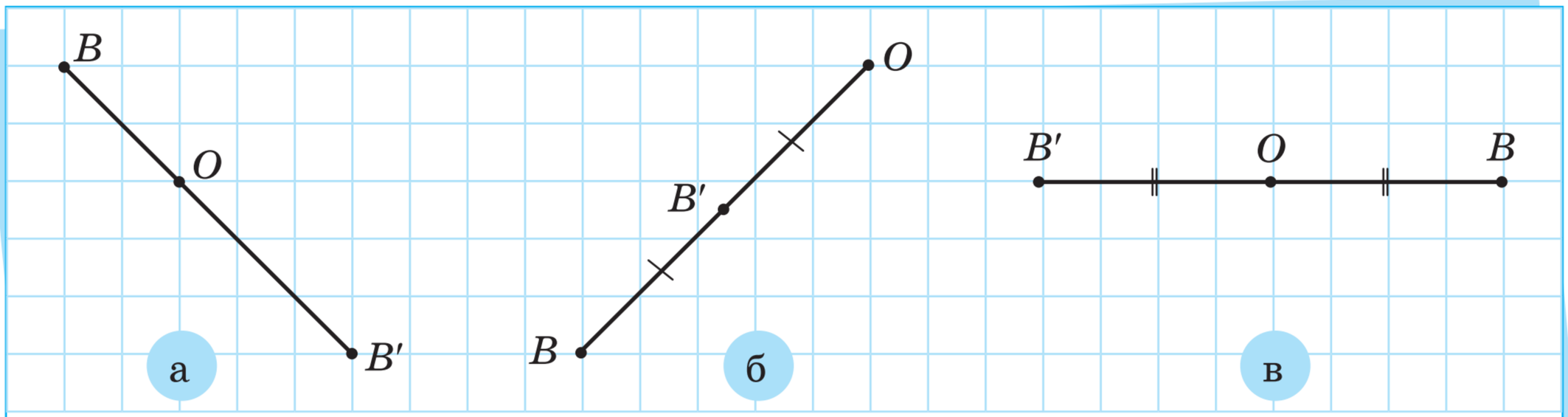
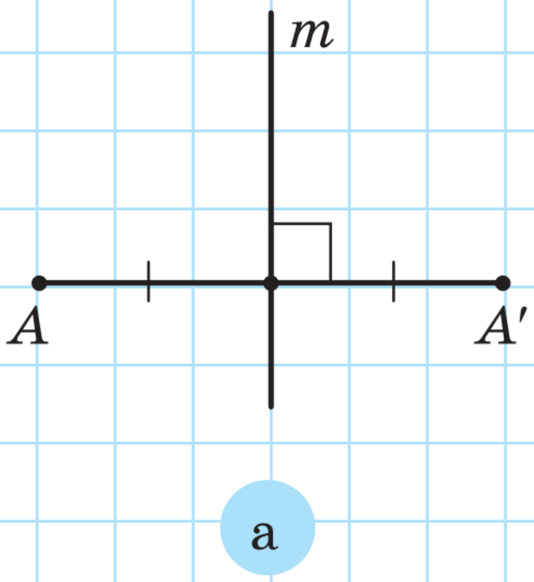


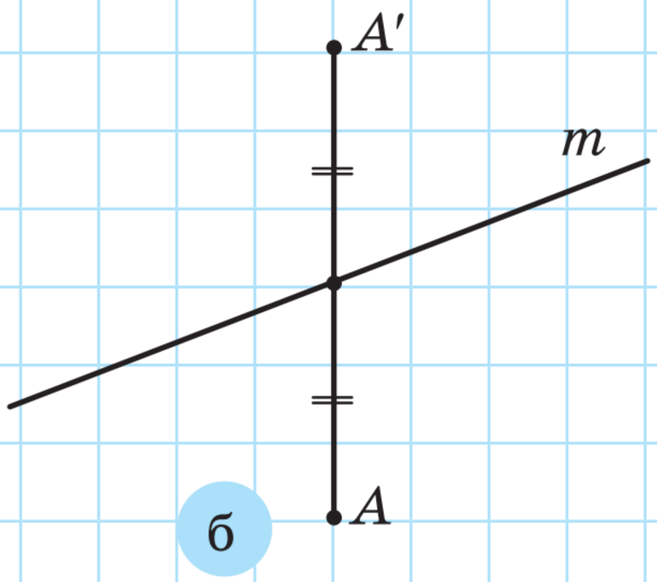
Рис. 6

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

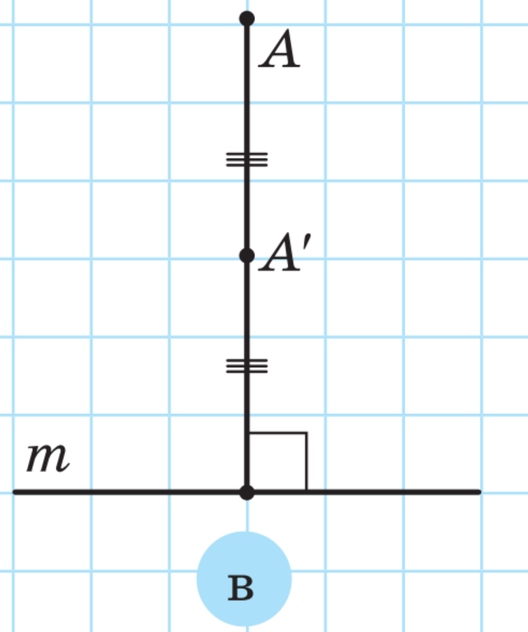
9. За перетворення h точка A переходить у точку A' так, як зображено на рис. 7. Рівні відрізки позначено однаковими штрихами. Чи є перетворення h симетрією відносно прямої m?



а



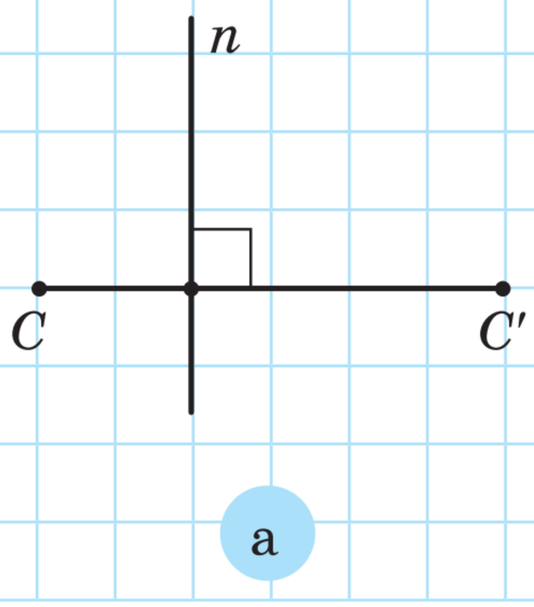
б



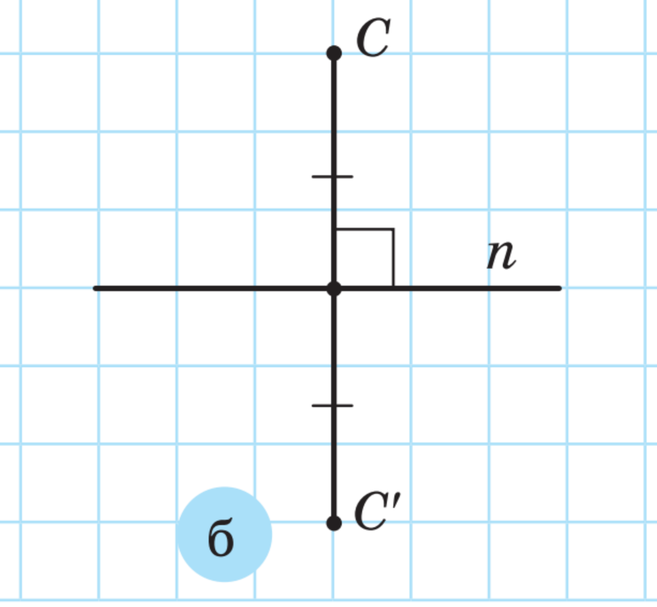
в

Рис. 7

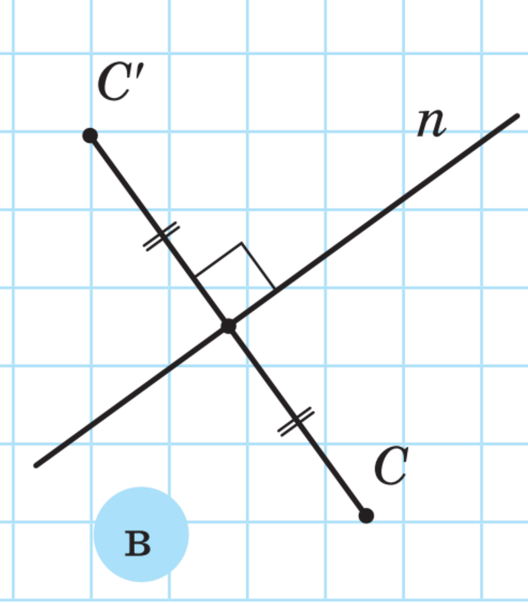
10. За перетворення f точка C переходить у точку C' так, як зображено на рис. 8. Рівні відрізки позначено однаковими штрихами. Чи є перетворення f симетрією відносно прямої n?



а



б



в

Рис. 8

11. На рис. 9 зображено фотографії Тетянки, які є прообразом та образом за повороту на кут 90° за ходом годинникової стрілки. Яка точка є центром повороту? Які відрізки рівні?

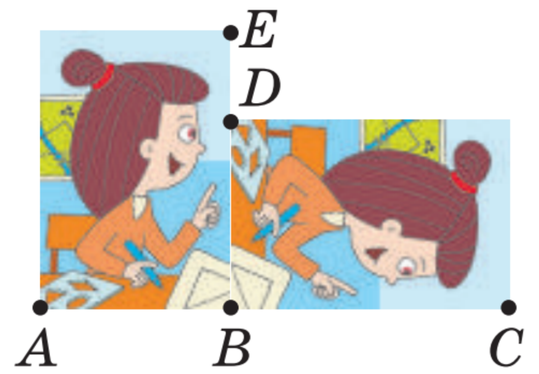


Рис. 9

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. На рис. 10 зображено фотографії Петрика, які є прообразом та образом за гомотетії з коефіцієнтом $\lambda = 2$. Яка точка є центром гомотетії? Які відрізки рівні?

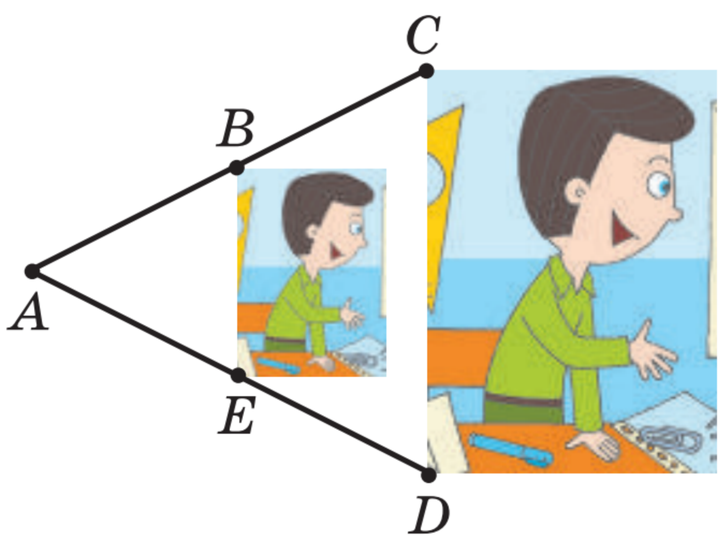


Рис. 10

13. На рис. 11, *а* зображено прообраз деформації g з коефіцієнтом k до прямої l, а на рис. 11, *б* — образ за цього перетворення. Що можна сказати про коефіцієнт k цієї деформації? Ця деформація є стиском чи розтягом?

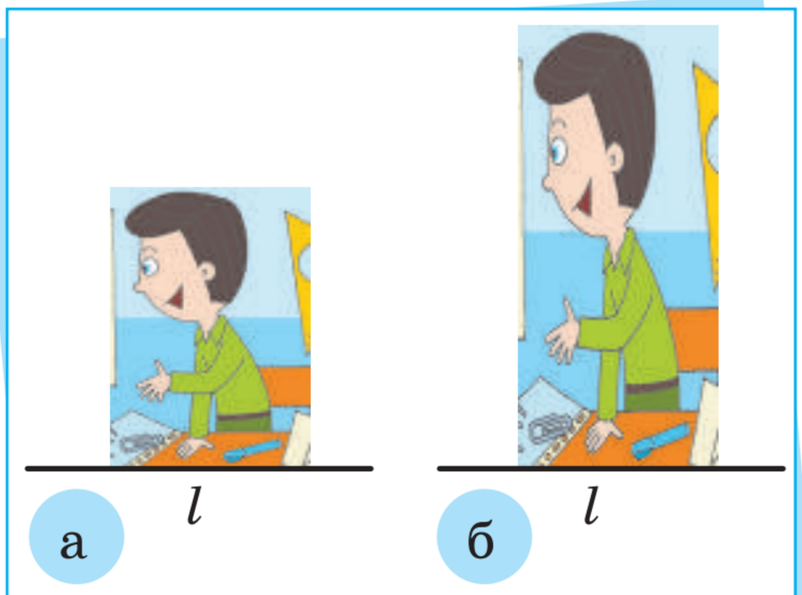


Рис. 11

14. На рис. 12, *а* зображено прообраз деформації h з коефіцієнтом n до прямої l, а на рис. 12, *б* — образ за цього перетворення. Що можна сказати про коефіцієнт n цієї деформації? Ця деформація є стиском чи розтягом?

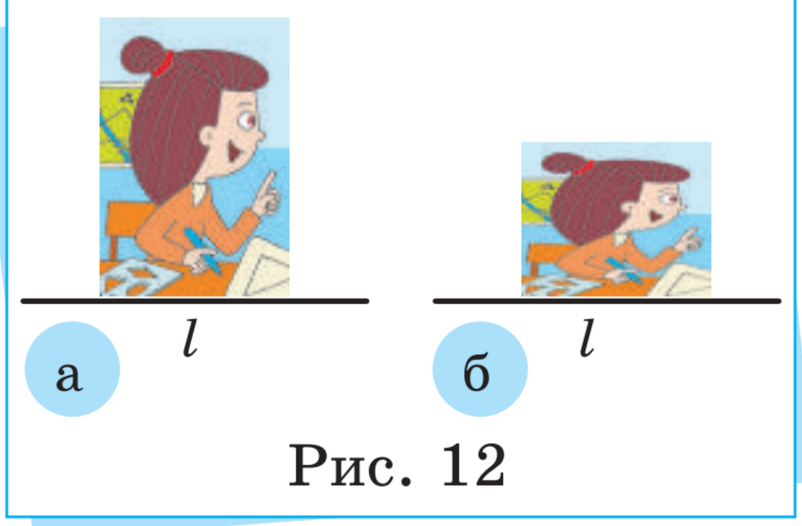


Рис. 12

15. Паралельне перенесення задано аналітично: $\begin{cases} x' = x + 6, \\ y' = y - 1. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $A(2;7)$, $B(4;-3)$, $C(0;5)$.

16. Паралельне перенесення задано аналітично: $\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y + 5. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $X(1;5)$, $Y(2;-7)$, $Z(6;-3)$.

17. Симетрію відносно точки O задано аналітично: $\begin{cases} x' = 12 - x, \\ y' = 8 - y. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $C(7;5)$, $D(4;-2)$, $M(-3;9)$.

18. Симетрію відносно точки O задано аналітично: $\begin{cases} x' = 6 - x, \\ y' = 4 - y. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $N(7;1)$, $K(2;-5)$, $L(8;9)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

19. Деформацію задано аналітично: $\begin{cases} x' = 5x, \\ y' = y. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $A(4;3)$, $B(-2;-6)$, $C(3;-8)$.

20. Деформацію задано аналітично: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 4y. \end{cases}$ Знайдіть образи точок $D(6;-1)$, $F(-3;5)$, $H(-12;-1)$.

21. Геометричне перетворення f задано формулами. Це перетворення є деформацією чи паралельним перенесенням?

а) $\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y + 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 7y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = 5x, \\ y' = y. \end{cases}$

22. Геометричне перетворення g задано формулами. Це перетворення є деформацією чи паралельним перенесенням?

а) $\begin{cases} x' = x + 8, \\ y' = y - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 4, \\ y' = y + 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 8x, \\ y' = y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 6y. \end{cases}$

Середній рівень

23. Який відрізок є образом, а який прообразом за перетворення h?

а) $h : AB \to A'B'$;
б) $h : CD \to C'D'$;
в) $h : EF \to E'F'$;
г) $h : GK \to G'K'$.

24. Який відрізок є образом, а який прообразом за перетворення f?

а) $f : XY \to X'Y'$;
б) $f : KL \to K'L'$;
в) $f : MN \to M'N'$;
г) $f : OP \to O'P'$.

25. Перенесіть рис. 13 у зошит. Побудуйте образ точки K за паралельного перенесення на даний вектор $\vec{a}$.

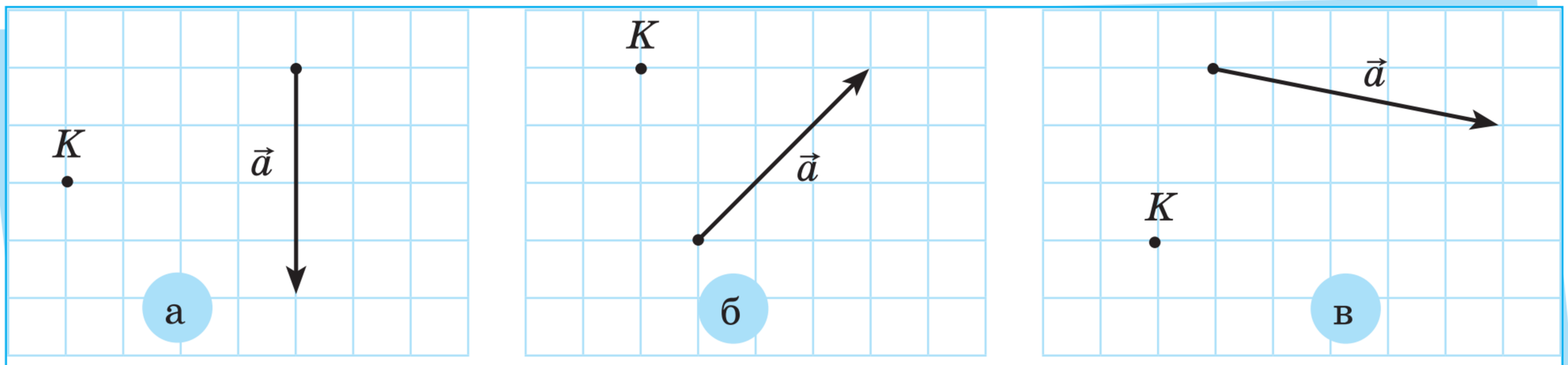


Рис. 13

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

26. Перенесіть рис. 14 у зошит. Побудуйте образ точки N за паралельного перенесення на даний вектор $\vec{b}$.

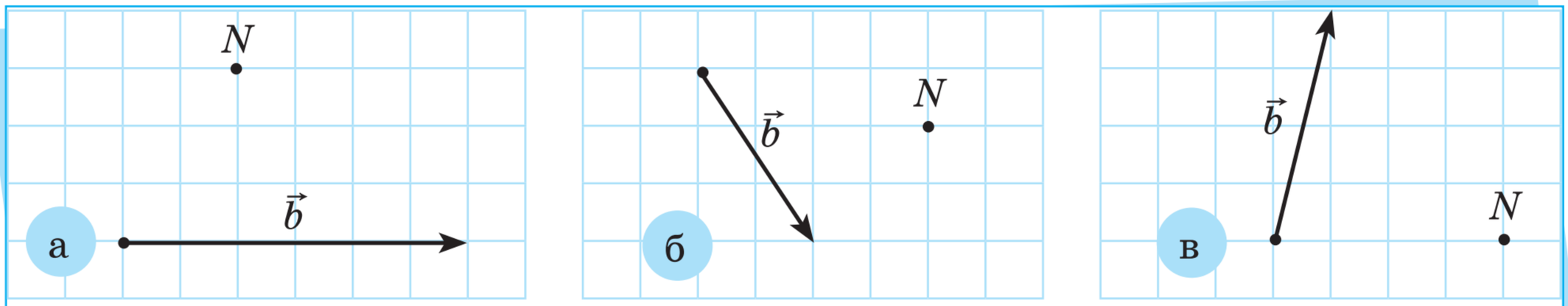


Рис. 14

27. Перенесіть рис. 15 у зошит. Побудуйте образ точки N за симетрії відносно точки O.

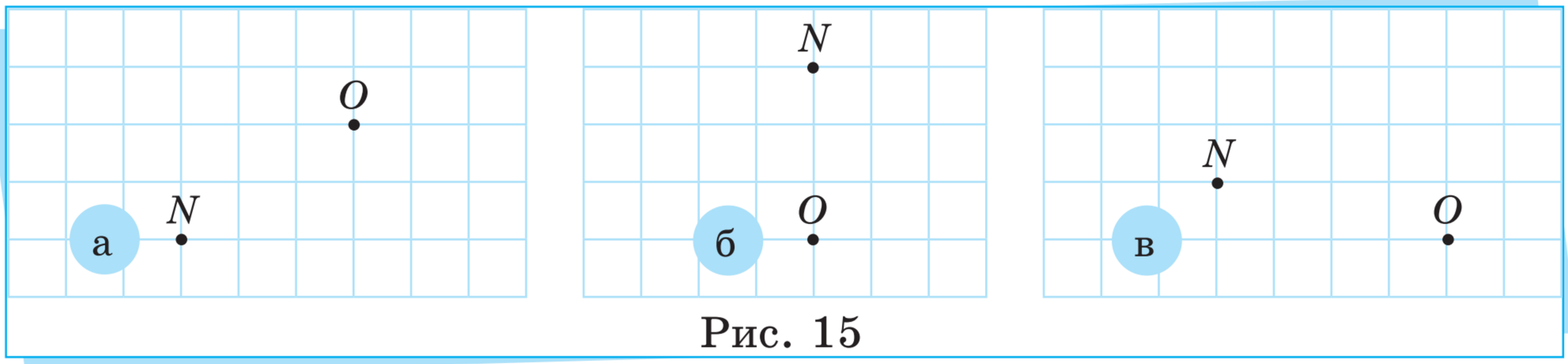


Рис. 15

28. Перенесіть рис. 16 у зошит. Побудуйте образ точки K за симетрії відносно точки O.

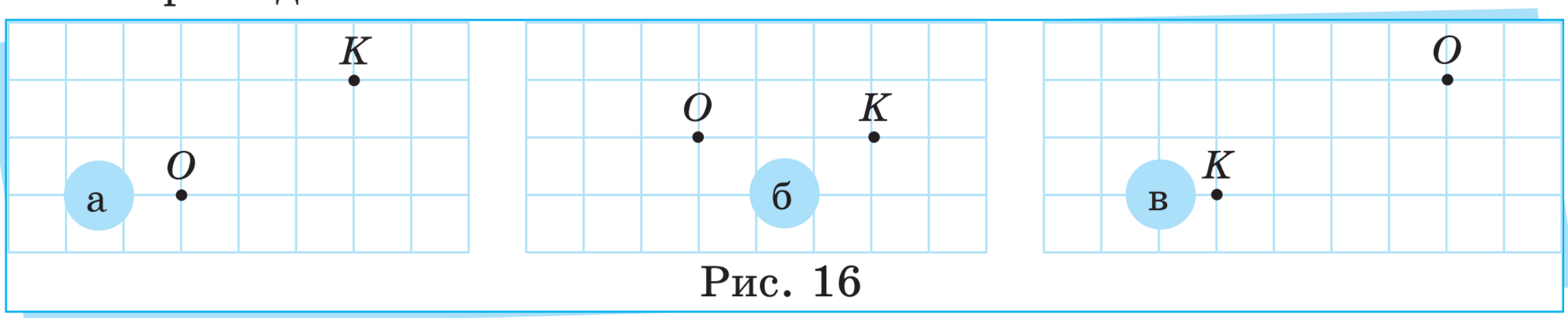


Рис. 16

29. Перенесіть рис. 17 у зошит. Побудуйте образ точки A за симетрії відносно прямої n.

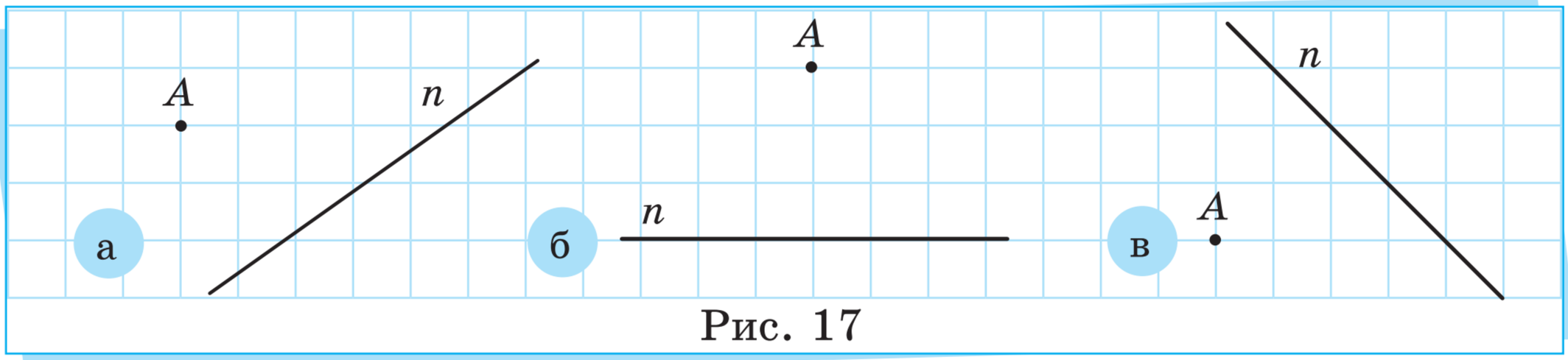


Рис. 17

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

30. Перенесіть рис. 18 у зошит. Побудуйте образ точки C за симетрії відносно прямої m.

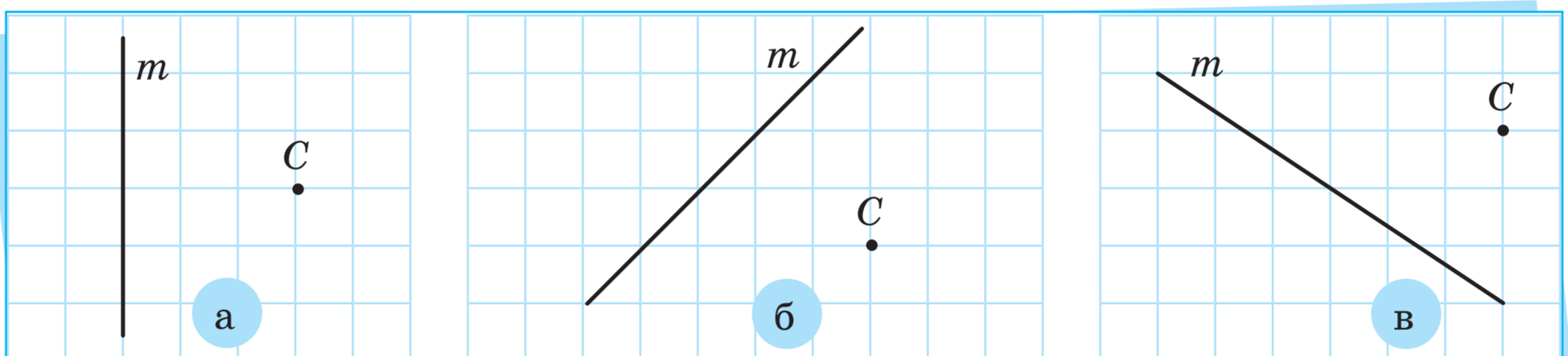


Рис. 18

31. Перенесіть рис. 19 у зошит. Побудуйте образ точки B за повороту на кут $45°$ відносно точки O за ходом годинникової стрілки.

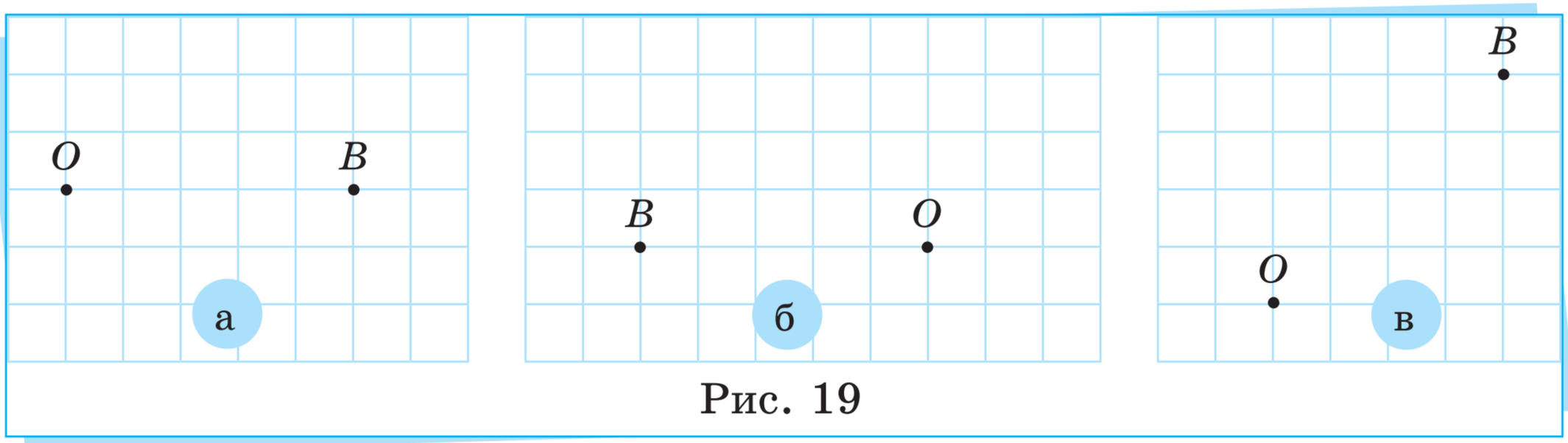


Рис. 19

32. Перенесіть рис. 20 у зошит. Побудуйте образ точки A за повороту на кут $90°$ відносно точки O проти ходу годинникової стрілки.

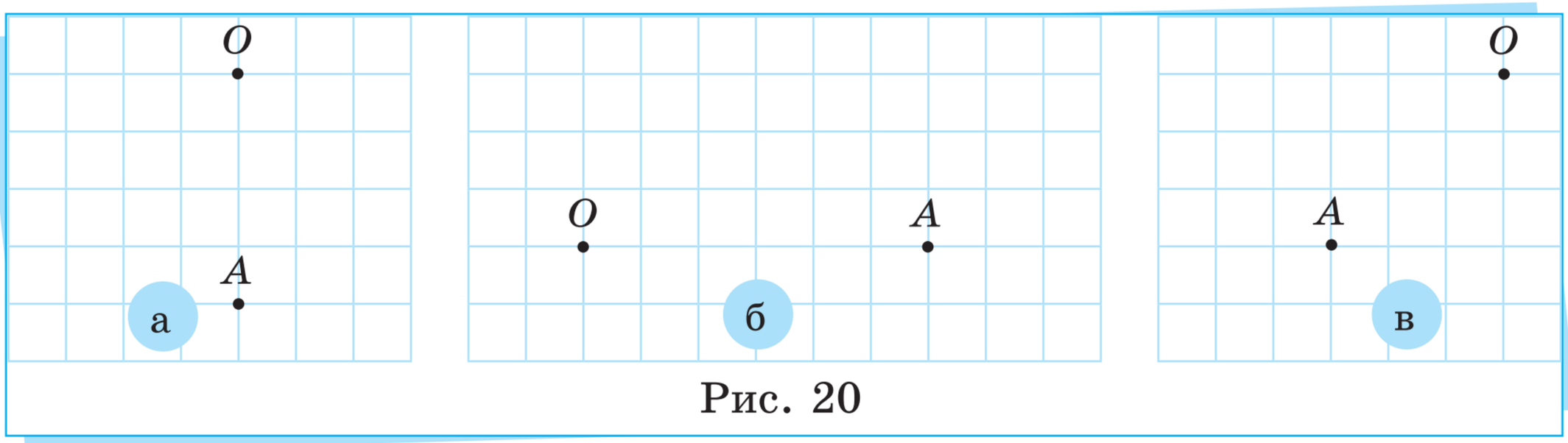


Рис. 20

33. Перенесіть рис. 21 у зошит. Побудуйте образ точки C за гомотетії із центром у точці O та коефіцієнтом $\lambda = 4$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

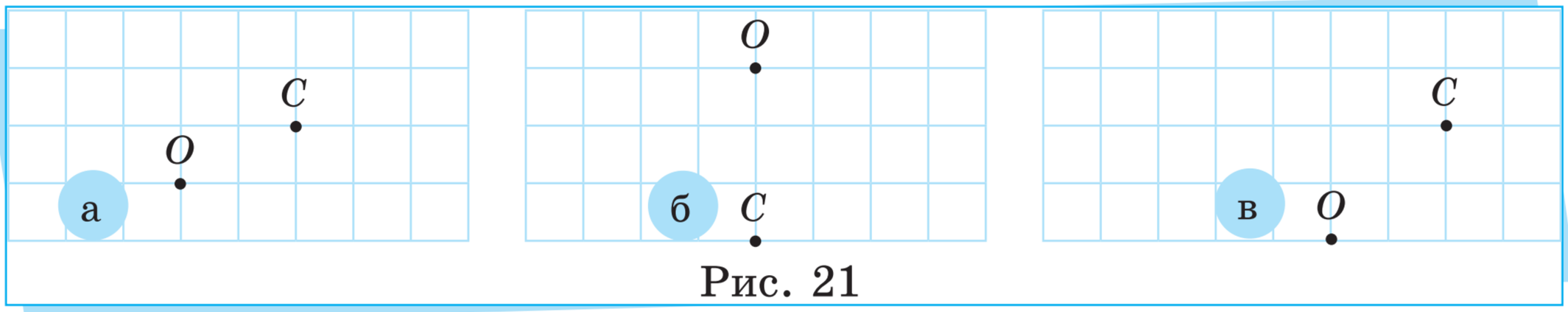


Рис. 21

34. Перенесіть рис. 22 у зошит. Побудуйте образ точки M за гомотетії із центром у точці O та коефіцієнтом $\lambda = 3$.

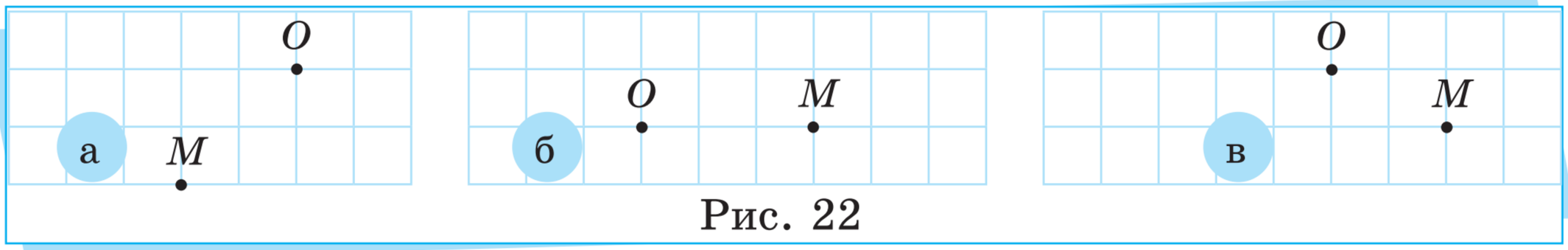


Рис. 22

35. Перенесіть рис. 23 у зошит. Побудуйте образ точки M за деформації f із коефіцієнтом k до прямої l.

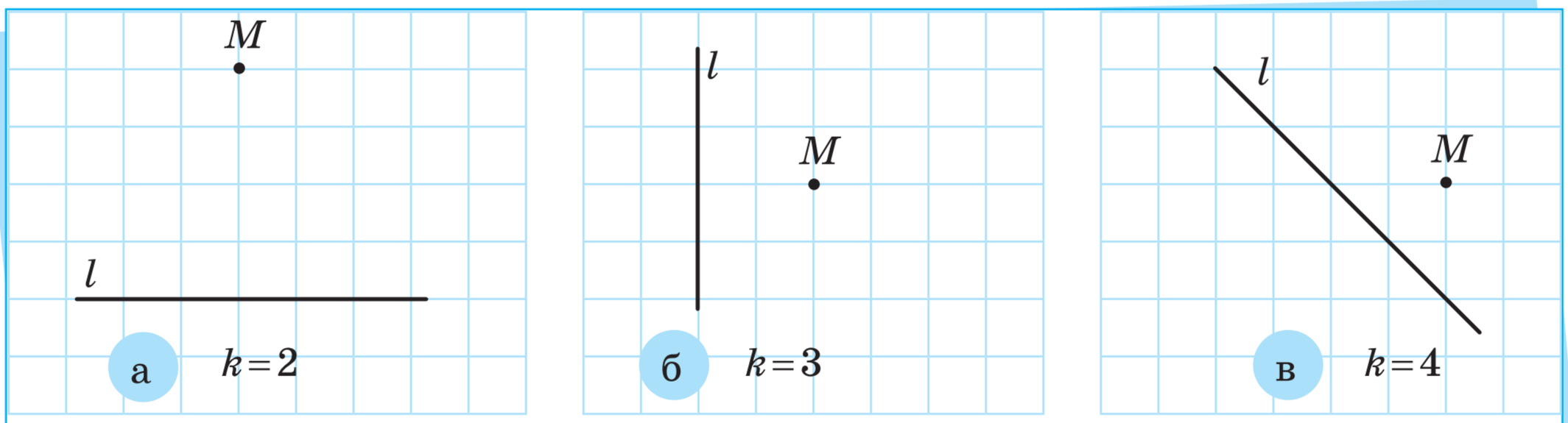


Рис. 23

36. Перенесіть рис. 24 у зошит. Побудуйте образ точки P за деформації g з коефіцієнтом n до прямої l.

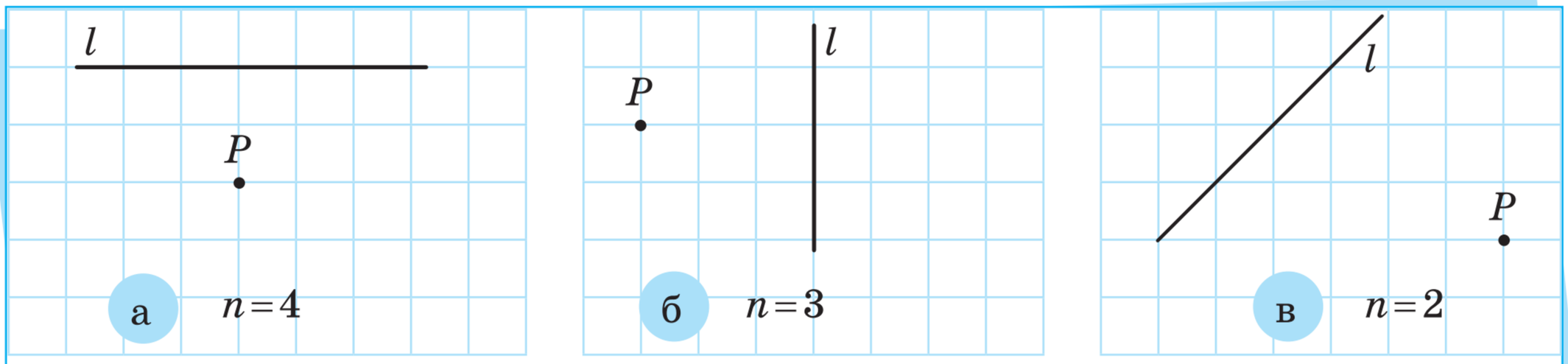


Рис. 24

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

37. Геометричне перетворення переводить точки $A(2;3)$, $B(1;-1)$, $C(0;4)$ відповідно в точки A', B', C' так, що $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\vec{a}$, причому $\vec{a}(2;2)$. Знайдіть координати точок A', B', C'.

38. Знайдіть координати образів точок $M(-1;-2)$, $N(3;0)$, $K(-4;4)$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(1;3)$.

39. За паралельного перенесення на вектор $\vec{m}(3;-3)$ точки D, E, F переходять відповідно в точки $D'(2;3)$, $E'(1;-1)$, $F'(0;4)$. Знайдіть координати точок D, E, F.

40. За паралельного перенесення на вектор $\vec{d}(1;2)$ точки H, P, Q переходять відповідно в точки $H'(-4;8)$, $P'(3;3)$, $Q'(7;-11)$. Знайдіть координати точок H, P, Q.

41. Симетрію відносно точки O задано аналітично: $\begin{cases}x'=14-x,\\y'=-6-y.\end{cases}$ Знайдіть координати центра симетрії та прообрази точок $C'(5;2)$, $D'(8;-8)$, $F'(-1;3)$.

42. Симетрію відносно точки O задано аналітично: $\begin{cases}x'=-4-x,\\y'=10-y.\end{cases}$ Знайдіть координати центра симетрії та прообрази точок $A'(-3;6)$, $B'(7;4)$, $M'(-1;-9)$.

43. Визначте, які координати матиме образ точки $A(4;8)$ за деформації з коефіцієнтом $k=4$:

а) до осі OX;

б) до осі OY.

44. Визначте, які координати матиме образ точки $B(8;4)$ за деформації з коефіцієнтом $k=\frac{1}{4}$:

а) до осі OX;

б) до осі OY.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

45. Виміряйте ширину й висоту прообразу та образу за деформації g до прямої l (рис. 25). Як змінилися ширина й висота зображення? Обчисліть коефіцієнт k деформації g.

46. Виміряйте ширину й висоту прообразу та образу за деформації h до прямої l (рис. 26). Як змінилися ширина й висота зображення? Обчисліть коефіцієнт n деформації h.

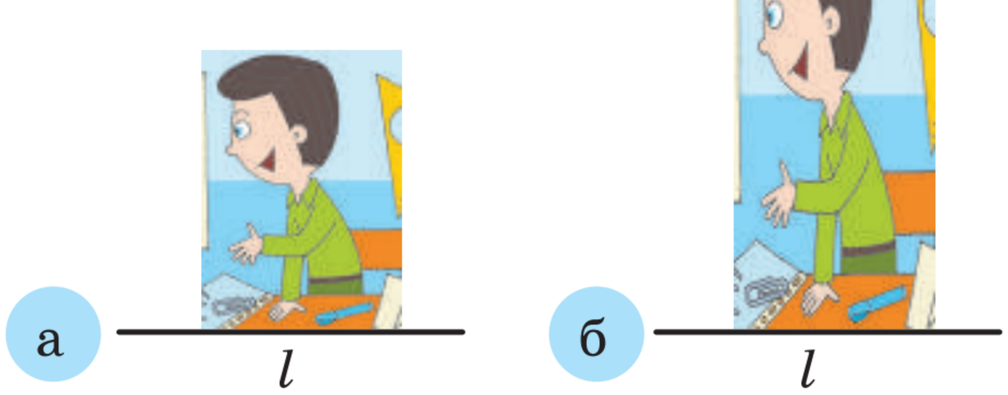


Рис. 25

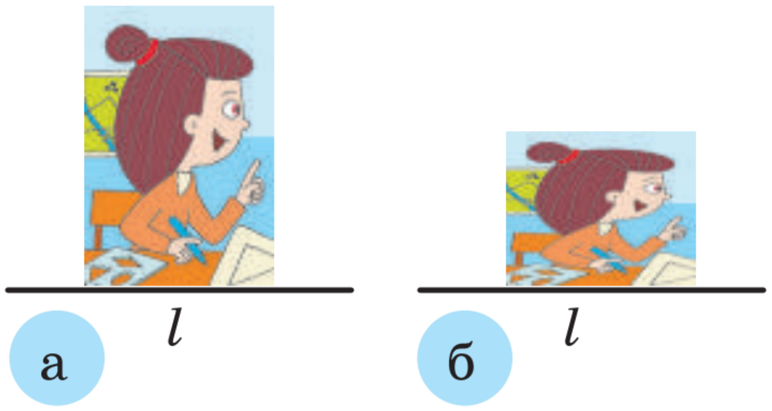


Рис. 26

Достатній рівень

47. За паралельного перенесення на вектор $\vec{c}$ $\varphi(L)=L'$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо відомі координати $L(5;7)$ та $L'(-3;1)$.

48. За паралельного перенесення на вектор $\vec{q}$ $\varphi(T)=T'$. Знайдіть координати вектора $\vec{q}$, якщо відомі координати $T(2;4)$ та $T'(4;2)$.

49. Відомо, що точка $N(1;2)$ — образ точки M за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(3;4)$, а точка $L(x;y)$ — образ точки M за паралельного перенесення на вектор $-\vec{a}$. Знайдіть координати точки L.

50. Відомо, що $S(2;3)$ — образ точки R за паралельного перенесення на вектор $\vec{d}(-2;2)$, а точка $P(x;y)$ — образ точки R за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{2d}$. Знайдіть координати точки P.

51. Задано точки $A(2;4)$ і $B(4;6)$. Знайдіть координати образів цих точок за таких геометричних перетворень:

а) тотожного перетворення;

б) паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(2;2)$;

в) симетрії відносно точки $O(0;0)$;

г) симетрії відносно осі ординат.

Побудуйте в ПДСК точки A і B та їх образи за вказаних перетворень.

52. Задано точки $C(-2;-2)$ і $D(-6;-4)$. Знайдіть координати образів цих точок за таких геометричних перетворень:

а) тотожного перетворення;

б) паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(3;3)$;

в) симетрії відносно точки $O(0;0)$;

г) симетрії відносно осі абсцис.

Побудуйте в ПДСК точки C і D та їх образи за вказаних перетворень.

53. Задано точки $K(1;3)$ і $L(-3;-2)$. Знайдіть координати образів цих точок за таких геометричних перетворень:

а) гомотетії із центром у точці $O(0;0)$ і коефіцієнтом $\lambda = 3$;

б) деформації з коефіцієнтом $k = 2$ до осі ординат;

в) деформації з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ до осі абсцис.

54. Задано точки $M(-4;4)$ і $N(2;-8)$. Знайдіть координати образів цих точок за таких геометричних перетворень:

а) гомотетії із центром у точці $O(0;0)$ і коефіцієнтом $\lambda = \frac{1}{2}$;

б) деформації з коефіцієнтом $k = \frac{1}{4}$ до осі ординат;

в) деформації з коефіцієнтом $k = 3$ до осі абсцис.

55. Перетворення f є симетрією відносно точки M, причому $f(A) = B$, $A(4;6)$, а $B(2;0)$. Знайдіть координати точки M.

56. Перетворення f є симетрією відносно точки N, причому $f(A) = B$, $A(-6;5)$, а $B(0;-1)$. Знайдіть координати точки N.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

57. Перетворення g є гомотетією із центром у точці $A(1;2)$ і коефіцієнтом λ, причому $g(K)=K'$, а $K(2;3)$ і $K'(4;5)$. Визначте коефіцієнт λ.

58. Перетворення g є гомотетією із центром у точці $D(-2;3)$ і коефіцієнтом λ, причому $g(Q)=Q'$, а $Q(4;8)$ і $Q'(1;5{,}5)$. Визначте коефіцієнт λ.

59. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Чи будуть вершини A і C симетричними відносно точки O, якщо $ABCD$: а) ромб; б) прямокутник; в) рівнобічна трапеція? Відповідь поясніть.

60. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Чи будуть вершини B і D симетричними відносно точки O, якщо $ABCD$: а) паралелограм; б) квадрат; в) прямокутна трапеція? Відповідь поясніть.

61. У трикутнику ABC з вершини B проведено медіану BM. Чи будуть вершини A і C симетричними відносно прямої, яка проходить через точки B і M, якщо трикутник ABC: а) рівносторонній; б) рівнобічний із тупим кутом B? Відповідь поясніть.

62. У трикутнику ABC з вершини B проведено висоту BH. Чи будуть вершини A і C симетричними відносно прямої, яка проходить через точки B і H, якщо трикутник ABC: а) рівнобічний з основою AC; б) прямокутний, у якого катет AB удвічі менший від гіпотенузи AC? Відповідь поясніть.

Високий рівень

63. Перенесіть рис. 27 у зошит і побудуйте пряму l, відносно якої точки A і B є симетричними.

64. Перенесіть рис. 27 у зошит і побудуйте центр повороту O, за якого точка B буде образом точки A за повороту відносно точки O на 90°:
а) за ходом годинникової стрілки;
б) проти ходу годинникової стрілки.

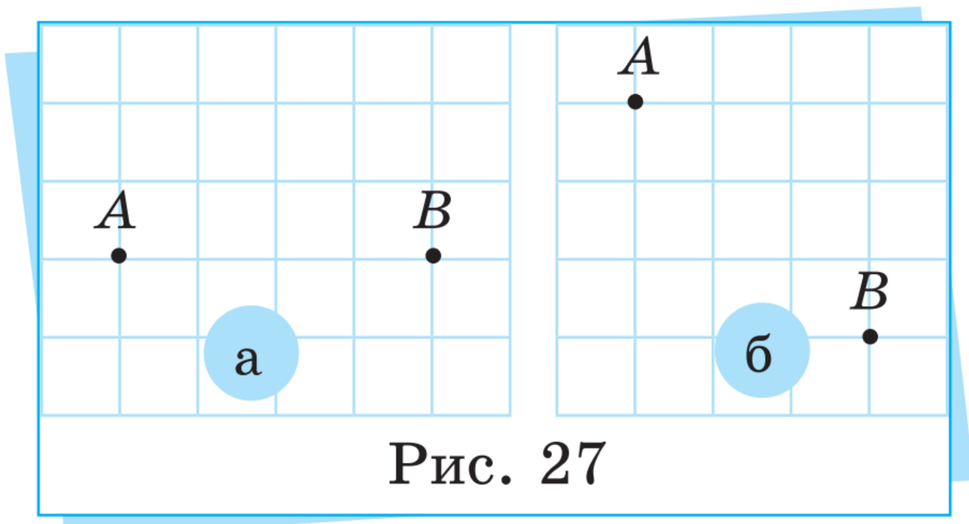


Рис. 27

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

65. Точці $A(5;-7)$ за симетрії відносно осі ординат відповідає точка B, а точці B за симетрії відносно початку координат відповідає точка C. Знайдіть координати точок B і C. Відповідь обґрунтуйте.

66. Точці $M(-3;6)$ за симетрії відносно осі абсцис відповідає точка K, а точці K за симетрії відносно початку координат відповідає точка N. Знайдіть координати точок K і N. Відповідь обґрунтуйте.

67. Доведіть, що образ точки M за повороту навколо точки O на 180° збігається з образом цієї точки за симетрії відносно точки O.

68. Доведіть, що точки $A(a;0)$ і $B(0;a)$ є симетричними відносно прямої $y=x$.

69. На рис. 28 $\angle AOC=\angle BOC$, $OM=OK$. Доведіть, що точки M і K є симетричними відносно прямої OC.

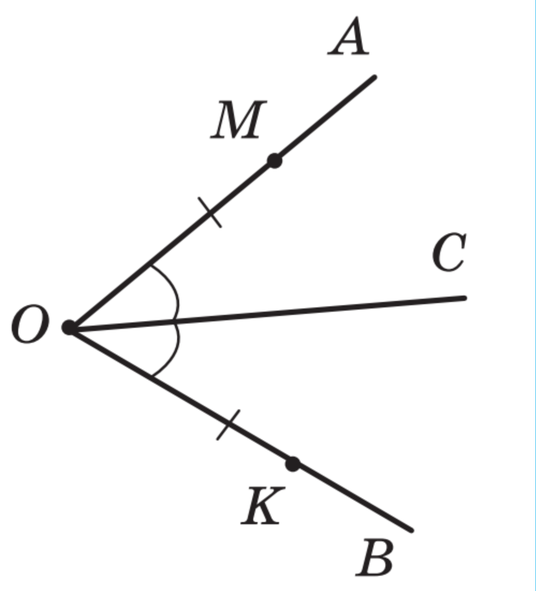


Рис. 28

70. Доведіть, що існує поворот, за якого образом кожної вершини рівностороннього трикутника буде сусідня вершина. Укажіть центр і кут такого повороту.

71. Запишіть координати образу точки $A(a;b)$ за гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом k. Відповідь обґрунтуйте.

72. Точка $M'(\ldots;6)$ є образом точки $M(-3;\ldots)$ за гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом $k=0{,}5$. Відновіть пропущені координати. Відповідь обґрунтуйте.



Цікавинки від дідуся Тараса

Після вивчення означення геометричного перетворення площини вам могло здатися, що щось подібне ви вже вивчали раніше. Справді, залежність між двома змінними, за якої одному значенню незалежної

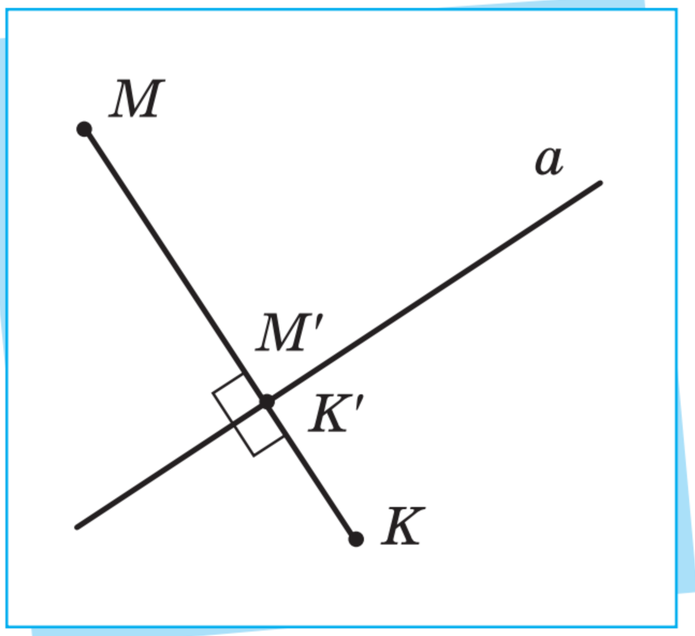
Проєкт підручника видавництва «Ранок»

змінної відповідає *лише одне* значення залежної змінної, ми називаємо *функцією*. Щоб задати функцію, також користуються певним правилом, яке кожному значенню однієї змінної ставить у відповідність значення іншої змінної. Зазвичай це правило записують формулами на кшталт $y=2x-3$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ тощо. Однак функції можуть визначатися й за допомогою графіка, таблиці, а також словесно. Наприклад, відома вам із 7 класу функція $y=[x]$ (ціла частина x) визначається так: $[x]$ — це найбільше ціле число, що не перевищує даного числа.

Отже, геометричні перетворення площини — це певне узагальнення вже відомого вам поняття функції, у якій у ролі аргумента і функції розглядають не числа, а точки площини. Поняття функції можна узагальнити ще більше. Якщо розглянути дві довільні множини X і Y, то правило f, яке кожному елементу з множини X ставить у відповідність лише один елемент із множини Y, називають *відображенням* множини X у множину Y і записують $f: X \to Y$. Наприклад, якщо X — множина всіх дерев у лісі, а Y — множина всіх букв українського алфавіту, то відображення $f: X \to Y$ може визначатися словесно так: кожному дереву відповідає перша буква слова української мови, яким це дерево називається.

Виходячи зі сформульованого означення, *всі геометричні перетворення площини є відображеннями*. Проте *не кожне відображення* (правило f), яке довільній точці площини ставить у відповідність лише одну точку цієї самої площини, *є геометричним перетворенням*.

Наприклад, нехай правило f ставить у відповідність будь-якій точці M площини основу перпендикуляра M', проведеного з точки M на деяку пряму a цієї площини (див. рисунок). Таке правило за означенням буде відображенням, але не буде геометричним перетворенням площини, бо не виконуються умови (1) і (2) з означення геометричного перетворення. Справді, для точок, що не належать прямій a, за цим правилом не можна визначити прообраз, а для двох різних точок M і K площини, зображених на рисунку, їх образи M' і K' за такого правила f збігаються.



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Дізнайтеся більше про використання функцій $y=[x]$ (ціла частина x) і $y=\{x\}=x-[x]$ (дробова частина x) у задачах математичних олімпіад. Підготуйте невелике повідомлення на цю тему.

2. Наведіть приклади з повсякденного життя, у яких використовують правила, що є відображеннями. Наскільки корисними в практичних застосуваннях, на вашу думку, є такі правила? Обговоріть це з однокласниками й однокласницями.

3. Наведіть інші приклади відображень площини, які не є геометричними перетвореннями. Як ви вважаєте, навіщо в означенні геометричного перетворення наявні вимоги щодо існування прообразу довільної точки площини та щодо різних образів для двох різних точок площини?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз.

а) $\dfrac{12a^2b^5}{18a^3b^2}$; б) $\dfrac{16-x^2}{12x+48}$; в) $\dfrac{m^2-2m-3}{m^2+2m+1}$.

2. Розв'яжіть рівняння.

а) $2x^4-3x^2+1=0$; б) $2\sqrt{x}+x-8=0$.

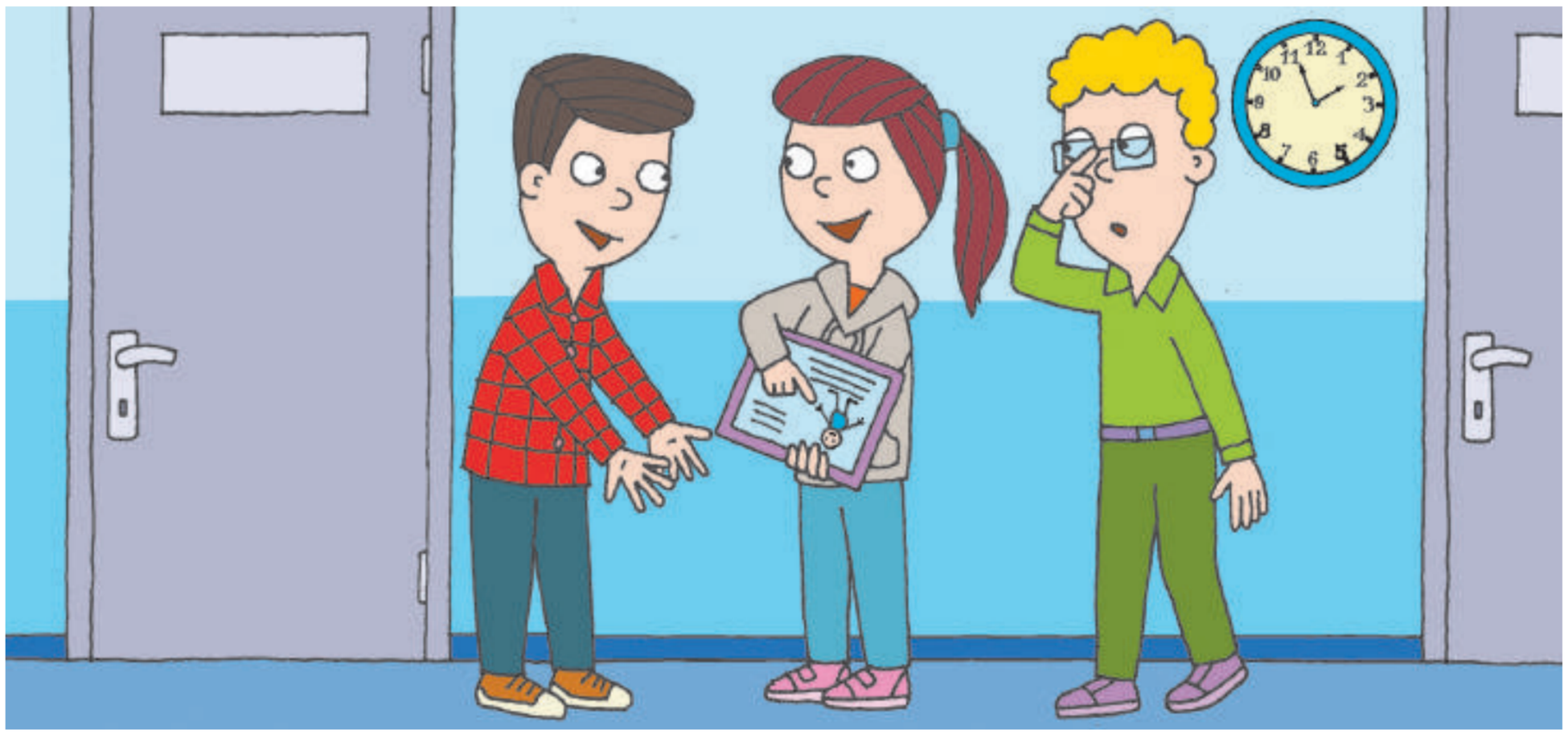
3. У прямокутнику, який не є квадратом, проведено бісектриси всіх його чотирьох кутів. Ці бісектриси попарно перетинаються між собою в чотирьох точках. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в цих точках є прямокутником.

4. Зобразіть на аркуші паперу розгортку прямокутного паралелепіпеда з вимірами 4 см, 3 см і 2 см. Виготовіть модель прямокутного паралелепіпеда за зображеною розгорткою.

5. Задано послідовність чисел: 121, 314, 151, 617, 181, 920, 212, ... Знайдіть закономірність у цій послідовності чисел і запишіть два наступних числа цієї послідовності.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 2. Рухи і перетворення подібності. Види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот

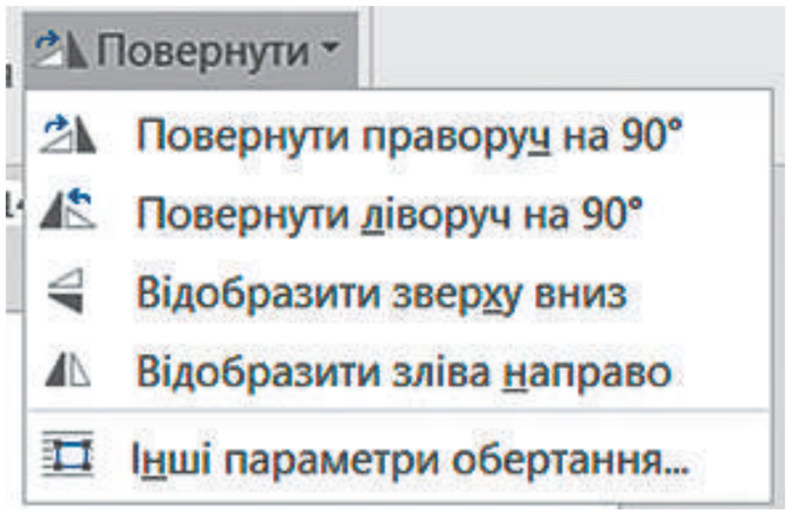




Слухай, Тетянко, мене так зацікавила розповідь учителів про різні перетворення, що я вирішив дізнатися, де їх іще можна побачити. Увімкнув ноутбук, а на екрані — відкритий файл реферату в текстовому редакторі, який я набирав учора. І що ти думаєш? Навіть у ньому я побачив перетворення!



Здогадуюся, де саме. Мені теж подобається вставляти рисунки в тексти. А якщо рисунок уже вставлений, то з ним можна виконувати різноманітні дії: паралельно переносити, повертати, симетрично відображати тощо. Навіть меню спеціальне є. Ось, поглянь, у мене із собою планшет.



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



І це не лише в текстовому редакторі. Подібні меню є скрізь: в електронній таблиці, графічному редакторі, програмах для створення презентацій і відеороликів тощо. Я навіть не здогадувався, що перетворення настільки популярні.



Згодна. Ось, поглянь на годинник у шкільному коридорі — на ньому теж щосекунди стрілка робить поворот на 6 градусів. І, здається, нам з тобою треба поспішити на урок математики, бо можемо запізнитися!



Вітаю, Петрику й Тетянко, ви майже не запізнилися, ми якраз продовжуємо вивчати перетворення. До речі, Петрик на минулому уроці правильно зауважив, що окремі геометричні перетворення площини дають змогу переміщувати фігурки героїв мультфільмів по екрану. Вони мають спеціальну назву — рухи площини.



Рухом площини (або просто рухом) називають геометричне перетворення площини, що зберігає відстані між точками. Тобто якщо для перетворення f і довільних точок M і K площини $f(M)=M'$, $f(K)=K'$ і виконується рівність $M'K'=MK$, то перетворення f називають рухом.



Покажемо, що паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$ є рухом. Розглянемо довільні точки M і K та їхні образи $f(M)=M'$ і $f(K)=K'$ за цього перетворення (рис. 2.1). За означенням паралельного перенесення $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{KK'}=\vec{a}$. Тоді чотирикутник $KMM'K'$ є паралелограмом

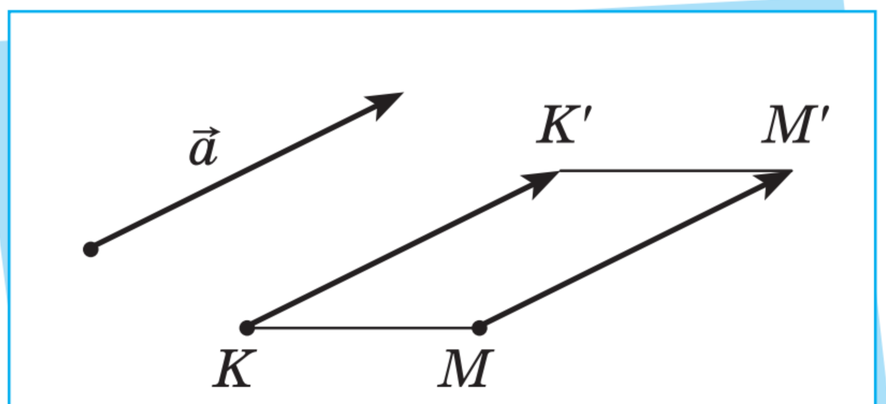


Рис. 2.1

(у нього сторони MM' і KK' рівні й паралельні), а отже, $M'K' = MK$, що й потрібно було довести.



Спостережливі учні й учениці, мабуть, уже помітили, що точки M, K, M', K' можуть лежати на одній прямій. У цьому випадку також $M'K' = MK$, але доведення буде іншим. *Розгляньте цей випадок самостійно.*



Довести, що паралельне перенесення на вектор є рухом, можна й аналітично. Справді, нехай f — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$, M і K — точки площини, на якій задано деяку ПДСК, а також $f: M(x_1; y_1) \to M'(x_1'; y_1')$ і $f: K(x_2; y_2) \to K'(x_2'; y_2')$. За формулою відстані між точками $MK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Якщо $\vec{a}(a_1; a_2)$, то перетворення f задається формулами: $\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2. \end{cases}$ За цими формулами $M'(x_1 + a_1; y_1 + a_2)$, $K'(x_2 + a_1; y_2 + a_2)$ і за формулою відстані між точками $M'K' = \sqrt{((x_2 + a_1) - (x_1 + a_1))^2 + ((y_2 + a_2) - (y_1 + a_2))^2} =$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MK$, що й потрібно було довести.



Зверніть увагу: щойно наведене доведення є універсальним і не вимагає розгляду окремих випадків.



Тепер зрозуміло, чому ми говоримо, що об'єкт *рухається* по екрану. Так відбувається завжди, коли об'єкт не змінює своїх розмірів, тобто відстані між будь-якими двома його точками залишаються тими самими після перетворення. Цікаво, а крім паралельного перенесення, які ще з відомих нам перетворень є рухами?



Як ми вже зазначали в попередньому параграфі, рухами є симетрія відносно даної точки, симетрія відносно даної прямої та поворот відносно даної точки на заданий кут.

Наприклад, доведемо, що симетрія f відносно даної точки O є рухом.

Для цього використаємо її аналітичне задання: $\begin{cases} x' = 2x_0 - x, \\ y' = 2y_0 - y, \end{cases}$ де $O(x_0; y_0)$ — центр симетрії, $M(x; y)$ — довільна точка площини, $f : M \to M'(x'; y')$.

Дійсно, якщо для довільних точок $M(x_1; y_1)$, $K(x_2; y_2)$ $f(M) = M'(x_1'; y_1')$, $f(K) = K'(x_2'; y_2')$, то $MK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, а $M'K' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$. За формулами аналітичного задання центральної симетрії $(x_2' - x_1')^2 = ((2x_0 - x_2) - (2x_0 - x_1))^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$.

Аналогічно $(y_2' - y_1')^2 = ((2y_0 - y_2) - (2y_0 - y_1))^2 = (y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$.

Отже, $M'K' = MK$, що й потрібно було довести.



Доведення того, що рухом є також осьова симетрія й поворот:
rnk.com.ua/111768,
rnk.com.ua/111769





Вивчимо тепер властивості рухів. Для зручності подальших міркувань дамо означення простого відношення трьох точок на прямій.



Нехай точки A, B, C лежать на одній прямій, причому точка C належить відрізку AB (рис. 2.2). Простим відношенням трьох точок на прямій будемо називати число $m = \dfrac{AC}{CB}$.

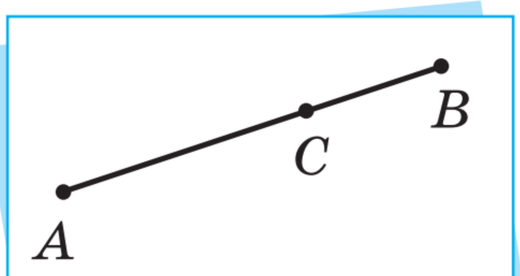


Рис. 2.2

Просте відношення трьох точок на прямій іноді записують так: $(C, AB) = m$.



А тепер доведемо важливе твердження.

ТЕОРЕМА (основна властивість рухів).

Будь-який рух f довільні три точки, що лежать на одній прямій, переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок.

Тобто, якщо A, B, C — довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$.

Доведення. Якщо точка C належить відрізку AB, то за однією з аксіом $AC + CB = AB$. Оскільки перетворення f є рухом, то $A'C' = AC$, $C'B' = CB$, $A'B' = AB$. Із цих рівностей випливає, що $A'C' + C'B' = A'B'$, тобто точки A', B', C' лежать на одній прямій і точка C' належить відрізку $A'B'$. Також із тих самих рівностей випливає, що $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$, тобто $(C', A'B') = (C, AB)$, отже, рух зберігає просте відношення трьох точок на прямій, що й потрібно було довести.



Із основної властивості рухів випливають інші їхні властивості.

Властивості рухів

Будь-який рух площини:

1. будь-яку *пряму* переводить у пряму, будь-який *відрізок* — у відрізок, будь-який *промінь* — у промінь;
2. будь-який *трикутник* переводить у рівний йому трикутник;
3. будь-який *кут* переводить у рівний йому кут.

Доведення властивостей рухів:
rnk.com.ua/111770,
rnk.com.ua/111771





Але ж, мабуть, не всі геометричні перетворення площини є рухами, бо за тієї самої деформації до прямої висота об'єкта може змінюватися, а його ширина при цьому залишається незмінною. А за гомотетії всі розміри об'єкта ніби збільшуються в однакову кількість разів, правильно?



Справді, Тетянко, гомотетія із центром у точці O і коефіцієнтом λ відстані між будь-якими двома точками площини змінює в λ разів. Перетворення з такою властивістю мають спеціальну назву.



Перетворенням подібності площини (або просто подібністю) з коефіцієнтом λ $(\lambda > 0)$ називають геометричне перетворення площини, яке відстані між будь-якими двома точками цієї площини змінює в λ разів. Тобто, якщо для перетворення f і довільних точок M і K площини $f(M) = M'$, $f(K) = K'$ і виконується рівність $M'K' = \lambda \cdot MK$, то перетворення f називають подібністю з коефіцієнтом λ.



Покажемо, що гомотетія — це перетворення подібності. Нехай M і K — довільні точки площини, $h(M) = M'$, $h(K) = K'$ (рис. 2.3). Розглянемо трикутники $OM'K'$ і OMK. Оскільки за умовою $\frac{OM'}{OM} = \frac{OK'}{OK} = \lambda$, а кут O — спільний, то ці трикутники подібні, а отже, $\frac{M'K'}{MK} = \lambda$, звідки $M'K' = \lambda \cdot MK$. Зрозуміло, що за $\lambda \neq 1$ перетворення h не є рухом.

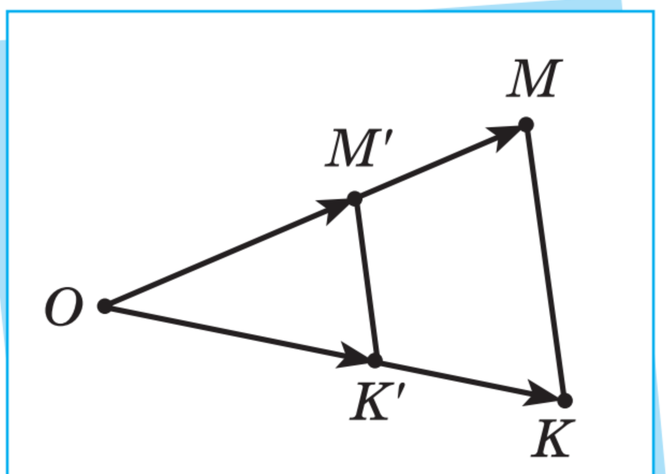


Рис. 2.3



Доведення того, що гомотетія є перетворенням подібності, можна виконати й з використанням аналітичного задання гомотетії. *Зробіть це самостійно.*



Просте відношення трьох точок на прямій зберігають також і перетворення подібності.

ТЕОРЕМА (основна властивість подібностей).

Будь-яка подібність g довільні три точки, що лежать на одній прямій, переводить у три точки, що лежать на одній прямій, при цьому зберігається просте відношення цих трьох точок.

Тобто якщо A, B, C — довільні три точки, що лежать на одній прямій, точка C належить відрізку AB, $g(A)=A'$, $g(B)=B'$, $g(C)=C'$, то точки A', B', C' також лежать на одній прямій, точка C' належить відрізку $A'B'$ і виконується рівність $\dfrac{A'C'}{C'B'}=\dfrac{AC}{CB}$.

Доведення цього твердження аналогічне доведенню основної властивості рухів. *Виконайте його самостійно.*



Із основної властивості подібностей випливають інші їхні властивості.

Властивості подібностей

Будь-яка подібність площини:

1. будь-яку *пряму* переводить у пряму, будь-який *відрізок* — у відрізок, будь-який *промінь* — у промінь;
2. будь-який *трикутник* переводить у подібний йому трикутник;
3. будь-який *кут* переводить у рівний йому кут.

Доведення властивостей подібностей виконайте самостійно.



Зауважимо також, що всі рухи можна вважати перетвореннями подібності з коефіцієнтом $k=1$.



Також існують геометричні перетворення, які не є ані рухами, ані подібностями. Наприклад, таким перетворенням є деформація h із коефіцієнтом $k\neq 1$ до прямої l.

Розглянемо точки $M\notin l$, $K\notin l$ і точки $P\in l$, $S\in l$, причому такі, що $KS=MP$, $MP\perp l$ і $KS\perp l$ (рис. 2.4). За означенням деформації до прямої $h(M)=M'$, $h(P)=P$, $h(K)=K'$, $h(S)=S$, а також $M'P=k\cdot MP$ і $K'S=k\cdot KS$. Якщо $k\neq 1$, то $M'P\neq MP$, тобто відстань між образами двох точок не дорівнює відстані між їхніми прообразами, а отже, деформація h не є рухом.

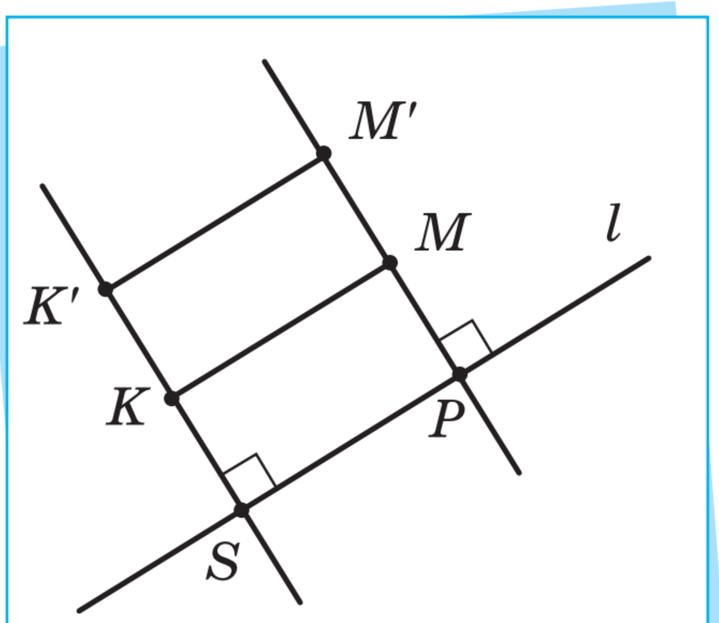


Рис. 2.4

Якщо ж припустити, що h є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k\neq 1$, то для точок M і K та їхніх образів M' і K' мала б виконуватися рівність $M'K'=k\cdot MK$. Але оскільки $KS=MP$, то і $K'S=M'P$, звідки $KK'=MM'$. Крім того, прямі KK' і MM' паралельні як прямі, перпендикулярні до даної прямої. Отже, $KK'M'M$ — паралелограм. Тому $M'K'=MK$, звідки $k=1$, що суперечить припущенню. Таким чином, деформація h з коефіцієнтом $k\neq 1$ до прямої l не є перетворенням подібності.

Перевірте себе!

1. Дайте означення руху площини.
2. Які з відомих вам перетворень є рухами?
3. Дайте означення перетворення подібності площини.
4. Наведіть приклад перетворення, що є подібністю.

5. Сформулюйте основну властивість: а) рухів; б) перетворень подібності.

6. Сформулюйте інші властивості: а) рухів; б) перетворень подібності.

7. Наведіть приклад перетворення, що не є ані рухом, ані подібністю.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з геометричних перетворень є рухами?

а) Паралельне перенесення на вектор $\vec{d}$;
б) симетрія відносно точки A;
в) симетрія відносно осі ординат;
г) деформація до осі абсцис із коефіцієнтом 4.

2. Які з геометричних перетворень є рухами?

а) Симетрія відносно осі абсцис;
б) симетрія відносно точки M;
в) паралельне перенесення на вектор $\vec{c}$;
г) деформація до осі ординат з коефіцієнтом 2.

3. Кожен із пунктів *а*, *б* рис. 1 містить два малюнки. На першому малюнку зображено прообраз за перетворення g, а на другому — образ за цього перетворення. Чи змінилися розміри зображень? Чи змінилися за цього перетворення відстані між точками? Чи є це перетворення рухом?

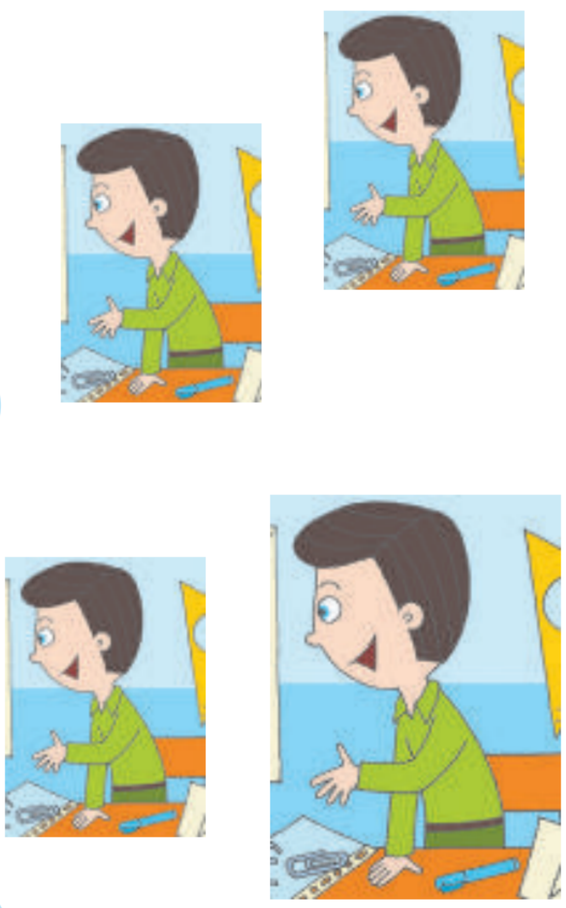


Рис. 1

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. Кожен із пунктів *а*, *б* рис. 2 містить два малюнки. На першому малюнку зображено прообраз за перетворення g, а на другому — образ за цього перетворення. Чи змінилися розміри зображень? Чи змінилися за цього перетворення відстані між точками? Чи є це перетворення рухом?

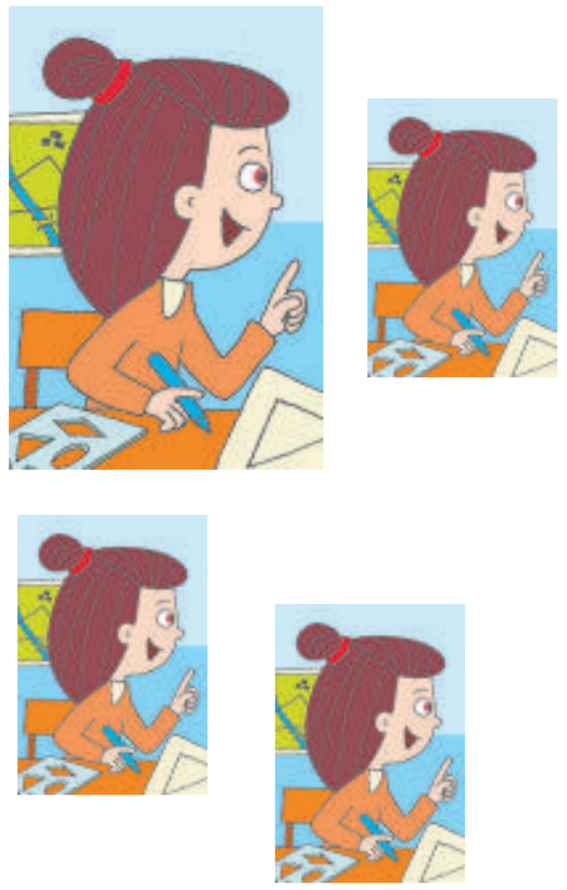


Рис. 2

5. Перетворення g переводить відрізок CD у відрізок $C'D'$ так, як зображено на рис. 3. Чи є перетворення g паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$? Чи є це перетворення рухом?

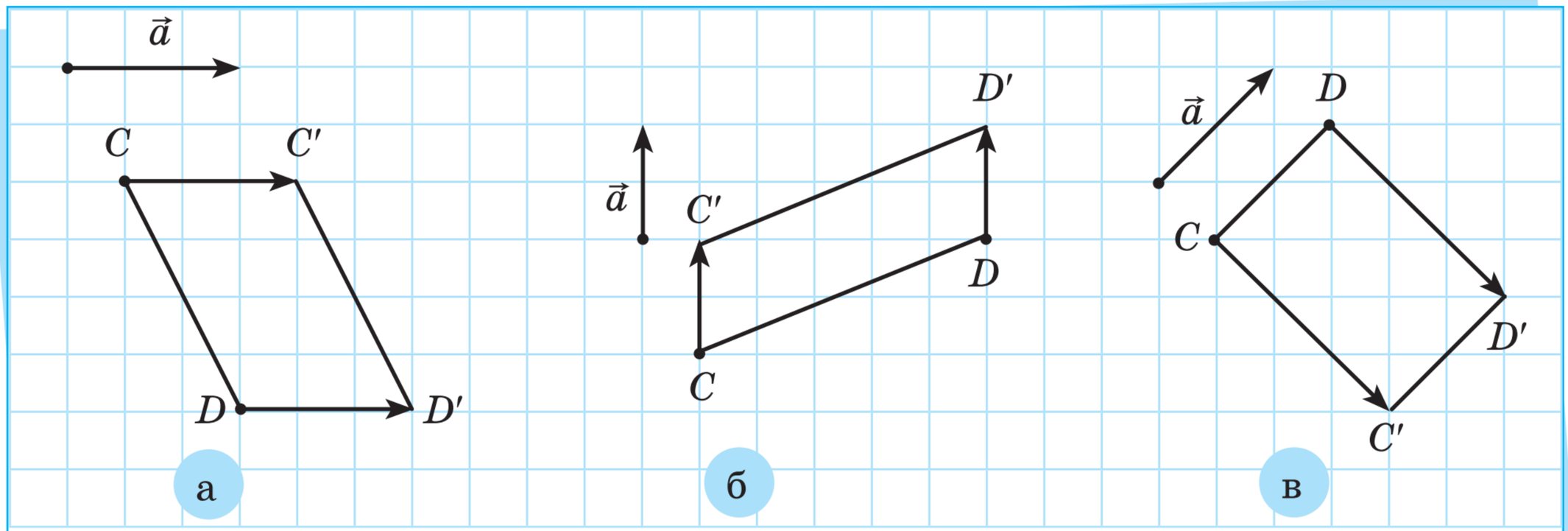


Рис. 3

6. Перетворення g переводить відрізок CD у відрізок $C'D'$ так, як зображено на рис. 4. Чи є перетворення g паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$? Чи є це перетворення рухом?

7. Перетворення f переводить відрізок ML у відрізок $M'L'$ так, як зображено на рис. 5. Чи є перетворення f поворотом на кут $90°$ відносно точки O проти ходу годинникової стрілки? Чи є це перетворення рухом?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

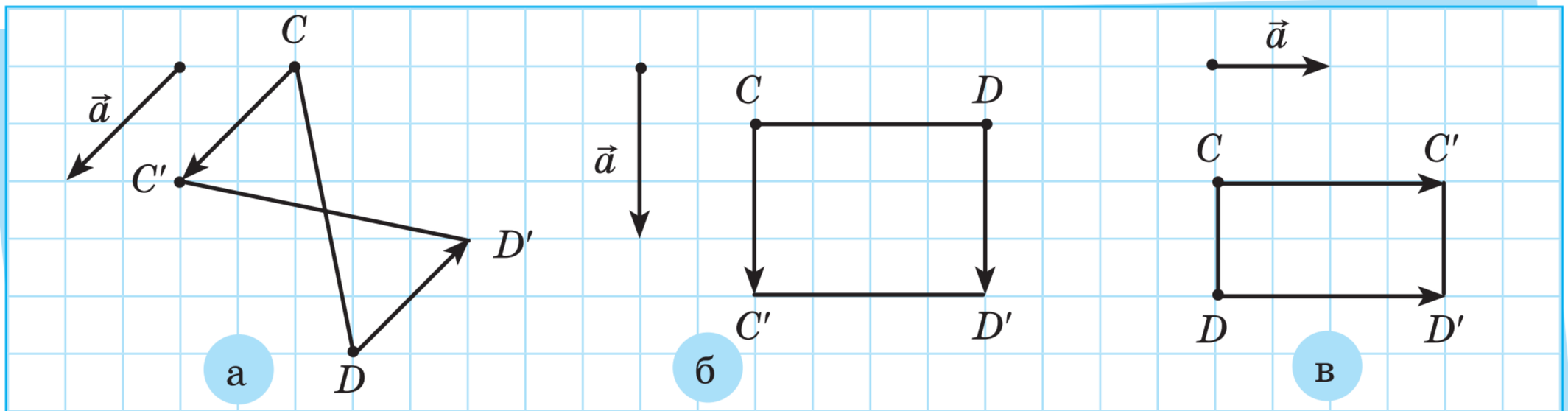


Рис. 4

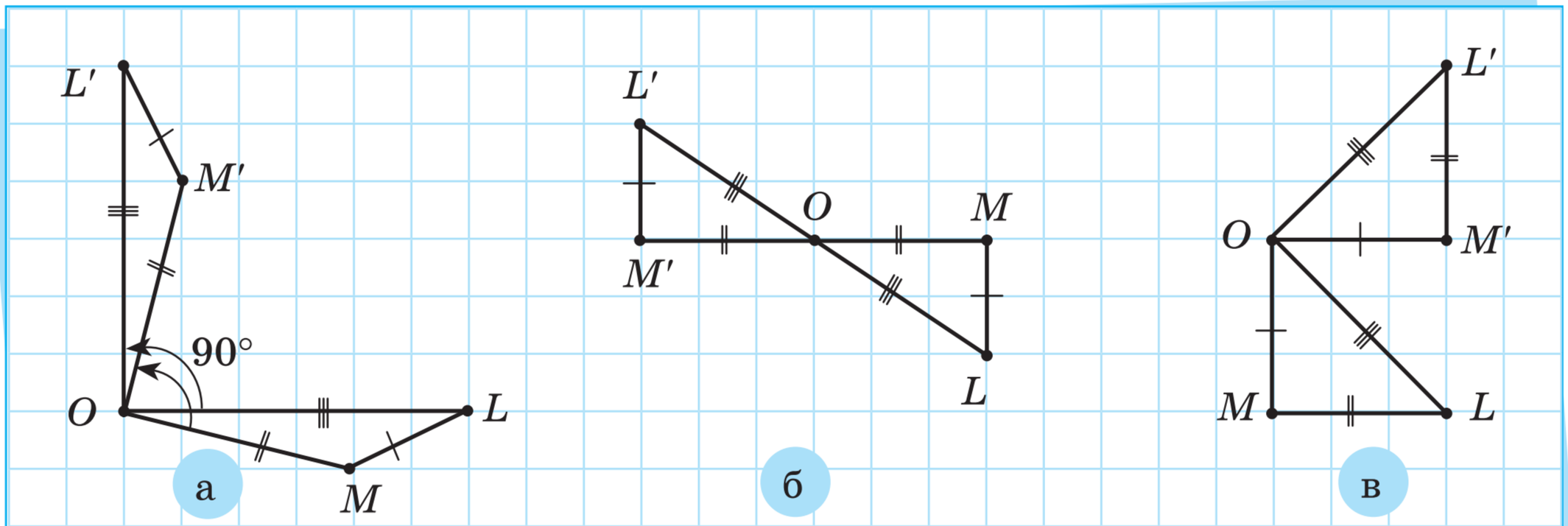


Рис. 5

8. Перетворення h переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$ так, як зображено на рис. 6. Чи є перетворення h поворотом на кут 90° відносно точки O за ходом годинникової стрілки? Чи є це перетворення рухом?

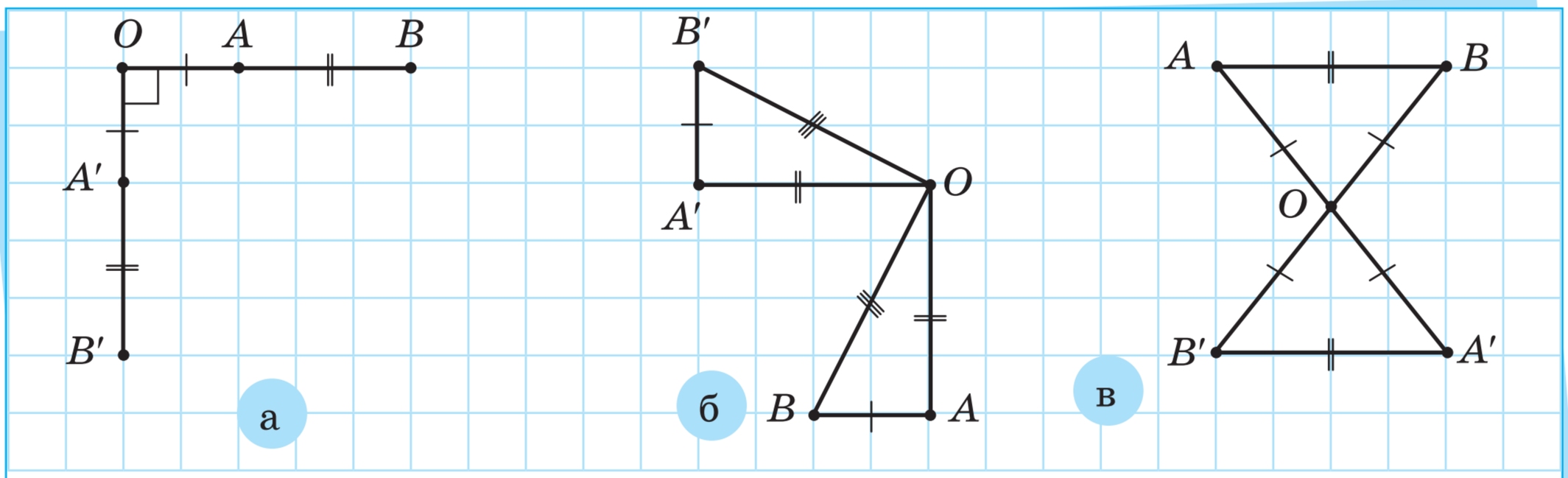


Рис. 6

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

9. Перетворення f переводить відрізок BC у відрізок $B'C'$ так, як зображено на рис. 7. Чи є перетворення f симетрією відносно точки O? Чи є це перетворення рухом?

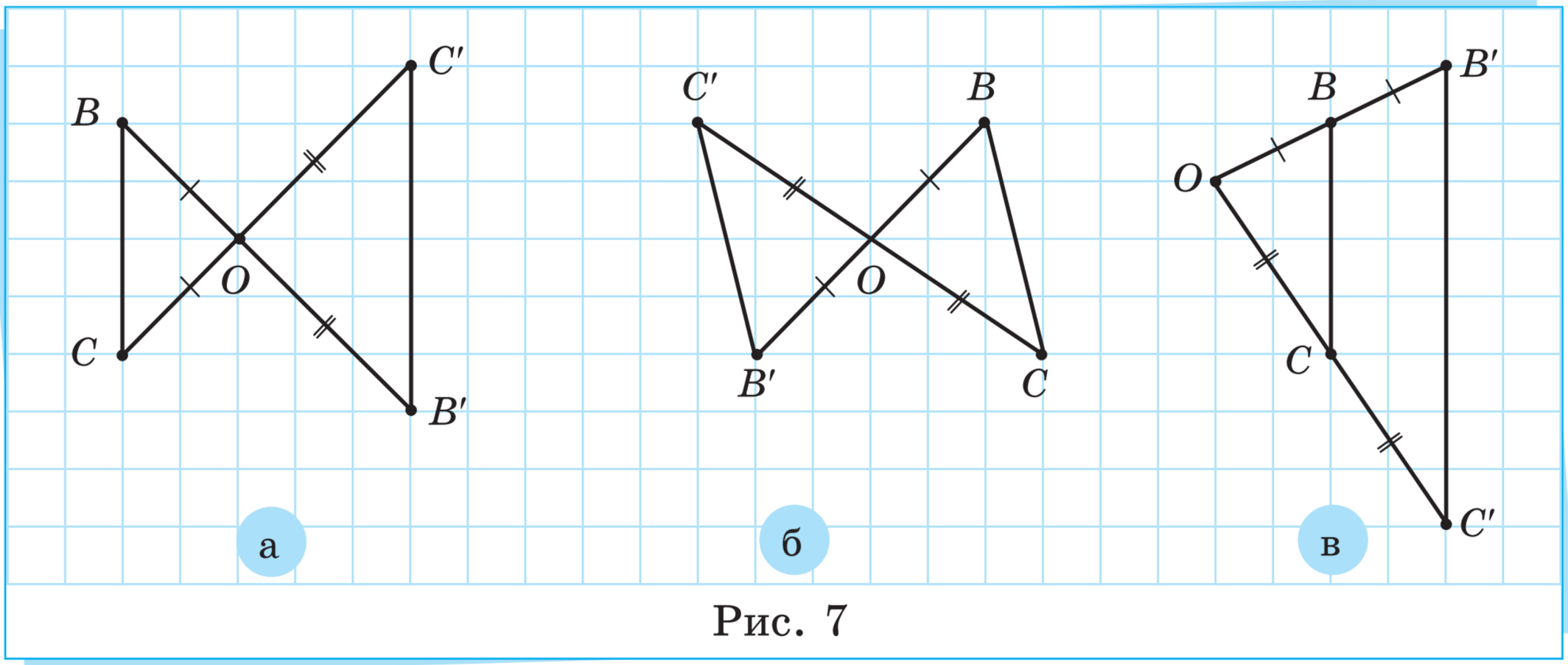


Рис. 7

10. Перетворення g переводить відрізок KL у відрізок $K'L'$ так, як зображено на рис. 8. Чи є перетворення g симетрією відносно точки O? Чи є це перетворення рухом?

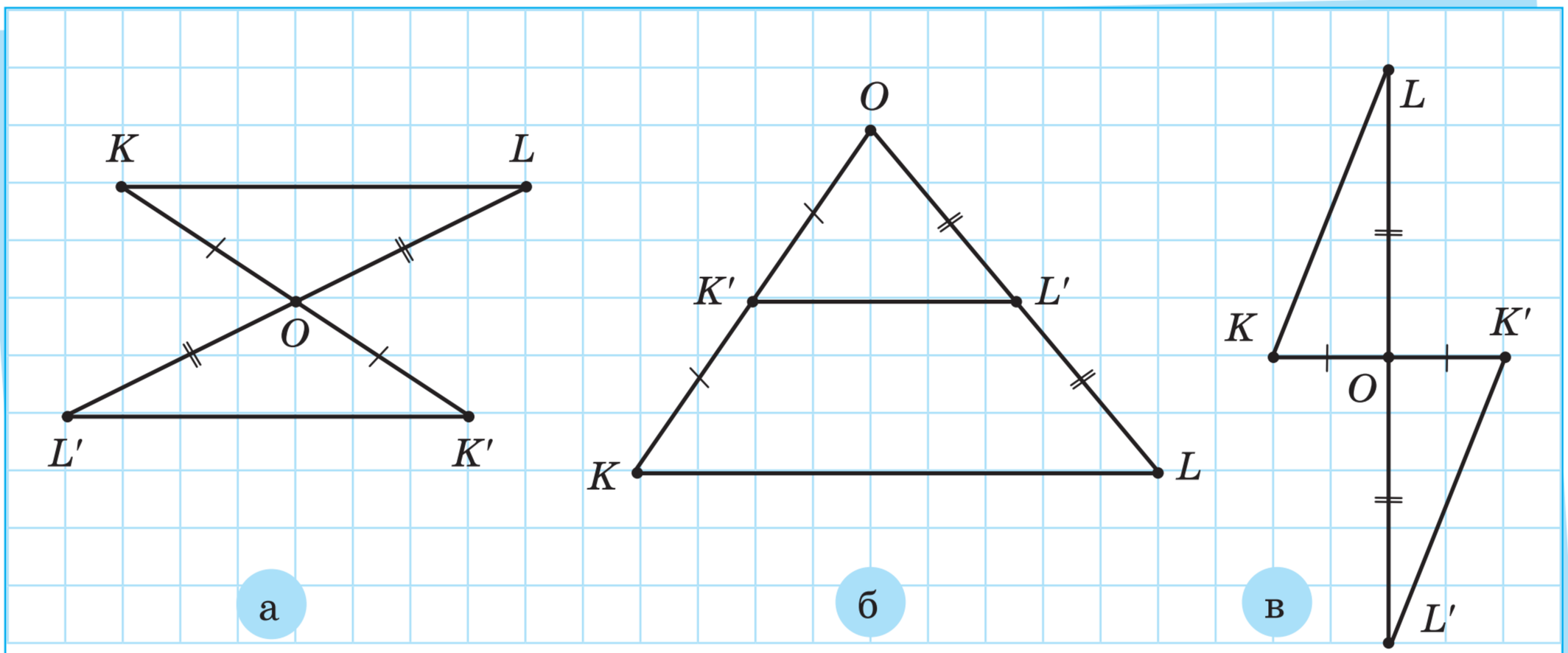


Рис. 8

11. Перетворення h переводить відрізок AC у відрізок $A'C'$ так, як зображено на рис. 9. Чи є перетворення h симетрією відносно прямої m? Чи є це перетворення рухом?

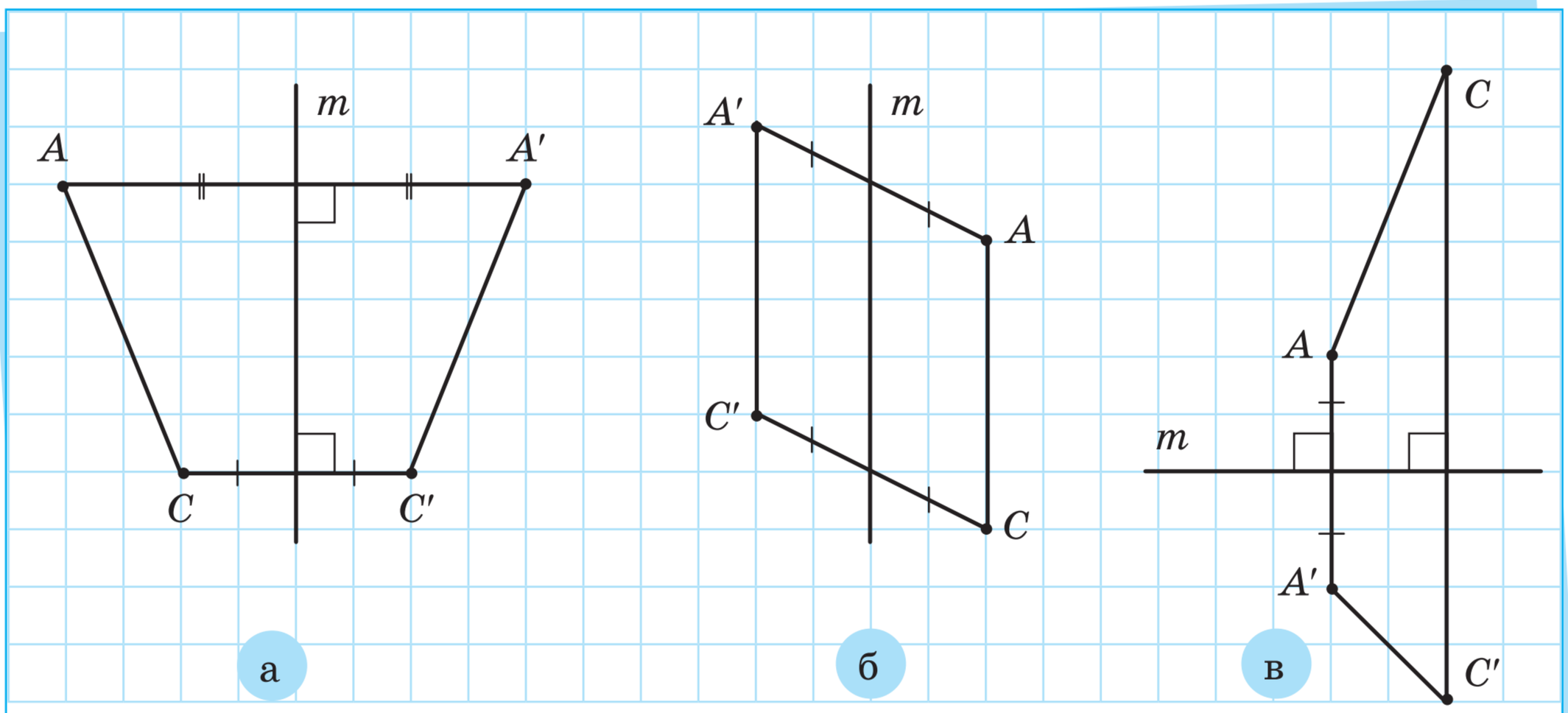


Рис. 9

12. Перетворення f переводить відрізок ND у відрізок $N'D'$ так, як зображено на рис. 10. Чи є перетворення f симетрією відносно прямої c? Чи є це перетворення рухом?

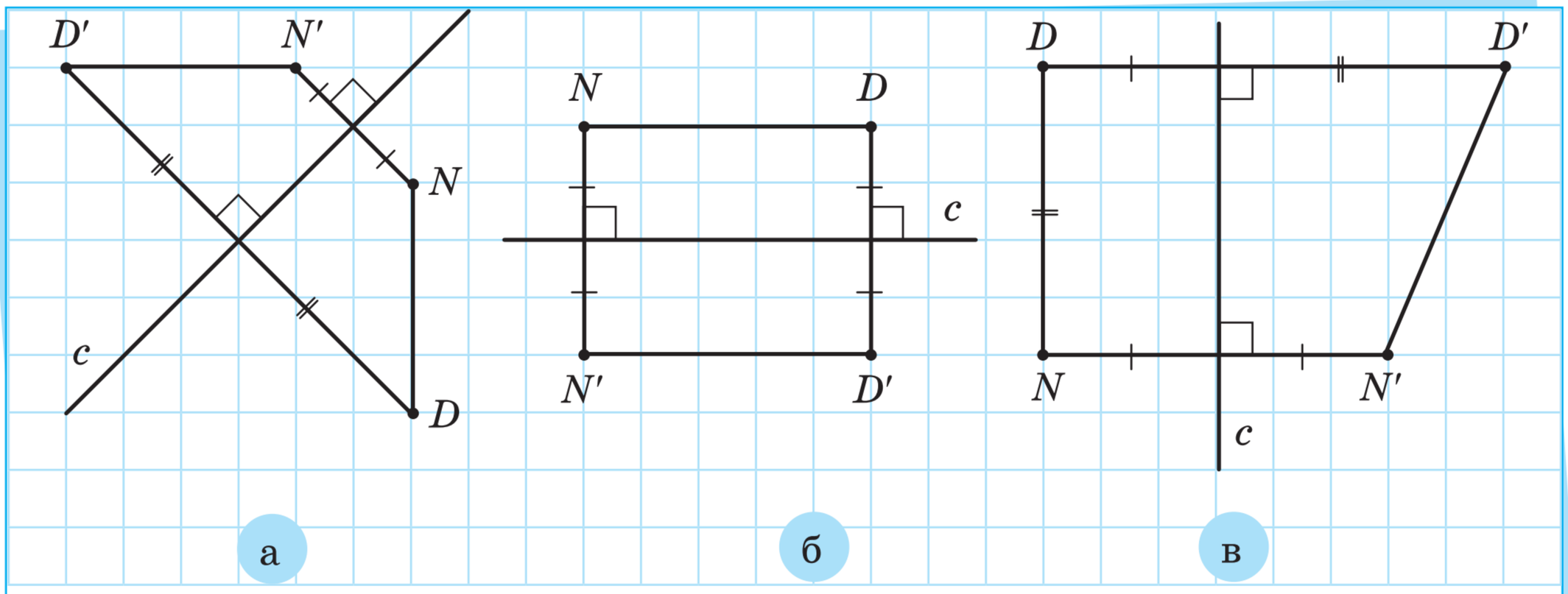


Рис. 10

Середній рівень

13. Зобразіть у зошиті довільний відрізок AB і довільний вектор $\vec{a}$. Побудуйте образ відрізка AB за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

14. Зобразіть у зошиті довільний відрізок MN і довільний вектор $\vec{m}$. Побудуйте образ відрізка MN за паралельного перенесення на вектор $\vec{m}$.

15. Зобразіть у зошиті відрізок $AB = 3$ см. Побудуйте образ цього відрізка за повороту навколо точки A:

а) на кут $90°$ проти ходу годинникової стрілки;
б) на кут $45°$ за ходом годинникової стрілки;
в) на кут $180°$ проти ходу годинникової стрілки.

16. Зобразіть у зошиті відрізок $MN = 4$ см. Побудуйте образ цього відрізка за повороту навколо точки M:

а) на кут $45°$ за ходом годинникової стрілки;
б) на кут $90°$ проти ходу годинникової стрілки;
в) на кут $180°$ за ходом годинникової стрілки.

17. На координатній площині задано точки $A(2;2)$, $P(1;6)$, $Q(4;2)$. Побудуйте:

а) відрізок, у який симетрія f відносно даної точки A переводить відрізок PQ;
б) відрізок, у який симетрія g відносно осі OY переводить відрізок PQ;
в) відрізок, у який симетрія h відносно осі OX переводить відрізок PQ.

18. На координатній площині задано точки $B(-1;-1)$, $M(-4;-1)$, $N(-1;-4)$. Побудуйте:

а) відрізок, у який симетрія f відносно даної точки B переводить відрізок MN;
б) відрізок, у який симетрія g відносно осі OY переводить відрізок MN;
в) відрізок, у який симетрія h відносно осі OX переводить відрізок MN.

19. На координатній площині задано точки $O(0;0)$ і $F(4;2)$. Побудуйте відрізок, у який гомотетія h із центром у точці O і коефіцієнтом λ переводить відрізок OF, якщо:

а) $\lambda = \frac{1}{2}$; б) $\lambda = 2$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

20. На координатній площині задано точки $O(0;0)$ і $A(3;3)$. Побудуйте відрізок, у який гомотетія h із центром у точці O і коефіцієнтом λ переводить відрізок OA, якщо:

а) $\lambda = \frac{1}{3}$; б) $\lambda = 2$.

21. Геометричне перетворення задано аналітично. Чи це перетворення є рухом, якщо відомо, що паралельне перенесення є рухом, а деформація не є рухом.

а) $\begin{cases} x' = x + 5, \\ y' = y - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 7x, \\ y' = y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = x - 4, \\ y' = y - 6. \end{cases}$

22. Геометричне перетворення задано формулами. Чи це перетворення є рухом?

а) $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 8y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x - 8, \\ y' = y + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y + 10. \end{cases}$

23. Які з геометричних перетворень є перетвореннями подібності?

а) Гомотетія із центром у точці O і коефіцієнтом 5;
б) симетрія відносно точки A;
в) поворот на кут $90°$ відносно точки O проти ходу годинникової стрілки;
г) деформація до осі абсцис із коефіцієнтом 3.

24. Які з геометричних перетворень є перетвореннями подібності?

а) Деформація до осі ординат з коефіцієнтом 0,5;
б) симетрія відносно осі абсцис;
в) поворот на кут $30°$ відносно точки O за ходом годинникової стрілки;
г) гомотетія із центром у точці K і коефіцієнтом 2.

Достатній рівень

25. На координатній площині задано трикутник ABC із вершинами в точках $A(-3;0)$, $B(0;3)$, $C(3;0)$. Перетворення деформації d із коефіцієнтом k до прямої l переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть координати вершин трикутника $A'B'C'$, якщо:

а) $k = 2$, а пряма l — вісь абсцис;
б) $k = 2$, а пряма l — вісь ординат;
в) $k = \frac{1}{3}$, а пряма l — вісь абсцис;
г) $k = \frac{1}{3}$, а пряма l — вісь ординат.

Побудуйте на координатній площині трикутник ABC та його образ — трикутник $A'B'C'$ для кожного заданого випадку перетворення деформації.

26. На координатній площині задано трикутник ABC з вершинами в точках $A(-2; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$. Перетворення деформації d із коефіцієнтом k до прямої l переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть координати вершин трикутника $A'B'C'$, якщо:

а) $k = 3$, а пряма l — вісь абсцис;
б) $k = 3$, а пряма l — вісь ординат;
в) $k = \frac{1}{2}$, а пряма l — вісь абсцис;
г) $k = \frac{1}{2}$, а пряма l — вісь ординат.

Побудуйте на координатній площині трикутник ABC та його образ — трикутник $A'B'C'$ для кожного заданого випадку перетворення деформації.

27. У трикутнику ABC паралельно стороні AC проведено середню лінію MN. Доведіть, що перетворення гомотетії f із центром B і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ переводить $\triangle ABC$ у $\triangle MBN$.

28. У трикутнику ABC паралельно стороні BC проведено середню лінію MN. Доведіть, що перетворення гомотетії f із центром A і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ переводить $\triangle ABC$ у $\triangle AMN$.

29. На координатній площині задано прямокутний трикутник ABC (рис. 11). Назвіть рух (рухи), що переводить (переводять) заданий трикутник ABC у трикутники 1, 2, 3, 4.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

30. На координатній площині задано прямокутний трикутник ABC (рис. 12). Назвіть рух (або рухи), що переводить (переводять) заданий трикутник ABC у трикутники 1, 2, 3, 4.

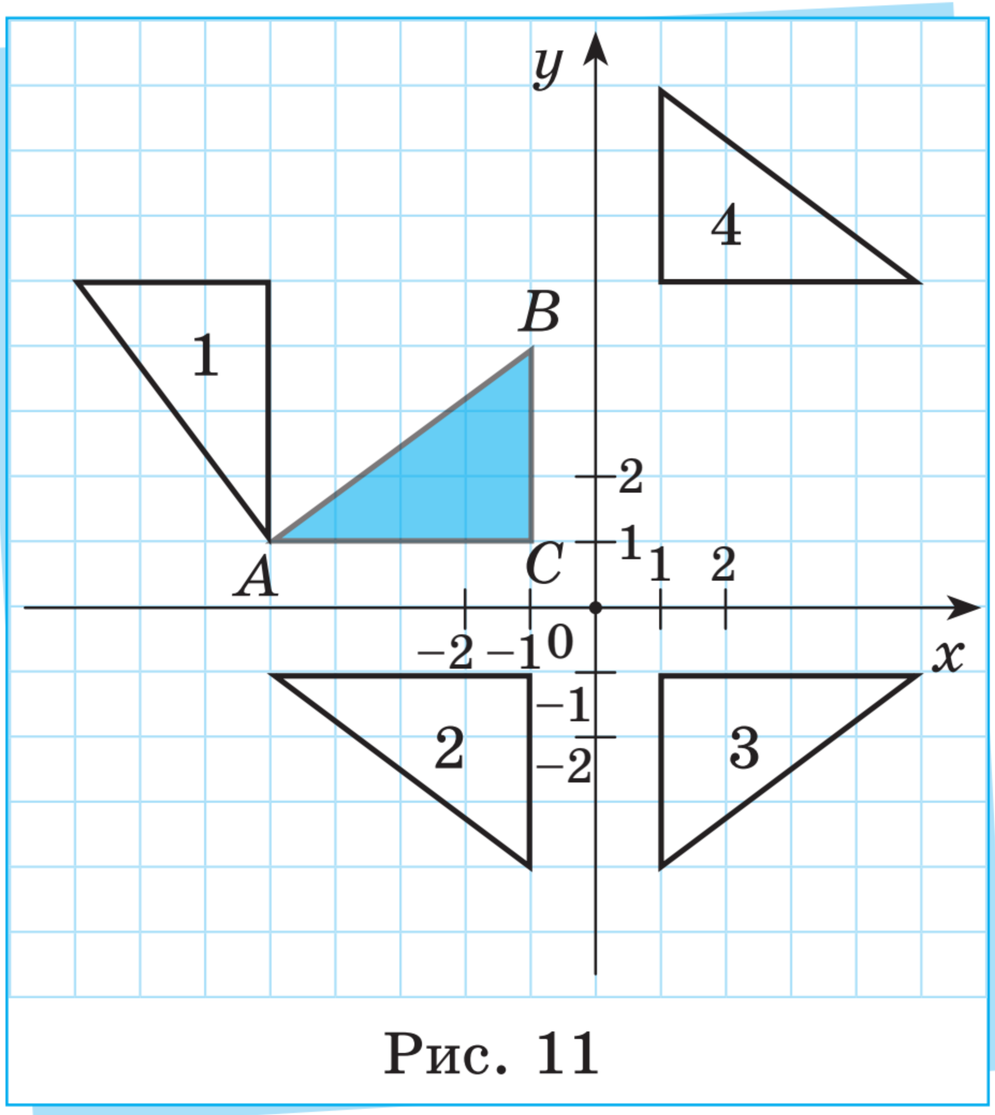


Рис. 11

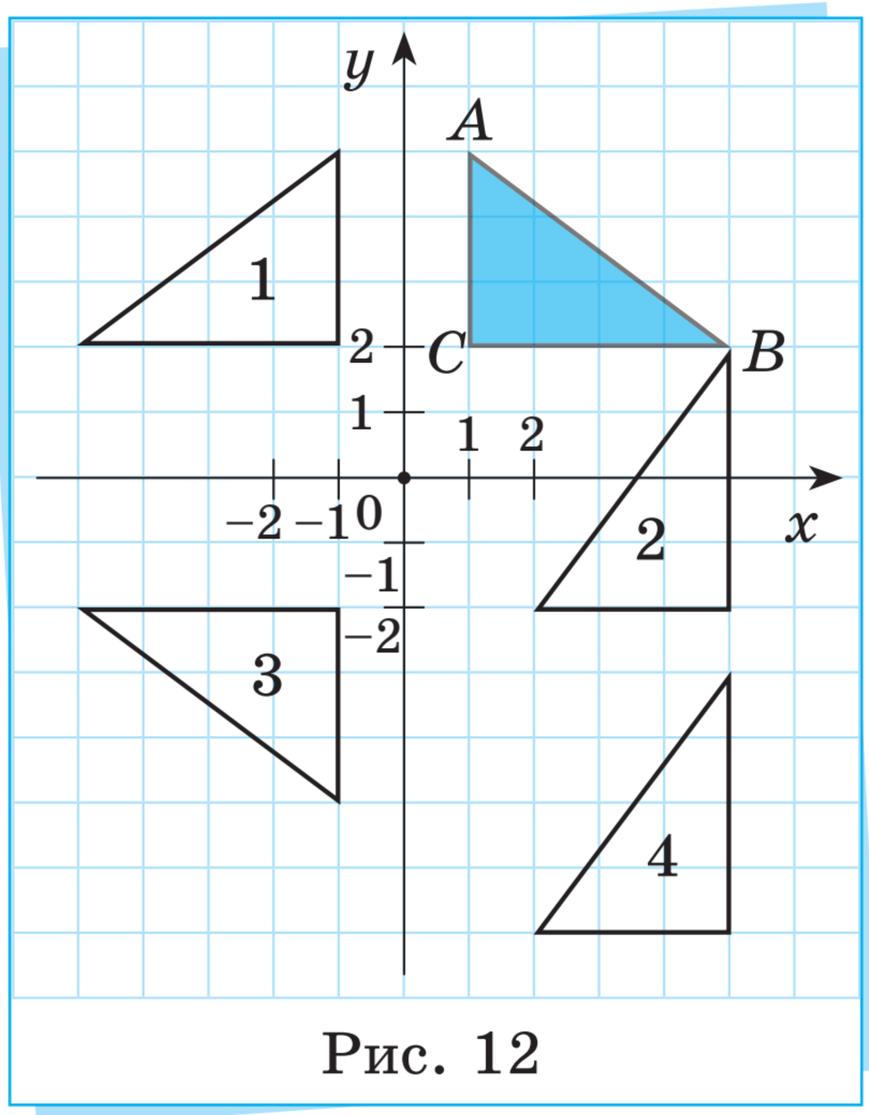


Рис. 12

31. З'ясуйте, чи будуть вершини чотирикутника симетричними відносно точки перетину діагоналей, якщо цей чотирикутник: а) квадрат; б) ромб; в) дельтоїд. Відповідь поясніть.

32. З'ясуйте, чи будуть вершини чотирикутника симетричними відносно точки перетину діагоналей, якщо цей чотирикутник: а) паралелограм; б) прямокутник; в) трапеція. Відповідь поясніть.

33. Перетворення f переводить відрізок EN у відрізок MK. Чи буде перетворення f рухом, якщо $E(1;3)$, $N(5;0)$, $M(5;4)$, $K(9;2)$?

34. Перетворення g переводить відрізок CD у відрізок PQ. Чи буде перетворення g рухом, якщо $C(-2;3)$, $D(1;1)$, $P(2;3)$, $Q(-1;-1)$?

35. На координатній площині задано точку $A(1;2)$ і паралельне перенесення φ таке, що $\varphi(A)=A'$ і $A'(2;3)$. У яку точку цієї координатної площини перетворення φ переведе точку $M(-2;-3)$?

36. На координатній площині задано точку $B(5;5)$ і паралельне перенесення f таке, що $f(B)=B'$ і $B'(7;3)$. У яку точку цієї координатної площини перетворення f переведе точку $M(1;-5)$?

37. Перетворення g переводить точку $A(0;1)$ в точку A'. Знайдіть координати точки A', якщо перетворення g є поворотом навколо точки $O(0;0)$ за ходом годинникової стрілки на кут: а) $90°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $180°$.

38. Перетворення f переводить точку $A(0;1)$ в точку A'. Знайдіть координати точки A', якщо перетворення f є поворотом навколо точки $O(0;0)$ проти ходу годинникової стрілки на кут: а) $90°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $180°$.

39. Центральна симетрія f переводить точку $A(-2;2)$ в точку $A'(4;-4)$. Знайдіть координати центра симетрії та координати точки B', якщо $f(B)=B'$ і $B(3;2)$.

40. Центральна симетрія g переводить точку $M(-3;6)$ у точку $M'(3;0)$. Знайдіть координати центра симетрії та координати точки F', якщо $g(F)=F'$ і $F(-1;-1)$.

41. Знайдіть образ кола $x^2+(y-1)^2=9$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(3;-2)$.

42. Знайдіть образ кола $(x+1)^2+y^2=25$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(-4;5)$.

43. Знайдіть образ прямої $2x-y+1=0$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(3;3)$.

44. Знайдіть образ прямої $x-3y-3=0$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(-1;2)$.

Високий рівень

45. Кожній точці $A(x;y)$ площини поставлено у відповідність точку $A_1(-x;-y)$. Доведіть, що задане перетворення є рухом.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

46. Кожній точці $M(x;y)$ площини поставлено у відповідність точку $M_1(x;-y)$. Доведіть, що задане перетворення є рухом.

47. Доведіть: коли в чотирикутнику прямі, які містять діагоналі, є осями симетрії для відповідних протилежних вершин чотирикутника, то цей чотирикутник — ромб.

48. Доведіть: коли в трикутнику ABC пряма, яка містить його висоту BD, є віссю симетрії для точок A і C, то трикутник ABC — рівнобічний.

49. Доведіть, що поворот квадрата навколо точки перетину його діагоналей на кут $90°$ (за ходом годинникової стрілки чи проти нього) переводить його в цей самий квадрат.

50. Доведіть, що поворот рівностороннього трикутника навколо точки перетину його висот на кут $120°$ (за ходом годинникової стрілки чи проти нього) переводить його у цей самий трикутник.

51. Центральна симетрія f переводить точку $A(9;4)$ у точку $A'(-5;6)$. Знайдіть координати точки B, якщо $f(B)=B'$ і $B'(2;-5)$.

52. Знайдіть образи кола $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ і прямої $3x-2y+1=0$:

а) за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(4;-3)$;

б) за симетрії відносно точки $O_1(3;7)$;

в) за симетрії відносно осі ординат.

53. Доведіть, що гомотетія переводить пряму, яка не проходить через центр гомотетії, у паралельну пряму, а пряму, яка проходить через центр гомотетії, у цю саму пряму.

54. Доведіть, що центральна симетрія переводить пряму, яка не проходить через центр симетрії, у паралельну пряму, а пряму, яка проходить через центр симетрії, у цю саму пряму.

55. Кожній точці $A(x;y)$ площини поставлено у відповідність точку $A_1(2x;-2y)$. Доведіть, що задане перетворення є перетворенням подібності.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

56. Кожній точці $A(x; y)$ площини поставлено у відповідність точку $A_1(-3x; 3y)$. Доведіть, що задане перетворення є перетворенням подібності.

57. Два кола мають внутрішній дотик у точці M. Через точку M проведено дві прямі, які перетинають ці кола в точках A, B, C, D (рис. 13). Доведіть, що $AB \parallel CD$.

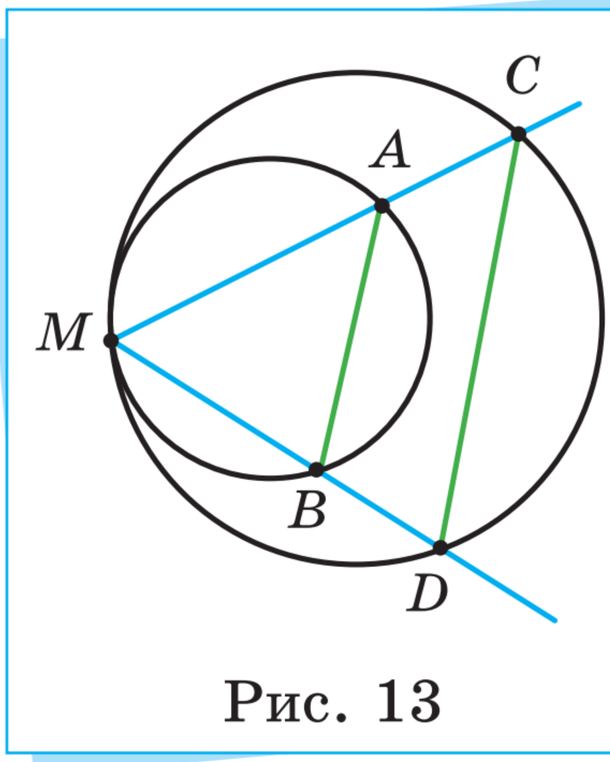


Рис. 13

58. Бічні сторони AB і CD трапеції $ABCD$ продовжено до їх перетину в точці O. Точки M і K — середини основ трапеції. Доведіть, що точки O, M і K лежать на одній прямій.



Цікавинки від дідуся Тараса

Геометричні перетворення відіграють надзвичайно важливу роль у розвитку геометрії як розділу математики. До середини XIX ст. дослідження з геометрії розділилося на кілька слабко узгоджених розділів: евклідову геометрію, сферичну геометрію, гіперболічну геометрію, проєктивну геометрію, афінну геометрію тощо. Однак у 1872 р. німецький математик *Фелікс Кляйн* у своїй знаменитій «Ерланген-ській програмі» запропонував ідею класифікації різних розділів геометрії відповідно до властивостей геометричних фігур, які зберігаються в результаті виконання тих чи інших геометричних перетворень. Такі властивості він назвав *інваріантами* певного класу геометричних перетворень. Для рухів такими інваріантами є відстань між точками, градусна міра кута, просте відношення трьох точок, а для перетворень подібності — градусна міра кута й просте відношення трьох точок. Для кожного з інших класів перетворень є свої інваріанти, і, згідно з підходом Кляйна, один розділ геометрії відрізняється від іншого саме ними.

Фелікс Кляйн (1849–1925) — німецький математик, відомий своїми роботами з алгебри, геометрії, теорії функцій, а також працями про зв'язок між алгеброю та геометрією.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Наприклад, *афінна геометрія* вивчає геометричні перетворення, які зберігають просте відношення трьох точок. Такі перетворення називають *афінними перетвореннями*. До афінних перетворень, зокрема, відносяться рухи й перетворення подібності. Однак існують також інші афінні перетворення: деформація до даної прямої є афінним перетворенням, але, як ви вже знаєте, вона не є ані рухом, ані перетворенням подібності.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Дізнайтеся більше про класи геометричних перетворень площини, відмінних від рухів і подібностей, зокрема про афінні перетворення. Підготуйте невелике повідомлення на цю тему.
2. Переконайтеся, що деформація до даної прямої з даним коефіцієнтом є афінним перетворенням. Наведіть інші приклади афінних перетворень, які не є ані рухами, ані подібностями.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{2}{x} = 3x + 1$ графічним способом.
2. Пан Кузьма позичив пані Варварі 2000 грн на 4 місяці під 12 % річних за простою схемою нарахування відсотків. Яку суму має повернути пані Варвара пану Кузьмі через 4 місяці?
3. У прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює 20 см, а довжина одного з катетів — 12 см. Знайдіть довжину невідомого катета (у см) і градусні міри гострих кутів цього трикутника. Для обчислень скористайтеся калькулятором. Градусні міри кутів округліть до цілих.
4. Створіть із паперу модель циліндра, бічна поверхня якого є прямокутником зі сторонами 10 см і 12 см. Скільки розв'язків має ця задача?
5. Запишіть у дужках слово, яке одночасно є завершенням слова зліва від дужок і початком слова справа від дужок. Кількість крапок у дужках позначає кількість букв шуканого слова.
а) СЮР(....)МА; б) О(....)Н

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 3. Рівність і подібність фігур. Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень







Слухай, Петрику, учора ми з молодшим братом Андрійком гуляли в парку, і він запитав мене, чи всі листочки в клена однакові. Я навіть сфотографувала два листочки й показала йому, що вони різні. Ось, поглянь. Тоді Андрійко запитав: «А коли кленові листочки однакові?» І, знаєш, я трохи розгубилася, бо не знала, що йому відповісти.



Справді цікаве запитання. Ми вже знаємо, наприклад, які два трикутники називають рівними: якщо в них усі відповідні кути й усі відповідні сторони рівні. Але якщо це не трикутник, а більш складна геометрична фігура? Здається, ми колись говорили, що рівні трикутники *суміщаються накладанням*. Може, тут теж слід використати цей підхід?



Цікава ідея! Щойно ми вивчили рухи площини. Можливо, фраза «дві фігури суміщаються накладанням» означає, що деякий

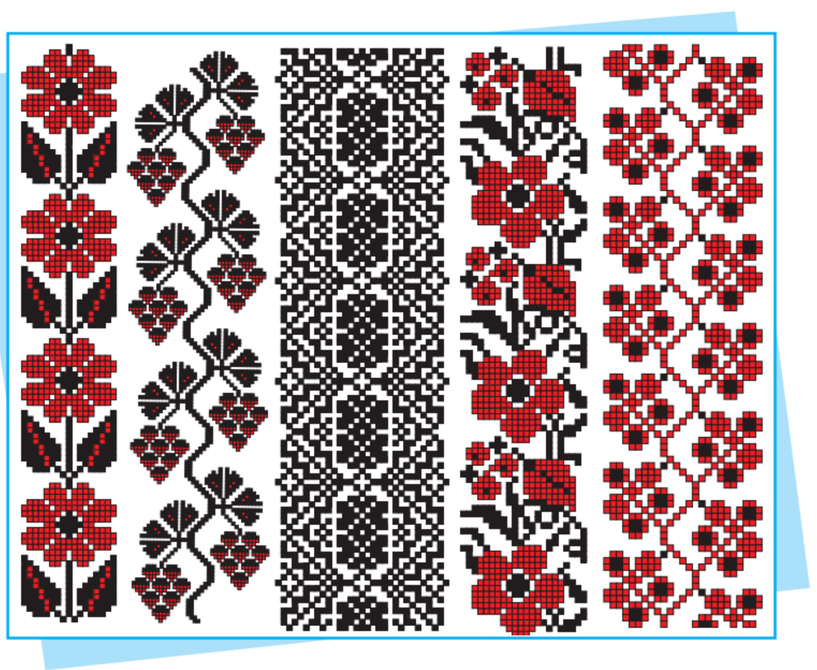
рух одну з них переводить у другу? Як на мене, такі фігури природно назвати рівними. На фото листочків одразу видно, що вони не суміщаються накладанням, а отже, рівними не будуть. Але зверни увагу: менший листочок за формою практично такий самий, як і більший.



Справді, якби це були не листочки, а трикутники, то я б сказав, що вони подібні. Точно! Мабуть, якщо одна фігура переходить в іншу за перетворення подібності, то природно назвати такі дві фігури подібними.



А ще бувають такі геометричні фігури, які складаються з однакових чи подібних частин. Наприклад, орнаменти на вишиванках, різні витинанки тощо. Цікаво, як називаються такі фігури?





Чомусь упевнений, що математики вже давно придумали їм назви. Пропоную запитати в учителів, вони все пояснять.

Рівність і подібність фігур



Звісно, пояснимо. Хід думок Петрика щодо означення рівних і подібних фігур цілком слушний.



Дві геометричні фігури Φ і Φ' називають рівними, якщо $f(\Phi)=\Phi'$, де f — рух площини. Іншими словами, фігури називають рівними, якщо одна з них переходить в іншу за деякого руху площини.

У 7 класі це тлумачення рівних фігур на інтуїтивному рівні дійсно вже розглядалося, коли стверджувалося, що рівні відрізки, рівні кути й рівні трикутники можна сумістити накладанням. Тепер це інтуїтивне розуміння викладено більш строго з математичної точки зору.



Для відрізків, кутів і трикутників наведене означення рівних фігур не суперечить уже відомим. Справді, ви вже знаєте, що рух переводить відрізок у відрізок тієї самої довжини, кут — у кут тієї самої градусної міри, а трикутник — у рівний йому трикутник. Тому можна вважати, що для цих геометричних фігур щойно наведене означення рівності є *еквівалентним* відомим раніше.

Але, наприклад, для чотирикутників, кіл та інших геометричних фігур означення рівності раніше не вводилося. Тепер у цих окремих означеннях рівності немає потреби, бо є означення, яке можна використати для будь-яких геометричних фігур.



Наведемо *приклади використання означення рівності фігур.*

Приклад 1

Покажемо, що:

1) два кола, радіуси яких рівні, є рівними;

2) два квадрати, сторони яких рівні, є рівними.

(1) Для доведення рівності двох кіл радіуса R із центрами в точках O_1 і O_2 розглянемо паралельне перенесення f на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{O_1O_2}$ (див. рис. 3.1). Це перетворення точку O_1 переводить у точку O_2. Нехай точка M належить колу радіуса R із центром у точці O_1 і $f(M) = M'$. Покажемо, що точка M' належить колу радіуса R із центром у точці O_2. Справді, оскільки $f(O_1M) = O_2M'$, а $O_1M = R$, то за властивістю руху f

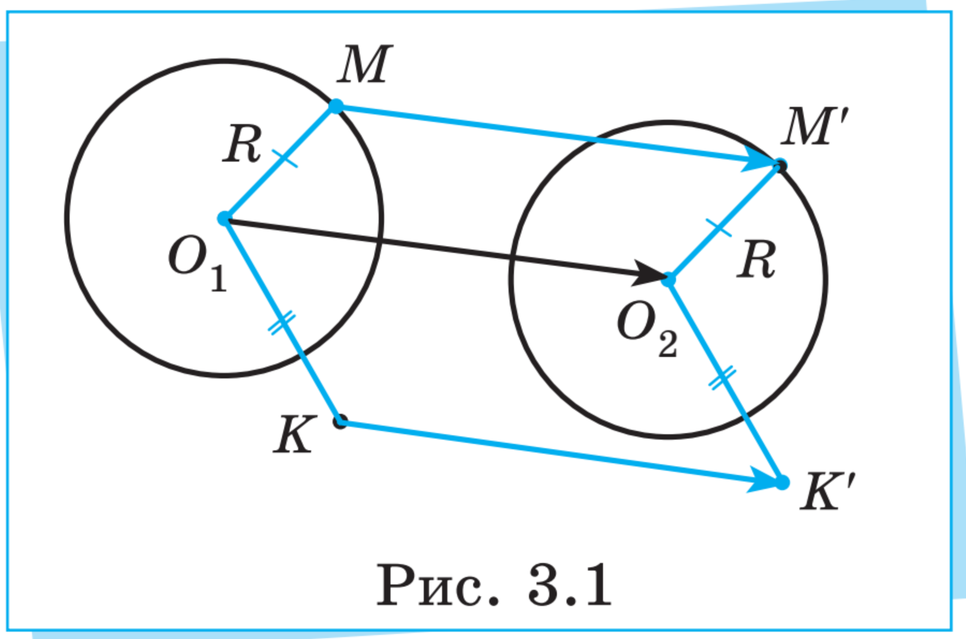


Рис. 3.1

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

виконується рівність $O_2M' = R$. Отже, образ довільної точки M, яка належить колу радіуса R із центром у точці O_1, належить колу того самого радіуса із центром у точці O_2.

Розглянемо тепер довільну точку K площини, яка НЕ належить колу радіуса R із центром у точці O_1 і $f(K) = K'$. Для неї $f(O_1K) = O_2K'$ і $O_1K \neq R$. Тоді за властивістю руху f виконується співвідношення $O_2K' \neq R$. Отже, образ довільної точки K, яка не належить колу радіуса R із центром у точці O_1, також не належить колу того самого радіуса із центром у точці O_2. Таким чином, ми довели, що рух f коло радіуса R із центром у точці O_1 переводить у коло того самого радіуса із центром у точці O_2, тобто два кола, радіуси яких рівні, є рівними.

(2) Нехай задано два квадрати $ABCD$ і $KLMP$, сторони яких рівні (див. рис. 3.2). Розглянемо паралельне перенесення g на вектор $\overrightarrow{AK}$. За властивостями рухів це паралельне перенесення переведе квадрат $ABCD$ у квадрат $KB'C'D'$ із такою самою довжиною сторони. Далі виконаємо поворот h відносно точки K на кут $\varphi = \angle B'KL$ (за ходом годинникової стрілки). Зрозуміло, що $h(K) = K$ і $h(B') = L$. Покажемо, що $h(D') = P$. Справді, $\angle B'KP = \varphi + 90°$, а отже, $\angle D'KP = \varphi$. Крім того, $KD' = AD = KP$, звідки за означенням повороту $h(D') = P$. Аналогічно показують, що $h(C') = M$. Перетворення p, яке полягає в послідовному виконанні паралельного перенесення g і повороту h, також є рухом і переводить квадрат $ABCD$ у квадрат $KLMP$, тобто два квадрати, сторони яких рівні, є рівними.

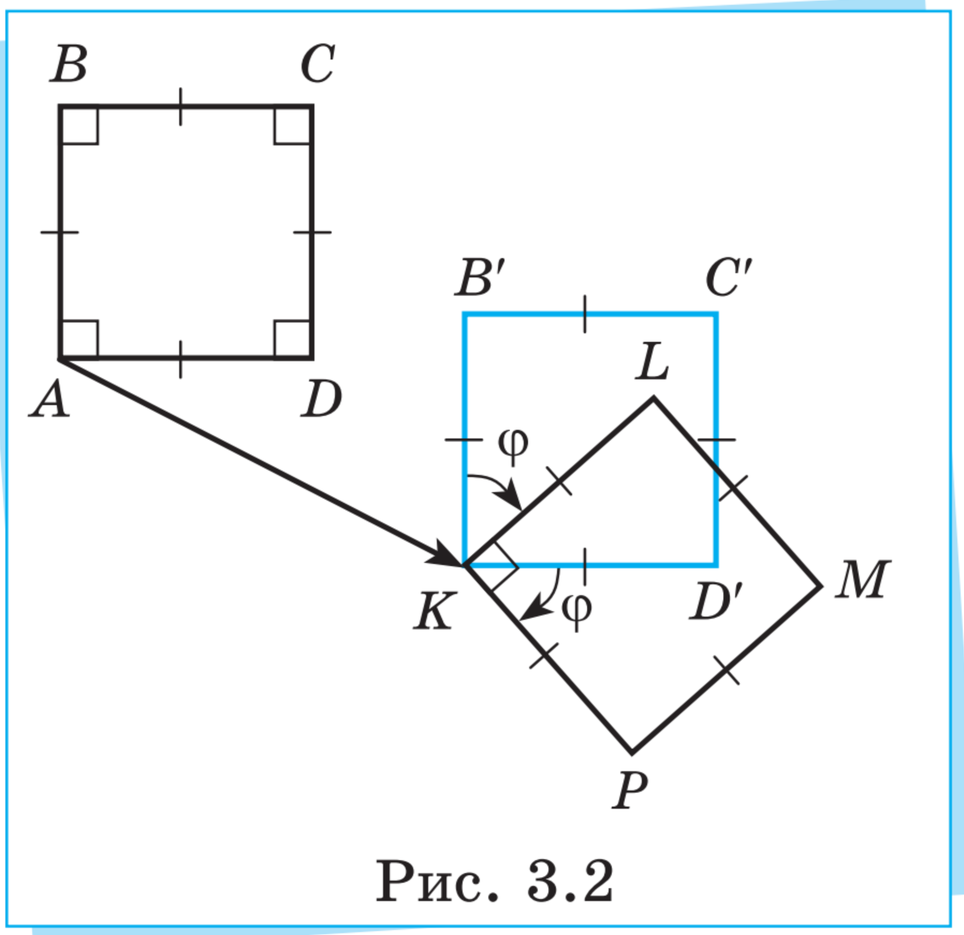


Рис. 3.2



Уважні учениці й учні можуть засумніватися в тому, що перетворення, яке полягає в послідовному виконанні двох рухів, також є рухом. *Доведіть цей факт самостійно* — це нескладно.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Наведемо також *означення подібних фігур*.



Дві геометричні фігури Φ і Φ' називають подібними, якщо $g(\Phi)=\Phi'$, де g — перетворення подібності. Іншими словами, фігури називають подібними, якщо одна з них переходить в іншу за деякого перетворення подібності.

Зауважимо, що для випадку, коли фігура Φ є трикутником, це означення є *еквівалентним* до вже відомого означення подібних трикутників, бо за властивостями, наведеними в § 2, подібність переводить будь-який трикутник у подібний йому трикутник.



За означенням подібності фігур можна, зокрема, показати: 1) будь-які два кола є подібними; 2) будь-які два квадрати є подібними.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/112066,
rnk.com.ua/112067





Також Тетянка слушно зауважила, що окремі геометричні фігури ніби складаються з однакових частин. Для таких фігур є спеціальна назва.



Якщо перетворення f геометричну фігуру Φ переводить саму в себе, то таке перетворення називають симетрією фігури Φ. При цьому саму фігуру Φ називають симетричною відносно перетворення f.



Зрозуміло, що всі геометричні фігури площини є симетричними відносно тотожного перетворення θ. Окремі геометричні фігури не мають інших симетрій, крім тотожного перетворення. Наприклад, трапеція, яка не є рівнобічною, ніяких інших симетрій, крім тотожного перетворення, не має. Розглянемо інший приклад.

Приклад 2

Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами BC і AD, у якої бічні сторони AB і CD рівні. Нехай також точки M і K — середини основ BC і AD відповідно (див. рис. 3.3). Покажемо, що осьова симетрія f відносно прямої MK є симетрією рівнобічної трапеції $ABCD$.

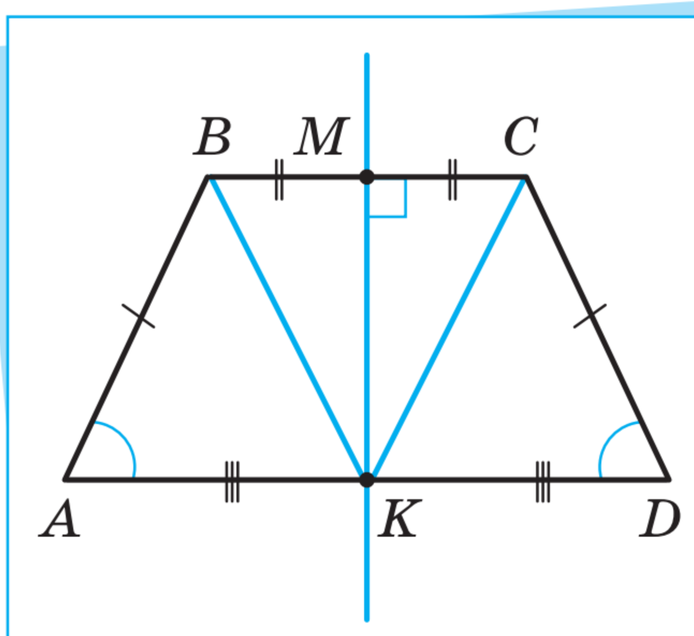


Рис. 3.3

Справді, за властивістю рівнобічної трапеції $\angle A = \angle D$, а за умовою $AB = CD$ і $AK = KD$. Тому $\Delta ABK = \Delta DCK$, звідки $BK = CK$, тобто ΔBCK — рівнобічний. У цьому трикутнику відрізок KM є медіаною, а отже, він є також і висотою.

Таким чином, пряма MK перпендикулярна до основи BC, а отже, і до основи AD. Оскільки $BC \perp MK$ і точка M є серединою відрізка BC, то $f(B) = C$ і $f(C) = B$. Аналогічно $f(A) = D$ і $f(D) = A$. Тому $f(BC) = CB$, $f(AD) = DA$, $f(AB) = DC$, звідки $f(ABCD) = DCBA$, тобто трапеція $ABCD$ за перетворення f переходить сама в себе, що й потрібно було довести.

Ніяких інших симетрій, крім осьової симетрії відносно прямої MK і тотожного перетворення, рівнобічна трапеція $ABCD$ не має.



Для зручності й простоти мовлення корисним буде таке означення.



Геометричну фігуру Φ, симетрією якої є осьова симетрія з віссю l, називають симетричною відносно прямої l. Пряму l при цьому називають віссю симетрії фігури Φ.



Розглянемо ще один приклад.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Приклад 3

Нехай $ABCD$ — паралелограм, який не є ні прямокутником, ні ромбом, а точка O — точка перетину його діагоналей AC і BD (рис. 3.4). Покажемо, що центральна симетрія g із центром у точці O є симетрією паралелограма $ABCD$.

Справді, за властивістю паралелограма $AO = OC$ і $BO = OD$, тобто точка O є серединою відрізків AC і BD.

Тому $g(A) = C$, $g(C) = A$, $g(B) = D$, $g(D) = B$, звідки за властивостями рухів $g(ABCD) = CDAB$, тобто паралелограм $ABCD$ за перетворення g переходить сам у себе, що й потрібно було довести.

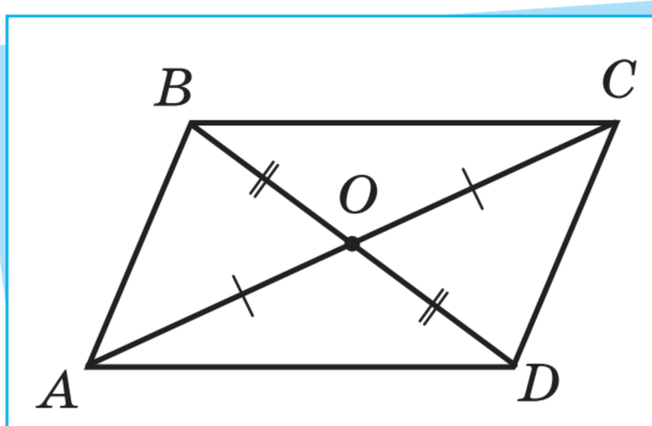


Рис. 3.4

Ніяких інших симетрій, крім центральної симетрії із центром у точці O і тотожного перетворення, паралелограм $ABCD$ не має.



Також для зручності й простоти мовлення введемо таке означення.

Геометричну фігуру Φ, симетрією якої є центральна симетрія із центром у точці O, називають симетричною відносно точки O. Точку O при цьому називають центром симетрії фігури Φ.



Існують і геометричні фігури, що мають *нескінченну кількість симетрій*.

Приклад 4

Розглянемо пряму m. Симетріями цієї геометричної фігури будуть:

- тотожне перетворення;
- паралельне перенесення на будь-який вектор $\vec{a}$, паралельний прямій m;

- центральна симетрія відносно будь-якої точки O, що належить прямій m;
- осьова симетрія відносно будь-якої прямої l, яка перпендикулярна до прямої m.

Обґрунтування цього твердження:
rnk.com.ua/112068,
rnk.com.ua/112069





Якщо уявити, що орнаменти, про які говорила Тетянка, є нескінченними, то більшість із них будуть симетричними відносно паралельного перенесення на певний вектор. Таку властивість мають багато рисунків на шпалерах, килимах тощо.



Поворот на даний кут відносно даної точки також може бути симетрією геометричної фігури.

Приклад 5

Розглянемо коло радіуса R із центром у точці O (див. рис. 3.5). Симетріями цієї геометричної фігури будуть:

- тотожне перетворення;
- центральна симетрія відносно точки O;
- поворот відносно точки O на будь-який кут φ;
- осьова симетрія відносно будь-якої прямої l, яка проходить через точку O.

Справді, для довільної точки M кола із центром у точці O її образ M' за центральної симетрії відносно точки O також буде належати цьому колу, бо за означенням центральної симетрії $OM' = OM = R$ (див. рис. 3.5).

Якщо розглянути поворот відносно центра кола O на деякий кут φ незалежно від напрямку, то також для довільної точки P кола її образ P' належатиме цьому колу, бо за означенням повороту $OP' = OP = R$ (див. рис. 3.5).

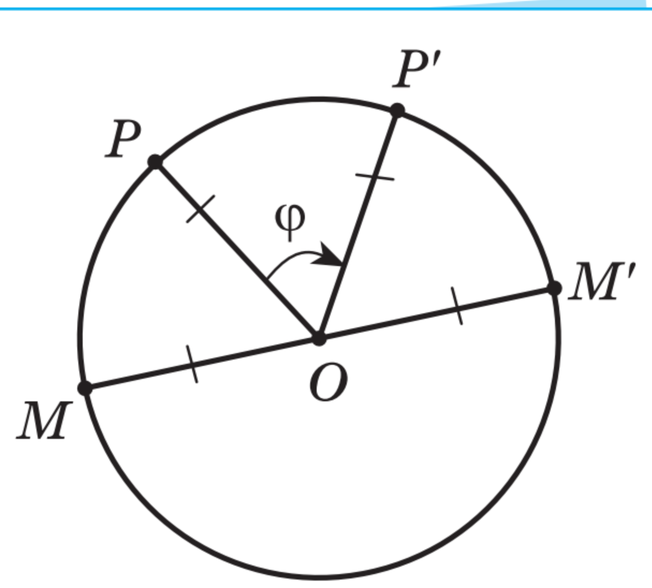


Рис. 3.5

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Нарешті розглянемо осьову симетрію h відносно деякої прямої l, яка проходить через точку O. Нехай вона перетинає коло в точках A і B. За означенням осьової симетрії $h(A)=A$, $h(B)=B$, тобто образи точок A і B належать даному колу. Нехай K — довільна точка кола, відмінна від A і B. Покажемо, що $h(K)=K'$ належить колу (див. рис. 3.6). Трикутник AKB є вписаним у коло. Відрізок AB — діаметр кола, а отже, трикутник AKB — прямокутний із прямим кутом K.

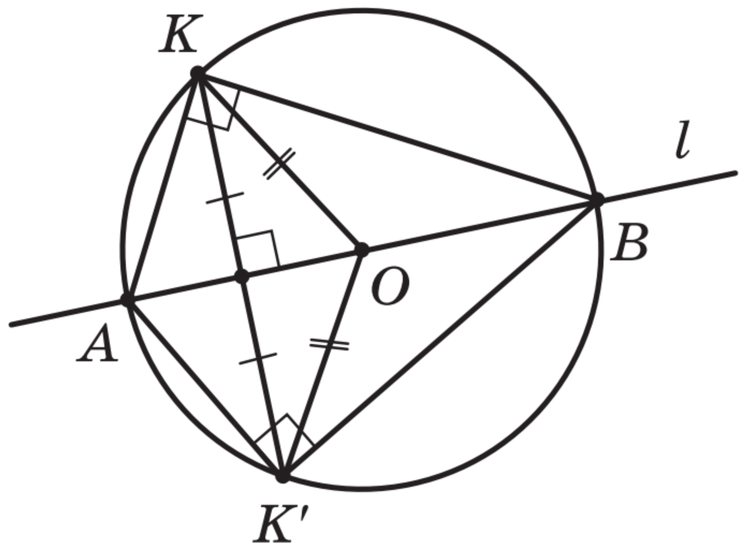


Рис. 3.6

Оскільки $h(AKB)=AK'B$, то за властивістю рухів трикутник $AK'B$ — також прямокутний із прямим кутом K', причому $\Delta AK'B=\Delta AKB$. У рівних прямокутних трикутників радіуси описаних навколо них кіл також рівні, а центри є серединами їхніх гіпотенуз. Гіпотенузи трикутників AKB і $AK'B$ збігаються, точка O є серединою відрізка AB, і за умовою $OK=R$. Отже, $OK'=R$, тобто точка K' належить колу, що й потрібно було довести.

Для кожного з наведених перетворень так само показується, що образ будь-якої точки, яка не належить колу радіуса R із центром у точці O, також не належатиме цьому колу за цього перетворення.

Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень



Геометричні перетворення можна використовувати й *для розв'язування задач на побудову*. Розглянемо приклади таких задач.

Задача 1. На заданій прямій l побудуйте точку C, сума відстаней від якої до двох даних точок $A\notin l$ і $B\notin l$ була б *найменшою*.

Розв'язання

а) *Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої l.* Для побудови точки C досить побудувати відрізок AB і знайти точку

його перетину з прямою l. Справді, розглянемо на прямій l *будь-яку* іншу точку D, відмінну від C (див. рис. 3.7, *а*). За побудовою сума відстаней від точки C до точок A і B дорівнює довжині відрізка AB, тобто $AC+CB=AB$. Розглянемо трикутник ABD. За властивістю сторін цього трикутника (нерівністю трикутника) $AD+DB>AB$, тобто $AD+DB>AC+CB$, що й потрібно було довести.

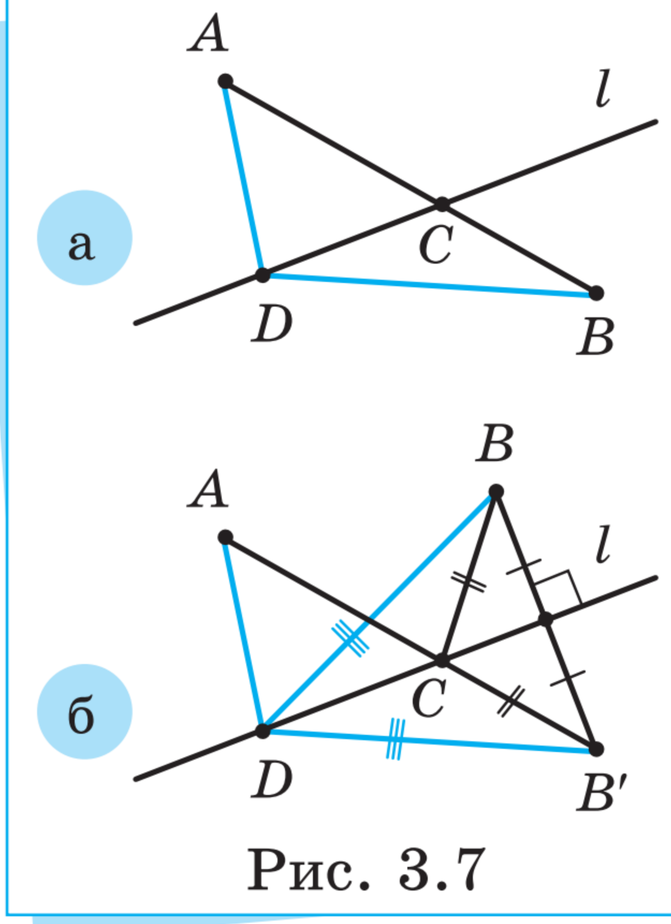


Рис. 3.7

б) *Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої l.* Побудуємо точку B', що є образом точки B за симетрії f відносно прямої l, а потім позначимо через C точку перетину відрізка AB' із прямою l.

Покажемо, що C — шукана точка. Для цього знову розглянемо на прямій l *будь-яку* іншу точку D, відмінну від C (див. рис. 3.7, *б*). Оскільки $C\in l$ і $D\in l$, то $f(C)=C$ і $f(D)=D$, а отже, $f(CB)=CB'$ і $f(DB)=DB'$. Оскільки симетрія f є рухом, то $CB=CB'$ і $DB=DB'$, звідки $AC+CB=AC+CB'=AB'$ і $AD+DB=AD+DB'$. Тепер аналогічно до випадку на рис. 3.7, *а* з трикутника ADB' маємо: $AD+DB'>AB'$, звідки $AD+DB=AD+DB'>AB'=AC+CB$, що й потрібно було довести.



Цікаво! Якщо уявити, що пряма l — це автомобільне шосе, а точки A і B — два маленькі села, то ця задача визначає, де саме на трасі потрібно поставити зупинку, щоб жителям обох сіл було зручно нею користуватися.



Дійсно, симетрія виявилася дуже корисною і на практиці, і для розв'язування математичних задач на побудову. Але симетрія — це рух. А перетворення подібності можна використовувати в тих самих задачах на побудову?



Звісно, Петрику! Зараз розглянемо саме такий випадок.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Задача 2. Нехай задано довільний гострокутний трикутник ABC. «Впишіть» у в нього прямокутник $KLMP$, у якого $\frac{KL}{KP}=\frac{1}{2}$, так, щоб точки K і P належали стороні AC, точка L — стороні AB, а точка M — стороні BC (див. рис. 3.8).

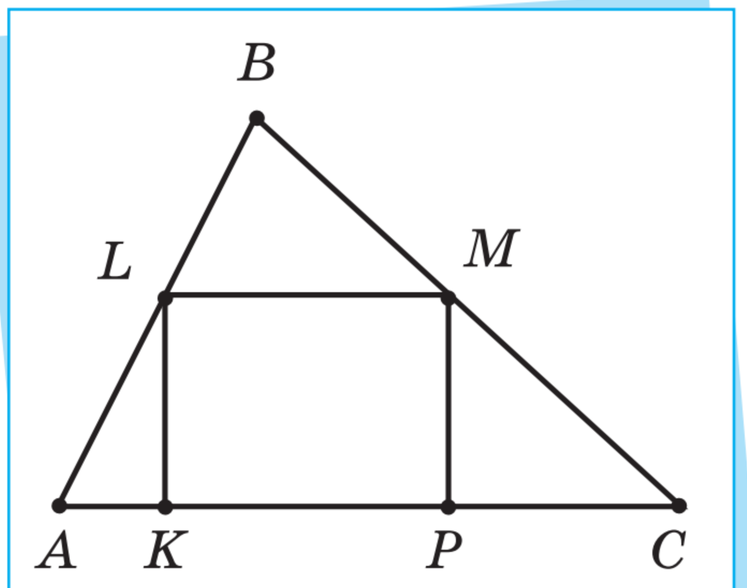


Рис. 3.8

Розв'язання. Візьмемо на стороні AB трикутника ABC довільну точку L_1 і опустимо із цієї точки перпендикуляр L_1K_1 на сторону AC, а потім побудуємо прямокутник $K_1L_1M_1P_1$ так, щоб точка P_1 також належала стороні AC і $\frac{K_1L_1}{K_1P_1}=\frac{1}{2}$ (див. рис. 3.9). Проведемо промінь AM_1 і точку перетину цього променю зі стороною BC трикутника позначимо через M. Далі розглянемо гомотетію g із центром у точці A і коефіцієнтом $k=\frac{AM}{AM_1}$. Нехай $g\left(K_1L_1M_1P_1\right)=KLMP$. За означенням гомотетії $\overrightarrow{AK}=k\cdot\overrightarrow{AK}_1$, $\overrightarrow{AL}=k\cdot\overrightarrow{AL}_1$, $\overrightarrow{AP}=k\cdot\overrightarrow{AP}_1$, а отже, точки K і P належать стороні AC, а точка M — стороні BC трикутника ABC. Крім того, за властивостями гомотетії як перетворення подібності, якщо $K_1L_1M_1P_1$ — прямокутник, то $KLMP$ — теж прямокутник, причому $\frac{KL}{KP}=\frac{k\cdot K_1L_1}{k\cdot K_1P_1}=\frac{1}{2}$. Отже, прямокутник $KLMP$ — шуканий.

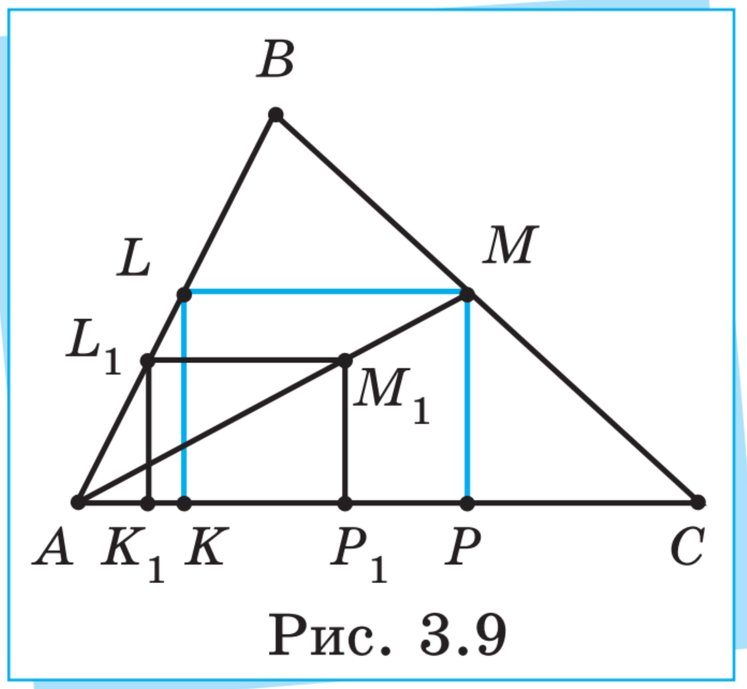


Рис. 3.9



Таким самим способом можна «вписати» в трикутник будь-який прямокутник із заданим відношенням довжин сусідніх сторін, зокрема квадрат. *Переконайтеся в цьому самостійно.*

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Перевірте себе!

1. Дайте означення рівних геометричних фігур. Наведіть приклади рівних фігур.
2. Дайте означення подібних геометричних фігур. Наведіть приклади подібних фігур.
3. Дайте означення симетрії геометричної фігури.
4. Наведіть приклади геометричних фігур, що є симетричними: а) відносно деякої точки; б) відносно деякої прямої; в) відносно деякого паралельного перенесення; г) відносно деякого повороту.
5. Наведіть приклади геометричних фігур, які: а) не мають інших симетрій, крім тотожного перетворення; б) мають безліч симетрій.
6. Наведіть приклади об'єктів із повсякденного життя, що мають симетрії.
7. Наведіть приклади використання геометричних перетворень для розв'язування задач на побудову.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Чи будуть рівними фігури A і B, якщо фігура A перейшла у фігуру B:
а) за паралельного перенесення на вектор $\vec{n}$;
б) за деформації з коефіцієнтом 2 до осі ординат;
в) за симетрії відносно точки O;
г) за симетрії відносно прямої c?

2. Чи будуть рівними фігури K і N, якщо фігура K перейшла у фігуру N:
а) за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$;
б) за гомотетії з коефіцієнтом 4 і центром у точці A;
в) за симетрії відносно точки B;
г) за симетрії відносно осі абсцис?

3. Чи є фігура симетричною відносно прямої m (рис. 1)?

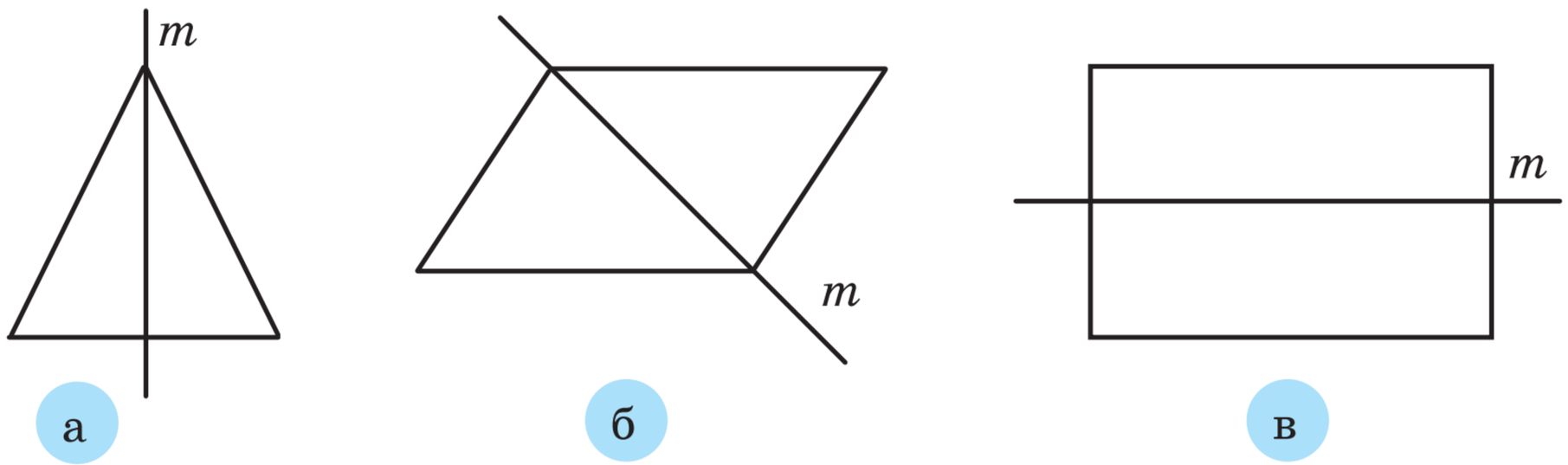


Рис. 1

4. Чи є фігура симетричною відносно прямої c (рис. 2)?

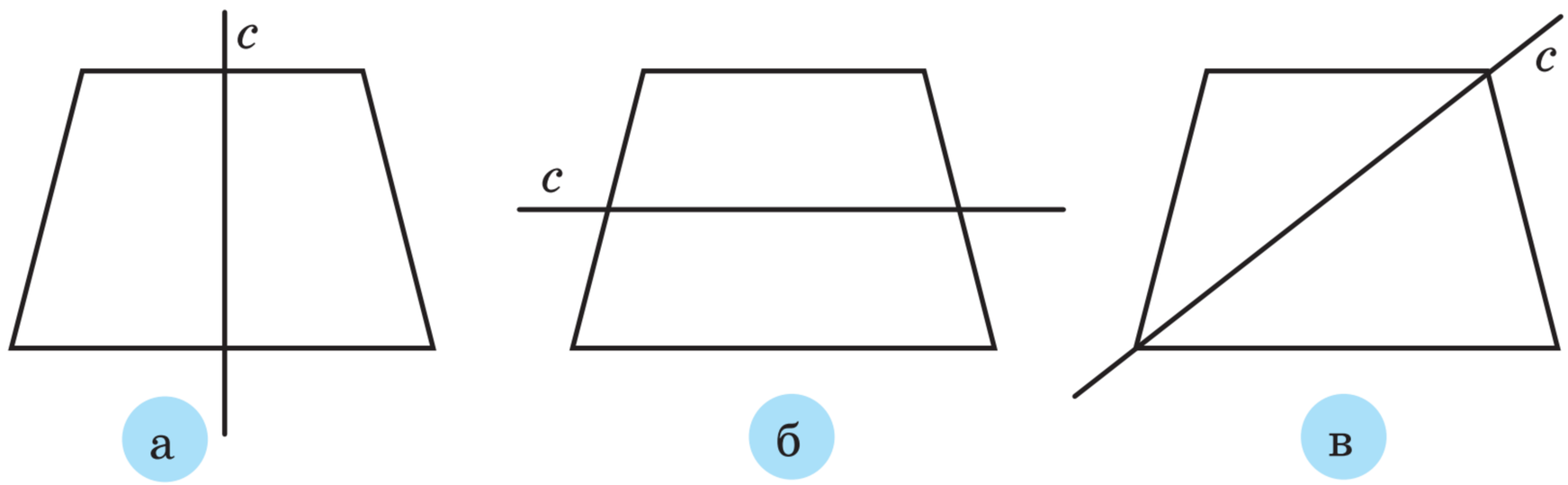


Рис. 2

5. Чи є фігура симетричною відносно точки O (рис. 3)?

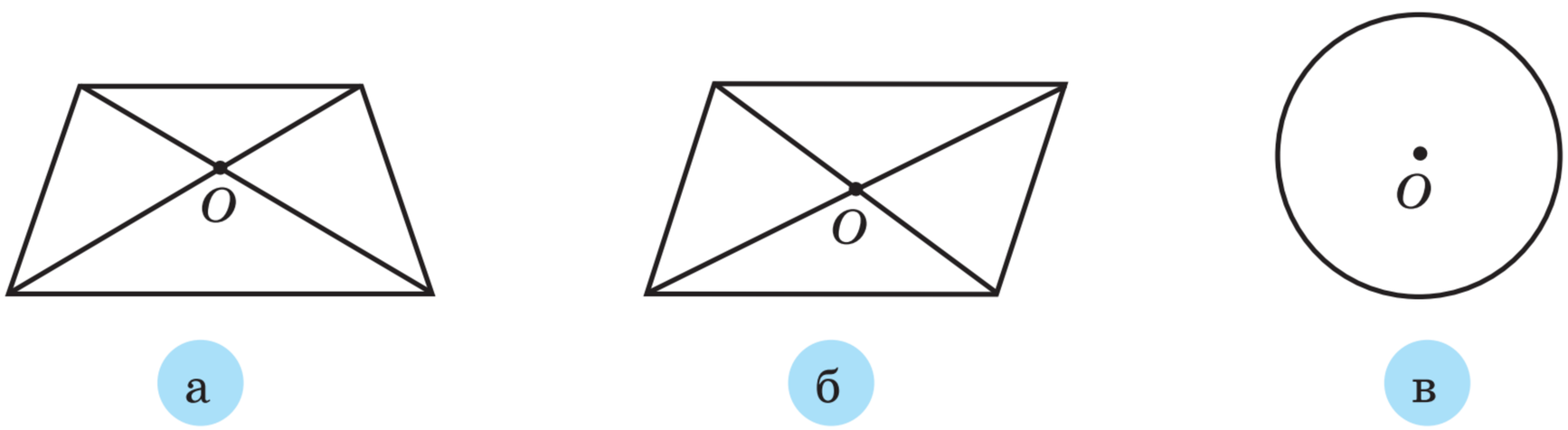


Рис. 3

6. Чи є фігура симетричною відносно точки O (рис. 4)?

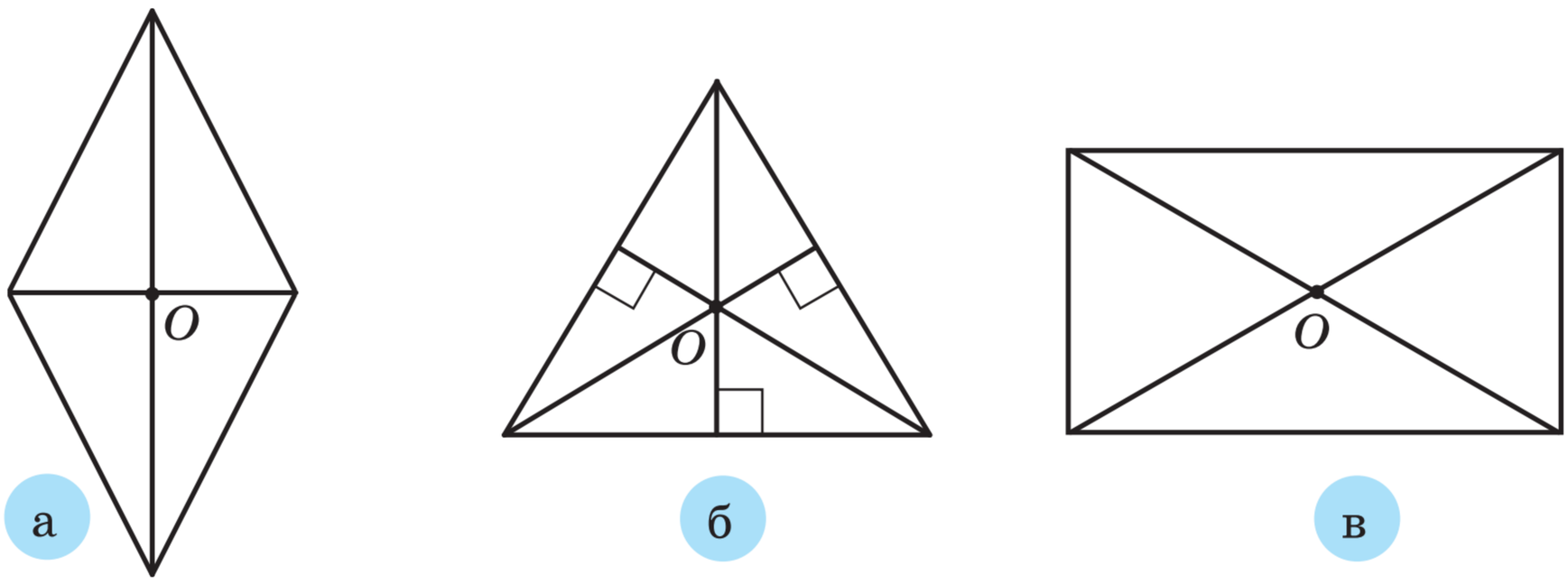


Рис. 4

7. Які з букв на рис. 5 мають вісь симетрії? Якщо буква має вісь симетрії, то зобразіть її в зошиті й побудуйте її вісь симетрії.

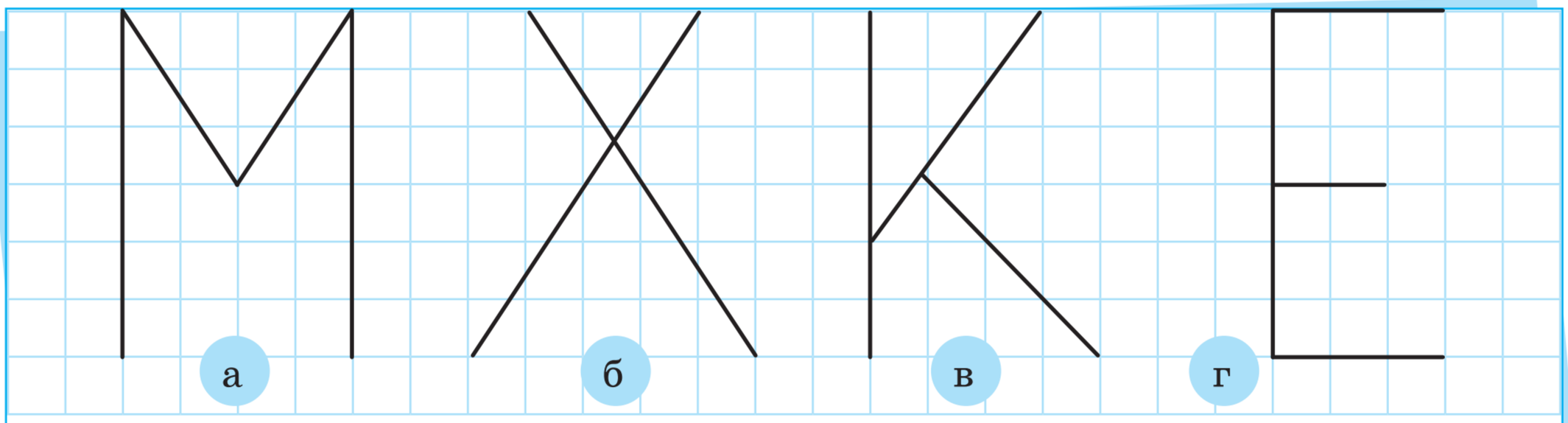


Рис. 5

8. Які з букв на рис. 6 мають вісь симетрії? Якщо буква має вісь симетрії, то зобразіть її в зошиті й побудуйте її вісь симетрії.

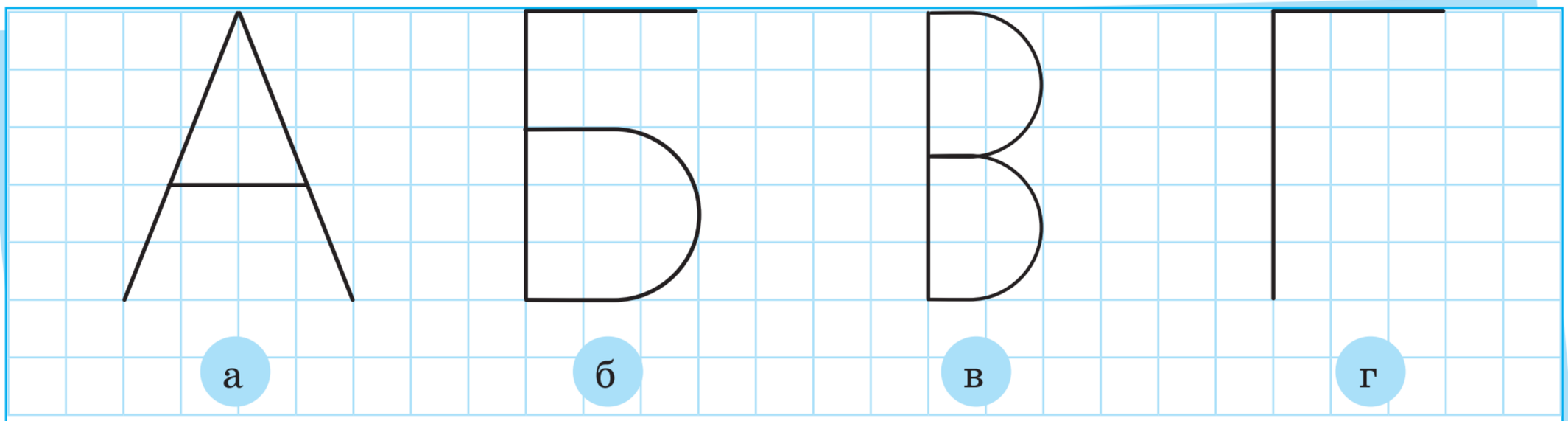


Рис. 6

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

9. Які з букв на рис. 7 мають центр симетрії? Якщо буква має центр симетрії, то зобразіть її в зошиті й побудуйте її центр симетрії.

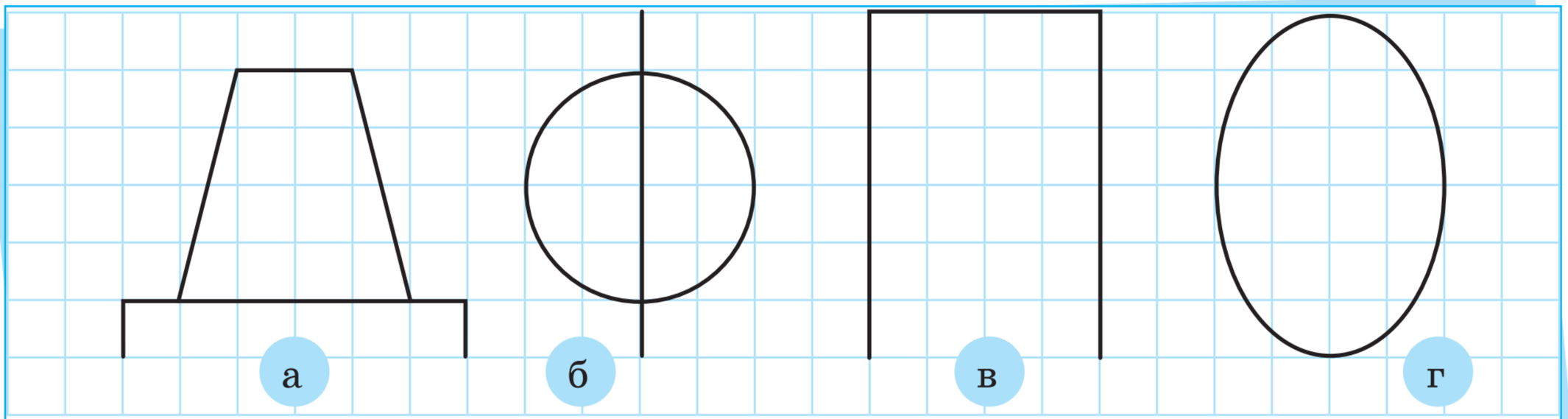


Рис. 7

10. Які з букв на рис. 8 мають центр симетрії? Якщо буква має центр симетрії, то зобразіть її в зошиті й побудуйте її центр симетрії.

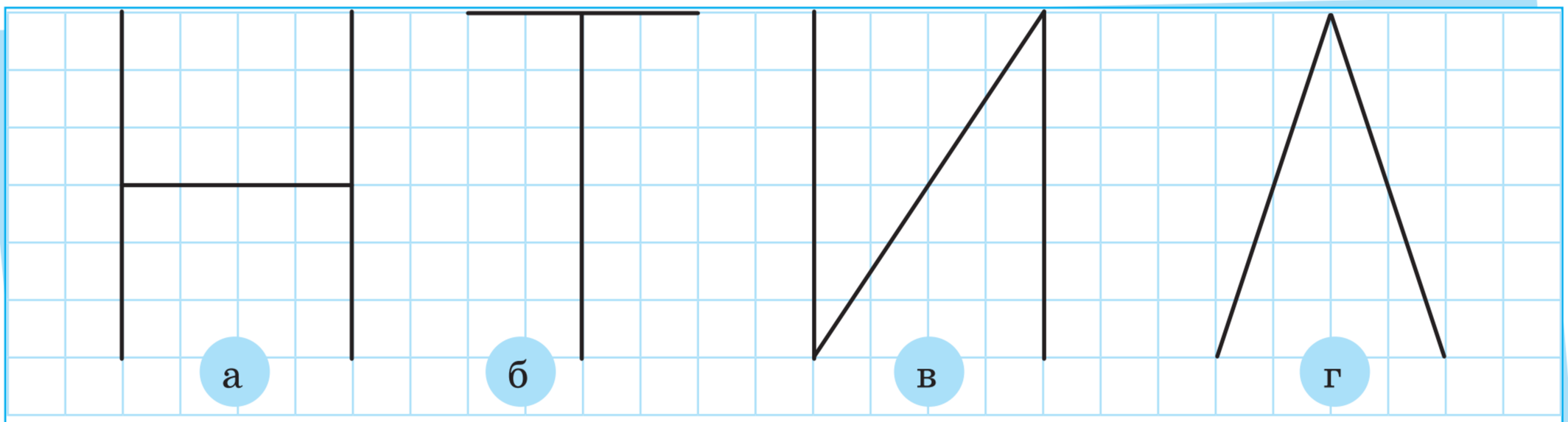


Рис. 8

Середній рівень

11. Чи будуть подібними фігури A і B, якщо фігура A перейшла у фігуру B:

а) за симетрії відносно початку координат;

б) за гомотетії з коефіцієнтом 2 і центром у точці O;

в) за деформації з коефіцієнтом 3 до осі абсцис;

г) за симетрії відносно прямої n?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. Чи будуть подібними фігури K і N, якщо фігура K перейшла у фігуру N:

а) за паралельного перенесення на вектор $\vec{b}$;
б) за гомотетії з коефіцієнтом 5 і центром у точці C;
в) за деформації з коефіцієнтом 0,5 до осі ординат;
г) за симетрії відносно осі абсцис?

13. Зобразіть фігури в зошиті (рис. 9). Побудуйте центр симетрії кожної фігури.

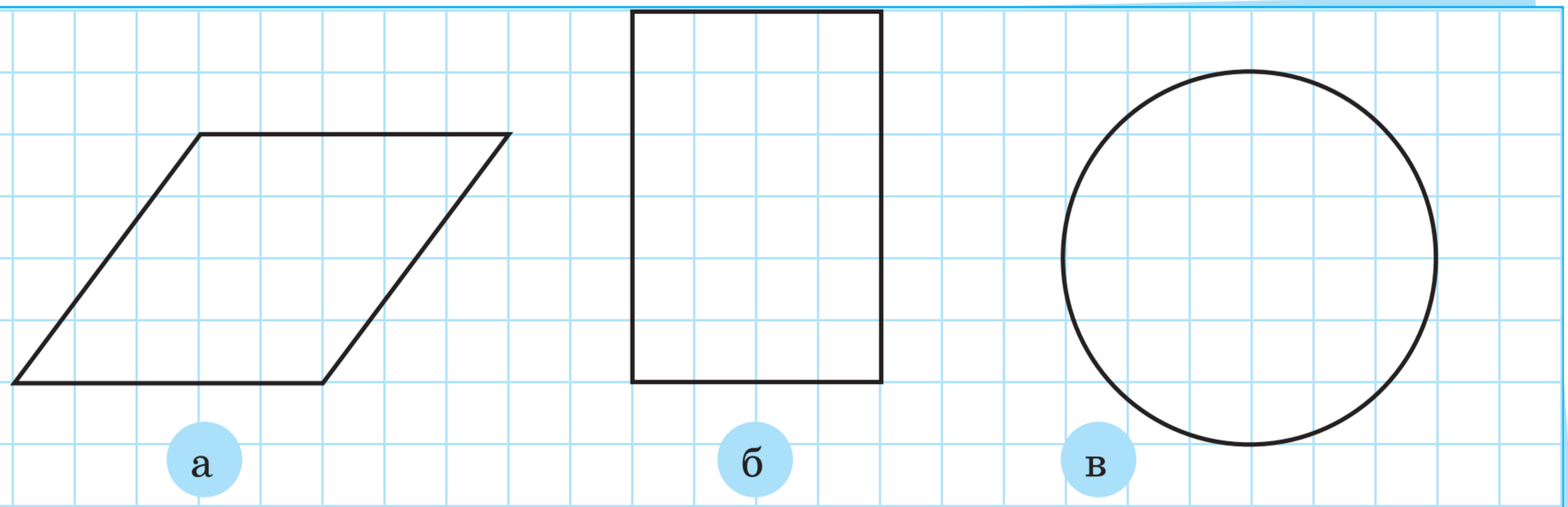


Рис. 9

14. Зобразіть фігури в зошиті (рис. 10). Побудуйте центр симетрії кожної фігури.

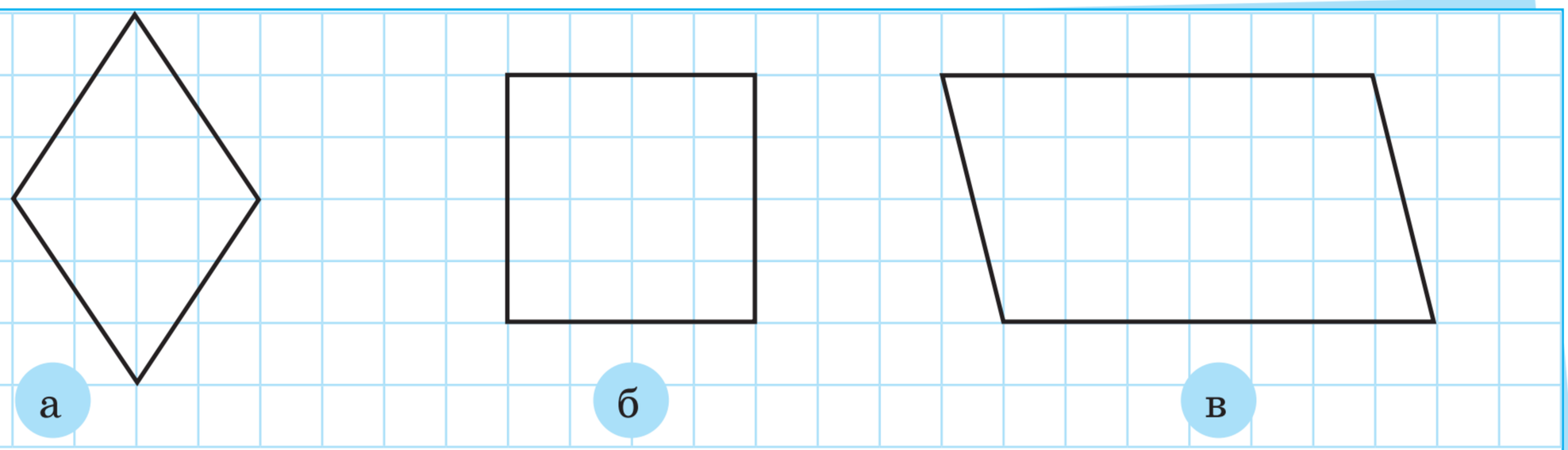


Рис. 10

15. Зобразіть фігури в зошиті (рис. 11). Побудуйте вісь симетрії кожної фігури. Якщо фігура має кілька осей симетрії, то побудуйте їх усі.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

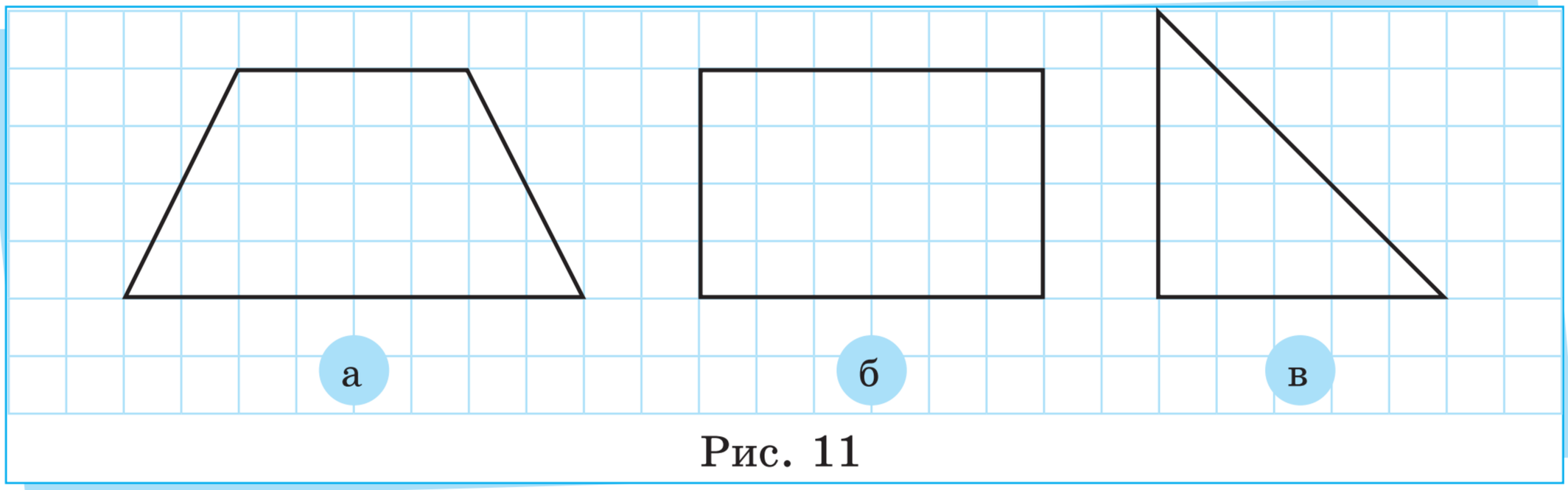


Рис. 11

16. Зобразіть фігури в зошиті (рис. 12). Побудуйте вісь симетрії кожної фігури. Якщо фігура має кілька осей симетрії, то побудуйте їх усі.

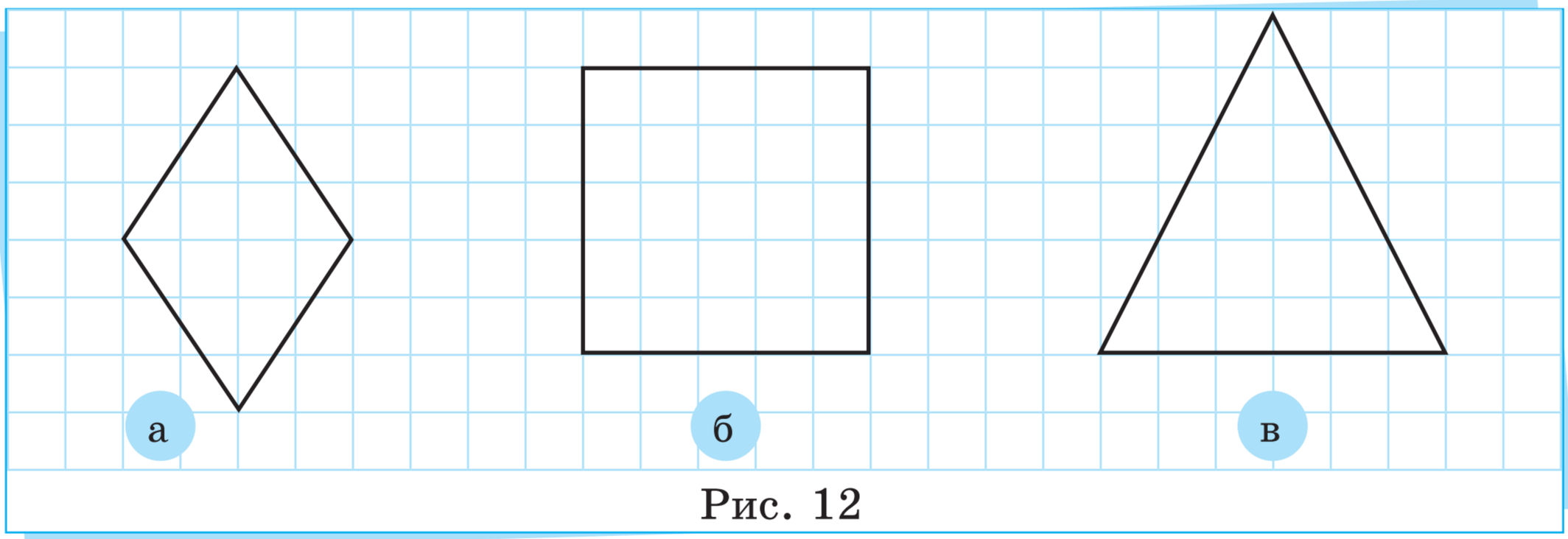


Рис. 12

17. У кожному з випадків *а*–*г* (рис. 13) зображено половину деякої букви та її вісь симетрії — пряму l. Перенесіть рисунок у зошит і зобразіть другу половину букви.

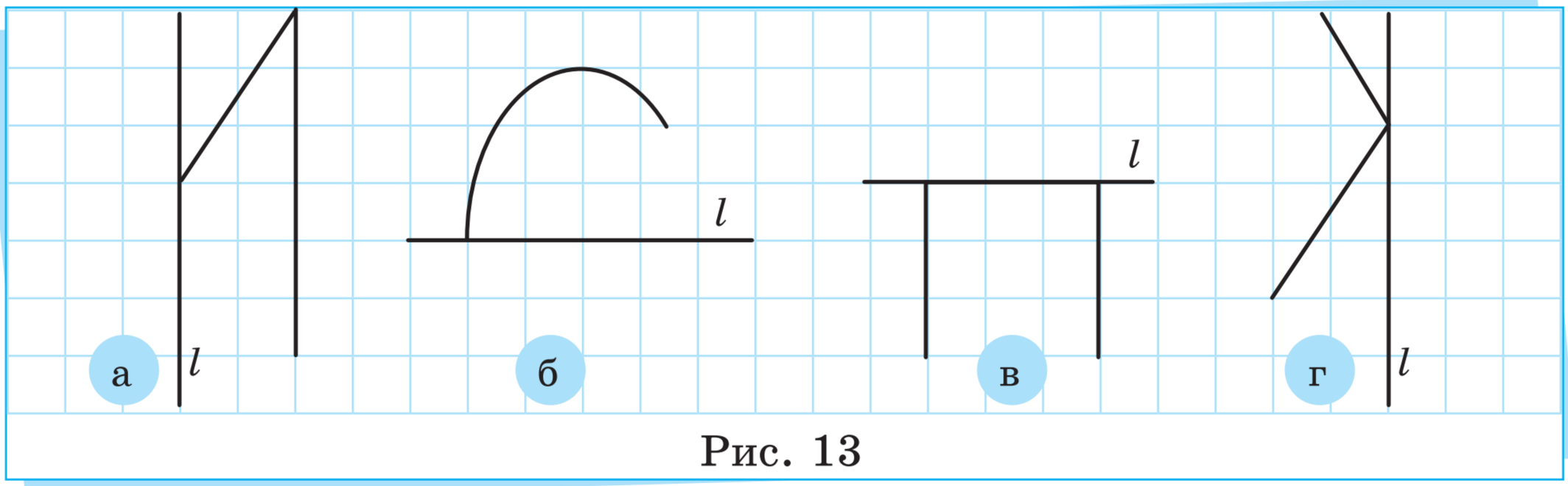


Рис. 13

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

18. У кожному з випадків *а*–*г* (рис. 14) зображено половину деякої букви та її вісь симетрії — пряму n. Перенесіть рисунок у зошит і зобразіть другу половину букви.

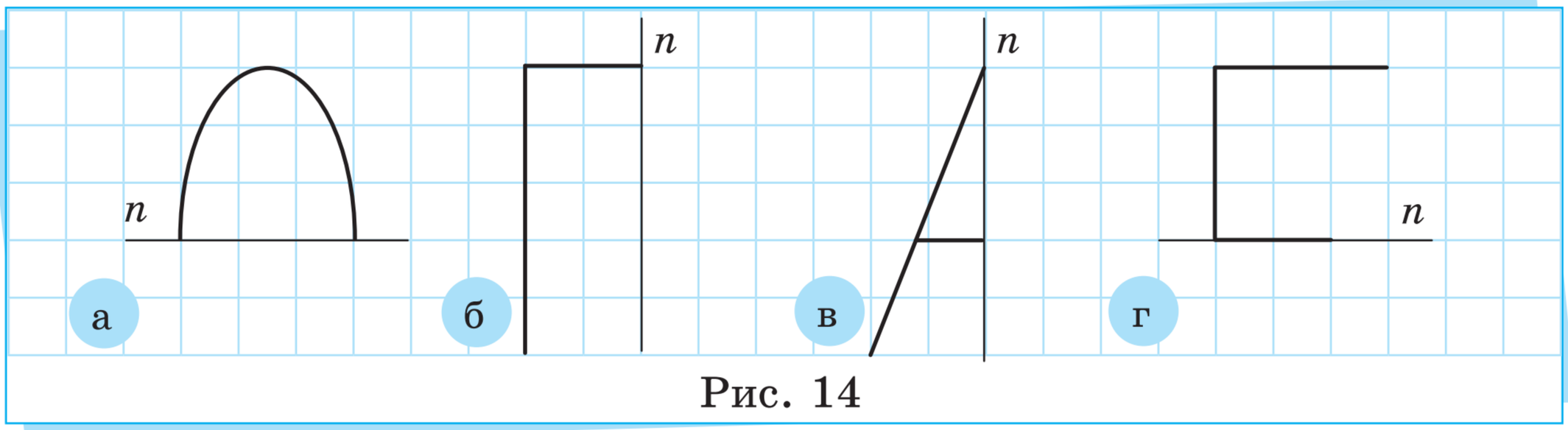


Рис. 14

19. У кожному з випадків *а*–*в* (рис. 15) зображено половину деякої фігури та її вісь симетрії — пряму m. Перенесіть рисунок у зошит і зобразіть другу половину фігури.

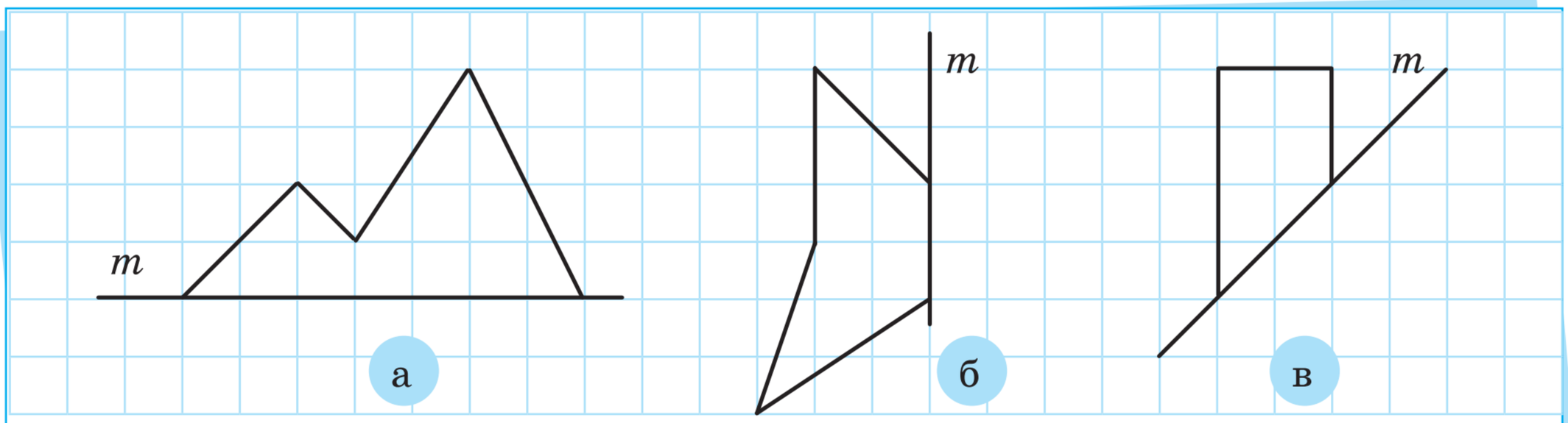


Рис. 15

20. У кожному з випадків *а*–*в* (рис. 16) зображено половину деякої фігури та її вісь симетрії — пряму k. Перенесіть рисунок у зошит і зобразіть другу половину фігури.

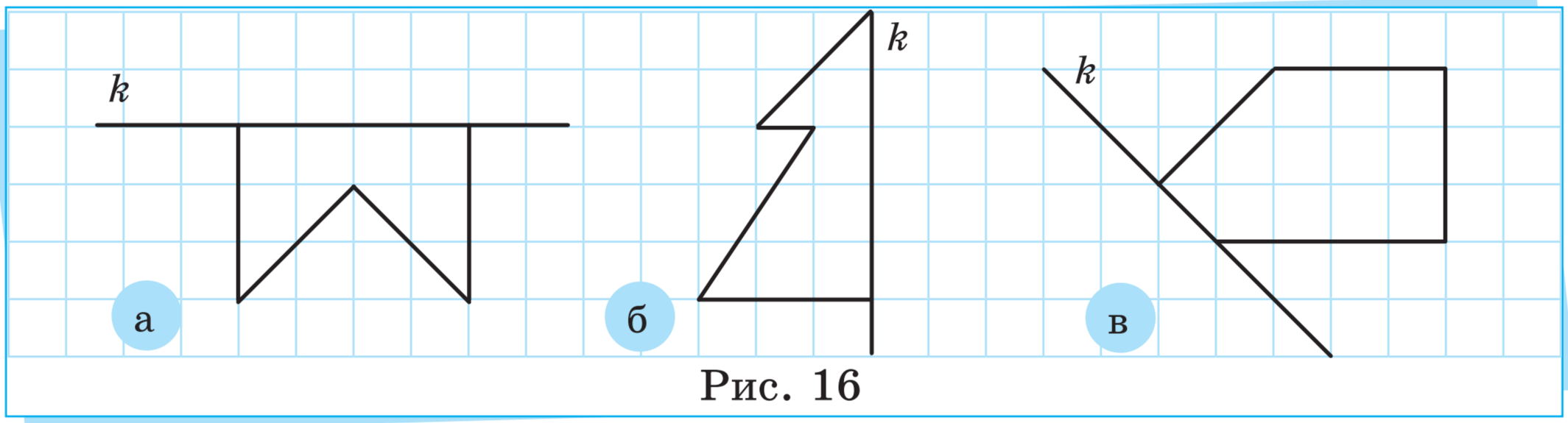


Рис. 16

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

21. Перегляньте український алфавіт. Знайдіть букви, які є симетричними за поворотом на 180° відносно деякої точки.

22. Перегляньте англійський алфавіт. Знайдіть букви, які є симетричними за поворотом на 180° відносно деякої точки.

23. Укажіть, які з фігур, зображених на рис. 17, є рівними між собою.

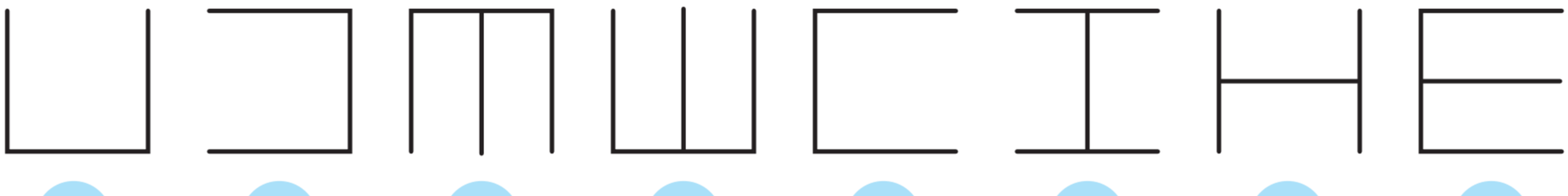


Рис. 17

24. Укажіть, які з фігур, зображених на рис. 18, є рівними між собою.



Рис. 18

25. Уявіть, що геометричний візерунок є нескінченним в обидва боки (рис. 19). Чи буде він симетричним відносно паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$?

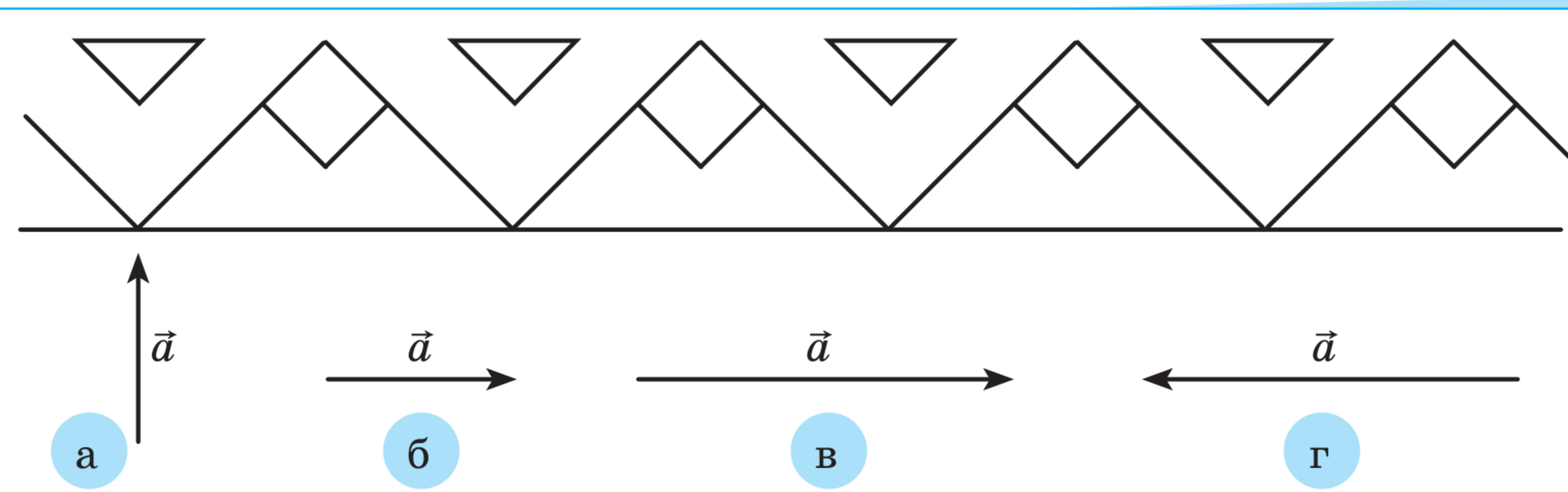


Рис. 19

26. Уявіть, що драбина є нескінченною в обидва боки (рис. 20). Чи буде вона симетричною відносно паралельного перенесення на вектор $\vec{b}$?

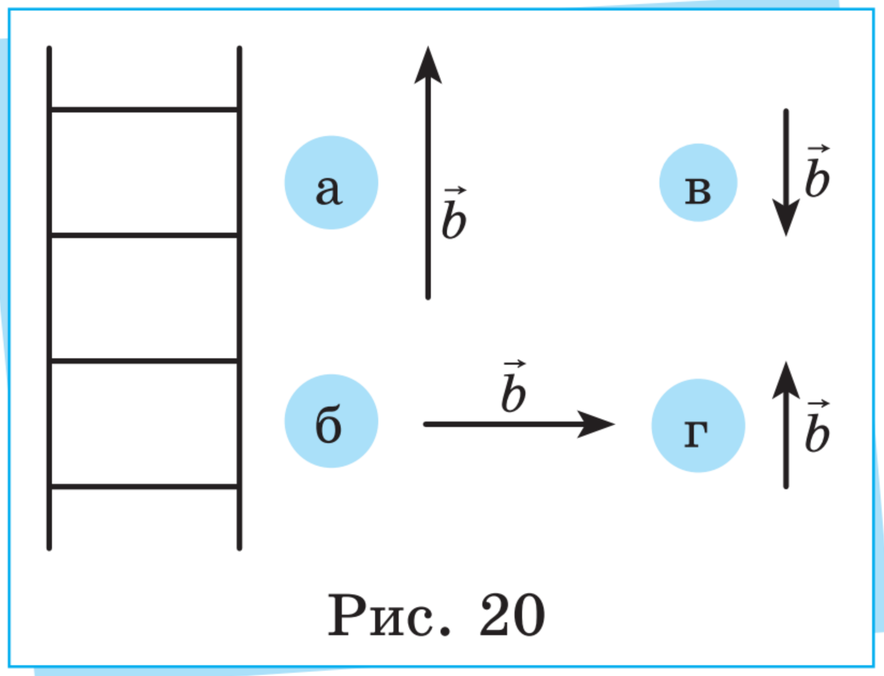


Рис. 20

Достатній рівень

27. На площині задано пряму a і точку A. Побудуйте образ прямої a за симетрії відносно точки A, якщо: а) точка A не належить прямій a; б) точка A належить прямій a.

28. На площині задано відрізок ST і точку M. Побудуйте образ відрізка ST за симетрії відносно точки M, якщо: а) точка M не належить відрізку ST; б) точка M належить відрізку ST.

29. На площині задано прямі a і b, які перетинаються в точці O. Побудуйте образ прямої a за симетрії відносно прямої b. Чи проходить образ прямої a через точку O?

30. На площині задано прямі a і b, які не перетинаються. Побудуйте образ прямої a за симетрії відносно прямої b. Чи буде образ прямої a паралельним прямій b?

31. На площині задано трикутник ABC і точку O. Побудуйте образ трикутника ABC за центральної симетрії відносно точки O.

32. На площині задано чотирикутник $ABCD$ і точку O. Побудуйте образ чотирикутника $ABCD$ за центральної симетрії відносно точки O.

33. Дано рівнобічний трикутник MNP з основою MP і точку Q таку, що точка P лежить на MQ. Побудуйте відрізок $Q'Q$, який є образом відрізка NP за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{PQ}$. Доведіть, що чотирикутник $MNQ'Q$ — рівнобічна трапеція.

34. Дано рівнобічний трикутник ABC з основою AC і точку M таку, що точка A лежить на MC. Побудуйте відрізок $M'M$, який є образом відрізка AB за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{AM}$. Доведіть, що чотирикутник $MM'BA$ — паралелограм.

35. На площині задано рівносторонній трикутник ABC. З'ясуйте, чи будуть симетріями цього трикутника:
а) тотожне перетворення;
б) центральна симетрія відносно вершини B;
в) осьова симетрія відносно прямої l, яка проходить через вершину A і середину сторони BC;
г) поворот на кут $120°$ відносно точки перетину медіан трикутника.

36. На площині задано рівнобічний трикутник PRN з основою PN. З'ясуйте, чи будуть симетріями цього трикутника:
а) тотожне перетворення;
б) центральна симетрія відносно вершини P;
в) осьова симетрія відносно прямої l, яка проходить через вершину N і середину сторони PR;
г) поворот на кут $90°$ відносно точки перетину медіан трикутника.

37. Побудуйте довільний трикутник ABC та його образ за гомотетії із центром у точці A й коефіцієнтом $k = 3$.

38. Побудуйте довільний трикутник OPQ та його образ за гомотетії із центром у точці P і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$.

Високий рівень

39. На стороні квадрата $ABCD$ позначили точку M (рис. 21). Проведіть через точку M пряму, яка ділить квадрат на два рівних многокутника. Відповідь обґрунтуйте.

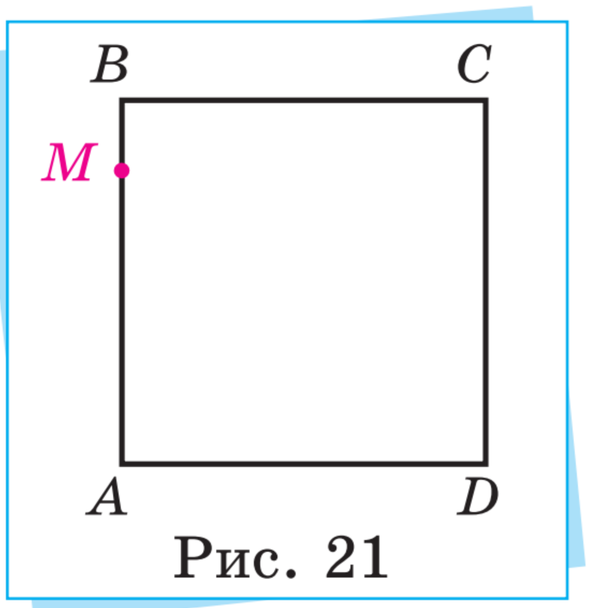


Рис. 21

40. Доведіть, що пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей паралелограма, розбиває його на два рівних многокутники.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

41. За повороту навколо точки A на кут $60°$ за ходом годинникової стрілки кінець B відрізка BC переходить у точку C, а кінець C — у точку D. Доведіть, що точки A, B, C, D є вершинами ромба.

42. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини двох паралельних хорд кола, проходить і через центр цього кола.

43. Покажіть, що фігура, яка складається з трьох паралельних прямих, буде симетричною відносно паралельного перенесення. Задайте якийсь із векторів, на який відбуватиметься таке перенесення.

44. За якого розміщення трьох прямих фігура, яка утворена ними, матиме нескінченну кількість центрів симетрії?

45. Побудуйте рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.

46. Всередині кута дано точку M. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута, який цією точкою ділиться навпіл.

47. Побудуйте трикутник KMN за двома сторонами KM і KN $(KM > KN)$ і різницею кутів N і M.

48. Точки C і E лежать в одній півплощині відносно прямої AB. На прямій AB побудуйте таку точку S, щоб виконувалася рівність $\angle ESB = 2\angle ASC$ (див. рис. 22).

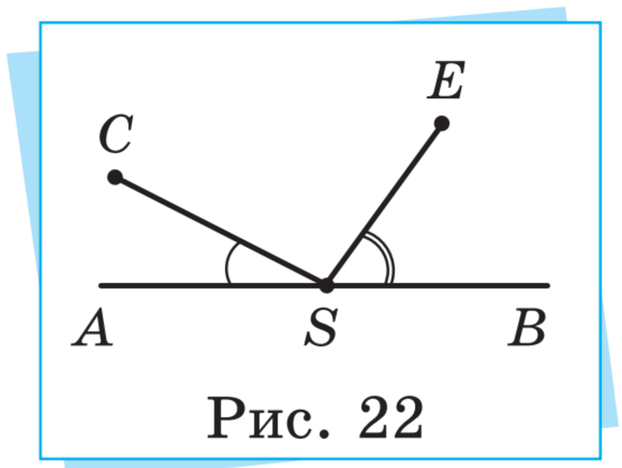


Рис. 22

49. У даний кут впишіть коло, яке дотикається до сторін кута й проходить через задану точку всередині кута.

50. У даний круговий сектор впишіть коло, яке дотикається до бічних радіусів сектора та його дуги.



Цікавинки від дідуся Тараса

Окремі геометричні фігури складаються із частин, які подібні всій початковій фігурі. Такі фігури називають *самоподібними*. Наприклад, квадрат можна розбити на чотири однакові квадрати, кожен з яких

подібний до початкового квадрата з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ (рис. 1).

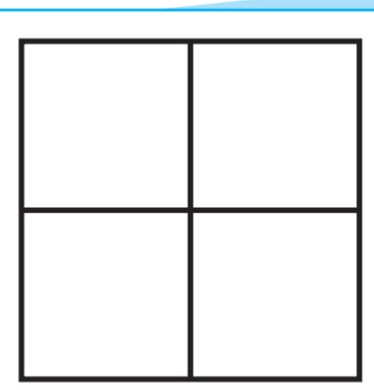


Рис. 1

Бувають і більш складні та цікаві за своїми властивостями самоподібні фігури. Наприклад, розглянемо *рівносторонній трикутник*. Розіб'ємо його середніми лініями на чотири рівні рівносторонні трикутники, а потім вилучимо «середній» із цих трикутників (рис. 2). Далі з трьома трикутниками, що залишилися, виконаємо ту саму процедуру — розіб'ємо кожен із них середніми лініями на чотири рівні рівносторонні трикутники й знову вилучимо «середні» трикутники. Після нескінченної кількості таких кроків отримаємо геометричну фігуру, яку називають *трикутним килимом Серпінського*. Трикутний килим Серпінського складається з трьох частин, кожна з яких подібна до всього килима Серпінського з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$.

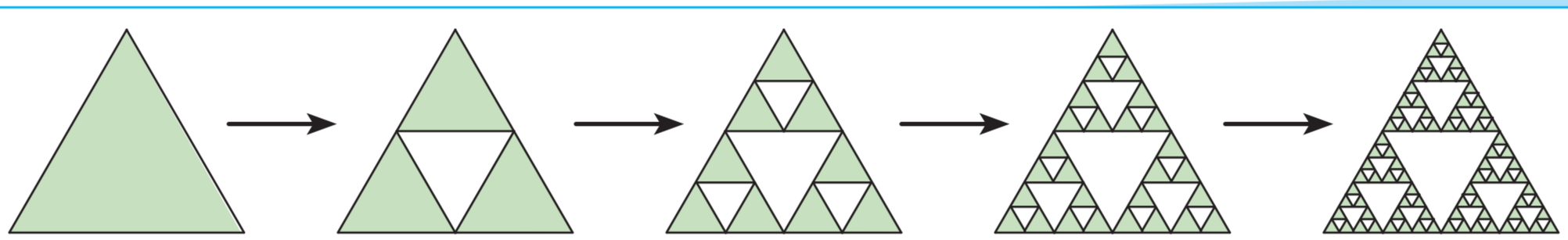


Рис. 2



Геометричні фігури, утворені за принципом, схожим на той, яким утворено трикутний килим Серпінського, відомі в математиці як *фрактали*. Фрактали широко використовують у різних галузях науки, а також у повсякденному житті. Крім того, зображення фракталів викликають захоплення й справжню естетичну насолоду.

Вацлав Серпінський (1882–1969) — видатний польський математик, доктор філософії, професор, учень *Георгія Вороного*. Зробив значний внесок у розвиток топології, алгебри й теорії чисел.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Творцем теорії фракталів вважають *Бенуа Мандельброта*. В Україні теорія фракталів активно розвивається під керівництвом професора *Миколи Працьовитого*. Він заснував і керує роботою наукової школи, яка досліджує використання фракталів в алгебрі, теорії чисел, теорії функцій, теорії кодування, теорії ймовірностей та інших галузях науки. Представниками цієї наукової школи є *Григорій Торбін, Олег Лещинський, Яніна Гончаренко, Олександр Барановський* та ін.

Бенуа Мандельброт (1924–2010) — французько-американський математик. Є засновником теорії фракталів. Відомий також роботами з економіки, теорії інформації та космології.

Микола Працьовитий (народ. 1959) — український математик, доктор фізико-математичних наук, професор. Засновник наукової школи з теорії фракталів. Відомий дослідженнями з теорії ймовірностей, теорії функцій, алгебри й теорії чисел.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

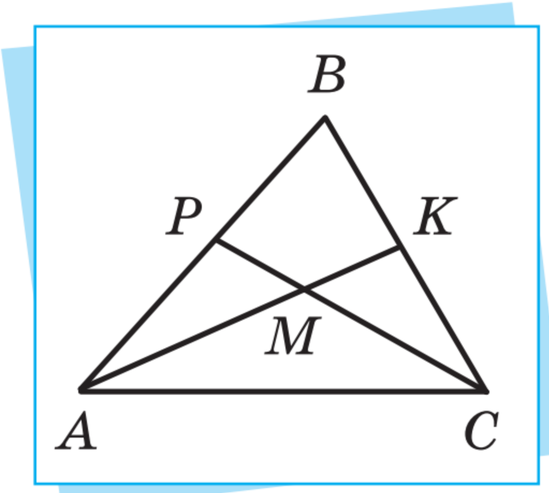
1. Дізнайтеся більше про самоподібні геометричні фігури, зокрема про фрактали. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Чи доводилося вам бачити зображення фрактальних множин? Поділіться своїм досвідом із однокласниками та однокласницями. Як ви вважаєте, для моделювання яких об'єктів, явищ і процесів реального світу можна використовувати фрактали?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть графічним способом рівняння $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$.
2. У крамниці три пачки гречаної крупи та дві пачки рисової крупи коштують 340 грн, а чотири пачки рисової крупи — на 20 грн більше, ніж п'ять пачок гречаної крупи. Скільки коштує одна пачка гречаної крупи й одна пачка рисової крупи в цій крамниці?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

3. Медіани AK і CP трикутника ABC перетинаються в точці M (див. рисунок). Знайдіть периметр трикутника CMK, якщо $BC = 10$ см, $AK = 12$ см, $CP = 9$ см.



4. Оксана міркує: «Усі листяні дерева мають листочки. Малина має листочки. Отже, малина — листяне дерево». Чи правильно міркує Оксана? Якщо так, то чому; якщо ні, то який закон логіки порушено?

5. Євген виміряв рулеткою без міліметрових поділок розміри свого письмового столу, який має форму прямокутника. Виявилося, що ширина столу перебуває в межах від 120 см до 121 см, а довжина — в межах від 74 см до 75 см. У яких межах, на вашу думку, перебуває: а) периметр столу Євгена; б) площа столу Євгена?

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 1



rnk.com.ua/114530

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Деформація до прямої l переводить точки A, B, C, D у точки A, B', C', D відповідно (рис. 1). Знайдіть коефіцієнт деформації k.

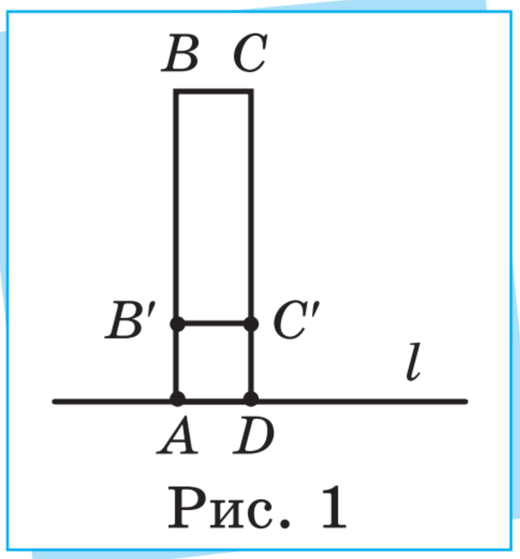


Рис. 1

А	Б	В	Г
$k = 1$	$k = 4$	$k = \frac{1}{2}$	$k = \frac{1}{4}$

2. Перетворення f відрізок AB переводить у відрізок $A'B'$, причому $f(A) = A'$ і $f(B) = B'$ (рис. 2). Тоді перетворення f є...

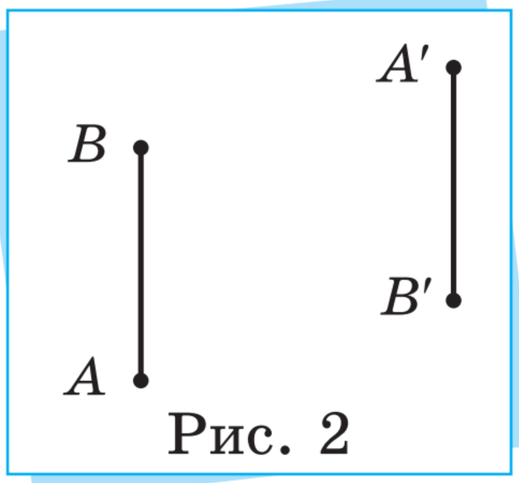
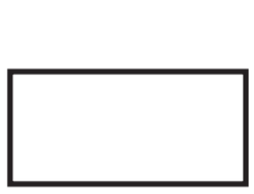
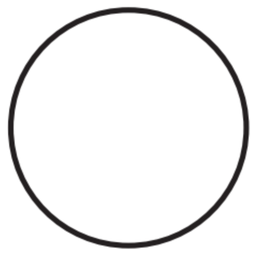
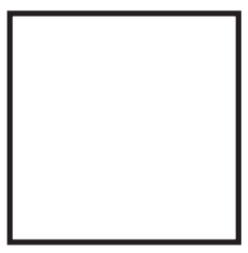
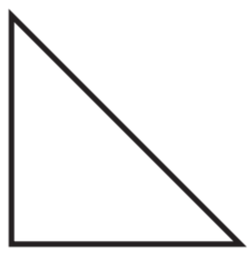


Рис. 2

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

А	Б	В	Г
паралельним перенесенням	поворотом відносно точки	центральною симетрією	осьовою симетрією

3. Укажіть геометричну фігуру, яка має *лише дві* осі симетрії.

А	Б	В	Г
			

4. Укажіть аналітичне задання паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(7;-5)$.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} x' = 7x, \\ y' = -5y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x+7, \\ y' = y-5 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = 7, \\ y' = -5 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x-7, \\ y' = y+5 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -7x, \\ y' = 5y \end{cases}$

5. Перетворення g задано формулами $\begin{cases} x' = 2x+1, \\ y' = 2y-1. \end{cases}$ Тоді перетворення g є:

А	Б	В	Г	Д
деформацією до осі абсцис	симетрією відносно осі ординат	гомотетією із центром не в початку координат	паралельним перенесенням	гомотетією із центром у початку координат

6. Дано чотирикутник $KLMP$, діагоналі KM і LP якого перетинаються в точці O, а h — симетрія відносно точки O. Відомо, що $h(K)=M$ і $h(L)=P$. Тоді чотирикутник $KLMP$ *обов'язково* є:

А	Б	В	Г	Д
квадратом	ромбом	прямокутником	дельтоїдом	паралелограмом

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Гомотетія із центром у початку координат точку $A(2;-3)$ переводить у точку $A'(6;-9)$. Знайдіть коефіцієнт гомотетії λ.

8. Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}(a_1;a_2)$ переводить точку $B(-2;0)$ у точку $B'(1;-4)$. Знайдіть значення $a_1 \cdot a_2$.

9. У ПДСК задано прямокутник з вершинами в точках $A(-2;2)$, $B(6;2)$, $C(6;-4)$, $D(-2;-4)$. Деформація до осі ординат з коефіцієнтом $k=\frac{1}{2}$ переводить точки A, B, C, D в точки A', B', C', D' відповідно. Переконайтесь у тому, що $A'B'C'D'$ — прямокутник, а потім знайдіть його площу.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Зобразіть трикутник ABC. Побудуйте образ цього трикутника:
а) за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{AC}$;
б) за симетрії відносно вершини B;
в) за симетрії відносно прямої p, яка проходить через точку A паралельно прямій BC;
г) за гомотетії з коефіцієнтом $k=3$ і центром у точці C.

11. Запишіть аналітичне задання:
а) паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(-3;10)$;
б) симетрії відносно точки $O(2;-1)$;
в) гомотетії із центром у точці $O(-4;5)$ і коефіцієнтом $\lambda=3$.
Для кожного із цих перетворень знайдіть образ C' точки $C(5;2)$ і прообраз D точки $D'(-1;-3)$.

12. Центральна симетрія f переводить точку $M(7;2)$ у точку $M'(-3;4)$. Знайдіть координати точки K', якщо $f(K)=K'$ і $K(0;-3)$.

13. Знайдіть образи кола $x^2+(y+2)^2=16$ і прямої $2x-3y+1=0$ за паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(5;-1)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

14. Точки L і K лежать по різні боки від прямої a. На прямій a побудуйте точку S, для якої величина $|LS-KS|$ буде *найбільшою*.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. За інверсії образом точки P є точка P', яка лежить на промені OP, і виконується рівність $OP\cdot OP'=R^2$ (рис. 1). Чи є правило побудови інверсних точок відносно заданого кола із центром O і радіусом R перетворенням площини? Знайдіть образ точки M, яка лежить на даному колі, в разі застосування цього правила. Чи можна знайти образ точки O? Відповідь поясніть.

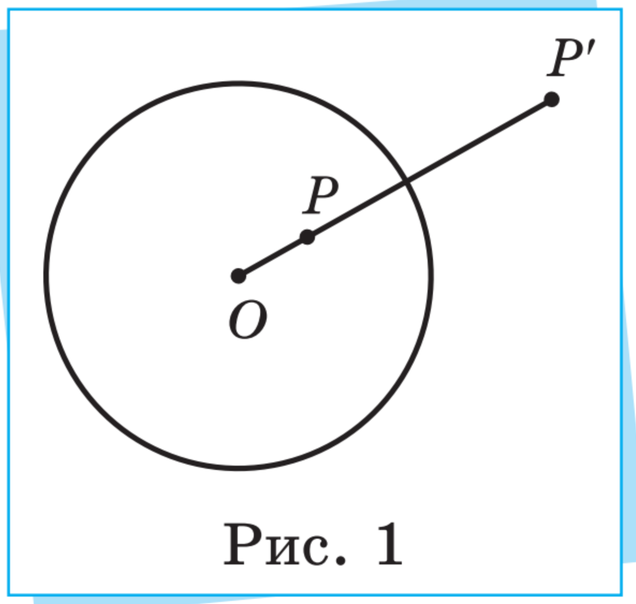


Рис. 1

2. Запишіть рівняння прямої, в яку переходить пряма $y=3x-6$ у результаті повороту навколо центра $O(0;0)$ на 90°:
а) за ходом годинникової стрілки;
б) проти ходу годинникової стрілки.

3. На рис. 2 промінь OC — бісектриса кута AOB, точки F і E лежать на сторонах цього кута і $OF=OE$. Прямі LF і KE перпендикулярні до сторін кута OA і OB відповідно. Доведіть, що прямі LF і KE перетинаються в точці, яка належить променю OC.

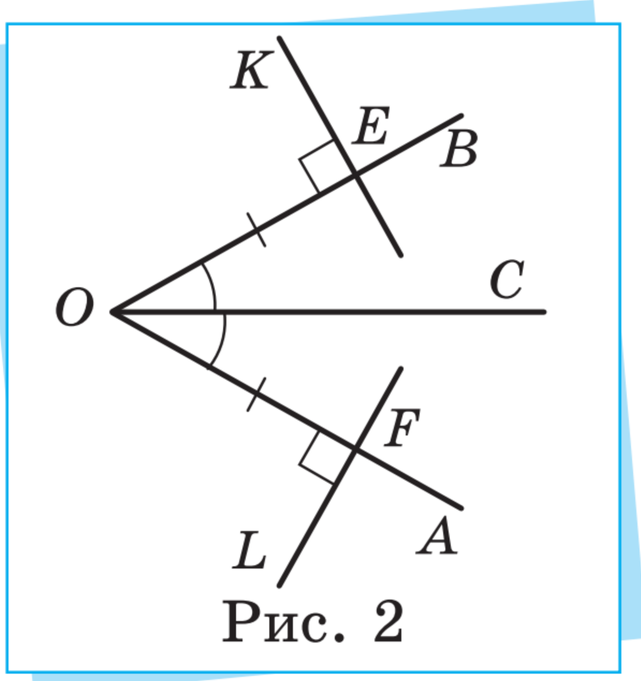


Рис. 2

4. На продовженні катета AC (за точку C) прямокутного трикутника ABC відкладено відрізок CD, рівний катету CB, а на продовженні катета CB (за точку C) — відрізок CE, рівний AC. Доведіть, що пряма, яка містить медіану CM трикутника ABC, перпендикулярна до відрізка DE.

5. Усередині квадрата вибрано довільну точку M. Доведіть, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін квадрата, є вершинами деякого квадрата.

6. Через точку перетину діагоналей квадрата провели дві перпендикулярні прямі. Доведіть, що точки їх перетину зі сторонами квадрата є вершинами деякого квадрата.

7. Через точку перетину медіан рівностороннього трикутника проведено дві прямі, кут між якими дорівнює $60°$ і які не містять вершин трикутника. Доведіть, що відрізки цих прямих, що містяться між сторонами трикутника, рівні.

8. Два рівних кола дотикаються в точці M. Три прямі, які містять точку M, перетинають ці кола, крім точки M, відповідно в точках A, B, C і D, E, F. Доведіть, що трикутники ABC і DEF рівні.

9. Пряма, паралельна основам трапеції, ділить її на дві подібні трапеції. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між бічними сторонами трапеції, якщо довжини основ трапеції дорівнюють a і b.

10. Побудуйте рівносторонній трикутник, вершини якого розташовані на трьох даних концентричних колах.

11. Побудуйте паралелограм за стороною, відношенням діагоналей і кутом між діагоналями.

Словничок

Геометричне перетворення — geometric transformation
Образ (прообраз) точки — image (preimage) of a point
Аналітичне задання перетворення — analytical representation of transformation
Рух площини — plane motion
Перетворення подібності — similarity transformation
Тотожне перетворення — identity transformation
Паралельне перенесення на вектор — parallel translation to a vector
Центральна симетрія — central symmetry
Осьова симетрія — axial symmetry
Поворот відносно даної точки на заданий кут — rotation relative to a given point by a given angle
Рівні (подібні) фігури — equal (similar) figures
Симетрія фігури — symmetry of a figure

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1

Геометричні перетворення

$f(M) = M'$, або $f : M \to M'$

M' — образ M; M — прообраз M'

Тотожне перетворення

$f(M) = M$ для всіх точок площини

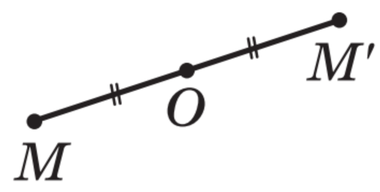
Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$

$f(M) = M'$ так, що $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$



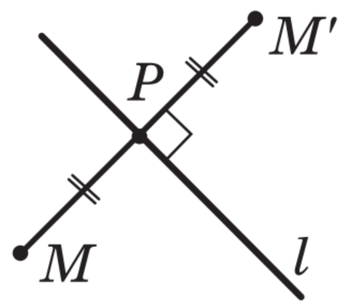
Симетрія відносно точки O (центральна симетрія)

$f(M) = M'$ так, що O — середина MM'



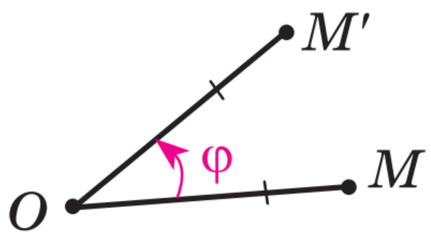
Симетрія прямої l (осьова симетрія)

$f(M) = M'$ так, що:
1) $MM' \perp l$;
2) середина MM' належить прямій l

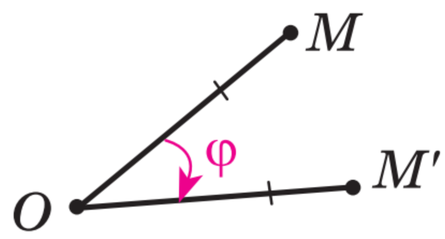


Поворот відносно точки O на кут φ

$f(M) = M'$ так, що:
$\angle MOM' = \varphi$; $OM = OM'$



проти ходу годинникової стрілки



за ходом годинникової стрілки

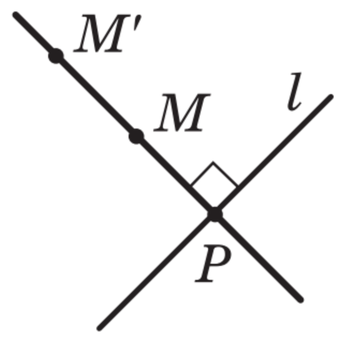
Гомотетія із центром у точці O і коефіцієнтом λ

$f(M) = M'$ так, що $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$



Деформація з коефіцієнтом k до прямої l

$f(M) = M'$ так, що:
1) M і M' лежать в одній півплощині відносно l;
2) $MM' \perp l$ і перетинає її в точці P;
3) $PM' = k \cdot PM$



Аналітичне задання геометричних перетворень

$$f(M)=M';\ M(x;y),\ M'(x';y')$$

Тотожне перетворення

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=y \end{cases}$$

Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}(a_1;a_2)$

$$\begin{cases} x'=x+a_1, \\ y'=y+a_2 \end{cases}$$

Симетрія відносно точки $O(x_0;y_0)$

$$\begin{cases} x'=2x_0-x, \\ y'=2y_0-y \end{cases}$$

Симетрія відносно осей Ox і Oy

$$Ox:\ \begin{cases} x'=x, \\ y'=-y; \end{cases} \qquad Oy:\ \begin{cases} x'=-x, \\ y'=y \end{cases}$$

Гомотетія з коефіцієнтом λ і центром у точці $O(x_0;y_0)$

$$\begin{cases} x'=\lambda x+x_0(1-\lambda), \\ y'=\lambda y+y_0(1-\lambda) \end{cases}$$

Деформація з коефіцієнтом k до осей Ox і Oy

$$Ox:\ \begin{cases} x'=x, \\ y'=ky; \end{cases} \qquad Oy:\ \begin{cases} x'=kx, \\ y'=y \end{cases}$$

Рухи площини

Зберігають відстані між точками, тобто
$f(M)=M'$, $f(K)=K'$, $M'K'=MK$ для будь-яких точок площини

Властивості рухів

1) Зберігають просте відношення трьох точок, тобто $\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB}$, де $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, $C\in AB$, $C'\in A'B'$;
2) пряму переводять у пряму, відрізок — у відрізок, промінь — у промінь;
3) трикутник переводять у рівний йому трикутник, а кут — у рівний йому кут

Є рухами

1) тотожне перетворення;
2) паралельне перенесення;
3) центральна симетрія;
4) осьова симетрія;
5) поворот

Перетворення подібності з коефіцієнтом λ

Усі відстані між точками змінює в λ разів, тобто
$f(M)=M'$, $f(K)=K'$, $M'K'=\lambda MK$ для будь-яких точок площини

Властивості подібностей

1) зберігають просте відношення трьох точок;
2) пряму переводять у пряму, відрізок — у відрізок, промінь — у промінь;
3) будь-який трикутник переводять у подібний йому трикутник;
4) будь-який кут переводять у рівний йому кут

Є подібностями

1) усі рухи (з коефіцієнтом $\lambda=1$);
2) гомотетія з коефіцієнтом λ і центром у точці O

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Рівні фігури

$\Phi' = \Phi$, якщо $f(\Phi) = \Phi'$ і f — рух площини

Приклади

Рівними є:
1) два кола з рівними радіусами;
2) два квадрати, сторони яких рівні

Подібні фігури

$\Phi' \sim \Phi$, якщо $g(\Phi) = \Phi'$ і g — перетворення подібності

Приклади

Подібними є:
1) будь-які два кола;
2) будь-які два квадрати

Симетрія фігури

Перетворення, що переводить фігуру Φ у себе, тобто f — симетрія Φ, якщо $f(\Phi) = \Phi$

Фігура може мати:
1) скінченну кількість симетрій (рівнобічна трапеція, прямокутник, ромб, квадрат, …);
2) нескінченну кількість симетрій (пряма, коло, …)

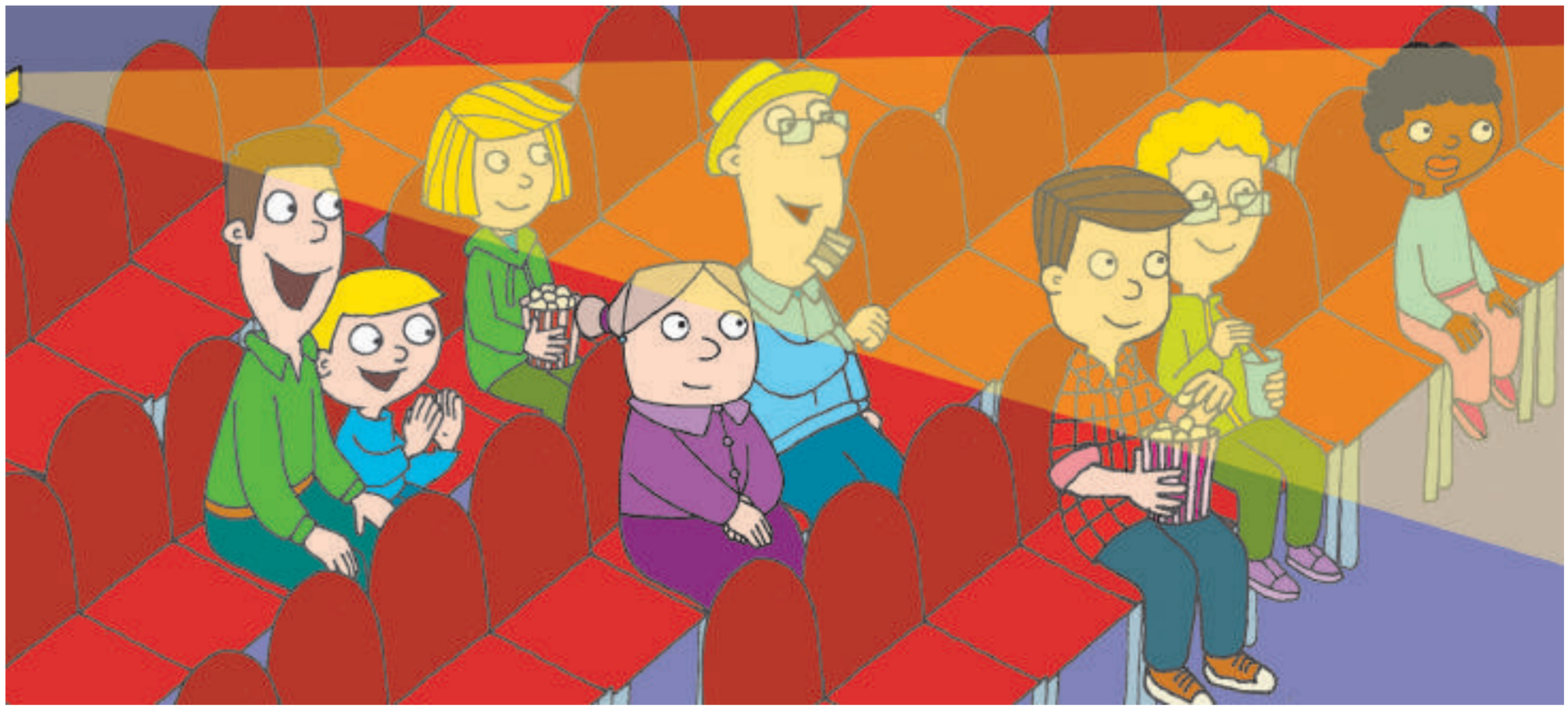
Симетріями фігури *можуть бути:*

1) тотожне перетворення;
2) осьова симетрія;
3) центральна симетрія;
4) паралельне перенесення;
5) поворот; …

РОЗДІЛ 2.
НЕРІВНОСТІ

CHAPTER 2.
INEQUALITIES

§ 4. Числові нерівності. Властивості числових нерівностей





Тетянко, зібрався завтра з другом у кіно сходити й думаю, скільки взяти із собою грошей. Минулого місяця він мене запросив і заплатив за похід у кіно, цього разу моя черга. Я глянув на сайті кінотеатру ціни: квиток на фільм коштує від 150 до 200 грн, попкорн — від 120 до 180 грн, напої — від 50 до 70 грн.



Мені здається, що це нескладно. Нехай вартість квитка — a грн, вартість попкорну — b грн, а вартість напою — c грн. Вас двоє, а отже, треба *оцінити*, в яких межах перебуває значення виразу $2a+2b+2c$, якщо a від 150 до 200, b від 120 до 180, а c від 50 до 70. Щоб вживати менше слів, пропоную записати це так: $150 \leqslant a \leqslant 200$, $120 \leqslant b \leqslant 180$, $50 \leqslant c \leqslant 70$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Точно! Тоді $300 \leqslant 2a \leqslant 400$, $240 \leqslant 2b \leqslant 360$, $100 \leqslant 2c \leqslant 140$. Тепер додаємо найменші числа та найбільші числа — і вийде, що $640 \leqslant 2a + 2b + 2c \leqslant 800$. Тобто вартість нашого походу в кіно становитиме від 640 до 800 грн. Ніби все просто, але в мене є певні сумніви щодо того, чи все тут правильно. Такі записи логічно назвати *нерівностями*, але ми про них мало що знаємо.



А мені здається, що тут усе просто. Як на мене, нерівності дуже схожі на рівняння. Для оцінки вартості твого походу в кіно ми спочатку помножили обидві частини нерівності на два, а потім додали ліві та праві частини трьох нерівностей — і маємо результат. Ми так само з рівностями робили, коли, наприклад, розв'язували системи рівнянь способом додавання.



А мені здається, що тут не все так просто. Дивись, якщо спробувати порівняти вартість попкорну з вартістю квитка, тобто оцінити значення різниці $a - b$, то за твоїм способом виходить якась нісенітниця: $150 - 120 \leqslant a - b \leqslant 200 - 180$ або $30 \leqslant a - b \leqslant 20$, але ж це неможливо. Зрозуміло, що тут щось не так. Ми під час розв'язування систем рівнянь також віднімали рівності почленно і не мали ніяких проблем. А з нерівностями, мабуть, так робити не можна.



Ти маєш рацію. Виходить, що нерівності можна додавати почленно, а от віднімати не можна. Упевнена, нас чекає ще немало сюрпризів, якщо ми спробуємо розібратися детальніше. Але тим цікавіше!



Дійсно, нерівності — надзвичайно цікава й потрібна в повсякденному житті тема, бо точні значення величин трапляються нечасто. Набагато більше випадків, коли доводиться мати справу з величинами, значення яких перебувають у певних межах, як у ситуації з відвідуванням кіно у Петрика.

Ви вже знаєте, що якщо число a менше від числа b, то це записують за допомогою нерівності $a<b$; якщо число a більше за число b, то це записують за допомогою нерівності $a>b$. Такі нерівності називають строгими нерівностями.

Нагадаємо також, що запис $a\leqslant b$ означає, що число a менше від числа b або дорівнює числу b, а запис $a\geqslant b$ означає, що число a більше за число b або дорівнює числу b. Такі нерівності називають нестрогими нерівностями.



Якщо дві строгі нерівності $a<b$ і $b<c$ виконуються одночасно, то це зручно записувати у вигляді подвійної нерівності $a<b<c$.

Якщо одночасно виконуються дві нестрогі нерівності $a\leqslant b$ і $b\leqslant c$, то це також зручно записувати у вигляді подвійної нерівності $a\leqslant b\leqslant c$. Саме так зробили Петрик і Тетянка у своїх розрахунках вартості походу в кіно.

Подвійні нерівності також можуть поєднувати строгі й нестрогі нерівності. Наприклад, запис $12\leqslant x<15$ означає, що одночасно виконуються нерівності $12\leqslant x$ і $x<15$.



Досить легко порівнювати цілі числа й десяткові дроби. Очевидно, що нерівності $12<35$, $4\geqslant -10$, $-23{,}7>-41{,}8$ є правильними числовими нерівностями. Для інших чисел це не завжди просто.

Наприклад, щоб порівняти $\frac{9}{17}$ і $\frac{11}{20}$, потрібно ці два дроби звести до спільного знаменника: $\frac{9}{17}=\frac{180}{340}$ і $\frac{11}{20}=\frac{187}{340}$. Тепер, оскільки $\frac{180}{340}<\frac{187}{340}$, то і $\frac{9}{17}<\frac{11}{20}$.

Для порівняння значень ірраціональних виразів зазвичай використовують властивості квадратного кореня та функції $y=\sqrt{x}$. Наприклад, $5\sqrt{6}<6\sqrt{5}$, бо $5\sqrt{6}=\sqrt{25\cdot 6}=\sqrt{150}$, $6\sqrt{5}=\sqrt{36\cdot 5}=\sqrt{180}$, а $\sqrt{150}<\sqrt{180}$.



Зважаючи на такі відмінності в порівнянні чисел з різних числових множин, є потреба виробити загальний підхід щодо порівняння будь-яких двох дійсних чисел. Для цього використовують таке означення.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Нехай задано два дійсних числа a і b. Розглянемо різницю цих чисел $a-b$. Будемо вважати, що:

- a менше b $(a<b)$ тоді й тільки тоді, коли різниця $a-b$ є від'ємним числом $(a-b<0)$;
- a більше b $(a>b)$ тоді й тільки тоді, коли різниця $a-b$ є додатним числом $(a-b>0)$.

Також, як завжди, $a=b$ тоді й тільки тоді, коли різниця $a-b=0$.

Наприклад, щоб порівняти між собою значення виразів $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{1}{\sqrt{3}}$, досить розглянути їх різницю: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1\cdot 2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}>0$.

Оскільки ця різниця додатна, то $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Наведений підхід до порівняння двох чисел можна використати для *доведення нерівностей*. Розглянемо приклади.

Приклад 1

Доведемо, що для будь-якого дійсного числа a виконується нерівність $(a+4)^2>a(a+8)$.

Розв'язання.

Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності й виконаємо тотожні перетворення:

$(a+4)^2-a(a+8)=a^2+8a+16-(a^2+8a)=a^2+8a+16-a^2-8a=16$.

Бачимо, що $(a+4)^2-a(a+8)=16$ — додатне число, а отже, $(a+4)^2>a(a+8)$ для будь-якого дійсного a, що й потрібно було довести.

Приклад 2

Доведемо, що $\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$ для всіх $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$.

Розв'язання.

Знову розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності й виконаємо тотожні перетворення:

$$\frac{c+d}{2}-\sqrt{cd}=\frac{c-2\sqrt{cd}+d}{2}=\frac{\left(\sqrt{c}\right)^2-2\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}+\left(\sqrt{d}\right)^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)^2}{2}\geqslant 0.$$

Тобто $\frac{c+d}{2}-\sqrt{cd}\geqslant 0$ (невід'ємне число) для всіх значень $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, а отже, $\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$ для всіх таких значень, що й потрібно було довести.



Вираз $\frac{c+d}{2}$ із прикладу 2 є середнім арифметичним невід'ємних чисел c і d, а вираз $\sqrt{cd}$ — середнім геометричним цих чисел. Доведена нерівність фактично стверджує, що середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше від їх середнього геометричного. Із доведення цієї нерівності також випливає, що рівність цих двох середніх величин можлива лише за умови рівності чисел c і d.



Петрик і Тетянка у своїх розрахунках вартості відвідування кінотеатру множили частини нерівностей на два, а також додавали нерівності почленно. Доведемо ці та інші властивості числових нерівностей.

ТЕОРЕМА (властивості числових нерівностей).

Нехай a, b, c, d — деякі дійсні числа. Тоді:

1. якщо $a<b$, то $b>a$;
2. якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$;
3. якщо $a<b$, то $a+c<b+c$;
4. якщо $a<b$ і $c>0$, то $a\cdot c<b\cdot c$;
5. якщо $a<b$ і $c<0$, то $a\cdot c>b\cdot c$;
6. якщо $a<b$ і $c<d$, то $a+c<b+d$;
7. якщо a, b, c, d — додатні числа, $a<b$ і $c<d$, то $a\cdot c<b\cdot d$;
8. якщо a, b — додатні числа і $a<b$, то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Доведення. ❶ Оскільки відомо, що $a<b$, то $a-b$ — від'ємне число, а отже, $b-a=-(a-b)$ — додатне число, звідки $b>a$.

❷ Оскільки відомо, що $a<b$ і $b<c$, то $a-b$ — від'ємне число і $b-c$ — від'ємне число, а отже, $a-c=(a-b)+(b-c)$ — від'ємне число (як сума двох від'ємних чисел), звідки $a<c$.

❸ Оскільки відомо, що $a<b$, то $a-b$ — від'ємне число, а отже, $a-b=(a+c)-(b+c)$ — від'ємне число, звідки $a+c<b+c$.

❹ і ❺ Оскільки відомо, що $a<b$, то $a-b$ — від'ємне число, а отже, $a\cdot c-b\cdot c=c\cdot(a-b)$. Якщо $c>0$, то $c\cdot(a-b)$ — від'ємне число, звідки $a\cdot c<b\cdot c$; якщо $c<0$, то $c\cdot(a-b)$ — додатне число, звідки $a\cdot c>b\cdot c$.

❻ Оскільки відомо, що $a<b$ і $c<d$, то $a-b$ — від'ємне число і $c-d$ — від'ємне число, а отже, $a+c-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ — від'ємне число (як сума двох від'ємних чисел), звідки $a+c<b+d$.

❼ Оскільки відомо, що $a<b$ і $c<d$, то $a-b$ — від'ємне число і $c-d$ — від'ємне число, а отже, $a\cdot c-b\cdot d=a\cdot c-b\cdot c+b\cdot c-b\cdot d=c\cdot(a-b)+b\cdot(c-d)$. Для додатних значень a, b, c, d останній вираз буде від'ємним, звідки $a\cdot c<b\cdot d$.

❽ Оскільки відомо, що $a<b$, то $a-b$ — від'ємне число, а отже, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=-\frac{a-b}{ab}$. Для додатних значень a, b останній вираз буде додатним, звідки $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.



Зауважимо, що властивість (1) дає змогу переформулювати властивості (2–8), змінивши знак нерівності на протилежний. Тобто, наприклад, якщо $a>b$, то $a+c>b+c$ тощо. Також усі властивості числових нерівностей залишаться правильними, якщо замість строгих нерівностей використовувати нестрогі. Наприклад, якщо $a\leqslant b$ і $c>0$, то $a\cdot c\leqslant b\cdot c$ тощо. *Переконайтеся в цьому самостійно.*



Після доведення властивостей числових нерівностей можна стверджувати, що міркування Петрика й Тетянки під час розрахунку вартості відвідування кінотеатру для двох друзів були правильними: обидві частини нерівностей дійсно можна множити на те саме додатне число, а також додавати почленно.

Однак віднімати й ділити почленно нерівності не можна. Справді, розглянемо правильні числові нерівності $2<3$ і $-4<1$. Якщо відняти почленно ці нерівності (за аналогією з властивістю (6), яка дозволяє їх додавати), то отримаємо неправильну нерівність $6<2$. Отже, віднімати почленно нерівності не можна, бо за такого віднімання можна отримати як правильну, так і неправильну нерівність.

Якщо ж розглянути правильні числові нерівності $2<3$ і $\frac{1}{2}<1$, то в разі їх почленного ділення (за аналогією з властивістю (7), яка дозволяє їх множити) також одержимо неправильну нерівність $4<3$. Отже, ділити почленно нерівності не можна, бо за такого ділення можна отримати як правильну, так і неправильну нерівність.



Однак у багатьох практичних задачах доводиться оцінювати різницю й частку двох величин. Наведемо приклад, як це робити правильно.

Приклад 3

Під час дослідження рослин на уроці біології порівняли довжину стебел двох троянд, що виросли на клумбі біля школи. Вимірювання проводили лінійкою з міліметровими поділками. Було виявлено, що довжина одного стебла становила від 45 до 46 мм, а довжина другого — від 29 до 30 мм. Оцініть:

а) на скільки міліметрів довжина першого стебла більша за довжину другого;

б) у скільки разів перше стебло довше за друге.

Розв'язання. Нехай довжина першого стебла p мм, а другого — s мм. Ми знаємо, що $45 \leqslant p \leqslant 46$ і $29 \leqslant s \leqslant 30$. Знайдемо, в яких межах перебувають величини $p-s$ і $\frac{p}{s}$.

а) Скористаємося властивістю (5) і домножимо частини подвійної нерівності $29 \leqslant s \leqslant 30$ на число -1. Отримаємо нерівність $-29 \geqslant -s \geqslant -30$, звідки за властивістю (1) $-30 \leqslant -s \leqslant -29$. Тепер додамо почленно цю нерівність і нерівність $45 \leqslant p \leqslant 46$.

За властивістю (6) маємо: $-30+45 \leqslant -s+p \leqslant -29+46$, або $15 \leqslant p-s \leqslant 17$. Отже, різниця довжин стебел двох троянд перебуває в межах від 15 до 17 мм.

б) Оскільки $29 \leqslant s \leqslant 30$, то за властивістю (8) $\frac{1}{29} \geqslant \frac{1}{s} \geqslant \frac{1}{30}$, звідки за властивістю (1) $\frac{1}{30} \leqslant \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{29}$. Тепер помножимо почленно цю нерівність і нерівність $45 \leqslant p \leqslant 46$. За властивістю (7) маємо: $\frac{1}{30} \cdot 45 \leqslant \frac{1}{s} \cdot p \leqslant \frac{1}{29} \cdot 46$, або $\frac{45}{30} \leqslant \frac{p}{s} \leqslant \frac{46}{29}$. Отже, відношення довжин стебел троянд перебуває в межах від $1\frac{1}{2}$ до $1\frac{17}{29}$.



Більше про використання властивостей числових нерівностей:
rnk.com.ua/112070,
rnk.com.ua/112071



Перевірте себе!

1. Наведіть приклади правильних числових нерівностей.
2. Яким чином можна порівнювати два дійсних числа? Наведіть відповідне означення.
3. Сформулюйте властивості числових нерівностей.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть за допомогою нерівності таку ситуацію:
а) довжина ручки (r) менша від довжини олівця (o);
б) вага телефона (t) не перевищує 200 грам;
в) дальність польоту безпілотника (d) становить понад 500 км.

2. Запишіть за допомогою нерівності таку ситуацію:

а) ціна груш (g) більша за ціну слив (s);

б) висота будівлі (b) понад 40 метрів;

в) швидкість руху транспорту (s) у населеному пункті не повинна перевищувати 50 км/год.

3. На координатній прямій позначено точки a, b, c (рис. 1). Порівняйте числа:

а) a і b; в) c і b;

б) a і c; г) c і a.

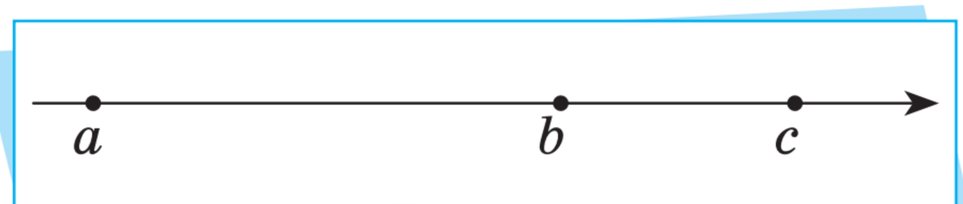


Рис. 1

4. На координатній прямій позначено точки x, y, z (рис. 2). Порівняйте числа:

а) x і y; в) z і y;

б) x і z; г) z і x.

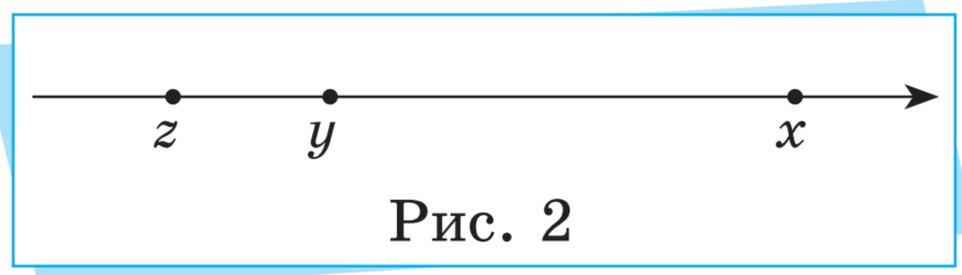


Рис. 2

5. Які нерівності є строгими?

а) $a \leqslant 8$; б) $b+3 \leqslant 4$; в) $c > 6$; г) $d-7 < 0$.

6. Які нерівності є нестрогими?

а) $x \leqslant 4$; б) $y+2 > 0$; в) $z \geqslant a-6$; г) $m-9 < n$.

7. Запишіть у вигляді подвійної нерівності.

а) $5 \leqslant x$ і $x \leqslant 8$; в) $-9 < z$ і $z \leqslant 0$;

б) $-3 < y$ і $y < 2$; г) $5 \leqslant m$ і $m < 14$.

8. Запишіть у вигляді подвійної нерівності.

а) $-2 \leqslant a$ і $a \leqslant 9$; в) $-7 < c$ і $c \leqslant 7$;

б) $5 < b$ і $b < 11$; г) $0 \leqslant d$ і $d < 4$.

9. Які нерівності є правильними числовими нерівностями?

а) $4{,}8 < 15$; б) $2 > -6{,}3$; в) $-5 > -8{,}05$; г) $-9{,}1 < 0$.

10. Які нерівності є правильними числовими нерівностями?

а) $14 < 5$; б) $-13{,}7 > 10$; в) $7 > -7$; г) $9{,}9 < 18$.

11. Порівняйте числа b і c, якщо:

а) $b-c=6$; б) $b-c=-7$; в) $b-c=0$; г) $b-c=-0{,}3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. Порівняйте числа x і y, якщо:

а) $x-y=3$; б) $x-y=0$; в) $x-y=0{,}15$; г) $x-y=-4$.

13. Відомо, що $x<y$. Запишіть нерівність, яка утвориться, якщо:

а) до обох частин нерівності додати число 5;
б) від обох частин нерівності відняти 7;
в) обидві частини нерівності помножити на 2;
г) обидві частини нерівності помножити на -4.

14. Відомо, що $a>c$. Запишіть нерівність, яка утвориться, якщо:

а) обидві частини нерівності помножити на -5;
б) обидві частини нерівності помножити на 9;
в) від обох частин нерівності відняти 3;
г) до обох частин нерівності додати число 2.

15. Порівняйте вирази, якщо $a>b$.

а) $a+5$ і $b+5$; в) $a-7$ і $b-7$;
б) $4a$ і $4b$; г) $-9a$ і $-9b$.

16. Порівняйте вирази, якщо $x<y$.

а) $x-3$ і $y-3$; в) $x+6$ і $y+6$;
б) $12x$ і $12y$; г) $-2x$ і $-2y$.

Середній рівень

17. Запишіть за допомогою подвійної нерівності.

а) Ціна апельсинів (a) більша за ціну мандаринів (m), але менша від ціни лимонів (l);
б) тарифи мобільних операторів (t) перебувають у межах від 150 до 400 грн включно за місяць;
в) маса спортсмена (m) протягом року змінювалася в межах від 75 до 78 кг включно.

18. Запишіть за допомогою подвійної нерівності.

а) Під дописами блогерки кожного разу є щонайменше 150 уподобайок (v), а бувало й навіть 1000;
б) кількість підручників (p) у книжковій шафі більша за кількість словників (s), але менша від кількості художніх книжок (h);
в) зріст (z) учнів і учениць 9 класу ліцею № 2 перебуває в межах від 158 до 193 см включно.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

19. На координатній прямій позначено число 0 і точки a, b, c (рис. 3). Порівняйте вираз і число 0.

а) ab і 0; в) $b+c$ і 0;

б) bc і 0; г) $a:c$ і 0.



Рис. 3

20. На координатній прямій позначено число 0 і точки x, y, z (рис. 4). Порівняйте вираз і число 0.

а) xy і 0; в) $y+z$ і 0;

б) yz і 0; г) $x:z$ і 0.

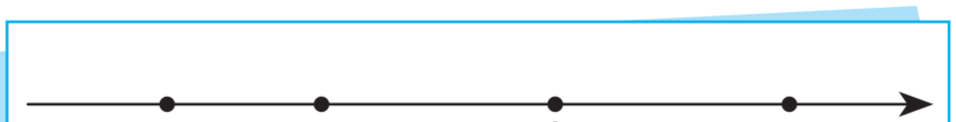


Рис. 4

21. Які нерівності є правильними числовими нерівностями?

а) $\frac{5}{19}<\frac{7}{19}$; б) $\frac{1}{8}>\frac{1}{12}$; в) $\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{13}>\frac{1}{3}$.

22. Які нерівності є правильними числовими нерівностями?

а) $\frac{5}{7}<\frac{2}{7}$; б) $\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$; в) $\frac{2}{15}<\frac{7}{15}$; г) $\frac{1}{8}>\frac{1}{17}$.

23. Відомо, що $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$.

а) Підберіть такі додатні числа x та y, щоб утворилася правильна числова нерівність;

б) підберіть такі від'ємні числа x та y, щоб утворилася правильна числова нерівність.

24. Відомо, що $x^2-8x<0$.

а) Підберіть таке додатне число x, щоб утворилася правильна числова нерівність;

б) підберіть таке від'ємне число x, щоб утворилася правильна числова нерівність.

25. Якщо $x>y$, то чи може різниця чисел $x-y$ дорівнювати числу:

а) 15; б) 0; в) -7; г) 0,35?

26. Якщо $c<d$, то чи може різниця чисел $c-d$ дорівнювати числу:

а) -6; б) 8; в) 0; г) $-4,5$?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

27. Порівняйте вирази, якщо $a > b$.

а) $a+9$ і $b+7$; б) $7+a$ і $3+b$; в) $a+8$ і $b-1$; г) $\frac{1}{3}a$ і $\frac{1}{3}b$.

28. Порівняйте вирази, якщо $x < y$.

а) $x+3$ і $y+6$; б) $5+x$ і $9+y$; в) $x-4$ і $y-1$; г) $\frac{5}{9}x$ і $\frac{5}{9}y$.

29. Порівняйте вирази, якщо $0 < a < b$.

а) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$; б) $5a$ і $8b$; в) $-6a$ і $-6b$.

30. Порівняйте вирази, якщо $x > y > 0$.

а) $x+9$ і $y+6$; б) $8x$ і $6y$; в) $\frac{4}{7}x$ і $\frac{4}{7}y$.

31. Укажіть, які натуральні числа задовольняють подвійну нерівність $3 < x \leqslant 8$.

32. Укажіть, які цілі числа задовольняють подвійну нерівність $-2 \leqslant x < 2$.

Достатній рівень

33. Порівняйте вирази.

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ і $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

34. Порівняйте вирази.

а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ і $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ і $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

35. Відомо, що $x < y$ і $a < b$. Чи правильною є нерівність?

а) $x+a < y+a$; б) $x+a < y+b$; в) $x-a < y-b$; г) $x-b < y-b$.

36. Відомо, що $x > y$ і $a > b$. Чи правильною є нерівність?

а) $x-a > y-a$; б) $x-b > y-b$; в) $x+b > y+a$; г) $a+x > b+y$.

37. Відомо, що $x > y$, причому $x > 0$, $y > 0$. Чи правильною є нерівність?

а) $3x > 2y$; б) $10x > 10y$; в) $-x > -y$; г) $x^2 > yx$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

38. Відомо, що $a<b$, причому $a>0$, $b>0$. Чи правильною є нерівність?

а) $-3a<-3b$; б) $2a>2b$; в) $a^2<b^2$; г) $b^2>ab$.

39. Оцініть значення виразів $2n$; $2n+3$; $-n$; $5-n$, якщо:

а) $2<n<7$; б) $-3\leqslant n\leqslant 5$.

40. Оцініть значення виразів $3d$; $3d-4$; $-2d$; $1-2d$, якщо:

а) $1<d<5$; б) $-2\leqslant d\leqslant 3$.

41. Оцініть значення периметра P рівностороннього трикутника зі стороною a см, якщо $3{,}2<a<3{,}8$.

42. Оцініть значення периметра P рівнобічного трикутника з основою a см і бічною стороною b см, якщо $4{,}3<a<4{,}5$ і $6{,}2<b<6{,}4$.

43. Оцініть значення площі S квадрата зі стороною a см, якщо $2{,}4<a<2{,}6$.

44. Оцініть значення площі S прямокутника зі сторонами a см і b см, якщо $3{,}5<a<4{,}5$ і $2<b<3$.

45. Відніміть від лівої частини нерівності праву її частину й доведіть, що нерівність виконується для будь-якого дійсного числа c.

а) $c^2+3c+12>c(c+3)+10$; б) $c(c-4)<(c-2)^2$; в) $c(c+5)>5c-6$.

46. Відніміть від лівої частини нерівності праву її частину й доведіть, що нерівність виконується для будь-якого дійсного числа x.

а) $7x+2>x(7-x)$; б) $x(x-8)+10<(x-4)^2$; в) $x^2-5x+3>x(x-5)$.

47. Доведіть нерівність.

а) $(a+b)^2\geqslant 4ab$; б) $x^2+y^2\geqslant -2xy$.

48. Доведіть нерівність.

а) $6a-9-a^2\leqslant 12a$; б) $7x-49-x^2\leqslant -7x$.

49. Петрик і Тетянка мешкають в одному будинку й ходять тією самою дорогою до однієї школи. Петрик першу половину шляху до школи йде зі швидкістю 4 км/год, а другу — зі швидкістю

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

6 км/год. Тетянка весь шлях проходить зі швидкістю 5 км/год. Хто з них витрачає більше часу на шлях до школи? Відповідь поясніть.

50. Петрик і Тетянка купили однакову кількість зошитів. Петрик усі зошити купив за одною ціною — 25 грн за зошит, а Тетянка половину зошитів купила за ціною 20 грн, а половину — за ціною 32 грн. Хто з них витратив більше грошей?

51. Доведіть: якщо $a+c>b$, то $a>b-c$.

52. Доведіть:

а) якщо $ac>bc$ і $c>0$, то $a>b$;

б) якщо $ac>bc$ і $c<0$, то $a<b$.

Високий рівень

53. Доведіть, що для будь-якого додатного числа a виконується нерівність $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. За якого значення a виконується знак рівності?

54. Доведіть, що для будь-якого від'ємного числа b виконується нерівність $b+\frac{1}{b}\leqslant -2$. За якого значення b виконується знак рівності?

55. Доведіть нерівність $m^2+4n^2+34\geqslant 6m+20n$.

56. Доведіть нерівність $9c^2+25d^2+5\geqslant 6c-20d$.

57. Доведіть, що для додатних чисел a і b ($a>0$, $b>0$) нерівність $a>b$ виконується тоді й тільки тоді, коли виконується нерівність $a^2>b^2$.

58. Скориставшись результатом попередньої задачі (і не користуючись калькулятором), порівняйте вирази.

а) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ і $\sqrt{3}+2$; б) $\sqrt{10}+\sqrt{3}$ і $\sqrt{11}+\sqrt{2}$.

59. Доведіть нерівність $(1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4$, де $a>0$.

60. Доведіть нерівність $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$, де $a>0$, $b>0$.

61. Відомо, що $4<a<5$, $10<b<16$. Оцініть значення виразу.

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{b}{a}$; д) $4a-\frac{1}{2}b$.

62. Відомо, що $3<c<6$, $12<d<15$. Оцініть значення виразу.

а) $c+d$; б) $d-c$; в) cd; г) $\frac{c}{d}$; д) $5d-\frac{1}{3}c$.

63. Доведіть, що в трикутника сума довжин усіх його медіан більша за $\frac{3}{4}$ його периметра.

64. Доведіть, що в чотирикутника сума довжин його діагоналей менша від його периметра.



Цікавинки від дідуся Тараса

Знаки $<$ і $>$ для позначення нерівностей увів англійський математик, астроном, етнограф і перекладач *Томас Геріот* (1560–1621) у своєму творі, виданому в 1631 р. До нього нерівності записували словами: «менше», «більше». Знаки нестрогого порівняння $\leqslant$ і $\geqslant$ запропонував англійський математик *Джон Волліс* (1616–1703) у 1670 р. Цікаво, що спочатку додаткова риска була вище знака порівняння, а не під ним, як зараз. Загального поширення ці символи набули після підтримки французького фізика, астронома і математика *П'єра Бугера* (1698–1758), який надав їм сучасного вигляду.

Доведена в § 4 нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним має цікаву геометричну інтерпретацію. Розглянемо прямокутник зі сторонами x і y. Тоді його периметр $P_{\text{пр}}=2x+2y$, а площа $S_{\text{пр}}=xy$. Якщо розглянути квадрат зі стороною $a=\sqrt{xy}$, то його периметр $P_{\text{кв}}=4a=4\sqrt{xy}$, а площа $S_{\text{кв}}=a^2=xy=S_{\text{пр}}$. Ми знаємо, що $\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$ для всіх $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, звідки за властивістю числових нерівностей $c+d\geqslant 2\sqrt{cd}$. Якщо взяти $c=2x$, а $d=2y$, то отримаємо, що $2x+2y\geqslant 4\sqrt{xy}$, тобто $P_{\text{пр}}\geqslant P_{\text{кв}}$. Таким чином, *з усіх прямокутників однакової площі саме квадрат має найменший периметр*.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про життя й наукову діяльність Томаса Геріота, Джона Воліса і П'єра Бугера. Підготуйте короткі повідомлення про кожного із цих учених.
2. У математиці існує багато «іменних» нерівностей: Коші, Коші-Буняковського, Несбіта, Єнсена, Мінковського та ін. Чи знайомі ви з якоюсь із цих нерівностей? Якщо так, то поділіться з учнями та ученицями свого класу власним досвідом використання цих нерівностей на практиці.
3. Користуючись додатковими джерелами інформації, підготуйте невеликі повідомлення щодо кожної із зазначених «іменних» нерівностей та її застосування в математиці й інших науках і сферах життєдіяльності.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

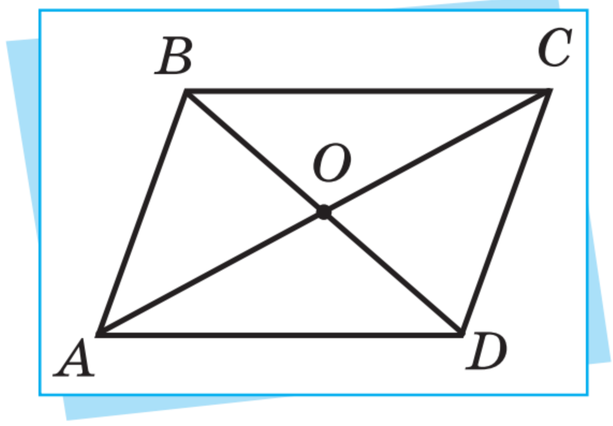
1. Обчисліть.

а) $2\frac{1}{3}+3\frac{3}{4}-7\frac{1}{2}$; б) $3\frac{4}{7}\cdot 2\frac{4}{5}$; в) $6\frac{2}{3}:1\frac{1}{9}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x-2y=-13, \\ 2x+5y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y=16, \\ 3x-2y=11. \end{cases}$

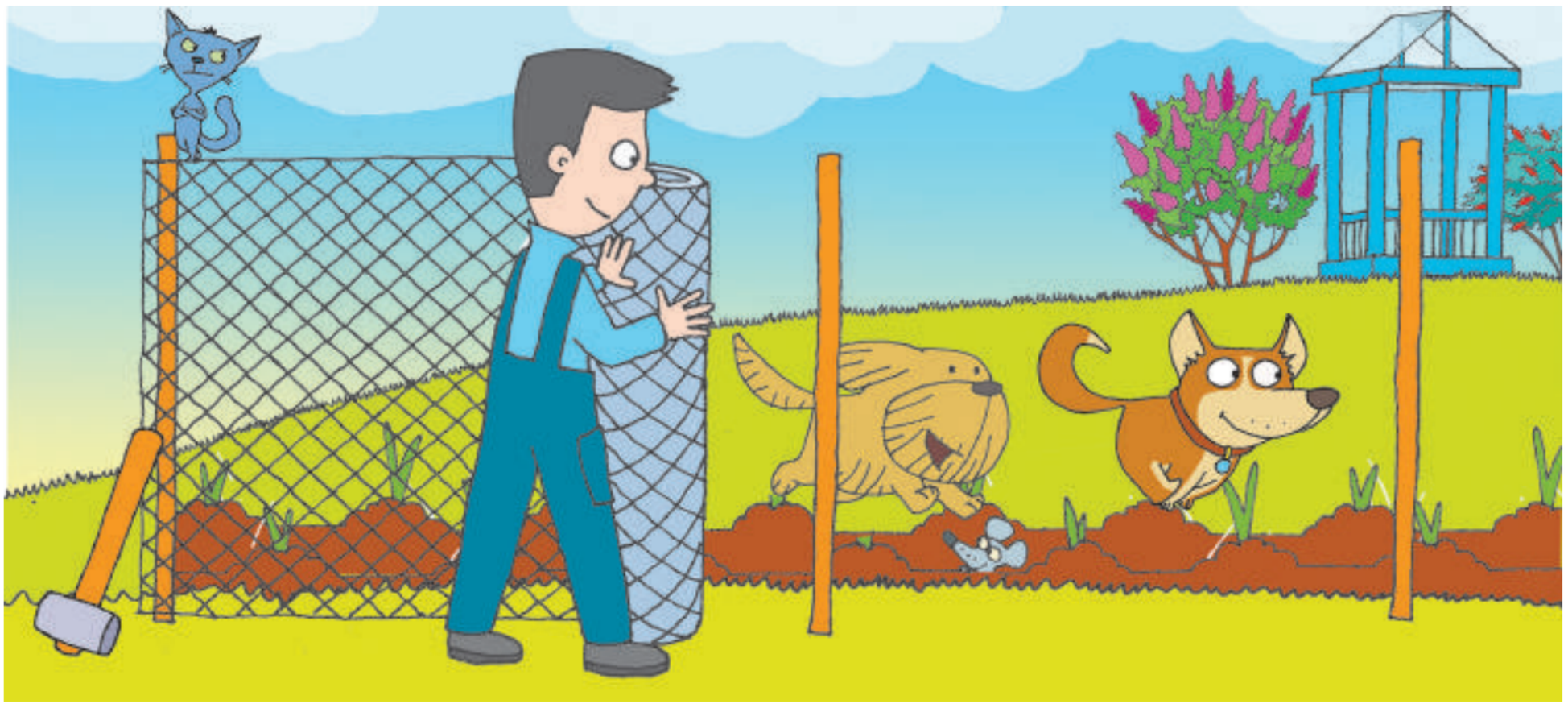
3. Виготовіть із паперу моделі конуса й циліндра, у яких висота дорівнює 8 см, а радіус основи — 6 см.
4. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Виразіть вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{OD}$ через: а) вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; б) вектори $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$.



5. Є три посудини місткістю 7, 5 і 3 літри. У 7-літрову посудину налито 6 літрів води. Яким чином, використовуючи лише цю воду й тільки ці посудини, зробити так, щоб у 3-літровій посудині було 2 літри води, а у 5-літровій — 4 літри води?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 5. Нерівності зі змінними. Рівносильні нерівності. Лінійні нерівності з однією змінною

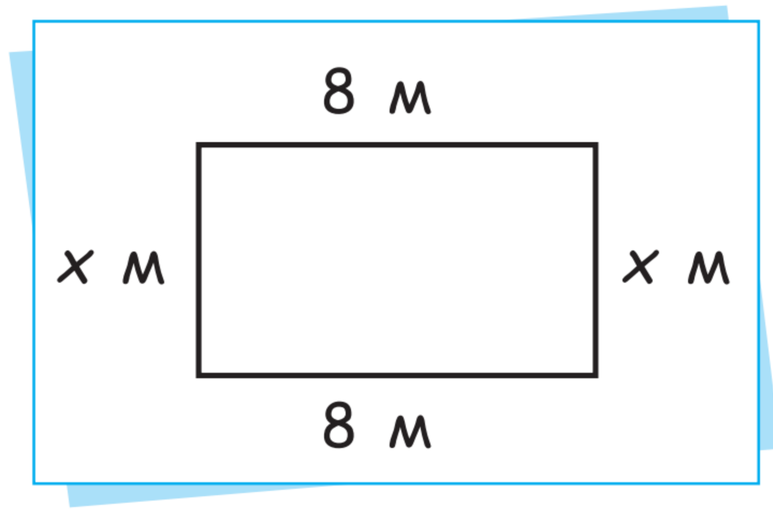




Петрику, допоможи, будь ласка! Тато доручив мені спланувати ділянку для вирощування розсади на дачі. Аби котики й собачки не витоптали розсаду, ми хочемо обгородити її невисокою металевою сіткою. Вже купили два рулони такої сітки, довжина сітки в кожному рулоні — 20 метрів. Тато каже, що одна сторона ділянки має бути 8 метрів, бо вона повинна прилягати до вже спланованої ділянки для вирощування картоплі. А от інша сторона може бути будь-якою — аби тільки сітки вистачило.



А намалюймо план цієї ділянки, у мене якраз із собою планшет. Дивись, позначимо одну сторону ділянки 8 м, як ти і сказала, а іншу — x м. Довжина сітки, яку ми маємо, $2 \cdot 20 = 40$ м. Сітку ставимо по периметру, тому периметр ділянки має бути не більшим за 40 м. Отже, $2 \cdot 8 + 2 \cdot x \leqslant 40$, або $2x + 16 \leqslant 40$. І тепер потрібно знайти всі значення x, для яких виконується ця нерівність.





Ну, припустимо, не всі, а лише додатні значення x, але все одно дякую. Щоправда, не дуже зрозуміло, як знаходити ці значення. Рівняння ми вміємо розв'язувати, а от нерівності — поки що ні.



Не думаю, що це так уже й складно. Ми вже знаємо властивості числових нерівностей. Від обох частин нерівності $2x+16\leqslant 40$ віднімемо число 16. Тоді нерівність залишиться правильною і вийде $2x\leqslant 24$. Ми, як і для рівнянь, ніби *перенесли* число 16 з однієї частини нерівності в іншу з протилежним знаком.



О, далі я вже й сама знаю! Тепер поділимо обидві частини нерівності на додатне число 2. За вивченими нами властивостями, нерівність знову залишиться правильною. Отримаємо, $x\leqslant 12$, тобто довжина ділянки має бути не більшою за 12 метрів. Або можна записати відповідь до нерівності так: $0<x\leqslant 12$. Якось воно громіздко трохи вийшло. Впевнена, математики вже щось вигадали, аби спростити цей запис.



Я теж так вважаю. Крім того, я тепер розумію, чому дідусь Тарас іноді жартома каже, що *математика — це мистецтво правильно мислити на неправильних рисунках*. Бо в мене на планшеті сторона x метрів зображена меншою від сторони 8 метрів, а в реальності вона може бути й більшою. Також чомусь упевнений, що з розв'язуванням нерівностей не все так просто, як у нашому випадку. Хочеться про це дізнатися більше.



Хід ваших думок цілком слушний, зараз розповімо про все детально. Нерівності на кшталт $2x+16\leqslant 40$ називають нерівностями з однією змінною. Як і рівняння, далі *будемо розглядати нерівності з однією змінною лише на множині дійсних чисел*.

Розв'язком нерівності називають таке значення змінної, підстановка якого в нерівність замість змінної перетворює її на правильну числову нерівність.

Наприклад, число 10 є розв'язком нерівності $x^2 > 50$, бо $10^2 = 100$, а $100 > 50$; число 8 є розв'язком нерівності $-3x + 14 \geqslant -10$, бо $-3 \cdot 8 + 14 = -10$, а $-10 \geqslant -10$.



Розв'язати нерівність означає знайти множину всіх чисел, що є її розв'язками. Іноді така множина є **порожньою,** тобто жодне число не є розв'язком нерівності. Наприклад, очевидно, що нерівність $x^4 < 0$ не має розв'язків. **Порожню множину позначають символом** $\varnothing$.

Отже, розв'язок нерівності $x^4 < 0$ записують або символом $\varnothing$, або словами «розв'язків немає».

Також очевидно, що нерівність $x^4 \leqslant 0$ має лише один розв'язок — число 0. Такий розв'язок нерівності можна записати як $x = 0$ або $\{0\}$.



Однак зазвичай нерівності мають безліч розв'язків.

Наприклад, розв'язком нерівності $x < 20$ будуть усі числа, менші за 20. На числовій прямій ці числа розташовані ліворуч від числа 20. На рис. 5.1 цю множину заштриховано, а точку 20 позначено порожнім кружечком, бо число 20 не є розв'язком нерівності. Іноді говорять, що точка 20 є **виколотою точкою** числової прямої.

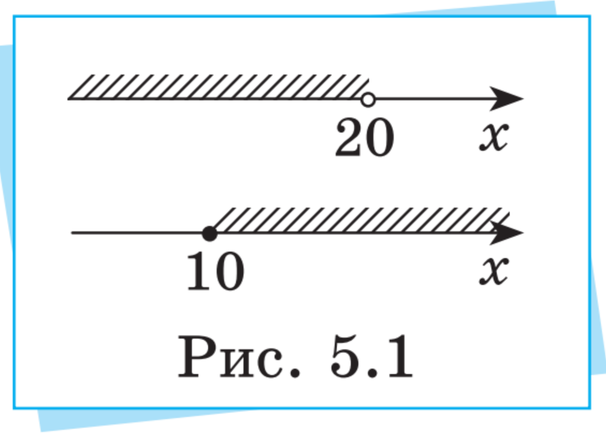


Рис. 5.1

Розв'язком нерівності $x \geqslant 10$ будуть усі числа, більші за 10, а також число 10. На числовій прямій усі ці числа, крім 10, розташовані праворуч від числа 10. На рис. 5.1 множину розв'язків нерівності $x \geqslant 10$ заштриховано, а точку 10 позначено зафарбованим кружечком.



Для запису множин розв'язків нерівностей зі змінними можна використовувати спеціальні позначення.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Нехай a — деяке число. Домовимось, що:

- множину розв'язків нерівності $x < a$ будемо записувати $(-\infty; a)$;
- множину розв'язків нерівності $x > a$ будемо записувати $(a; +\infty)$;
- множину розв'язків нерівності $x \leqslant a$ будемо записувати $(-\infty; a]$;
- множину розв'язків нерівності $x \geqslant a$ будемо записувати $[a; +\infty)$.

Записи $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$ і $[a; +\infty)$ називають необмеженими числовими проміжками або просто проміжками. Їх зображують на числовій прямій так, як показано на рис. 5.2.

Отже, множину розв'язків нерівності $x < 20$ записують у вигляді проміжку $(-\infty; 20)$, а множину розв'язків нерівності $x \geqslant 10$ — у вигляді проміжку $[10; +\infty)$.

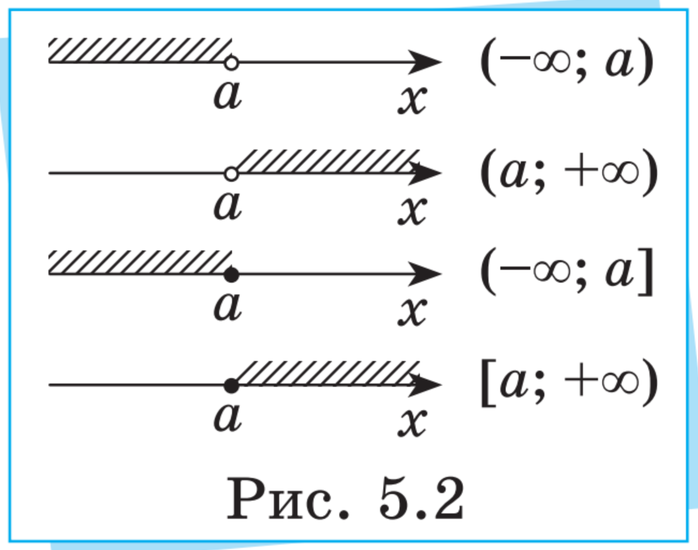


Рис. 5.2

Для запису розв'язків подвійних нерівностей зі змінними також використовують спеціальні позначення.

Нехай a і b — деякі дійсні числа, причому $b > a$. Домовимось, що:

- множину розв'язків подвійної нерівності $a < x < b$ будемо записувати $(a; b)$;
- множину розв'язків подвійної нерівності $a \leqslant x \leqslant b$ будемо записувати $[a; b]$;
- множину розв'язків подвійної нерівності $a \leqslant x < b$ будемо записувати $[a; b)$;
- множину розв'язків подвійної нерівності $a < x \leqslant b$ будемо записувати $(a; b]$.

Записи $(a; b)$, $[a; b]$, $[a; b)$ і $(a; b]$ називають обмеженими числовими проміжками або також просто проміжками. Їх зображують на числовій прямій так, як показано на рис. 5.3.

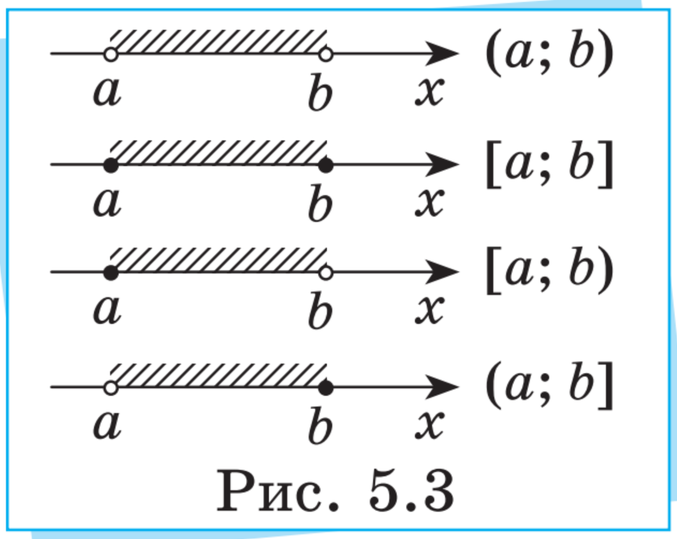


Рис. 5.3



Як і для рівнянь, нерівності, що мають ту саму множину розв'язків, називають рівносильними. Наприклад, нерівності $x^4 > -5$ і $x^2 > -5$ є рівносильними, бо множиною їхніх розв'язків є множина всіх дійсних чисел.

Також рівносильними домовилися вважати будь-які нерівності, що не мають розв'язків. Наприклад, рівносильним будуть нерівності $x^4 < 0$, $\sqrt{x} < -5$ і $|x| < -7$.



Якщо множина розв'язків якоїсь нерівності є множиною всіх дійсних чисел, то за аналогією з іншими необмеженими числовими проміжками її часто записують у вигляді проміжку $(-\infty; +\infty)$.



Якщо за якогось перетворення нерівності отримуємо рівносильну їй нерівність, то такі перетворення нерівності природно назвати рівносильними.



Ураховуючи властивості числових нерівностей, рівносильними будуть такі перетворення нерівностей зі змінними:

- додавання до обох частин нерівності того самого числа;
- перенесення доданка з однієї частини нерівності в іншу з протилежним знаком;
- множення або ділення обох частин нерівності на те саме додатне число;
- множення або ділення обох частин нерівності на те саме від'ємне число зі зміною знака нерівності на протилежний.

Більш детально про це:
rnk.com.ua/112072





Петрик і Тетянка під час розв'язування нерівності $2x + 16 \leqslant 40$ переносили число 16 з однієї частини нерівності в іншу з протилежним знаком, а потім ділили обидві частини нерівності

на 2. У підсумку отримали нерівність $x \leqslant 12$, яка є рівносильною початковій. Множиною її розв'язків є проміжок $(-\infty; 12]$. Але оскільки довжина ділянки має бути додатним числом, тобто $0 < x \leqslant 12$, то множиною розв'язків цієї подвійної нерівності є проміжок $(0; 12]$.

Розглянемо *кілька прикладів розв'язування нерівностей за допомогою рівносильних перетворень.*

Приклад 1

Розв'яжіть нерівність $3(x+1) < 5x - 9$.

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині нерівності: $3x + 3 < 5x - 9$. Перенесемо 3 в праву частину нерівності з протилежним знаком, а $5x$ — у ліву частину нерівності з протилежним знаком: $3x - 5x < -9 - 3$; $-2x < -12$. Поділимо обидві частини нерівності на -2 і змінимо знак нерівності на протилежний: $x > 6$. Остання нерівність є рівносильною початковій, а отже, множиною розв'язків нерівності є проміжок $(6; +\infty)$.

Приклад 2

Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x-4}{3} \geqslant 2x + 1$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності на 3. Маємо: $3 \cdot \dfrac{x-4}{3} \geqslant 3 \cdot (2x+1)$; $x - 4 \geqslant 6x + 3$. Аналогічно до прикладу 1 збе-

ремо доданки зі змінною в лівій частині нерівності, а числа — в правій: $x - 6x \geqslant 3 + 4$; $-5x \geqslant 7$. Поділимо обидві частини нерівності на -5 і змінимо знак нерівності на протилежний: $x \leqslant -1{,}4$. Отже, множиною розв'язків нерівності є проміжок $(-\infty; -1{,}4]$.



Аналогічно зручно розв'язувати й *подвійні нерівності, ліва та права частина яких не містить змінної.*

Приклад 3

Розв'яжіть подвійну нерівність $10 \leqslant 4x - 2 < 20$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розв'язання. Додамо до всіх частин подвійної нерівності число 2. Отримаємо: $12 \leqslant 4x < 22$. Поділимо всі частини подвійної нерівності на 4 й отримаємо рівносильну подвійну нерівність $3 \leqslant x < 5{,}5$. Множиною розв'язків цієї подвійної нерівності є проміжок $[3; 5{,}5)$.

Приклад 4

Розв'яжіть подвійну нерівність $-6 < \dfrac{3-x}{2} < 4$.

Розв'язання. Помножимо всі частини подвійної нерівності на 2. Одержимо: $-12 < 3 - x < 8$. Віднімемо від усіх частин подвійної нерівності число 3. Одержимо: $-15 < -x < 5$. Помножимо всі частини подвійної нерівності на -1, змінивши знак нерівності на протилежний: $15 > x > -5$, або $-5 < x < 15$. Множиною розв'язків цієї подвійної нерівності є проміжок $(-5; 15)$.



Нерівності виду $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leqslant 0$ і $ax + b \geqslant 0$, де x — змінна, a, b — дійсні числа, природно назвати лінійними нерівностями (за аналогією з лінійними рівняннями). Розв'язування всіх розглянутих вище нерівностей тією чи іншою мірою зводилося до розв'язування саме лінійних нерівностей.

Більше про розв'язування лінійних нерівностей: rnk.com.ua/111772



Перевірте себе!

1. Наведіть приклади нерівностей зі змінними та їх розв'язків.
2. Дайте означення розв'язку нерівності зі змінною. Що означає розв'язати нерівність?
3. Наведіть приклади нерівностей:
   а) які не мають жодного розв'язку; б) що мають лише один розв'язок; в) які мають нескінченну кількість розв'язків.

4. Як записати розв'язки нерівностей $x<a$, $x>a$, $x\leqslant a$, $x\geqslant a$ у вигляді числових проміжків? Як зобразити відповідні проміжки на числовій прямій?

5. Як записати розв'язки подвійних нерівностей $a<x<b$, $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant x<b$, $a<x\leqslant b$ у вигляді числових проміжків? Як зобразити відповідні проміжки на числовій прямій?

6. Які нерівності називають рівносильними? Наведіть приклади рівносильних нерівностей.

7. Які перетворення нерівностей є рівносильними? Наведіть приклади розв'язань нерівностей за допомогою рівносильних перетворень.

8. Які нерівності називають лінійними? Наведіть приклади лінійних нерівностей та їх розв'язань.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які значення змінної x є розв'язками нерівності $x>14$?
а) $x=-15$; б) $x=15$; в) $x=20$; г) $x=10$; д) $x=14$.

2. Які значення змінної x є розв'язками нерівності $x<3$?
а) $x=-1$; б) $x=-13$; в) $x=0$; г) $x=6$; д) $x=3$.

3. На числовій прямій зобразіть множину всіх розв'язків нерівності та запишіть її у вигляді проміжку.
а) $x>8$; б) $x<5$; в) $x\leqslant 7$; г) $x\geqslant -2$.

4. На числовій прямій зобразіть множину всіх розв'язків нерівності та запишіть її у вигляді проміжку.
а) $x>-4$; б) $x<-1$; в) $x\leqslant 3$; г) $x\geqslant -2$.

5. Запишіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок:
а) $(-3;+\infty)$; б) $(-\infty;6)$; в) $(-\infty;7]$; г) $[9;+\infty)$.

6. Запишіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок:
а) $(-\infty;-4]$; б) $[2;+\infty)$; в) $(6;+\infty)$; г) $(-\infty;-10)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. Запишіть нерівність, множиною розв'язків якої є зображений на рис. 1 проміжок.

8. Запишіть нерівність, множиною розв'язків якої є зображений на рис. 2 проміжок.

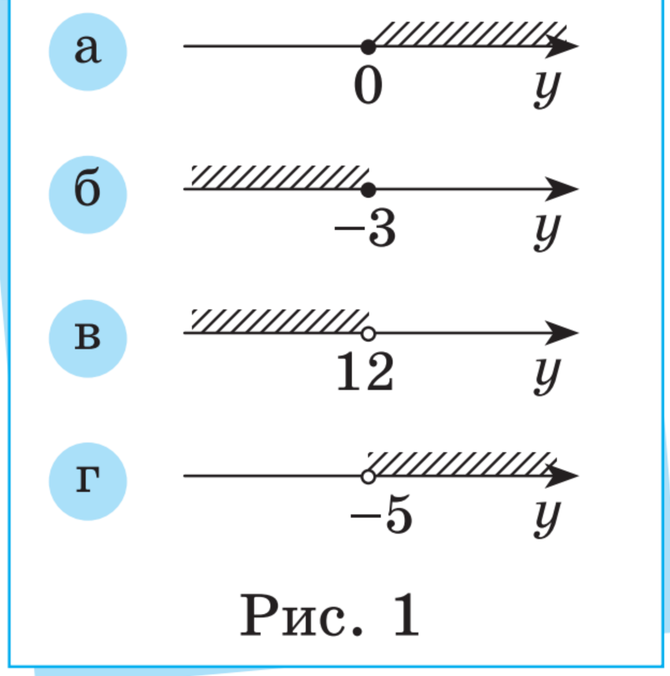


Рис. 1

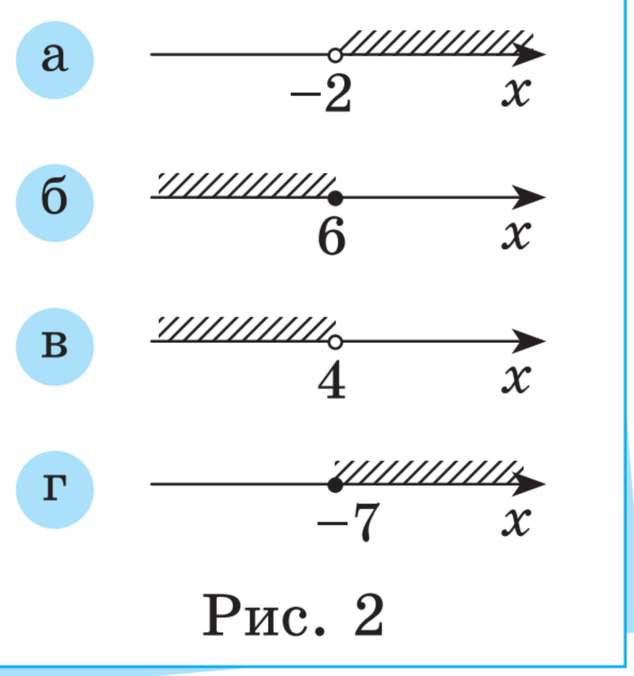


Рис. 2

9. Для перевірки достовірності новини журналісти використовують не менше трьох джерел інформації. Позначимо кількість джерел інформації змінною d. Запишіть нерівність, яка описує цю ситуацію. Запишіть множину розв'язків цієї нерівності у вигляді проміжку. Зобразіть цей проміжок на числовій прямій.

10. Вартість акцій компанії перевищує 500 тис. грн. Позначимо вартість акцій змінною v. Запишіть нерівність, яка описує ситуацію. Запишіть множину розв'язків цієї нерівності у вигляді проміжку. Зобразіть цей проміжок на числовій прямій.

11. Розв'яжіть нерівність.

а) $x-5>3$; б) $x+2<6$; в) $x-7\leqslant 4$; г) $x+3\geqslant -1$.

12. Розв'яжіть нерівність.

а) $y+2<-3$; б) $y-7>8$; в) $y-5\leqslant 9$; г) $y+10\geqslant -6$.

13. На яке число потрібно поділити обидві частини нерівності, щоб розв'язати її?

а) $5y<12$; б) $3y>-8$; в) $9y\leqslant 10$; г) $12y\geqslant -3$.

14. На яке число потрібно поділити обидві частини нерівності, щоб розв'язати її?

а) $4x>3$; б) $5x<-12$; в) $14x\leqslant -6$; г) $8x\geqslant 12$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

15. Розв'яжіть нерівність.

а) $3x \geqslant 6$; б) $2x < -10$; в) $4x \leqslant 6$; г) $-5x > 35$.

16. Розв'яжіть нерівність.

а) $7y < -7$; б) $6y > 18$; в) $-3y \leqslant 15$; г) $8y \geqslant 2$.

Середній рівень

17. Задано нерівність $3x + 2 > 1$. Укажіть, які значення x є розв'язками цієї нерівності.

а) $x = -2$; б) $x = -1$; в) $x = 0$; г) $x = 1$; д) $x = 2$.

18. Задано нерівність $2y - 3 < 1$. Укажіть, які значення y є розв'язками цієї нерівності.

а) $y = -1$; б) $y = 0$; в) $y = 1$; г) $y = 2$; д) $y = 3$.

19. Множину розв'язків заданої нерівності зобразіть на числовій прямій і запишіть у вигляді проміжку.

а) $x - 2 > 5$; б) $x + 4 < -1$; в) $x - 8 \leqslant -5$; г) $x + 4 \geqslant 0$.

20. Множину розв'язків заданої нерівності зобразіть на числовій прямій і запишіть у вигляді проміжку.

а) $x + 1 > -8$; б) $x - 4 < 6$; в) $x + 2 \leqslant 0$; г) $x - 7 \geqslant 3$.

21. Розв'яжіть нерівність.

а) $3x - 7 \geqslant 5$; б) $2x + 5 < -13$; в) $4x + 10 \leqslant 6$; г) $-5x - 6 > 14$.

22. Розв'яжіть нерівність.

а) $7y + 16 < -5$; б) $6y - 20 > 22$; в) $-3y - 8 \leqslant 10$; г) $4y - 17 \geqslant -5$.

23. Запишіть подвійну нерівність, множиною розв'язків якої є заданий проміжок.

а) $(-1; 6)$; б) $[3; 9)$; в) $(-5; 2]$; г) $[0; 4]$.

24. Запишіть подвійну нерівність, множиною розв'язків якої є заданий проміжок.

а) $(-7; -2]$; б) $[2; 8]$; в) $(4; 9)$; г) $[-7; 1)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

25. Запишіть подвійну нерівність, множиною розв'язків якої є зображений на рис. 3 проміжок.

26. Запишіть подвійну нерівність, множиною розв'язків якої є зображений на рис. 4 проміжок.

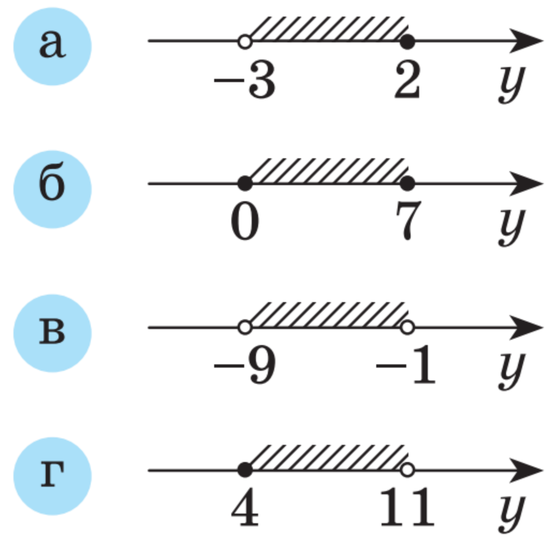


Рис. 3

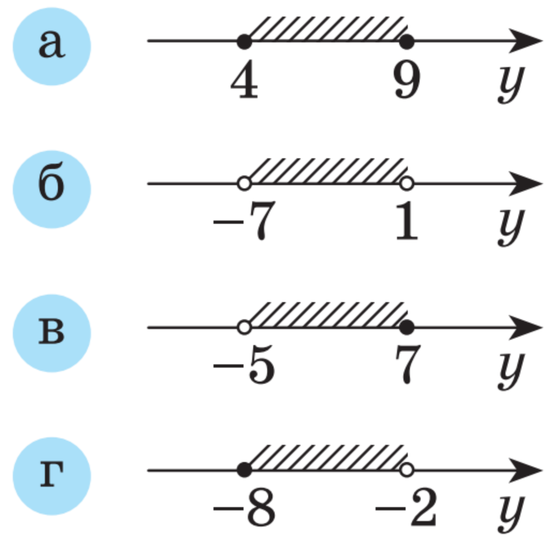


Рис. 4

27. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $2 < x - 7 \leqslant 6$; б) $-4 \leqslant x + 3 < 3$; в) $-6 \leqslant x - 2 \leqslant -3$; г) $7 < x + 10 < 14$

28. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $3 \leqslant x + 5 \leqslant 8$; б) $-4 < x - 6 < 5$; в) $4 < x + 9 \leqslant 7$; г) $-2 \leqslant x - 7 < 3$;

29. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $-4 \leqslant 2x \leqslant 8$; б) $2 < 5x < 15$; в) $2 < \frac{1}{3}x \leqslant 5$; г) $-1 \leqslant \frac{x}{6} < 4$;

30. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $6 < 4x \leqslant 20$; б) $-12 \leqslant 3x < -9$; в) $-1 \leqslant \frac{x}{5} \leqslant 4$; г) $0 < \frac{1}{7}x < 4$

31. Діагональ монітора зазвичай має довжину від 17 до 35 дюймів включно. Позначимо довжину діагоналі змінною d. Запишіть подвійну нерівність, яка описує цю ситуацію. Запишіть множину розв'язків нерівності у вигляді проміжку. Зобразіть цей проміжок на числовій прямій.

32. Ціна яблук у крамниці зазвичай від 40 до 60 грн включно. Позначимо ціну яблук змінною c. Запишіть подвійну нерівність, яка описує цю ситуацію. Запишіть множину розв'язків нерівності у вигляді проміжку. Зобразіть проміжок на числовій прямій.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Достатній рівень

33. Чи є рівносильними нерівності?

а) $2x<0$ і $2x\leqslant 0$;
в) $5x+1>0$ і $5x>1$;
б) $3x-2<1$ і $3x<3$;
г) $2(x+1)\geqslant 0$ і $2x+2\geqslant 0$.

34. Чи є рівносильними нерівності?

а) $0{,}1x>10$ і $x>100$;
в) $4x\leqslant -1$ і $x\leqslant -0{,}25$;
б) $3(x-2)<1$ і $3x<5$;
г) $2(x+1)\geqslant 2$ і $x\geqslant 0$.

35. Укажіть нерівність, яка не має розв'язків.

а) $0x>1$; б) $0x<-1$; в) $0x>-1$; г) $0x<1$.

36. Укажіть нерівність, яка не має розв'язків.

а) $2x\geqslant 2$; б) $2x<2x$; в) $2x<0$; г) $0x>2$.

37. Розв'яжіть нерівність.

а) $18y-7<9y+20$;
в) $1{,}1y+0{,}5\leqslant -1{,}3+0{,}9y$;
б) $3+x>19-3x$;
г) $10{,}5x+21\geqslant 47-2{,}5x$.

38. Розв'яжіть нерівність.

а) $19x-2\geqslant 12+5x$;
в) $2{,}4y-8<-2+1{,}2y$;
б) $2-x\leqslant 10-5x$;
г) $9{,}25y-21>24+3{,}75y$.

39. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $1\leqslant \dfrac{8+2x}{6}<3$;
в) $-5<\dfrac{4x+2}{6}<5$;
б) $-0{,}1\leqslant 0{,}3y+0{,}2<1{,}1$;
г) $1{,}6\leqslant 1{,}4-0{,}4y\leqslant 2{,}4$.

40. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $0<\dfrac{3x+3}{3}\leqslant 10$;
в) $-3\leqslant \dfrac{3+x}{8}\leqslant 3$;
б) $-0{,}2\leqslant 0{,}2-0{,}5y\leqslant 0{,}7$;
г) $0<4{,}4-10y<1{,}4$.

41. Функцію задано формулою $f(x)=4x+7$. Знайдіть усі значення аргументу x, за яких значення функції є: а) додатними; б) невід'ємними; в) від'ємними; г) недодатними.

42. Функцію задано формулою $f(x)=10-3x$. Знайдіть усі значення аргументу x, за яких значення функції є: а) додатними; б) невід'ємними; в) від'ємними; г) недодатними.

43. Розв'яжіть нерівність і вкажіть найбільше натуральне число, яке є її розв'язком.

а) $18-3(x-12)>15x$; б) $6(y-2)<40-10(y+2)$.

44. Розв'яжіть нерівність і вкажіть найменше натуральне число, яке є її розв'язком.

а) $3x+8(2x-5)>4x+35$; б) $(x-2)(x+2)>(x-2)^2$.

45. Відомо, що довжини двох сторін трикутника дорівнюють 6 см і 10 см. Укажіть проміжок значень, яких може набувати довжина третьої сторони цього трикутника.

46. Відомо, що довжини двох сторін трикутника дорівнюють 8 см і 14 см. Укажіть проміжок значень, яких може набувати довжина третьої сторони цього трикутника.

47. Знайдіть *найменше* значення виразу $2x^2+4x-1$.

48. Знайдіть *найбільше* значення виразу $3+2x-x^2$.

Високий рівень

49. Використовуючи означення, укажіть усі розв'язки нерівності. Відповідь поясніть.

а) $(x-3)^2>0$; б) $|x-1|<0$; в) $(x-2)^2\leqslant 0$; г) $(x+2)^4\geqslant 0$.

50. Використовуючи означення, укажіть усі розв'язки нерівності. Відповідь поясніть.

а) $|x+5|\leqslant 0$; б) $|x-7|>-2$; в) $(x+1)^2>0$; г) $|x+6|<-4$.

51. Чи є рівносильними нерівності? Відповідь поясніть.

а) $x^2<x$ і $x<1$; в) $(x-3)^2\leqslant 0$ і $|2x-6|\leqslant 0$;

б) $|x|<0$ і $x^2<-5$; г) $|x+2|\geqslant 0$ і $(x+1)^2\geqslant 0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

52. Чи є рівносильними нерівності? Відповідь поясніть.

а) $(x+3)^2<-2$ і $|x|<-1$;

б) $x^4>x^3$ і $x>1$;

в) $(x+5)^2\leqslant 0$ і $|x+5|\leqslant 0$;

г) $|2x|\geqslant 0$ і $(x-3)^2\geqslant 0$.

53. Розв'яжіть нерівність.

а) $(x-2)^2>(x+1)(x-3)$;

б) $(x+4)^2\leqslant(x+3)(x+5)$;

в) $(y-5)^2<(y+2)(y-4)$;

г) $(y+6)^2\geqslant(y+5)(y+7)$.

54. Розв'яжіть нерівність.

а) $(y+3)^2\leqslant(y-1)(y-3)$;

б) $(y-4)^2>(y-5)(y-3)$;

в) $(x-1)^2<(x-2)(x-4)$;

г) $(x+5)^2\leqslant(x+2)(x+8)$.

55. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{12-3x}$;

б) $u(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-5x}}$;

в) $g(x)=x\sqrt{-3-4x}$;

г) $v(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{2+10x}}$.

56. Знайдіть усі значення y, за яких вираз має зміст.

а) $\dfrac{1}{\sqrt{1+5y}}$; б) $y+\sqrt{14-7y}$; в) $(y-1)\sqrt{-6-2y}$; г) $\dfrac{1-y}{\sqrt{3-5y}}$.

57. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $-\sqrt{2}\leqslant\left(\sqrt{2}-2\right)x+2<\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{5}<\left(\sqrt{5}-2\right)x-2\leqslant\sqrt{5}$;

58. Розв'яжіть подвійну нерівність.

а) $1-\sqrt{3}<\left(\sqrt{3}-1\right)t+1\leqslant\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{7}\leqslant\left(\sqrt{7}-3\right)t-3<\sqrt{7}$;

59. Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $x^2+6x+a=0$:
а) має два різні корені; б) не має коренів; в) має корені.

60. Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $5x^2-12x+3a=0$:
а) має корені; б) не має коренів; в) має два різні корені.



Цікавинки від дідуся Тараса

Ви вже знаєте, що для запису множини розв'язків нерівності, яка не має розв'язків, використовують символ $\varnothing$. Наприклад, так можна записати множину розв'язків нерівності $|x|<-10$. Однак іноді в інтернеті можна побачити запис $x\in\varnothing$ як відповідь до згаданої нерівності. Але такий запис є математично некоректним. Справді, за означенням порожня множина $(\varnothing)$ — це множина, яка не містить жодного елемента. Тому очевидно, що жоден елемент x не може належати цій множині, а запис $x\in\varnothing$ саме це і стверджує. Отже, запис $x\in\varnothing$ не можна вживати як відповідь до нерівності, яка не має розв'язків.

Також в інтернеті як відповідь, наприклад, до нерівності $x<5$ можна побачити запис $x\in(-\infty;5)$. І він теж є математично некоректним, оскільки лише стверджує, що значення змінної x належить числовому проміжку $(-\infty;5)$, але не стверджує, що маються на увазі *всі* числа із цього проміжку. Тому у відповіді до нерівності $x<5$ має бути записано або лише числовий проміжок $(-\infty;5)$ (як множина розв'язків нерівності), або вислів «усі $x\in(-\infty;5)$».

До речі, математики для скорочення записів замість слів *«усі»*, *«будь-який»*, *«довільний»* тощо вживають знак $\forall$. Його називають квантором загальності. А для заміни слів *«існує»*, *«наявний»* тощо вживають квантор існування — $\exists$. Тому як відповідь до нерівності $x<5$ замість вислову «усі $x\in(-\infty;5)$» математики можуть писати $\forall x\in(-\infty;5)$.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи траплявся вам в інтернеті запис $x\in\varnothing$? Якщо так, то радимо на відповідному ресурсі зробити коментар або зауваження щодо математичної некоректності такого запису. Дбаймо разом про чистоту математичної мови!
2. Дізнайтеся більше про символи для скорочення математичних записів. Підготуйте невелике повідомлення.
3. Чи використовуєте ви власні спеціальні символи для скорочення математичних записів? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз.

   а) $\dfrac{4x^2-16}{2x^2-8x+8}$; б) $\dfrac{x^2-2x-3}{9-x^2}$.

2. Розв'яжіть рівняння.

   а) $x+\sqrt{x}-20=0$; б) $\sqrt{-2-3x}=5$.

3. Точки K і L належать відрізку AB, причому $AK=KL=LB$. Знайдіть координати точок K і B, якщо $A(-3;1)$, $L(0;4)$.

4. Побудуйте в ПДСК пряму l, задану рівнянням $2x+y-4=0$. Які з точок $A(3;-2)$, $B(1;-1)$, $C(5;0)$, $D(-1;6)$, $M(0;1)$, $P(7;2)$ належать прямій l? Для точок, що не належать прямій l, визначте знак виразу $2x+y-4$ в разі підстановки їхніх координат у цей вираз замість змінних. Висловіть припущення щодо розташування цих точок відносно прямої l залежно від знака згаданого виразу.

5. Задано послідовність чисел: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... Знайдіть закономірність і запишіть наступні два числа із цієї послідовності.

§ 6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною. Лінійні нерівності з двома змінними



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Тетянко, а ти знаєш, що у нашому місті нещодавно з'явилася кав'ярня «Сюрприз». Ціни на напої там написані на банері, а от ціни на тістечка — це сюрприз! Їх дізнаєшся лише тоді, коли оплачуєш рахунок.



Знаю, ми якраз були там із татом і Андрійком минулої суботи. Узяли великий чайник зеленого чаю за 160 грн і три тістечка «Мегасюрприз». Не зауважила, скільки тато за це заплатив, але точно більше 400 грн.



А ми з мамою були в неділю зранку. Взяли два лате по 50 грн за чашку і два тістечка «Мегасюрприз». І я помітив, що мама заплатила за це все менше 300 грн. Цікаво, скільки ж коштує «Мегасюрприз»?



Думаю, що точно ми не дізнаємось, але якщо вважати, що тістечко коштує x грн, то твоя мама заплатила $(2x+100)$ грн, а мій тато — $(3x+160)$ грн. Ми знаємо, що $2x+100<300$ і $3x+160>400$. Тепер потрібно знайти всі значення змінної x, для яких обидві ці нерівності виконуються *одночасно*. Так ми й дізнаємось приблизну ціну тістечка «Мегасюрприз».



Слухай, коли ми шукали спільні розв'язки двох рівнянь із двома змінними, то записували це у вигляді *системи* цих рівнянь. Запишімо й це у вигляді системи двох нерівностей з однією змінною: $\begin{cases}2x+100<300,\\3x+160>400.\end{cases}$ Обидві нерівності легко розв'язати. Наприклад, перша нерівність рівносильна нерівності $2x<200$, звідки $x<100$. Тобто тістечко «Мегасюрприз» коштує менше від 100 грн.



Точно! А друга нерівність рівносильна нерівності $3x>240$, звідки $x>80$. Тобто тістечко «Мегасюрприз» коштує понад 80 грн. Оскільки ці дві нерівності мають виконуватись одночасно,

то їх можна записати у вигляді $80 < x < 100$. Тепер ми знаємо, що «Мегасюрприз» коштує більше за 80 грн, але менше від 100 грн.



Прикольно! От ми й розсекретили той «Мегасюрприз». До речі, відповіддю до системи нерівностей, яку я записав, природно вважати проміжок $(80;100)$. Цікаво, чи завжди розв'язком системи нерівностей буде обмежений числовий проміжок? Мені чомусь здається, що може бути й необмежений.



Мабуть, твоя правда, але надійніше буде поцікавитись у вчителів. Крім того, мені ще цікаво, чи є нерівності та системи нерівностей із двома змінними? Про такі рівняння та системи рівнянь ти вже згадував. А як щодо нерівностей?



І справді, багато цікавих запитань виникає, але про все по черзі. Якщо потрібно знайти всі спільні розв'язки кількох нерівностей, то говорять, що потрібно розв'язати систему цих нерівностей. Системи нерівностей, як і системи рівнянь, позначають фігурною дужкою. Наприклад, якщо потрібно знайти всі спільні розв'язки нерівностей $3x+2<x$ і $4x>5(x-7)$, це записують так: $\begin{cases} 3x+2<x, \\ 4x>5(x-7). \end{cases}$



Під час *розв'язування систем нерівностей з однією змінною* зазвичай діють так:

- розв'язують кожну нерівність системи окремо;
- зображують на числовій прямій проміжки, що є розв'язками кожної з нерівностей системи;
- знаходять точки числової прямої, що належать усім цим проміжкам;
- записують відповідь.

Наприклад, розв'яжемо вже згадану систему нерівностей $\begin{cases} 3x+2<x, \\ 4x>5(x-7). \end{cases}$

Розв'яжемо першу нерівність: $3x+2<x$, $3x-x<-2$, $2x<-2$, $x<-1$. Розв'язком цієї нерівності є проміжок $(-\infty;-1)$.

Розв'яжемо другу нерівність: $4x > 5(x-7)$, $4x > 5x-35$, $4x-5x > -35$, $-x > -35$, $x < 35$. Розв'язком цієї нерівності є проміжок $(-\infty; 35)$.

Зобразимо ці проміжки на числовій прямій. При цьому розв'язок першої нерівності заштрихуємо згори від числової прямої, а другої — знизу (див. рис. 6.1). Нас цікавлять точки числової прямої, які містять обидва види штрихування, тобто всі точки проміжку $(-\infty; -1)$. Цей проміжок і буде розв'язком даної системи нерівностей.

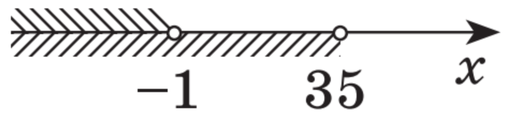


Рис. 6.1



Виходить, що на спільних точках числової прямої утворюється така собі «різдвяна ялинка»! До речі, нашу систему теж можна було розв'язати так само: спочатку зобразити й заштрихувати проміжки $(-\infty; 100)$ і $(80; +\infty)$ (див. рис. 6.2), а потім записати як відповідь проміжок, де утворилася «різдвяна ялинка»: $(80; 100)$.

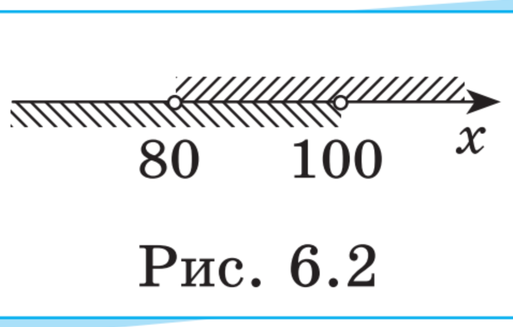


Рис. 6.2



Дуже образно, Петрику. Однак якщо система нерівностей містить більше двох нерівностей, то однієї «ялинки» буде недостатньо. Наприклад, розв'яжемо систему нерівностей $\begin{cases} x-3 \geqslant 1, \\ -4x \leqslant 8, \\ 2x+1 < 15. \end{cases}$

Знову розв'яжемо кожну з нерівностей окремо. Перша: $x-3 \geqslant 1$, $x \geqslant 4$ або $[4; +\infty)$; друга: $-4x \leqslant 8$, $x \geqslant -2$ або $[-2; +\infty)$; третя: $2x+1 < 15$, $2x < 14$, $x < 7$ або $(-\infty; 7)$. Зобразимо на числовій прямій усі три проміжки, причому перші два позначимо штрихуванням у різних напрямках над числовою прямою, а третій — штрихуванням під нею (див. рис. 6.3). *Розв'язком нашої системи буде та частина числової прямої, що містить усі три види штрихування*, тобто проміжок $[4; 7)$.

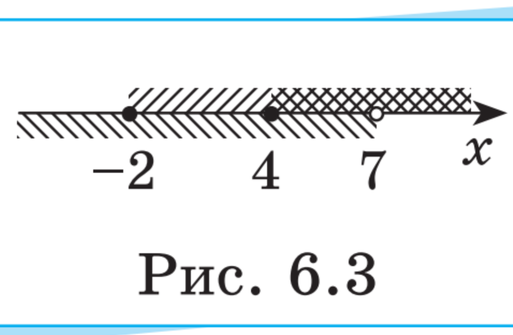


Рис. 6.3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Хоч це й трохи довше, але можна було б обійтися й лише Петриковими «ялинками». Наприклад, спочатку знайти «ялинкою» розв'язок системи перших двох нерівностей, а потім, уже на іншому рисунку, теж «ялинкою» знайти спільний розв'язок системи перших двох нерівностей і третьої. Ось, я зобразила, який вигляд це могло б мати (див. рис. 6.4).

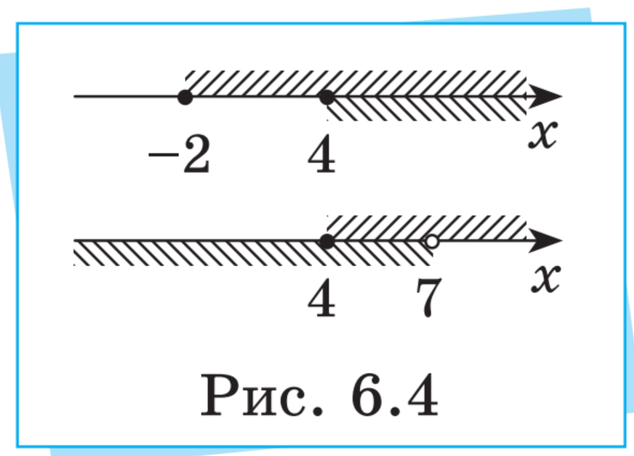


Рис. 6.4



Авжеж, Тетянко, маєш рацію, так теж можна робити. Узагалі розв'язування систем лінійних нерівностей має багато цікавих особливостей.

Більше прикладів
із такими особливостями:
rnk.com.ua/112128







Нерівності можуть бути і з двома змінними. Наприклад, якщо потрібно знайти всі значення змінних x і y, які задовольняють нерівність $y > x^2$, то цю нерівність називають нерівністю з двома змінними.



Розв'язком нерівності з двома змінними x і y називають впорядковану пару чисел $(x; y)$, які в разі підстановки замість відповідних змінних у нерівність дають правильну числову нерівність.

Наприклад, пара чисел $(2; 5)$ є розв'язком нерівності $y > x^2$, бо $5 > 2^2$, а пара чисел $(1; 1)$ не є розв'язком цієї нерівності, бо нерівність $1 > 1^2$ не є правильною.



Розв'язати нерівність із двома змінними означає знайти множину всіх упорядкованих пар чисел, що є її розв'язками. Як і для нерівностей з однією змінною, ця множина може бути порожньою.

Наприклад, очевидно, що нерівність $x^2+y^2+2<0$ не виконується для будь-яких значень змінних x і y. Також можна говорити, що ця нерівність не має розв'язків.



Найпростішими нерівностями з двома змінними x і y є лінійні нерівності з двома змінними. Вони мають вигляд $ax+by+c<0$, $ax+by+c>0$, $ax+by+c\leqslant 0$, $ax+by+c\geqslant 0$, де a, b, c — деякі числа. Наприклад, нерівності $2x-y+4\geqslant 0$ і $x+3y-6<0$ є лінійними нерівностями з двома змінними.



Множини розв'язків нерівностей із двома змінними природно зображувати на координатній площині в деякій ПДСК, позначаючи на ній усі точки $(x;y)$, які є розв'язками заданої нерівності з двома змінними.

Наприклад, зобразимо множину всіх розв'язків нерівності $2x-y+4\geqslant 0$. Ви вже знаєте, що множина розв'язків рівняння з двома змінними $2x-y+4=0$ задає на координатній площині пряму. Будемо називати це рівняння прямої рівнянням, що відповідає лінійній нерівності з двома змінними.

Можна довести: множина всіх розв'язків лінійної нерівності з двома змінними задає одну з двох півплощин, на які розбиває площину пряма, рівняння якої відповідає цій лінійній нерівності.



Отже, зобразимо в ПДСК пряму $2x-y+4=0$ (рис. 6.5). Щоб визначити, яка саме з двох півплощин задається розв'язками нерівності $2x-y+4\geqslant 0$, оберемо так звану тестову точку та підставимо її координати в ліву частину нерівності. Наприклад, візьмемо точку $M(1;1)$. Оскільки $2\cdot 1-1+4=5\geqslant 0$, то точка M належить множині розв'язків нерівності $2x-y+4\geqslant 0$. Отже, координати всіх інших точок півплощини, в якій лежить точка M відносно прямої $2x-y+4=0$, також будуть розв'язками цієї нерівності.

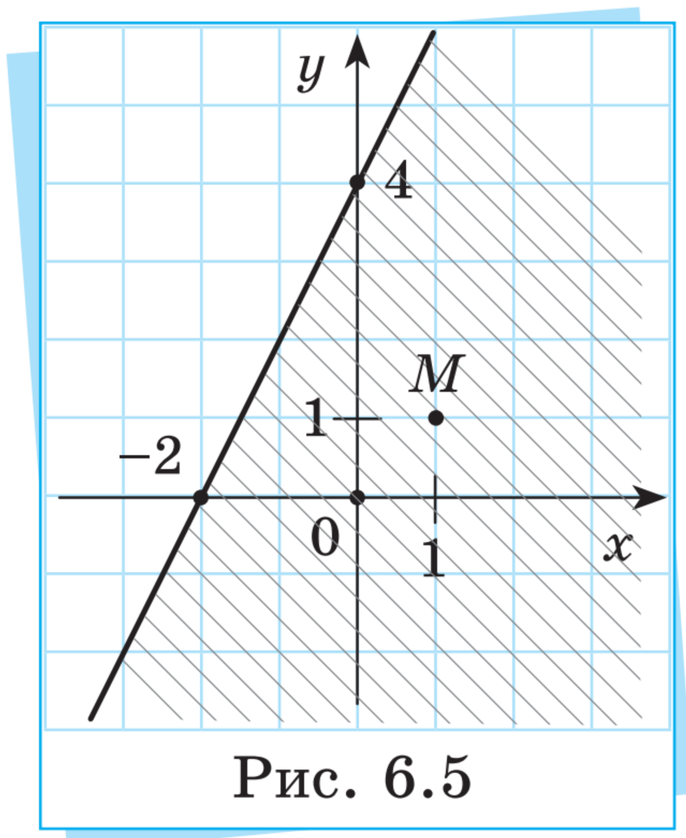


Рис. 6.5

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



У наведеному прикладі пряма $2x-y+4=0$ належить зображенню множини розв'язків, бо нерівність $2x-y+4\geqslant 0$ є нестрогою. Для строгих лінійних нерівностей на кшталт $x+3y-6<0$ відповідна пряма не буде належати зображенню множини розв'язків. У цьому випадку таку пряму зазвичай зображують *пунктиром*.

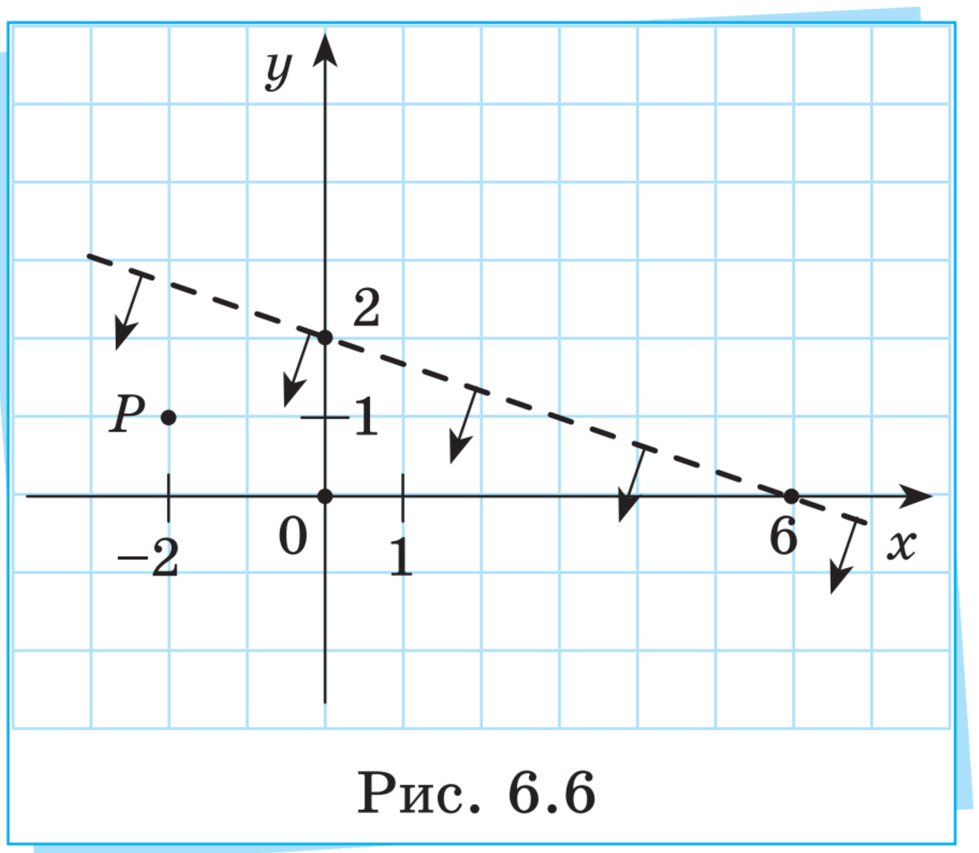


Рис. 6.6

Також іноді для зручності півплощину, яка зображає всі розв'язки лінійної нерівності з двома змінними, не заштриховують, а просто позначають *стрілками*, які йдуть від прямої, що її визначає. Наприклад, множину розв'язків нерівності $x+3y-6<0$ зображено на рис. 6.6 саме так. Переконайтесь у правильності зображення цієї множини *самостійно*.



Уважні учні й учениці помітили, що в обох нерівностях $2x-y+4\geqslant 0$ і $x+3y-6<0$ півплощина, яка зображає всі розв'язки нерівності, лежить «нижче» прямої, яка визначає цю півплощину, попри те що знаки нерівностей — протилежні. Тому радимо не покладатися на інтуїцію під час визначення відповідної півплощини, а використовувати для цього тестові точки.

Більше про зображення множин розв'язків лінійних нерівностей: rnk.com.ua/111831



Перевірте себе!

1. Що мають на увазі, коли говорять «потрібно розв'язати систему нерівностей з однією змінною»?

2. Як зазвичай розв'язують системи двох і більше нерівностей з однією змінною?

3. Наведіть приклади нерівностей з двома змінними.

4. Дайте означення розв'язку нерівності з двома змінними. Наведіть приклади.

5. Що означає розв'язати нерівність із двома змінними?

6. Яку нерівність із двома змінними називають лінійною? Що є множиною розв'язків такої нерівності?

7. Як зобразити розв'язок лінійної нерівності з двома змінними на координатній площині?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. З'ясуйте, яке значення змінної y є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} y \leqslant -3, \\ y < 9. \end{cases}$

а) $y = -9$; б) $y = -5$; в) $y = 0$; г) $y = 10$; д) $y = -3$.

2. З'ясуйте, яке значення змінної x є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x < 8, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$

а) $x = -10$; б) $x = -5$; в) $x = 0$; г) $x = 5$; д) $x = 10$.

3. Запишіть проміжок, який є спільною частиною штрихування над числовою прямою та під нею (рис. 1).

4. Запишіть проміжок, який є спільною частиною штрихування над числовою прямою та під нею (рис. 2).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

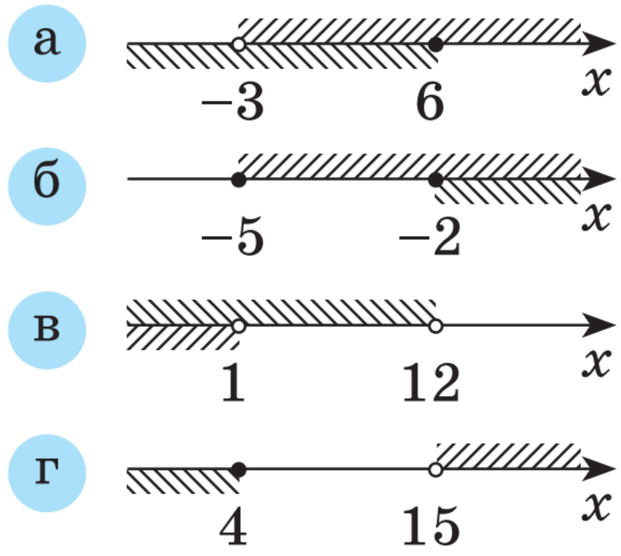


Рис. 1

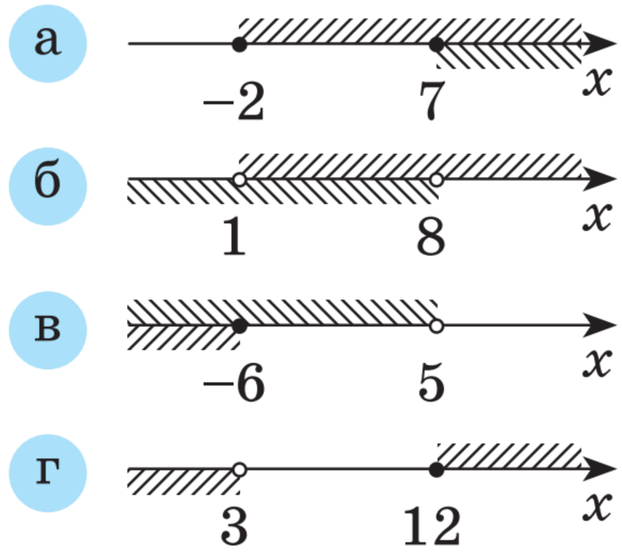


Рис. 2

5. Для кожної з двох нерівностей системи заштрихуйте на числовій прямій відповідний їй проміжок. Запишіть проміжок, який є спільною частиною штрихувань.

а) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > 4, \\ x > -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

6. Для кожної з двох нерівностей системи заштрихуйте на числовій прямій відповідний їй проміжок. Запишіть проміжок, який є спільною частиною штрихувань.

а) $\begin{cases} y \leqslant -1, \\ y < 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < 9, \\ y > 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y > 0, \\ y \geqslant 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \leqslant -5, \\ y \geqslant 3. \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} y > 5, \\ y \geqslant -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant 8, \\ y > -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y > 9, \\ y < 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \leqslant 6, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x > -7, \\ x \leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x < -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 2, \\ x > 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geqslant 9, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$

9. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x + 3 > 2, \\ x \leqslant 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x - 2 < -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x > 8, \\ x > 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geqslant 5; \\ 3x \leqslant 9. \end{cases}$

10. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 5x \leqslant 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3 \leqslant 6, \\ x < 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x > 12, \\ x > -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 5 > 0; \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

11. Кількість дописів лідерки шкільного парламенту на її сторінці у фейсбуці становить від 3 до 8 за день. Позначимо кількість дописів змінною k. Опишіть цю ситуацію за допомогою системи нерівностей.

12. Вартість однієї хвилини поїздки електросамокатом залежить від компанії прокату і становить від 4 до 7 грн включно. Позначимо вартість змінною s. Опишіть цю ситуацію за допомогою системи нерівностей.

13. Чи є пара чисел $(-2;3)$ розв'язком нерівності з двома змінними?

а) $2x-3y+4>0$; б) $x+4y-6>0$; в) $3x-y+5<0$.

14. Чи є пара чисел $(5;2)$ розв'язком нерівності з двома змінними?

а) $4x-2y+5>0$; б) $x-6y+1<0$; в) $2x-7y+1>0$.

15. Яка пара чисел є розв'язком нерівності з двома змінними $4x-2y+6\geqslant 0$?

а) $(0;0)$; б) $(5;-2)$; в) $(1;5)$; г) $(-2;3)$.

16. Яка пара чисел є розв'язком нерівності з двома змінними $x+3y-10\leqslant 0$?

а) $(5;0)$; б) $(4;3)$; в) $(7;1)$; г) $(-4;2)$.

Середній рівень

17. Запишіть систему нерівностей, яка відповідає рис. 3.

18. Запишіть систему нерівностей, яка відповідає рис. 4.

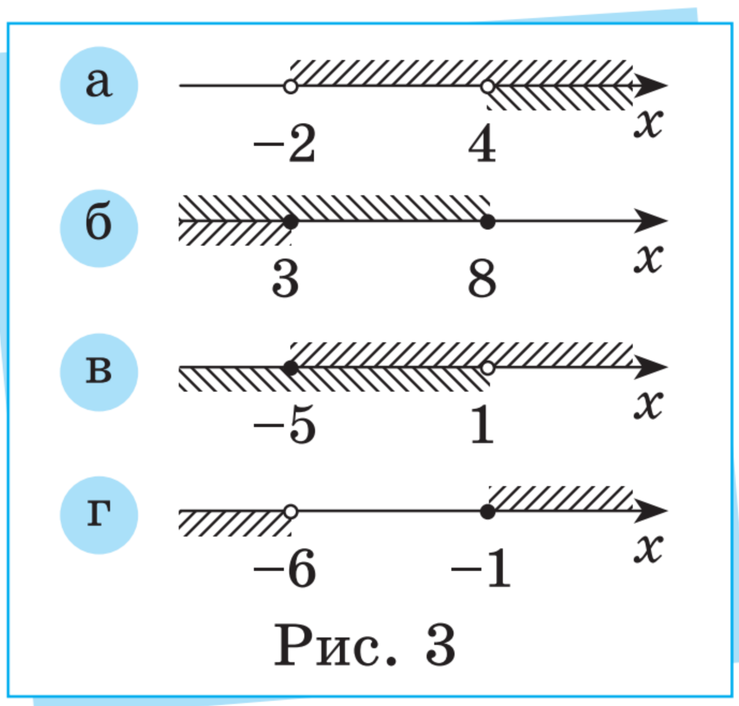


Рис. 3

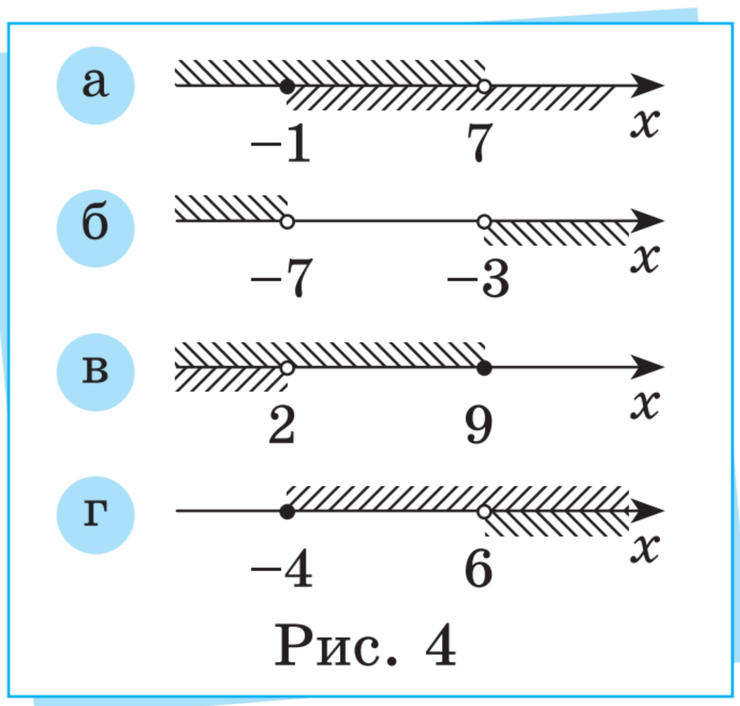


Рис. 4

19. Яке значення змінної y є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2y < 7, \\ y + 6 \geqslant 4? \end{cases}$

а) $y = -3$; б) $y = -2$; в) $y = 0$; г) $y = 3$; д) $y = 5$.

20. Яке значення змінної x є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x + 7 \geqslant 2, \\ 3x > -6? \end{cases}$

а) $x = -5$; б) $x = -3$; в) $x = 0$; г) $x = 2$; д) $x = 7$.

21. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 2x \geqslant -16, \\ 4 - x < 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x \leqslant 15, \\ x - 1 > 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x < 40, \\ 6 - x \geqslant 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x > 20, \\ x + 4 < 8. \end{cases}$

22. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 4x \geqslant 8, \\ 3 - x < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x \leqslant -22, \\ x - 8 > -26; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x < 21, \\ 10 - x \geqslant 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x > 28, \\ x + 7 < 3. \end{cases}$

23. Побудуйте графік прямої $x + 2y - 6 = 0$. Чи є тестова точка $(2; 1)$ розв'язком нерівності $x + 2y - 6 \geqslant 0$? Заштрихуйте півплощину, яка задається множиною розв'язків нерівності $x + 2y - 6 \geqslant 0$.

24. Побудуйте графік прямої $2x - y + 4 = 0$. Чи є тестова точка $(-2; 3)$ розв'язком нерівності $2x - y + 4 \leqslant 0$? Заштрихуйте півплощину, яка задається множиною розв'язків нерівності $2x - y + 4 \leqslant 0$.

25. Побудуйте графік прямої $x - y - 3 = 0$ штриховою лінією. Чи є тестова точка $(1; 4)$ розв'язком нерівності $x - y - 3 < 0$? Позначте стрілками півплощину, яка задається множиною розв'язків нерівності $x - y - 3 < 0$.

26. Побудуйте графік прямої $x + y + 4 = 0$ штриховою лінією. Чи є тестова точка $(2; -1)$ розв'язком нерівності $x + y + 4 > 0$? Позначте стрілками півплощину, яка задається множиною розв'язків нерівності $x + y + 4 > 0$.

27. За 1,4 кг яблук, ціна яких x грн за кілограм, і за 0,8 кг груш, ціна яких y грн за кілограм, разом заплатили не більше 150 грн. Опишіть цю ситуацію за допомогою нерівності з двома змінними.

28. За x кг яблук, ціна яких 38 грн за кілограм, і за y кг груш, ціна яких 79 грн за кілограм, разом заплатили понад 200 грн. Опишіть цю ситуацію за допомогою нерівності з двома змінними.

29. Для виготовлення однієї великої окопної свічки потрібно 300 грамів парафіну, для малої — 125 грамів. На виготовлення x великих і y малих свічок витратили не більше 20 кг парафіну. Опишіть цю ситуацію за допомогою нерівності з двома змінними.

30. Для виготовлення однієї великої окопної свічки потрібно x грамів парафіну, для малої — y грамів. На виготовлення 50 великих і 100 малих свічок витратили менше 30 кг парафіну. Опишіть цю ситуацію за допомогою нерівності з двома змінними.

Достатній рівень

31. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 4x-5<2x+3, \\ 12-9x\leqslant 3x-24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 17x-2>12x-1, \\ 3-9x<1-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-6\leqslant -4(x-1), \\ 2(x+1)-4\leqslant 2(3x-4); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6+6{,}2x\geqslant 12-1{,}8x, \\ 2-x\geqslant 3{,}5-2x. \end{cases}$

32. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 3x+7\leqslant 9+5x, \\ 2x+2<9+x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+2\leqslant x-4, \\ 3x+12<x+17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6(x+11)+4x>-x, \\ 2(x+2)\geqslant 3(x-4); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3{,}6-1{,}2x\geqslant 0{,}8x+6, \\ 8x-1<6x+1. \end{cases}$

33. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x>-4, \\ x<11, \\ x\leqslant 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ x<10, \\ x\geqslant \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

34. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} y \leqslant -2{,}5, \\ y > -14, \\ y < -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant -\frac{3}{2}, \\ y < \frac{2}{3}, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

35. Знайдіть область визначення функції.

а) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$; б) $y = \sqrt{x + 5} + \sqrt{4 - x}$.

36. Знайдіть область визначення функції.

а) $y = \sqrt{3x + 2} + \sqrt{3x - 1}$; б) $y = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{1 - x}$.

37. Запишіть подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей та розв'яжіть її.

а) $-2 < 3x - 4 < 5$; в) $1{,}2 \leqslant 2 - 4x \leqslant 2{,}8$;

б) $-5 < 3x - 2 < 10$; г) $0{,}4 < 2x + 1 < 0{,}6$.

38. Запишіть подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей розв'яжіть її.

а) $-2 < 5x + 3 \leqslant 18$; в) $4{,}4 \leqslant 1 - 2x \leqslant 4{,}8$;

б) $3 < 2 - x < 5$; г) $0{,}7 < 3 - 2x < 1{,}2$.

39. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності.

а) $2x - y + 1 > 0$; б) $3x - y - 6 < 0$; в) $x + y - 1 \geqslant 0$.

40. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності.

а) $-2x - y - 4 \geqslant 0$; б) $2x - y + 6 \leqslant 0$; в) $-x + y + 5 > 0$.

41. Маса 10 однакових цукерок не перевищує 174 г, а маса 5 таких цукерок — не менша 75 г. Скільки може важити одна цукерка, якщо її маса виражається цілою кількістю грамів?

42. Вартість оренди двох однакових велосипедів на одну добу не перевищує 850 грн, а вартість оренди трьох таких велосипедів на добу становить не менше 885 грн. Укажіть проміжок для числа, яким може виражатися вартість оренди одного велосипеда на добу.

Високий рівень

43. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 2-3x>5x-14, \\ 4x-1\leqslant 7x+14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x-1)\leqslant 2x-14, \\ 2x-6\geqslant 5(x+2); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-6\leqslant -4(x-1), \\ 2(x+1)-4\leqslant 2(3x-4); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x+1>2(x-3), \\ 4(x-2)\geqslant 5x+1. \end{cases}$

44. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 4-5x\geqslant 2x-15, \\ 5x-3>2x+17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x-2<2(x+4), \\ 4(2x-1)\geqslant 5x-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6(x+11)+4x>-x, \\ 2(x+2)\geqslant 3(x-4); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x+2\geqslant 3(x-2), \\ 3(x-2)\geqslant 5x-12. \end{cases}$

45. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{x}{4}<\frac{11}{6}, \\ 6(x-1)\geqslant 18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x+9}{6}\leqslant 4-\frac{3-x}{3}, \\ 8x+7>3(x-2)-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-3}{3}<\frac{3-x}{2}, \\ 2(x+3)+\frac{1}{2}\geqslant 6-\frac{x}{2}. \end{cases}$

46. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{x}{3}\leqslant \frac{5}{12}, \\ 7(x+13)>14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3x-5}{2}>\frac{x-1}{5}+1, \\ 6x-11\leqslant 2(x-1)+15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{3}>\frac{4+x}{5}, \\ \frac{x-1}{4}<\frac{x}{6}. \end{cases}$

47. Розв'яжіть систему нерівностей. Знайдіть кількість цілих розв'язків цієї системи нерівностей.

а) $\begin{cases} -3,6x\leqslant 9, \\ 2x^2-5<x(2x-1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x\leqslant -1,8, \\ x(x-3)\leqslant x^2+30. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

48. Розв'яжіть систему нерівностей. Знайдіть кількість цілих розв'язків цієї системи нерівностей.

а) $\begin{cases} 3x-10 \leqslant \dfrac{x}{2}, \\ (x-1)^2 \leqslant x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-2 > 3,4-2x, \\ x(x-2) \leqslant x^2-4x+3. \end{cases}$

49. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 2-3x > 5x-14, \\ 4x+1 \leqslant 11-6x, \\ 3-x < 15+2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5-7x < 3x-4, \\ 2x-1 \geqslant 13-5x, \\ 1-x < 16+4x. \end{cases}$

50. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} 3-2x \leqslant 4x-15, \\ 7x+2 \geqslant 10x-16, \\ 4-5x < 18+2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-3x > 7x-4, \\ 8x+1 \leqslant 22+15x, \\ 9-x < 15+3x. \end{cases}$

51. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{15-3x}+\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}}$; в) $g(x)=\dfrac{\sqrt{6+4x}}{\sqrt{24-6x}}$;

б) $u(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-3x}}-\dfrac{3}{\sqrt{3+2x}}$; г) $v(x)=\dfrac{\sqrt{25-5x}-x}{\sqrt{3-10x}}$.

52. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3x+9}}-\sqrt{7-2x}$; в) $g(x)=\dfrac{\sqrt{6+2x}}{\sqrt{4-6x}}$;

б) $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6-3x}}-\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}$; г) $v(x)=\dfrac{\sqrt{5-5x}+x}{\sqrt{3-2x}}$.

53. Запишіть дану подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей та розв'яжіть її.

а) $5-2x < 3-4x < 9-x$; в) $1-2x \leqslant 2-4x < 3-8x$;

б) $2-x < 5x-1 \leqslant 3x+5$; г) $19-7x \leqslant 2x+1 \leqslant 6+x$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

54. Запишіть дану подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей та розв'яжіть її.

а) $9-3x<1+5x\leqslant 10-x$;

б) $2-3x\leqslant 5-2x<3-4x$;

в) $5-4x\leqslant 7-3x\leqslant 6+7x$;

г) $13-8x<2x+7<16+x$.

55. Знайдіть усі значення параметра a, за яких задана система нерівностей $\begin{cases} a-2x>3, \\ 5+4x>15 \end{cases}$ а) має розв'язки; б) не має розв'язків.

56. Знайдіть усі значення параметра a, за яких задана система нерівностей $\begin{cases} 5-x>a+3x, \\ 3x+7>17-7x \end{cases}$ а) має розв'язки; б) не має розв'язків.

57. Зобразіть у ПДСК множину всіх розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x-y+3\geqslant 0, \\ x\leqslant 1, \\ y\geqslant 1. \end{cases}$$

Якою геометричною фігурою є ця множина?

58. Зобразіть у ПДСК множину всіх розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x+3y-4\leqslant 0, \\ x\geqslant -3, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Якою геометричною фігурою є ця множина?



Цікавинки від дідуся Тараса

Лінійні нерівності з двома змінними часто застосовують для розв'язування практичних задач. Розглянемо одну з них.

Задача. Видавництво планує видати навчальні посібники з біології та історії. Собівартість видання одного посібника з біології становить 200 грн, а з історії — 250 грн. Прибуток видавництва від реалізації одного посібника з біології становитиме 150 грн, а з історії — 120 грн. Видавництво має обігові кошти для фінансування видання цих посібників у розмірі 100 000 грн на місяць і потужність власної типографії 30 000 примірників на місяць. Попереднє замовлення, яке

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

підлягає обов'язковому виконанню, становить по 12 000 посібників кожного виду на місяць.

Потрібно скласти оптимальний план щомісячного випуску посібників, тобто визначити, скільки посібників кожного виду слід випускати щомісяця, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Складемо математичну модель цієї задачі. Нехай щомісяця видавництво випускає x посібників з біології та y посібників з історії. За умовою собівартість випуску цих посібників становить $(200x+250y)$ грн, а прибуток від їх реалізації — $(150x+120y)$ грн. Собівартість випущених посібників не може перевищувати обсяг обігових коштів, тобто $200x+250y\leqslant 100\,000$, а загальна кількість випущених посібників на місяць не може перевищувати потужності типографії, тобто $x+y\leqslant 30\,000$. Також за умовою $x\geqslant 12000$, $y\geqslant 12000$. Тепер потрібно знайти такий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} 200x+250y\leqslant 100\,000, \\ x+y\leqslant 30\,000, \\ x\geqslant 12\,000, \\ y\geqslant 12\,000, \end{cases}$ для якого значення виразу $150x+120y$ буде *найбільшим*.

Задачі на знаходження найбільшого або найменшого значення виразу за певних обмежень на змінні, що містить цей вираз, називають *задачами оптимізації*. Якщо вираз є лінійним відносно змінних, які він містить, а обмеження також задаються лінійними рівняннями чи нерівностями, то такі задачі називають *задачами лінійного програмування*. Їх використовують в економіці й бізнесі, на виробництві, в логістиці, енергетиці, інженерних задачах тощо. За створення і розвиток теорії лінійного програмування математики *Леонід Канторович* (1912–1986) і *Тьяллінг Кумпанс* (1910–1985) у 1975 р. були відзначені Нобелівською премією в галузі економіки.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Дізнайтеся більше про Нобелівську премію та галузі науки, за досягнення в яких її вручають. Підготуйте невелике повідомлення.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. На заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя або вчительки математики спробуйте знайти розв'язок задачі, наведеної в «Цікавинках від дідуся Тараса». Якою геометричною фігурою є зображення множини розв'язків нерівності із задачі лінійного програмування, до якої звелася початкова задача економічного змісту?

3. Використовуючи додаткові джерела інформації, наведіть приклади інших практичних задач, що зводяться до задач лінійного програмування. Розв'яжіть ці задачі на заняттях математичного гуртка.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. В одній із кав'ярень протягом тижня провели аналіз споживчих переваг своїх постійних відвідувачів щодо видів кави, яку вони купують. Дані про кількість відвідувачів, що обрали той чи інший вид кави, подано в таблиці.

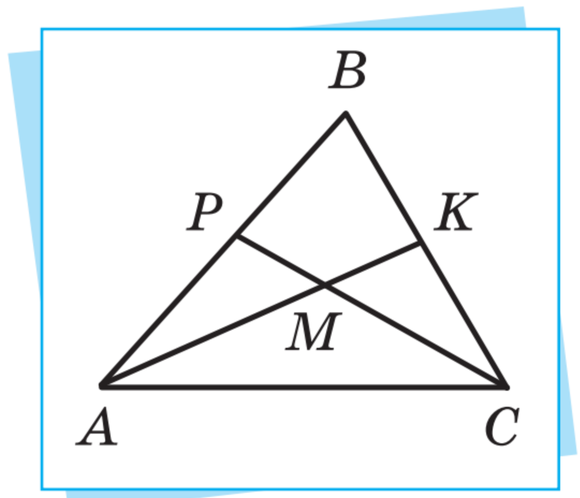
Вид кави	Еспресо	Американо	Капучино	Латте	Разом
Кількість відвідувачів	320	460	250	170	1200

Знайдіть:

а) який напій є найбільш популярним і найменш популярним у кав'ярні;

б) наближене значення ймовірності (з точністю до сотих) того, що постійний відвідувач цієї кав'ярні під час наступного візиту вибере капучино.

2. Медіани AK і CP трикутника ABC перетинаються в точці M (див. рисунок). Знайдіть довжини цих медіан, якщо $PM = 3$ см, $AM = 7$ см.



3. Розв'яжіть рівняння: $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} = 2$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. У деякій ПДСК задано точки $O(0;0)$, $A(3;a)$, $B(1;4)$ і $C(-1;-2)$. За якого значення параметра a вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{OC}$ будуть колінеарними?

5. За допомогою графічного калькулятора побудуйте графік функції $y=x^2$, а також графіки функцій: $y=x^2+3$, $y=x^2-3$, $y=(x-3)^2$, $y=(x+3)^2$, $y=-x^2$, $y=3x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$. Висловіть гіпотези щодо того, за допомогою яких геометричних перетворень площини можна отримати з графіка функції $y=x^2$ кожен з решти наведених графіків функцій.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 2



rnk.com.ua/114531

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть вираз, що має *найбільше* значення.

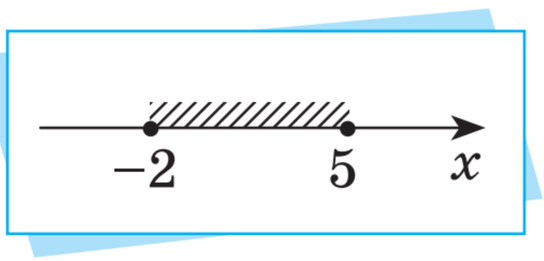
А	Б	В	Г
$(1+2):4$	$0{,}14\cdot 5$	$4:(2+3)$	$7{,}8:10$

2. Відомо, що $a>b$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г
$-2a>-2b$	$a-2<b-2$	$2a<2b$	$a+2>b+2$

3. Укажіть проміжок, який зображено (заштриховано) на рисунку.

А	Б	В	Г
$(-2;5)$	$[-2;5]$	$(-2;5]$	$[-2;5)$



4. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x^2 < -4x$.

А	Б	В	Г	Д
3	-5	0	5	-3

5. Укажіть нерівність, розв'язком якої є проміжок $(-\infty; -6]$.

А	Б	В	Г	Д
$-2x \geqslant 12$	$2x < -12$	$2x \leqslant 12$	$-2x > 12$	$2x \geqslant -12$

6. Укажіть систему нерівностей, що *не має* розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} x > 5, \\ x < 10; \end{cases}$	$\begin{cases} x < -5, \\ x < -10; \end{cases}$	$\begin{cases} x > -5, \\ x < -10; \end{cases}$	$\begin{cases} x < -5, \\ x > -10; \end{cases}$	$\begin{cases} x > 5, \\ x > 10. \end{cases}$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Згідно з правилами міжнародних змагань з європейського футболу, футбольне поле повинно мати форму прямокутника, довжина якого може бути в межах від 100 до 110 метрів, а ширина — від 64 до 75 метрів. Знайдіть межі, в яких може бути периметр футбольного поля. У відповідь запишіть різницю між максимально допустимим та мінімально допустимим периметрами футбольного поля.

8. Розв'яжіть подвійну нерівність $12 \leqslant 4x + 1 \leqslant 32$. У відповідь запишіть *кількість* цілих чисел, що є розв'язками цієї нерівності.

9. Знайдіть *найменше* значення виразу $2x^2 - 12x + 35$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Відомо, що $11<m<12$, $8<p<9$. Оцініть значення величин: $m+p$; $m-p$; $m\cdot p$; $\dfrac{m}{p}$.

11. Доведіть, що для будь-якого значення c виконується нерівність $(c+1)(c+3)<(c+2)^2$.

12. Розв'яжіть нерівність: $3x+2(x-1)\geqslant 7x+4$.

13. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}3x+1>-20,\\2-x\geqslant 8.\end{cases}$

14. Зобразіть у ПДСК множину всіх розв'язків системи нерівностей $\begin{cases}x+2y-4\leqslant 0,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant -2.\end{cases}$ Якою геометричною фігурою є ця множина?

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Доведіть, що правильний дріб із додатними чисельником і знаменником збільшується, якщо його чисельник і знаменник збільшити на те саме додатне число, а неправильний дріб, у якого чисельник не дорівнює знаменнику, — зменшується.

2. Доведіть, що коли $a>1$ і $b>1$, то $ab+1>a+b$.

3. Доведіть нерівності, пов'язані з модулями.

а) $a\leqslant|a|$; б) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$; в) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

4. Доведіть нерівність $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$, де a, b, c — будь-які дійсні числа.

5. Доведіть нерівність $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$, де $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

6. Доведіть, що коли добуток двох додатних чисел є постійним числом, то їх сума буде найменшою, якщо ці числа рівні.

7. Доведіть нерівність $a^4+b^4+2c^2\geqslant 4abc$.

8. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{2x-6}\cdot\sqrt{20-5x}-\sqrt{3x-8}$; б) $g(x)=\dfrac{\sqrt{17-2x}}{\sqrt{4x+10}}+\sqrt{18-3x}$.

9. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases}-2<2x-3\leqslant 7,\\ 1\leqslant 5-4x<17;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-1<7-2x\leqslant 3,\\ 1\leqslant 3+5x<18.\end{cases}$

10. Знайдіть усі значення a, за яких один корінь рівняння $x^2+ax-6a^2+5a-1=0$ буде меншим від 1, а другий — більшим за 4.

11. Зобразіть у ПДСК множину всіх розв'язків нерівності $|x|+|y|\leqslant 3$. Якою геометричною фігурою є ця множина?

Словничок

Правильна числова нерівність — correct numerical inequality
Властивості числових нерівностей — properties of numerical inequalities
Доведення нерівностей — proving inequalities
Нерівність з однією змінною (двома змінними) — inequality with one variable (two variables)
Рівносильні перетворення нерівностей — equivalent transformations of inequalities
Лінійна нерівність — linear inequality
Система нерівностей — system of inequalities
Обмежений (необмежений) числовий проміжок — finite (infinite) numerical interval
Порожня множина — empty set

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

Властивості числових нерівностей

1. Якщо $a < b$, то $b > a$
2. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$
3. Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$ для всіх $c \in \boldsymbol{R}$
4. Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$
5. Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$
6. Якщо $a < b$ і $c < d$, $a + c < b + d$
7. Якщо a, b, c, d — додатні, $a < b$, $c < d$, то $a \cdot c < b \cdot d$
8. Якщо a, b — додатні, $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Нерівності з однією змінною

Приклади:

$2x+3>5$,
$x^2\leqslant 4$, …
$|x|<-2$ — немає розв'язків $(\varnothing)$

Потрібно знайти *всі* значення змінної (x), за яких нерівність стає правильною числовою нерівністю (множину розв'язків)

Лінійні нерівності з однією змінною

строгі $ax+b>0$, $ax+b<0$
нестрогі $ax+b\geqslant 0$, $ax+b\leqslant 0$
(a, b — числа, x — змінна)

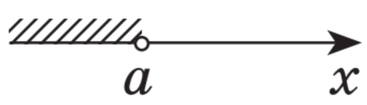
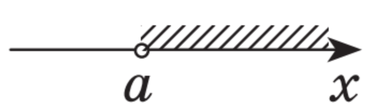
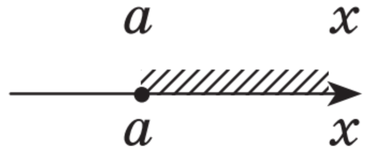
Метод розв'язування — використання властивостей числових нерівностей

Приклади:

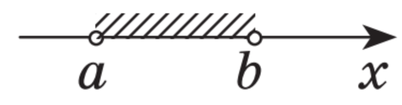
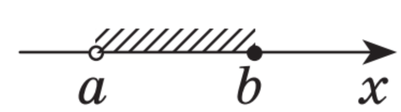
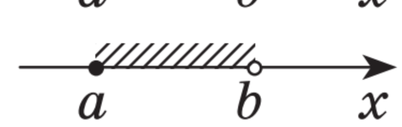
$2x+3>5$; $2x>5-3$; $2x>24$; $x>1$;
$-3x-2\leqslant 7$; $-3x\leqslant 7+2$; $-3x\geqslant 9$; $x\geqslant -3$

Числові проміжки

Необмежені

$x<a$		$(-\infty;a)$
$x>a$		$(a;+\infty)$
$x\leqslant a$		$(-\infty;a]$
$x\geqslant a$		$(a;+\infty]$

Обмежені

$a<x<b$		$(a;b)$
$a\leqslant x\leqslant b$		$[a;b]$
$a<x\leqslant b$		$(a;b]$
$a\leqslant x<b$		$[a;b)$

Системи нерівностей

Потрібно знайти *всі* спільні розв'язки кількох нерівностей

Схема дій:

1) розв'язати кожну нерівність окремо;
2) зобразити на числовій прямій розв'язки кожної з нерівностей (числові проміжки);
3) знайти спільні точки всіх зображених проміжків;
4) записати відповідь

Приклад $\begin{cases} 2x > 6, \\ -3x \geqslant -18; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ x \leqslant 6; \end{cases}$ Відповідь: $(3; 6]$.



Лінійні нерівності з двома змінними

Строгі: $ax + by + c < 0$; $ax + by + c > 0$

Нестрогі: $ax + by + c \leqslant 0$; $ax + by + c \geqslant 0$

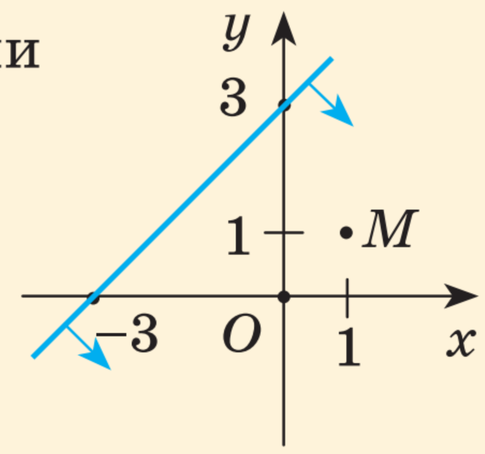
a, b — числа; x, y — змінні

$ax + by + c = 0$ — рівняння, що відповідає лінійній нерівності (пряма на координатній площині)

Приклад

$x - y + 3 \geqslant 0$

Зображення множини розв'язків — півплощина, що визначається прямою $x - y + 3 = 0$



Тестова точка $M(1; 1)$

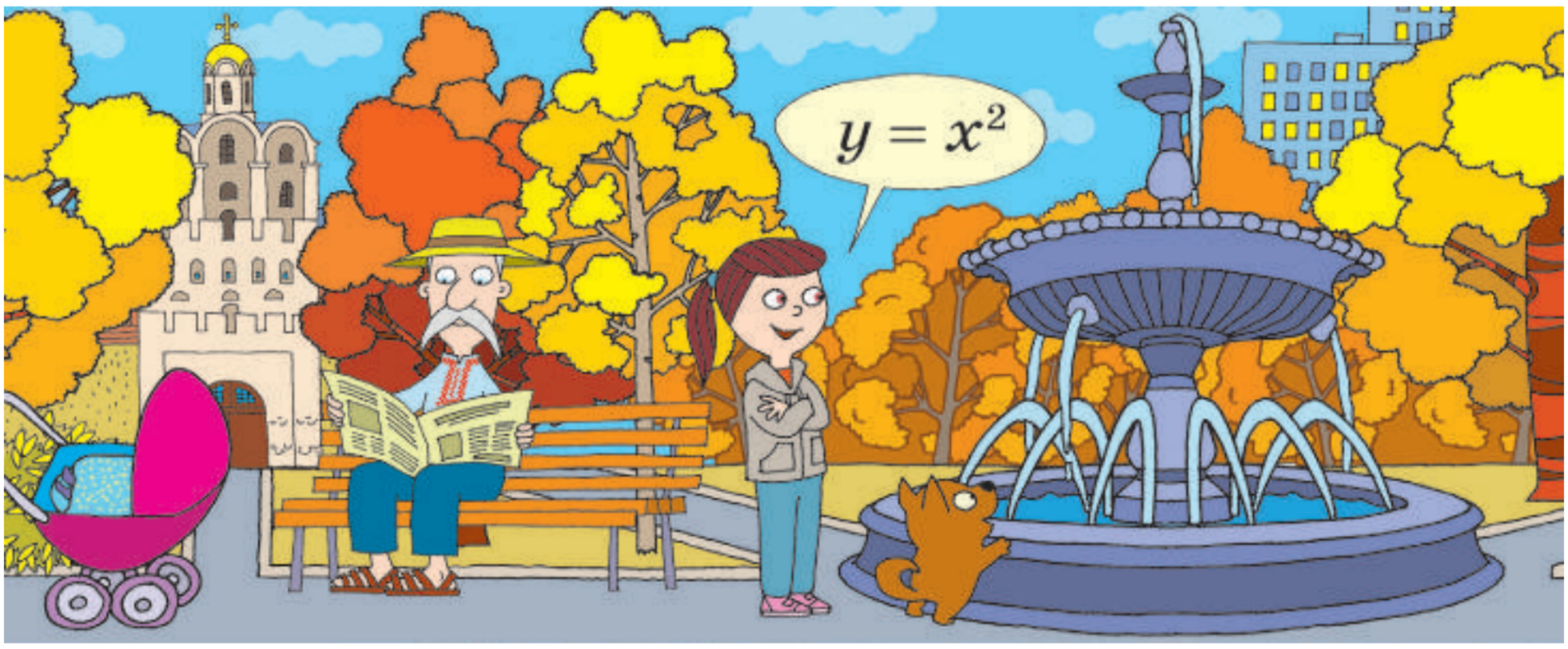
$1 - 1 + 3 = 3 \geqslant 0$ — задовольняє

Відповідну півплощину позначено стрілками

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

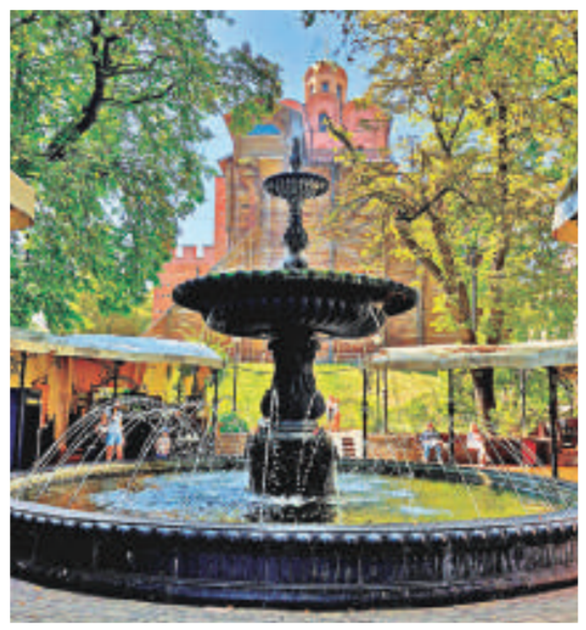
CHAPTER 1. QUADRATIC FUNCTION

§ 7. Функції та їх властивості. Перетворення графіків функцій





Привіт, Петрику! На канікулах були на екскурсії, і в одному з київських парків я побачила цікавий фонтан — ось, поглянь на фото. Можливо, ти будеш сміятися, але я чомусь одразу подумала про функцію $y = x^2$, коли поглянула на цю чашу.





А чому я маю сміятися? Дідусь Тарас каже, що *математика завжди навколо нас, треба тільки уважно придивитися*. Проте на $y = x^2$ чаша фонтана насправді не дуже схожа: вона такої самої параболічної форми, але якась ширша, ніби притиснута до землі. А ще вершина в неї не на землі розташована, а піднята вгору.



Дійсно, так і є. Ніби взяли графік функції $y = x^2$, потім піддали його деформації до осі абсцис, а після цього виконали

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

паралельне перенесення на вектор, паралельний осі ординат. Цікаво, а якою формулою задаватиметься функція, графік якої отримано таким чином?



Думаю, відповісти на це питання нам допоможе аналітичне задання геометричних перетворень площини, які ми вивчали на початку року. Упевнений, вчителі точно про це знають набагато більше. Запитаймо в них!



Так, Петрику, вплив геометричних перетворень площини на графіки функцій — це дуже цікава тема для розмови. Однак спочатку згадаємо відомості про функції та їх властивості.

Отже, функцією зазвичай називають залежність між двома змінними, за якої одному значенню незалежної змінної (аргументу) відповідає єдине значення залежної змінної (функції). Також функцію можна сприймати як певне правило, за яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної.

Як ви вже знаєте, функцію можна задавати аналітично (формулою), графічно (за допомогою графіка в деякій ПДСК), таблично (за допомогою таблиці відповідних значень аргументу й функції), словесно (за допомогою слів).



У 7 та 8 класах ви вже розглядали лінійну функцію (функцію виду $y=ax+b$, де x, y — змінні, a, b — деякі задані дійсні числа), обернену пропорційність (функцію виду $y=\frac{k}{x}$, де x, y — змінні, k — деяке дійсне число, $k\neq 0$), а також функції $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.

Для названих функцій ви будували графік і вивчали такі їхні властивості:

- область визначення функції $\big(D(y)\big)$;
- множину значень функції $\big(E(y)\big)$;
- множину, на якій функція зростає;
- множину, на якій функція спадає.

Для оберненої пропорційності також розглядалося поняття асимптоти її графіка.

Більше про це:
rnk.com.ua/112073



У розділі 1 підручника ми розглядали геометричні перетворення та їх аналітичне задання, тобто формули, які пов'язують координати в деякій ПДСК довільної точки $M(x;y)$ площини та її образу $M'(x';y')$ за цього перетворення. Наприклад, аналітичне задання паралельного перенесення f на вектор $\vec{a}(a_1;a_2)$ має вигляд $\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2. \end{cases}$ Використовуючи аналітичне задання перетворень, можна не лише знаходити координати образів й прообразів точок площини, а й рівняння образів і прообразів ліній на площині.

Розглянемо *приклад*. Нехай у ПДСК задано коло ω із центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $r=5$. Ми знаємо, що таке коло в цій ПДСК задається рівнянням $x^2+y^2=25$. Знайдемо образ ω' кола ω за паралельного перенесення f на вектор $\vec{a}(3;-4)$. Аналітичне задання f має вигляд: $\begin{cases} x' = x + 3, \\ y' = y - 4. \end{cases}$ Якщо $f(O)=O'$, то $O'(0+3;0-4)$, тобто $O'(3;-4)$. Оскільки паралельне перенесення є рухом, то за властивістю руху образом кола ω за даного перетворення f буде коло ω' такого самого радіуса, але із центром у точці O'. Ми знаємо, що рівняння такого кола має вигляд $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

Однак знаходити рівняння образу лінії можна й іншим способом. Як уже наголошувалося в розділі 1, ПДСК в аналітичному заданні перетворень одна й та сама, а штрихи над координатами потрібні лише для того, щоб показати, координати образу чи прообразу розглядаються. Тому для знаходження образу кола ω за даного перетворення f виразимо з аналітичного задання координати прообразу через координати образу й підставимо їх у рівняння кола ω: $\begin{cases} x = x' - 3, \\ y = y' + 4; \end{cases}$ $(x'-3)^2+(y'+4)^2=25$. Після прибирання штрихів отримаємо те саме рівняння кола ω': $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.



Наведені щойно міркування дають змогу зрозуміти, якими формулами задають образи графіків функцій за різних перетворень площини.

ТЕОРЕМА (про образи графіків функцій за геометричних перетворень площини).

Нехай задано графік функції $y=f\left(x\right)$. Тоді образом цього графіка за:

① паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{\left(m;0\right)}$ (або на m одиниць уздовж осі Ox) буде графік функції $y=f\left(x-m\right)$;

② паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{\left(0;n\right)}$ (або на n одиниць уздовж осі Oy) буде графік функції $y=f\left(x\right)+n$;

③ симетрії відносно осі Ox буде графік функції $y=-f\left(x\right)$;

④ симетрії відносно осі Oy буде графік функції $y=f\left(-x\right)$;

⑤ деформації з коефіцієнтом $k>0$ до осі Ox буде графік функції $y=kf\left(x\right)$;

⑥ деформації з коефіцієнтом $p>0$ до осі Oy буде графік функції $y=f\left(\dfrac{x}{p}\right)$.

Доведення. ① Аналітичне задання паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{\left(m;0\right)}$ має вигляд $\begin{cases}x'=x+m,\\y'=y.\end{cases}$ Для знаходження рівняння, що задає образ графіка функції $y=f\left(x\right)$ за цього перетворення, виразимо координати прообразу через координати образу: $\begin{cases}x=x'-m,\\y=y'.\end{cases}$ Після підстановки у формулу, що задає функцію, отримаємо рівняння $y'=f\left(x'-m\right)$, а після прибирання штрихів — рівняння $y=f\left(x-m\right)$, що й вимагалося довести.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

② Аналітичне задання паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;n)}$ має вигляд $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + n. \end{cases}$ Знову виразимо координати прообразу через координати образу: $\begin{cases} x = x', \\ y = y' - n. \end{cases}$ Після підстановки у формулу, що задає функцію, отримаємо: $y' - n = f(x')$, звідки $y = f(x) + n$, що й вимагалося довести.

③ Аналітичне задання симетрії відносно осі абсцис має вигляд $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$ Виразимо координати прообразу через координати образу: $\begin{cases} x = x', \\ y = -y'. \end{cases}$ Після підстановки у формулу, що задає функцію, отримаємо: $-y' = f(x')$, звідки $y = -f(x)$, що й вимагалося довести.

⑤ Аналітичне задання деформації до осі абсцис із коефіцієнтом $k > 0$ має вигляд $\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases}$ Виразимо координати прообразу через координати образу: $\begin{cases} x = x', \\ y = \dfrac{y'}{k}. \end{cases}$ Після підстановки у формулу, що задає функцію, отримаємо: $\dfrac{y'}{k} = f(x')$, звідки $y = kf(x)$, що й вимагалося довести.

Твердження 4 і 6 доведіть самостійно.



Щойно доведена теорема дає можливість за вже побудованим графіком функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x - m)$, $y = f(x) + n$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = kf(x)$ і $y = f\left(\dfrac{x}{p}\right)$. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1

Нехай задано графік функції $y = \sqrt{x}$. Побудуємо графіки функцій: а) $y = \sqrt{x - 3}$; б) $y = \sqrt{x} + 2$; в) $y = -\sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{-x}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розв'язання. а) Оскільки образом графіка функції $y=\sqrt{x}$ за паралельного перенесення f_1 на вектор $\overrightarrow{(3;0)}$ є графік функції $y=\sqrt{x-3}$, то для побудови останнього слід виконати вказане перетворення вже побудованого графіка функції $y=\sqrt{x}$. Для цього можна взяти кілька точок, що належать графіку функції $y=\sqrt{x}$, побудувати їх образи та сполучити ці образи плавною лінією.

На рис. 7.1 для описаної побудови взято точки $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(4;2)$ і $C(9;3)$. Ці точки за перетворення f_1 переходять відповідно в точки $O_1(3;0)$, $A_1(4;1)$, $B_1(7;2)$ і $C_1(12;3)$. Графік функції $y=\sqrt{x}$ зображено чорним кольором, а графік функції $y=\sqrt{x-3}$ — синім.

б) Оскільки образом графіка функції $y=\sqrt{x}$ за паралельного перенесення f_2 на вектор $\overrightarrow{(0;2)}$ є графік функції $y=\sqrt{x}+2$, то для побудови останнього діємо аналогічно до пункту а): будуємо образи точок $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(4;2)$ і $C(9;3)$ за перетворення f_2 — точки $O_2(0;2)$, $A_2(1;3)$, $B_2(4;4)$ і $C_2(9;5)$ відповідно, а потім сполучаємо їх плавною лінією (червона лінія на рис. 7.1).

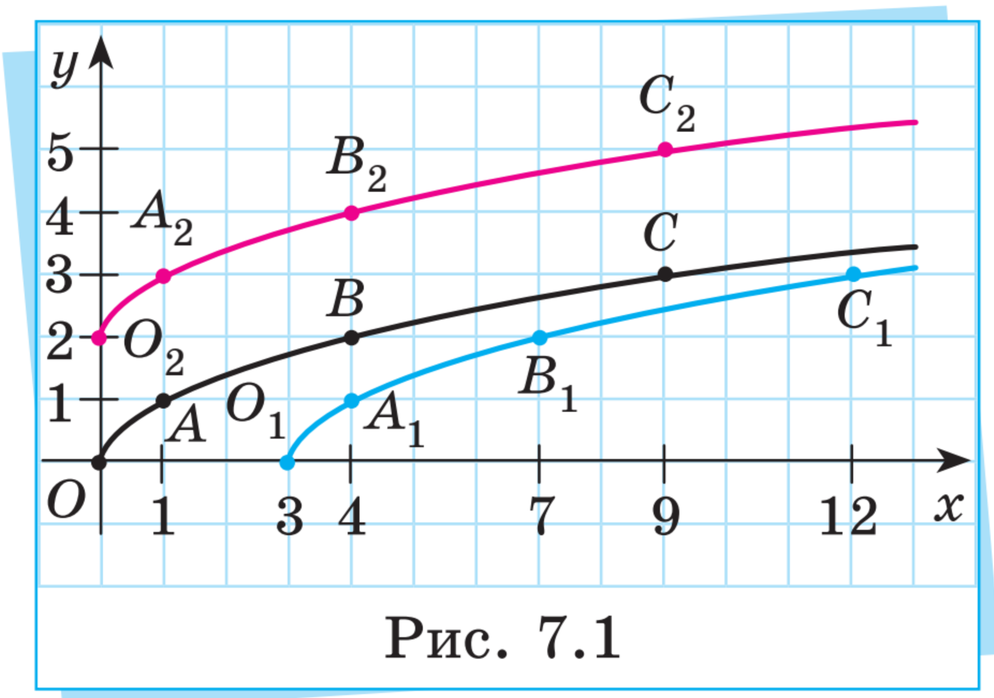


Рис. 7.1

в) Оскільки образом графіка функції $y=\sqrt{x}$ за симетрії f_3 відносно осі Ox є графік функції $y=-\sqrt{x}$, то для побудови останнього діємо аналогічно до пунктів *а* і *б*: будуємо образи точок $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(4;2)$ і $C(9;3)$ за перетворення f_3 — точки $O_3(0;0)$, $A_3(1;-1)$, $B_3(4;-2)$ і $C_3(9;-3)$ відповідно, а потім сполучаємо їх плавною лінією (синя лінія на рис. 7.2; чорна лінія — графік функції $y=\sqrt{x}$).

г) Оскільки образом графіка функції $y=\sqrt{x}$ за симетрії f_4 відносно осі Oy є графік функції $y=\sqrt{-x}$, то для побудови останнього діємо аналогічно до попередніх пунктів: будуємо образи точок $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(4;2)$ і $C(9;3)$ за перетворення f_4 — точки $O_4(0;0)$, $A_4(-1;1)$, $B_4(-4;2)$ і $C_4(-9;3)$ відповідно, а потім сполучаємо їх плавною лінією (червона лінія на рис. 7.2).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

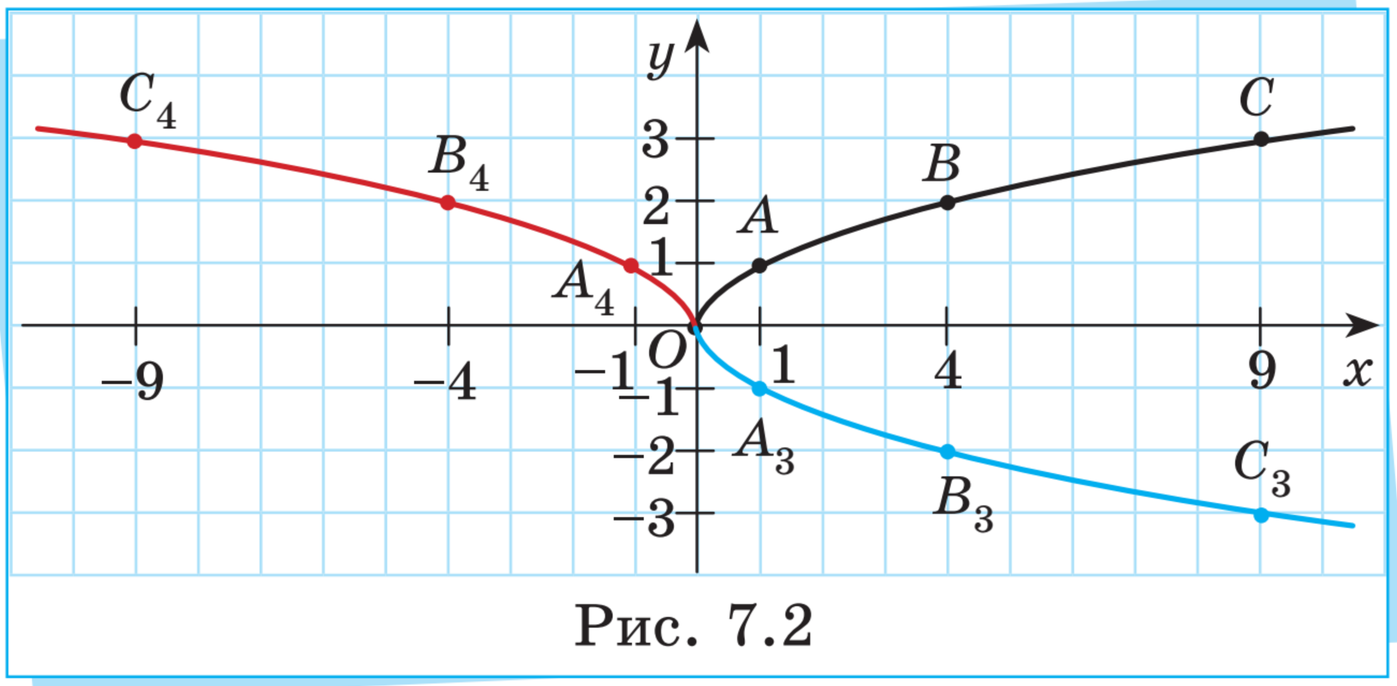


Рис. 7.2

Приклад 2

Нехай задано графік функції $y = x^2$. Побудуємо графіки функцій:

а) $y = 3x^2$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$; в) $y = -x^2$.

Розв'язання. Згідно з доведеною теоремою, щоб отримати графіки функцій а) $y = 3x^2$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$; в) $y = -x^2$, потрібно знайти образи графіка функції $y = x^2$ за:

а) деформації до осі абсцис із коефіцієнтом $k_1 = 3$;

б) деформації до осі абсцис із коефіцієнтом $k_2 = \frac{1}{2}$;

в) симетрії відносно осі абсцис.

Оберемо 5 точок, які належать графіку функції $y = x^2$: $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(-1;1)$, $C(2;4)$ і $D(-2;4)$, побудуємо їх у ПДСК і сполучимо плавною лінією (на рис. 7.3 це лінія чорного кольору). Для кожного з перетворень із пунктів а), б), в) знайдемо й побудуємо в ПДСК образи точок O, A, B, C, D та сполучимо їх плавною лінією відповідно синього, червоного та зеленого кольорів.

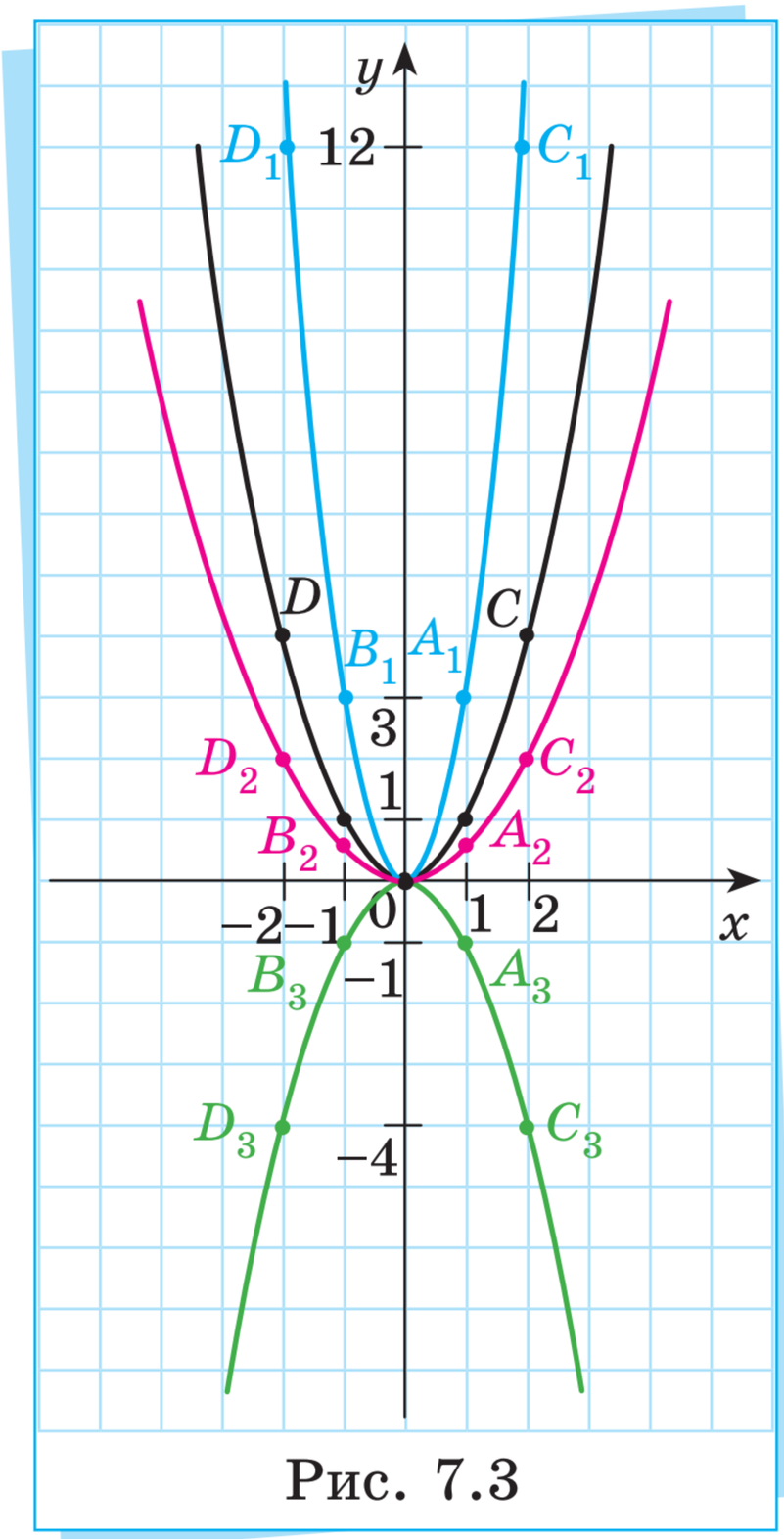


Рис. 7.3

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Для деформації до осі абсцис із коефіцієнтом $k_1 = 3$ отримаємо точки $O_1(0;0)$, $A_1(1;3)$, $B_1(-1;3)$, $C_1(2;12)$ і $D_1(-2;12)$. Для деформації до осі абсцис із коефіцієнтом $k_2 = \frac{1}{2}$ отримаємо точки $O_2(0;0)$, $A_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $C_2(2;2)$ і $D_2(-2;2)$. Нарешті для симетрії відносно осі абсцис отримаємо точки $O_3(0;0)$, $A_3(1;-1)$, $B_3(-1;-1)$, $C_3(2;-4)$ і $D_3(-2;-4)$.



Використовуючи геометричні перетворення, можна будувати й складніші графіки функцій.

Приклад 3

Побудуємо графік функції $y = 4 - \frac{6}{x+1}$.

Розв'язання. Для побудови графіка заданої функції спочатку побудуємо графік функції $y = \frac{-6}{x}$, а потім знайдемо образ цього графіка за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(-1;0)}$. Отримаємо графік функції $y = \frac{-6}{x+1}$. Далі знайдемо образ графіка функції $y = \frac{-6}{x+1}$ за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;4)}$. Отримаємо графік функції $y = \frac{-6}{x+1} + 4$ або $y = 4 - \frac{6}{x+1}$, що й вимагалося.

Зміну координат точок під час побудови кожного з графіків після кожного з геометричних перетворень зручно записати у вигляді таблиці:

$y = \frac{-6}{x}$	$(1;-6)$	$(2;-3)$	$(3;-2)$	$(6;-1)$	$(-1;6)$	$(-2;3)$	$(-3;2)$	$(-6;1)$
$y = \frac{-6}{x+1}$	$(0;-6)$	$(1;-3)$	$(2;-2)$	$(5;-1)$	$(-2;6)$	$(-3;3)$	$(-4;2)$	$(-7;1)$
$y = 4 - \frac{6}{x+1}$	$(0;-2)$	$(1;1)$	$(2;2)$	$(5;3)$	$(-2;10)$	$(-3;7)$	$(-4;6)$	$(-7;5)$

Також важливо зауважити, що асимптотами графіка функції $y=\dfrac{-6}{x}$, як вам уже відомо, є осі координат, тобто прямі $x=0$ (вісь Oy) і $y=0$ (вісь Ox). Після двох паралельних перенесень вони перейдуть відповідно в прямі $x=-1$ та $y=4$. *Переконайтеся в цьому самостійно.*

На рис. 7.4 зображено графіки функцій $y=\dfrac{-6}{x}$ (чорна лінія), $y=\dfrac{-6}{x+1}$ (синя лінія) і $y=4-\dfrac{6}{x+1}$ (червона лінія).

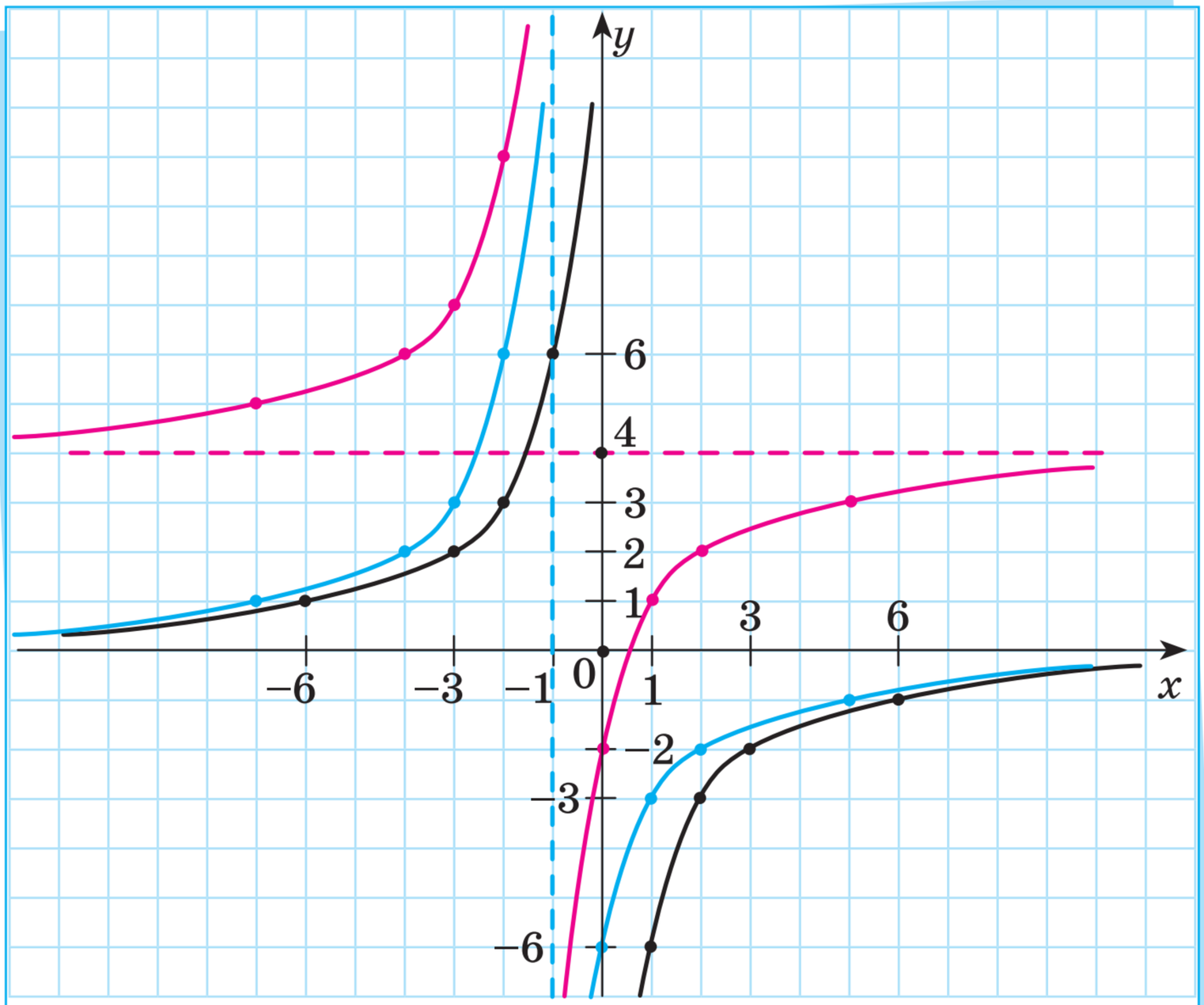


Рис. 7.4



В останньому прикладі можна було виконувати не два послідовні паралельні перенесення, а лише одне паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(-1;4)}$. Результат побудови при цьому не зміниться. *Переконайтеся в цьому самостійно.*

Для побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень можна використовувати також і графічні калькулятори.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/112685



Перевірте себе!

1. Дайте означення функції. Наведіть основні способи задання функції.
2. Перелічіть властивості функцій, вивчених вами раніше (лінійна, обернена пропорційність, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$).
3. Сформулюйте теорему про образи графіків функцій за геометричних перетворень площини.
4. Яким чином, маючи графік функції $y=f(x)$, побудувати графіки функцій $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=kf(x)$ і $y=f\left(\frac{x}{m}\right)$?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть область визначення та множину значень функції, заданої графічно (рис. 1).

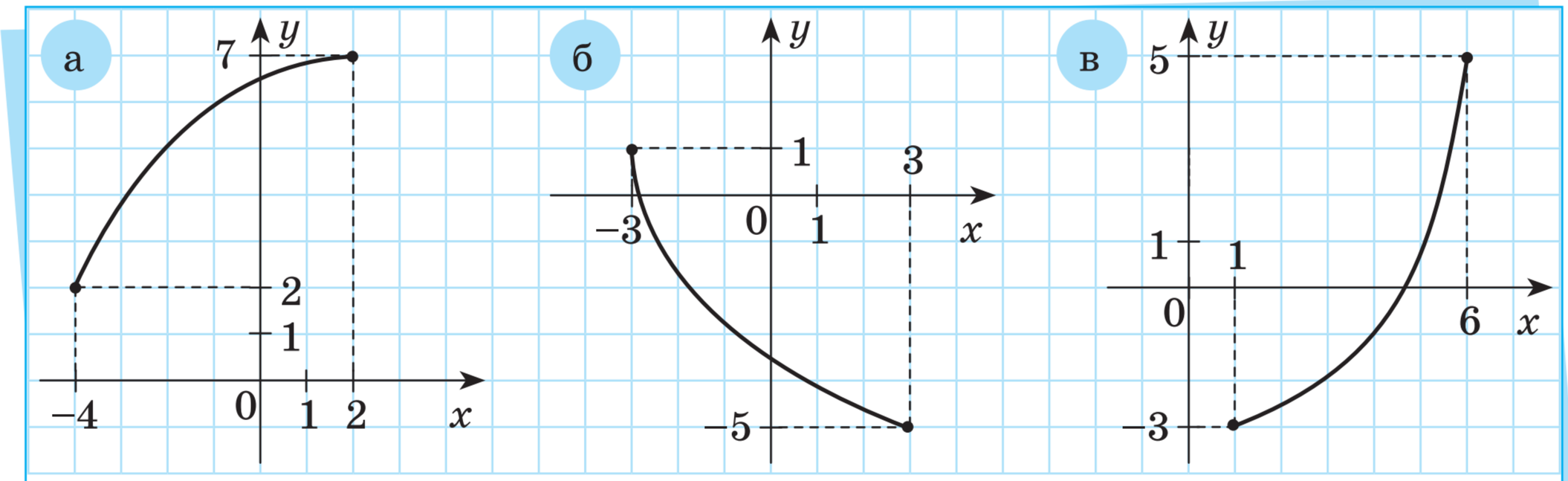


Рис. 1

2. Запишіть область визначення та множину значень функції, заданої графічно (рис. 2).

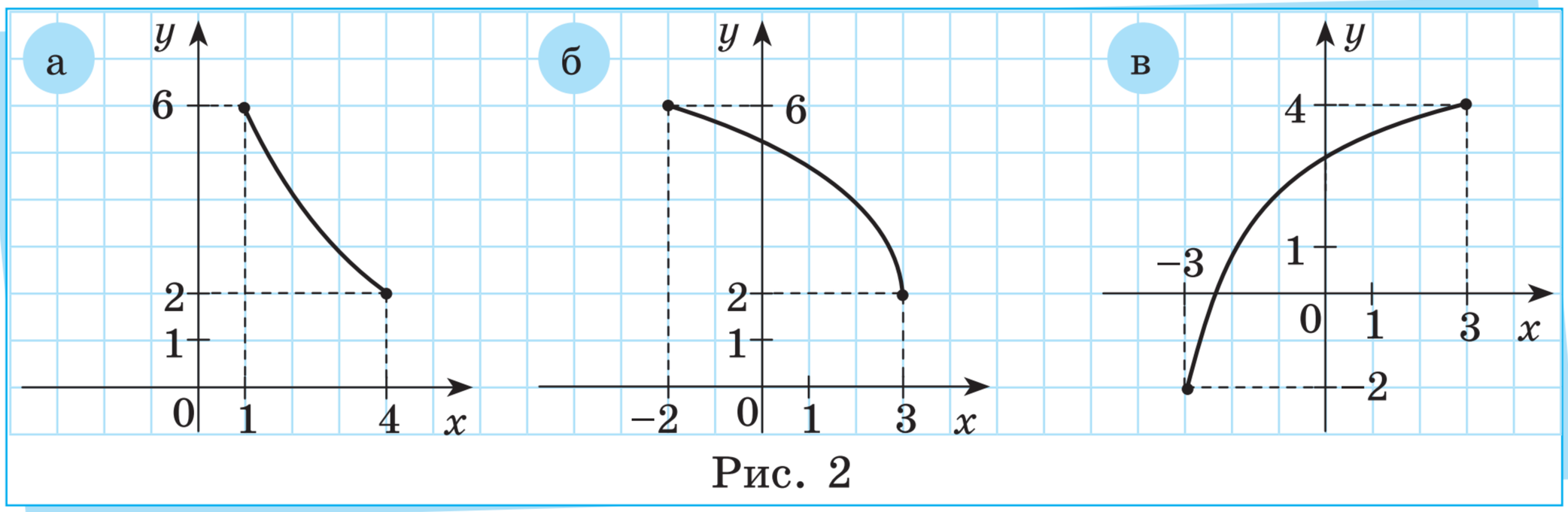


Рис. 2

3. На рис. 3 зображено графік функції $y = f(x)$. На якому з наведених проміжків ця функція зростає?

а) $[-6; -3]$;

б) $[-3; 1]$;

в) $[1; 4]$;

г) $[4; 6]$;

д) $[6; 10]$.

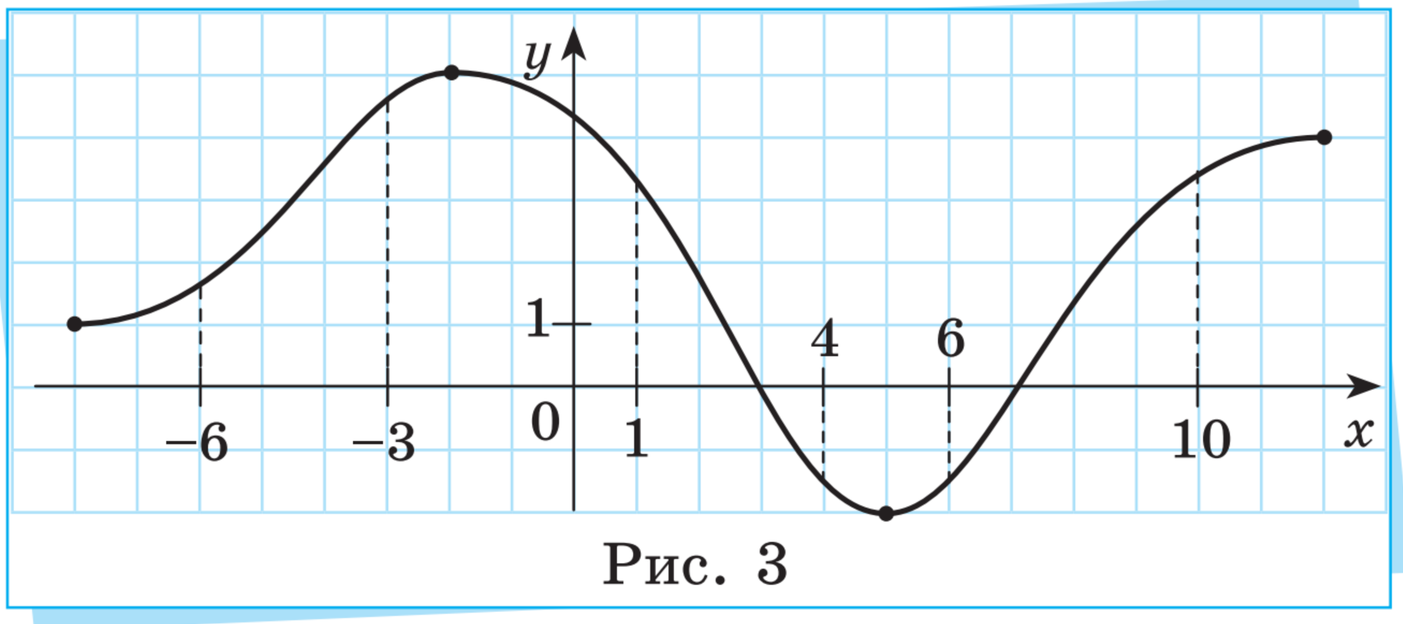


Рис. 3

4. На рис. 4 зображено графік функції $y = f(x)$. На якому з наведених проміжків ця функція спадає?

а) $[-5; -2]$;

б) $[-2; 1]$;

в) $[1; 4]$;

г) $[4; 9]$;

д) $[9; 15]$.

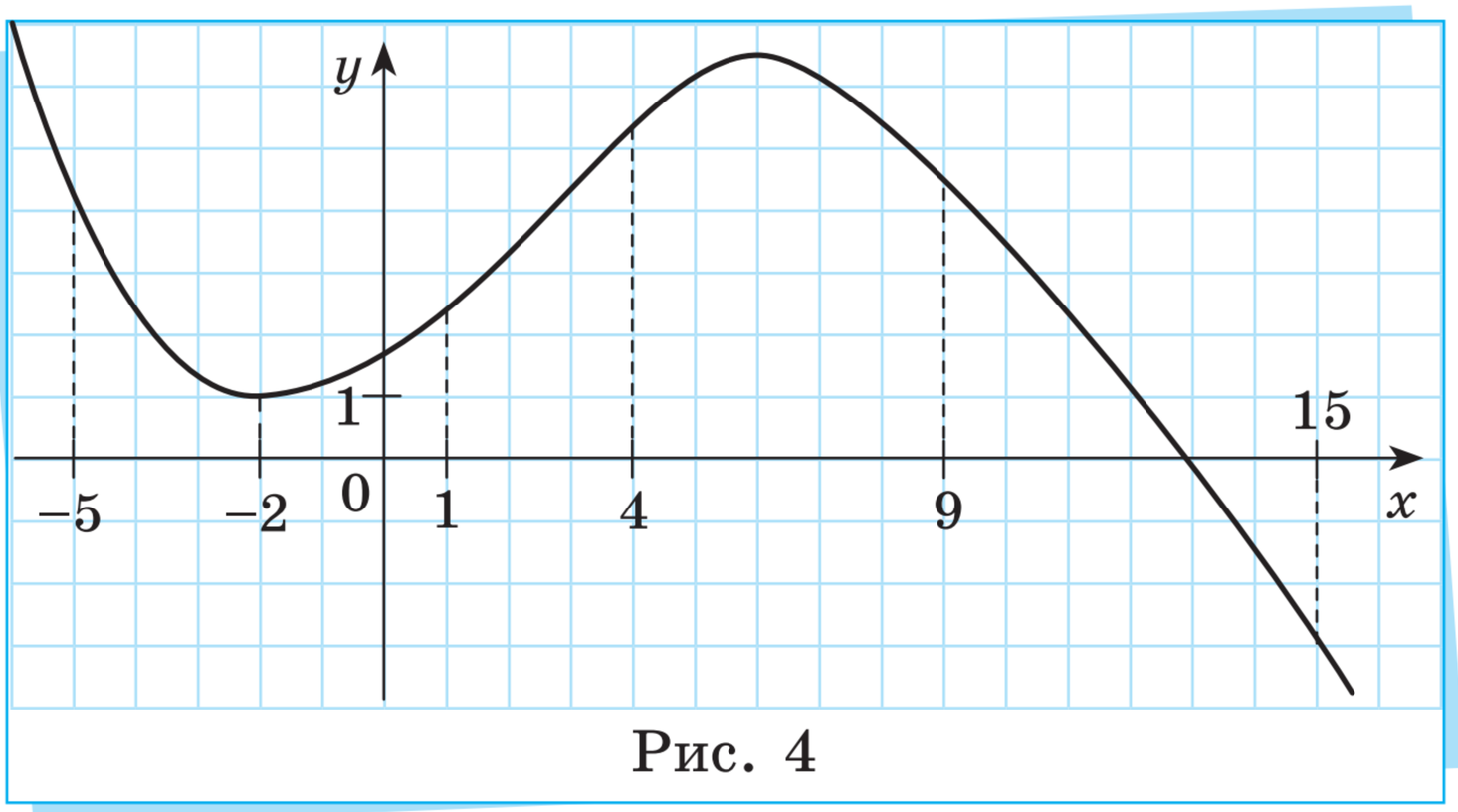


Рис. 4

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

5. Які з наведених тверджень є правильними?

а) За паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(8;0)}$ графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=f(x+8)$.

б) За паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;9)}$ графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=f(x)+9$.

в) За симетрії відносно осі Oy графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=f(-x)$.

г) За деформації з коефіцієнтом 2 до осі Ox графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=2f(x)$.

6. Які з наведених тверджень є правильними?

а) За паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(4;0)}$ графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=f(x-4)$.

б) За паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;3)}$ графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=f(x)+3$.

в) За симетрії відносно осі Ox графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=-f(x)$.

г) За деформації з коефіцієнтом 5 до осі Oy графік функції $y=f(x)$ перейде у графік функції $y=f(5x)$.

7. За паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(6;0)}$ точки A та B перейшли в точки A_1 та B_1 відповідно (рис. 5). Побудуйте точку, у яку перейде точка C за цього паралельного перенесення. Побудуйте графік функції, у який перейде графік деякої функції $y=f(x)$ за цього паралельного перенесення. Запишіть формулу для функції, графік якої ви побудували.

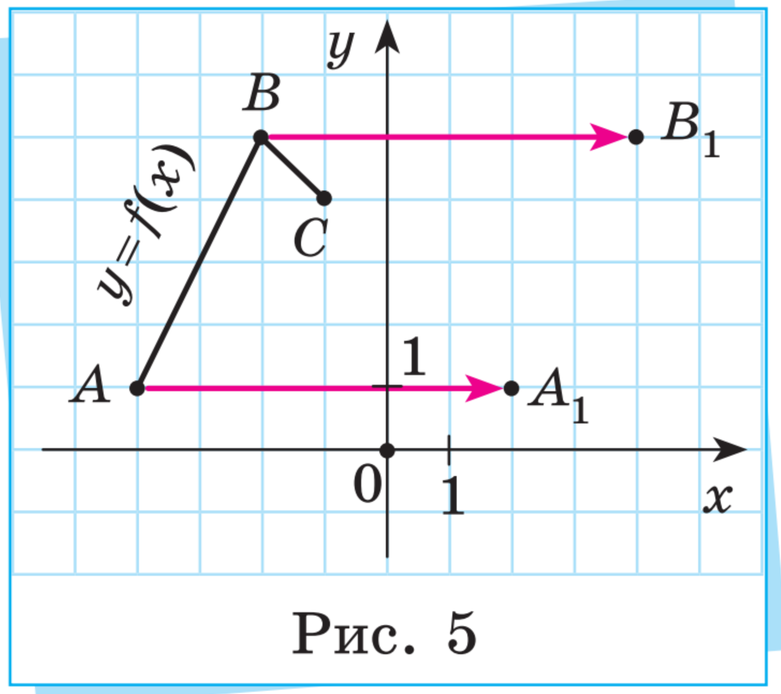


Рис. 5

8. За паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;4)}$ точки A та C перейшли в точки A_1 та C_1 відповідно (рис. 6). Побудуйте точку, у яку перейде точка B за цього паралельного перенесення. Побудуйте графік функції, у який перейде графік деякої функції $y=f(x)$ за цього паралельного перенесення. Запишіть формулу для функції, графік якої ви побудували.

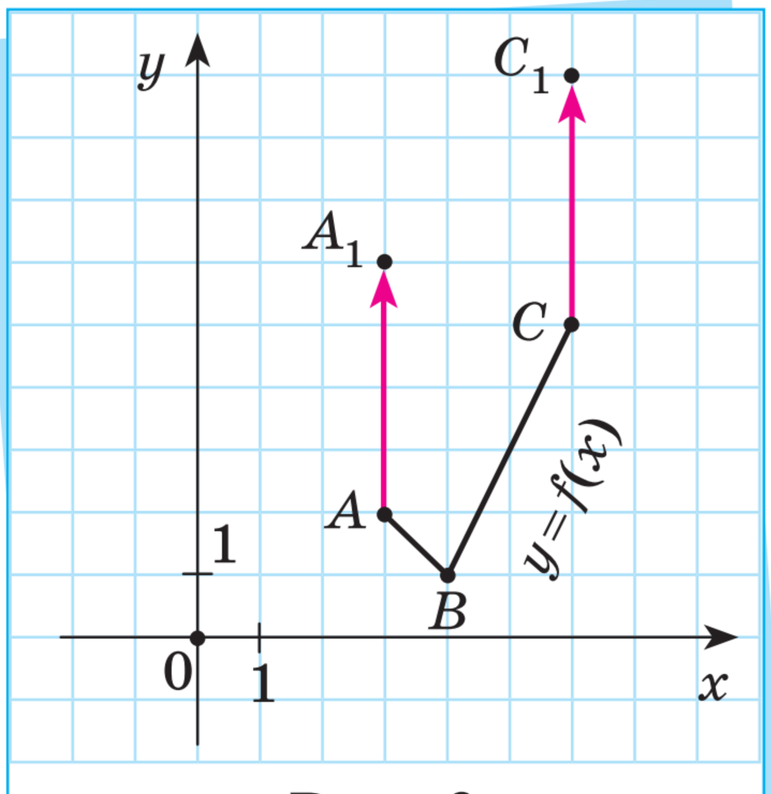


Рис. 6

9. За паралельного перенесення образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=f(x-9)$. Запишіть вектор цього паралельного перенесення.

10. За паралельного перенесення образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=f(x+4)$. Запишіть вектор цього паралельного перенесення.

11. За паралельного перенесення образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=f(x)+7$. Запишіть вектор цього паралельного перенесення.

12. За паралельного перенесення образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=f(x)-2$. Запишіть вектор цього паралельного перенесення.

13. За симетрії відносно осі Ox точки A та C перейшли в точки A_1 та C_1 відповідно (рис. 7). Побудуйте точку, у яку перейде точка B за цієї симетрії. Побудуйте графік функції, у який перейде графік деякої функції $y=f(x)$ за цієї симетрії. Запишіть формулу для функції, графік якої ви побудували.

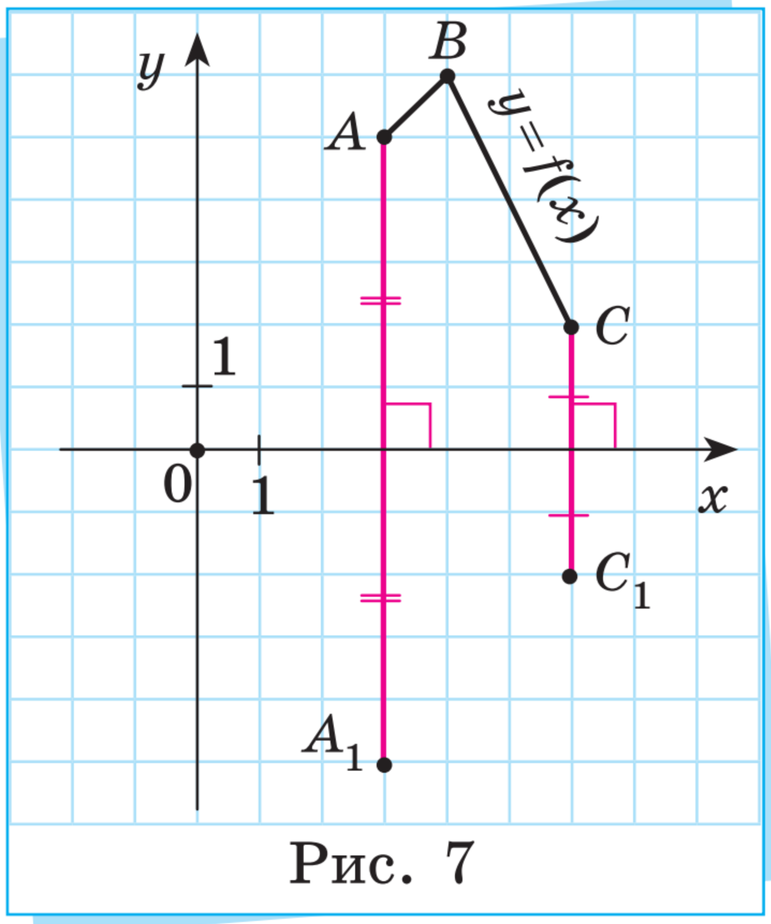


Рис. 7

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

14. За симетрії відносно осі Oy точки B та C перейшли в точки B_1 та C_1 відповідно (рис. 8). Побудуйте точку, у яку перейде точка A за цієї симетрії. Побудуйте графік функції, у який перейде графік деякої функції $y=f(x)$ за цієї симетрії. Запишіть формулу для функції, графік якої ви побудували.

15. За деформації з коефіцієнтом 3 до осі Oy точки A та B перейшли в точки A_1 та B_1 відповідно (рис. 9). Побудуйте точку, у яку перейде точка C за цієї деформації. Побудуйте графік функції, у який перейде графік деякої функції $y=f(x)$ за цієї деформації. Запишіть формулу для функції, графік якої ви побудували.

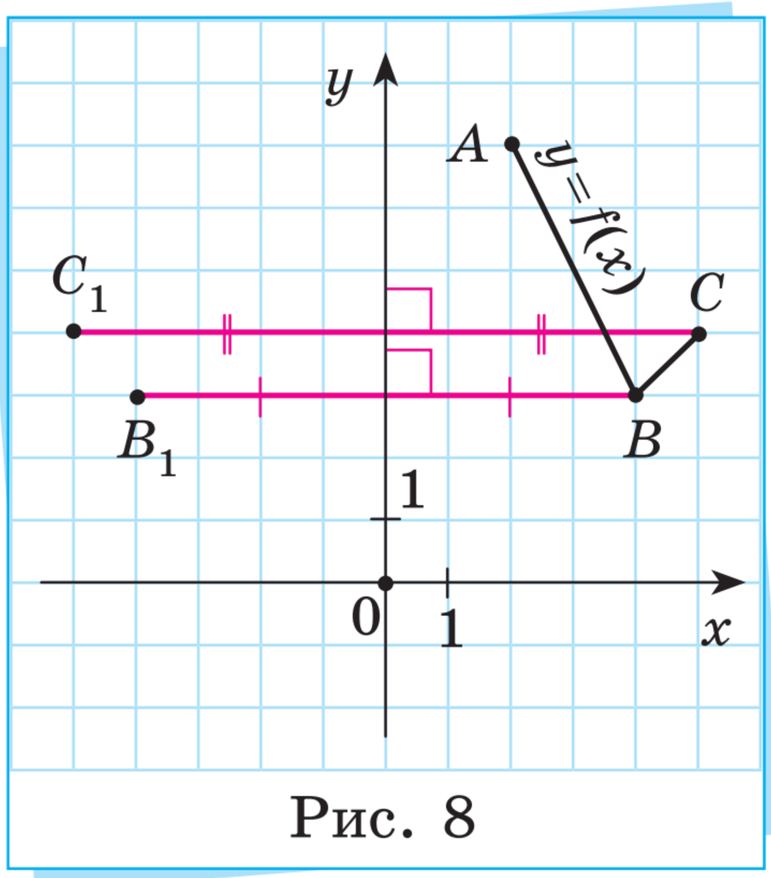


Рис. 8

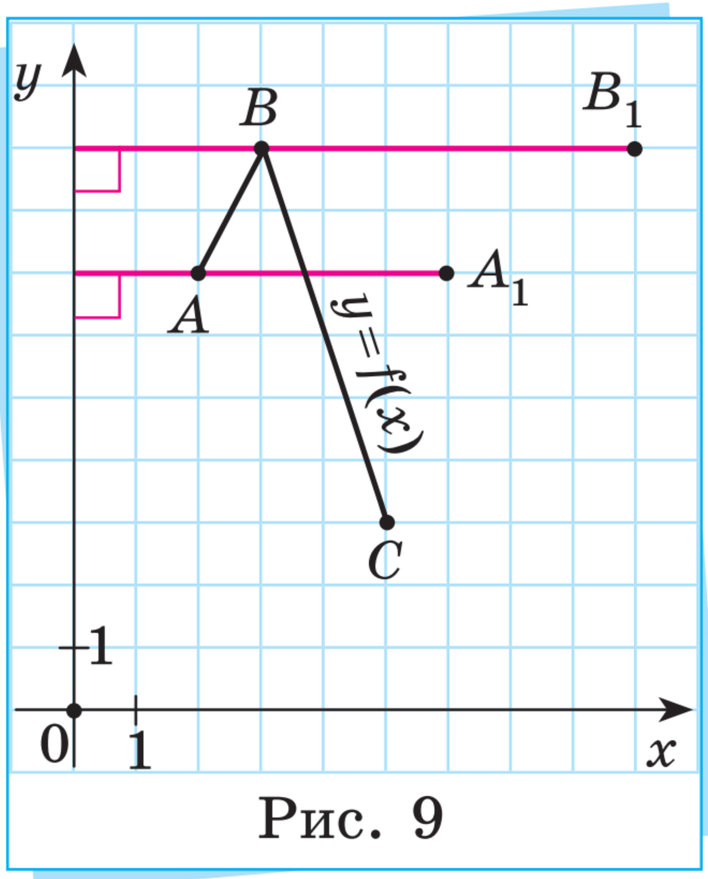


Рис. 9

16. За деформації з коефіцієнтом 2 до осі Ox точки A та C перейшли в точки A_1 та C_1 відповідно (рис. 10). Побудуйте точку, у яку перейде точка B за цієї деформації. Побудуйте графік функції, у який перейде графік деякої функції $y=f(x)$ за цієї деформації. Запишіть формулу для функції, графік якої ви побудували.

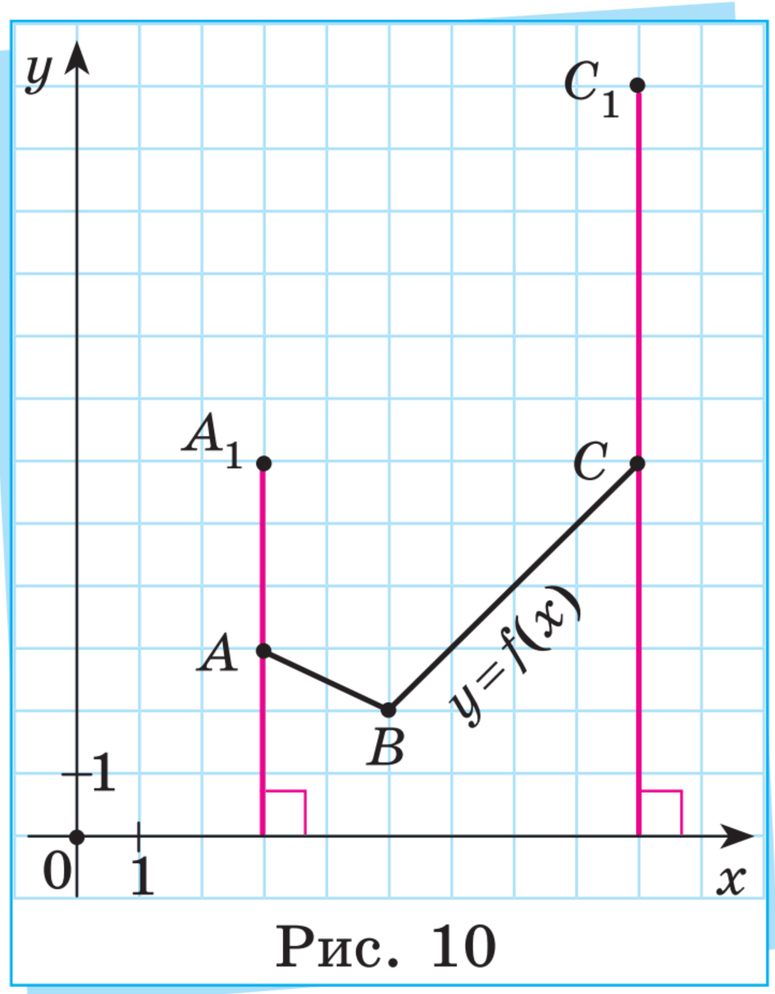


Рис. 10

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

17. За деформації образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=f\left(\frac{x}{8}\right)$. Запишіть, з яким коефіцієнтом і до якої осі ця деформація.

18. За деформації образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=f\left(\frac{x}{5}\right)$. Запишіть, з яким коефіцієнтом і до якої осі ця деформація.

19. За деформації образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=4f(x)$. Запишіть, з яким коефіцієнтом і до якої осі ця деформація.

20. За деформації образом графіка функції $y=f(x)$ є графік функції $y=7f(x)$. Запишіть, з яким коефіцієнтом і до якої осі ця деформація.

Середній рівень

21. Задано функцію $y=x^2$ (рис. 11). Графік якої функції одержимо, якщо:

а) графік заданої функції паралельно перенесемо на вектор $\overrightarrow{(7;0)}$;

б) графік заданої функції симетрично відобразимо відносно осі Ox;

в) до графіка заданої функції застосуємо деформацію з коефіцієнтом $k=1{,}5$ до осі Ox?

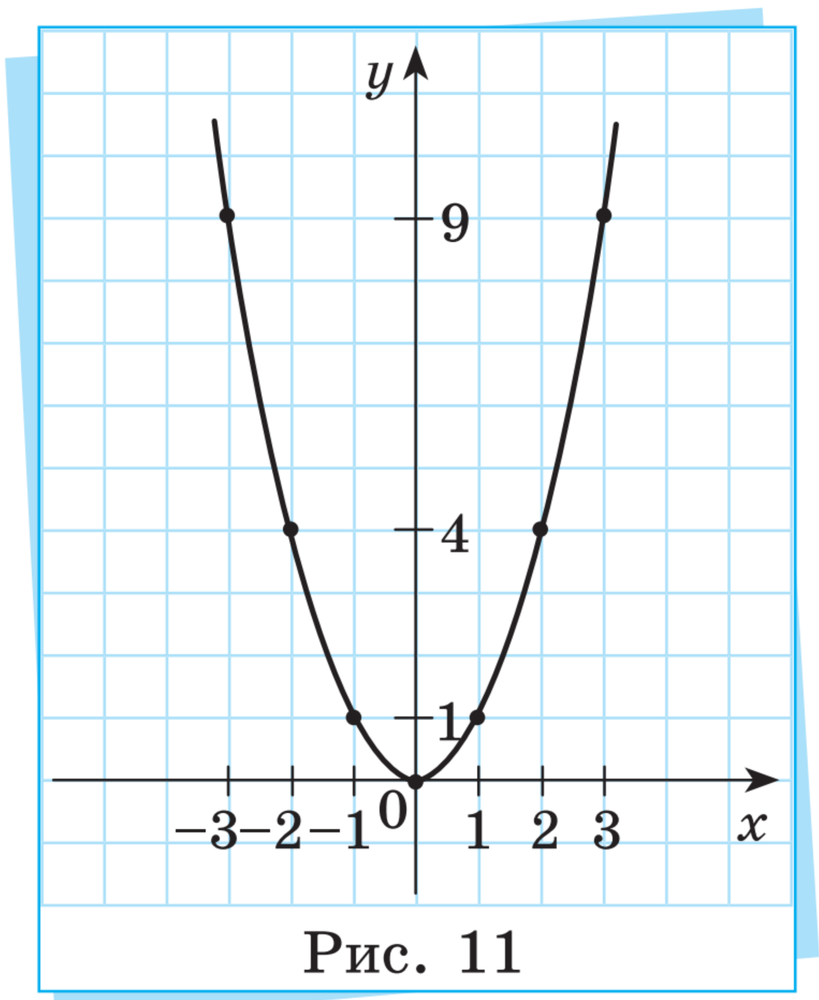


Рис. 11

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

22. Задано функцію $y=\sqrt{x}$ (рис. 12). Графік якої функції одержимо, якщо:

а) графік заданої функції паралельно перенесемо на вектор $\overrightarrow{(0;4)}$;

б) графік заданої функції симетрично відобразимо відносно осі Ox;

в) до графіка заданої функції застосуємо деформацію з коефіцієнтом $k=3$ до осі Ox?

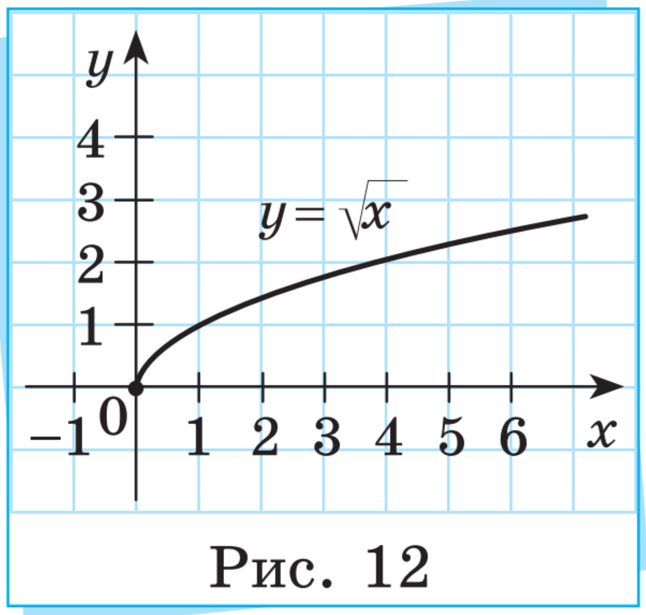


Рис. 12

23. На рис. 13 зображено графік функції $f(x)$. Користуючись цим графіком, визначте:

а) область визначення функції $f(x)$;

б) множину значень функції $f(x)$;

в) множину, на якій функція зростає (якщо така є);

г) множину, на якій функція спадає (якщо така є).

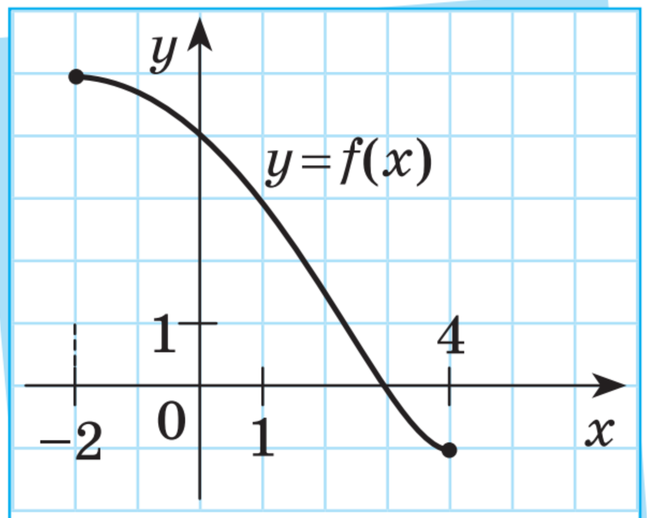


Рис. 13

24. На рис. 14 зображено графік функції $f(x)$. Користуючись цим графіком, визначте:

а) область визначення функції $f(x)$;

б) множину значень функції $f(x)$;

в) множину, на якій функція зростає (якщо така є);

г) множину, на якій функція спадає (якщо така є).

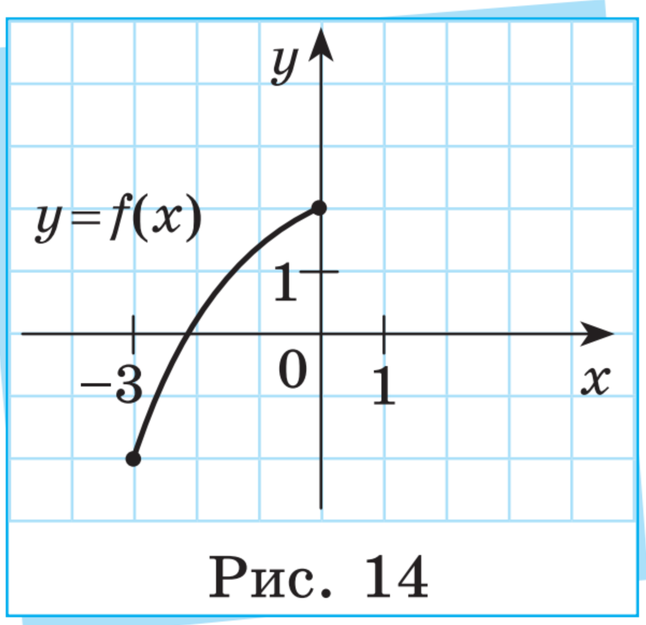


Рис. 14

25. Точки $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(4;4)$, $D(6;5)$, $E(9;6)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(-3;0)}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

26. Точки $K(0;0)$, $L(-1;2)$, $M(-2;3)$, $N(-4;4)$, $P(-9;6)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок K_1, L_1, M_1, N_1, P_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(2;0)}$.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки K_1, L_1, M_1, N_1, P_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

27. Точки $Q(1;8)$, $R(2;4)$, $S(4;2)$, $T(8;1)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок Q_1, R_1, S_1, T_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;-2)}$.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки Q_1, R_1, S_1, T_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

28. Точки $H(-1;-6)$, $T(-2;-3)$, $M(-3;-2)$, $L(-6;-1)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок H_1, T_1, M_1, L_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;3)}$.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки H_1, T_1, M_1, L_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

29. Точки $C(-2;-2)$, $D(-1;-1)$, $E(0;0)$, $F(1;1)$, $H(2;2)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок C_1, D_1, E_1, F_1, H_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за симетрії відносно осі Oy.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки C_1, D_1, E_1, F_1, H_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

30. Точки $P(-4;-8)$, $R(-3;-6)$, $S(0;0)$, $T(1;2)$, $U(2;4)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок P_1, R_1, S_1, T_1, U_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за симетрії відносно осі Ox.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки P_1, R_1, S_1, T_1, U_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

31. За допомогою перетворень із графіка функції $y=x^2$ отримали графік функції, який зображено на рис. 15. Запишіть формулу для функції, графік якої зображено на рисунку.

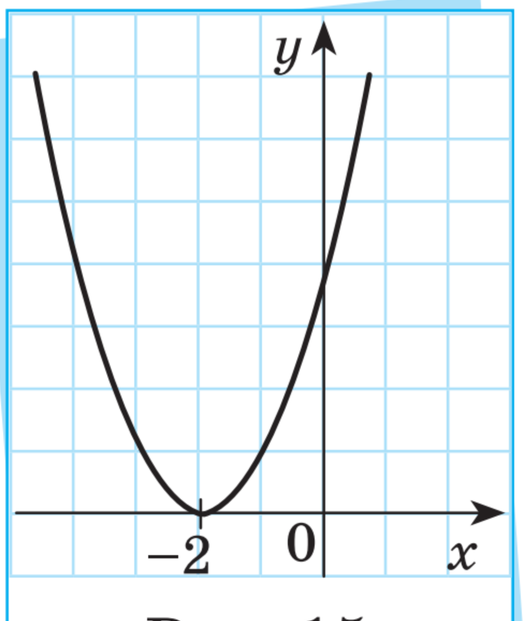


Рис. 15

32. За допомогою перетворень із графіка функції $y=x^2$ отримали графік функції, який зображено на рис. 16. Запишіть формулу для функції, графік якої зображено на рисунку.

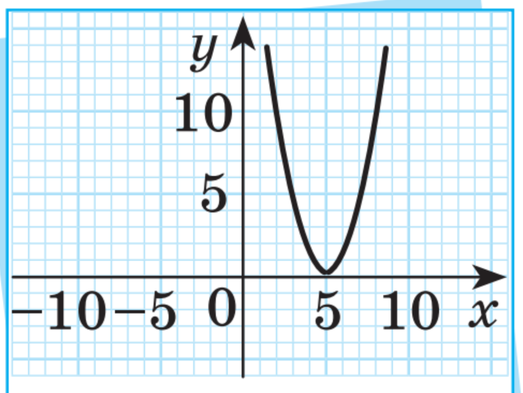


Рис. 16

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

33. Задано графік функції $y=x$ (рис. 17). Побудуйте графіки функцій:

а) $y=x+3$; б) $y=x-5$; в) $y=\frac{1}{2}x$; г) $y=-2x$.

34. Задано графік функції $y=-x$ (рис. 18). Побудуйте графіки функцій:

а) $y=-x-1$; б) $y=-x+4$; в) $y=-3x$; г) $y=\frac{1}{3}x$.

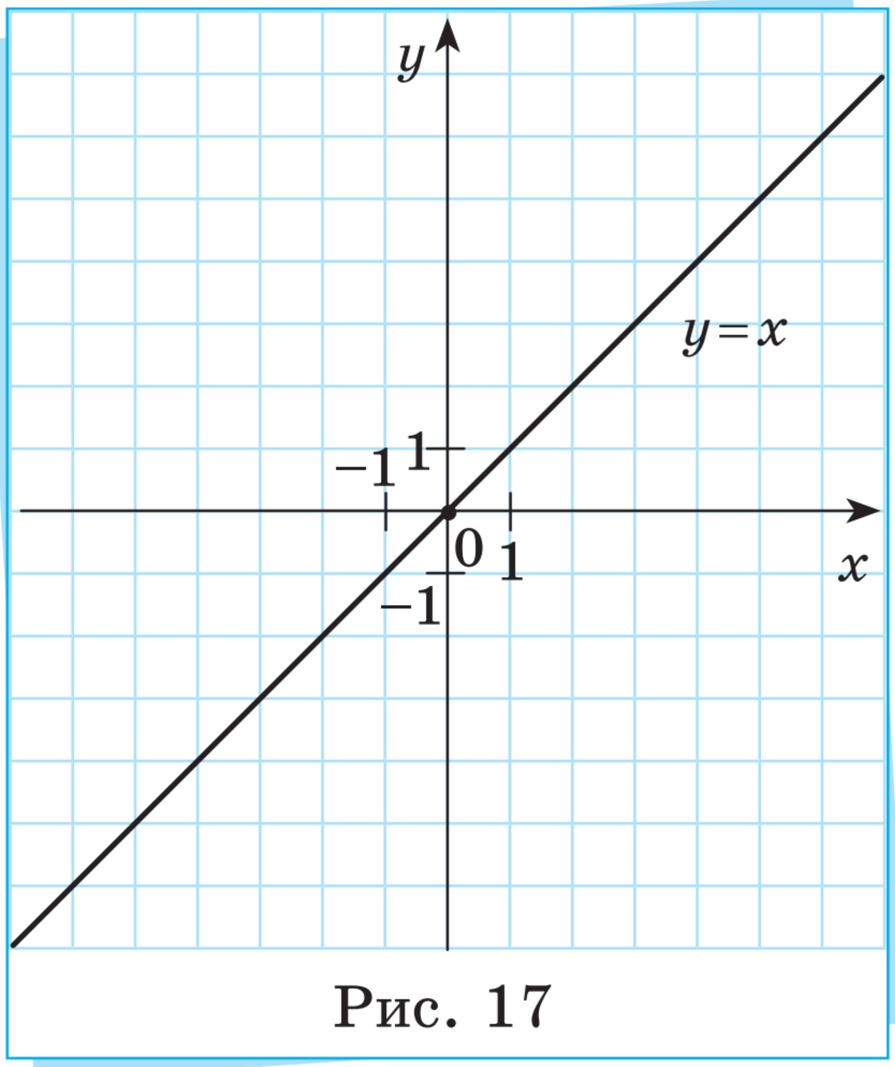


Рис. 17

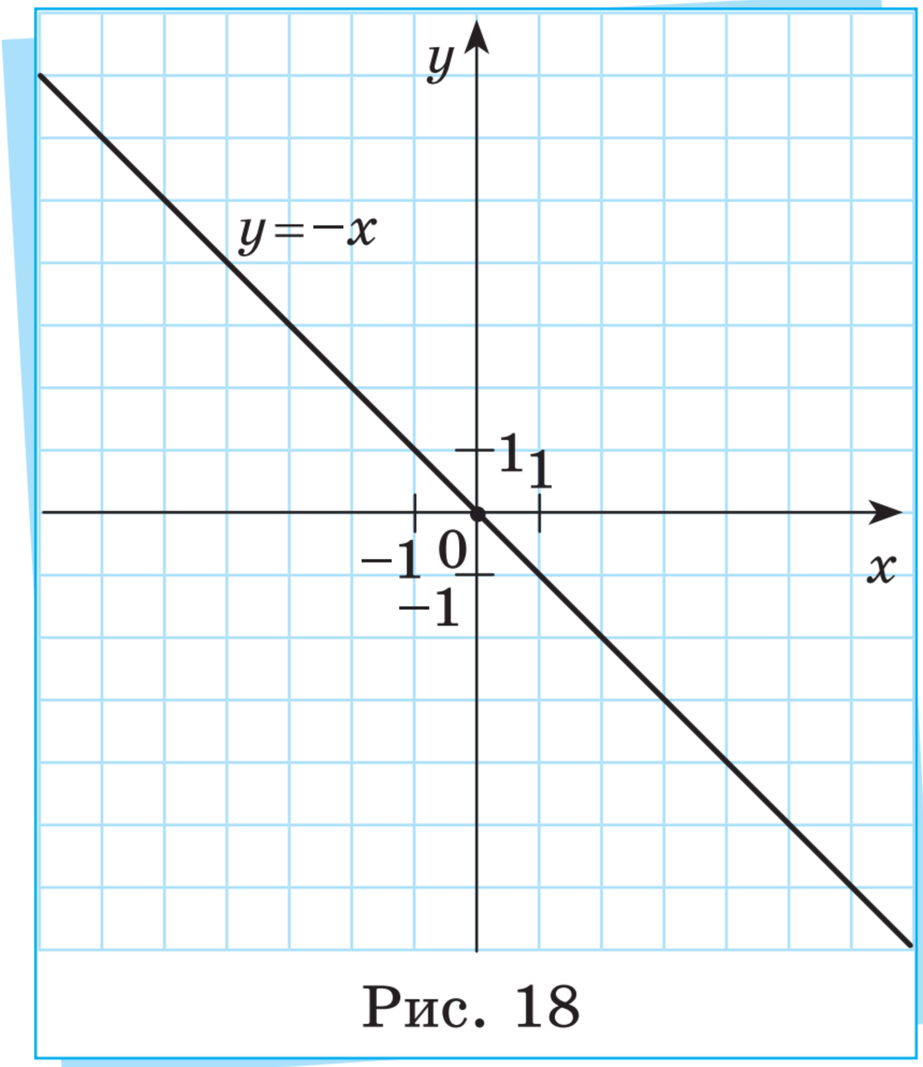


Рис. 18

Достатній рівень

35. На рис. 19 зображено графік функції $f(x)$. За даними графіка визначте:

а) область визначення $D(f)$ функції $f(x)$;

б) множину значень $E(f)$ функції $f(x)$;

в) множину, на якій функція зростає;

г) множину, на якій функція спадає.

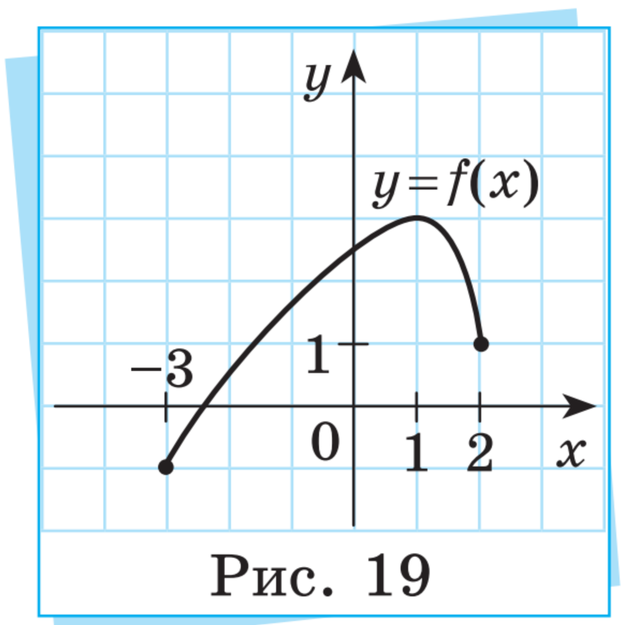


Рис. 19

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

36. На рис. 20 зображено графік функції $f(x)$. За даними графіка визначте:

а) область визначення $D(f)$ функції $f(x)$;

б) множину значень $E(f)$ функції $f(x)$;

в) множину, на якій функція зростає;

г) множину, на якій функція спадає.

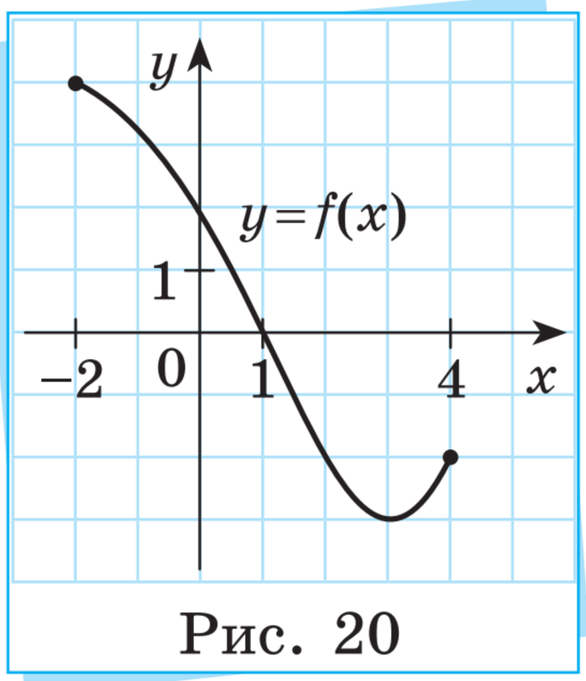


Рис. 20

37. Точки $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(1;1)$, $D(3;0)$, $E(5;1)$ належать графіку функції $y=g(x)$.

а) Побудуйте графік функції $g(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, які належать образу графіка функції $g(x)$ за деформації з коефіцієнтом $k=2$ до осі Ox.

в) Побудуйте образ графіка функції $g(x)$, позначивши точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

38. Точки $H(-2;-1)$, $K(-1;-2)$, $L(0;-1)$, $M(2;0)$, $N(4;-1)$ належать графіку функції $y=g(x)$.

а) Побудуйте графік функції $g(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок H_1, K_1, L_1, M_1, N_1, які належать образу графіка функції $g(x)$ за деформації з коефіцієнтом $k=0,5$ до осі Ox.

в) Побудуйте образ графіка функції $g(x)$, позначивши точки H_1, K_1, L_1, M_1, N_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

39. Точки $A(-2;0)$, $B(-1;3)$, $C(0;4)$, $D(1;3)$, $E(2;0)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

б) Знайдіть координати точок A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за деформації з коефіцієнтом $k=4$ до осі Oy.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

40. Точки $P(-2;0)$, $Q(-1;-3)$, $R(0;-4)$, $S(1;-3)$, $T(2;0)$ належать графіку функції $y=f(x)$.

а) Побудуйте графік функції $f(x)$, позначивши задані точки на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією.

б) Знайдіть координати точок P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, які належать образу графіка функції $f(x)$ за деформації з коефіцієнтом $k=0{,}5$ до осі Oy.

в) Побудуйте образ графіка функції $f(x)$, позначивши точки P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 на ПДСК і з'єднавши їх плавною лінією. Запишіть формулу для функції, графік якої побудовано.

41. Які перетворення необхідно виконати для того, щоб, використовуючи графік функції $y=x^2$, побудувати графік функції $y=2-x^2$?

42. Які перетворення необхідно виконати для того, щоб, використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$, побудувати графік функції $y=-\sqrt{x+3}$?

43. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій:

а) $y=\sqrt{x}+4$; б) $y=\sqrt{x+4}$; в) $y=-\sqrt{x+4}$; г) $y=4\sqrt{x}$.

44. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій:

а) $y=\sqrt{x+1}$; б) $y=\sqrt{x}+1$; в) $y=\sqrt{-x}$; г) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

45. Побудуйте графік функції $y=\frac{4}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій:

а) $y=\frac{4}{x}+2$; б) $y=\frac{4}{x-1}$; в) $y=\frac{4}{x+3}$; г) $y=\frac{4}{x}-2$.

46. Побудуйте графік функції $y=\frac{3}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій:

а) $y=\frac{3}{x}-1$; б) $y=\frac{3}{x+2}$; в) $y=\frac{3}{x-4}$; г) $y=\frac{3}{x}+2$.

47. Побудуйте графік функції $y=x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій:

а) $y=(x-2)^2$; б) $y=x^2+2$; в) $y=\frac{1}{2}x^2$; г) $y=(2-x)^2$.

48. Побудуйте графік функції $y=x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки функцій:

а) $y=(x+1)^2$; б) $y=x^2-3$; в) $y=3x^2$; г) $y=-x^2+4$.

49. Тетянчин хом'як з'їдає 10 г корму щодня.

а) Задайте формулою функцію, яка описує залежність кількості корму, який з'їв хом'як, від кількості днів.

б) Побудуйте графік цієї функції.

в) Напишіть, який вигляд мала б формула такої функції, якби в Тетянки було три однакових хом'яки.

г) Побудуйте графік нової функції.

д) Яке перетворення переводить графік початкової функції у графік нової функції?

50. Персональний комп'ютер Петрика споживає в середньому 0,35 кВт електричної енергії за годину.

а) Задайте формулою функцію, яка описує залежність кількості електричної енергії, спожитої комп'ютером Петрика, від кількості годин роботи.

б) Побудуйте графік цієї функції.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

в) Запишіть, який вигляд мала б формула такої функції, якби комп'ютер Петрика споживав 0,175 кВт електричної енергії за годину.

г) Побудуйте графік нової функції.

д) Яке перетворення переводить графік початкової функції у графік нової функції?

Високий рівень

51. На рис. 21 зображено графік функції $y=f(x)$, заданої на проміжку $[-3;3]$. Побудуйте графік функції:

а) $y=-f(x)$;

б) $y=f(-x)$;

в) $y=2f(x)$;

г) $y=\frac{1}{2}f(x)$;

д) $y=f(2x)$;

е) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$;

є) $y=f(x)+2$;

ж) $y=f(x+2)$.

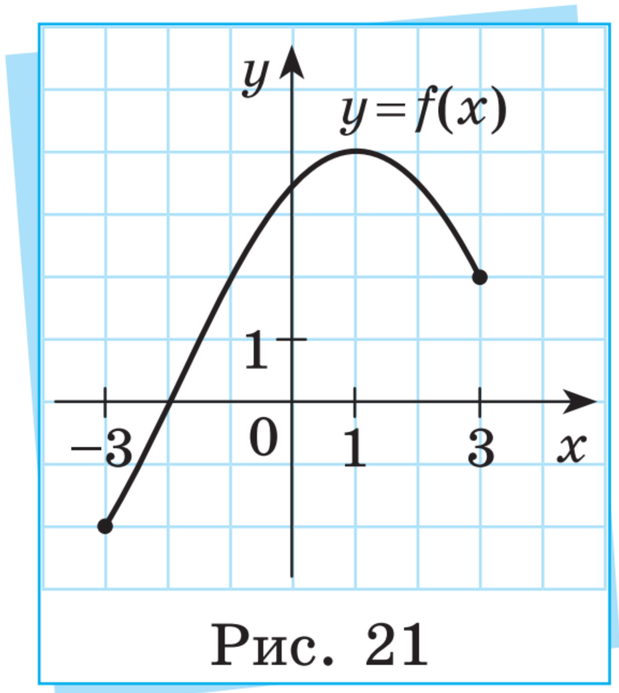


Рис. 21

Користуючись побудованим графіком, укажіть область визначення $D(y)$ і множину значень $E(y)$ одержаної функції для кожного з випадків *а*–*ж*.

52. На рис. 22 зображено графік функції $y=f(x)$, заданої на проміжку $[-2;4]$. Побудуйте графік функції.

а) $y=f(-x)$;

б) $y=-f(x)$;

в) $y=0{,}5f(x)$;

г) $y=3f(x)$;

д) $y=f(2x)$;

е) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;

є) $y=f(x)-1$;

ж) $y=f(x-1)$.

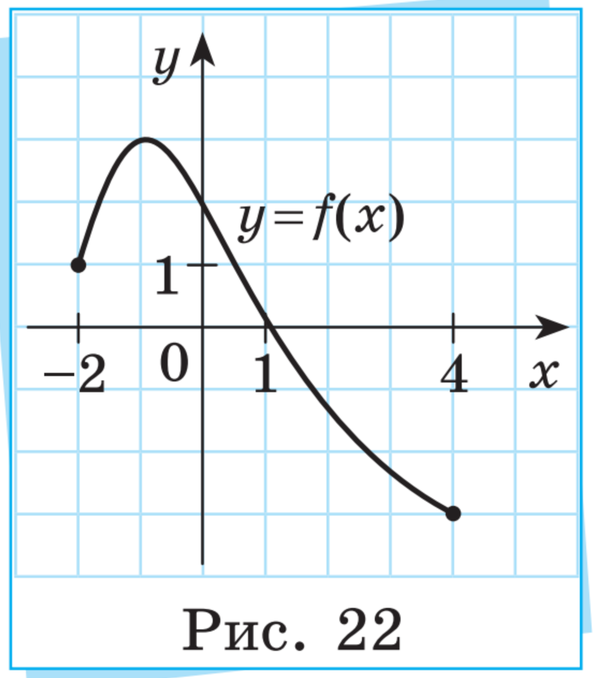


Рис. 22

Користуючись побудованим графіком, укажіть область визначення $D(y)$ і множину значень $E(y)$ одержаної функції для кожного з випадків *а*–*ж*.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

53. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання й спадання функції та множину значень функції.

а) $y=(x+2)^2-1$;
в) $y=3-(x-4)^2$;
б) $y=(x-3)^2+2$;
г) $y=-(x+1)^2-2$.

54. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання й спадання функції та множину значень функції.

а) $y=(x-1)^2+5$;
в) $y=-(x+2)^2+1$;
б) $y=(x+3)^2-2$;
г) $y=2-(x-5)^2$.

55. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть множину значень функції.

а) $y=\sqrt{x+4}-2$;
в) $y=-\sqrt{3x}-1$;
б) $y=3\sqrt{x-2}+1$;
г) $y=\sqrt{2x-4}+3$.

56. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть множину значень функції.

а) $y=\sqrt{x-3}+2$;
в) $y=3-\sqrt{2x}$;
б) $y=2\sqrt{x-1}-5$;
г) $y=\sqrt{3x+6}-2$.

57. Побудуйте графік функції.

а) $y=\dfrac{-1}{x+5}+4$;
в) $y=\dfrac{-3}{x+1}-5$;
б) $y=\dfrac{2}{x-3}-2$;
г) $y=\dfrac{1}{2x+4}+1$.

58. Побудуйте графік функції.

а) $y=\dfrac{1}{3-x}-4$;
в) $y=\dfrac{-2}{x-4}-1$;
б) $y=\dfrac{3}{x+4}+2$;
г) $y=\dfrac{1}{3x-6}+3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

59. Побудуйте графік функції.

а) $y=(2x+1)^2-3$;

б) $y=\sqrt{3x-9}-5$;

в) $y=\dfrac{-1}{4x+4}-2$;

г) $y=1-\sqrt{9x+18}$.

60. Побудуйте графік функції.

а) $y=4-(3x-12)^2$;

б) $y=4-\dfrac{1}{2x+6}$;

в) $y=\sqrt{4x-8}-6$;

г) $y=-\sqrt{2x-4}-1$.

61. Подайте задану функцію у вигляді $y=a(x-m)^2+n$ і побудуйте її графік, використовуючи перетворення графіка функції $y=x^2$.

а) $y=x^2-6x+5$;

б) $y=2x^2+8x-1$;

в) $y=-x^2+4x+1$;

г) $y=-3x^2-12x-10$.

62. Подайте задану функцію у вигляді $y=a(x-m)^2+n$ і побудуйте її графік, використовуючи перетворення графіка функції $y=x^2$.

а) $y=x^2+10x+22$;

б) $y=3x^2-18x+25$;

в) $y=-x^2-2x+1$;

г) $y=-2x^2+8x-9$.



Цікавинки від дідуся Тараса

Використовуючи геометричні перетворення, можна будувати й складніші графіки функцій. Нехай графік функції $y=f(x)$ уже побудовано. Знайдемо алгоритми, за якими можна побудувати графіки функцій $y=|f(x)|$ і $y=f(|x|)$.

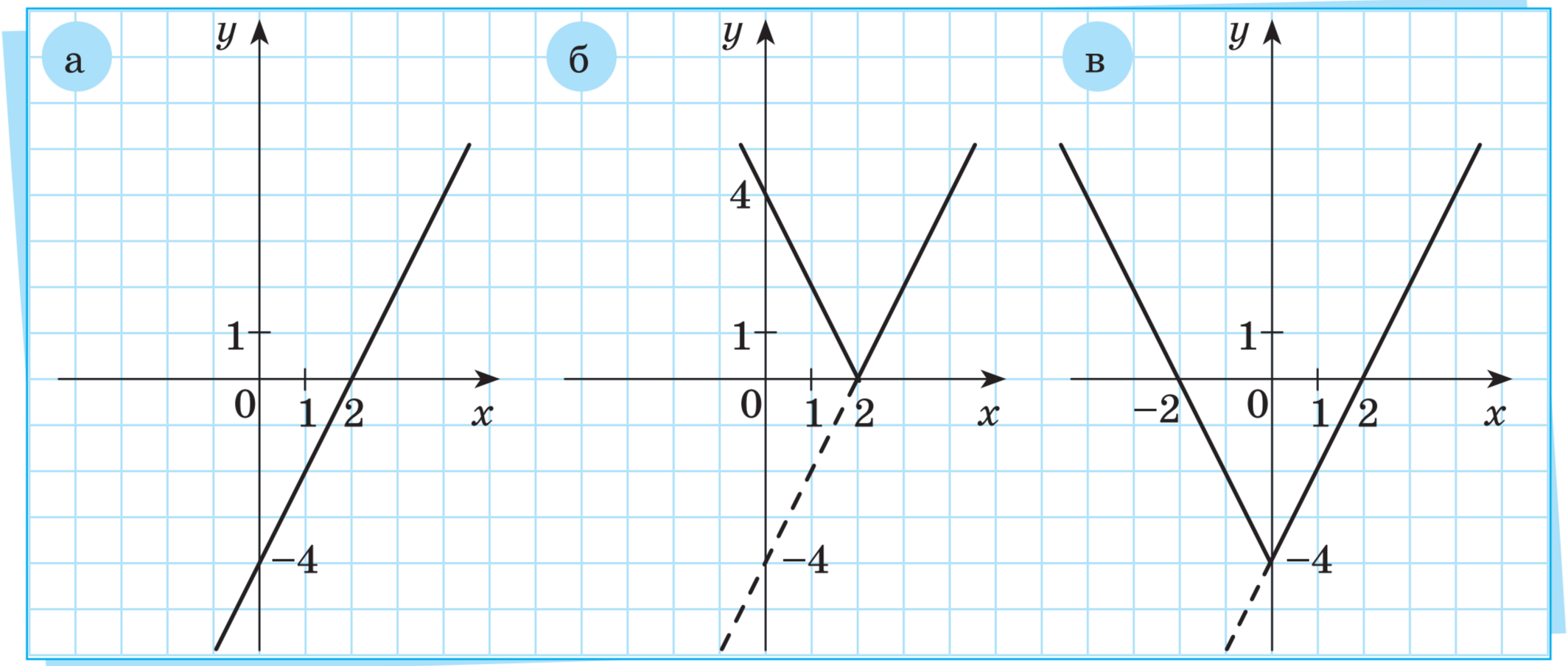
За означенням модуля $|f(x)|=f(x)$ для всіх значень x, для яких $f(x)\geqslant 0$, а також $|f(x)|=-f(x)$ для всіх значень x, для яких $f(x)<0$. Отже, щоб побудувати графік функції $y=|f(x)|$, можна:

- частину графіка функції $y=f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі Ox), залишити без змін;
- побудувати образ тієї частини графіка функції $y=f(x)$, яка лежить нижче осі Ox, за симетрії відносно осі Ox.

Аналогічно з означення модуля випливає, що графік функції $y=f\left(\left|x\right|\right)$ збігатиметься з графіком функції $y=f\left(x\right)$ для всіх $x\geqslant 0$ і з графіком функції $y=f\left(-x\right)$ для всіх $x<0$. Отже, щоб побудувати графік функції $y=f\left(\left|x\right|\right)$, можна:

- частину графіка функції $y=f\left(x\right)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі Oy), залишити без змін;
- побудувати образ тієї частини графіка функції $y=f\left(x\right)$, яка лежить праворуч від осі Oy, за симетрії відносно осі Oy.

Наприклад, на рисунку *а* зображено графік функції $y=2x-4$, на рисунку *б* — графік функції $y=\left|2x-4\right|$, а на рисунку *в* — графік функції $y=2\left|x\right|-4$. При цьому на рисунках *б* і *в* частину графіка функції $y=2x-4$, яка не збігається з побудованими графіками, зображено пунктирною лінією.





Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На початку § 7 Тетянка згадувала фонтан у парку. Запропонуйте функцію, графік якої був би схожий на обриси цього фонтана.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. Чи траплялися вам у повсякденному житті об'єкти, форма яких схожа на графіки відомих вам функцій? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.

3. Використовуючи алгоритми побудови графіків функцій $y=\left|f\left(x\right)\right|$ і $y=f\left(\left|x\right|\right)$ із «Цікавинок дідуся Тараса», побудуйте відповідні графіки, якщо в ролі функції $y=f\left(x\right)$ виступають відомі вам функції $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ і $y=\dfrac{k}{x}$. Зробіть висновки.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть.

а) $2\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}:2\frac{4}{9}$; б) $1\frac{1}{5}\cdot1\frac{7}{8}-5\frac{3}{4}$.

2. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $S\left(3;-2\right)$, $P\left(2;1\right)$. Знайдіть координати точок перетину цієї прямої з осями координат.

3. Доведіть, що серед 30 учениць і учнів 9 класу знайдуться принаймні четверо, які народилися в той самий день тижня.

4. У магазині «Дисконт» постійно діють знижки на придбання гречаної крупи. На перший придбаний кілограм діє знижка 10 %, а на кожен наступний придбаний кілограм знижка збільшується на 5 %. Яку знижку (у відсотках від вартості крупи без знижки) можна отримати в цьому магазині, якщо придбати там 4 кг гречаної крупи?

5. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC довжина бісектриси, проведеної з вершини B, дорівнює 10 см. Знайдіть периметр цього трикутника, якщо $\angle A=30^\circ$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 8. Квадратична функція, її графік і властивості





Слухай, Тетянко, твій фонтан у вигляді параболи мене надихнув на пошуки чогось схожого! І довго шукати не довелося, поглянь на фото — наші родичі цього літа були в Бухаресті. Як на мене, це теж парабола, як у графіка функції $y = x^2$, тільки перевернута.





У мене теж є цікаве фото на цю тему. Дивись, цю веселку я сфотографувала в селі Медведівка Вінницької області. Схоже, вона теж має параболічну форму. Дуже цікаво дізнатися більше про параболу. Чомусь здається, що існує якась загальна формула, яка задає лінії цього типу, аналогічна до формули $y = ax + b$, якою можна задати майже будь-яку пряму на площині.





Насправді Тетянка помилилася. Веселка лише зовні схожа на параболу, а в дійсності є дугою кола. Більше про параболу та її застосування — у «Цікавинках від дідуся Тараса» наприкінці § 8.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Слушно міркуєш, Тетянко, така формула дійсно існує.



Функцію $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дійсні числа, причому $a \neq 0$, а x — змінна, називають квадратичною функцією.

Наприклад, функція $y = -2x^2 + 4x + 6$ є квадратичною функцією. У неї $a = -2$, $b = 4$, $c = 6$. Функції $y = x^2 - 4x$ і $y = -x^2 + 5$ також є квадратичними. Для першої з них $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$, а для другої $a = -1$, $b = 0$, $c = 5$.



Графік квадратичної функції справді можна отримати з графіка функції $y = x^2$, використовуючи геометричні перетворення площини. Покажемо це.

Розглянемо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ і виконаємо його тотожні перетворення:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Нехай $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Тоді будь-яку квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$ можна записати у вигляді $y = a(x - m)^2 + n$.



Якщо $a > 0$, то за теоремою про образи графіків функцій за геометричних перетворень площини (див. § 7) випливає, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ є образом графіка функції $y = x^2$ за перетворення, яке полягає в послідовному виконанні:

- деформації з коефіцієнтом $k = a$ до осі Ox;
- паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(m; n)}$, де $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Якщо $a<0$, то за цією самою теоремою графік функції $y=ax^2+bx+c$ є образом графіка функції $y=x^2$ за перетворення, яке полягає в послідовному виконанні:

- симетрії відносно осі Ox;
- деформації з коефіцієнтом $k=-a$ до осі Ox;
- паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(m;n)}$, де $m=-\dfrac{b}{2a}$, $n=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.



Оскільки графік функції $y=x^2$ є параболою, то природно, що графік функції $y=ax^2+bx+c$ теж є параболою. Також зауважимо, що для квадратичної функції $y(m)=am^2+bm+c=$

$$=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{4ac-b^2}{4a}=n.$$

Тому для знаходження значення n можна просто підставити значення m замість змінної x у вираз, що задає квадратичну функцію.

Наприклад, для функції $y=-2x^2+4x+6$ $m=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\cdot(-2)}=1$, $n=-2\cdot1^2+4\cdot1+6=8$. Тому для побудови графіка даної функції потрібно побудувати графік функції $y=x^2$, а потім знайти образ цього графіка за перетворення, що полягає в послідовному виконанні:

- симетрії відносно осі Ox;
- деформації з коефіцієнтом $k=2$ до осі Ox;
- паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{(1;8)}$.



Уважні учні й учениці могли помітити, що формулу $n=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ можна записати у вигляді $n=\dfrac{-D}{4a}$, де $D=b^2-4ac$ — дискримінант

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$. За бажання можна знаходити значення n і цим способом.



Ми знаємо, що графік функції $y=x^2$ є параболою, вершина якої розташована в точці $O(0;0)$. Нескладно помітити, що під час побудови графіка функції $y=ax^2+bx+c$ образом цієї точки є точка $O'(m;n)$, яку також природно назвати вершиною параболи $y=ax^2+bx+c$.

Вітки параболи $y=x^2$, як відомо, спрямовані вгору. Очевидно, що для параболи $y=ax^2+bx+c$, якщо $a>0$, її вітки також будуть спрямовані вгору, а якщо $a<0$, — вниз.



Для з'ясування певних властивостей функції часто можна не будувати графік функції точно, а використати ескіз її графіка.



Для побудови ескізу графіка квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ досить визначити:

- координати вершини параболи $O'(m;n)$, де $m=-\dfrac{b}{2a}$, $n=am^2+bm+c$;
- напрямок віток параболи: якщо $a>0$, то вітки спрямовані вгору, а якщо $a<0$, то вітки спрямовані вниз.

Наприклад, як ми вже знаємо, вершиною параболи $y=-2x^2+4x+6$ є точка $O'(1;8)$, а її вітки спрямовані вниз. Зобразимо ескіз графіка цієї функції (рис. 8.1). За цим ескізом можна встановити такі властивості функції $y=-2x^2+4x+6$:

- областю визначення є множина всіх дійсних чисел, тобто $D(y)=(-\infty;+\infty)$;
- множиною значень є всі дійсні числа, не більші за 8, тобто $E(y)=(-\infty;8]$;
- функція зростає на проміжку $(-\infty;1]$ і спадає на проміжку $[1;+\infty)$.

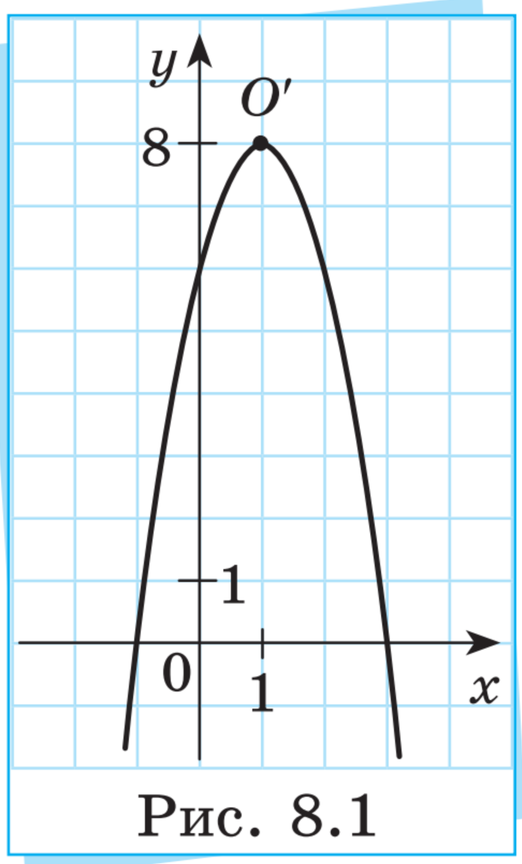


Рис. 8.1

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Ви могли помітити, що функція з останнього прикладу зростає не лише на проміжку $(-\infty;1]$, а й на будь-якому іншому проміжку, який повністю міститься в $(-\infty;1]$. Також ця функція спадає не лише на проміжку $[1;+\infty)$, а й на будь-якому іншому проміжку, який повністю міститься в $[1;+\infty)$. Тому традиційно під час визначення проміжків зростання функції вказують «найбільший» із проміжків, тобто той, на якому функція зростає, але він містить у собі всі інші проміжки зростання цієї функції. Аналогічно діють і під час встановлення проміжків спадання функції.



Більше про побудову ескізів графіків і визначення за ними властивостей квадратичних функцій:
rnk.com.ua/112813







Для з'ясування інших властивостей функції потрібно будувати її графік точніше. Для цього корисним є знаходження точок перетину графіка функції з осями координат. Для лінійної функції цих точок досить для побудови її графіка. Справді, знайдемо точки перетину графіка функції $y=2x-4$ з осями координат. Нагадаємо: якщо точка належить осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю. Якщо $x=0$, то $y=-4$. Отже, точка $A(0;-4)$ є точкою перетину графіка функції $y=2x-4$ з віссю ординат. Також ми знаємо: якщо точка належить осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю. Якщо $y=0$, то $2x-4=0$, звідки $x=2$. Отже, точка $B(2;0)$ є точкою перетину графіка функції $y=2x-4$ з віссю ординат. Оскільки графіком лінійної функції є пряма, то очевидно, що цією прямою буде пряма AB.



Для знаходження точок перетину графіка квадратичної функції з осями координат діють аналогічно.

Наприклад, для функції $y=-2x^2+4x+6$ точкою перетину з віссю ординат є точка $A(0;6)$. Її ординату просто знайти, підставивши значення $x=0$ у вираз $-2x^2+4x+6$.

Для знаходження координат точки перетину графіка даної функції з віссю абсцис потрібно розв'язати рівняння $-2x^2+4x+6=0$. $D=4^2-4\cdot(-2)\cdot 6=64$, $x_1=\dfrac{-4+8}{-4}=-1$, $x_2=\dfrac{-4-8}{-4}=3$. Отже, точками перетину з віссю абсцис є точки $B_1(-1;0)$, $B_2(3;0)$. Знайдені точки разом із координатами вершини $O'(1;8)$ дають змогу досить точно побудувати графік функції $y=-2x^2+4x+6$ (рис. 8.2).

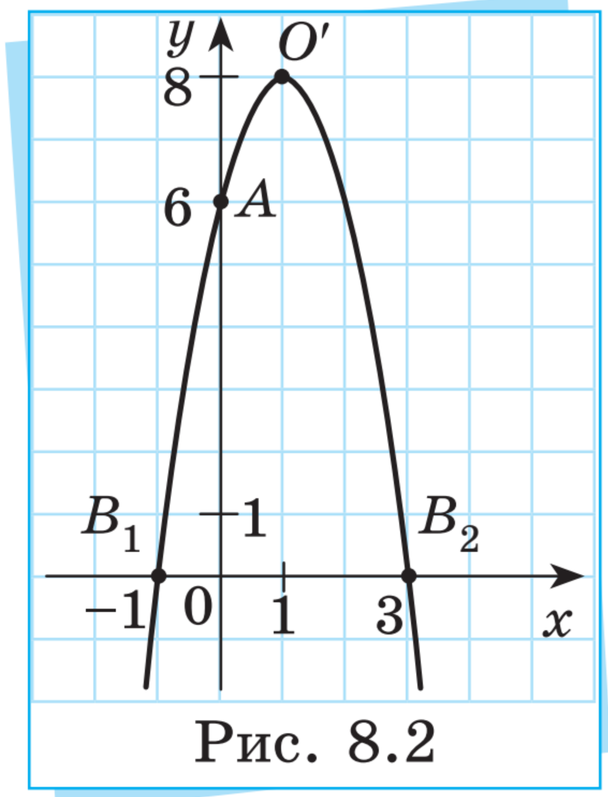


Рис. 8.2



Абсциса точки перетину графіка функції з віссю Ox має спеціальну назву.

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називають нулем цієї функції. Іншими словами, нулями функції $y=f(x)$ є всі корені рівняння $f(x)=0$.

Наприклад, нулями функції $y=-2x^2+4x+6$ є числа $x_1=-1$ і $x_2=3$.

Зрозуміло, що не всі функції мають нулі. Наприклад, функція $y=2x^2+4$ не має нулів, оскільки рівняння $2x^2+4=0$ не має коренів. *Переконайтеся в цьому самостійно.*



Із поняттям нуля функції пов'язана ще одна важлива властивість функції.

Всі значення аргументу, за яких значення функції є додатними або від'ємними, називають проміжками знакосталості. Іншими словами, проміжками знакосталості функції $y=f(x)$ називають множини розв'язків нерівності $f(x)>0$ і $f(x)<0$.

Проміжки знакосталості функції $y=f(x)$ зручно визначати, якщо знайдено нулі цієї функції та побудований її графік.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Наприклад, за графіком функції $y=-2x^2+4x+6$ легко визначити її проміжки знакосталості. Справді, з рис. 8.2 бачимо, що дана функція є додатною на проміжку $(-1;3)$ і від'ємною на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ та $(3;+\infty)$.



Для більш точного визначення проміжків знакосталості функції, зокрема квадратичної, зручно використовувати графічні калькулятори.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/112074



Перевірте себе!

1. Функцію якого виду називають квадратичною функцією? Наведіть приклади квадратичних функцій.
2. Наведіть алгоритм побудови графіка квадратичної функції як образу графіка функції $y=x^2$ за геометричних перетворень площини.
3. Як можна побудувати ескіз графіка квадратичної функції, використовуючи координати його вершини й напрямок віток? Наведіть приклади.
4. Дайте означення нуля функції. Наведіть приклади.
5. Дайте означення проміжків знакосталості функції. Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Яка з наведених функцій є квадратичною?

а) $y=x^2-5x+7$; б) $y=3x-2$; в) $y=x^4-3x+1$; г) $y=3x^2-4$.

2. Яка з наведених функцій є квадратичною?

а) $y = 4x^2 - 3x$; б) $y = 7x + 4$; в) $y = -6x^2 - x - 8$; г) $y = 2x^3 + 9$.

3. Запишіть значення коефіцієнтів a, b та c для квадратичної функції.

а) $y = 2x^2 - 3x + 4$; б) $y = 4x^2 + x - 2$; в) $y = x^2 - 5x$; г) $y = 7x^2 + 4$.

4. Запишіть значення коефіцієнтів a, b та c для квадратичної функції.

а) $y = x^2 - 6x + 7$; б) $y = 5x^2 + 8$; в) $y = 6x^2 - x + 4$; г) $y = -8x^2 - 6x$.

5. У якому з випадків *а*–*г* (рис. 1) зображено ескіз графіка квадратичної функції?

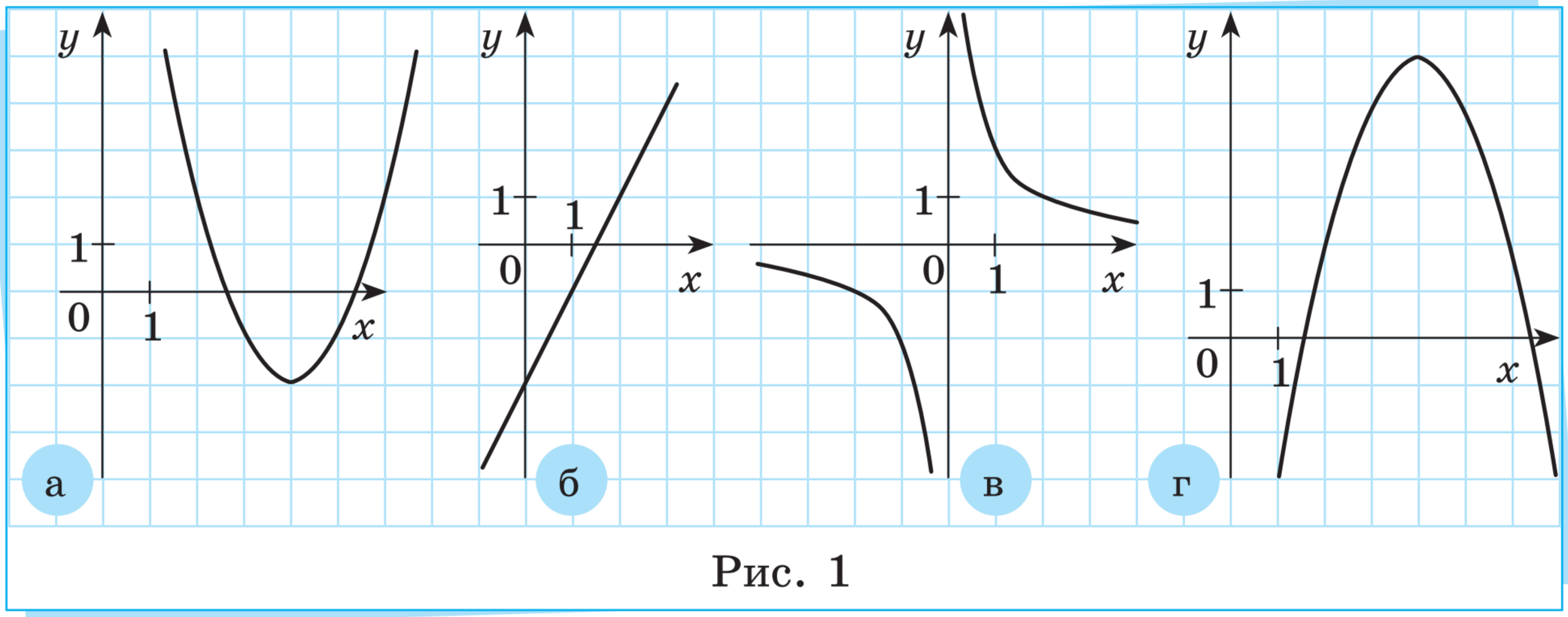


Рис. 1

6. У якому з випадків *а*–*г* (рис. 2) зображено ескіз графіка квадратичної функції?

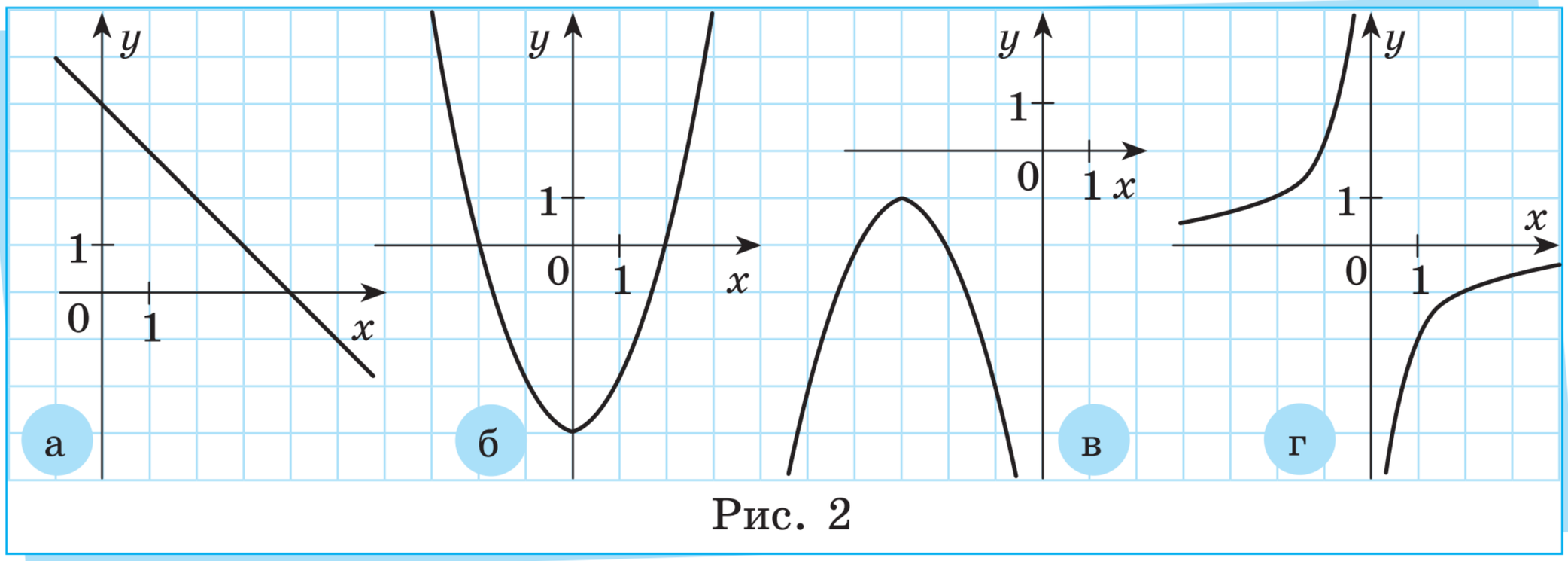


Рис. 2

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. Куди спрямовані вітки графіка квадратичної функції: вгору чи вниз?

а) $y = 2x^2 - 3x - 4$; б) $y = -5x^2 + 4x - 3$; в) $y = x^2 - 4$; г) $y = -3x^2 + 2x$.

8. Куди спрямовані вітки графіка квадратичної функції: вгору чи вниз?

а) $y = -3x^2 + 2x - 1$; б) $y = -4x^2 + 5x + 6$; в) $y = 5x^2 - 7x$; г) $y = x^2 - 9$.

9. Запишіть координати вершини параболи (рис. 3).

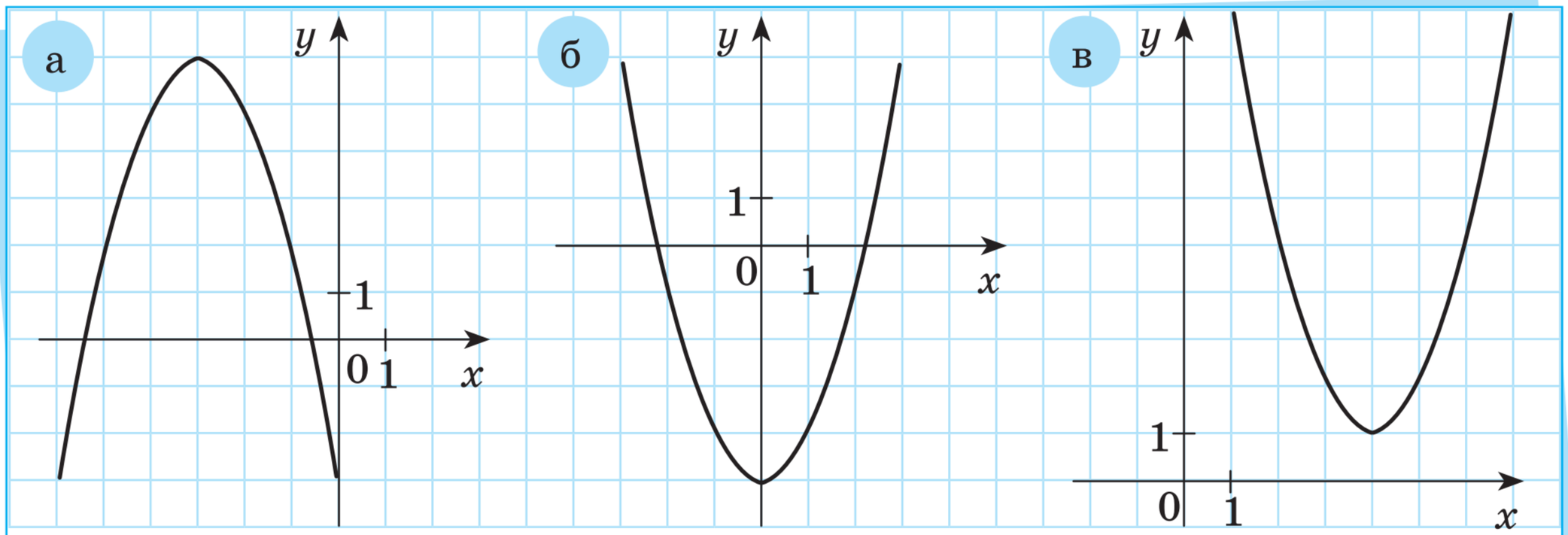


Рис. 3

10. Запишіть координати вершини параболи (рис. 4).

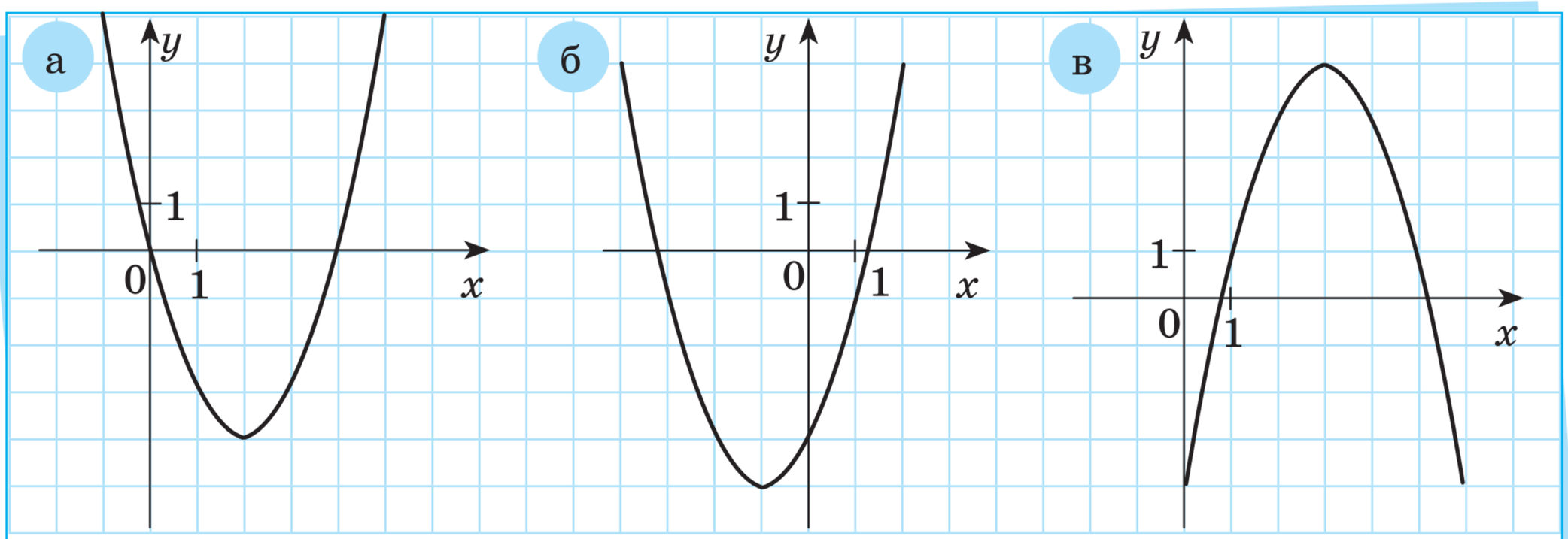


Рис. 4

11. Запишіть нулі функції, графік якої зображено на рис. 5.

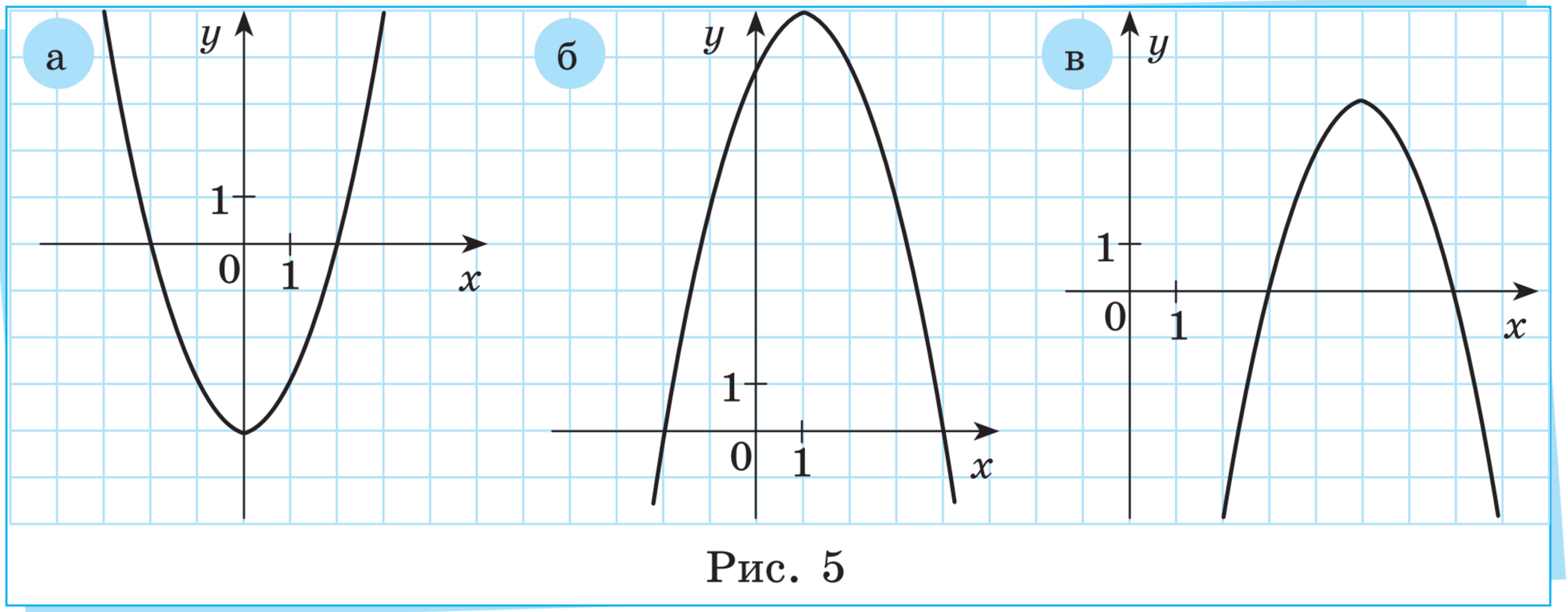


Рис. 5

12. Запишіть нулі функції, графік якої зображено на рис. 6.

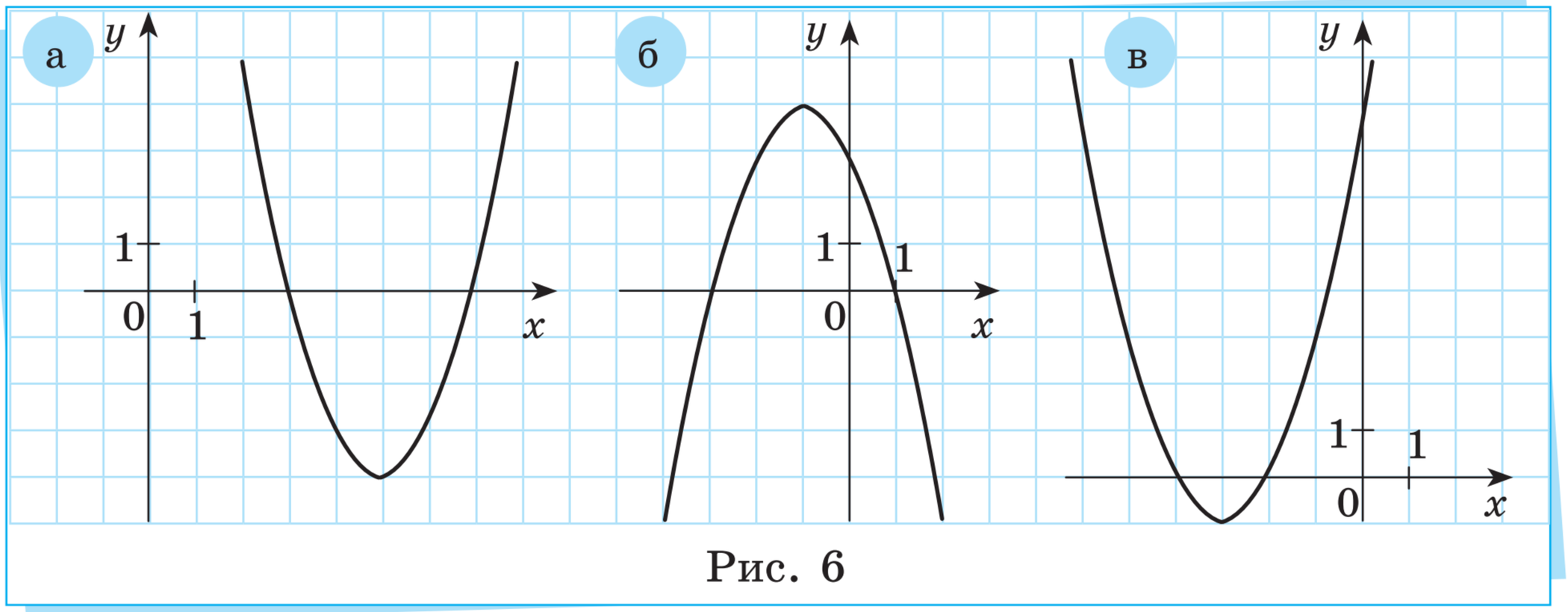


Рис. 6

Середній рівень

13. Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуйте графік функції: а) $y = x^2 + 3$; б) $y = x^2 - 4$. Яке геометричне перетворення слід виконати?

14. Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуйте графік функції: а) $y = x^2 + 2$; б) $y = x^2 - 1$. Яке геометричне перетворення слід виконати?

15. Використовуючи графік функції $y=x^2$, побудуйте графік функції: а) $y=(x-2)^2$; б) $y=(x+4)^2$. Яке геометричне перетворення слід виконати?

16. Використовуючи графік функції $y=x^2$, побудуйте графік функції: а) $y=(x+5)^2$; б) $y=(x-3)^2$. Яке геометричне перетворення слід виконати?

17. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо відомо, що вершина параболи, яка є її графіком, розташована в точці $(1;1)$, вітки параболи спрямовані вгору, а графік перетинає вісь ординат у точці $(0;2)$.

18. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо відомо, що вершина параболи, яка є її графіком, розташована в точці $(-4;1)$, вітки параболи спрямовані вниз, а графік перетинає вісь абсцис у точках $(-5;0)$ і $(-3;0)$.

19. Для заданої квадратичної функції укажіть напрямок віток параболи, яка є її графіком, і знайдіть координати вершини параболи, скориставшись формулами $m=-\frac{b}{2a}$ і $n=\frac{4ac-b^2}{4a}=am^2+bm+c$.

а) $y=x^2-6x+7$; б) $y=2x^2+4x+1$; в) $y=-4x^2+8x+1$.

20. Для заданої квадратичної функції укажіть напрямок віток параболи, яка є її графіком, і знайдіть координати вершини параболи, скориставшись формулами $m=-\frac{b}{2a}$ і $n=\frac{4ac-b^2}{4a}=am^2+bm+c$.

а) $y=2x^2-4x+1$; б) $y=3x^2-6x+3$; в) $y=-x^2-2x+3$.

21. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка заданої функції з віссю Ox.

а) $y=x^2-2x-3$; б) $y=x^2-x-2$; в) $y=x^2-2x+1$; г) $y=x^2-x+6$.

22. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка заданої функції з віссю Ox.

а) $y=x^2-x-6$;
б) $y=2x^2-x+3$;
в) $y=x^2-5x+6$;
г) $y=x^2+6x+9$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

23. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка заданої функції з віссю Oy.

а) $y=35x^2-24x+4$;
в) $y=2x^2-7x+9$;
б) $y=3x^2+2x-1$;
г) $y=x^2-10x+25$.

24. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка заданої функції з віссю Oy.

а) $y=4x^2-x+6$;
в) $y=-x^2+5x-6$;
б) $y=4x^2+4x+1$;
г) $y=x^2-15x+11$.

Достатній рівень

25. Відомо, що точки з координатами $(-3;9)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(3;9)$ належать графіку функції $y=x^2$. Побудуйте графік цієї функції. Визначте геометричні перетворення, які переводять цей графік у графіки функцій:

а) $y=2x^2$; б) $y=\frac{1}{2}x^2$; в) $y=-2x^2$; г) $y=-\frac{1}{2}x^2$.

Для вказаних точок знайдіть їх образи за цих перетворень і побудуйте графіки функцій *а–г*.

26. Відомо, що точки з координатами $(-2;4)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$ належать графіку функції $y=x^2$. Побудуйте графік цієї функції. Визначте геометричні перетворення, які переводять цей графік у графіки функцій:

а) $y=3x^2$; б) $y=\frac{1}{3}x^2$; в) $y=-3x^2$; г) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

Для вказаних точок знайдіть їх образи за цих перетворень і побудуйте графіки функцій *а–г*.

27. Побудуйте графік функції $y=(x+2)^2-3$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть:

а) область визначення функції;
б) множину значень функції;
в) множину, на якій функція зростає;
г) множину, на якій функція спадає.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

28. Побудуйте графік функції $y=(x+1)^2+2$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть:

а) область визначення функції;
б) множину значень функції;
в) множину, на якій функція зростає;
г) множину, на якій функція спадає.

29. Знайдіть координати вершини й побудуйте ескіз параболи, яка є графіком функції.

а) $y=x^2-8x+1$;
б) $y=2x^2+6x-3$;
в) $y=-x^2+2x+5$;
г) $y=-3x^2-12x-4$.

30. Знайдіть координати вершини й побудуйте ескіз параболи, яка є графіком функції.

а) $y=x^2+10x-1$;
б) $y=3x^2-18x+2$;
в) $y=-x^2-3x+1$;
г) $y=-2x^2-4x-3$.

31. За графіком квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ (рис. 7) укажіть:

а) знак a;
б) координати вершини параболи;
в) нулі функції;
г) проміжки зростання та спадання функції;
д) проміжки знакосталості функції.

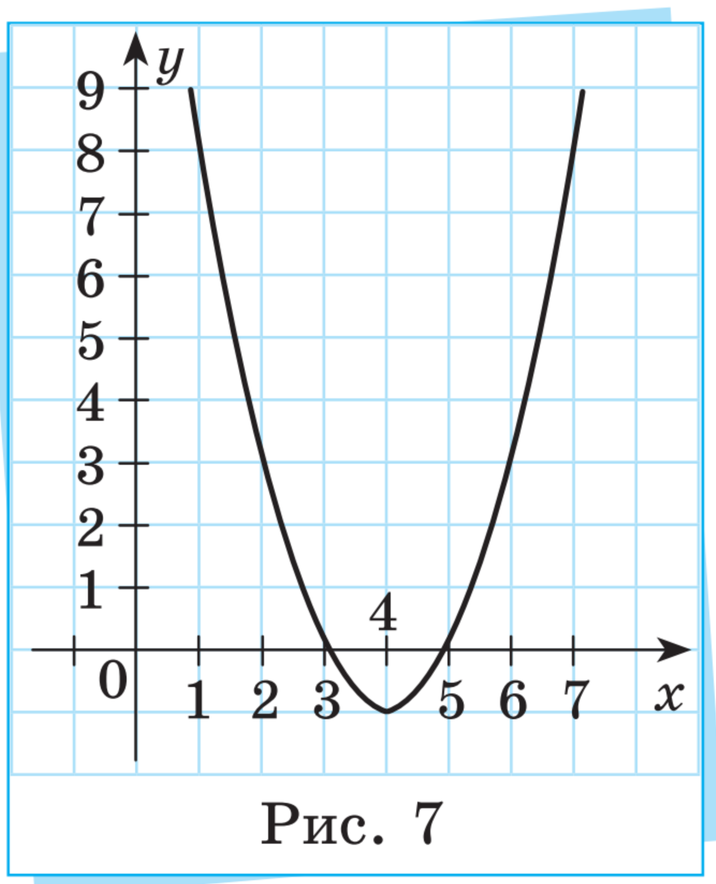


Рис. 7

32. За графіком квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ (рис. 8) укажіть:

а) знак a;
б) координати вершини параболи;
в) нулі функції;
г) проміжки зростання та спадання функції;
д) проміжки знакосталості функції.

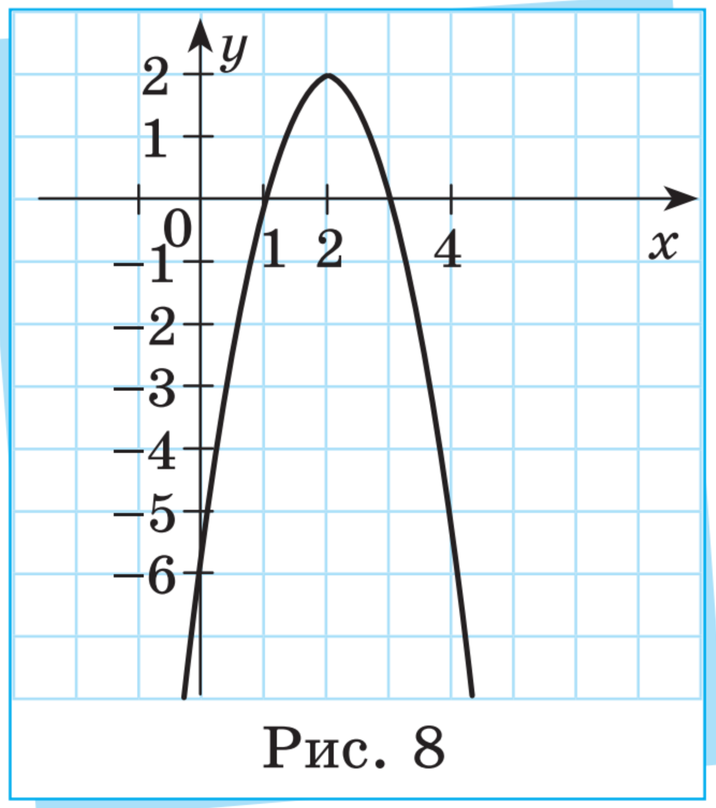


Рис. 8

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

33. Квадратичну функцію задано формулою $y = x^2 + 2x - 3$.

а) Визначте координати вершини параболи, яка є графіком цієї функції.

б) Укажіть напрямок віток параболи.

в) Знайдіть нулі цієї функції.

г) Побудуйте ескіз графіка цієї функції.

34. Квадратичну функцію задано формулою $y = x^2 - 4x - 5$.

а) Визначте координати вершини параболи, яка є графіком цієї функції.

б) Укажіть напрямок віток параболи.

в) Знайдіть нулі цієї функції.

г) Побудуйте ескіз графіка цієї функції.

35. Назвіть геометричні перетворення площини, які переводять графік функції $y = x^2$ у графік функції $y = 2(x-3)^2 + 5$. Побудуйте графік функції $y = 2(x-3)^2 + 5$, використовуючи названі перетворення та графік функції $y = x^2$.

36. Назвіть геометричні перетворення площини, які переводять графік функції $y = x^2$ у графік функції $y = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2$. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2$, використовуючи названі перетворення та графік функції $y = x^2$.

Високий рівень

37. Доведіть, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ симетричний відносно прямої (осі) $x = -\frac{b}{2a}$ (тобто відносно прямої $x = x_0$).

38. Користуючись результатом попередньої задачі, вкажіть вісь симетрії для графіка функції та побудуйте відповідний графік.

а) $y = 3x^2 - 6x - 4$; б) $y = -2x^2 - 8x + 1$.

39. Знайдіть усі значення b і c, за яких вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$ є точка $(-3; 2)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

40. Знайдіть усі значення a і c, за яких вершиною параболи $y = ax^2 + 4x + c$ є точка $(5; -2)$.

41. Побудуйте графік заданої функції. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання та спадання функції.

а) $y = 3x^2 - 12x + 11$; б) $y = -4x^2 - 4x + 3$.

42. Побудуйте графік заданої функції. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання та спадання функції.

а) $y = -2x^2 + 4x + 1$; б) $y = 0{,}5x^2 + 2x - 1$.

43. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 + 4x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть усі значення a, для яких рівняння $2x^2 + 4x - 3 = a$ має корені.

44. Побудуйте графік функції $y = -x^2 - 6x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть усі значення b, для яких рівняння $-x^2 - 6x - 5 = b$ має корені.

45. Знайдіть нулі даної функції та побудуйте її графік. Користуючись графіком функції, вкажіть проміжки її знакосталості.

а) $y = 2x^2 + 4x - 6$; б) $y = -x^2 + 5x + 6$.

46. Знайдіть нулі даної функції та побудуйте її графік. Користуючись графіком функції, вкажіть проміжки її знакосталості.

а) $y = -4x^2 - 4x + 8$; б) $y = 0{,}5x^2 + x - 4$

47. Доведіть: якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має нулі x_1 і x_2, то абсциса вершини параболи — графіка цієї функції є серединою відрізка $[x_1; x_2]$.

48. Нехай точка $M(x_0; y_0)$ є вершиною параболи — графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Доведіть, що якщо коефіцієнт $a > 0$, то функція має найменше значення y_0, а якщо $a < 0$, то функція має найбільше значення y_0 (де $y_0 = y(x_0)$).

49. Побудуйте графік функції $y = 0{,}2x^2 - x + 3$ і доведіть, що дана функція набуває лише додатних значень.

50. Побудуйте графік функції $y = -3x^2 + 6x - 4$ і доведіть, що дана функція набуває лише від'ємних значень.

51. М'яч кинули вертикально вгору з висоти 3 м з початковою швидкістю 9 м/с. На яку максимальну висоту піднявся м'яч та коли він упаде на землю? Зобразіть графік залежності висоти h (у метрах), на якій перебуває м'яч, від часу t його польоту (у секундах).

Вказівка. Використайте відому з курсу фізики залежність, що висота h, на якій перебуває м'яч, є квадратичною функцією від часу польоту t, яка обчислюється за формулою $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$, де v_0 — початкова швидкість руху, а h_0 — початкова висота м'яча. Візьміть $g \approx 9{,}8$ м/с^2 й знайдіть значення шуканих величин з точністю до десятих.

52. Футболіст, зріст якого 2 м, на тренуванні відбив м'яч головою вертикально вгору, надавши йому початкової швидкості 10 м/с. Запишіть рівняння, яке описує залежність висоти h, на якій перебуває м'яч, від часу t його польоту. На яку максимальну висоту піднявся м'яч та коли він впаде на землю? Зобразіть графік залежності висоти, на якій перебуває м'яч, від часу його польоту.

Цікавинки від дідуся Тараса

Як уже було зазначено вище, насправді веселка є дугою кола. Переконатися в цьому можна, зокрема, спостерігаючи *гало* — кругову веселку, як на наведеному фото. Більше про веселку дізнайтеся у вчителя або вчительки фізики.

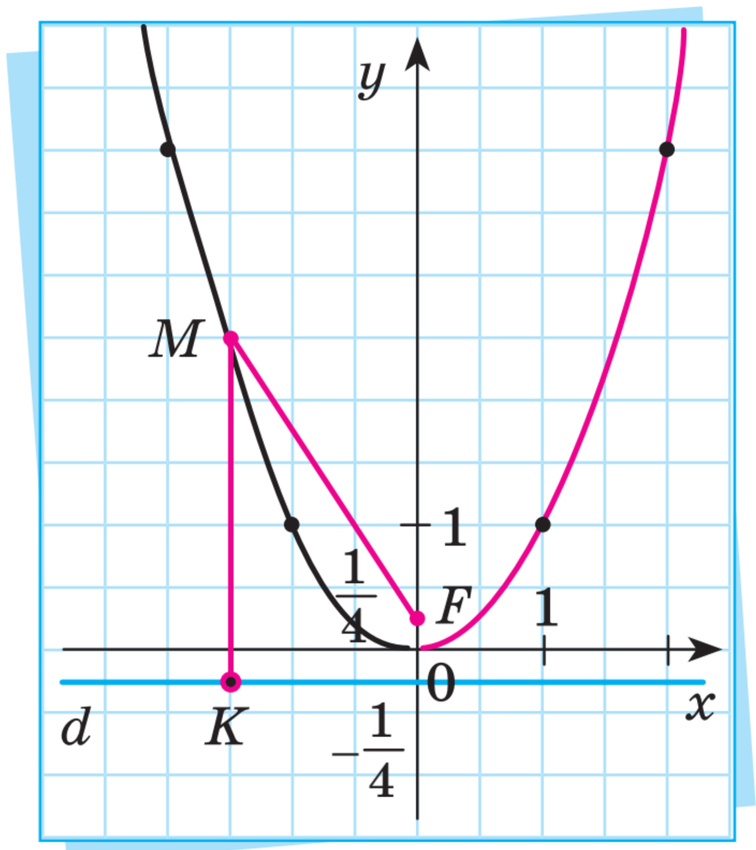


Проте помилка Тетянки щодо веселки є досить типовою, бо дуга кола дійсно схожа на параболу. Яка ж принципова відмінність параболи від інших ліній подібної форми?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Як ви, можливо, пам'ятаєте, в курсі 8 класу ми вже відзначали, що кожна точка параболи, заданої рівнянням $y = x^2$, рівновіддалена від точки $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ і прямої d, заданої рівнянням $y = -\frac{1}{4}$.

Доведемо цей факт. Нехай точка M належить графіку згаданої функції. Тоді $M\left(x; x^2\right)$. Як нескладно помітити на рисунку, відстань MK від точки M до прямої d дорівнює $x^2 + \frac{1}{4}$. За відомою вам формулою довжини відрізка $FM = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$.



Перетворимо вираз під коренем:

$$x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2.$$

Отже, $FM = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \left|x^2 + \frac{1}{4}\right| = x^2 + \frac{1}{4} = MK$.

І взагалі, в математиці параболою називають множину точок площини, рівновіддалених від даної точки F (фокуса) і даної прямої d (директриси). Цю властивість має лише парабола, на відміну від інших ліній схожої форми. Наприклад, дуга кола такої властивості не має.

Графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ також є параболою, фокус якої розташований у точці $F\left(m; \frac{1}{4a} + n\right)$, а директриса d задається рівнянням $y = n - \frac{1}{4a}$, де $m = -\frac{b}{2a}$, $n = am^2 + bm + c$.

Парабола має численні застосування у фізиці, астрономії, архітектурі, побуті тощо. Наприклад, траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, є параболою. Параболічну форму також мають дзеркала ліхтарів і автомобільних фар, супутникові антени, радіотелескопи, арки будівель тощо.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях математичного гуртка самостійно чи з допомогою вчителя / вчительки математики переконайтеся в правильності твердження щодо координат фокуса й рівняння директриси параболи, що задається рівнянням $y = ax^2 + bx + c$.

2. Дізнайтеся більше про властивості параболи та використання цих властивостей у фізиці, астрономії, архітектурі та інших науках і сферах життя людини. Підготуйте невеликі повідомлення на цю тему.

3. Чи доводилося вам у житті використовувати властивості параболи? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ і знайдіть його значення, якщо $a = 2{,}7$, $b = -1{,}3$.

2. Виготовіть паперову модель циліндра, твірна якого дорівнює 8 см, а діаметр основи — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні цього циліндра.

3. Побудуйте прямокутник $ABCD$ за його стороною AB і діагоналлю AC.

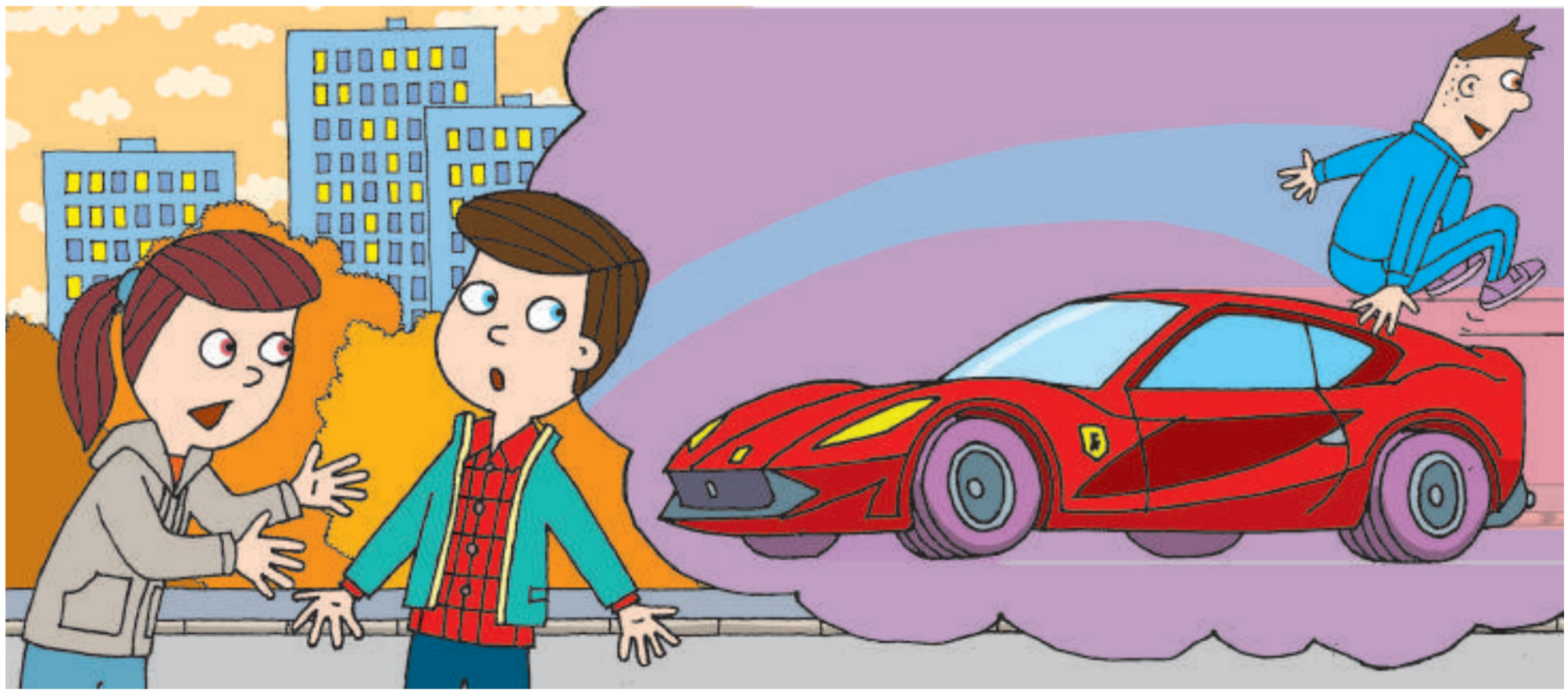
4. Допитливий Михайлик у понеділок запитав у 10 своїх однокласників і однокласниць, скільки цукерок вони з'їли за минулі вихідні. Відповіді були такими: 1, 0, 2, 4, 3, 0, 1, 3, 1, 2. Для цієї вибірки знайдіть: а) моду; б) медіану.

5. Знайдіть невідоме слово.

КАПУСТА	1267	СУП
ПЕРЕЦЬ	236	?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 9. Квадратні нерівності





Петрику, я настільки під враженням від недільного автошоу, що навіть слова важко підібрати. Уявляєш, на каскадера на повній швидкості мчить перегонове авто, а він підстрибує вгору, і автомобіль прошмигує під його ногами! Цікаво, як вони розрахували швидкість руху автомобіля та швидкість підстрибування, щоб трюк удався?



Думаю, що швидкість підстрибування залежить від людини, її можна виміряти експериментально. А от швидкість руху автомобіля має бути такою, щоб він встигнув проїхати під каскадером, доки той перебуває на висоті, що більша за висоту цього авто.



Я подумала приблизно так само й запитала в штучного інтелекту, якою формулою описується рух тіла, кинутого з певною швидкістю вертикально вгору. І він мені написав таке, дивись: «Відстань $h(t)$ (у метрах) від тіла, кинутого вертикально вгору, до землі через t секунд після кидання описується формулою $h(t)=h_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, де h_0 (м) — початкова висота кидка, v_0 (м/с) — початкова швидкість кидка, $g\approx 9{,}8$ (м/с^2) — прискорення вільного падіння». Ти щось розумієш?



Здається, ми цього з фізики ще не вивчали, але це не біда. Зрозуміло, що в нас $h_0 = 0$, бо каскадер стрибає із землі. Нехай також, наприклад, початкова швидкість стрибка каскадера вгору $v_0 = 2$ м/с. Тоді залежність його висоти над землею від часу визначається функцією $h(t) = 2t - 4{,}9t^2$. А це звичайна квадратична функція, яку ми нещодавно вивчали.



Вау, як цікаво! Якщо висота авто дорівнює, скажімо, 1,5 метра, то потрібно знайти всі ті значення t, за яких $h(t) > 1{,}5$. І цього часу має вистачити для того, щоб автомобіль завдовжки, приміром, 4 метри встиг проїхати під каскадером. Тобто потрібно розв'язати нерівність $2t - 4{,}9t^2 > 1{,}5$, дізнатися відповідний проміжок часу й поділити оці 4 метри на тривалість цього проміжку часу.



Думаю, саме так і треба діяти, але цього мало. Знаючи цю швидкість, потрібно ще розрахувати відстань до автомобіля, за досягнення якої каскадеру слід починати свій стрибок. А для цього необхідно розв'язати рівняння: $2t - 4{,}9t^2 = 1{,}5$, щоб знати, через скільки часу каскадер підніметься на потрібну висоту. А такі рівняння ми вже вміємо розв'язувати. Далі це значення часу множимо на вже розраховану швидкість руху авто й визначаємо потрібну відстань.



Отже, треба терміново навчитися розв'язувати нерівність $2t - 4{,}9t^2 > 1{,}5$, і ми зможемо повністю пояснити цей трюк. Гайда на урок!



Петрику й Тетянко, ви саме вчасно, сьогодні темою нашого уроку є розв'язування квадратних (або квадратичних) нерівностей, тобто

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

нерівностей виду $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ (строгі квадратні нерівності), $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$ (нестрогі квадратні нерівності), де a, b, c — дійсні числа, причому $a\neq 0$, а x — змінна. Будемо також говорити, що квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ відповідає кожній із наведених квадратних нерівностей і навпаки — наведені квадратні нерівності відповідають згаданій квадратичній функції.

Наприклад, нерівності $-2x^2+4x+6>0$, $x^2-5x+6<0$, $3x^2+9x\geqslant 0$ і $-x^2+16\leqslant 0$ є квадратними нерівностями, причому перша й друга з них є строгими, а третя та четверта — нестрогими. Цим нерівностям відповідають квадратичні функції $y=-2x^2+4x+6$, $y=x^2-5x+6$, $y=3x^2+9x$ і $y=-x^2+16$. Крім того, наприклад, квадратичній функції $y=-x^2+16$ відповідають квадратні нерівності $-x^2+16>0$, $-x^2+16<0$, $-x^2+16\geqslant 0$ і $-x^2+16\leqslant 0$.



Зазвичай для розв'язування квадратної нерівності використовують графічний метод розв'язування нерівностей.

Алгоритм графічного методу розв'язування квадратних нерівностей може бути таким:

1. знаходять нулі квадратичної функції, яка відповідає квадратній нерівності $\left(y=ax^2+bx+c\right)$, тобто розв'язують рівняння $ax^2+bx+c=0$;
2. будують ескіз графіка функції $y=ax^2+bx+c$, позначаючи на осі абсцис нулі цієї функції (якщо вони є);
3. для нерівності $ax^2+bx+c>0$ у відповідь записують проміжок (проміжки), для якого (яких) графік функції $y=ax^2+bx+c$ лежить вище осі абсцис, а для нерівності $ax^2+bx+c<0$ — проміжок (проміжки), для якого (яких) цей графік лежить нижче осі абсцис;
4. для нерівностей $ax^2+bx+c\geqslant 0$ і $ax^2+bx+c\leqslant 0$ діють так само, як і в пункті 3, приєднуючи до множини розв'язків ще й нулі функції $y=ax^2+bx+c$ (якщо вони є).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Покажемо на прикладах реалізацію цього алгоритму.

Приклад 1

Розв'яжемо нерівність $x^2-5x+6<0$. Ця нерівність є квадратною, причому $a=1$, $b=-5$, $c=6$. Діємо за наведеним алгоритмом розв'язування.

1) Розв'яжемо рівняння $x^2-5x+6=0$. $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1$; $x_1=\dfrac{5-1}{2}=2$; $x_2=\dfrac{5+1}{2}=3$. Отже, нулями функції $y=x^2-5x+6$ є числа $x_1=2$ і $x_2=3$.

2) Оскільки в нашому випадку $a=1>0$, то графік функції $y=x^2-5x+6$ є параболою, вітки якої спрямовані вгору. Знайдемо координати вершини цієї параболи $O'(m;n)$: $m=\dfrac{-b}{2a}=-\dfrac{-5}{2}=2{,}5$; $n=\dfrac{-D}{4a}=\dfrac{-1}{4}=-0{,}25$. Тепер, враховуючи знайдені нулі функції $y=x^2-5x+6$, легко побудувати ескіз її графіка (рис. 9.1).

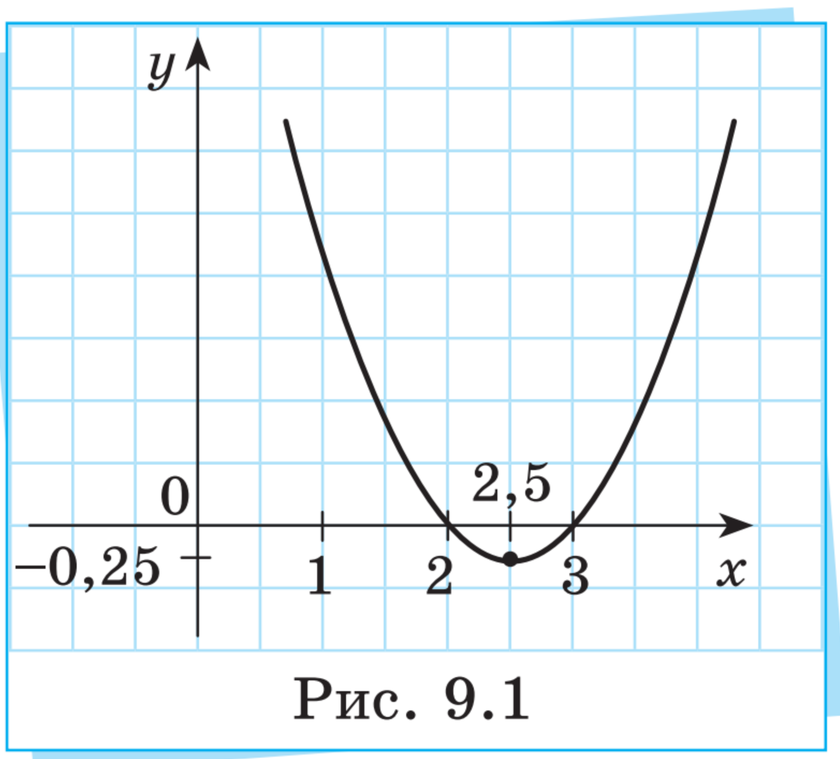


Рис. 9.1

3) За побудованим ескізом графіка функції, що відповідає квадратній нерівності, бачимо, що $x^2-5x+6<0$ для всіх значень x із проміжку $(2;3)$, бо саме для таких значень аргументу графік функції $y=x^2-5x+6$ розташований нижче осі абсцис. Отже, записуємо *відповідь до нерівності*: $(2;3)$.



Зауважимо, що за умови наявності нулів функції $y=ax^2+bx+c$ знаходити координати й будувати вершину параболи для побудови ескізу її графіка не обов'язково — множину розв'язків квадратної нерівності можна встановити й без неї. Також можна не будувати всю ПДСК, а обмежитися лише побудовою осі абсцис.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Приклад 2

Розв'яжемо нерівність $-x^2+16\leqslant 0$. Ця нерівність є квадратною, причому $a=-1$, $b=0$, $c=16$. Тому знову діємо за наведеним алгоритмом розв'язування.

1) Розв'яжемо рівняння $-x^2+16=0$. Це неповне квадратне рівняння рівносильними перетвореннями зводиться до рівняння $x^2=16$, коренями якого є числа $x_1=-4$ і $x_2=4$. Вони й будуть нулями функції $y=-x^2+16$.

2) Оскільки в нашому випадку $a=-1<0$, то графік функції $y=-x^2+16$ є параболою, вітки якої спрямовані вниз. Ескіз її графіка зображено на рис. 9.2.

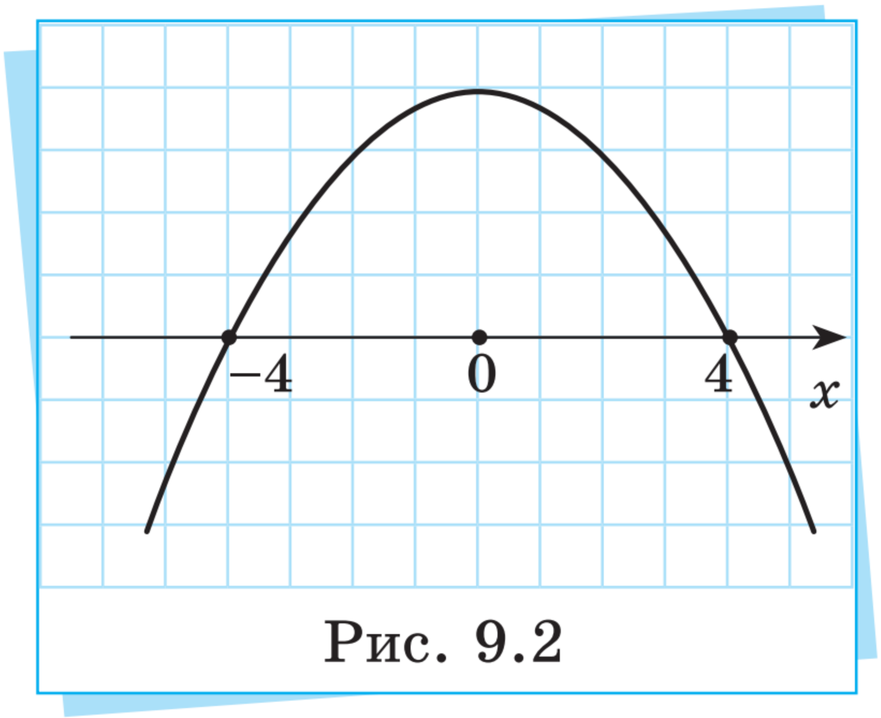


Рис. 9.2

4) За побудованим ескізом графіка функції, що відповідає квадратній нерівності, бачимо, що $-x^2+16\leqslant 0$ для всіх значень x із проміжку $(-\infty;-4]$ і для всіх значень x із проміжку $[4;+\infty)$. Справді, для всіх значень аргументу з проміжків $(-\infty;-4)$ і $(4;+\infty)$ графік функції $y=-x^2+16$ розташований нижче осі абсцис, але до цих проміжків слід додати ще й нулі цієї функції. Отже, записуємо *відповідь до нерівності*: $(-\infty;-4]$ і $[4;+\infty)$.



Якщо розв'язком нерівності є кілька проміжків, то їх зручно записувати у вигляді об'єднання цих проміжків. Справді, ви вже знаєте, що об'єднанням двох множин A і B називають множину, яка містить усі ті й лише ті елементи, які належать або множині A, або множині B. У випадку множини розв'язків нерівності $-x^2+16\leqslant 0$, ті й лише ті значення x, які належать або проміжку $(-\infty;-4]$, або проміжку $[4;+\infty)$, є розв'язками даної нерівності. Отже, відповідь до неї цілком природно записати так: $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Розв'язання нерівностей $-2x^2+4x+6>0$ і $3x^2+9x\geqslant 0$:
rnk.com.ua/112814





Графік квадратичної функції може мати з віссю абсцис лише одну спільну точку. У цьому випадку розв'язування відповідних цій функції квадратних нерівностей має свої особливості.

Приклад 3

Розв'яжемо всі квадратні нерівності, що відповідають функції $y=-x^2-6x-9$. Для квадратичної функції в нашому випадку $a=-1$, $b=-6$, $c=-9$. Знову діємо за алгоритмом.

1) Знайдемо нулі функції $y=-x^2-6x-9$. $D=(-6)^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)=0$, $x=-\dfrac{-6}{-2}=-3$. Отже, дана функція має лише один нуль: $x=-3$.

2) Оскільки $a=-1$, то графік функції $y=-x^2-6x-9$ є параболою, вітки якої спрямовані вниз. Ескіз її графіка зображено на рис. 9.3.

3) За рис. 9.3 бачимо, що нерівність $-x^2-6x-9>0$ не має розв'язків (або множина її розв'язків є порожньою — $\varnothing$); нерівність $-x^2-6x-9<0$ виконується для всіх дійсних чисел, відмінних від -3, тобто множиною розв'язків цієї нерівності є множина $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$, або $\boldsymbol{R}\setminus\{-3\}$.

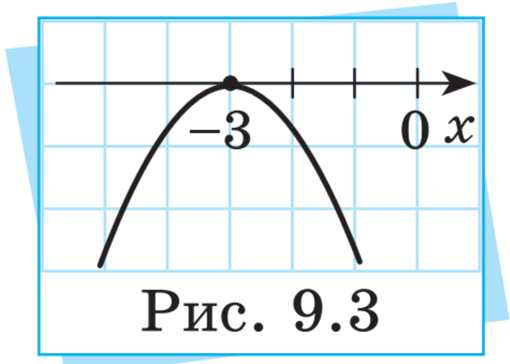


Рис. 9.3

4) Також за рис. 9.3 бачимо, що нерівність $-x^2-6x-9\geqslant 0$ виконується лише для $x=-3$, а отже, множину її розв'язків можна записати так: $\{-3\}$. Нерівність $-x^2-6x-9\leqslant 0$ виконується для всіх дійсних чисел ($\boldsymbol{R}$), тому множиною її розв'язків є проміжок $(-\infty;+\infty)$.



Графік квадратичної функції може взагалі не мати спільних точок із віссю абсцис. Наприклад, нескладно переконатися в тому, що графік функції $y=x^2+3$ не має спільних точок з віссю абсцис.

Детальніше про особливості розв'язування квадратних нерівностей у цьому випадку й інших подібних випадках:
rnk.com.ua/112815



Усі випадки розташування графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ залежно від напрямку віток параболи та кількості точок перетину з віссю абсцис наведено на рис. 9.4.

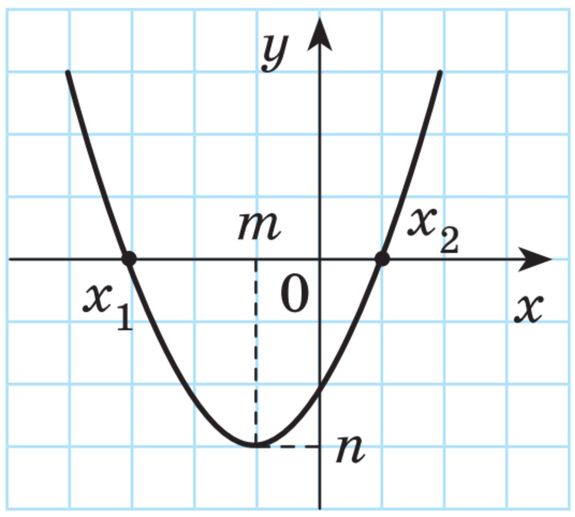
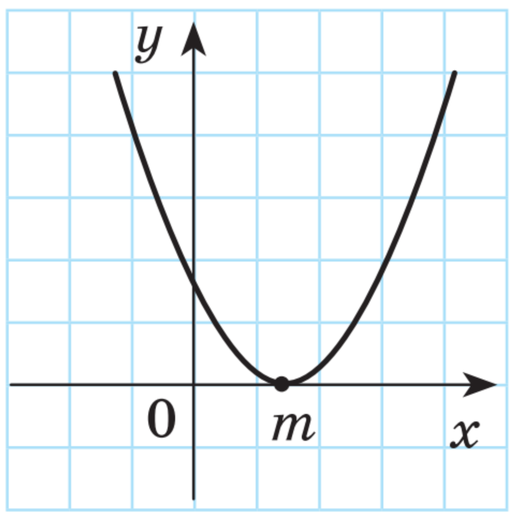
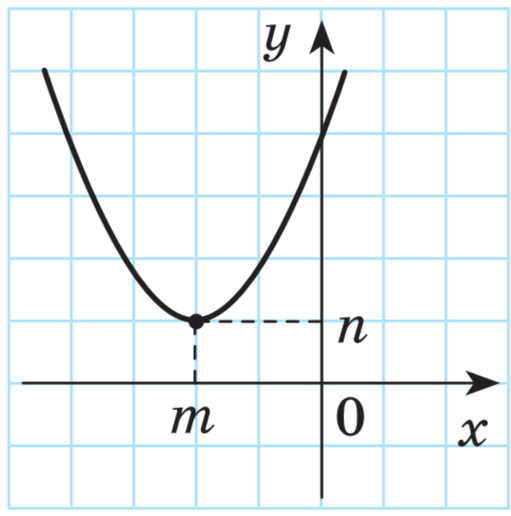
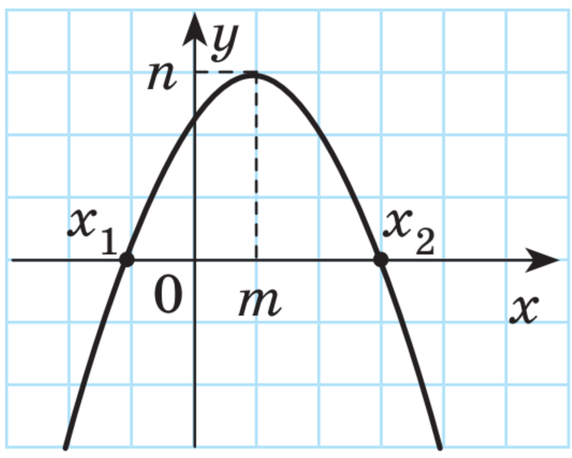
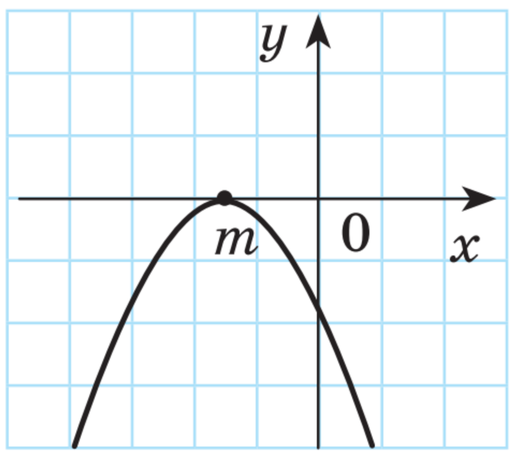
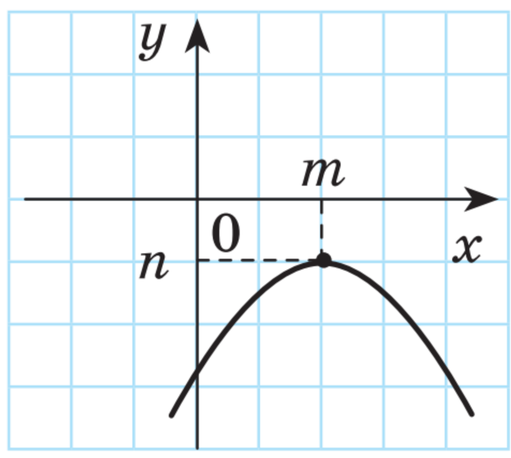
	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Рис. 9.4

У прикладі 1 розглянуто ситуацію, коли $a > 0$, $D > 0$, у прикладі 2 — ситуацію, коли $a < 0$, $D > 0$, у прикладі 3 — ситуацію, коли $a < 0$, $D = 0$.



Графічний метод розв'язування можна використовувати не лише для квадратних нерівностей. Наприклад, якщо функцію $y = f(x)$ задано графіком, то для розв'язання нерівностей $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$ і $f(x) \leqslant 0$ також спочатку можна за цим графіком знайти нулі функції $y = f(x)$, а потім визначити всі ті значення x, для яких графік цієї функції розташований

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

вище або нижче осі абсцис. При цьому для строгих нерівностей нулі функції не будуть розв'язками нерівності, а для нестрогих нерівностей — будуть.

Наприклад, нехай на рис. 9.5 зображено графік деякої функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-8;10]$. За рисунком бачимо, що розв'язком нерівності $f(x)>0$ є множина $[-8;-6)\cup(-1;5)\cup(8;10]$, розв'язком нерівності $f(x)\geqslant 0$ — множина $[-8;-6]\cup[-1;5]\cup[8;10]$, розв'язком нерівності $f(x)<0$ — множина $(-6;-1)\cup(5;8)$, а розв'язком нерівності $f(x)<0$ — множина $[-6;-1]\cup[5;8]$.

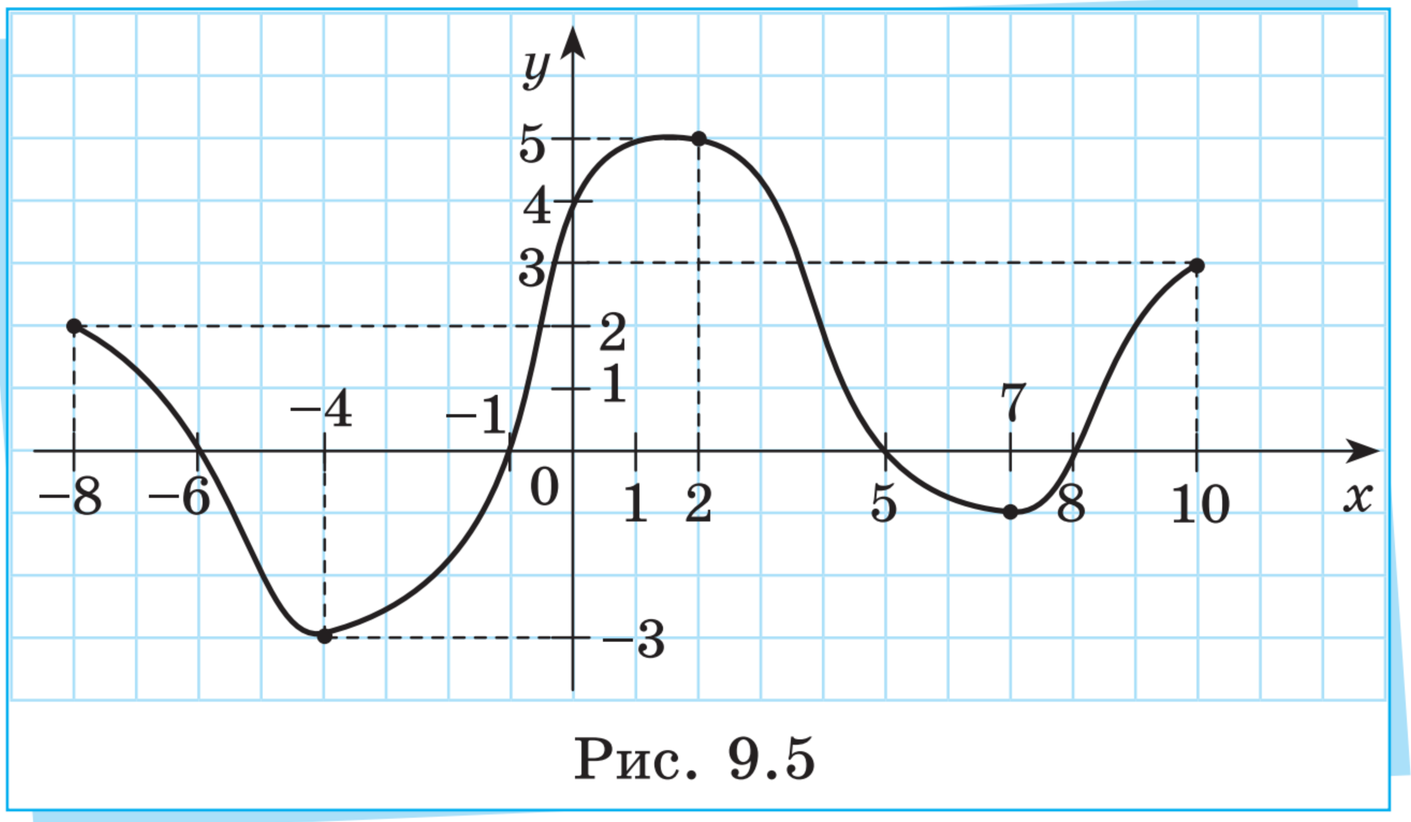


Рис. 9.5



Графічним методом можна розв'язувати й складніші нерівності. Для цього зручно використовувати графічний калькулятор.

Більше про це:
rnk.com.ua/112075





А як щодо трюку на автошоу, про який розповідала Тетянка? Чи зможемо ми визначити швидкість руху автомобіля та відстань, на якій каскадеру треба починати підстрибувати?



Загалом, Петрику, ти вже й сам можеш розв'язати цю задачу, але якщо раптом виникнуть труднощі, то зазирни в «Цікавинки від дідуся Тараса» наприкінці § 9.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Перевірте себе!

1. Які нерівності називають квадратними? Наведіть приклади.

2. Наведіть приклади двох строгих і двох нестрогих квадратних нерівностей. Запишіть квадратичні функції, що відповідають кожній із цих нерівностей.

3. Наведіть приклад квадратичної функції. Запишіть усі можливі квадратні нерівності, які відповідають цій квадратичній функції.

4. Сформулюйте алгоритм розв'язування квадратних нерівностей графічним методом.

5. Скільки нулів може мати квадратична функція? Скільки існує можливих випадків розташування графіка квадратичної функції залежно від кількості нулів та напрямку віток параболи? Яким чином записувати множину розв'язків квадратних нерівностей, що відповідають квадратичній функції, для кожного із цих випадків? Наведіть приклади.

6. Як розв'язувати нерівності графічним методом, якщо функцію задано графіком? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Площа квадрата не менша за 15 м^2. Позначимо довжину сторони квадрата змінною x. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю описаної ситуації.

2. Площа квадрата більша за 20 см^2. Позначимо довжину сторони квадрата змінною x. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю описаної ситуації.

3. Яка з наведених квадратних нерівностей є строгою?

а) $x^2+2x-3>0$; в) $4x^2+5x<0$;

б) $3x^2-4\geqslant 0$; г) $6x^2-7x-1\leqslant 0$.

4. Яка з наведених квадратних нерівностей є нестрогою?

а) $x^2-7x+2<0$; в) $3x^2-x>0$;

б) $x^2+3x\leqslant 0$; г) $2x^2-8x+5\geqslant 0$.

5. Яка з наведених квадратних нерівностей відповідає квадратичній функції $y=x^2-3x+4$?

а) $x^2-3x+4<0$; в) $x^2-4x+2<0$;

б) $x^2-3x+4\geqslant 0$; г) $x^2-3x+4\leqslant 0$.

6. Яка з наведених квадратних нерівностей відповідає квадратичній функції $y=2x^2-7x-1$?

а) $2x^2-7x-1<0$; в) $2x^2-7x-1\leqslant 0$;

б) $x^2-7x-1>0$; г) $2x^2-7x-1\geqslant 0$.

7. Яка з наведених квадратичних функцій відповідає квадратній нерівності $x^2+3x-5\leqslant 0$?

а) $y=x^2+5x-3$; в) $y=x^2+3x-5$;

б) $y=x^2-3x+5$; г) $y=x^2+3x+5$.

8. Яка з наведених квадратичних функцій відповідає квадратній нерівності $3x^2+7x-1\geqslant 0$?

а) $y=3x^2+x-7$; в) $y=3x^2-7x+1$;

б) $y=3x^2+7x-1$; г) $y=3x^2+7x+1$.

9. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо вітки графіка спрямовані вниз і нулями квадратичної функції є числа:

а) 2 і 6; б) −3 і 4; в) 0 і 4; г) −5 і −1.

10. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо вітки графіка спрямовані вгору й нулями квадратичної функції є числа:

а) 3 і 5; б) −2 і 2; в) −5 і 1; г) 3 і 7.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

11. Запишіть проміжок (проміжки), для якого (яких) графік квадратичної функції (рис. 1) лежить вище осі абсцис.

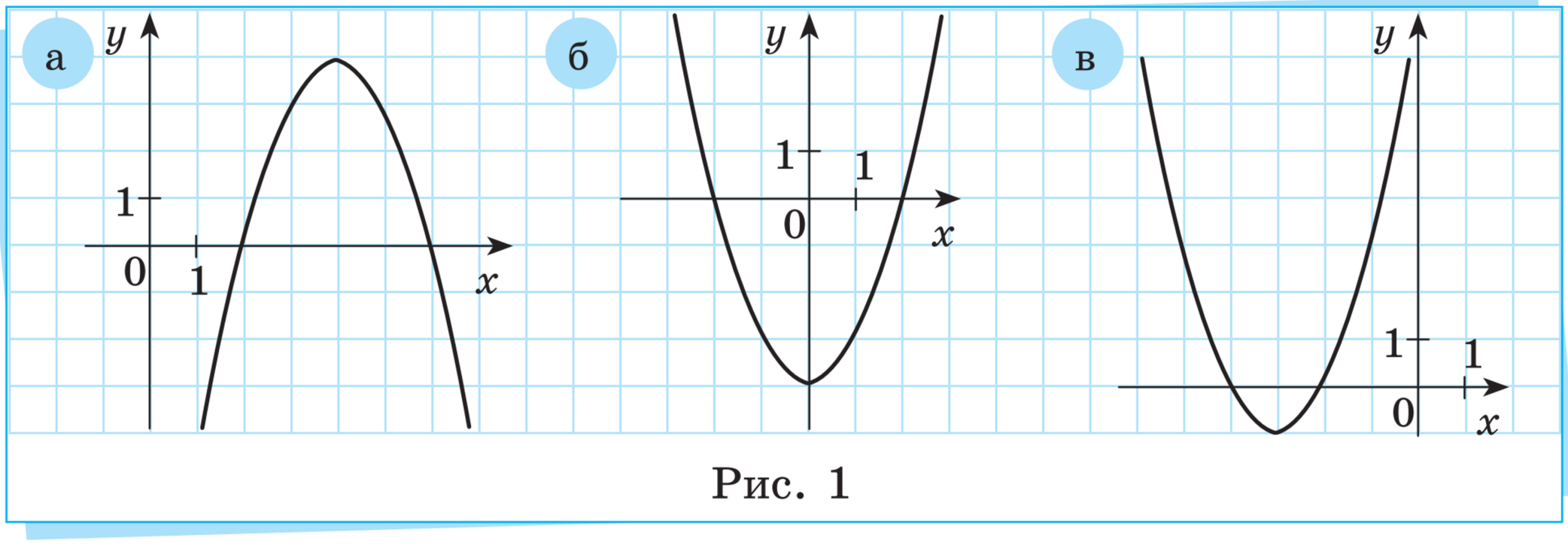


Рис. 1

12. Запишіть проміжок (проміжки), для якого (яких) графік квадратичної функції (рис. 2) лежить нижче осі абсцис.

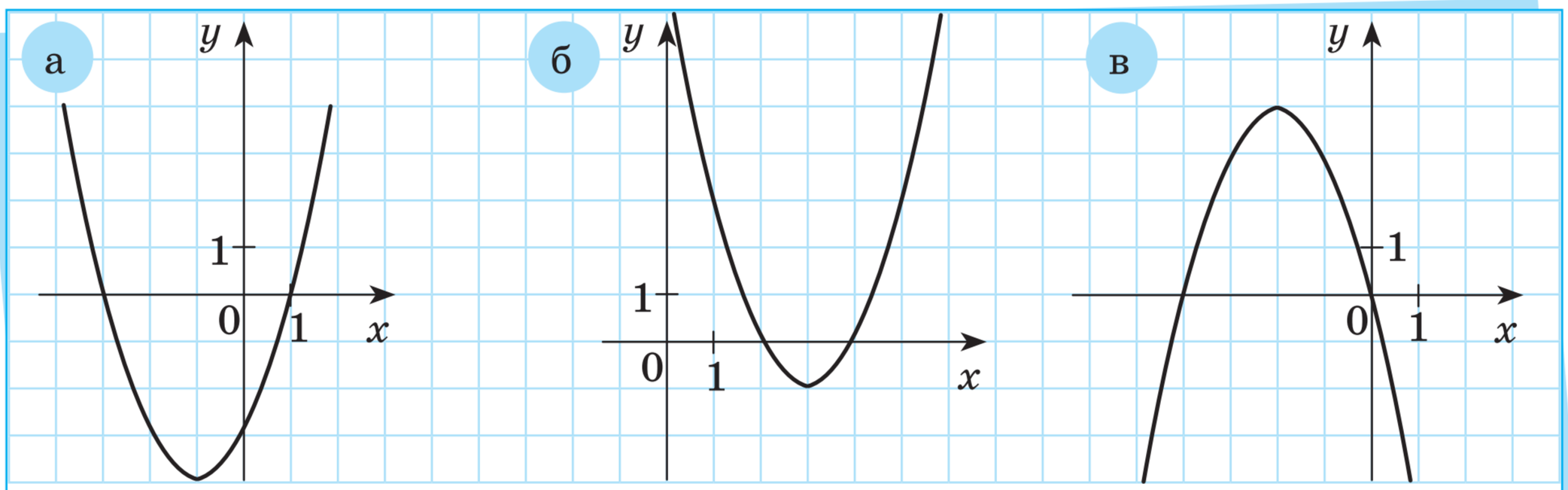


Рис. 2

Середній рівень

13. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо вітки графіка спрямовані вниз і функція: а) не має нулів; б) має один нуль; в) має два нулі.

14. Побудуйте ескіз графіка квадратичної функції, якщо вітки графіка спрямовані вгору й функція: а) не має нулів, б) має один нуль, в) має два нулі.

15. Знайдіть нулі квадратичної функції та побудуйте ескіз графіка цієї функції.

а) $y = x^2 - 5x + 6$; б) $y = -x^2 + 4$; в) $y = -x^2 + 2x + 3$.

16. Знайдіть нулі квадратичної функції та побудуйте ескіз графіка цієї функції.

а) $y = x^2 - 7x + 10$; б) $y = x^2 - 9$; в) $y = -x^2 - 2x + 3$.

17. Запишіть проміжок (проміжки), для якого (яких) графік квадратичної функції (рис. 3) лежить вище осі абсцис, якщо такі проміжки існують.

18. Запишіть проміжок (проміжки), для якого (яких) графік квадратичної функції (рис. 3) лежить нижче осі абсцис, якщо такі проміжки існують.

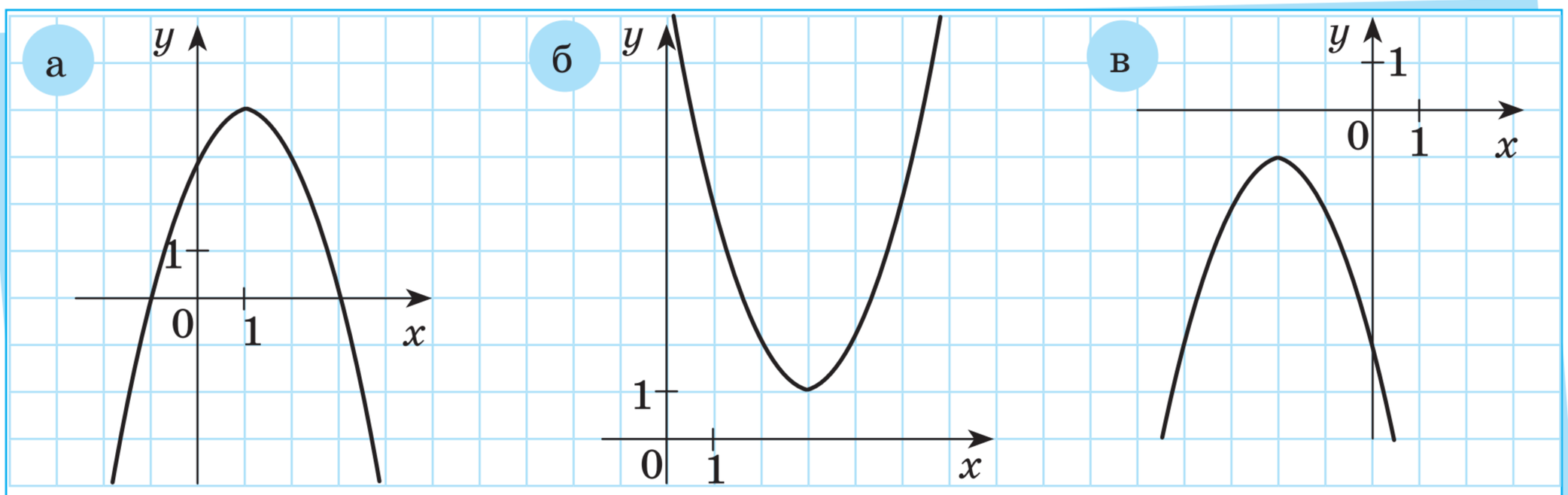


Рис. 3

19. Користуючись ескізом графіка функції $y = x^2 - 25$ (рис. 4), запишіть усі розв'язки нерівності.

а) $x^2 - 25 > 0$; в) $x^2 - 25 < 0$;

б) $x^2 - 25 \geqslant 0$; г) $x^2 - 25 \leqslant 0$.

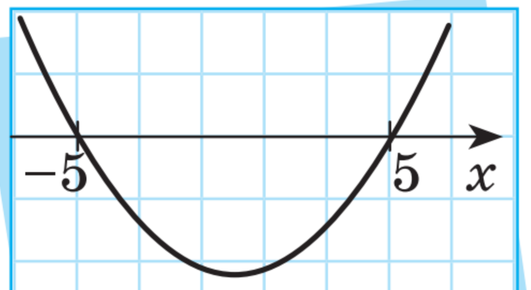


Рис. 4

20. Користуючись ескізом графіка функції $y = 4 - x^2$ (рис. 5), запишіть усі розв'язки нерівності.

а) $4 - x^2 > 0$; в) $4 - x^2 < 0$;

б) $4 - x^2 \geqslant 0$; г) $4 - x^2 \leqslant 0$.

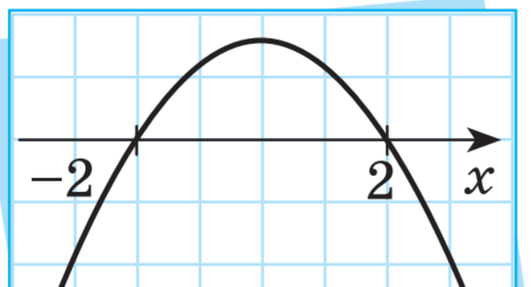


Рис. 5

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

21. Користуючись графіком функції $y = 2x^2 + x - 1$ (рис. 6), запишіть усі розв'язки нерівності.

а) $2x^2 + x - 1 > 0$;

б) $2x^2 + x - 1 \geqslant 0$;

в) $2x^2 + x - 1 < 0$;

г) $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$.

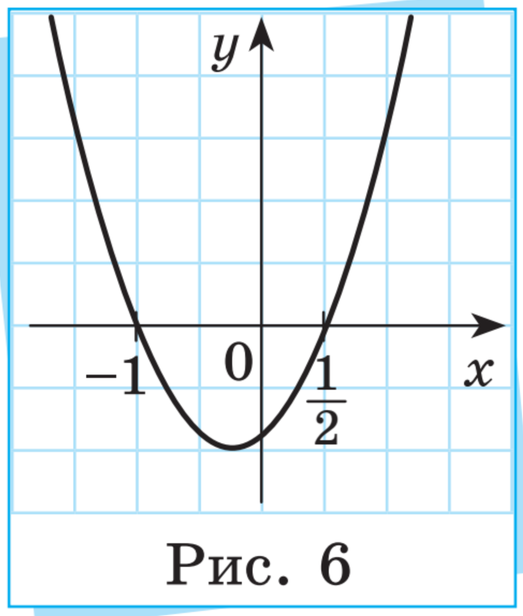


Рис. 6

22. Користуючись графіком функції $y = -3x^2 + 14x - 8$ (рис. 7), запишіть усі розв'язки нерівності.

а) $-3x^2 + 14x - 8 > 0$;

б) $-3x^2 + 14x - 8 \geqslant 0$;

в) $-3x^2 + 14x - 8 < 0$;

г) $-3x^2 + 14x - 8 \leqslant 0$.

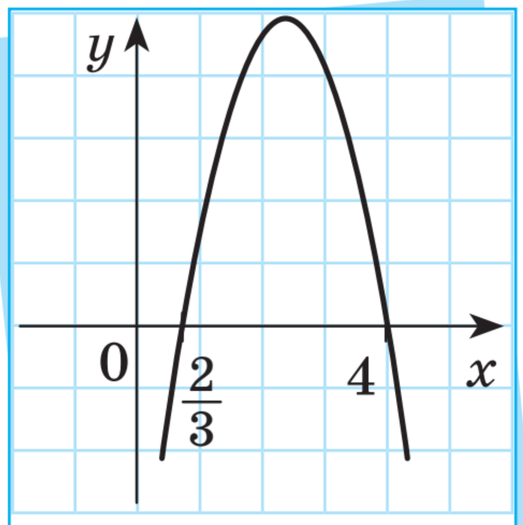


Рис. 7

23. Для кожної нерівності запишіть потрібні значення в таблицю та знайдіть розв'язки нерівності.

	а) $x^2 + 5x > 0$	б) $x^2 - 4x \leqslant 0$	в) $x^2 - 3x - 3 < 0$	г) $x^2 - 8x - 9 \geqslant 0$
Нулі квадратичної функції, що відповідає квадратній нерівності				
Ескіз графіка функції, що відповідає квадратній нерівності				
Шуканий проміжок (проміжки)				

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

24. Для кожної нерівності запишіть потрібні значення в таблицю та знайдіть розв'язки нерівності.

	а) $x^2-7x\leqslant 0$	б) $x^2+11x<0$	в) $x^2-4x+3>0$	г) $x^2+x-12\geqslant 0$
Нулі квадратичної функції, що відповідає квадратній нерівності				
Ескіз графіка функції, що відповідає квадратній нерівності				
Шуканий проміжок (проміжки)				

25. Розв'яжіть нерівність.

а) $x^2-5x>0$; б) $x^2-36<0$; в) $-x^2-2x\leqslant 0$; г) $x^2+1\geqslant 0$.

26. Розв'яжіть нерівність.

а) $x^2-49\geqslant 0$; б) $x^2-3x<0$; в) $-x^2+4x>0$; г) $x^2+3\leqslant 0$.

Достатній рівень

27. Розв'яжіть нерівність.

а) $x^2+7x-8>0$;

б) $x^2-3x-28<0$;

в) $2x^2+10x+8\leqslant 0$;

г) $-2x^2+5x+18\geqslant 0$.

28. Розв'яжіть нерівність.

а) $x^2-10x+16\geqslant 0$;

б) $x^2-6x-7\leqslant 0$;

в) $8x^2-x+5<0$;

г) $-x^2+5x+14>0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

29. Розв'яжіть нерівність.

а) $(x-3)(x+1)<0$;
б) $(x+2)(3x-4)>0$;
в) $(2x-5)(x-6)\leqslant 0$;
г) $(x+4)(2x+7)\geqslant 0$.

30. Розв'яжіть нерівність.

а) $(x+1)(x-1)<0$;
б) $(2x-1)(x+4)>0$;
в) $(2x-2{,}5)(x-3)\leqslant 0$;
г) $(x+1)(2x+1{,}5)\geqslant 0$.

31. Розв'яжіть нерівність:

а) $x(x-2)-8\geqslant 0$;
б) $x(1-x)+20\leqslant 0$;
в) $x^2-x(2x-3)>0$;
г) $x(x-3)+3x<0$.

32. Розв'яжіть нерівність.

а) $x(3-x)+4\leqslant 0$;
б) $x(x+5)-14<0$;
в) $x^2+x(x-1)>0$;
г) $x^2-2x(x-3)\geqslant 0$.

33. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{x^2-4x}$;
б) $y=\sqrt{-x^2+1}$;
в) $y=\sqrt{3x^2+6x}$;
г) $y=\sqrt{4x^2+5}$.

34. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{x^2+x}$;
б) $y=\sqrt{-x^2+49}$;
в) $y=\sqrt{-2x^2-10x}$;
г) $y=\sqrt{3x^2+1}$.

35. Розв'яжіть нерівність і вкажіть її найбільший цілий розв'язок.

а) $x^2+9x-10<0$;
б) $-x^2-2x+3\geqslant 0$.

36. Розв'яжіть нерівність і вкажіть її найменший цілий розв'язок.

а) $x^2+12x-13\leqslant 0$;
б) $-x^2+7x+8>0$.

37. Знайдіть усі значення x, за яких значення функції $y=-x^2-5x$ не менші за 4.

38. Знайдіть усі значення x, за яких значення функції $y=x^2+7x$ більші за 8.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Високий рівень

39. Розв'яжіть нерівність.

а) $2x^2-3x-5>0$;
в) $4x^2-2x+1\leqslant 0$;
б) $-5x^2+x+4<0$;
г) $-x^2+4x-4\geqslant 0$.

40. Розв'яжіть нерівність.

а) $-x^2-2x+3\geqslant 0$;
в) $3x^2-6x+3\leqslant 0$;
б) $2x^2+3x+4>0$;
г) $-2x^2+5x+3<0$.

41. Розв'яжіть нерівність.

а) $2(x-1)^2>x^2-x$;
в) $4x-5<(x+3)^2$;
б) $3-(x-2)^2\leqslant x-1$;
г) $-(x+1)^2\geqslant 3-6x$.

42. Розв'яжіть нерівність.

а) $3(x+5)^2<x^2-x$;
в) $6x+7>(2x-1)^2$;
б) $5x-(x+1)^2\leqslant -5$;
г) $-(3x-1)^2\geqslant 7-6x$.

43. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{3x^2-4x-4}$;
в) $u(x)=\sqrt{5x^2-4x+1}$;
б) $g(x)=\sqrt{-x^2+3x+4}$;
г) $v(x)=\sqrt{-4x^2+24x-36}$.

44. Знайдіть область визначення функції.

а) $f(x)=\sqrt{-2x^2-3x+9}$;
в) $u(x)=\sqrt{-3x^2-30x-75}$;
б) $g(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$;
г) $v(x)=\sqrt{7x^2+7x-14}$.

45. Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $2x^2+2(a-6)x+a-2=0$:
а) має корені; б) не має коренів; в) має два різні корені.

46. Знайдіть усі значення b, за яких рівняння $x^2-4bx+3a+1=0$:
а) має корені; б) не має коренів; в) має два різні корені.

47. Знайдіть усі значення a, за яких нерівність $x^2-ax+4<0$ не має розв'язків.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

48. Знайдіть усі значення a, за яких розв'язками нерівності $-x^2+2ax-1\leqslant 0$ будуть всі дійсні числа.

49. Дві прямолінійні дороги перетинаються під прямим кутом. Від перехрестя одночасно вирушили: пішохід — у східному напрямку зі швидкістю руху 5 км/год і велосипедист — у північному напрямку зі швидкістю руху 12 км/год. Через скільки годин відстань між ними буде не меншою за 26 км?

50. Дві групи туристів вийшли з турбази прямолінійними маршрутами, які утворюють прямий кут. Перша група йшла зі швидкістю 4 км/год, а друга — зі швидкістю 5 км/год, але вийшла на одну годину пізніше. Групи підтримували зв'язок за допомогою рацій, які дають змогу розмовляти на відстані, не більшій за 17 км. Який час після виходу другої групи вони могли підтримувати зв'язок?

51. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a.

а) $-x^2+2ax<0$; б) $x^2-(a+2)x+2a\leqslant 0$.

52. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a.

а) $2x^2+ax\geqslant 0$; б) $-x^2+(a+3)x-2a-2>0$.



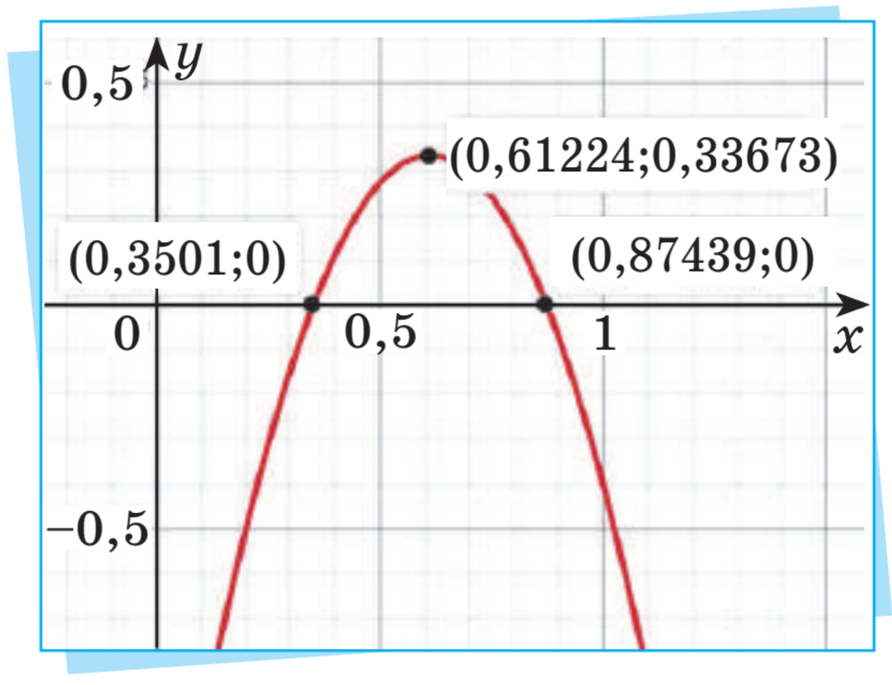
Цікавинки від дідуся Тараса

Розглянемо трюк із автошоу, про який розповідала Тетянка (див. початок § 9). Як було правильно визначено, для розрахунку швидкості руху автомобіля, який проїжджає під каскадером, слід розв'язати квадратну нерівність $2t-4{,}9t^2>1{,}5$, або $-4{,}9t^2+2t-1{,}5>0$. Для цього, згідно з відомим вам алгоритмом, спробуємо знайти корені квадратного рівняння $-4{,}9t^2+2t-1{,}5=0$: $D=2^2-4\cdot(-4{,}9)\cdot(-1{,}5)=4-29{,}4=-25{,}4$, тобто $D<0$, а отже, функція $y=-4{,}9t^2+2t-1{,}5$ не має нулів. Крім того, графіком цієї функції є парабола, вітки якої спрямовані вниз. Зобразивши ескіз графіка цієї функції, неважко переконатися, що нерівність $-4{,}9t^2+2t-1{,}5>0$ *не має розв'язків*, тобто *за умов, запропонованих Петриком, цей трюк неможливий*.

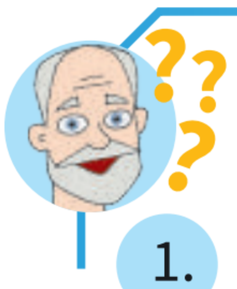
Щоб трюк став можливим, треба, аби каскадер стрибав угору зі швидкістю v_0, більшою за 2 м/с. Для знаходження потрібного

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

значення швидкості використаємо графічний калькулятор Desmos, у якому побудуємо графік функції $y=-4{,}9t^2+at-1{,}5$ для різних значень параметра a, використовуючи повзунок значень. Значення параметра a природно підбирати таке, щоб тривалість перебування каскадера вище за 1,5 м була досить значною (наприклад, не менше ніж 0,5 с). Така умова виконується, зокрема, якщо $a=6$, тобто за швидкості вистрибування $v_0=6$ м/с каскадер опиниться на висоті 1,5 м приблизно через 0,35 с і перебуватиме вище за цю висоту приблизно протягом 0,5 с (див. рисунок). Якщо довжина автомобіля дорівнює 4 м, то для успішного виконання трюку він має їхати зі швидкістю, не меншою за $4:0{,}5=8$ (м/с). Це не дуже велика швидкість, бо ви знаєте, що 1 м/с = 3,6 км/год, тому 8 м/с $\approx$ 29 км/год. Якщо автомобіль їде з такою швидкістю, то нескладно розрахувати відстань до авто, на якій каскадер має починати свій стрибок: $0{,}35\cdot 8\approx 2{,}8$ (м).



Зрозуміло, що стрибати з місця вгору зі швидкістю 6 м/с для людини, найімовірніше, неможливо. Тому, радше за все, каскадери на автошоу використовували прихований трамплін, який Тетянка та інші глядачі не помітили. Проте навіть використання трампліна не робить цей трюк безпечним — він доступний лише підготовленим професіоналам після багатогодинних тренувань. *Не намагайтеся відтворити його в реальному житті!*



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Дізнайтеся більше про використання квадратних нерівностей у фізиці та інших природничих науках. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Чи можна було розв'язати задачу про викриття трюку на автошоу без використання графічного калькулятора? Спробуйте це зробити на заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя / вчительки математики.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{x}+2x=3$.
2. Установіть взаємне розміщення кола радіуса $R=3$ із центром у точці $O(2;-3)$ і прямої, яка проходить через точки $A(1;1)$ і $B(-1;2)$.
3. У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD проведено діагоналі AC і BD, які перетинаються в точці M. Знайдіть довжину основи AD, якщо $BM=5$ см, $MD=8$ см, $BC=7$ см.
4. В одній зі шкіл працює 4 вчителі й 5 учительок математики. Середній вік їх усіх дорівнює 30 років. Знайдіть середній вік усіх учительок математики цієї школи, якщо середній вік усіх вчителів математики дорівнює 25 років.
5. Слово в дужках є закінченням слова, яке починається ліворуч від дужок, і початком слова, що закінчується праворуч від дужок. Кількість букв у слові дорівнює кількості крапок у дужках. Знайдіть це слово.
   а) КУР (. . .) ЕЗ; б) ДО (. . . .) ЧИЙ; в) УТО (. . . .) ОН

§ 10. Дробові раціональні рівняння та нерівності



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Привіт, Тетянко, що це ти читаєш? Бачу, що велика книжка та ще й англійською. О, Джоан Роулінг про Гаррі Поттера — цікаво!



Так, вирішила читати англійською щодня певну однакову кількість сторінок. До речі, спочатку я собі визначила один термін для читання цієї книжки, а потім помітила, що якщо щодня читатиму на 20 сторінок більше, ніж планувала, то закінчу книжку на 2 дні раніше запланованого терміну. У цій книжці 480 сторінок. Ану, скажи, за скільки днів я планувала прочитати цю книжку й за скільки прочитаю її фактично?



Думаю, що це не дуже складно. Нехай ти планувала прочитати цю книжку за x днів. Тоді щодня мала читати по $\frac{480}{x}$ сторінок. Фактично ж ти будеш читати цю книжку $(x-2)$ дні, читаючи щодня по $\frac{480}{x-2}$ сторінок. Ти сказала, що фактична кількість сторінок, прочитаних за день, більша від запланованої на 20, тобто $\frac{480}{x-2}-\frac{480}{x}=20$. Тепер залишилося розв'язати це рівняння.



Дійсно, не дуже складно. Ми такі рівняння вже розв'язували. Потрібно перенести все вліво та звести до спільного знаменника: $\frac{480\cdot x-480\cdot(x-2)-20\cdot x\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}=0$. А далі користуємось тим, що дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, тобто: $480x-480x+960-20x^2+40x=0$ або $-20x^2+40x+960=0$. Поділимо обидві частини на (-20) і отримаємо зовсім просте рівняння: $x^2-2x-48=0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, легко підібрати корені: $x_1=-6$ і $x_2=8$.



Саме так. Ти лише забула, що потрібно ще перевірити, чи не перетворюють наші корені в нуль знаменник дробу, тобто чи

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

виконується для знайдених значень обмеження $x(x-2)\neq 0$. Бачимо, що виконується. Отже, ти планувала прочитати книжку за 8 днів, бо термін (-6) днів неможливий. І читати ти хотіла щодня по 60 сторінок. Але потім почала читати по 80 сторінок щодня, а отже, фактично закінчиш читання за 6 днів. Бачиш, не дарма ми вчили математику минулого року.



Так, математика — річ потужна. Але я ось про що подумала. Ми нещодавно навчилися розв'язувати квадратні нерівності, причому для цього слід було спочатку розв'язати квадратне рівняння. Рівняння, яке ми щойно розв'язали, також зводиться до квадратного. То, мабуть, можна якось розв'язати й, наприклад, нерівність $\dfrac{480}{x-2}-\dfrac{480}{x}\leqslant 20$? Запитаймо про це вчителів!



Справді, дробові раціональні рівняння, приклад одного з яких щойно розглянули Петрик і Тетянка, можуть бути математичними моделями задач практичного змісту. Розглянемо ще одну таку задачу.

Задача. Автобус прямує за маршрутом Гайворон — Київ — Харків. На шляху від Гайворона до Києва він рухався з певною швидкістю, а на шляху від Києва до Харкова — зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж на першій ділянці шляху. Знайдіть швидкість руху автобуса на кожній із ділянок шляху, якщо відстань від Гайворона до Києва дорівнює 280 км, від Києва до Харкова — 480 км, а загальний час автобуса в дорозі становить 10 год.

Розв'язання. Нехай на ділянці шляху від Гайворона до Києва автобус рухався зі швидкістю x км/год. Тоді за умовою задачі швидкість його руху на ділянці від Києва до Харкова дорівнює $(x+10)$ км/год. Час, за який автобус подолав першу ділянку шляху, дорівнює $\dfrac{280}{x}$ год, а другу ділянку — $\dfrac{480}{x+10}$ год. Також ми знаємо, що загальний час у дорозі становив 10 год, тобто $\dfrac{280}{x}+\dfrac{480}{x+10}=10$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{280}{x}+\frac{480}{x+10}-10=0,\quad \frac{280(x+10)+480x-10x(x+10)}{x(x+10)}=0.$$

Ви вже знаєте, що дріб дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Знайдемо значення змінної, за яких чисельник дорівнює нулю, тобто розв'яжемо рівняння $280(x+10)+480x-10x(x+10)=0$. Після перетворень маємо: $-10x^2+660x+2800=0$, $x^2-66x-280=0$. Коренями цього рівняння є числа $x_1=70$ і $x_2=-4$ (*переконайтеся в цьому самостійно*). Обидва ці числа не перетворюють на нуль вираз $x(x+10)$, а отже, є коренями початкового рівняння. Зрозуміло, що рухатись зі швидкістю (-4) км/год автобус не може, тому цей корінь рівняння не задовольняє умову задачі.

Отже, від Гайворона до Києва автобус їхав зі швидкістю 70 км/год, а від Києва до Харкова — зі швидкістю $70+10=80$ км/год.



Про строге означення дробового раціонального рівняння та загальний алгоритм його розв'язування: rnk.com.ua/112816





Розв'язування багатьох дробових раціональних нерівностей можна звести до розв'язування квадратних нерівностей. Розглянемо приклад.

Приклад 1

Розв'яжемо нерівність $\frac{x-2}{x+1}>0$.

Розв'язання. Зрозуміло, що дріб є додатним, якщо його чисельник і знаменник мають однаковий знак, тобто $\begin{cases}x-2>0,\\x+1>0\end{cases}$ або $\begin{cases}x-2<0,\\x+1<0.\end{cases}$ Перша система нерівностей рівносильна системі $\begin{cases}x>2,\\x>-1,\end{cases}$ розв'язком

якої є проміжок $(2;+\infty)$. Друга система рівносильна системі $\begin{cases} x<2, \\ x<-1, \end{cases}$ розв'язком якої є проміжок $(-\infty;-1)$. Оскільки розв'язками початкової нерівності є всі значення змінної, що є розв'язками або першої, або другої системи нерівності, то множиною розв'язків цієї нерівності є множина $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.



Нерівність $\dfrac{x-2}{x+1}>0$ із прикладу 1 можна розв'язати й *іншим способом*.

Справді, областю допустимих значень (ОДЗ) раціонального дробу з лівої частини нерівності є всі значення змінної x, за яких знаменник цього дробу не дорівнює нулю, тобто $x+1\neq 0$ або $x\neq -1$. Крім того, якщо $x\neq -1$, то $(x+1)^2>0$. Домножимо обидві частини нерівності на вираз $(x+1)^2$ і виконаємо тотожні перетворення: $\dfrac{x-2}{x+1}\cdot(x+1)^2>0\cdot(x+1)^2$; $\dfrac{(x-2)(x+1)^2}{x+1}>0$; $(x-2)(x+1)>0$.

Отже, початкова нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} (x-2)(x+1)>0, \\ x\neq -1. \end{cases}$

Перша нерівність після розкриття дужок стає квадратною нерівністю $x^2-x-2>0$. Нулями квадратичної функції $y=x^2-x-2$, що відповідає цій нерівності, очевидно, є числа $x_1=-1$ і $x_2=2$, а вітки параболи, яка є її графіком, спрямовані вгору. Будуємо ескіз графіка згаданої квадратичної функції (рис. 10.1), за яким легко встановити, що множиною розв'язків нерівності $(x-2)(x+1)>0$ є множина $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. Оскільки для всіх значень змінної x із цієї множини виконується умова $x\neq -1$, то вона буде розв'язком і початкової нерівності $\dfrac{x-2}{x+1}>0$.

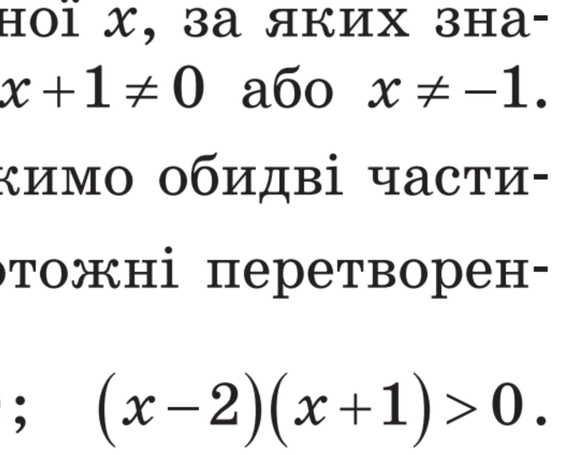


Рис. 10.1



Розглянемо ще один приклад.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Приклад 2

Розв'яжемо нерівність $x \leqslant \dfrac{9}{x}$.

Розв'язання. Перенесемо доданок $\dfrac{9}{x}$ у ліву частину з протилежним знаком і виконаємо тотожні перетворення: $x - \dfrac{9}{x} \leqslant 0$, $\dfrac{x^2-9}{x} \leqslant 0$. Остання нерівність виконується, якщо $\dfrac{x^2-9}{x} = 0$ або $\dfrac{x^2-9}{x} < 0$. Дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто $\begin{cases} x^2-9=0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Коренями рівняння $x^2-9=0$ є числа $x_1=-3$ і $x_2=3$, які відмінні від нуля. Отже, ці числа є також і коренями рівняння $\dfrac{x^2-9}{x}=0$.

Для розв'язання нерівності $\dfrac{x^2-9}{x} < 0$ зауважимо, що дріб є від'ємним, якщо його чисельник і знаменник мають різні знаки, тобто $\begin{cases} x^2-9>0, \\ x<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2-9<0, \\ x>0. \end{cases}$ Ми вже знаємо, що нулями квадратичної функції $y=x^2-9$, яка відповідає нерівностям $x^2-9>0$ і $x^2-9<0$, є числа $x_1=-3$ і $x_2=3$. Зобразимо ескіз графіка цієї функції, а також позначимо на осі абсцис точку $x_3=0$ (рис. 10.2).

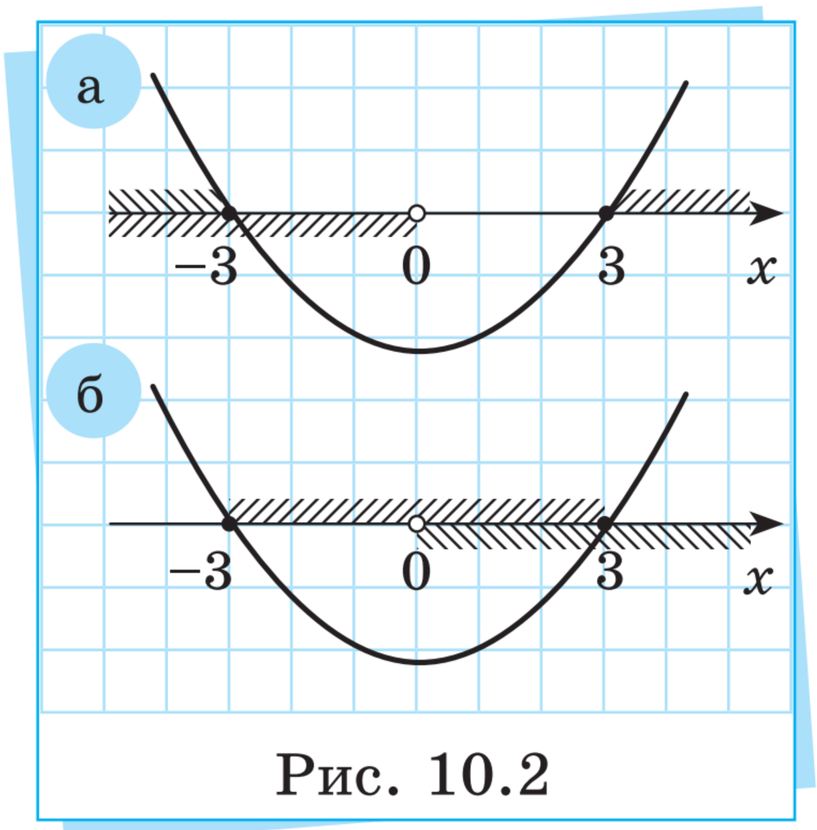


Рис. 10.2

Із рис. 10.2, *а* видно, що множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2-9>0, \\ x<0 \end{cases}$ є проміжок $(-\infty;-3)$, а з рис. 10.2, *б* — що множиною розв'язків системи $\begin{cases} x^2-9<0, \\ x>0 \end{cases}$ є проміжок $(0;3)$. Справді, на обох рисунках множина розв'язків квадратної нерівності заштрихована над

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

віссю, множина розв'язків лінійної нерівності — під віссю, а вказані проміжки є спільними для обох штрихувань.

Отже, множиною розв'язків нерівності $x \leqslant \frac{9}{x}$ є об'єднання проміжків $(-\infty; -3)$ і $(0; 3)$, а також чисел $x_1 = -3$ і $x_2 = 3$, тобто множина $(-\infty; -3] \cup (0; 3]$.



Запис кількох рівнянь, нерівностей чи їх систем з використанням сполучника «або» в математиці називають сукупністю. Наприклад, у прикладі 2 нерівність $\frac{x^2 - 9}{x} < 0$ рівносильна сукупності двох систем $\begin{cases} x^2 - 9 > 0, \\ x < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ x > 0. \end{cases}$

Розв'язання нерівності $\frac{480}{x-2} - \frac{480}{x} \leqslant 20$, про яку запитувала Тетянка на початку § 10: rnk.com.ua/112076



Перевірте себе!

1. Які рівняння називають дробовими раціональними рівняннями? Наведіть приклади.
2. Як розв'язують дробові раціональні рівняння? Наведіть приклади.
3. Наведіть приклади задач, математичними моделями яких є дробові раціональні рівняння.
4. Які нерівності називають дробовими раціональними нерівностями? Наведіть приклади.
5. Які є способи розв'язування дробових раціональних нерівностей? Наведіть приклади.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Дано рівняння $\frac{x+2}{x-4}=0$. Відомо, що дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник дробу не дорівнює нулю. Яка з наведених систем рівнянь є рівносильною даному рівнянню?

а) $\begin{cases} x+2=0, \\ x-4\neq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2=0, \\ x-4=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2\neq 0, \\ x-4=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2\neq 0, \\ x-4\neq 0. \end{cases}$

2. Яка з наведених систем рівнянь є рівносильною рівнянню $\frac{x-5}{x-8}=0$?

а) $\begin{cases} x-5\neq 0, \\ x-8\neq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-5\neq 0, \\ x-8=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-5=0, \\ x-8\neq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-5=0, \\ x-8=0. \end{cases}$

3. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\frac{x+3}{x-5}=0$?

а) 3; б) -3; в) 5; г) -5.

4. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\frac{x-7}{x+9}=0$?

а) 7; б) -7; в) 9; г) -9.

5. Яка з наведених множин є областю допустимих значень рівняння $\frac{x-2}{x+6}=0$?

а) $(-6;2)$; в) $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$;
б) $(-\infty;-6)\cup(-6;+\infty)$; г) $[-2;6)$.

6. Яка з наведених множин є областю допустимих значень рівняння $\frac{x-1}{x-9}=0$?

а) $(1;9)$; б) $(-\infty;1)\cup(9;+\infty)$; в) $(-\infty;9)\cup(9;+\infty)$; г) $[1;9)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. За x годин на 3D принтері виготовили 27 деталей. Швидкість роботи принтера була більшою, ніж 12 деталей за годину. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

8. За x кг груш заплатили 126 грн. Ціна груш не перевищує 90 грн. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

9. Які з наведених чисел належать множині розв'язків нерівності $\frac{x-2}{x+5} > 0$?

а) -5; б) 5; в) -2; г) 2; д) -10; е) 10.

10. Які з наведених чисел належать множині розв'язків нерівності $\frac{x-6}{x+1} < 0$?

а) -6; б) 6; в) -1; г) 1; д) -12; е) 0.

11. Які з наведених чисел належать множині розв'язків нерівності $\frac{x+1}{x-4} \leqslant 0$?

а) -1; б) 1; в) -4; г) 4; д) 0; е) 3.

12. Які з наведених чисел належать множині розв'язків нерівності $\frac{x+5}{x-3} \geqslant 0$?

а) -5; б) 5; в) -3; г) 3; д) 0; е) -8.

13. Дано нерівність $\frac{x+6}{x-3} > 0$. Відомо, що дріб є додатним, якщо його чисельник і знаменник мають однаковий знак. Яка з наведених сукупностей двох систем нерівностей є рівносильною даній нерівності?

а) $\begin{cases} x+6 \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+6 \leqslant 0, \\ x-3 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+6 > 0, \\ x-3 > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+6 < 0, \\ x-3 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+6 > 0, \\ x-3 < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+6 < 0, \\ x-3 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+6 \geqslant 0, \\ x-3 \leqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+6 \leqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

14. Дано нерівність $\frac{x-4}{x+5}>0$. Яка з наведених сукупностей двох систем нерівностей є рівносильною даній нерівності?

а) $\begin{cases} x-4\geqslant 0, \\ x+5\leqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-4\leqslant 0, \\ x+5\geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-4\geqslant 0, \\ x+5\geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-4\leqslant 0, \\ x+5\leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-4>0, \\ x+5<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-4<0, \\ x+5>0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-4>0, \\ x+5>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-4<0, \\ x+5<0. \end{cases}$

15. Дано нерівність $\frac{x+1}{x-2}<0$. Відомо, що дріб є від'ємним, якщо його чисельник і знаменник мають різні знаки. Яка з наведених сукупностей двох систем є рівносильною даній нерівності?

а) $\begin{cases} x+1>0, \\ x-2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+1<0, \\ x-2<0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+1\leqslant 0, \\ x-2\leqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x-2\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+1<0, \\ x-2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+1>0, \\ x-2<0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+1\leqslant 0, \\ x-2\geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x-2\leqslant 0. \end{cases}$

16. Дано нерівність $\frac{x+3}{x+7}<0$. Яка з наведених сукупностей двох систем є рівносильною даній нерівності?

а) $\begin{cases} x+3\leqslant 0, \\ x+7\geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x+7\leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+3<0, \\ x+7>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+3>0, \\ x+7<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x+7\geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+3\leqslant 0, \\ x+7\leqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+3>0, \\ x+7>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+3<0, \\ x+7<0. \end{cases}$

Середній рівень

17. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{2}{x}=1$; б) $\frac{2}{x}=-1$; в) $\frac{2}{x}=2$; г) $\frac{2}{x}=0$.

18. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{5}{x}=5$; б) $\frac{5}{x}=-5$; в) $\frac{5}{x}=1$; г) $\frac{5}{x}=0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

19. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{2x-6}{x}=0$; б) $\frac{x-8}{x}=3$; в) $\frac{x}{x-2}=2$; г) $\frac{x+3}{x}=2$.

20. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{3x-12}{x}=0$; б) $\frac{x+2}{x}=3$; в) $\frac{x}{x-4}=3$; г) $\frac{x-5}{x}=6$.

21. Відомо, що температура води після кип'ятіння в деякій лабораторії знижується за законом $T(t)=\frac{80}{t+2}$, де $T(t)$ — температура води в градусах Цельсія через t хвилин, 80 — початкова різниця температури води та температури в лабораторії в градусах Цельсія, 2 — коефіцієнт уповільнення охолодження. Через скільки хвилин температура води стане 20 °С?

22. Відомо, що середня витрата пального для деякого автомобіля обчислюється за формулою $B(v)=\frac{200}{v+10}$, де $B(v)$ — витрата пального в літрах на 100 км, v — швидкість руху автомобіля в кілометрах за годину, 200 і 10 — сталі коефіцієнти. З якою швидкістю має рухатися цей автомобіль, щоб витрата пального становила 5 л на 100 км?

23. Довжина туристичної траси становить 36 км. Велосипедист може подолати цю трасу на 4 год швидше, ніж пішохід, причому швидкість руху велосипедиста на 12 км/год більша, ніж швидкість руху пішохода. Позначивши швидкість руху пішохода x км/год, запишіть вираз для обчислення: а) швидкості руху велосипедиста; б) часу, який витратить пішохід на подолання всієї траси; в) часу, який витратить велосипедист на подолання всієї траси; г) різниці між часом, який витратить на подолання траси пішохід, і часом, який витратить велосипедист. Складіть рівняння, яке є математичною моделлю даної задачі.

24. Довжина туристичної траси становить 28 км. Велосипедист може подолати цю трасу на 5 год швидше, ніж пішохід, причому швидкість руху велосипедиста на 10 км/год більша за швидкість руху пішохода. Позначивши швидкість руху пішохода

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

x км/год, запишіть вираз для обчислення: а) швидкості руху велосипедиста; б) часу, який витратить пішохід на подолання всієї траси; в) часу, який витратить велосипедист на подолання всієї траси; г) різниці між часом, який витратить на подолання траси пішохід, і часом, який витратить велосипедист. Складіть рівняння, яке є математичною моделлю даної задачі.

25. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{1}{x-5}<0$; б) $\frac{1}{x+3}>0$; в) $\frac{-4}{x-2}\geqslant 0$; г) $\frac{-3}{x+1}\leqslant 0$.

26. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{1}{x+7}<0$; б) $\frac{1}{x-4}>0$; в) $\frac{-2}{x+2}\geqslant 0$; г) $\frac{-5}{x-5}\leqslant 0$.

27. Запишіть нерівність у вигляді рівносильної сукупності двох систем лінійних нерівностей і знайдіть її розв'язки.

а) $\frac{x-3}{x}>0$; б) $\frac{5-x}{x}<0$; в) $\frac{x}{x+3}\geqslant 0$; г) $\frac{x}{x-16}\leqslant 0$.

28. Запишіть нерівність у вигляді рівносильної сукупності двох систем лінійних нерівностей і знайдіть її розв'язки.

а) $\frac{x-2}{x}>0$; б) $\frac{x-8}{x}<0$; в) $\frac{x}{x-10}\geqslant 0$; г) $\frac{x}{x+9}\leqslant 0$.

29. Автомобіль рухається зі швидкістю x км/год і має подолати відстань 300 км не більш ніж за 4 год. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю для цієї ситуації, та розв'яжіть цю нерівність. Чи всі розв'язки нерівності можуть бути значеннями швидкості руху автомобіля?



30. Автомобіль має подолати відстань 400 км за x год зі швидкістю, яка не перевищує 80 км/год. Запишіть нерівність, яка є математичною моделлю для цієї ситуації, та розв'яжіть цю нерівність. Чи всі розв'язки нерівності можуть бути значеннями часу, за який автомобіль подолав задану відстань?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Достатній рівень

31. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{x-6}{3x-1}=5$; б) $\frac{3x+2}{4+x}=3$; в) $\frac{4x-2}{x+3}=-6$; г) $\frac{4-3x}{1-2x}=5$.

32. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{2x+5}{x+2}=3$; б) $\frac{2x+3}{x-1}=3$; в) $\frac{x+5}{x-3}=-1$; г) $\frac{7-2x}{x+1}=2$.

33. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2-3x}$; б) $\frac{x}{9-x}=\frac{1}{2}$; в) $x-\frac{42}{x}=1$; г) $4x-\frac{3}{x}=4$.

34. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{1}{3x}=\frac{1}{1-2x}$; б) $\frac{x}{4-x}=\frac{1}{5}$; в) $x+\frac{18}{x}=11$; г) $2x+\frac{2}{x}=3$.

35. Довжина туристичної траси становить 36 км. Велосипедистка може подолати цю трасу на 4 год швидше, ніж пішохід, причому швидкість її руху на 12 км/год більша за швидкість руху пішохода. Знайдіть швидкості руху пішохода й велосипедистки. *Вказівка:* див. завдання № 23.

36. Довжина туристичної траси становить 28 км. Велосипедистка може подолати цю трасу на 5 год швидше, ніж пішохід, причому швидкість її руху на 10 км/год більша за швидкість руху пішохода. Знайдіть швидкості руху пішохода й велосипедистки. *Вказівка:* див. завдання № 24.



37. Відстань між селищами Високий і Науковий Харківської області становить 5 км. Із цих селищ одночасно назустріч один одному виїхали мотоцикліст і велосипедист. Зустрілися вони на відстані 1 км від одного із селищ. Знайдіть швидкість руху велосипедиста, знаючи, що швидкість руху мотоцикліста на 30 км/год більша за швидкість руху велосипедиста.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

38. Відстань між містами Ромни й Гадяч становить 60 км. Із Ромен до Гадяча відправили запчастини для тракторів на вантажному автомобілі. На зворотний шлях в автомобіль завантажили легший попутний вантаж, і тому водій збільшив швидкість руху на 20 км/год і був у дорозі на пів години менше, ніж під час руху з Ромен до Гадяча. Знайдіть швидкість руху автомобіля під час руху від Гадяча до Ромен.

39. Катер пройшов 56 км проти течії річки й 32 км за течією річки, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість руху катера 30 км/год.

40. Катер пройшов 15 км за течією річки й 4 км по озеру, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість руху катера озером, якщо швидкість течії річки 4 км/год.

41. Перша бригада може виконати завдання на 10 днів швидше, ніж друга, а разом вони виконають це завдання за 12 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожна бригада, працюючи окремо?

42. Два екскаватори викопали котлован за 48 днів. Перший екскаватор, працюючи окремо, міг би виконати цю роботу втричі швидше, ніж другий. За скільки днів, працюючи окремо, кожен з них може виконати цю роботу?

43. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{x-3}{x+2}>0$; б) $\frac{4-2x}{1-2x}<0$; в) $\frac{x-1}{x+3}\geqslant 0$; г) $\frac{x-2}{2x-5}\leqslant 0$.

44. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{x-1}{x-8}>0$; б) $\frac{x-8}{x-4}<0$; в) $\frac{4x+1}{x-10}\geqslant 0$; г) $\frac{3x+6}{x-9}\leqslant 0$.

45. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$; б) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$; в) $y=\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$.

46. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\frac{\sqrt{x-4}}{x+5}$; б) $y=\frac{x-4}{\sqrt{x+5}}$; в) $y=\sqrt{\frac{x-4}{x+5}}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

47. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\dfrac{2-4x}{3x+6}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{5x+20}{3x-15}}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{1-4x}{5x-20}}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{6x-18}{2x+5}}$.

48. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{\dfrac{1-3x}{2x+4}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{3x+18}{4x-32}}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{1-2x}{8x-2}}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{7x-14}{2x+10}}$.

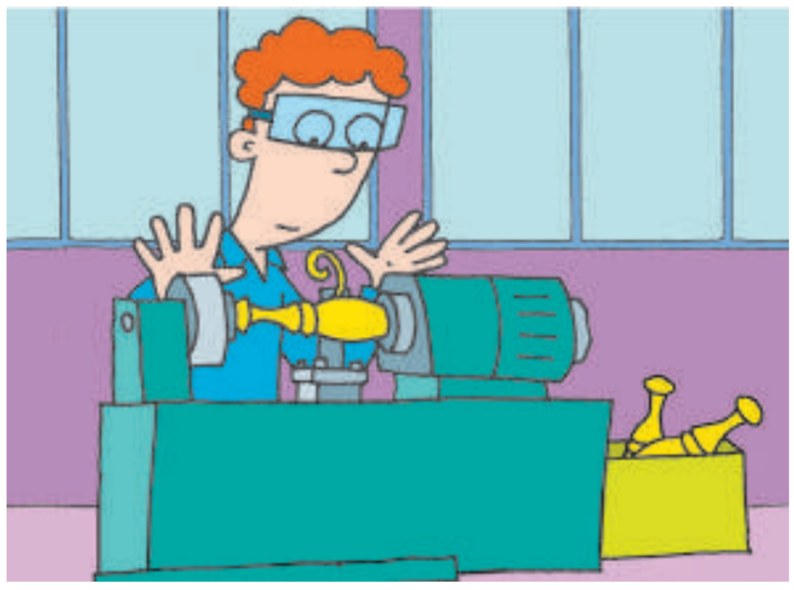
49. Відстань між Вінницею та Івано-Франківськом становить 366 км. Поїзд вирушає із Вінниці о 10.00 і має прибути до Івано-Франківська не раніше 15.00. З якою швидкістю має рухатися поїзд?

50. Відстань між Хмельницьким та Києвом становить 315 км. Поїзд вирушає із Хмельницького о 12.00 і має прибути до Києва не пізніше 16.00. З якою швидкістю має рухатися поїзд?

Високий рівень

51. Фірма повинна була до певного строку виготовити 400 пар взуття. Але, випускаючи в день на 10 пар взуття більше, ніж передбачалося, фірма виконала роботу на 2 дні раніше. За скільки днів було виконано замовлення?

52. Токар повинен був обробити 120 деталей до певного строку. Використовуючи удосконалений різець, він почав обточувати за годину на 20 деталей більше й тому закінчив роботу за 1 год до строку. Скільки деталей за годину він повинен був обробляти за планом?



53. Перший пішохід може пройти відстань між двома пунктами на 5 год швидше, ніж другий. Якщо пішоходи вийдуть із цих пунктів одночасно назустріч один одному, то зустрінуться через 6 год. За скільки годин кожен із них може пройти цю відстань?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

54. Щоб проїхати 36 км ґрунтовою дорогою і 9 км по шосе, велосипедисту знадобиться на 1 год більше, ніж якби він їхав усю цю відстань по шосе. Швидкість руху велосипедиста по шосе на 6 км/год більша за швидкість його руху по ґрунтовій дорозі. Знайдіть швидкість руху велосипедиста по шосе.

55. Баржу розвантажили за допомогою двох вантажних кранів за 15 год, але перший кран розпочав роботу на 7 год пізніше, ніж другий. Відомо, що перший кран, працюючи окремо, може розвантажити баржу на 5 год швидше, ніж другий кран, працюючий окремо. За скільки годин може розвантажити цю баржу кожен кран, працюючи окремо?

56. Для ремонту ділянки дороги виділили дві бригади, одна з яких могла б виконати весь ремонт на 7 днів швидше, ніж друга. Працювати вони почали одночасно з двох кінців ділянки й через 9 днів виконали 75 % усієї роботи. За скільки днів кожна з бригад могла виконати ремонт усієї ділянки дороги, працюючи окремо?

57. До сплаву міді й цинку, який містив 5 кг цинку, додали 15 кг цинку, після чого вміст цинку в сплаві збільшився на 30 %. Знайдіть масу початкового сплаву, якщо міді в ньому було більше, ніж цинку.

58. До сплаву магнію й алюмінію, який містив 22 кг алюмінію, додали 15 кг магнію, після чого вміст магнію в сплаві збільшився на 33 %. Знайдіть масу початкового сплаву.

59. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{4-x}{x^2+2x}>0$; б) $\frac{16-x^2}{2x+5}\leqslant 0$; в) $\frac{3x}{x^2-1}<0$; г) $\frac{x^2-4x}{3x-6}\geqslant 0$.

60. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{x-x^2}{x-3}<0$; б) $\frac{1-x}{x^2-9}\geqslant 0$; в) $\frac{25-x^2}{3x}\leqslant 0$; г) $\frac{x+4}{x^2-x}>0$.

61. Розв'яжіть нерівність.

а) $4x>\frac{1}{x}$; б) $\frac{2}{x-2}\geqslant x-1$; в) $x+1\leqslant\frac{8}{x-1}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

62. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{4}{x} \leqslant x$; б) $\frac{8}{3-x} > x+3$; в) $\frac{5x+7}{x+3} \leqslant x+2$.

63. Розв'яжіть нерівність.

а) $x+\frac{1}{x} > 0$; б) $2x-\frac{8}{x} \leqslant 0$; в) $x+\frac{3}{x} \geqslant 4$; г) $4x+\frac{1}{x} < 4$.

64. Розв'яжіть нерівність.

а) $x-\frac{1}{x} > 0$; б) $x-\frac{9}{x} < 0$; в) $2x-\frac{30}{x} \geqslant 7$; г) $4x+\frac{3}{x} \leqslant 8$.

65. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\frac{2-4x}{3x+6}}$; б) $y=\sqrt{\frac{5x+20}{3x-15}}$; в) $y=\sqrt{\frac{1-4x}{5x-20}}$; г) $y=\sqrt{\frac{6x-18}{2x+5}}$.

66. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\frac{1-3x}{2x+4}}$; б) $y=\sqrt{\frac{3x+18}{4x-32}}$; в) $y=\sqrt{\frac{1-2x}{8x-2}}$; г) $y=\sqrt{\frac{7x-14}{2x+10}}$.

67. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\frac{x^2-4}{4x+12}}$;

б) $y=\sqrt{\frac{x}{3x^2-27}}$;

в) $y=\sqrt{\frac{2x^2-4x}{x-5}}$;

г) $y=\sqrt{\frac{6-2x}{x^2-5x}}$.

68. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-6x}}$;

б) $y=\sqrt{\frac{25-x^2}{2x-16}}$;

в) $y=\sqrt{\frac{3x}{2x^2-8}}$;

г) $y=\sqrt{\frac{x^2+7x}{18-3x}}$.

69. Розв'яжіть нерівність.

а) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6} \leqslant 0$;

б) $\frac{25-x^2}{x^2+4x+4} > 0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

70. Розв'яжіть нерівність.

а) $\dfrac{x^2+1}{x^2-7x+12}>0$;

б) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9}\leqslant 0$.



Цікавинки від дідуся Тараса

Для розв'язування складних нерівностей існує досить універсальний метод, з яким ви детальніше познайомитесь у старшій школі. Він має назву метод інтервалів і ґрунтується на властивості функцій, яку можна сформулювати так: якщо на проміжку $(a;b)$ функція неперервна й не перетворюється в нуль, то вона зберігає на цьому проміжку постійний знак (тобто набуває або лише додатних, або лише від'ємних значень).

Поняття неперервності функції детально вивчають у вищій школі, але інтуїтивно неперервну на деякому проміжку функцію можна розуміти як функцію, графік якої на цьому проміжку можна намалювати, не відриваючи руки від паперу. Із відомих вам функцій неперервними на проміжку $(-\infty;+\infty)$ є лінійна й квадратична функції, функція $y=\sqrt{x}$ є неперервною на проміжку $[0;+\infty)$, а функція $y=\dfrac{k}{x}$ — на кожному з проміжків $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, але не є неперервною на проміжку $(-\infty;+\infty)$ (часто говорять, що вона має розрив у точці $x=0$).

Можна довести, що неперервною на кожному проміжку з її області визначення буде будь-яка функція виду $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — цілі вирази з однією змінною x, зокрема поліноми з однією змінною x, а функція $g(x)$ тотожно не дорівнює нулю. Наприклад, неперервними на кожному проміжку з їх області визначення будуть функції $f(x)=x^3-2x+1$, $f(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{x-4}$ тощо.

Розв'яжемо нерівність $\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{(x-4)}\geqslant 0$, використовуючи метод інтервалів. Діятимемо так.

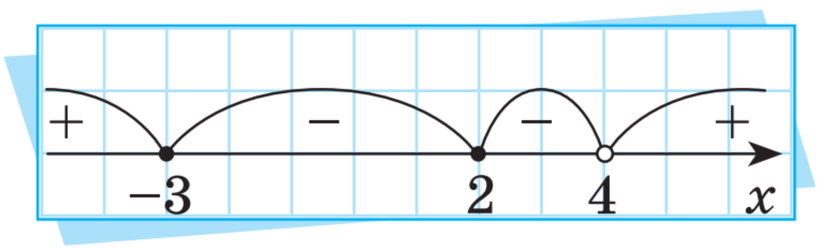
Проєкт підручника видавництва «Ранок»

1) *Урахуємо ОДЗ*: $x \neq 4$. Функція $f(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{x-4}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty;4)$ і $(4;+\infty)$.

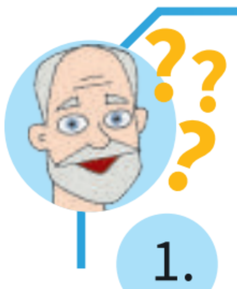
2) *Знайдемо нулі функції* $f(x)$. Розв'язуючи рівняння $f(x)=0$, одержуємо лише два нулі: $x_1=-3$, $x_2=2$.

3) *Позначимо нулі на ОДЗ*. Ці нулі розбивають ОДЗ на чотири проміжки, в кожному з яких функція $f(x)$ зберігає знак, для з'ясування якого слід взяти будь-яку точку з кожного з проміжків $(-\infty;-3)$, $(-3;2)$, $(2;4)$ і $(4;+\infty)$.

Оскільки $f(-4)=\dfrac{(-6)^2\cdot(-1)}{-8}>0$, $f(0)=\dfrac{(-2)^2\cdot 3}{-4}<0$, $f(3)=\dfrac{1^2\cdot 6}{-1}<0$ і $f(5)=\dfrac{3^2\cdot 8}{1}>0$, то одержуємо такий розподіл знаків, де знаком «+» позначено проміжки, для яких $f(x)>0$, а знаком «−» — проміжки, для яких $f(x)<0$ (див. рисунок).



4) Щоб записати *відповідь*, урахуємо ОДЗ $x \neq 4$ і те, що ми розв'язуємо нерівність $f(x)\geq 0$, а отже, множина її розв'язків буде складатися з усіх проміжків, позначених на рисунку знаком «+», а також з усіх нулів функції $y=f(x)$, тобто $(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup(4;+\infty)$.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях математичного гуртка з допомогою вчителя / вчительки дізнайтеся більше про розв'язування нерівностей методом інтервалів. Сформулюйте загальний алгоритм застосування цього методу.

2. Чи доводилося вам використовувати дробові раціональні рівняння та нерівності як математичні моделі задач, що виникали в повсякденному житті? Якщо так, то поділіться своїм досвідом з однокласниками й однокласницями.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Скоротіть дріб: а) $\dfrac{2x-6}{x^2-2x-3}$; б) $\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+5x-2}$.

2. Побудуйте в ПДСК графіки рівнянь $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ і $x+y-2=0$. Чи перетинаються ці графіки? Якщо так, то знайдіть координати точки (точок) їх перетину. Виконайте перевірку. Чи можна цю задачу розв'язати аналітично? Якщо так, то спробуйте це зробити.

3. Студент Василь і студентка Ніна закупили перед сесією канцтовари в одному магазині. Василь купив 4 однакові блокноти й 2 однакові ручки, а Ніна — 5 таких самих блокнотів і 4 такі самі ручки. Знайдіть вартість блокнота й вартість ручки, якщо Василь за свою покупку заплатив 240 грн, а Ніна — 330 грн.

4. У паралелограмі $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей AC і BD, точка M — середина сторони CD, а точка K — середина сторони AD. Виразіть через вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ такі вектори: а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{BM}$; г) $\overrightarrow{CK}$.

5. У рівності ДЕНЬ + НІЧ = ДОБА однаковим буквам відповідають однакові цифри. Відновіть правильну числову рівність.

§ 11. Системи нелінійних рівнянь і нерівностей



Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Слухай, Петрику, а ти знаєш, що головний зал кінотеатру біля міського парку переобладнали? Я з подружками була там цими вихідними й побачила, що поставили кращу звукову систему, а також нові ширші та м'якші крісла, ніж були. Контролерка на вході розповіла, що раніше там було 84 місця, а зараз 88, бо додали один ряд, хоч кількість крісел у кожному ряду й зменшилася на один.



То це ж чудово, аж самому захотілося сходити! Пам'ятаю, що в цьому залі в кожному ряду раніше була однакова кількість місць. Я так розумію, що після реконструкції так і залишилося. Тільки ти не сказала, скільки ж у залі рядів було, а скільки стало. Також цікаво, скільки крісел було й стало в кожному ряду. Контролерка це тобі часом не повідомила?



Не повідомила, але я думаю, що ми можемо й самі дізнатися. Позначимо кількість рядів у залі до реконструкції через x. Кількість крісел у одному ряду до реконструкції нехай буде y. Якщо раніше було 84 місця, то $x \cdot y = 84$. Після реконструкції рядів стало на один більше, тобто $x+1$, а крісел у кожному ряду стало на одне менше, тобто $y-1$. Якщо місць у залі стало 88, то $(x+1)(y-1)=88$.



О, то це ж система, бо обидві рівності мають виконуватися одночасно! Тільки кожне рівняння в ній — нелінійне. Спробуймо її розв'язати. Якщо розкрити дужки в другому рівнянні, то отримаємо таку систему: $\begin{cases} xy = 84, \\ xy + y - x - 1 = 88. \end{cases}$ Якщо відняти від другого рівняння перше, то отримаємо лінійне рівняння: $y - x - 1 = 4$. Тепер можна виразити змінну y через змінну x: $y = x + 5$.



Стривай, далі я сама! Тепер можна підставити вираз для змінної y в перше рівняння: $x(x+5)=84$, або $x^2+5x-84=0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $x_1 = 7$, $x_2 = -12$. Оскільки рядів не може бути від'ємна кількість, то виходить, що до реконструкції їх було 7. А місць у кожному ряду було $7 + 5 = 12$.



Чудово! А тепер у цьому залі 8 рядів по 11 місць у кожному. Бачиш, ми про все й дізналися, хоч рівняння в системі й були нелінійними. Недарма дідусь Тарас говорив, що *математика — це той ніж, яким усі інші фахівці відрізають собі шматок хліба*. Але мені цікаво, чи можна розв'язувати не лише системи нелінійних рівнянь, а й системи нелінійних нерівностей?



Дідусь Тарас має рацію, математика — річ корисна й потрібна. Системи нелінійних нерівностей з однією змінною ми вже розв'язували раніше, просто ви, можливо, не звернули на це уваги. І про системи нелінійних нерівностей з двома змінними також розповімо, але після того, як детальніше поговоримо про системи нелінійних рівнянь.

Нагадаємо, що розв'язком системи двох рівнянь з двома змінними називають впорядковану пару чисел, які за підстановки їх у кожне з рівнянь системи перетворюють його в правильну числову рівність.

Наприклад, пара чисел $\begin{cases} x = 7, \\ y = 12 \end{cases}$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} xy = 84, \\ xy + y - x - 1 = 88. \end{cases}$ Оскільки змінними останньої системи рівнянь є x і y, то згаданий розв'язок цієї системи також можна записати у вигляді: $(7; 12)$.



Також ви знаєте, що розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає. Як видно з міркувань Петрика й Тетянки, система рівнянь $\begin{cases} xy = 84, \\ xy + y - x - 1 = 88 \end{cases}$ має два розв'язки: $(7; 12)$ і $(-12; -7)$. *Переконайтеся в цьому самостійно.*

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Нескладно також навести приклад системи рівнянь, яка не має розв'язків. Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} x+y=-1, \\ x^2+y^2=-1 \end{cases}$ не має розв'язків, бо вираз x^2+y^2 не може набувати від'ємних значень. Якщо система рівнянь не має розв'язків, то також іноді кажуть, що множина її розв'язків є порожньою $(\varnothing)$.



Як і раніше, якщо не зазначено інше, під час розв'язування рівнянь і їх систем ми знаходимо їхні *дійсні* розв'язки. Також зауважимо, що поняття розв'язку й розв'язання системи рівнянь можуть бути поширеними на системи рівнянь із трьома, чотирма та більше змінними. *Сформулюйте відповідні означення самостійно.*



Аналогічно до систем лінійних рівнянь, під час розв'язування інших систем рівнянь ми використовуємо рівносильні перетворення — перетворення, які не змінюють множину розв'язків системи рівнянь.



Нагадаємо, що до рівносильних перетворень систем рівнянь відносять:

- рівносильні перетворення кожного окремого рівняння системи (перенесення доданка з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком, множення або ділення обох частин рівняння на те саме число, відмінне від нуля);
- підстановку в одне з рівнянь системи значення змінної, вираженої з іншого рівняння цієї системи;
- заміну одного з рівнянь системи на суму або різницю цього рівняння та іншого рівняння цієї системи.

Тому основними способами розв'язування систем нелінійних рівнянь, як і раніше, залишаються спосіб підстановки й спосіб додавання (віднімання).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Розглянемо два приклади.

Приклад 1

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} xy=10, \\ 2x+y=9. \end{cases}$

Розв'язання. Використаємо спосіб підстановки. Для цього виразимо з другого рівняння змінну y через змінну x: $y=9-2x$. Потім підставимо цей виразу перше рівняння замість змінної y: $x(9-2x)=10$. Розв'яжемо це рівняння: $9x-2x^2=10$, $-2x^2+9x-10=0$, $2x^2-9x+10=0$; $D=81-80=1$; $x_1=\frac{9-1}{4}=2$, $x_2=\frac{9+1}{4}=2{,}5$. Тепер знайдемо відповідні значення змінної y: $y_1=9-2x_1=9-4=5$, $y_2=9-2x_2=9-5=4$. Отже, розв'язками даної системи рівнянь є впорядковані пари чисел $(2;5)$ і $(2{,}5;4)$.

Приклад 2

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 2x^2-y^2=-1, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

Розв'язання. Використаємо спосіб додавання й знайдемо суму двох рівнянь системи: $2x^2-y^2+x^2+y^2=-1+13$, або $3x^2=12$. Розв'яжемо це рівняння: $x^2=4$, $x_1=-2$, $x_2=2$. Для знаходження відповідних значень змінної y підставимо по черзі знайдені значення x у друге рівняння системи. Оскільки $(-2)^2=2^2=4$, то *в обох випадках* отримаємо рівняння $4+y^2=13$, звідки $y^2=9$, $y_1=-3$, $y_2=3$. Отже, дана система рівнянь має чотири розв'язки: $(-2;-3)$, $(-2;3)$, $(2;-3)$ і $(2;3)$.



Іноді способи додавання й підстановки можна поєднувати. Покажемо це на прикладі.

Приклад 3

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} xy=6, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Розв'язання. Домножимо обидві частини першого рівняння на 2, отримаємо рівняння $2xy=12$. Потім додамо це рівняння до другого рівняння системи: $2xy+x^2+y^2=12+13$, або $x^2+2xy+y^2=25$. Використовуючи формулу квадрата суми, отримаємо: $(x+y)^2=25$, звідки $x+y=5$ або $x+y=-5$, тобто $y=5-x$ або $y=-5-x$.

Спочатку підставимо вираз $y=5-x$ у перше рівняння початкової системи й розв'яжемо отримане рівняння: $x(5-x)=6$, $5x-x^2=6$, $x^2-5x+6=0$, $x_1=2$, $x_2=3$ (за теоремою, оберненою до теореми Вієта). Знаходимо відповідні значення змінної y: $y_1=5-2=3$, $y_2=5-3=2$.

Тепер підставимо в перше рівняння початкової системи вираз $y=-5-x$ і також розв'яжемо отримане рівняння: $x(-5-x)=6$, $-5x-x^2=6$, $x^2+5x+6=0$, $x_3=-2$, $x_4=-3$ (за теоремою, оберненою до теореми Вієта). Знаходимо відповідні значення змінної y: $y_3=-5-(-2)=-3$, $y_4=-5-(-3)=-2$.

Отже, дана система рівнянь має такі розв'язки: $(2;3)$, $(3;2)$, $(-2;-3)$ і $(-3;-2)$.



Іще два приклади розв'язування систем нелінійних рівнянь: rnk.com.ua/112840





Системи нелінійних рівнянь є математичними моделями багатьох задач практичного змісту. Одна з таких задач виникла в Петрика й Тетянки. Наведемо ще один приклад.

Приклад 4

Клумба в міському парку має форму прямокутника. Знайдемо розміри цієї клумби, якщо відомо, що її площа дорівнює 28 м^2, а довжина бордюру, який обмежує клумбу по периметру, дорівнює 22 м.

Розв'язання. Нехай довжини сторін прямокутника, яким є клумба, дорівнюють x м і y м. За умовою задачі $S=x\cdot y=28$, а $P=2x+2y=22$, тобто одержали систему рівнянь $\begin{cases} xy=28, \\ 2x+2y=22. \end{cases}$ Для її

розв'язання поділимо обидві частини другого рівняння на 2 й виразимо змінну y через змінну x: $x+y=11$, $y=11-x$. Підставимо цей вираз у перше рівняння замість змінної y і розв'яжемо отримане рівняння: $x(11-x)=28$, $x^2-11x+28=0$, $x_1=4$, $x_2=7$. Знайдемо відповідні значення змінної y: $y_1=7$, $y_2=4$. Отже, в обох випадках клумба є прямокутником зі сторонами 4 м і 7 м.



Зрозуміло, що задачу з прикладу 4 можна розв'язати й іншим способом, без використання системи рівнянь. *Знайдіть інший спосіб розв'язання самостійно.*



Тепер розглянемо системи нелінійних нерівностей. Якщо всі нерівності системи містять лише одну змінну, то, як вам уже відомо, їх розв'язують аналогічно до систем лінійних нерівностей з однією змінною: спочатку окремо знаходять розв'язки кожної нерівності, а потім записують множину спільних розв'язків усіх нерівностей.

Приклад 5

Розв'яжемо систему нерівностей $\begin{cases} \dfrac{5}{x}>1, \\ x^2-6x+8\geqslant 0. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо кожну нерівність системи окремо. Перша нерівність системи рівносильна нерівності $\dfrac{5-x}{x}>0$, звідки $\begin{cases} 5-x>0, \\ x>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} 5-x<0, \\ x<0. \end{cases}$ Після перетворень отримаємо: $\begin{cases} x<5, \\ x>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x>5, \\ x<0. \end{cases}$ Множиною розв'язків першої системи лінійних нерівностей є проміжок $(0;5)$, а друга система лінійних нерівностей не має розв'язків. Отже, множиною розв'язків нерівності $\dfrac{5}{x}>1$ є проміжок $(0;5)$.

Друга нерівність системи є квадратною. Знайдемо нулі квадратичної функції, яка відповідає цій нерівності, тобто розв'яжемо рівняння $x^2-6x+8=0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $x_1=2$, $x_2=4$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Побудуємо ескіз графіка функції $y=x^2-6x+8$ (рис. 11.1), за яким бачимо, що розв'язком нерівності $x^2-6x+8\geqslant 0$ є множина $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$.

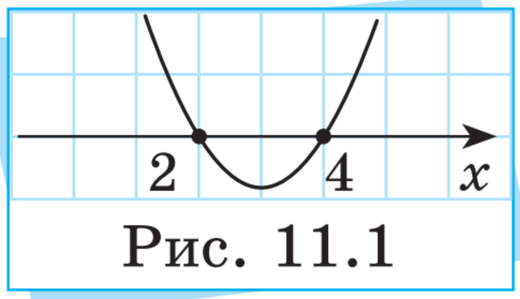


Рис. 11.1

Для знаходження розв'язків системи нерівностей позначимо обидві множини розв'язків на числовій прямій (рис. 11.2); бачимо, що множиною розв'язків даної системи нелінійних нерівностей є множина $(0;2]\cup[4;5)$.

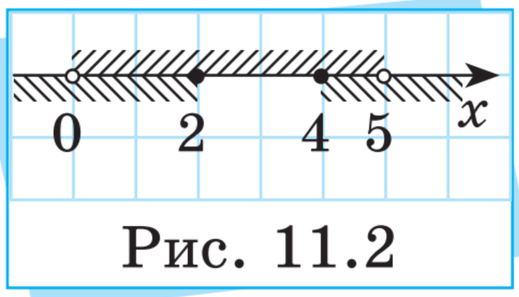


Рис. 11.2



Природно, що множину розв'язків нерівності з двома змінними можна зобразити на координатній площині. Якщо нерівність із двома змінними є лінійною, то ви вже вмієте це робити. Наприклад, із § 6 ви знаєте, що множиною розв'язків нерівності $2x-y+4\geqslant 0$ є одна з півплощин, на які розбиває площину пряма, задана рівнянням $2x-y+4=0$. Для визначення, яка саме півплощина є шуканою, ми використовували *тестову точку* $M(1;1)$, координати якої задовольняють нерівність. Отже, шукана півплощина — та, яка містить точку M (рис. 11.3).

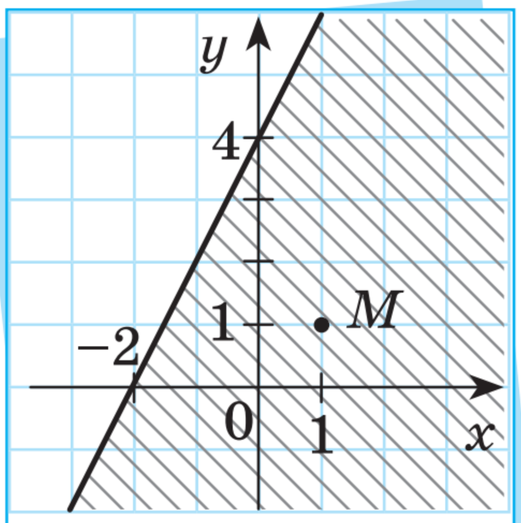


Рис. 11.3



Для нелінійних нерівностей діють аналогічно. Наприклад, знайдемо множину розв'язків нерівності $y\geqslant x^2-4$. Для цього спочатку побудуємо графік функції $y=x^2-4$. Цей графік розбиває площину на дві частини.

Можна довести, що для координат точок, що належать одній із цих частин, виконується нерівність $y>x^2-4$, а для координат точок, що належать іншій частині, — нерівність $y<x^2-4$. Щоб визначити потрібну нам частину площини, візьмемо тестову точку $O(0;0)$. Оскільки нерівність $0\geqslant 0-4$, або $0\geqslant -4$, є правильною, то множиною розв'язків нерівності $y\geqslant x^2-4$ є частина координатної площини, заштрихована на рис. 11.4.

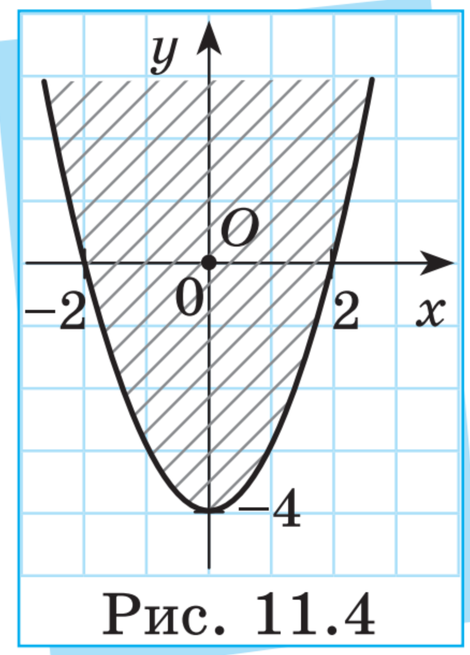


Рис. 11.4

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Аналогічно до лінійних нерівностей із двома змінними, якщо нелінійна нерівність із двома змінними є нестрогою, то множину точок координатної площини, яка задовольняє відповідне цій нерівності рівняння, зображують суцільною лінією, а якщо нерівність є строгою, то пунктирною.

Під час розв'язування систем нерівностей із двома змінними спочатку зображують на координатній площині множину розв'язків кожної окремої нерівності, а потім знаходять множину точок, що належать обом цим множинам.

Наприклад, знайдемо множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4, \\ 2x - y + 4 \geqslant 0. \end{cases}$ Для цього зобразимо в одній ПДСК розв'язки обох нерівностей і визначимо їхню спільну частину (рис. 11.5). Координати точок перетину графіків рівнянь $y = x^2 - 4$ і $2x - y + 4 = 0$ можна визначити графічно, зокрема за допомогою графічного калькулятора або аналітично, розв'язавши відповідну систему рівнянь.

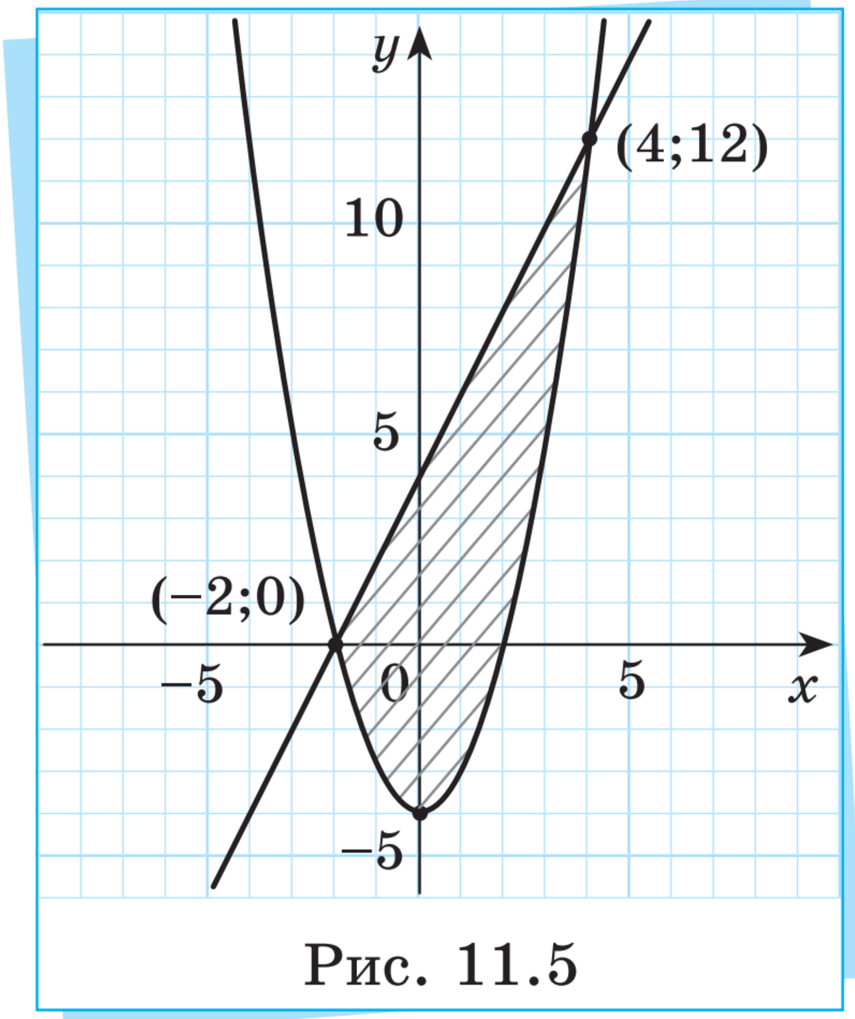


Рис. 11.5



Більше про використання графічного калькулятора для розв'язування систем рівнянь і нерівностей із двома змінними:
rnk.com.ua/112077, rnk.com.ua/112078, rnk.com.ua/112079



Перевірте себе!

1. Дайте означення розв'язання системи двох рівнянь із двома змінними. Наведіть приклади.

2. Що означає розв'язати систему двох нерівностей із двома змінними? Наведіть приклад системи двох нерівностей із двома змінними, яка не має розв'язків.

3. Які перетворення систем нерівностей називають рівносильними? Наведіть приклади таких перетворень.

4. Які способи розв'язання систем двох рівнянь із двома змінними ви знаєте? Наведіть приклади.

5. Наведіть приклади задач, які можна розв'язати за допомогою систем нелінійних рівнянь із двома змінними.

6. Яким чином розв'язують системи нелінійних нерівностей з однією та двома змінними? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Площа прямокутного вікна дорівнює 3,6 м^2, а його периметр — 8,4 м. Згадаймо, що площу та периметр прямокутника обчислюють за формулами $S=ab$ і $P=2(a+b)$ відповідно. Позначимо розміри вікна (у метрах) змінними x і y. Запишіть систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

2. У кімнаті площа стелі прямокутної форми дорівнює 42 м^2, а периметр стелі — 26 м. Позначимо розміри стелі (у метрах) змінними x і y. Запишіть систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

3. З'ясуйте, яка з наведених пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3. \end{cases}$ Підставте в систему перше число замість x, а друге число — замість y.

а) $(1;4)$; б) $(8;5)$; в) $(4;1)$; г) $(1;-4)$.

4. З'ясуйте, яка з наведених пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x^2-2y=0, \\ 5x+y=16. \end{cases}$

а) $(2;6)$; б) $(-2;6)$; в) $(3;1)$; г) $(1;11)$.

5. Виразіть із рівняння змінну y через змінну x.

а) $3x+y=12$; б) $7x+y=-5$; в) $-2x-y=3$; г) $4x-y=-9$.

6. Виразіть із рівняння змінну y через змінну x.

а) $6x-y=2$; б) $3x+y=7$; в) $2x-y=7$; г) $8x-y=-11$.

7. Виразіть із рівняння змінну x через змінну y.

а) $x-4y=3$; б) $x+6y=2$; в) $-x-5y=1$; г) $-x+4y=0$.

8. Виразіть із рівняння змінну x через змінну y.

а) $x+3y=4$; б) $-x-5y=6$; в) $-x-7y=0$; г) $x+8y=-9$.

9. Знайдіть суму двох рівнянь наведеної системи (для цього додайте ліві частини рівнянь, потім додайте праві частини рівнянь і прирівняйте отримані суми). Перенесіть всі мономи в ліву частину рівняння та зведіть подібні мономи.

а) $\begin{cases} 3x^2-2y^2=0, \\ 5x+2y^2=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x^2+7y=9, \\ 4x^2-6y^2=-7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+5xy=11, \\ 6x-5xy=-3. \end{cases}$

10. Знайдіть суму двох рівнянь наведеної системи. Перенесіть всі мономи в ліву частину рівняння та зведіть подібні мономи.

а) $\begin{cases} y^2-7xy=1, \\ 8y+7xy=-9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -6x^2+3y^2=9, \\ 6x^2+8y=-3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=-5, \\ -3x+9y^2=-7. \end{cases}$

11. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними, знайшовши спочатку корінь першого рівняння.

а) $\begin{cases} 5x+20=0, \\ y=x^2+3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-7=2, \\ x^2+2y=17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y-7=11, \\ x-y^2=0. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними, знайшовши спочатку корінь другого рівняння.

а) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 6x + 18 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y^2 - 4 = 0, \\ -2y + 5 = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 + 4y = 0, \\ 7x - 4 = 24. \end{cases}$

13. З'ясуйте, яке з наведених чисел є розв'язком системи нерівностей з однією змінною $\begin{cases} x^2 + x \leqslant 8, \\ 7x - 3 > 0. \end{cases}$

а) -5; б) -3; в) 0; г) 1; д) 2; е) 3.

14. З'ясуйте, яке з наведених чисел є розв'язком системи нерівностей з однією змінною $\begin{cases} \dfrac{10}{x} \leqslant 2, \\ 4x - 9 > 0. \end{cases}$

а) -5; б) -3; в) 0; г) 3; д) 5; е) 10.

15. З'ясуйте, яка з наведених пар чисел є розв'язком системи нерівностей з двома змінними $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 100, \\ x - 2y > 7. \end{cases}$

а) $(-1; -3)$; б) $(-2; -5)$; в) $(9; 2)$; г) $(9; -2)$; д) $(10; 0)$; е) $(1; -8)$.

16. З'ясуйте, яка з наведених пар чисел є розв'язком системи нерівностей з двома змінними $\begin{cases} 5x + y^2 \geqslant 30, \\ x - y < 3. \end{cases}$

а) $(1; 5)$; б) $(2; -4)$; в) $(-3; 6)$; г) $(4; 3)$; д) $(7; 0)$; е) $(0; 7)$.

Середній рівень

17. Сума довжин катетів прямокутного трикутника дорівнює 14 см, а його гіпотенуза — 10 см. Згадаймо, що гіпотенузу прямокутного трикутника обчислюють за допомогою формули $c^2 = a^2 + b^2$. Позначимо довжини катетів прямокутного трикутника (у см) змінними x і y. Запишіть систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

18. Різниця довжин катетів прямокутного трикутника дорівнює 7 см, а його гіпотенуза — 13 см. Позначимо довжини катетів прямокутного трикутника (у см) змінними x і y. Запишіть систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї ситуації.

19. Виразіть із рівняння одну змінну через іншу зручним способом.

а) $x+5y=8$; б) $-4x-y=7$; в) $-x+3y=0$; г) $2x+y=-5$.

20. Виразіть із рівняння одну змінну через іншу зручним способом.

а) $3x+y=-7$; б) $-5x+y=9$; в) $-x-5y=0$; г) $x+6y=-1$.

21. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} y=x-5, \\ x^2-y^2=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=2y+1, \\ x^2-4y^2=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=5y-2, \\ x^2-5xy+26=0. \end{cases}$

22. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} x=3y-2, \\ x^2-9y^2+20=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=4x-1, \\ y^2-4xy=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=x+7, \\ x^2-y^2=21. \end{cases}$

23. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання, скориставшись таким алгоритмом:

1) замініть одне з рівнянь системи рівнянням, яке є сумою рівнянь цієї системи;
2) знайдіть значення змінної з рівняння, яке отримали після додавання рівнянь системи;
3) підставте знайдене значення змінної в друге рівняння системи та розв'яжіть отримане рівняння з однією змінною;
4) запишіть відповідь.

а) $\begin{cases} x+5y^2=17, \\ 3x-5y^2=-29; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2-5y=89, \\ -6x^2+3y=-75; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -8xy+4y=19, \\ 8xy+y=11. \end{cases}$

24. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання, скориставшись алгоритмом із завдання № 23.

а) $\begin{cases} 5x+14xy=36, \\ -8x-14xy=-24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-7y^2=-27, \\ -2x+7y^2=17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2+7y=59, \\ -3x^2-2y=-19. \end{cases}$

25. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом.

а) $\begin{cases} y=x^2, \\ y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

26. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом.

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 + x. \end{cases}$

27. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності.

а) $y \geqslant x^2 + 2$; б) $y < x^2 - 3$; в) $y \leqslant -x^2 - 1$; г) $y > -x^2 + 4$.

28. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків нерівності.

а) $y \leqslant x^2 + 1$; б) $y > x^2 - 2$; в) $y \geqslant -x^2 + 2$; г) $y < -x^2 - 3$.

29. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant 0, \\ x \leqslant 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - x \geqslant 0, \\ 2x + 1 > 0. \end{cases}$

30. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geqslant 0, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 7x \geqslant 0, \\ 2x - 6 < 0. \end{cases}$

Достатній рівень

31. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y^2 = 6, \\ x = y - 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 21, \\ x + y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

32. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y = 15 - 2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 + x = 11, \\ x = y - 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 15, \\ x - y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$

33. На рис. 1 зображено графіки функцій $y = \frac{8}{x}$ (синім кольором), $y = x + 2$ (чорним кольором), $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$ (червоним кольором).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Використовуючи рис. 1, запишіть усі розв'язки системи. Перевірте правильність відповіді, виконавши підстановку.

а) $\begin{cases} xy = 8, \\ y - x = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ xy = 8. \end{cases}$

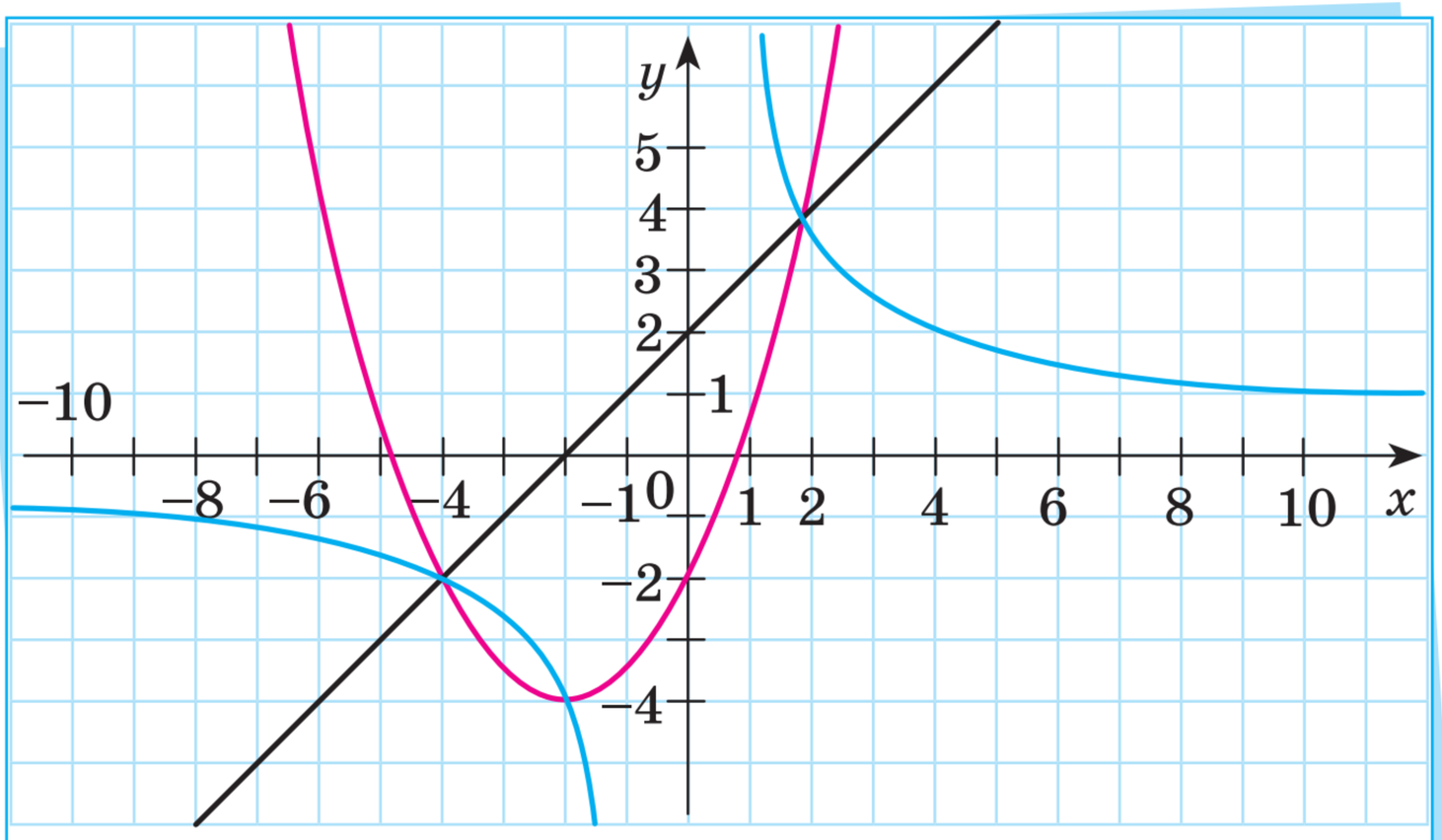


Рис. 1

34. На рис. 2 зображено графіки рівнянь $x^2 + y^2 = 25$ (чорним кольором), $y = 2x + 10$ (синім кольором), $y = -x^2 + 5$ (червоним кольором).

Використовуючи рис. 2, запишіть усі розв'язки системи. Перевірте правильність відповіді, виконавши підстановку.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - 2x = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

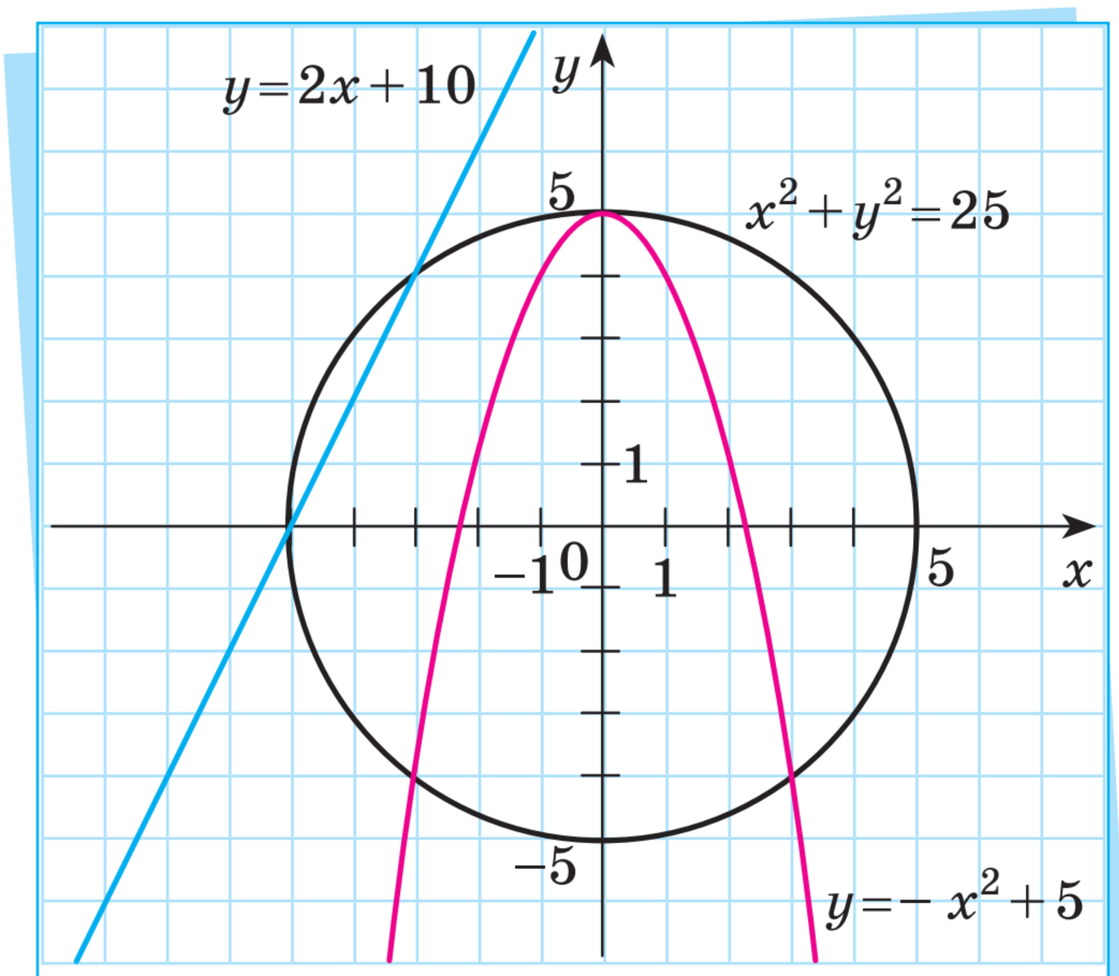


Рис. 2

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

35. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 3x - y^2 = 9, \\ 2x + y^2 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ 2x^2 + y = -1. \end{cases}$

36. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 3x^2 - 15y = 6, \\ 4x^2 + 15y = 106; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y^2 = -6, \\ -2x + 14y^2 = 50. \end{cases}$

37. На ділянці прямокутної форми заклали сад. Площа ділянки дорівнює 700 м^2, а довжина огорожі по периметру ділянки — 110 м. Знайдіть довжини сторін ділянки.

38. Адміністрація готельного комплексу хоче на своїй території виділити місце для басейну прямокутної форми, але це можливо тільки за таких умов: периметр басейну має бути 58 м, а площа басейну — 154 м^2. Якими мають бути розміри басейну, щоб його можна було розмістити в цьому комплексі?

39. Знайдіть розв'язки системи нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2 - 25 < 0, \\ x - 2 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 16 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geqslant 0, \\ 2x - 8 < 0. \end{cases}$

40. Знайдіть розв'язки системи нерівностей.

а) $\begin{cases} -x^2 + 64 < 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 - 12x < 0, \\ 3x^2 - 27 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ x - 2 \leqslant 0. \end{cases}$

41. Знайдіть область визначення функції.

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x} + \sqrt{x + 1}$; б) $y = \sqrt{4 - x} - \sqrt{25 - x^2}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x + 3}}$.

42. Знайдіть область визначення функції.

а) $y = \sqrt{9x - x^2} + \sqrt{2 - x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{\sqrt{x^2 - 16}}$; в) $y = \sqrt{x - 1} - \sqrt{36 - x^2}$.

43. Зобразіть на координатній площині всі розв'язки нерівності.

а) $y \leqslant -x^2 + 6x - 7$; б) $y > x^2 + 4x + 1$.

44. Зобразіть на координатній площині всі розв'язки нерівності.

а) $y \geqslant 2x^2 - 8x + 9$; б) $y < -x^2 + 2x + 1$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

45. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей.

а) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < x^2, \\ y > 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y > x^2, \\ y < -5. \end{cases}$

46. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей.

а) $\begin{cases} y > x^2, \\ y < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant x^2, \\ y \leqslant -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y > x^2, \\ y > 5. \end{cases}$

Високий рівень

47. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x(4-y) = 14, \\ x(4-y) = 3x - 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy - y = 1, \\ xy + x = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + xy = -6, \\ x + y - xy = 10. \end{cases}$

48. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x(y+5) = 10, \\ x(y+5) = 4x + 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2xy + y = 9, \\ 2xy - x = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y - 2xy = -3, \\ x + y + 2xy = 13. \end{cases}$

49. Спортивний майданчик прямокутної форми займає площу 600 м^2. Коли навколо нього проклали доріжку шириною 1 м, то майданчик разом із доріжкою став займати площу 704 м^2. Знайдіть розміри майданчика.

50. В актовій залі було 500 стільців, розміщених однаковими рядами. Після реконструкції зали загальна кількість місць стала 450, число рядів зменшили на 5, але в кожному ряду стало на 5 стільців більше. Знайдіть, скільки рядів і стільки стільців у ряду було в залі спочатку?

51. За 9 год пароплав пройшов 100 км за течією річки та 64 км проти течії. Іншим разом за цей самий час він пройшов 80 км проти течії річки й повернувся назад. Знайдіть швидкість руху пароплава в стоячій воді та швидкість течії річки.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

52. Дорога від дому Тетянки до школи складається з 300 м підйому й 600 м спуску. Дівчина помітила, що дорога від дому до школи займає в неї 16 хв, а зворотний шлях — 17 хв. З якою швидкістю Тетянка йде на підйомі, а з якою — на спуску?

53. Двоє робітників виконали доручену їм роботу за 12 год. Якби один виконав половину цієї роботи, а другий — ту частину, що залишилася, то на виконання всієї роботи знадобилося б 25 год. За який час кожен із них міг виконати цю роботу, працюючи один?

54. Два крани, відкриті одночасно, можуть наповнити дитячий надувний басейн за 20 хв. Якщо спочатку на 25 хв відкрити тільки перший кран, а потім його закрити й відкрити другий кран, то ще через 16 хв басейн наповниться. За скільки хвилин може заповнити цей басейн кожен кран окремо?

55. Знайдіть усі значення параметра a, за яких дана система:

1) має два різні розв'язки; 2) має єдиний розв'язок; 3) не має розв'язків.

а) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ y + x = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - y = a. \end{cases}$

56. Знайдіть усі значення параметра a, за яких дана система:

1) має єдиний розв'язок; 2) має два різні розв'язки; 3) не має розв'язків.

а) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y - x = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ x + y = a. \end{cases}$

57. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} > 1, \\ x^2 + x - 6 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 3)(x + 4) > 0, \\ (x + 7)(5 - x) \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x + 4}{x - 2} \geqslant 0, \\ \dfrac{6}{x} < 1. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

58. Розв'яжіть систему нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2-7x+10>0, \\ x^2-4x+3\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{3x-7}{x}>2, \\ x^2-8x-9<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+2)(6-x)\leqslant 0, \\ (x-1)(x+4)>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+2}\geqslant 0, \\ \dfrac{2}{x-7}>1. \end{cases}$

59. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{\dfrac{2x-4}{15-3x}}-\sqrt{3x-9}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{25-x^2}}$.

б) $y=\sqrt{36-x^2}-\sqrt{2x^2-5x}$;

60. Знайдіть область визначення функції.

а) $y=\sqrt{x-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{6-x}$; б) $y=\sqrt{7x-x^2}+\sqrt{x^2-25}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{49-x^2}}{\sqrt{x^2-4x}}$.

61. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей.

а) $\begin{cases} y\geqslant x^2, \\ y\leqslant x+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\geqslant -x^2, \\ y<-x-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y<x^2, \\ y<x-1. \end{cases}$

62. Зобразіть на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей.

а) $\begin{cases} y\geqslant x^2, \\ y\leqslant x+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ y>-x-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y>-x^2, \\ y<x-5. \end{cases}$

63. Зобразіть на координатній площині розв'язки системи нерівностей.

а) $\begin{cases} 3x-y+1\leqslant 0, \\ y>x^2-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\leqslant 5-x^2, \\ 2x-y-3<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y\geqslant x^2-4x, \\ y\leqslant 2x-x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y>x^2-8, \\ y<6x-x^2. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

64. Зобразіть на координатній площині розв'язки системи нерівностей.

а) $\begin{cases} 2x-y-1>0, \\ y\geqslant x^2-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y<7-x^2, \\ x+y-5<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y\leqslant 3x-x^2, \\ y\geqslant 2x^2-5x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y>x^2-6, \\ y<4x-x^2. \end{cases}$



Цікавинки від дідуся Тараса

Для розв'язування багатьох практичних задач зручно використовувати й системи з більшою кількістю рівнянь та змінних, причому кількість змінних може не збігатися з кількістю змінних. Наприклад, розв'яжемо таку задачу.

Задача. Відомо, що трава на галявині росте з постійною швидкістю. У фермерів Панька та Одарки є три стада корів. Перше стадо з'їло б усю траву на цій галявині за 24 дні, друге — за 60 днів, а третє — за 96 днів. У першому стаді 70 корів, у другому — 30 корів. Скільки корів у третьому стаді?

Розв'язання. Нехай у третьому стаді n корів, загальна маса трави на галявині перед приходом туди корів — M кг, маса трави, що наростає щодня, — x кг, а маса трави, яку з'їдає одна корова за один день, — y кг. Перше стадо корів за 24 дні з'їсть $24\cdot 70\cdot y$ кг трави. За умовою задачі це має бути вся трава на галявині, тобто та, яка була до приходу корів, а також та, що виросла за ці 24 дні, тобто $M+24\cdot x$ кг. Отримали перше рівняння: $24\cdot 70\cdot y=M+24\cdot x$, або $1680y=M+24x$. Міркуючи аналогічно щодо другого стада, одержимо, що $60\cdot 30\cdot y=M+60\cdot x$, або $1800y=M+60x$. Для третього стада маємо рівність $n\cdot 96\cdot y=M+96\cdot x$, або $96ny=M+96x$. Отже, в підсумку маємо систему рівнянь $\begin{cases} 1680y=M+24x, \\ 1800y=M+60x, \\ 96ny=M+96x. \end{cases}$

У цій системі три рівняння й чотири змінні, причому перші два рівняння — лінійні, а третє — нелінійне. Однак зауважимо, що для розв'язання задачі не потрібно знаходити розв'язок (чи розв'язки) системи, а треба лише знайти значення n. Для цього виразимо з першого й другого рівнянь змінну M через інші змінні. Із першого рівняння $M=1680y-24x$, а з другого $M=1800y-60x$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Отже, $1680y-24x=1800y-60x$, звідки $36x=120y$, або $x=\frac{10}{3}y$. Тоді $M=1800y-60\cdot\frac{10}{3}y=1600y$. Підставимо знайдені вирази для x і M у третє рівняння системи: $96ny=1600y+96\cdot\frac{10}{3}y$, або $96ny=1920y$. Оскільки $y\neq 0$ (кожна корова хоч щось з'їдає щодня), то $n=\frac{1920y}{96y}=20$, тобто в третьому стаді фермерів Панька й Одарки 20 корів.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи доводилося вам для розв'язування практичних задач використовувати системи рівнянь із трьома та більше змінними? Якщо так, то поділіться своїм досвідом із однокласниками й однокласницями.
2. З допомогою вчительки / вчителя на заняттях математичного гуртка дізнайтеся більше про системи рівнянь (зокрема, нелінійних), у яких кількість змінних більша за кількість рівнянь. Чи можна стверджувати, що такі системи завжди мають безліч розв'язків?
3. Чи всі припущення в задачах на рух і роботу видаються вам такими, що відповідають реальному життю? Поясніть свою думку.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Доведіть тотожність
$(2x+y)(2x-y)+2\left(5y^2-6x(y+2)\right)+24x=(2x-3y)^2$.
2. Задано коло із центром у точці $A(-1;3)$ і радіусом $R=2$. Знайдіть рівняння лінії, яка є образом цього кола за:
   а) паралельного перенесення на вектор $\vec{a}(2;-4)$;
   б) симетрії відносно точки $B(2;1)$;
   в) гомотетії із центром у точці $C(-2;0)$ і коефіцієнтом $\lambda=3$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

3. $ABCD$ — дельтоїд, у якому $AB = AD$ і $BC = CD$. Точки K, L, M, P — середини сторін AB, BC, CD, AD відповідно. Доведіть, що $KLMP$ — прямокутник.

4. О 12 годині дня серед 25 учнів та учениць 9 класів однієї зі шкіл провели анонімне опитування щодо кількості відео, переглянутих у соціальних мережах за сьогодні після того, як вони прокинулись. Було отримано такі результати: 1, 3, 2, 0, 5, 4, 5, 2, 6, 1, 1, 2, 4, 5, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 7, 1, 2, 3, 4. Складіть варіаційний ряд за цими даними. Знайдіть: а) середнє арифметичне $\bar{x}$; б) моду Mo; в) медіану Me; г) розмах вибірки R.

5. Квиток називають математично щасливим, якщо між цифрами його номера можна вставити дужки та знаки арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) так, щоб після виконання всіх цих дій отримати число 100. Чи є зображений на рисунку квиток математично щасливим?



ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 3

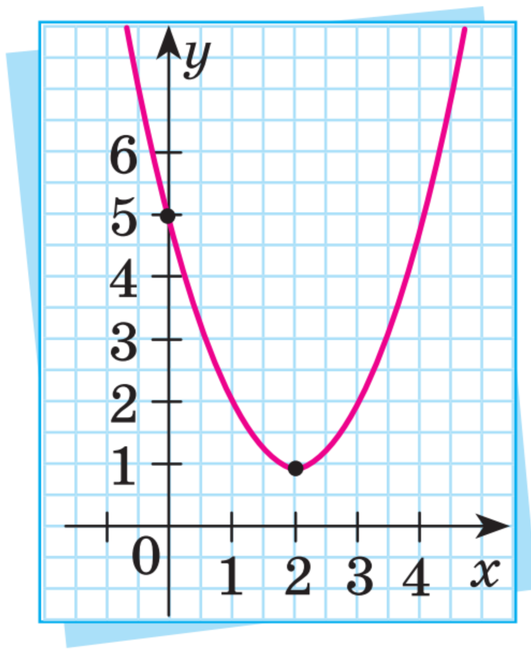


rnk.com.ua/114532

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

А	Б
$y=(x-2)^2-1$	$y=(x+2)^2+1$
В	Г
$y=(x-2)^2+1$	$y=(x+2)^2-1$



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2. Укажіть число, яке є розв'язком нерівності $\frac{x-5}{x+2}>0$.

А	Б	В	Г
-2	5	4	-3

3. Укажіть пару чисел, що є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ x+y=-9. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$(-5;-4)$	$(-4;-5)$	$(5;4)$	$(4;5)$

4. До графіка функції $y=\sqrt{x}$ послідовно застосували симетрію відносно осі абсцис, а потім паралельне перенесення на вектор $\vec{a}(-2;0)$. Графік якої функції отримали?

А	Б	В	Г	Д
$y=\sqrt{-x-2}$	$y=\sqrt{-x+2}$	$y=-2\sqrt{x}$	$y=-\sqrt{x-2}$	$y=-\sqrt{x+2}$

5. Розв'яжіть нерівність $4x-x^2>0$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;4)$	$(-4;0)$	$(-2;2)$	$(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$	$(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$

6. Ігор і Олег виготовили сніжинки для прикрашання класу. Кожен хлопець щодня робив однакову кількість сніжинок, причому Ігор щодня робив на 2 сніжинки більше, ніж Олег. У підсумку Олег зробив 80 сніжинок на 1 день раніше, ніж Ігор зробив 108 сніжинок. Скільки сніжинок робив кожен хлопець щодня? Яке з рівнянь може бути математичною моделлю цієї задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{80}{x}-\frac{108}{x+2}=1$	$\frac{108}{x+2}-\frac{80}{x}=1$	$\frac{108}{x}-\frac{80}{x+2}=1$	$\frac{80}{x+2}-\frac{108}{x}=1$	$\frac{80}{x}+\frac{108}{x+2}=1$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Знайдіть *найбільше* значення функції $y=-2x^2+8x+3$.

8. Знайдіть *кількість* усіх *цілих* розв'язків нерівності $x^2-7x-8\leqslant 0$.

9. Орест і Оксана катались на човні. Спочатку вони, веслуючи, пропливли 6 км проти течії річки, а потім ту саму відстань сплавлялися назад як на плоту, не беручись за весла. Відомо, що вся романтична подорож тривала 5 год, а власна швидкість руху човна у 5 разів більша за швидкість течії річки. Знайдіть швидкість течії річки (у км/год).

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Відомо, що областю визначення $D(f)$ деякої функції $y=f(x)$ є проміжок $[-4;6]$, а її множиною значень $E(y)$ — проміжок $[-2;4]$. Зобразіть один із можливих графіків такої функції. Використовуючи цей графік, побудуйте графіки таких функцій: а) $y=f(x)-1$; б) $y=f(x-3)$; в) $y=-f(x)$; г) $y=f(-x)$; д) $y=\frac{1}{2}f(x)$; е) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. Для кожної з функції *а–е* знайдіть її область визначення та множину значень.

11. Визначте координати вершини й нулі функції $y=2x^2-3x+1$, а потім побудуйте її графік. За побудованим графіком знайдіть: а) проміжки зростання й спадання; б) проміжки знакосталості.

12. Розв'яжіть нерівність $\frac{3x-1}{x-2}\geqslant 2$.

13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-2y=-4. \end{cases}$

14. Кицька Муся з'їдає пачку корму «Хрумтик» на 2 дні швидше за кота Рудого. За скільки днів з'їдає пачку «Хрумтика» Рудий, а за скільки — Муся, якщо 5 таких пачок їм вистачає на 24 дні спільного харчування?

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Побудуйте графік функції.

а) $y=|x|$; б) $y=|6-2x|$; в) $y=|x^2-1|$; г) $y=|\sqrt{x}-2|$.

Вказівка. Для розв'язування завдань 1 і 2 використайте орієнтири, наведені в «Цікавинках від дідуся Тараса» до § 7.

2. Побудуйте графік функції.

а) $y=6-|x|$; б) $y=\dfrac{2}{|x|}$; в) $y=\dfrac{-1}{|x|}$; г) $y=\sqrt{|x|}$.

3. Побудуйте графік функції.

а) $y=|4-2|x||$; в) $y=|(|x|-1)^2-4|$;

б) $y=\left|\dfrac{1}{|x|}-2\right|$; г) $y=|\sqrt{|x|}-1|$.

4. Доведіть: якщо задано графік функції $y=f(x)$, то побудувати графік рівняння $|y|=f(x)$ можна за таким планом:

1) ту частину графіка функції $y=f(x)$, яка лежить вище за вісь Ox (і на самій осі), залишаємо без змін;

2) цю саму частину графіка функції $y=f(x)$ відображаємо симетрично відносно осі Ox.

5. Користуючись планом із завдання № 4, побудуйте графік рівняння.

а) $|y|=6-2x$; б) $|y|=\dfrac{3}{x}$; в) $|y|=x^2-1$; г) $|y|=\sqrt{x}$.

6. Побудуйте графік даної функції чи рівняння.

а) $y=||x-1|-2|$; б) $|y|=4-(|x|-1)^2$; в) $|y|=\sqrt{|x-1|}$.

7. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases}2x^2-xy-3y^2=0,\\ x^2-3xy+2y^2=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=3,\\ 2x^2-2xy-y^2=-6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}xy+2x+2y=5,\\ x^2+y^2+3x+3y=8.\end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

8. Знайдіть кількість розв'язків системи залежно від значення параметра a.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ |y|=a-x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=|x|+a. \end{cases}$

9. Кілька друзів обмінялися один з одним фотографіями. Скільки було друзів, якщо передано менше 6 фотографій?

10. Біля будинку ростуть липи й берези, причому загальна кількість дерев більша за 14. Якщо збільшити вдвічі кількість лип, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше, ніж лип. Якщо ж збільшити вдвічі кількість беріз, не змінюючи кількість лип, то лип все одно буде більше, ніж беріз. Скільки лип і скільки беріз росте біля будинку?

11. Зобразіть у ПДСК множину розв'язків нерівності.

а) $|x|+|y|\leqslant 2$; б) $x^2+y^2>4$; в) $x^2+(y-3)^2\leqslant 25$; г) $|y|<4x-x^2$.

12. Зобразіть у ПДСК множину розв'язків системи нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 36, \\ (x+1)^2+y^2\geqslant 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2\leqslant 25, \\ x>y^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+(y-2)^2\leqslant 16, \\ (x+2)^2+y^2\geqslant 4. \end{cases}$

Словничок

Квадратична функція — quadratic function
Вершина (вітки) параболи — vertex (branches) of parabola
Область визначення функції — domain of the function
Множина значень функції — range of the function
Проміжки зростання (спадання) — intervals of increase (decrease)
Проміжки знакосталості — intervals of sign constancy
Побудова графіка функції за допомогою геометричних перетворень — graphing a function using geometric transformations
Квадратна нерівність — quadratic inequality
Система дробових раціональних рівнянь (нерівностей) — system of fractional rational equations (inequalities)

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

Графік $y = f(x)$ уже побудовано

$y = f(x - m)$	паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(m; 0)}$ (на m одиниць уздовж осі Ox)
$y = f(x) + n$	паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(0; n)}$ (на n одиниць уздовж осі Oy)
$y = -f(x)$	симетрія відносно осі Ox
$y = f(-x)$	симетрія відносно осі Oy
$y = kf(x)$	деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k > 0$
$y = f\left(\frac{x}{p}\right)$	деформація до осі Oy із коефіцієнтом $p > 0$

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

1) графік є параболою
2) вершина параболи — точка $O'(m; n)$,

   де $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = \dfrac{-D}{4a}$

   або $n = am^2 + bm + c$
3) якщо $a > 0$, — вітки параболи спрямовані вгору, якщо $a < 0$, — вітки спрямовані вниз
4) нулі — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (якщо вони є)

Приклад

$y = -x^2 + 6x - 8$

$a = -1;\ b = 6;\ c = -8$

$D = b^2 - 4ac = 36 - 32 = 4;$

$m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-6}{-2} = 3, \quad n = \dfrac{-D}{4a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$

Нулі: $x_1 = 2;\ x_2 = 4$

Зростає на $(-\infty; 3]$

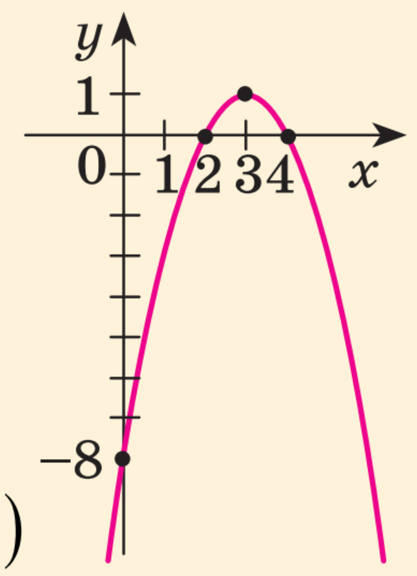
Спадає на $[3; +\infty)$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$

$E(y) = (-\infty; 1]$

$y > 0$ на $(2; 4)$

$y < 0$ на $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$



Квадратні нерівності

строгі

$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c < 0$

нестрогі

$ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ ax^2 + bx + c \leqslant 0$

Алгоритми розв'язування

1) знайти корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (якщо існують);
2) побудувати ескіз графіка функції $y = ax^2 + bx + c$;
3) для нерівності
   - $ax^2 + bx + c > 0$ у відповідь записати проміжок (проміжки), де графік лежить вище осі Ox;
   - $ax^2 + bx + c < 0$ у відповідь записати проміжок (проміжки), де графік лежить нижче осі Ox;
4) для нерівностей $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ і $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ виконати дії з п. 3, додавши до множини розв'язків корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (якщо існують).

Дробові раціональні нерівності

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)>0, \\ Q(x)>0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} P(x)<0, \\ Q(x)<0. \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)>0, \\ Q(x)<0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} P(x)<0, \\ Q(x)>0. \end{cases}$$

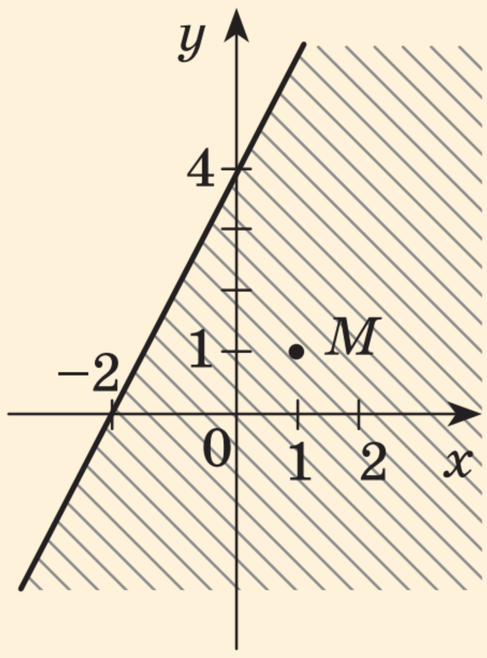
Для нерівностей $\frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)}\leqslant 0$ слід до розв'язку відповідних строгих нерівностей додати корені рівняння $P(x)=0$ (якщо існують).

Нерівності з двома змінними

Приклади

Лінійні

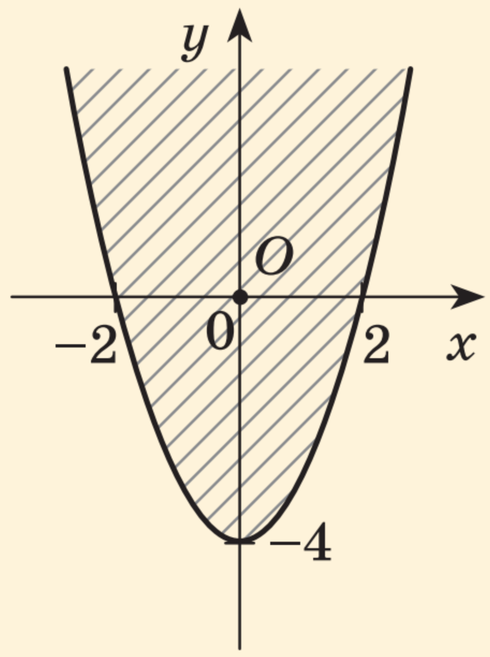
$2x-y+4\geqslant 0$



1) побудувати $2x-y+4=0$;
2) взяти тестову точку і визначити півплощину $\left(M(1;1)\colon\ 2\cdot 1-1+4\geqslant 0\right)$

Нелінійні

$y\geqslant x^2-4$

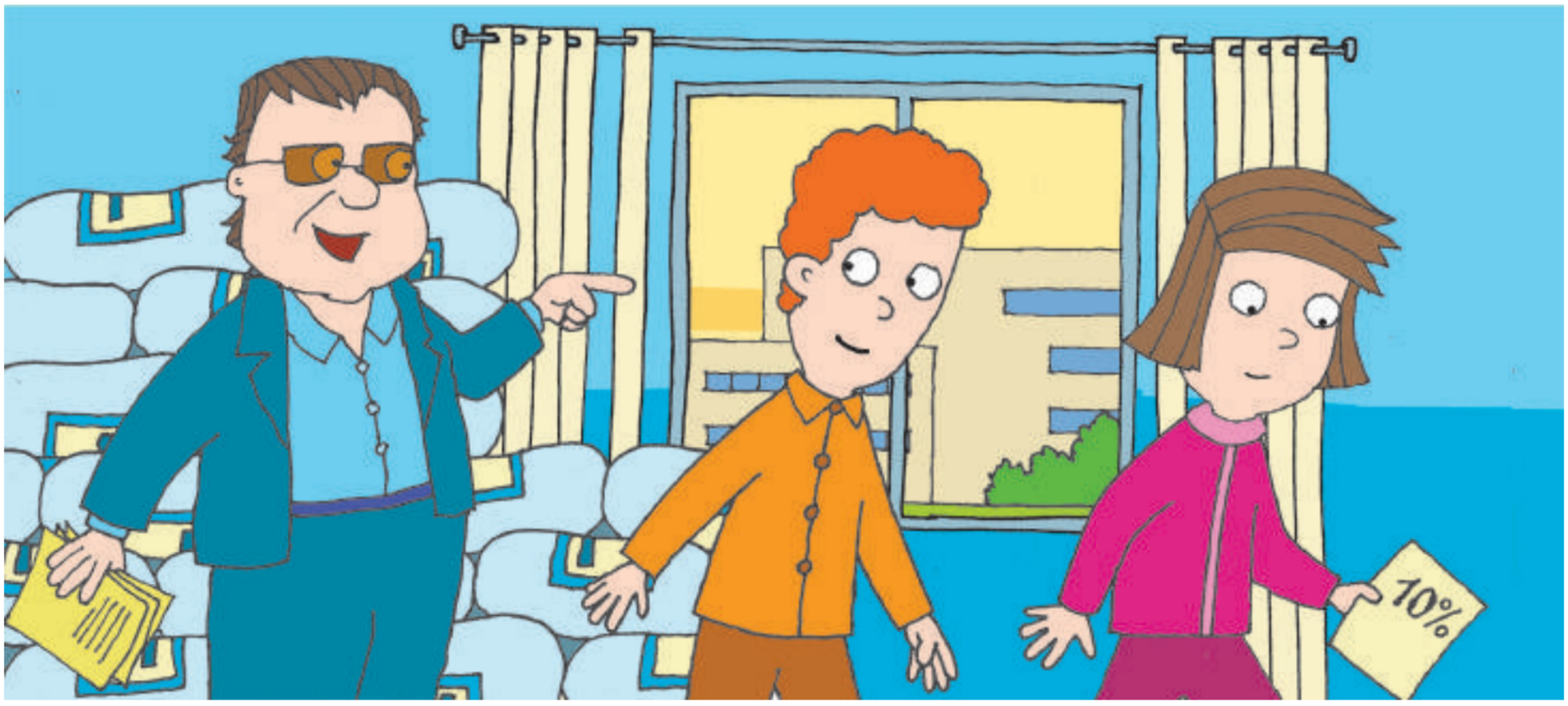


1) побудувати $y=x^2-4$;
2) взяти тестову точку і визначити частину площини $\left(O(0;0)\colon\ 0\geqslant 0-4\right)$

РОЗДІЛ 4. СИСТЕМА СТАТИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

CHAPTER 4. SYSTEM OF STATISTICAL INDICATORS

§ 12. Статистичні показники та їх види. Абсолютні та відносні показники





Тетянко, зараз розповім цікавий випадок. До нас на вихідні приїхав дядько Олег — далекий мамин родич із Білої Церкви. Він бізнесмен, має свій невеликий завод із виробництва сухих будівельних сумішей. Так він розповідав, що під час співбесіди з претендентами чи претендентками на посаду в його фірмі завжди дає їм таку задачку: «*Фірма запланувала збільшити обсяг продажів будівельних сумішей у наступному місяці на 20 % порівняно з поточним. Однак фактично обсяг продажів був збільшений на 30 %. На скільки відсотків перевиконано план?*».



Слухай, а цікава задачка! На перший погляд, нічого складного: $30\,\% - 20\,\% = 10\,\%$, тобто план перевиконано на 10 %. Але здається мені, що тут щось не так.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



І дядько Олег сказав, що тільки-но чує відповідь 10 %, то одразу закінчує співбесіду, бо такі працівники чи працівниці йому не потрібні. Цікаво чому?



Спробуймо розібратися. Припустимо, що в поточному місяці обсяг продажів становив, скажімо, 100 млн грн. Запланували цей обсяг збільшити на 20 %, або на $0{,}2 \cdot 100 = 20$ млн грн. Тобто обсяг продажів мав стати 120 млн грн. Фактично продажі сумішей збільшилися на 30 %, тобто на $0{,}3 \cdot 100 = 30$ млн грн, і становили 130 млн грн. Щоб дізнатися, на скільки відсотків перевиконали план, потрібно порівняти 130 млн грн із 120 млн грн, але у відсотках від 120 млн грн (запланованої суми), а не від 100 млн грн (наявної суми в поточному місяці).



Стривай, а й справді, відсотки треба брати від іншого числа! Тоді виходить, що план перевиконано на $130 - 120 = 10$ млн грн, які від запланованої суми становлять $\frac{10\,000\,000}{120\,000\,000} \cdot 100\,\% = 8\frac{1}{3}\,\%$, або приблизно 8,33 %. Звісно, це не 10 %, а значно менше! Як усе просто, виявляється. Може, піти після школи до дядька Олега працювати?



Я б на твоєму місці не поспішала. Впевнена, що в дядька Олега не одна така задачка в запасі. Тому пропоную тобі спочатку закінчити школу й під час навчання дізнатися більше про аналіз статистичних даних, бо саме цього значною мірою стосується робота менеджера з продажів і, мабуть, не лише його.



Так, Тетянка слушно зауважила, що аналіз статистичних даних є важливим для багатьох сфер життя. Ви вже знаєте з 7 класу, що статистичне дослідження зазвичай відбувається в 4 етапи:

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

- одержання статистичних даних (статистичне спостереження);
- подання даних у зручному вигляді (статистичне зведення);
- розрахунок системи доречних статистичних показників;
- виявлення закономірностей, прогнозування, ухвалення рішень.

Із цих етапів ви вже знаєте, як проводити статистичне спостереження (наприклад, за допомогою опитування чи анкетування), як подавати їх у зручному вигляді (це можуть бути варіаційні ряди або діаграми), а також як розраховувати окремі статистичні показники (розмах, середнє арифметичне значення, моду, медіану).

Освіжити в пам'яті цей матеріал вам допоможе відео:
rnk.com.ua/112080



Зауважимо, що статистичний показник — це не лише число або кількісна характеристика якогось явища чи процесу. Статистичний показник також відображає якісну суть явища в конкретних умовах місця і часу.
Прикладом статистичного показника є кількість учнів і учениць певної школи на початок навчального року, вартість обіду в конкретній шкільній їдальні у визначений день, загальна площа зелених зон у конкретному місті на початок поточного року тощо.



Усі статистичні показники можна поділити на абсолютні, відносні та середні. Абсолютні показники — це статистичні показники, які характеризують явища навколишнього світу як такі, без відношення до інших явищ. Зазвичай вони є іменованими числами, тобто мають певні одиниці вимірювання (штуки, особи, гривні, кілометри, кілограми тощо).
Наприклад, кількість учнів і учениць у класі є абсолютним статистичним показником, який вимірюється в особах. Успішність певного учня чи учениці на конкретному уроці також є абсолютним показником, який вимірюється в балах. До абсолютних показників можна віднести також заробітну плату працівників і працівниць певного українського підприємства за певний

місяць року (вимірюється в гривнях), загальну площу парків і скверів конкретного міста на конкретну дату (зазвичай вимірюється в гектарах) тощо.



Відносні показники — це показники, які виражають кількісні співвідношення між явищами навколишнього світу й одержуються як результат ділення (частка) двох інших статистичних показників.

Наприклад, відносними показниками є швидкість руху (відстань ділять на час), урожайність (масу зібраного продукту ділять на площу, з якої його зібрали), щільність населення (кількість осіб ділять на площу території, на якій вони проживають) тощо.



Відносні показники можуть мати одиниці вимірювання, а можуть бути й безрозмірними. Якщо відносний показник є часткою двох однойменних показників (тобто показників, що мають однакові одиниці вимірювання), то він є безрозмірним, тобто не має одиниць вимірювання. Якщо ж відносний показник є часткою двох різнойменних показників (тобто показників, що мають різні одиниці вимірювання), то він має одиниці вимірювання. Наприклад, якщо Петрик мав зріст 155 см у віці 13 років і 163 см у віці 14 років, то відношення цих двох показників $\frac{163}{155} \approx 1{,}05$ показує темп зростання Петрика за рік і є безрозмірним. А якщо 32 учні та учениці навчаються в класній кімнаті площею 45 м^2, то відношення цих двох показників $\frac{32}{45} \approx 0{,}71$ показує ступінь заповненості класу й вимірюється в особах на одиницю площі, тобто в цьому класі ступінь заповненості класу становить приблизно 0,71 осіб/м^2.



Серед відносних показників виокремлюють:

- показники порівняння;
- показники структури;
- показники інтенсивності;
- показники динаміки;
- показники планового завдання;
- показники виконання плану.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Показники порівняння одержують унаслідок порівняння однойменних показників, що стосуються різних об'єктів у той самий період чи момент часу. Ці показники є безрозмірними.

Наприклад, якщо на початок навчального року в 9-А класі навчаються 30 учнів і учениць, а в 9-Б класі — 25 учнів і учениць, то відношення $\frac{30}{25}=1{,}2$ показує, у скільки разів у 9-А учнів і учениць більше, ніж у 9-Б, на початок року. Це — показник порівняння.



Показники структури являють собою відношення показника, що характеризує частину, до однойменного показника, що характеризує ціле.

Наприклад, якщо на кінець навчального року в 9-А класі, у якому навчаються 30 учнів і учениць, 12 із них мають високий рівень навчальних досягнень з математики, 15 — достатній, а 3 — середній, то показники $\frac{12}{30}=0{,}4$; $\frac{15}{30}=0{,}5$ і $\frac{3}{30}=0{,}1$ є показниками структури, які показують, яка частина класу має той чи інший рівень навчальних досягнень із математики. Часто ці показники подають у відсотках, тобто в 9-А класі 40 % учнів і учениць мають високий рівень досягнень із математики, 50 % — достатній і 10 % — середній.



Показники інтенсивності є часткою значень двох різнойменних, але логічно пов'язаних між собою статистичних показників. Наприклад, показниками інтенсивності є швидкість руху, щільність населення, урожайність тощо. Якщо з поля площею 25 га зібрали 6500 центнерів соняшника, то урожайність соняшника становить $\frac{6500}{25}=260$ ц/га. Це — показник інтенсивності.

Показники динаміки (ПД) характеризують зміну явища в часі та є результатом ділення значень однойменних показників, які стосуються одного об'єкта, але в різні періоди чи моменти часу.

Наприклад, якщо Тетянка в минулому році зібрала зі свого городу на дачі 60 кг огірків, а в цьому році за тих самих умов зібрала 72 кг огірків, то показник динаміки $\text{ПД} = \frac{72}{60} = 1{,}2$ показує динаміку врожайності огірків у господарстві Тетянки (кількість зібраних огірків зросла в 1,2 раза, або на 20 %).



Показник планового завдання (ППЗ) є відношенням значення показника, який установлюється на плановий період чи момент часу, до його значення за попередній період чи в попередній момент часу.

Наприклад, якщо обсяг продажів будівельних сумішей за поточний місяць (див. приклад на початку цього параграфа) становив 100 млн грн, а плановий показник на наступний місяць — 120 млн грн, то показник планового завдання $\text{ППЗ} = \frac{120}{100} = 1{,}2$, або 120 %. Іншими словами, обсяг продажів будівельних сумішей запланували збільшити на 20 % порівняно з поточним місяцем.

Показник виконання плану (ПВП) є відношенням значення показника фактично досягнутого рівня до його значення, яке було запланованим.

Наприклад, якщо за плану в 120 млн грн щодо обсягу продажів будівельних сумішей фактично продали сумішей на 130 млн грн, то показник виконання плану $\text{ПВП} = \frac{130}{120} \approx 1{,}083$, або 108,3 %. Іншими словами, план перевиконано приблизно на 8,3 %.



Показники динаміки, планового завдання й виконання плану пов'язані між собою. Справді, нехай у поточний період часу значення певного показника дорівнює x_1, планове значення цього показника на наступний період часу — $x_{\text{пл}}$, а фактичне значення на наступний період часу — x_2. Тоді очевидно, що $\text{ПД} = \frac{x_2}{x_1}$,

$\text{ППЗ} = \frac{x_{\text{пл}}}{x_1}$, а $\text{ПВП} = \frac{x_2}{x_{\text{пл}}}$. Оскільки $\frac{x_{\text{пл}}}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_{\text{пл}}} = \frac{x_2}{x_1}$, то одержуємо рівність:

$$\text{ППЗ} \cdot \text{ПВП} = \text{ПД}$$

Для прикладу з будівельними сумішами $\text{ПД} = \frac{130}{100} = 1{,}3$, або 130 %, тобто фактичний обсяг продажів збільшився на 30 %. За знайденим раніше $\text{ППЗ} = 1{,}2$. Тому з виведеної щойно формули показник виконання плану можна було знайти й без використання абсолютних значень обсягів продажу: $\text{ПВП} = \frac{\text{ПД}}{\text{ППЗ}} = \frac{1{,}3}{1{,}2} \approx 1{,}083$, що збігається з раніше знайденим значенням.



Середні показники ми детально розглянемо в § 13.

Ще два приклади розрахунку відносних показників: rnk.com.ua/112841



Перевірте себе!

1. Назвіть етапи статистичного дослідження та коротко охарактеризуйте, що відбувається на кожному з них.
2. Дайте означення статистичного показника. Наведіть приклади.
3. Що таке абсолютний статистичний показник? Наведіть приклади.
4. Дайте означення відносного статистичного показника. Наведіть приклади.
5. Які види відносних статичних показників ви знаєте і яким чином розраховують кожен із них? Наведіть приклади.
6. Укажіть формулу, яка пов'язує між собою показник динаміки (ПД), показник планового завдання (ППЗ) і показник виконання плану (ПВП).

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Абсолютним чи відносним є статистичний показник, який вимірюють у таких одиницях: а) грн; б) км/год; в) км^2; г) осіб/м^2?

2. Абсолютним чи відносним є статистичний показник, який вимірюють у таких одиницях: а) штуки; б) тон із гектара; в) %; г) см?

3. Яка з описаних ситуацій містить число, що є абсолютним статистичним показником?
   а) На вулиці Шевченка у квітні висадили 80 каштанів.
   б) Яблука сорту Симиренка в супермаркеті коштують 53 грн за кілограм.
   в) У кабінеті інформатики є 18 персональних комп'ютерів.
   г) Виробництво дронів збільшилося в 3 рази в порівнянні з попереднім роком.

4. Яка з описаних ситуацій містить число, що є відносним статистичним показником?
   а) У 9-А класі в розкладі в середньому 6 уроків на день.
   б) У 9-Б класі у вівторок 7 уроків.
   в) Родина Іваненків минулого місяця витратила 1200 грн на оплату послуг мобільного зв'язку.
   г) Родина Петренків витрачає 15 % свого місячного сімейного бюджету на харчування.

5. До якого виду відносних показників (порівняння, структури, інтенсивності, динаміки) належать показники, описані в наведених ситуаціях?
   а) 3D-принтер друкує 18 деталей за хвилину.
   б) У першому колі чемпіонату команда «Рух» набрала вдвічі більше очок, ніж команда «Стійкість».
   в) У корзині 20 % кульок червоного кольору.
   г) Родина Сидорчуків у квітні витратила в півтора раза менше коштів на опалення житла, ніж у березні.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

6. До якого виду відносних показників (порівняння, структури, інтенсивності, динаміки) належать показники, описані в наведених ситуаціях?
а) 35 % площі саду засаджено вишнями.
б) Автомобіль рухається зі швидкістю 65 км/год.
в) Кількість дощових днів у травні збільшилася в 1,3 раза в порівнянні з квітнем.
г) У вересні середня заробітна плата у сфері інформаційних технологій була в 1,05 раза меншою, ніж у банківській сфері.

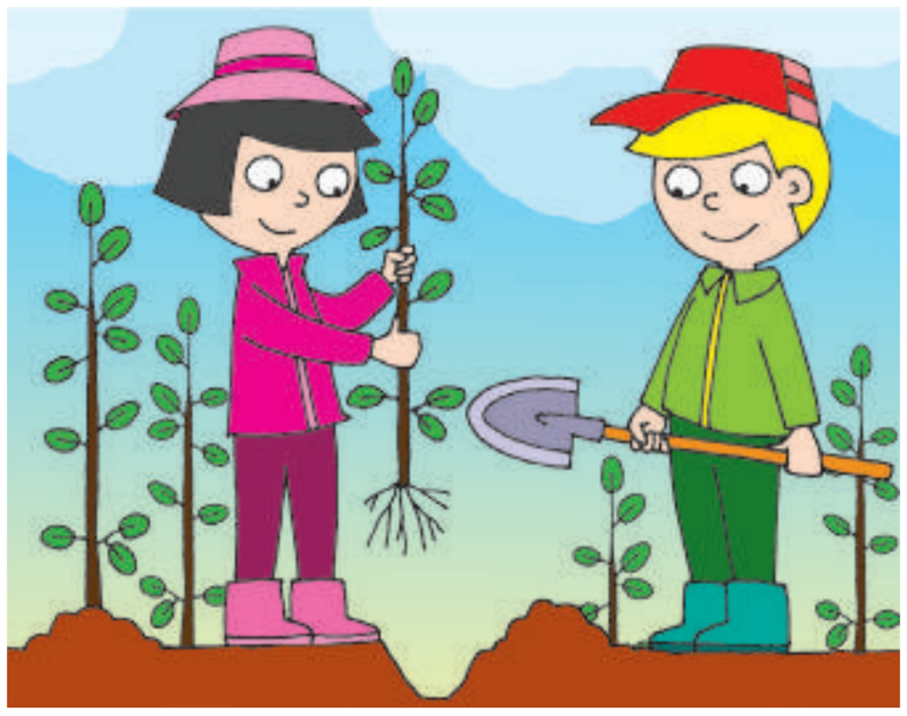
7. В офіс закупили 10 нових столів і 15 нових крісел. У скільки разів більше крісел, ніж столів, закупили? Якого виду цей обчислений відносний показник?

8. Дрон пролетів 30 км за 20 хв. Яка швидкість руху дрона? Якого виду цей обчислений відносний показник?

9. За рік кількість підписників каналу «Волонтери та донати» зросла від 20 тисяч до 500 тисяч. У скільки разів збільшилася кількість підписників каналу? Якого виду цей обчислений відносний показник?

10. У саду росте 400 дерев. Із цих дерев 240 — яблуні. Яку частину від усіх дерев становлять яблуні? Якого виду цей обчислений відносний показник?

11. Обчисліть показник планового завдання в наведених ситуаціях.
а) У січні учні й учениці шкіл громади сплели 40 маскувальних сіток. У лютому запланували сплести 45 таких сіток.
б) У 2024 р. згідно з проєктом озеленення міста посадили 500 декоративних дерев. На 2025 р. запланували посадити 600 декоративних дерев.
в) Дмитро минулого тижня читав у середньому 50 сторінок на день. На наступний тиждень запланував збільшити кількість щоденно прочитаних сторінок до 55.



Проєкт підручника видавництва «Ранок»

12. Обчисліть показник планового завдання в наведених ситуаціях.

а) У липні Оленка щоденно пробігала 8 км. Для більш інтенсивної підготовки до змагань вона вирішила в серпні збільшити норму до 10 км на день.

б) Сім'я Кайдашів у лютому витратила на опалення будинку 200 $м^3$ газу й запланувала в березні витратити 180 $м^3$ газу.

в) Іван минулого тижня вивчав у середньому 10 нових англійських слів за день. На наступний тиждень він запланував збільшити кількість щоденно вивчених слів до 12.

13. Обчисліть показник виконання плану в наведених ситуаціях.

а) Для підготовки до змагань Оленка планувала у серпні щоденно пробігати 10 км. А насправді щоденно пробігала 9 км.

б) Сім'я Кайдашів планувала в березні витратити 180 $м^3$ газу на опалення житла. Але через похолодання витратила 210 $м^3$ газу.

в) Іван запланував збільшити кількість щоденно вивчених англійських слів до 12. А насправді вивчав по 14 нових англійських слів щодня.

14. Обчисліть показник виконання плану в наведених ситуаціях.

а) Учні й учениці шкіл громади запланували в лютому сплести 45 маскувальних сіток. А насправді сплели 51 сітку.

б) У рамках озеленення міста запланували в 2025 р. посадити 600 декоративних дерев. А посадили 630 дерев.

в) Дмитро запланував збільшити кількість щоденно прочитаних сторінок до 55, а насправді продовжив читати 50 сторінок за день.

Середній рівень

15. Намалюйте в зошиті таблицю й заповніть її, використовуючи такі статистичні показники:

а) загальна кількість жителів Києва на даний момент;

б) річна заробітна плата співробітника взуттєвої фабрики;

в) кількість книжок, виданих видавництвом за 2024 р.;

г) кількість мурах, що мешкають на 1 $км^2$ території заповідника «Єланецький степ»;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

д) загальна кількість комп'ютерів, проданих у даному магазині за тиждень;
е) співвідношення прибутку до витрат на автотранспортному підприємстві.

Абсолютні показники	Відносні показники

16. Намалюйте в зошиті таблицю й заповніть її, використовуючи такі статистичні показники:
а) загальна кількість жителів Франції на даний момент;
б) кількість людей, що проживають на 1 км^2 території Закарпатської області України;
в) загальна кількість телефонів, відремонтованих у майстерні за останній місяць;
г) кількість фільмів, знятих кіностудією за останні 5 років;
д) середня заробітна плата фахівців із кібербезпеки в Україні;
е) коефіцієнт народжуваності (кількість народжень на 1000 осіб у певний період).

Абсолютні показники	Відносні показники

17. У 9 років Марійка мала зріст 130 см, а в 10 років — 135 см. Знайдіть темп зростання Марійки за рік.

18. У 2 роки Тарасик мав масу тіла 12,2 кг, а в 3 роки — 14,3 кг. Знайдіть темп зростання маси тіла Тарасика за рік.

19. Найменшим селищем в Україні за населенням, згідно з переписом 2024 р., є Чикош-Горонда, що в Закарпатській області. На території села 2,8 км^2 проживало 44 особи. Обчисліть щільність населення в Чикош-Горонді в 2024 р.

20. Найменшим містом в Україні є Угнів, розташований у Львівській області над річкою Солокією, за 2 км від кордону з Польщею. На території 2,48 км , згідно з даними 2022 р., проживало 939 осіб. Обчисліть щільність населення в Угневі в 2022 р.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

21. В Україні листяні ліси займають площу близько 4,8 млн га, а хвойні ліси — близько 4,2 млн га. Обчисліть показник порівняння площі листяних лісів до площі хвойних лісів.

22. Довжина річки Південний Буг становить 849 км, а довжина річки Інгулець — 558 км. Обчисліть показник порівняння довжини річки Південний Буг з довжиною річки Інгулець.

23. За останній місяць Марійка вивчила 36 нових англійських слів. Із них 18 дієслов, 12 іменників, 6 прикметників. Обчисліть показники структури для вивчених Марійкою за останній місяць англійських слів. Дайте відповідь у відсотках.

24. У 9 класі 32 учні й учениці, кожен (кожна) з яких може додати собі раз на тиждень до розкладу додатковий урок із бажаної дисципліни. 10 учнів і учениць обрали додатковий урок з української мови, 8 — додатковий урок з історії України, 14 — додатковий урок з математики. Обчисліть показники структури для обраних учнями й ученицями дисциплін. Дайте відповідь у відсотках.

25. Оператор Тимофій обробив 136 запитів клієнтів за 4 год, а оператор Олексій — 155 запитів за 5 год. Обчисліть показники інтенсивності роботи для Тимофія та Олексія. Хто з них має більшу продуктивність праці?

26. Фермер Іван зібрав 3840 кг картоплі з 1200 м^2, а фермер Степан — 4480 кг картоплі з 1600 м^2. Обчисліть показники інтенсивності для врожайності картоплі в Івана та Степана. У кого з фермерів врожайність картоплі більша?

27. У Львівській області в 2020 р. народилося 21,1 тис. дітей, а в 2021 р. — 19,4 тис. дітей. Обчисліть показник динаміки народжуваності дітей у Львівській області.

28. У Харківській області в 2020 р. прийнято в експлуатацію 4807 квартири, а в 2021 р. 9614 квартир. Обчисліть показник динаміки здавання квартир в експлуатацію в Харківській області.

29. Прибуток кав'ярні за місяць становить 412 тис. грн. У наступному місяці планують збільшити прибуток до 450 тис. грн. Обчисліть показник планового завдання для цієї кав'ярні.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

30. За перший місяць роботи фітнес-центр відвідали 120 клієнтів. У наступному місяці планується збільшити кількість відвідувачів цього фітнес-центру до 200. Обчисліть показник планового завдання для цього фітнес-центру.

31. Для школи планували закупити 35 комп'ютерів, а закупили 42. Обчисліть показник виконання плану для цієї школи. Перевиконали чи недовиконали план? На скільки відсотків?

32. До автобусного парку планували придбати 60 нових автобусів, а придбали 54 автобуси. Обчисліть показник виконання плану для цього автобусного парку. Перевиконали чи недовиконали план? На скільки відсотків?

Достатній рівень

33. Укажіть види відносних показників.
а) На початок року в області на кожну 1000 осіб міського населення припадало 595 осіб сільського населення.
б) На заводі на кожні 100 осіб припадає 1 службовець.

34. Укажіть види відносних показників.
а) На 1 вересня кількість учнів і учениць у школі збільшилася на 10 %, порівнюючи з попереднім навчальним роком.
б) Кількість комп'ютерів у кабінеті фізики становить 5 % від кількості всіх комп'ютерів у школі.

35. Відомо, що на деякому виробництві показник планового завдання $ППЗ = 1,2$, а показник виконання плану $ПВП = 1,4$. Обчисліть показник динаміки ПД.

36. Відомо, що на деякому виробництві показник динаміки $ПД = 1,3$, а показник виконання плану $ПВП = 0,9$. Обчисліть показник планового завдання ППЗ на цьому виробництві.

37. За планом за звітний період підприємство мало випустити продукції на суму 500 грошових одиниць, а фактично випустило на 550 грошових одиниць. Знайдіть показник виконання плану. На скільки відсотків перевиконано план?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

38. За планом за звітний період фірма мала виготовити 400 виробів, але через брак комплектуючих деталей фактично виготовила тільки 350 виробів. Знайдіть показник виконання плану. На скільки відсотків недовиконано план?

39. Планове завдання щодо обсягу виробництва на фірмі «Успіх» на 2024 р., порівнюючи з фактичним обсягом виробництва за 2023 р., становило 105 %. Виконання плану в 2024 р. становило 102 %. Знайдіть показник динаміки.

40. Планове завдання щодо обсягу виробництва на фірмі «Мрія» на 2024 р., порівнюючи з фактичним обсягом виробництва за 2023 р., становило 110 %. Виконання плану в 2024 р. становило 103 %. Знайдіть показник динаміки.



41. У готелі «Зірка» проживає на 40 % менше гостей, ніж у готелі «Сяйво». Скільки гостей проживає в готелі «Зірка», якщо в готелі «Сяйво» живе 2000 гостей?

42. На круїзному лайнері «Океанія» можна розмістити на 15 % більше пасажирів, ніж на круїзному лайнері «Амазонія». Скільки пасажирів можна розмістити на «Амазонії», якщо на «Океанії» розміщується 2300 осіб?

43. У компанії з 200 співробітників провели опитування щодо улюбленого способу проведення відпустки. 80 співробітників обрали пляжний відпочинок, 60 — активний туризм, 40 — автобусні екскурсії, а 20 — інші варіанти. Знайдіть усі відносні показники структури для цього випадку та подайте їх у відсотках.

44. У ресторані провели опитування серед 80 клієнтів щодо їхніх улюблених страв. 30 клієнтів обрали піцу, 26 — пасту, 15 — суші, а 9 — інші страви. Знайдіть усі відносні показники структури для цього випадку та подайте їх у відсотках.

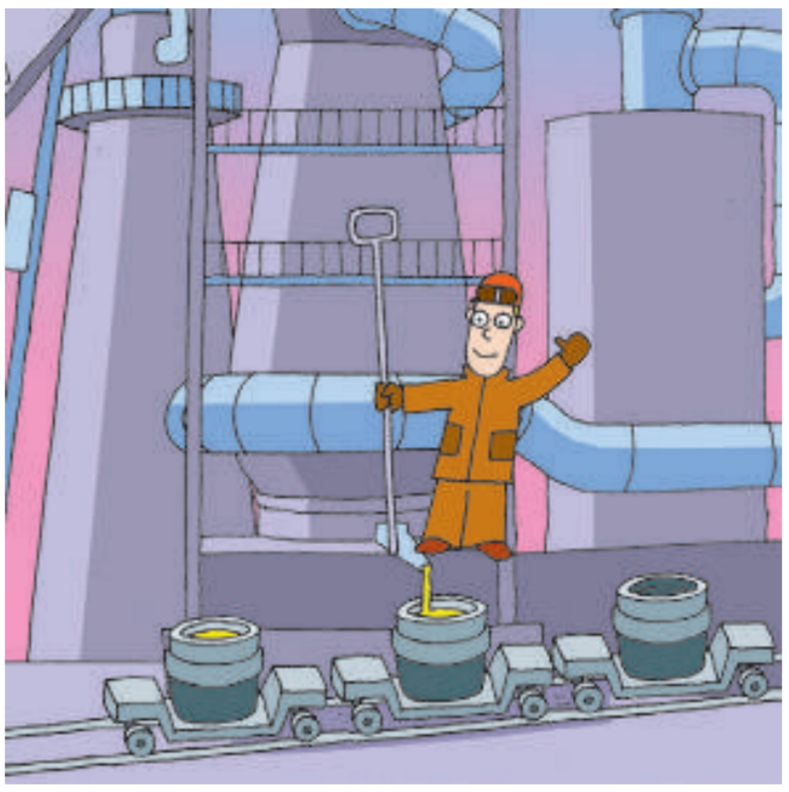
45. У спортивному клубі є три секції: кардіо (60 учасників), силові тренування (50 учасників) і йога (40 учасників). Обчисліть абсолютні та відносні показники порівняння секції кардіо із секцією силових тренувань та секції йоги із секцією кардіо.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

46. У компанії є три відділи: HR (20 співробітників), фінансовий (25 співробітників) і IT (30 співробітників). Обчисліть абсолютні та відносні показники порівняння відділу HR з відділом фінансів і відділу IT із відділом фінансів.

47. Фермерське господарство «Агропром» зібрало за перше півріччя 2025 р. 200 т пшениці, а в другому півріччі запланувало зібрати 250 т. Однак насправді в другому півріччі 2025 р. господарством «Агропром» було зібрано лише 240 т пшениці. Знайдіть: а) показник планового завдання; б) показник динаміки; в) показник виконання плану. За потреби відповіді округліть до сотих. На скільки відсотків було недовиконано план?

48. Завод «Металіст» виготовив за перше півріччя 2025 р. 500 т сталі, а в другому півріччі запланував виготовити 600 т. Однак насправді в другому півріччі 2025 р. заводом «Металіст» було виготовлено 620 т сталі. Знайдіть: а) показник планового завдання; б) показник динаміки; в) показник виконання плану. За потреби відповіді округліть до сотих. На скільки відсотків було перевиконано план?



Високий рівень

49. На початок 2022 р. у світі проживало 45,08 млн українців. Обчисліть відносні показники структури та порівняння, якщо відомо, що проживало українців (млн осіб): в Україні — 42,3, в Америці — 1,55, в Канаді — 0,81, у країнах Західної Європи — 0,33, в Австралії — 0,09.

50. У 9-А класі 32 учні й учениці. Їхні навчальні досягнення з математики розподіляються так: на початковому рівні 2 особи, на середньому — 6 осіб, на достатньому — 16 осіб, на високому — 8 осіб. Обчисліть відносні показники структури та порівняння.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

51. За рахунок впровадження нових технологій виробництва планом передбачалося зниження собівартості продукції за рік на 5 %, а фактично вона знизилася на 8 %. Визначте показник виконання плану зі зниження собівартості продукції. На скільки відсотків перевиконано план?

52. Планом передбачалося в 2024 р. збільшення випуску продукції на підприємстві на 10 %, а фактично випустили продукції на 15,5 % більше, ніж у 2023 р. Визначте показник виконання плану випуску продукції. На скільки відсотків перевиконано план?

53. За договірним зобов'язанням підприємство має виробити продукції на 400 тис. грн. Фактично за рік воно виробило й відправило продукції на 450 тис. грн. У попередньому році фактичне виробництво продукції становило 395 тис. грн. Обчисліть відносні величини виконання плану, планового завдання та динаміки. Відповідь за потреби округліть до тисячних. Подайте одержані відносні величини у відсотках. Які висновки ви можете зробити з одержаних результатів?

54. Товарообіг магазину в серпні становив 237,5 тис. грн, а за планом повинен був становити 250 тис. грн. У липні товарообіг становив 245 тис. грн. Обчисліть відносні величини виконання плану, планового завдання та динаміки. Відповідь за потреби округліть до тисячних. Подайте одержані відносні величини у відсотках. Які висновки ви можете зробити з одержаних результатів?

55. Планом передбачено збільшити виробництво продукції за рік на 3 %. Фактично воно зросло на 5 %. Обчисліть відсоток виконання плану виробництва продукції. За потреби відповідь округліть до десятих.

56. Планом передбачалося зменшення витрат електроенергії підприємством на 5 % за рік. Фактично вони зменшилися на 6 %. Обчисліть відсоток виконання плану з економії електроенергії.

57. У звітному році прибуток підприємства досяг 5 млн грн проти 4,5 млн грн у минулому році. Планом передбачалося порівняно

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

з минулим роком збільшити обсяг прибутку на 10 %. Обчисліть усі можливі відносні величини. За потреби відповідь округліть до тисячних. Які висновки можна зробити з одержаних результатів?

58. У квітні банк «Підтримка» видав кредитів на 860 тис. грн проти 800 тис. грн у березні цього ж року. Планом передбачалося порівняно з березнем збільшити обсяг кредитів на 5 %. Обчисліть усі можливі відносні величини. За потреби відповідь округліть до тисячних. Які висновки можна зробити з одержаних результатів?



Цікавинки від дідуся Тараса

Для характеристики зміни певного явища із часом у статистиці використовують ряди динаміки. Наприклад, якщо записати у вигляді таблиці кількість учнів і учениць певного класу на 1 вересня за кілька останніх років, то такий ряд динаміки називають моментним.

Дата	01.09. 2020 р.	01.09. 2021 р.	01.09. 2022 р.	01.09. 2023 р.	01.09. 2024 р.
Кількість учнів і учениць	32	34	30	31	33

Якщо ж записати у вигляді таблиці, наприклад, обсяг продажу сухих будівельних сумішей на підприємстві дядька Олега за кілька останніх місяців, то такий ряд динаміки називають інтервальним.

Місяць	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Обсяг продажу, млн грн	130	140	125	110	95

Принциповою відмінністю між моментними та інтервальними рядами динаміки є те, що для перших сума значень показника в різні періоди часу не має змісту, а для других — має. Справді,

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

гроші, зароблені дядьком Олегом у кожен із наведених місяців, — це *різні* гроші, а отже, їх сума показує, скільки грошей було зароблено загалом за весь зазначений період. У нашому випадку це $120+140+125+110+95=590$ млн грн. Водночас для прикладу з кількістю учнів і учениць класу більшість із 32 осіб, присутніх у класі на 01.09.2024, навчалися там і раніше, тобто це *ті самі* учні й учениці, а отже, сума чисел $32+34+30+31+32=159$ *не показує*, скільки осіб навчалося в цьому класі за 5 останніх років.

Для рядів динаміки розраховують спеціальні абсолютні та відносні статистичні показники: абсолютний приріст (різниця між двома значеннями показника в різні моменти чи інтервали часу), темп зростання (частка двох значень показника в різні моменти чи інтервали часу) і темп приросту (частка абсолютного приросту між двома моментами чи інтервалами часу та значення показника в один із них). Темпи приросту зазвичай виражають у відсотках.

Якщо порівняння всіх наступних значень показника здійснюється з його значенням у початковий момент чи інтервал часу, то такі показники ряду динаміки називають базисними. Якщо ж здійснюється порівняння значення показника в попередній і наступний момент чи інтервал часу, то такі показники ряду динаміки називають ланцюговими. Наприклад, у таблиці наведено ланцюгові абсолютні прирости, темпи зростання й темпи приросту, обчислені для вивчення динаміки кількості учнів і учениць одного з класів.

Дата	01.09. 2020 р.	01.09. 2021 р.	01.09. 2022 р.	01.09. 2023 р.	01.09. 2024 р.
Кількість учнів і учениць	32	34	30	31	33
Абсолютні прирости	—	2	−4	1	2
Темпи зростання	—	1,0625	0,8824	1,0333	1,0645
Темпи приросту, %	—	6,25	−11,76	3,33	6,45

Проєкт підручника видавництва «Ранок»



Запитання і завдання від дідуся Тараса

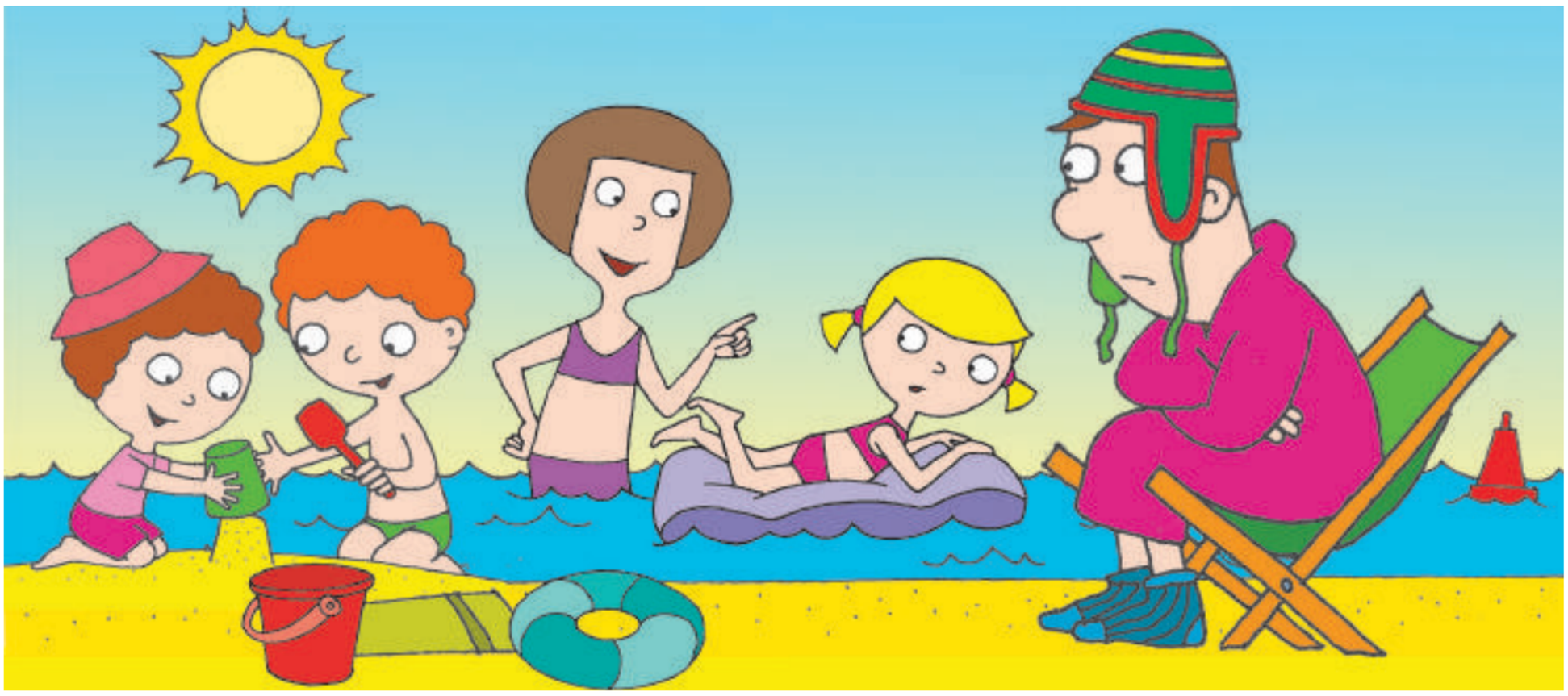
1. Використовуючи додаткові джерела інформації, дізнайтеся більше про ряди динаміки й підготуйте невелике повідомлення.
2. Розрахуйте базисні абсолютні прирости, темпи зростання й темпи приросту для прикладу з кількістю учнів і учениць класу. Зробіть висновки щодо динаміки кількості учнів і учениць цього класу за останні 5 років.
3. Розрахуйте базисні й ланцюгові абсолютні прирости, темпи зростання й темпи приросту для прикладу про обсяги продажу сухих будівельних сумішей. Зробіть висновки щодо динаміки обсягу продажів сумішей за останні 5 місяців.
4. Чи доводилося вам аналізувати динаміку якогось явища в повсякденному житті? Якщо так, то поділіться власним досвідом.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} = -2x + 10$ спочатку графічним методом, а потім аналітично. Переконайтеся в ідентичності відповідей.
2. Трикутники ABC і MNK — подібні, причому $MN = 6$ см, $MK = 8$ см, $AC = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см. Знайдіть довжини сторін AB і NK.
3. Три роки тому Миколка був молодшим за свою маму в 5 разів, а через 2 роки він стане молодшим за неї лише в 3 рази. У скільки разів Миколка молодший за свою маму зараз?
4. У морозильній камері магазину лежить лише 45 коробок із білим та певна кількість коробок із шоколадним морозивом. Імовірність того, що навмання витягнута з морозильної камери коробка виявиться з шоколадним морозивом, дорівнює 0,7. Скільки коробок шоколадного морозива лежить у морозильній камері магазину?
5. Змінюючи щоразу в слові лише одну букву, перетворіть слово РІК на слово ЕРА.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 13. Середні показники. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення





Привіт, Петрику! Я розповіла історію про задачку дядька Олега вдома батькам, і вони одразу згадали свої цікаві історії із задачами. Тато розповів, що його знайома завідувачка бухгалтерії також перевіряє претендентів і претенденток на посаду за допомогою такої задачки: «*Якщо зарплата працівника в грудні порівняно з листопадом збільшилася на* 10 %, *а в січні порівняно з груднем збільшилася ще на* 20 %, *то на скільки відсотків щомісяця в середньому збільшувалася зарплата працівника протягом цих двох місяців?*».



Цікава задачка! Але як її розв'язати? Я розумію, що знаходити середнє арифметичне кількості відсотків $\left(\frac{10\,\%+20\,\%}{2}=15\,\%\right)$ неправильно, бо ці відсотки кожного разу беруть від різних чисел. Але як діяти правильно для знаходження середнього щомісячного підвищення зарплати?



Якщо чесно, я й сама не знаю. Але слухай далі. Батьки посміялися із задачі про відсотки, а потім мама згадала, як її знайомий

обирав курорт, на якому відпочити. Він любить теплий клімат, тому шукав дані в інтернеті про середньомісячну температуру на різних курортах. Урешті зупинився на двох курортах. На першому з них середня температура повітря в червні була +22 градуси, у липні +26 градусів, а в серпні +24 градусів, а на другому в червні, липні та серпні відповідно +21, +24, +27 градусів. І він не знав, що обрати. Іще одна задачка!



Це й не дивно, бо середня температура за все літо для обох курортів однакова, 24 градуси: $\frac{22+26+24}{3}=24$ і $\frac{21+24+27}{3}=24$.
А якщо порахувати щомісячні відхилення від середньої температури й знайти їх середнє значення, то знову виходить однаково: $\frac{-2+2+0}{3}=0$ і $\frac{-3+0+3}{3}=0$. Не дивно, що знайомий твоєї мами не зміг обрати курорт, я б і сам його не обрав за такими даними!



Мені теж цікаво, як правильно в цьому випадку діяти. Пропоную запитати в наших учителів математики, вони точно знають.



Також запитайте вчительку / вчителя природничих наук, які саме градуси малися на увазі в розповіді мами Тетянки: Цельсія, Фаренгейта, Кельвіна чи Реомюра та наскільки в кожному з випадків було б «тепло» на таких курортах.



Насправді обидві задачі, про які розповіла Тетянка, зовсім не прості. Але ми, звичайно, про все розповімо.
У всіх випадках, коли з'являється потреба охарактеризувати *одним числом* усю множину значень певної ознаки, величини або явища, користуються його середнім значенням. При цьому кожне індивідуальне значення ознаки ніби замінюється на середнє, але таким чином, щоб загальний обсяг ознаки, величини або явища залишався незмінним. Це правило називають визначальною властивістю середнього значення, і більш лаконічно його можна сформулювати так.

Визначальна властивість середнього значення

Середнім значенням певної ознаки називають таке її значення, за заміни на яке кожного індивідуального значення цієї ознаки загальний її обсяг не зміниться.



Якщо індивідуальні значення ознаки X позначено x_1, x_2, ..., x_n, то зазвичай середнє значення цієї ознаки позначають $\overline{x}$. Якщо для позначення ознаки та її індивідуальних значень вживається інша буква, то для позначення середнього цієї ознаки використовують ту саму букву, але з рискою вгорі: $\overline{y}$, $\overline{m}$, $\overline{t}$ тощо. Середнє значення ознаки також називають середнім показником або середньою величиною.



Поняття загального обсягу ознаки, величини або явища є неозначуваним поняттям. Роз'яснимо його сутність на конкретних прикладах, знаходячи також і відповідні середні значення згідно з визначальною властивістю.

Приклад 1

Нехай троє працівників невеликого підприємства отримали одноразові премії наприкінці року в розмірі 5000 грн, 7000 грн і 7500 грн. Знайдемо середнє значення премії для цієї вибірки.

Розв'язання. У цьому випадку досліджуваною ознакою є розмір премії наприкінці року. Природно вважати, що *загальний обсяг ознаки в цьому випадку є сумою її індивідуальних значень*, бо саме ця сума показує загальний обсяг преміальних виплат. За визначальною властивістю середнього значення замінимо кожне індивідуальне значення розміру премії на середнє значення. Отримаємо рівність

$5000+7000+7500=\overline{x}+\overline{x}+\overline{x}$, звідки $\overline{x}=\dfrac{5000+7000+7500}{3}=6500$ (грн).

Тобто можна вважати, що середній розмір премії наприкінці року становив 6500 грн.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Із прикладу 1 стає зрозумілим: якщо загальний обсяг ознаки є сумою її індивідуальних значень, то середнє значення даної ознаки є *середнім арифметичним* цих індивідуальних значень. Зрозуміло також, що формула для обчислення середнього арифметичного значення може бути поширена й на ознаки, кількість значень яких відмінна від трьох.



Однак загальний обсяг ознаки може визначатися й не так, як у прикладі 1.

Приклад 2

Розглянемо задачу завідувачки бухгалтерії з розповіді Тетянки. Нехай зарплата працівника в грудні порівняно з листопадом збільшилася на 10 %, а в січні порівняно з груднем зросла ще на 20 %. Знайдемо середній розмір щомісячного підвищення зарплати працівника протягом цих двох місяців.

Розв'язання. Нехай зарплата працівника в листопаді була x_1 грн, у грудні — x_2 грн, у січні — x_3 грн. Досліджуваною ознакою в цьому випадку є розмір підвищення зарплати, тобто відношення наступного значення зарплати до попереднього її значення. Тоді перше підвищення зарплати можна визначити як $y_1 = \frac{x_2}{x_1}$, а друге — як $y_2 = \frac{x_3}{x_2}$. За умовою $y_1 = 100\,\% + 10\,\% = 110\,\% = 1{,}1$; $y_2 = 100\,\% + 20\,\% = 120\,\% = 1{,}2$. Загальним обсягом ознаки в цьому випадку природно вважати розмір підвищення заробітної плати працівника за два місяці, тобто частку $\frac{x_3}{x_1}$. Оскільки $\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} = y_1 \cdot y_2$, то *загальний обсяг ознаки тут є добутком її індивідуальних значень*. За визначальною властивістю середнього значення замінимо щомісячні підвищення на шукане середнє значення: $y_1 \cdot y_2 = \overline{y} \cdot \overline{y}$. Одержимо, що $\overline{y} = \sqrt{y_1 \cdot y_2} = \sqrt{1{,}1 \cdot 1{,}2} = \sqrt{1{,}32} \approx 1{,}1489 = 114{,}89\,\%$. Отже, у середньому зарплата працівника щомісяця підвищувалася приблизно на 14,89 %.

Приклад 2 показує, що два послідовних підвищення зарплати приблизно на 14,89 % призвели б до такого самого результату, як і підвищення зарплати спочатку на 10 %, а потім на 20 %.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

І взагалі, якщо загальний обсяг ознаки є добутком її індивідуальних значень, то середнє значення даної ознаки є *середнім геометричним* цих індивідуальних значень.



Для двох додатних чисел a і b їхнім середнім геометричним значенням називають число $\sqrt{a \cdot b}$. Означення середнього геометричного значення можна поширити й на кількість множників, більшу за два, але для цього потрібні додаткові знання, які ви здобудете в старшій школі. Проте для особливо допитливих учнів і учениць у «Цікавинках від дідуся Тараса» наприкінці § 13 ми розповімо більше.



Загальний обсяг ознаки може бути не лише сумою чи добутком її індивідуальних значень.

Приклад 3

Петрик і Тетянка вирішили разом побілити дерева в парку біля школи. Відомо, що Петрик самотужки впорається з усією роботою за 2 год, а Тетянка самостійно виконає цю роботу за 3 год. Знайдемо середній час побілки дерев у парку для Петрика й Тетянки під час їхньої спільної роботи.

Розв'язання. У цьому прикладі досліджуваною ознакою є час на побілку всіх дерев у парку. Ми маємо два індивідуальні значення цієї ознаки: $t_1 = 2$ год і $t_2 = 3$ год. Загальним обсягом ознаки в цьому випадку є час, за який Петрик і Тетянка виконають цю роботу разом. Щоб знайти цей час, приймемо всю роботу за 1 та знайдемо продуктивності Петрика й Тетянки: $z_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2}$ усієї роботи за годину, $z_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{3}$ усієї роботи за годину. Отже, їхня спільна продуктивність: $z_{\text{сп}} = z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ усієї роботи за годину. Тому час на виконання всієї роботи $t_{\text{сп}} = \frac{1}{z_{\text{сп}}} = \frac{6}{5}$ год. У загальному випадку час на спільну

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

роботу двох працівників визначається за формулою $t_{\text{сп}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}}$. За визначальною властивістю середнього значення замінимо кожне індивідуальне значення часу роботи на середнє значення $\overline{t}$. Одержимо рівність $\dfrac{1}{\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}} = \dfrac{1}{\overline{t}}$, звідки $\overline{t} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}}$. Такий вираз називають середнім гармонійним двох чисел t_1 і t_2. Для нашої задачі середній час роботи Петрика й Тетянки $\vec{t} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{1} \quad \dfrac{1}{1}} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$ год, або 2 год і 24 хв.

$$\overline{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$

Приклад 3 показує, що двоє працівників, кожен із яких окремо може побілити всі дерева в парку за 2,4 год, разом виконають цю роботу за той самий час, що й Петрик і Тетянка з умови цієї задачі.

І взагалі, якщо загальний обсяг ознаки є оберненою величиною до суми її обернених індивідуальних значень, то середнє значення даної ознаки є *середнім гармонійним* цих індивідуальних значень. Зрозуміло також, що формула середнього гармонійного значення може бути поширена на ознаку, кількість значень якої більша, ніж два.



Підіб'ємо підсумки. Нехай деяка ознака X має індивідуальні значення x_1, x_2, ..., x_n. У попередніх трьох прикладах ми розглянули такі види її середніх значень:

- середнє арифметичне $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ (загальний обсяг ознаки є сумою індивідуальних значень);
- середнє геометричне (для випадку $n = 2$) $\overline{x} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ (загальний обсяг ознаки є добутком індивідуальних значень);
- середнє гармонійне $\overline{x} = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$ (загальний обсяг ознаки є оберненою величиною до суми обернених індивідуальних значень).

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Існують і інші види середніх значень ознаки, зокрема середнє квадратичне значення ознаки, яке обчислюють за формулою $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}{n}}$ і використовують у випадку, коли загальний обсяг ознаки виражений через суму квадратів її індивідуальних значень.

Детальніше про це, а також іще кілька прикладів обчислення середніх значень ознаки: rnk.com.ua/112842





Усереднювати можна не лише значення ознаки, а й відхилення цих значень від середнього значення даної ознаки. Особливо це стане в пригоді, коли треба порівняти дві ознаки, що мають однакові середні значення.

Приклад 4

Розглянемо задачу про вибір курорту з розповіді Тетянки. Тобто нехай у червні, липні, серпні середньомісячна температура на першому курорті становить 22, 26, 24 °С відповідно, а на другому курорті — 21, 24 і 27 °С відповідно. Знайдемо середнє відхилення значень температури на кожному з курортів від своїх середніх значень.

Розв'язання. Як правильно порахував Петрик, середня температура на першому курорті за все літо $\bar{x} = \dfrac{24+26+24}{3} = 24$ °С, а на другому — $\bar{y} = \dfrac{21+24+27}{3} = 24$ °С, тобто $\bar{x} = \bar{y}$. Знайдемо відхилення ознаки X від свого середнього значення: $\delta_1 = x_1 - \bar{x} = 22 - 24 = -2$; $\delta_2 = x_2 - \bar{x} = 26 - 24 = 2$; $\delta_3 = x_3 - \bar{x} = 24 - 24 = 0$. Петрик уже визначив, що середнє арифметичне цих відхилень дорівнює нулю. Для ознаки Y відповідні відхилення дорівнюють: -3, 0 і 3. Очевидно, що їхнє середнє арифметичне також дорівнює нулю. І взагалі, можна показати, що для будь-якої ознаки середнє арифметичне відхилень її значень від свого середнього арифметичного значення дорівнює нулю. Тому для усереднення відхилень від свого середнього значення ознаки X використовують

середнє квадратичне відхилення, яке зазвичай позначають буквою σ (сигма) або σ_X і обчислюють за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta_1^{\,2} + \delta_2^{\,2} + \ldots + \delta_n^{\,2}}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Для нашого прикладу $\sigma_X = \sqrt{\frac{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}63;$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{(-3)^2 + 0^2 + 3^2}{3}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$



Зверніть увагу на те, що середнє квадратичне відхилення значень ознаки від свого середнього значення вимірюють у тих самих одиницях, що й сама ознака. Тому в прикладі 4 σ_X і σ_Y також вимірюються в тих самих градусах Цельсія, що й ознаки X і Y.

Середнє квадратичне відхилення показує, на скільки в середньому значення певної ознаки відхиляються від свого середнього значення. Це дає змогу порівнювати значення двох ознак, які мають однакові середні значення. У прикладі 4 на першому курорті температура зосереджена навколо свого середнього значення більш «купчасто», тому знайомому Тетянчиної мами варто порадити поїхати саме на цей курорт.



У статистиці разом із середнім квадратичним відхиленням значень ознаки X від свого середнього значення $\bar{x}$ (або просто середнім квадратичним відхиленням) розглядають і дисперсію значень ознаки:

$$D(X) = \sigma_X^{\,2} = \frac{\delta_1^{\,2} + \delta_2^{\,2} + \ldots + \delta_n^{\,2}}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

У задачах на порівняння значень двох ознак використання дисперсії чи середнього квадратичного відхилення є рівноцінним, бо якщо, наприклад, $\sigma_X < \sigma_Y$, то і $D(X) < D(Y)$, і навпаки. При цьому обчислення дисперсії є технічно простішим, бо не вимагає знаходження квадратного кореня.

Зауважимо також, що одиницею вимірювання дисперсії є квадрат одиниці вимірювання початкової ознаки.



У різних джерелах зі статистики можна побачити терміни «середнє арифметичне», «середній арифметичний» і «середня арифметична». Які із цих термінів правильні? Насправді — усі. Бо все це скорочені назви, а повні звучать так: «середнє арифметичне значення ознаки», «середній арифметичний показник», «середня арифметична величина».

Перевірте себе!

1. Сформулюйте визначальну властивість середнього значення.
2. Які види середніх значень ознаки ви знаєте? Укажіть формули для обчислення цих видів середніх значень.
3. Наведіть приклади різних ознак і різних видів середніх значень цих ознак залежно від того, як визначають загальний обсяг цих ознак.
4. Як обчислюють середнє квадратичне відхилення значень ознаки від свого середнього значення?
5. Що таке дисперсія значень ознаки та як її обчислюють?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Якщо загальний обсяг ознаки є *добутком* двох її індивідуальних значень, то середнє значення даної ознаки є *середнім* ... цих індивідуальних значень».

а) арифметичним;
б) геометричним;
в) гармонійним;
г) квадратичним.

2. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Якщо загальний обсяг ознаки є *сумою* трьох її індивідуальних значень, то середнє значення даної ознаки є *середнім* ... цих індивідуальних значень».

а) арифметичним; в) гармонійним;
б) геометричним; г) квадратичним.

3. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «У 9-А класі навчається 14 дівчат, у 9-Б — 12 дівчат, у 9-В — 15 дівчат. Середня кількість дівчат у 9 класі буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним; в) гармонійним;
б) геометричним; г) квадратичним.

4. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «У вересні на підприємстві виготовили 2,5 тис. дронів, у жовтні — 3,5 тис., у листопаді — 4 тис. Тоді середня щомісячна кількість виготовлених дронів буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним; в) гармонійним;
б) геометричним; г) квадратичним.

5. Укажіть формулу, за якою обчислюється середнє арифметичне трьох чисел b, c і d.

а) $\bar{x} = \dfrac{b+c+d}{2}$; в) $\bar{x} = \sqrt{b \cdot c \cdot d}$;

б) $\bar{x} = \dfrac{b+c+d}{3}$; г) $\bar{x} = \dfrac{b^2+c^2+d^2}{3}$.

6. Укажіть формулу, за якою обчислюється середнє арифметичне чотирьох чисел a, b, c і d.

а) $\bar{x} = \dfrac{a+b+c+d}{2}$; в) $\bar{x} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$;

б) $\bar{x} = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$; г) $\bar{x} = \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. Укажіть формулу, за якою обчислюється середнє геометричне двох чисел n і m.

а) $\bar{x}=\dfrac{n+m}{2}$; б) $\bar{x}=\dfrac{n^2+m^2}{2}$; в) $\bar{x}=\sqrt{\dfrac{n+m}{2}}$; г) $\bar{x}=\sqrt{n\cdot m}$.

8. Укажіть формулу, за якою обчислюється середнє геометричне двох чисел c і d.

а) $\bar{x}=\dfrac{c+d}{2}$; б) $\bar{x}=\sqrt{c\cdot d}$; в) $\bar{x}=\sqrt{\dfrac{c^2+d^2}{2}}$; г) $\bar{x}=\dfrac{c^2+d^2}{2}$.

9. За формулою $\bar{x}=\sqrt{x_1\cdot x_2}$ обчисліть середнє геометричне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=9;\ x_2=4;$ б) $x_1=2;\ x_2=32;$ в) $x_1=13;\ x_2=13.$

10. За формулою $\bar{x}=\sqrt{x_1\cdot x_2}$ обчисліть середнє геометричне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=27;\ x_2=3;$ б) $x_1=17;\ x_2=17;$ в) $x_1=2;\ x_2=8.$

11. За формулою $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ обчисліть середнє арифметичне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=4;\ x_2=6;\ x_3=11;$ б) $x_1=-7;\ x_2=5;\ x_3=9;\ x_4=1.$

12. За формулою $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ обчисліть середнє арифметичне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=8;\ x_2=34;$ б) $x_1=10;\ x_2=12;\ x_3=17.$

13. За формулою $\bar{x}=\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$ обчисліть середнє гармонійне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=3;\ x_2=5;$ б) $x_1=2;\ x_2=4;\ x_3=6;$ в) $x_1=1;\ x_2=7.$

14. За формулою $\bar{x}=\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$ обчисліть середнє гармонійне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=4;\ x_2=7;$ б) $x_1=7;\ x_2=4;$ в) $x_1=3;\ x_2=2;\ x_3=6.$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

15. За формулою $\overline{x}=\sqrt{\dfrac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}}{n}}$ обчисліть середнє квадратичне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=2;\ x_2=6;$ б) $x_1=7;\ x_2=4;\ x_3=10;$ в) $x_1=1;\ x_2=7.$

16. За формулою $\overline{x}=\sqrt{\dfrac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}}{n}}$ обчисліть середнє квадратичне таких індивідуальних значень деякої ознаки:

а) $x_1=3;\ x_2=5;$ б) $x_1=2;\ x_2=5;\ x_3=8;$ в) $x_1=5;\ x_2=3.$

Середній рівень

17. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Якщо загальний обсяг ознаки *виражений через суму квадратів її індивідуальних значень*, то середнє значення даної ознаки *є середнім* ... цих індивідуальних значень».

а) арифметичним; в) гармонійним;
б) геометричним; г) квадратичним.

18. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Якщо загальний обсяг ознаки *є оберненою величиною до суми її обернених індивідуальних значень*, то середнє значення даної ознаки *є середнім* ... цих індивідуальних значень».

а) арифметичним; в) гармонійним;
б) геометричним; г) квадратичним.

19. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Перший фотопринтер може надрукувати x фотографій за 20 хв. Другий фотопринтер ту саму кількість фотографій може надрукувати за 30 хв. Тоді середній час, витрачений кожним із принтерів на друк x фотографій під час їх спільної роботи, буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним; в) гармонійним;
б) геометричним; г) квадратичним.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

20. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Маленькому кошеняті однієї упаковки корму вистачає на тиждень. Дорослому коту цієї самої упаковки корму вистачить на 4 дні. Тоді середня кількість днів, на які вистачить однієї упаковки корму кожному з них під час спільного харчування, буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним;

б) геометричним;

в) гармонійним;

г) квадратичним.

21. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «Кількість нових англійських слів, вивчених Данилом у січні, зросла в 1,5 раза порівняно з кількістю слів, вивчених у грудні. А кількість слів, вивчених Данилом у лютому, зросла в 1,2 раза порівняно з кількістю слів, вивчених у січні. Тоді середнє щомісячне збільшення кількості нових англійських слів, вивчених Данилом, буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним;

б) геометричним;

в) гармонійним;

г) квадратичним.

22. Укажіть слово з поданих, яке потрібно вставити замість трьох крапок, щоб твердження було правильним: «У сім'ї Омелянчуків витрати на мобільний зв'язок у квітні зросли в 1,1 раза порівняно з витратами в березні, а в травні — зросли в 1,05 раза порівняно з витратами у квітні. Тоді середнє щомісячне збільшення витрат сім'ї Омелянчуків на мобільний зв'язок буде середнім ... значенням цих індивідуальних значень».

а) арифметичним;

б) геометричним;

в) гармонійним;

г) квадратичним.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

23. Укажіть формулу, за якою обчислюють середнє гармонійне трьох чисел a, b і c.

а) $\bar{x} = \dfrac{a+b+c}{2}$;
в) $\bar{x} = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$;
б) $\bar{x} = \sqrt{a \cdot b \cdot c}$;
г) $\bar{x} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

24. Укажіть формулу, за якою обчислюють середнє гармонійне двох чисел b і c.

а) $\bar{x} = \dfrac{b+c}{2}$;
б) $\bar{x} = \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$;
в) $\bar{x} = \sqrt{b \cdot c}$;
г) $\bar{x} = \dfrac{b^2+c^2}{2}$.

25. Укажіть формулу, за якою обчислюють середнє квадратичне двох чисел a і c.

а) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$;
б) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{a \cdot c}{2}}$;
в) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}}$;
г) $\bar{x} = \sqrt{a^2+c^2}$.

26. Укажіть формулу, за якою обчислюють середнє квадратичне трьох чисел a, b і c.

а) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$;
в) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$;
б) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{a \cdot b \cdot c}{3}}$;
г) $\bar{x} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

27. Першого дня хом'як з'їв 20 г корму, другого — 25 г, третього — 24 г. Скільки грамів корму з'їдав хом'як у середньому за день упродовж цих трьох днів?

28. У понеділок кошеня випило 120 мл води, у вівторок — 110 мл, у середу — 124 мл. Скільки води в середньому випивало кошеня за день упродовж цих трьох днів?

29. Обчисліть середнє геометричне чисел.

а) 4 і 16; б) 9 і 36; в) 8 і 32; г) 5 і 45.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

30. Обчисліть середнє геометричне чисел.
а) 12 і 48; б) 10 і 40; в) 9 і 81; г) 5 і 125.

31. Обчисліть середнє квадратичне значення $\bar{x}$ для чисел. Відповідь округліть до десятих.
а) 3, 4 і 5; б) 6, 8 і 10; в) 2, 4 і 6.

32. Обчисліть середнє квадратичне значення $\bar{x}$ для чисел. Відповідь округліть до десятих.
а) 3, 5 і 7; б) 1, 2 і 3; в) 4, 6 і 8.

33. У магазині техніки продають ноутбуки моделей A і L. Обчисливши дисперсію для кількості проданих ноутбуків за останній рік, отримали такі значення: для ноутбуків моделі A $D(A)=2{,}5$, а для ноутбуків моделі L $D(L)=4{,}8$. Попит на яку модель ноутбуків є більш стійким?

34. У салоні мобільного зв'язку продають телефони моделей S і X. Обчисливши дисперсію для кількості проданих телефонів за останні пів року, отримали такі значення: для телефонів моделі S $D(S)=1{,}25$, а для телефонів моделі X $D(X)=3{,}21$. Попит на яку модель телефонів є більш стійким?

Достатній рівень

35. За тиждень у Харкові було зафіксовано такі показники температури о 12:00:

Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця	Субота	Неділя
20 °C	20 °C	17 °C	12 °C	15 °C	12 °C	11 °C

Обчисліть середнє значення температури в Харкові за цей тиждень. Відповідь округліть до десятих.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

36. За тиждень у Києві було зафіксовано такі показники температури о 15:00:

Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця	Субота	Неділя
25 °C	22 °C	18 °C	16 °C	16 °C	14 °C	17 °C

Обчисліть середнє значення температури в Києві за цей тиждень. Відповідь округліть до десятих.

37. Середній бал Федора за чотири тести з англійської мови становить 9,5. П'ятий тест Федір написав на 12 балів. Який середній бал має Федір з урахуванням усіх п'яти тестів?

38. Із понеділка по четвер у магазині «Африка» було продано в середньому 27 кг бананів на день, а в п'ятницю — 32 кг бананів. Скільки в середньому кілограмів бананів було продано в цьому магазині з понеділка по п'ятницю?

39. У грудні перед різдвяними святами знижка на ялинкові прикраси в супермаркеті становила 10 %, а в січні після свят знизилася ще на 25 % від ціни в грудні. Якою була середня знижка на ялинкові прикраси в супермаркеті за грудень і січень?

40. У листопаді магазин продавав морозиво зі знижкою 20 % від ціни в жовтні, а в грудні — зі знижкою 25 % від ціни в листопаді. Якою була середня знижка на морозиво в магазині за листопад і грудень? Відповідь округліть до десятих.

41. Вирушивши у відрядження на автомобілі, пан Остап першу половину шляху подолав зі швидкістю 60 км/год, а другу половину шляху він їхав через район щільної забудови й за правилами дорожнього руху мусив зменшити швидкість до 40 км/год. Обчисліть середню швидкість руху автомобіля пана Остапа на всьому шляху.

42. Магазин «Зернятко» продає борошно двох видів: борошно вищого ґатунку коштує 50 грн за 1 кг, а борошно першого ґатунку — 30 грн за 1 кг. Обчисліть середню вартість 1 кг борошна, якщо купили однакову масу борошна кожного виду.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

43. За технологічною картою страв їдальні «Бабусина кухня» середня маса одного пиріжка з картоплею становить 75 г. Під час перевірки було зважено 5 пиріжків з картоплею і зафіксовано такі показники маси: 70 г, 75 г, 82 г, 78 г, 80 г. Знайдіть середнє квадратичне відхилення показників маси для перевіреної партії пиріжків.



44. Середній час доставки товарів фірмою «Вчасно» становить 120 хв. Перевірка часу виконання останніх п'яти замовлень фірми зафіксувала такий час доставки товарів: 180 хв, 150 хв, 90 хв, 100 хв, 125 хв. Знайдіть середнє квадратичне відхилення часу доставки.

45. Кожне з двох фермерських господарств вирощує пшеницю на трьох полях. Після збору врожаю врожайність пшениці для першого господарства становила 30, 32 і 28 центнерів із гектара відповідно для першого, другого й третього полів, а для другого господарства — 24, 30 і 36 центнерів із гектара. Обчисліть середню врожайність для кожного фермерського господарства й за допомогою дисперсії встановіть, для якого з них вирощувати пшеницю є менш ризикованим бізнесом.

46. Банк аналізує два інвестиційні проєкти. Реалізація кожного з проєктів може піти за несприятливим, помірним або сприятливим сценарієм. Прибутки в разі реалізації кожного зі згаданих сценаріїв для першого проєкту становлять відповідно 120 млн грн, 150 млн грн і 180 млн грн, а для другого проєкту — 125 млн грн, 150 млн грн і 175 млн грн. За допомогою дисперсії визначте, який із двох інвестиційних проєктів є менш ризикованим для банку.

Високий рівень

47. Доведіть: якщо деяка ознака X має індивідуальні значення x_1, x_2, ..., x_n, то сума відхилень усіх її значень від свого середнього арифметичного значення дорівнює нулю.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

48. Доведіть: якщо деяка ознака X має індивідуальні значення x_1, x_2, ..., x_n і кожне зі значень збільшити (зменшити) на те саме число, то середнє арифметичне початкових значень збільшиться (зменшиться) на це саме число.

49. Чотири токарі виготовляють однакові деталі. За зміну перший і другий токарі виготовляють по 28 деталей, третій — 32 деталі, четвертий — 29 деталей. Знайдіть:

1) середню кількість деталей, що виготовляє один токар;
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

50. Шість учнів і учениць, готуючись до НМТ з математики, за місяць розв'язали таку кількість задач: дві особи — по 23 задачі, три — по 25 задач і одна — 32 задачі. Знайдіть:

1) середню кількість задач, які розв'язав кожен учень (учениця);
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

51. Дідусь Панас і бабуся Горпина вирішили разом пофарбувати паркан біля свого будинку. Відомо, що дідусь Панас може пофарбувати весь паркан за 3 год, а бабуся Горпина — за 4 год. Знайдіть:

1) середній час фарбування паркану для кожного з них під час їхньої сумісної роботи;
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

52. Навесні Петрик і Тетянка вирішили разом скопати грядку для квітів. Петрик може скопати цю грядку за 2 год, а Тетянка — за 3 год. Знайдіть:

1) середній час обробки грядки для кожного з них під час їхньої сумісної роботи;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

53. Продажі мобільних телефонів у магазинах міста (порівнюючи з попереднім роком) у 2023 р. зросли на 10 %, а у 2024 р. — на 5 %. Знайдіть:

1) середній розмір щорічного темпу росту об'єму продажів мобільних телефонів у магазинах протягом розглянутих двох років;
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

54. Кількість студентів і студенток фізико-математичного факультету (порівнюючи з попереднім роком) у 2023 р. зросла в 1,2 раза, а в 2024 р. — на 8 %. Знайдіть:

1) середній розмір щорічного темпу росту кількості студентів і студенток факультету протягом розглянутих двох років (у відсотках);
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього (у відсотках);
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

55. Два працівники банку «Довіра» виконують однакові операції з обслуговування клієнтів. Протягом 2 год вони обслуговували клієнтів, причому перший витрачав на кожного клієнта 30 хв, а другий — 40 хв. Знайдіть:

1) скільки часу в середньому потрібно на обслуговування одного клієнта банку;
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

56. У відділі замовлень кондитерської фірми «Смачно» протягом 4 год працюють дві співробітниці. Перша на оформлення одного замовлення в середньому витрачає 15 хв, друга — 20 хв. Знайдіть:

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

1) середні витрати часу на оформлення одного замовлення у фірмі;
2) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
3) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.



Цікавинки від дідуся Тараса

Як ви вже знаєте, середнє геометричне значення використовується тоді, коли загальний обсяг деякої ознаки є добутком її індивідуальних значень. Зокрема, така ситуація виникає під час дослідження рядів динаміки, які ми розглядали в рубриці «Цікавинки від дідуся Тараса» в § 12. Наприклад, якщо повернутися до відомостей про кількість учнів і учениць у класі на початок навчального року протягом останніх 5 років, то можна знайти середній щорічний темп зростання кількості учнів і учениць класу протягом цього часу.

Дата	01.09. 2020 р.	01.09. 2021 р.	01.09. 2022 р.	01.09. 2023 р.	01.09. 2024 р.
Кількість учнів і учениць	32	34	30	31	33
Темпи зростання	—	1,0625	0,8824	1,0333	1,0645

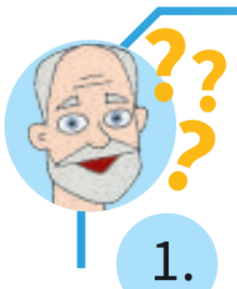
У цьому випадку досліджуваною ознакою K є темп зростання кількості учнів і учениць, індивідуальними значеннями ознаки є числа $k_1 = 1{,}0625$, $k_2 = 0{,}8824$, $k_3 = 1{,}0333$ і $k_4 = 1{,}0323$ у другому рядку таблиці, а загальний обсяг ознаки визначається як добуток її індивідуальних значень, як у прикладі 2 § 13. Тому середній темп зростання $\bar{K}$ визначається з рівності $\left(\bar{K}\right)^4 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \approx 1{,}0313$.

Щоб розв'язати останнє рівняння, можна спочатку знайти значення $\left(\bar{K}\right)^2 \approx \sqrt{1{,}0313} \approx 1{,}0155$, а потім $\bar{K} \approx \sqrt{1{,}0155} \approx 1{,}0077 = 100{,}77\,\%$.

Середній темп приросту $\bar{T}$ для рядів динаміки обчислюють за формулою $\bar{T} = \left(\bar{K} - 1\right) \cdot 100\,\%$. У нашому випадку $\bar{T} = 0{,}77\,\%$. Іншими

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

словам, якби кількість учнів і учениць у класі щороку зростала на 0,77 %, то за умови, що на 01.09.2020 р. у класі навчалося 32 особи, на 01.09.2024 р. їх стало б 33.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. На заняттях гуртка з математики розгляньте знаходження середнього темпу зростання у випадку, коли кількість значень темпів зростання в ряді динаміки відмінна від степенів числа 2.
2. Знайдіть середній темп зростання й середній темп приросту для прикладу з обсягами продажу сухих будівельних сумішей із рубрики «Цікавинки від дідуся Тараса» в § 12. Який економічний зміст мають ці середні показники?
3. Чи доводилося вам у реальному житті стикатися з випадками непорозумінь, пов'язаних із неправильним визначенням виду середнього значення ознаки? Якщо так, поділіться своїм досвідом.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $\dfrac{b^2-9}{b^2-2b-3}+\dfrac{b-1}{b+1}$ і знайдіть його значення, якщо $b=\dfrac{2}{3}$.
2. Розв'яжіть рівняння.

   а) $\sqrt{12-15x}=6$; б) $\dfrac{1}{2}-3\sqrt{x}=\dfrac{1}{6}$.
3. Під час канікул Софія поїхала в гості до свого друга Микити на автобусі. Проїхавши половину шляху, вона заснула, а прокинувшись через годину, помітила, що їй залишилося проїхати ще третину всього шляху. Знайдіть тривалість поїздки Софії (у годинах), якщо її автобус рухався весь час із незмінною швидкістю й не робив зупинок.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

4. В опуклому чотирикутнику $KLMP$ градусні міри внутрішніх кутів K, L і M рівні між собою, а градусна міра внутрішнього кута P на $40°$ більша за кожний із них. Знайдіть градусні міри всіх зовнішніх кутів цього чотирикутника.

5. Знайдіть невідоме слово. Кількість крапок дорівнює кількості букв у цьому слові.





ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 4



rnk.com.ua/114533

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Котик Байрон 10 грудня мав масу 6,5 кг, а 10 січня — 7,2 кг. Тоді відношення $\frac{7,2}{6,5}$ є відносним показником...

А	Б	В	Г
планового завдання	виконання плану	динаміки	порівняння

2. У 9-Г класі однієї зі шкіл провели самостійну роботу з математики. Усього в класі навчаються 30 учнів і учениць, із них за самостійну роботу отримали оцінки початкового рівня 3 особи, середнього рівня — 9 осіб, достатнього — 12 осіб, високого — 6 осіб. Яке з відношень є відносним показником порівняння?

А	Б	В	Г
$\frac{6}{30}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{30}{3}$	$\frac{9}{30}$

3. У коморі стоять 4 мішки з пшеницею масами 40 кг, 42 кг, 36 кг і 39 кг. Потрібно визначити середню масу для цих мішків. Яке із середніх значень природно для цього обрати?

А	Б	В	Г
Середнє гармонійне	Середнє квадратичне	Середнє геометричне	Середнє арифметичне

4. Відомо, що показник планового завдання $\text{ППЗ} = 1{,}4$, а показник динаміки $\text{ПД} = 1{,}2$. За якою формулою визначається показник виконання плану (ПВП)?

А	Б	В	Г	Д
$\text{ПВП} = \frac{1{,}4}{1{,}2}$	$\text{ПВП} = 1{,}4 - 1{,}2$	$\text{ПВП} = 1{,}4 \cdot 1{,}2$	$\text{ПВП} = 1{,}2 - 1{,}4$	$\text{ПВП} = \frac{1{,}2}{1{,}4}$

5. Ознака має лише два значення: a і b. Укажіть формулу, за якою обчислюють середнє квадратичне значень цієї ознаки.

А	Б	В	Г	Д
$\bar{x} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$	$\bar{x} = \frac{a + b}{2}$	$\bar{x} = \sqrt{a \cdot b}$	$\bar{x} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$	$\bar{x} = \frac{a^2 + b^2}{2}$

6. Учасники гуртка з біології вимірюють довжину (у см) листків вишень, які ростуть на дослідній ділянці. У яких одиницях вимірюється середнє квадратичне відхилення для цього дослідження?

А	Б	В	Г	Д
y см^2	y см^3	y см	y см^{-1}	y $\sqrt{\text{см}}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Населення села А на 30 % перевищує населення села Б. Скільки осіб проживає в селі Б, якщо в селі А проживає 1170 осіб?

8. У готелі «Смерека» кількість відвідувачів у червні була на 42 % більшою, ніж у травні, а в липні — на 22 % більшою, ніж у червні. На скільки відсотків у середньому щомісяця збільшувалася кількість відвідувачів «Смереки» протягом зазначеного періоду? Відповідь округліть до сотих відсотка.

9. Дядько Панько і тітонька Одарка разом копають город на дачній ділянці. Відомо, що дядько Панько сам може виконати цю роботу за 4 год, а тітонька Одарка — за 5 год. Знайдіть середній час (у хвилинах) роботи кожного під час їхньої сумісної роботи. Відповідь округліть до цілих хвилин.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Серед 100 глядачів кінотеатру провели опитування щодо того, якому кіножанру вони віддають перевагу. Із опитаних 42 особи обрали комедію, 28 — драму, 18 — бойовик, 12 — інші жанри. Знайдіть усі відносні показники структури для цього випадку та подайте їх у відсотках.

11. В одній зі шкіл у паралелі 9 класів було три класи. У 9-А навчалося 28 осіб, у 9-Б — 30 осіб, у 9-В — 25 осіб. Обчисліть усі можливі абсолютні та відносні показники порівняння класів, буква в назві яких за алфавітом іде пізніше, з класами, буква в назві яких за алфавітом іде раніше. Відносні показники за потреби округліть до сотих.

12. Авіакомпанія «Швидко» за перше півріччя 2024 р. перевезла 120 тис. пасажирів. У другому півріччі 2024 р. авіакомпанія запланувала перевезти 150 тис. пасажирів, однак було перевезено лише 140 тис. Знайдіть: а) показник планового завдання; б) показник динаміки; в) показник виконання плану. Відповіді округліть до сотих. На скільки відсотків було недовиконано план?

13. Для чисел 12, 10, 8, 6 знайдіть: а) середнє арифметичне; б) середнє гармонійне; в) середнє квадратичне. За потреби відповіді округліть до сотих. Порівняйте ці середні значення та висловіть припущення щодо співвідношення між ними.

14. Під час хокейного матчу в стартовому складі команди «Вітер» вийшли 5 польових гравців, зріст яких був 178 см, 182 см, 183 см, 184 см, 187 см. Знайдіть: а) середній зріст стартової п'ятірки команди «Вітер»; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення. За потреби відповіді округліть до десятих.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Доведіть: якщо деяка ознака X має індивідуальні значення x_1, x_2, ..., x_n і кожне зі значень збільшити (зменшити) в те саме число разів (що не дорівнює нулю), то середнє арифметичне початкових значень збільшиться (зменшиться) в те саме число разів.

2. Доведіть, що для двох додатних чисел a_1 і a_2 виконуються такі нерівності між середніми величинами:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} \geqslant \frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}},$$

причому рівності досягаються, тільки якщо $a_1 = a_2$.

3. Фірма запланувала збільшити у 2024 р. середню заробітну плату на 15 % порівняно із 2023 р. Фактично заробітну плату було збільшено на 20 %. На скільки відсотків перевиконано план? За потреби відповідь округліть до сотих.

4. Ту саму роботу виконують четверо працівників. Перший із них може виконати всю цю роботу за 2 год, другий — за 5 год, третій — за 4 год, а четвертий — за 8 год. Знайдіть середній час виконання цієї роботи кожним із працівників за їхньої сумісної роботи. За потреби відповідь округліть до сотих.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

5. Три виробники випускають однакові дитячі іграшки. Собівартість однієї іграшки в першого виробника становить 50 грн, у другого — 60 грн, у третього — 80 грн. Знайдіть середню собівартість іграшки за умови, що загальні витрати на випуск іграшок у всіх трьох виробників однакові. За потреби відповідь округліть до сотих.

6. У таблиці наведено дані про виробничі показники двох цехів підприємства за звітний період.

№ цеху	Фактичний випуск продукції (тис. грн)	Відсоток виконання плану	Частка стандартної продукції (%)
1	475	95	80
2	420	105	90

Знайдіть для двох цехів разом: а) середній відсоток виконання плану випуску продукції; б) середній відсоток стандартної продукції. За потреби відповіді округліть до сотих.

7. У таблиці наведено дані про учнів і учениць трьох шкіл міста.

№ школи	Загальна кількість осіб	Відсоток осіб, які навчаються у випускних класах	Середня кількість осіб в одному класі
1	700	10,0	28
2	840	12,0	30
3	650	11,4	25

Знайдіть: а) відсоток осіб, які навчаються у випускних класах у середньому за трьома школами; б) середню кількість учнів і учениць в одному класі за трьома школами. За потреби відповіді округліть до десятих.

8. У відділі замовлень торгової фірми «Швидко» працюють троє працівників, які мають 8-годинний робочий день. Перший

працівник на оформлення одного замовлення в середньому витрачає 14 хв, другий — 15 хв, третій — 19 хв. Знайдіть:

а) середні витрати часу на оформлення одного замовлення в цілому по відділу;
б) відхилення кожного значення розглядуваної ознаки від середнього;
в) середнє квадратичне відхилення.

За потреби відповіді округліть до сотих.

Словничок

Абсолютний (відносний, середній) показник — absolute (relative, average) indicator

Показник порівняння (структури, інтенсивності, динаміки) — indicator of comparison (structure, intensity, dynamics)

Показник планового завдання — planned task indicator

Показник виконання плану — plan execution indicator

Середнє арифметичне (геометричне, гармонійне, квадратичне) — arithmetic (geometric, harmonic, quadratic) mean

Дисперсія — dispersion, variance

Середнє квадратичне відхилення — root mean deviation

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

Статистичні показники

Абсолютні

Характеризують явища як такі, без відношення до інших явищ. *Є іменованими числами*, тобто вимірюються в шт., кг, м, грн тощо

Відносні

Виражають кількісні співвідношення між явищами і є часткою двох інших показників. Можуть бути *безрозмірними* або *іменованими*, тобто вимірюватися в км/год, осіб/км^2 тощо

Середні

Характеризують усе явище одним числом. *Визначальна властивість:* у разі заміни індивідуального значення ознаки на середнє загальний обсяг ознаки не змінюється

Відносні показники

- показники порівняння
- показники структури
- показники інтенсивності
- показники динаміки (ПД)
- показники планового завдання (ППЗ)
- показники виконання плану (ПВП)

$$\text{ПД} = \text{ППЗ} \cdot \text{ПВП}$$

Середні значення ознаки (середні показники)

- середнє арифметичне

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

- середнє геометричне $(n = 2)$

$$\overline{x} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

- середнє гармонійне

$$\overline{x} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

- середнє квадратичне

$$\overline{x} = \sqrt{\frac{x_1^{\,2} \cdot x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}{n}}$$

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Ознака X, $\overline{x}$ — її середнє значення

$$D(X) = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$ — дисперсія

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{D(X)}$$ — середнє квадратичне відхилення (ознаки від свого середнього значення)

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкти за наведеними нижче схемами.

Проєкт до інтегрованого модуля 1. Симетрія в мистецтві

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя / вчительки сформуйте групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть у групах разом з учителем/учителькою тематику доцільного та цікавого для кожної групи дослідження щодо використання симетрій геометричних фігур у мистецтві (живопис, скульптура, архітектура, народні ремесла тощо), складіть план дослідження та спрогнозуйте його можливі результати.

Етап 3. Проведіть дослідження щодо використання симетрій у мистецтві у формі спостереження, пошуку ілюстративних матеріалів, аналізу історії розвитку живопису, скульптури, архітектури, народних ремесел тощо.

Етап 4. Проаналізуйте, як ефективно застосовувати геометричні перетворення площини (зокрема, центральну й осьову симетрії) та їхні властивості для досягнення кінцевої мети їх використання для вашої проєктної групи. Обґрунтуйте, чому саме такі геометричні перетворення зручно використовувати із цією метою.

Етап 5. За можливості виготовіть самостійно певні твори мистецтва або виконайте технічне креслення архітектурних форм чи механізмів, у яких використано геометричні фігури, зокрема осьову та центральну симетрії. Поясніть, як саме ви використали в цих творах чи кресленнях властивості геометричних перетворень.

Етап 6. Оформте результати свого дослідження у вигляді презентації, відеоролика або театралізованого виступу. Представте результати дослідження учням і ученицям свого класу на уроці математики, технологій, мистецтва, бінарному уроці тощо.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку у своїй групі (якщо група складалася з однієї особи, проведіть саморефлексію), а потім з учителем / учителькою та з учнями й ученицями свого класу. Визначте позитивні й проблемні моменти, напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності щодо виконання та представлення проєктів.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Проєкт до інтегрованого модуля 2
«Нерівності та їх застосування»,
Проєкт до інтегрованого модуля 3
«Квадратична функція в побуті й техніці»:



rnk.com.ua/114538

Проєкт до інтегрованого модуля 4. Розрахунок статистичних показників за допомогою комп'ютера

Етап 1. Самостійно або з допомогою вчителя / вчительки сформуйте групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві або кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть разом з учителем / учителькою на загальних зборах усіх груп тематику актуального та цікавого для кожного колективу статистичного дослідження, що стосується повсякденного життя, побуту чи техніки, складіть план дослідження та спрогнозуйте його можливі результати.

Етап 3. Проведіть заплановане статистичне дослідження: зберіть дані (статистичне спостереження), подайте їх у зручному вигляді (статистичне зведення), виберіть систему доречних статистичних показників і розрахуйте їх з використанням комп'ютера, зробіть належні висновки й ухваліть управлінські рішення.

Етап 4. Зробіть висновки щодо зручності використання комп'ютера для розрахунку системи статистичних показників. Порівняйте ефективність використання із цією метою різних програмних засобів загального та спеціального призначення (Excel, Statistica, MatLab, MathCad тощо).

Етап 5. За можливості здійсніть впровадження одержаних результатів статистичного дослідження. Проаналізуйте ефективність такого впровадження через певний час після його здійснення. За потреби створіть практичні рекомендації щодо корекції діяльності у сфері, якої стосувалося статистичне дослідження.

Етап 6. Оформіть результати свого дослідження у вигляді презентації, відеоролика або театралізованого виступу. Представте результати дослідження учням і ученицям свого класу на уроці математики, інформатики, бінарному уроці тощо.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку в своїй групі (якщо група складалася з однієї особи, проведіть саморефлексію), а потім з учителем / учителькою та іншими учнями й ученицями свого класу. Визначте позитивні й проблемні моменти, а також напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності щодо виконання та представлення проєктів.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

§ 1. Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання

Тренажерний зал

1. а) A — прообраз, B — образ; б) C — прообраз, D — образ; в) E — прообраз, G — образ; г) H — прообраз, K — образ.

2. а) X — прообраз, Y — образ; б) Z — прообраз, V — образ; в) N — прообраз, L — образ; г) M — прообраз, P — образ.

3. б. **4.** в. **5.** в. **6.** б. **7.** а) Так; б) ні; в) ні. **8.** а) Ні; б) ні; в) так.

9. а) Так, б) ні, в) ні. **10.** а) Ні; б) так; в) так.

11. B — центр повороту, $BA = BD$, $BE = BC$.

12. A — центр гомотетії, $AB = BC$, $AE = ED$.

13. $k > 1$, розтяг. **14.** $n < 1$, стиск.

15. $A'(8;6)$, $B'(10;-4)$, $C'(6;4)$. **16.** $X'(-1;10)$, $Y'(0;-2)$, $Z'(4;2)$.

17. $C'(5;3)$, $D'(8;10)$, $M'(15;-1)$. **18.** $N'(-1;3)$, $K'(4;9)$, $L'(-2;-5)$.

19. $A'(20;3)$, $B'(-10;-6)$, $C'(15;-8)$.

20. $D'(6;-4)$, $F'(-3;20)$, $H'(-12;-4)$.

21. а) Паралельне перенесення; б) деформація; в) паралельне перенесення; г) деформація.

22. а) Паралельне перенесення; б) паралельне перенесення; в) деформація; г) деформація.

23. а) $A'B'$ — образ, AB — прообраз; б) $C'D'$ — образ, CD — прообраз; в) $E'F'$ — образ, EF — прообраз; г) $G'K'$ — образ, GK — прообраз.

24. а) $X'Y'$ — образ, XY — прообраз; б) $K'L'$ — образ, KL — прообраз; в) $M'N'$ — образ, MN — прообраз; г) $O'P'$ — образ, OP — прообраз.

37. $A'(4;5)$, $B'(3;1)$, $C'(2;6)$. **38.** $M'(0;1)$, $N'(4;3)$, $K'(-3;7)$.

39. $D(-1;6)$, $E(-2;2)$, $F(-3;7)$. **40.** $H(-5;6)$, $P(2;1)$, $Q(6;-13)$.

41. $O(7;-3)$, $C(9;-8)$, $D(6;2)$, $F(15;-9)$.

42. $O(-2;5)$, $A(-1;4)$, $B(-11;6)$, $M(-3;19)$.

43. а) $A'(4;32)$; б) $A'(16;8)$. **44.** а) $B'(8;1)$; б) $B'(2;4)$.

45. Ширина не змінилася, висота збільшилася у два рази, $k = 2$.

46. Ширина не змінилася, висота зменшилася у два рази, $n = 0{,}5$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

47. $\vec{c}(-8;-6)$. **48.** $\vec{q}(2;-2)$. **49.** $L(-5;-5)$. **50.** $P(0;5)$.

51. а) $A'(2;4)$ і $B'(4;6)$; б) $A'(4;6)$ і $B'(6;8)$;
в) $A'(-2;-4)$ і $B'(-4;-6)$; г) $A'(-2;4)$ і $B'(-4;6)$.

52. а) $C'(-2;-2)$ і $D'(-6;-4)$; б) $C'(1;1)$ і $D'(-3;-1)$;
в) $C'(2;1)$ і $D'(6;2)$; г) $C'(-2;2)$ і $D'(-6;4)$.

53. а) $K'(3;9)$ і $L'(-9;-6)$; б) $K'(2;3)$ і $L'(-6;-2)$;
в) $K'(1;1{,}5)$ і $L'(-3;-1)$.

54. а) $M'(-2;2)$ і $N'(1;-4)$; б) $M'(-1;4)$ і $N'(0{,}5;-8)$;
в) $M'(-4;12)$ і $N'(2;-24)$.

55. $M(3;3)$. **56.** $N(-3;2)$. **57.** $\lambda = 3$. **58.** $\lambda = 0{,}5$.

59. а) Так; б) так; в) ні. **60.** а) Так; б) так; в) ні.

61. а) Так; б) так. **62.** а) Так; б) ні.

65. $B(-5;-7)$; $C(5;7)$. **66.** $K(-3;-6)$; $N(3;6)$.

70. Центром повороту є центр описаного кола, а кут повороту дорівнює $120°$.

71. $(ka;kb)$. **72.** $M(-3;12)$, $M'(-1{,}5;6)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $\frac{2b^3}{3a}$; б) $\frac{4-x}{12}$; в) $\frac{m-3}{m+1}$. **2.** а) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{3,4} = \pm 1$; б) $x = 4$.

5. 223, 242.

§ 2. Рухи та перетворення подібності. Види рухів і їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот

Тренажерний зал

1. а; б; в. **2.** а; б; в.

3. а) Ні, ні, так; б) так, так, ні. **4.** а) Так, так, ні; б) ні, ні, так.

5. а) Так, так; б) так, так; в) ні, так.

6. а) Ні, так; б) так, так; в) ні, так.

7. а) Так, так; б) ні, так; в) так, так.

8. а) Так, так; б) так, так; в) ні, так.

9. а) Ні, ні; б) так, так; в) ні, ні. **10.** а) Так, так; б) ні, ні; в) так, так.

11. а) Так, так; б) ні, так; в) ні, ні.

12. а) Так, так; б) так, так; в) ні, ні.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

17. а) $P'(3;-2)$, $Q'(0;2)$; б) $P'(-1;6)$, $Q'(-4;2)$; в) $P'(1;-6)$, $Q'(4;-2)$.
18. а) $M'(2;-1)$, $N'(-1;2)$; б) $M'(4;-1)$, $N'(1;-4)$; в) $M'(-4;1)$, $N'(-1;4)$.
19. а) $F(2;1)$; б) $F(8;2)$. **20.** а) $A(1;1)$; б) $A(6;6)$.
21. а) Так; б) ні; в) так; г) так. **22.** а) Ні; б) ні; в) так; г) так.
23. а; б; в. **24.** б; в, г.
25. а) $A(-3;0)$, $B(0;6)$, $C(3;0)$; б) $A(-6;0)$, $B(0;3)$, $C(6;0)$; в) $A(-3;0)$, $B(0;1)$, $C(3;0)$; г) $A(-1;0)$, $B(0;3)$, $C(1;0)$.
26. а) $A(-2;0)$, $B(0;12)$, $C(2;0)$; б) $A(-6;0)$, $B(0;4)$, $C(6;0)$; в) $A(-2;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$; г) $A(-1;0)$, $B(0;4)$, $C(1;0)$.

29. 1 — поворот навколо точки A на кут 90° проти ходу годинникової стрілки; 2 — симетрія відносно осі OX; 3 — симетрія відносно осі OX, потім симетрія відносно осі OY; 4 — симетрія відносно осі OY, потім паралельне перенесення на вектор $(5;0)$.
30. 1 — симетрія відносно осі OY; 2 — поворот навколо точки B на кут 90° проти ходу годинникової стрілки; 3 — симетрія відносно осі OY, потім симетрія відносно осі OX; 4 — поворот навколо точки B на кут 90° проти ходу годинникової стрілки, потім паралельне перенесення на вектор $(0;-5)$.
31. а) Так; б) так; в) для двох вершин — так, для двох інших — ні.
32. а) Так; б) так; в) ні.
33. Ні. **34.** Ні. **35.** $(-1;-2)$. **36.** $(3;-7)$.
37. а) $(1;0)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; г) $(0;-1)$.
38. а) $(-1;0)$; б) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; г) $(0;-1)$.
39. Координати центра симетрії $(1;-1)$, $B'(-1;-4)$.
40. Координати центра симетрії $(0;3)$, $F'(1;7)$.
41. $(x-3)^2+(y+1)^2=9$. **42.** $(x+5)^2+(y-5)^2=25$.
43. $2x-y-2=0$. **44.** $x-3y+4=0$.
51. $B(2;15)$.
52. а) $(x-3)^2+y^2=25$; $3x-2y-17=0$; б) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; $3x-2y+9=0$; в) $(x+3)^2+(y-3)^2=25$; $3x+2y-1=0$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

57. *Вказівка.* Використайте гомотетію із центром у точці M, за якої образом меншого кола є більше коло.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{2}{3}$. **2.** 2080 грн. **3.** 16 см; 37°; 53°. **4.** Два розв'язки.

5. а) ПРИЗ; б) ТАРА.

§ 3. Рівність і подібність фігур. Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень

Тренажерний зал

1. а) Так; б) ні; в) так; г) так. **2.** а) Так; б) ні; в) так; г) так.
3. а) Так; б) ні; в) так. **4.** а) Так; б) ні; в) ні.
5. а) Ні; б) так; в) так. **6.** а) Так; б) ні; в) так.
7. а; б; г. **8.** а; в. **9.** б; г. **10.** а; в.
11. а) Так; б) так; в) ні; г) так. **12.** а) Так; б) так; в) ні; г) так.
21. Ж, И, І, Н, О, Ф, Х. **22.** Н, І, N, О, S, Х.
23. а, б, д; в, г, ж; е,є. **24.** а, в, д; б, е, ж.
25. а) Ні; б) ні; в) так; г) так. **26.** а) Так; б) ні; в) так; г) так.
29. Так. **30.** Так.
35. а) Так; б) так; в) так; г) так. **36.** а) Так; б) так; в) ні; г) ні.
39. Пряма, яка проходить через точку M і центр квадрата.
44. Усі прямі паралельні, й відстані від середньої прямої до двох інших прямих однакові.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $x = 4$. **2.** Гречка 60 грн; рис 80 грн. **3.** 15 см. **4.** Неправильно, порушено закон достатньої підстави. **5.** а) Від 388 см до 392 см; б) від 8880 $см^2$ до 9075 $см^2$.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 1

1. Г. **2.** В. **3.** А. **4.** Б. **5.** В. **6.** Д. **7.** 3. **8.** −12. **9.** 24.

11. а) $\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 10; \end{cases}$ $C'(2;12)$, $D(2;-13)$; б) $\begin{cases} x' = 4 - x, \\ y' = -2 - y; \end{cases}$ $C'(-1;-4)$, $D(5;1)$;

в) $\begin{cases} x' = 3x + 8, \\ y' = 3y - 10; \end{cases}$ $C'(23;-4)$, $D\left(-3;\frac{7}{3}\right)$. **12.** $K'(4;9)$. **13.** $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

$2x-3y-12=0$. **14.** *Вказівка*. Використайте симетрію відносно прямої a; для доведення скористайтеся наслідком із нерівності трикутника.

Завдання підвищеної складності

1. Ні. Образом точки M є сама точка M. Образ точки O не визначено.

2. а) $y=-\frac{1}{3}x-2$; б) $y=-\frac{1}{3}x+2$. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, у які точки в результаті заданого повороту переходять точки перетину даної прямої з осями координат. **4.** *Вказівка*. Використайте поворот заданого трикутника навколо точки C на $90°$.

5. *Вказівка*. Обґрунтуйте, що середини сторін квадрата є вершинами квадрата, і покажіть, що за гомотетії із центром M і коефіцієнтом $k=2$ цей квадрат перейде в шуканий чотирикутник.

Розділ 2. НЕРІВНОСТІ

§ 4. Числові нерівності. Властивості числових нерівностей

Тренажерний зал

1. а) $r<o$; б) $t\leqslant 200$; в) $d>500$. **2.** а) $g>s$; б) $b>40$; в) $s\leqslant 50$.

3. а) $a<b$; б) $a<c$; в) $c>b$; г) $c>a$.

4. а) $x>y$; б) $x>z$; в) $z<y$; г) $z<x$.

5. в; г. **6.** а; в.

7. а) $5\leqslant x\leqslant 8$; б) $-3<y<2$; в) $-9<z\leqslant 0$; г) $5\leqslant m<14$.

8. а) $-2\leqslant a\leqslant 9$; б) $5<b<11$; в) $-7<c\leqslant 7$; г) $0\leqslant d<4$.

9. а; б; в; г. **10.** в; г.

11. а) $b>c$; б) $b<c$; в) $b=c$; г) $b<c$.

12. а) $x>y$; б) $x=y$; в) $x>y$; г) $x<y$.

13. а) $x+5<y+5$; б) $x-7<y-7$; в) $2x<2y$; г) $-4x>-4y$.

14. а) $-5a<-5c$; б) $9a>9c$; в) $a-3>c-3$; г) $a+2>c+2$.

15. а) $a+5>b+5$; б) $4a>4b$; в) $a-7>b-7$; г) $-9a<-9b$.

16. а) $x-3<y-3$; б) $12x<12y$; в) $x+6<y+6$; г) $-2x>-2y$.

17. а) $m<a<l$; б) $150\leqslant t\leqslant 400$; в) $75\leqslant m\leqslant 78$.

18. а) $150\leqslant v\leqslant 1000$; б) $s<p<h$; в) $158\leqslant z\leqslant 193$.

19. а) $ab<0$; б) $bc>0$; в) $b+c>0$; г) $a:c<0$.

20. а) $xy<0$; б) $yz>0$; в) $y+z<0$; г) $x:z<0$.

21. а; б; в. **22.** б; в; г.

25. а) Так; б) ні; в) ні; г) так. **26.** а) Так; б) ні; в) ні; г) так.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

27. а) $a+9>b+7$; б) $7+a>3+b$; в) $a+8>b-1$; г) $\frac{1}{3}a>\frac{1}{3}b$.

28. а) $x+3<y+6$; б) $5+x<9+y$; в) $x-4<y-1$; г) $\frac{5}{9}x<\frac{5}{9}y$.

29. а) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$; б) $5a<8b$; в) $-6a>-6b$.

30. а) $x+9>y+6$; б) $8x>6y$; в) $\frac{4}{7}x>\frac{4}{7}y$.

31. 4; 5; 6; 7; 8. **32.** -2; -1; 0; 1.

33. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{3}{\sqrt{3}}>\frac{2}{\sqrt{3}}$.

34. а) $\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}<\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}<\frac{2}{\sqrt{3}}$.

35. а) Так; б) так; в) ні; г) так. **36.** а) Так; б) так; в) ні; г) так.

37. а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **38.** а) Ні; б) ні; в) так; г) так.

39. а) $4<2n<14$; $7<2n+3<17$; $-7<-n<-2$; $-2<5-n<3$;
б) $-6\leq 2n\leq 10$; $-3\leqslant 2n+3\leqslant 13$; $-5\leqslant -n\leqslant 3$; $0\leqslant 5-n\leqslant 8$.

40. а) $3<3d<15$; $-1<3d-4<11$; $-10\leqslant -2d\leqslant -2$; $-9\leqslant 1-2d\leqslant -1$;
б) $-3\leqslant 3d\leqslant 9$; $-7\leqslant 3d-4\leqslant 5$; $-6\leqslant d\leqslant 4$; $-5\leqslant d\leqslant 5$.

41. $9{,}6<P<11{,}4$. **42.** $16{,}7<P<17{,}3$. **43.** $5{,}76<S<6{,}76$. **44.** $7<P<13{,}5$.

49. Петрик. **50.** Тетянка. **53.** $a=1$. **54.** $b=-1$.

58. а) $\sqrt{5}+\sqrt{2}<\sqrt{3}+2$; б) $\sqrt{10}+\sqrt{3}>\sqrt{11}+\sqrt{2}$.

60. *Вказівка.* Для кожного виразу в дужках використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох чисел.

61. а) $14<a+b<21$; б) $-12<a-b<-5$; в) $40<ab<80$; г) $2<\frac{b}{a}<4$;
д) $8<4a-\frac{1}{2}b<15$.

62. а) $15<c+d<21$; б) $6<d-c<12$; в) $36<cd<90$; г) $0{,}2<\frac{c}{d}<0{,}5$;
д) $58<5d-\frac{1}{3}c<74$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

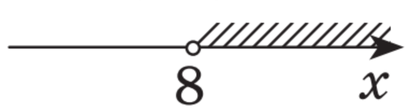
1. а) $-1\frac{5}{12}$; б) 10; в) 6. **2.** а) $(-7;3)$; б) $(5;2)$. **4.** а) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

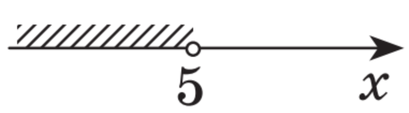
§ 5. Нерівності зі змінними. Рівносильні нерівності. Лінійні нерівності з однією змінною

Тренажерний зал

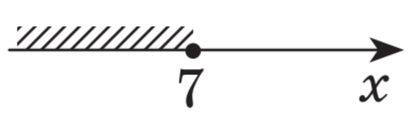
1. б; в. **2.** а; б; в.

3. а) 

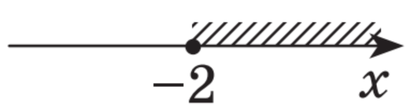
$(8; +\infty)$

б) 

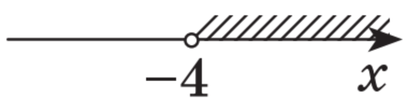
$(-\infty; 5)$

в) 

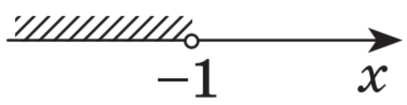
$(-\infty; 7]$

г) 

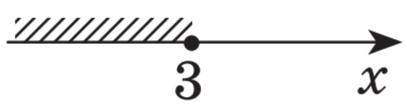
$[-2; +\infty)$

4. а) 

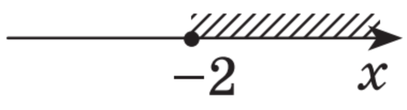
$(-4; +\infty)$

б) 

$(-\infty; -1)$

в) 

$(-\infty; 3]$

г) 

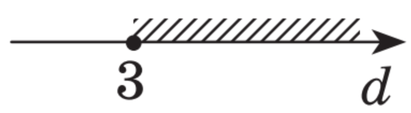
$[-2; +\infty)$

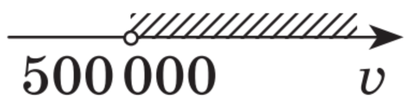
5. а) $x > -3$; б) $x < 6$; в) $x \leqslant 7$; г) $x \geqslant 9$.

6. а) $x \leqslant -4$; б) $x \geqslant 2$; в) $x > 6$; г) $x > -10$.

7. а) $y \geq 0$; б) $y \leq -3$; в) $y < 12$; г) $y > -5$.

8. а) $x > -2$; б) $x \leqslant 6$; в) $x < 4$; г) $x \geqslant -7$.

9. $d \geqslant 3$; $[3; +\infty)$ 

10. $v > 500\,000$; $(500\,000; +\infty)$ 

11. а) $(8; +\infty)$; б) $(-\infty; 4)$; в) $(-\infty; 11]$; г) $[-4; +\infty)$.

12. а) $(-\infty; -5)$; б) $(15; +\infty)$; в) $(-\infty; 14]$; г) $[-16; +\infty)$.

13. а) 5; б) 3; в) 9; г) 12. **14.** а) 4; б) 5; в) 14; г) 8.

15. а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; -5)$; в) $(-\infty; 1{,}5]$; г) $(-\infty; -7)$.

16. а) $(-\infty; -1)$; б) $(3; +\infty)$; в) $[-5; +\infty)$; г) $[0{,}25; +\infty)$.

17. в; г; д. **18.** а; б; в.

19. а) $(7; +\infty)$; б) $(-\infty; -5)$; в) $(-\infty; 3]$; г) $[-4; +\infty)$.

20. а) $(-9; +\infty)$; б) $(-\infty; 10)$; в) $(-\infty; -2]$; г) $[10; +\infty)$.

21. а) $[4; +\infty)$; б) $(-\infty; -9)$; в) $(-\infty; -1]$; г) $(-\infty; 4)$.

22. а) $(-\infty; -3)$; б) $(7; +\infty)$; в) $[-6; +\infty)$; г) $[3; +\infty)$.

23. а) $-1 < x < 6$; б) $3 \leqslant x < 9$; в) $-5 < x \leqslant 2$; г) $0 \leqslant x \leqslant 4$.

24. а) $-7 < x \leqslant -2$; б) $2 \leqslant x \leqslant 8$; в) $4 < x < 9$; г) $-7 \leqslant x < 1$.

25. а) $-3 < y \leqslant 2$; б) $0 \leqslant y \leqslant 7$; в) $-9 < y < -1$; г) $4 \leqslant y < 11$.

26. а) $4 \leq x \leq 9$; б) $-7 < x < 1$; в) $-5 < x \leqslant 7$; г) $-8 \leqslant x < -2$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

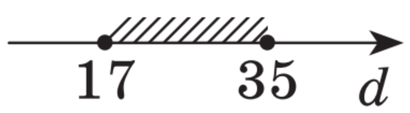
27. а) $(9;13]$; б) $[-7;0)$; в) $[-4;-1]$; г) $(-3;4)$.

28. а) $[-2;3]$; б) $(2;11)$; в) $(-5;-2]$; г) $[5;10)$.

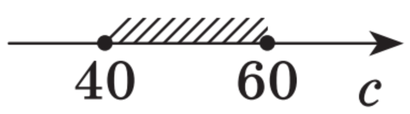
29. а) $[-2;4]$; б) $(0,4;3)$; в) $(6;15]$; г) $[-6;24)$.

30. а) $(1,5;5]$; б) $[-4;-3)$; в) $[-5;20]$; г) $(0;28)$.

31. $17 \leqslant d \leqslant 35$; $[17;35]$



32. $40 \leqslant c \leqslant 60$; $[40;60]$



33. а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **34.** а) Так; б) ні; в) так; г) так.

35. а; б. **36.** б; г.

37. а) $(-\infty;3)$; б) $(4;+\infty)$; в) $(-\infty;-9]$; г) $[2;+\infty)$.

38. а) $[1;+\infty)$; б) $(-\infty;2]$; в) $(-\infty;5)$; г) $(10;+\infty)$.

39. а) $[-1;5)$; б) $[-1;3)$; в) $(-8;7)$; г) $[-2,5;-0,5]$.

40. а) $(-3;9]$; б) $[-1;0,8]$; в) $[-27;21]$; г) $(-0,6;0,44]$.

41. а) $\left(-\frac{7}{4};+\infty\right)$; б) $\left[-\frac{7}{4};+\infty\right)$; в) $\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right)$; г) $\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right]$.

42. а) $\left(3\frac{1}{3};+\infty\right)$; б) $\left[3\frac{1}{3};+\infty\right)$; в) $\left(-\infty;3\frac{1}{3}\right)$; г) $\left(-\infty;3\frac{1}{3}\right]$.

43. а) 2; б) 1. **44.** а) 6; б) 3. **45.** $(4;16)$. **46.** $(6;22)$. **47.** -3. **48.** 4.

49. а) Усі значення $x \neq 3$; б) розв'язків немає; в) $x = 2$; г) x — будь-яке дійсне число.

50. а) $x = -5$; б) x — будь-яке дійсне число; в) усі значення $x \neq -1$; г) розв'язків немає.

51. а) Ні (наприклад, $x = -1$ є розв'язком другої нерівності, але не є розв'язком першої); б) так (обидві нерівності не мають розв'язків); в) так (обидві нерівності мають тільки один розв'язок $x = 3$; г) так (розв'язки обох нерівностей: x — будь-яке дійсне число).

52. а) Так (обидві нерівності не мають розв'язків); б) ні (наприклад, $x = -1$ є розв'язком першої нерівності, але не є розв'язком другої); в) так (обидві нерівності мають тільки один розв'язок $x = -5$); г) так (розв'язки обох нерівностей: x — будь-яке дійсне число).

53. а) $(-\infty;3,5)$; б) розв'язків немає; в) $\left(4\frac{1}{8};+\infty\right)$; г) y — будь-яке дійсне число.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

54. а) $(-\infty; -0,6]$; б) y — будь-яке дійсне число; в) $(-\infty; 1,75)$; г) розв'язків немає.

55. а) $(-\infty; 4]$; б) $(-\infty; 0,2)$; в) $(-\infty; -0,75]$; г) $(-0,2; +\infty)$.

56. а) $(-0,2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$; в) $(-\infty; -3]$; г) $(-\infty; 0,6)$.

57. а) $\left(1; 3+2\sqrt{2}\right]$; б) $\left(-1; \dfrac{9+4\sqrt{5}}{3}\right]$. **58.** а) $\left(-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}; 1\right]$; б) $\left(-8-3\sqrt{7}; -1\right]$.

59. а) $(-\infty; 9)$; б) $(9; +\infty)$; в) $(-\infty; 9]$.

60. а) $(-\infty; 2,4]$; б) $(2,4; +\infty)$; в) $(-\infty; 2,4)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $\dfrac{2x+2}{x-2}$; б) $-\dfrac{x+1}{x+3}$. **2.** а) $x=16$; б) $x=-9$. **3.** $K(-1,5; 2,5)$; $B(1,5; 5,5)$.

4. Прямій l належать точки A і D; прямі, що лежать в одній півплощині відносно прямої l, мають однаковий знак виразу. **5.** 127; 255.

§ 6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною. Лінійні нерівності з двома змінними

Тренажерний зал

1. а; б; д. **2.** в; г.

3. а) $(-3; 6]$; б) $[-2; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$; г) немає спільної частини.

4. а) $[7; +\infty)$; б) $(1; 8)$; в) $(-\infty; 6]$; г) немає спільної частини.

5. а) $[-3; 5)$; б) $(4; +\infty)$; в) немає спільної частини; г) $(-\infty; -2]$.

6. а) $(-\infty; -1]$; б) $(2; 9)$; в) $[4; +\infty)$; г) немає спільної частини.

7. а) $(5; +\infty)$; б) $(-1; 8]$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty; 0]$.

8. а) $(-7; 3]$; б) $(-\infty; -1)$; в) $(10; +\infty)$; г) $\varnothing$.

9. а) $(-1; 4]$; б) $(-\infty; -4)$; в) $(7; +\infty)$; г) $\varnothing$.

10. а) $[1; 4]$; б) $(-\infty; 7)$; в) $(3; +\infty)$; г) $(-5; 2]$.

11. $\begin{cases} k \geqslant 3, \\ k \leqslant 8. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} s \geqslant 4, \\ s \leqslant 7. \end{cases}$

13. а) Ні; б) так; в) так. **14.** а) Так; б) так; в) ні. **15.** а; б; в. **16.** а; в; г.

17. а) $\begin{cases} y > -2, \\ y > 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant 8, \\ y \leqslant 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant -5, \\ y < 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y < -6, \\ y \geqslant -1. \end{cases}$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

18. а) $\begin{cases} x < 7, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -7, \\ x > -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant 9, \\ x < 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x \geqslant 6. \end{cases}$

19. б; в, г. **20.** в, г, д.

21. а) $(2; +\infty)$; б) $(4; 5]$; в) $(-\infty; -4)$; г) немає розв'язків.

22. а) $(2; +\infty)$; б) $(-18; -11]$; в) $(-\infty; 4)$; г) немає розв'язків.

27. $1{,}4x + 0{,}8y \leqslant 150$. **28.** $38x + 79y > 200$.

29. $300x + 125y \leqslant 20000$. **30.** $50x + 100y \leqslant 30000$.

31. а) $[3; 4)$; б) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{3}{2}; \frac{10}{6}\right]$; г) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

32. а) $[-1; 7)$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$; в) $(-6; 16]$; г) $(-\infty; -1)$.

33. а) $(-4; 5]$; б) $\left[\frac{3}{2}; 10\right)$. **34.** а) $(-14; -8)$; б) $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

35. а) $[0; 3]$; б) $[-5; 4]$. **36.** а) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $[1; 2]$.

37. а) $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$; б) $(-1; 4)$; в) $[-0{,}2; 0{,}2]$; г) $(-0{,}3; -0{,}2)$.

38. а) $(-1; 3]$; б) $(-3; -1)$; в) $[-1{,}9; -1{,}7]$; г) $(0{,}9; 1{,}15)$.

41. 15 г або 16 г, або 17 г. **42.** $[295; 425]$.

43. а) $[-5; 2)$; б) $(-\infty; -11]$; в) $\left[\frac{3}{2}; \frac{10}{6}\right]$; г) розв'язків немає.

44. а) Розв'язків немає; б) $[1; 2)$; в) $(-6; 16]$; г) $[-2; 3]$.

45. а) $[4; 22)$; б) $(-3; +\infty)$; в) $[-1; 3)$.

46. а) $(-11; 2{,}5]$; б) $\left(2\frac{7}{13}; 6\right]$; в) немає розв'язків.

47. а) $[-2{,}5; 5)$; 8 цілих розв'язків; б) $[-10; -0{,}6]$; 10 цілих розв'язків.

48. а) $[0{,}5; 4]$; 4 цілі розв'язки; б) $\left(0; \frac{3}{2}\right]$; 1 цілий розв'язок.

49. а) $(-4; 1]$; б) $[2; +\infty)$. **50.** а) $[3; 6]$; б) $(-1{,}5; 0{,}6)$.

51. а) $(-0{,}5; 5]$; б) $(-1{,}5; 3)$; в) $[-1{,}5; 4)$; г) $(-\infty; 0{,}3)$.

52. а) $(-3; 3{,}5]$; б) $(0{,}5; 2)$; в) $\left[-3; \frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty; 1]$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

53. а) $(-2;-1)$; б) $(0,5;3]$; в) $(-\infty;0,25)$; г) $[2;5]$.

54. а) $(1;1,5)$; б) $[-3;-1)$; в) $[0,1;+\infty)$; г) $(0,6;9)$.

55. а) $(8;+\infty)$; б) $(-\infty;8]$. **56.** а) $(-\infty;1)$; б) $[1;+\infty)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) Найбільш популярним є американо, найменш популярним — латте; б) 0,21. **2.** $AK=10,5$ см; $CP=9$ см. **3.** $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$. **4.** $a=8$.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 2

1. В. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Д. **5.** А. **6.** В. **7.** 42. **8.** 5. **9.** 17. **10.** $19<m+p<21$; $2<m-p<4$; $88<m\cdot p<108$; $\frac{11}{9}<\frac{m}{p}<\frac{3}{2}$. **12.** $(-\infty;-3]$. **13.** $(-7;-6]$.

14. Множина розв'язків є прямокутним трикутником з вершинами в точках $(0;2)$, $(0;-2)$ і $(8;-2)$.

Завдання підвищеної складності

8. а) $[3;4]$; б) $(-2,5;6]$. **9.** а) $(0,5;1]$; б) $[2;3)$. **10.** $(-\infty;-1)$ або $(2,5;+\infty)$.

11. Квадрат. *Вказівка.* Розгляньте цю нерівність окремо в кожній із координатних чвертей, запишіть відповідні системи та зобразіть їх розв'язки.

Розділ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 7. Функції та їх властивості. Перетворення графіків функцій

Тренажерний зал

1. а) $[-4;2]$ — область визначення, $[2;7]$ — множина значень;

б) $[-3;3]$ — область визначення, $[-5;1]$ — множина значень;

в) $[1;6]$ — область визначення, $[-3;5]$ — множина значень.

2. а) $[1;4]$ — область визначення, $[2;7]$ — множина значень;

б) $[-2;3]$ — область визначення, $[2;6]$ — множина значень;

в) $[-3;3]$ — область визначення, $[-2;4]$ — множина значень.

3. а; д. **4.** а; д. **5.** б; в; г. **6.** а; б; в. **7.** $y=f(x-6)$. **8.** $y=f(x)+4$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

9. $\overrightarrow{(9;0)}$. **10.** $\overrightarrow{(-4;0)}$. **11.** $\overrightarrow{(0;7)}$. **12.** $\overrightarrow{(0;-2)}$. **13.** $y=-f(x)$. **14.** $y=f(-x)$.

15. $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$. **16.** $y=2f(x)$. **17.** 8, Oy. **18.** 5, Oy. **19.** 4, Ox. **20.** 7, Ox.

21. а) $y=(x-7)^2$; б) $y=-x^2$; в) $y=1{,}5x^2$.

22. а) $y=\sqrt{x}+4$; б) $y=-\sqrt{x}$; в) $y=3\sqrt{x}$.

23. а) $[-2;4]$; б) $[-1;5]$; в) немає; г) $[-2;4]$.

24. а) $[-3;0]$; б) $[-2;2]$; в) $[-3;0]$; г) немає.

25. б) $A_1(-3;0)$; $B_1(-2;2)$; $C_1(1;4)$; $D_1(3;5)$; $E_1(6;6)$; $y=f(x+3)$.

26. б) $K_1(2;0)$; $L_1(1;2)$; $M_1(0;3)$; $N_1(-2;4)$; $P_1(-7;6)$; $y=f(x-2)$.

27. б) $Q_1(1;6)$; $R_1(2;2)$; $S_1(4;0)$; $T_1(8;-1)$; $y=f(x)-2$.

28. б) $H_1(-1;-3)$; $T_1(-2;0)$; $M_1(-3;1)$; $L_1(-6;2)$; $y=f(x)+3$.

29. б) $C_1(2;-2)$; $D_1(1;-1)$; $E_1(0;0)$; $F_1(-1;1)$; $H_1(-2;2)$; $y=f(-x)$.

30. б) $P_1(1;-2)$; $R_1(2;-4)$; $S_1(-3;6)$; $T_1(0;0)$; $U_1(-4;8)$; $y=-f(x)$.

31. $y=(x+2)^2$. **32.** $y=(x-5)^2$.

35. а) $D(f)=[-3;2]$; б) $E(f)=[-1;3]$; в) $[-3;1]$; г) $[1;2]$.

36. а) $D(f)=[-2;4]$; б) $E(f)=[-3;4]$; в) $[3;4]$; г) $[-2;3]$.

37. б) $A_1(-1;2)$; $B_1(0;4)$; $C_1(1;2)$; $D_1(3;0)$; $E_1(5;2)$; $y=2g(x)$.

38. б) $H_1(-2;-0{,}5)$; $K_1(-1;-1)$; $L_1(0;-0{,}5)$; $M_1(2;0)$; $N_1(4;-0{,}5)$; $y=0{,}5g(x)$.

39. б) $A_1(-8;0)$; $B_1(-4;3)$; $C_1(0;4)$; $D_1(4;3)$; $E_1(8;0)$; $y=f\left(\frac{x}{4}\right)$.

40. б) $P_1(-1;0)$; $Q_1(-0{,}5;3)$; $R_1(0;4)$; $S_1(0{,}5;-3)$; $T_1(2;0)$; $y=f(2x)$ або $y=f\left(\frac{x}{0{,}5}\right)$.

41. Наприклад, симетрично відобразити графік функції $y=x^2$ відносно осі Ox та паралельно перенести отриманий графік функції $y=-x^2$ на вектор $\overrightarrow{(0;2)}$.

42. Наприклад, симетрично відобразити графік функції $y=\sqrt{x}$ відносно осі Ox та паралельно перенести отриманий графік функції $y=-\sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{(3;0)}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

49. а) $f(x)=10x$; в) $f(x)=30x$; д) деформація з коефіцієнтом $k=3$ до осі Ox або деформація з коефіцієнтом $k=\frac{1}{3}$ до осі Oy.

50. а) $f(x)=0{,}35x$; в) $f(x)=0{,}175x$; д) деформація з коефіцієнтом $k=0{,}5$ до осі Ox або деформація з коефіцієнтом $k=2$ до осі Oy.

51. а) $D(y)=[-3;3]$, $E(y)=[-2;4]$; б) $D(y)=[-3;3]$, $E(y)=[-4;2]$;
в) $D(y)=[-3;3]$, $E(y)=[-4;8]$; г) $D(y)=[-3;3]$, $E(y)=[-1;2]$;
д) $D(y)=[-1{,}5;1{,}5]$, $E(y)=[-2;4]$; е) $D(y)=[-9;9]$, $E(y)=[-2;4]$;
є) $D(y)=[-3;3]$, $E(y)=[0;6]$; ж) $D(y)=[-5;1]$, $E(y)=[-2;4]$.

52. а) $D(y)=[-4;2]$, $E(y)=[-3;3]$; б) $D(y)=[-2;4]$, $E(y)=[-3;3]$;
в) $D(y)=[-2;4]$, $E(y)=[-1{,}5;1{,}5]$; г) $D(y)=[-2;4]$, $E(y)=[-9;9]$;
д) $D(y)=[-1;2]$, $E(y)=[-3;3]$; е) $D(y)=[-4;8]$, $E(y)=[-3;3]$;
є) $D(y)=[-2;4]$, $E(y)=[-4;2]$; ж) $D(y)=[-1;5]$, $E(y)=[-3;3]$.

53. а) Спадає на $(-\infty;-2]$, зростає на $[-2;+\infty)$; $E(y)=[-1;+\infty)$; б) спадає на $(-\infty;3]$, зростає на $[3;+\infty)$; $E(y)=[2;+\infty)$; в) зростає на $(-\infty;4]$; спадає на $[4;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;3]$; г) зростає на $(-\infty;-1]$; спадає на $[-1;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;-2]$.

54. а) Спадає на $(-\infty;1]$, зростає на $[1;+\infty)$; $E(y)=[5;+\infty)$; б) спадає на $(-\infty;-3]$, зростає на $[-3;+\infty)$; $E(y)=[-2;+\infty)$; в) зростає на $(-\infty;-2]$; спадає на $[-2;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;1]$; г) зростає на $(-\infty;5]$; спадає на $[5;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;2]$.

55. а) $E(y)=[-2;+\infty)$; б) $E(y)=[1;+\infty)$; в) $E(y)=(-\infty;-1]$;
г) $E(y)=[3;+\infty)$.

56. а) $E(y)=[2;+\infty)$; б) $E(y)=[-5;+\infty)$; в) $E(y)=(-\infty;3]$;
г) $E(y)=[-2;+\infty)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 4; б) $-3{,}5$. **2.** $3x+y-7=0$; $(0;7)$, $\left(\frac{7}{3};0\right)$. **4.** 17,5 %.

5. $40+20\sqrt{3}$ см.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 8. Квадратична функція, її графік і властивості

Тренажерний зал

1. а; г. **2.** а; в.

3. а) $a=2,\ b=-3,\ c=4$; б) $a=4,\ b=1,\ c=-2$; в) $a=1,\ b=-5,\ c=0$; г) $a=7,\ b=0,\ c=4$.

4. а) $a=1,\ b=-6,\ c=7$; б) $a=5,\ b=0,\ c=8$; в) $a=6,\ b=-1,\ c=4$; г) $a=-8,\ b=-6,\ c=0$.

5. а; г. **6.** б; в.

7. а) Угору; б) униз; в) угору; г) униз.

8. а) Униз; б) униз; в) угору; г) угору.

9. а) $(-3;6)$; б) $(0;-5)$; в) $(4;1)$. **10.** а) $(2;-4)$; б) $(-1;-5)$; в) $(3;5)$.

11. а) -2; 2; б) -2; 4; в) 3; 7. **12.** а) 2; 6; б) -3; 1; в) -4; -2.

13. а) Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;3)}$;

б) паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;-4)}$.

14. а) Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;2)}$;

б) паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(0;-1)}$.

15. а) Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(2;0)}$;

б) паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(-4;0)}$.

16. а) Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(-5;0)}$;

б) паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(3;0)}$.

19. а) Угору, $(3;-2)$; б) угору, $(-1;-1)$; в) униз, $(1;5)$.

20. а) Угору, $(1;-1)$; б) угору, $(1;0)$; в) униз, $(-1;4)$.

21. а) $(3;0)$, $(-1;0)$; б) $(2;0)$, $(-1;0)$; в) $(1;0)$; г) немає перетину.

22. а) $(3;0)$, $(-2;0)$; б) немає перетину; в) $(2;0)$, $(3;0)$; г) $(-3;0)$.

23. а) $(0;4)$; б) $(0;-1)$; в) $(0;9)$; г) $(0;25)$.

24. а) $(0;6)$; б) $(0;1)$; в) $(0;-6)$; г) $(0;11)$.

25. а) Деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=2$; б) деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=\frac{1}{2}$; в) деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=2$, симетрія відносно осі Ox; г) деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=\frac{1}{2}$, симетрія відносно осі Ox.

$y=x^2$	$(-3;9)$	$(-1;1)$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(3;9)$
а) $y=2x^2$	$(-3;18)$	$(-1;2)$	$(0;0)$	$(1;2)$	$(3;18)$
б) $y=\frac{1}{2}x^2$	$(-3;4,5)$	$(-1;0,5)$	$(0;0)$	$(1;0,5)$	$(3;4,5)$
в) $y=-2x^2$	$(-3;-18)$	$(-1;-2)$	$(0;0)$	$(1;-2)$	$(3;-18)$
г) $y=-\frac{1}{2}x^2$	$(-3;-4,5)$	$(-1;-0,5)$	$(0;0)$	$(1;-0,5)$	$(3;-4,5)$

26. а) Деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=3$; б) деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=\frac{1}{3}$; в) деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=3$, симетрія відносно осі Ox; г) деформація до осі Ox із коефіцієнтом $k=\frac{1}{3}$, симетрія відносно осі Ox.

$y=x^2$	$(-2;4)$	$(-1;1)$	$(0;0)$	$(1;1)$	$(2;4)$
а) $y=3x^2$	$(-2;12)$	$(-1;3)$	$(0;0)$	$(1;3)$	$(2;12)$
б) $y=\frac{1}{3}x^2$	$\left(-2;\frac{4}{3}\right)$	$\left(-1;\frac{1}{3}\right)$	$(0;0)$	$\left(1;\frac{1}{3}\right)$	$\left(2;\frac{4}{3}\right)$
в) $y=-3x^2$	$(-2;-12)$	$(-1;-3)$	$(0;0)$	$(1;-3)$	$(2;-12)$
г) $y=-\frac{1}{3}x^2$	$\left(-2;-\frac{4}{3}\right)$	$\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$	$(0;0)$	$\left(1;-\frac{1}{3}\right)$	$\left(2;-\frac{4}{3}\right)$

27. а) $(-\infty;+\infty)$; б) $[-3;+\infty)$; в) $(-2;+\infty)$; г) $(-\infty;-2)$.

28. а) $(-\infty;+\infty)$; б) $[2;+\infty)$; в) $(-1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1)$.

29. а) $(4;-15)$; б) $(-1,5;-2,5)$; в) $(1;6)$; г) $(-2;8)$.

30. а) $(-5;-26)$; б) $(3;-25)$; в) $(-1,5;7,75)$; г) $(-1;-1)$.

31. а) $a>0$; б) $(4;1)$; в) 3; 5; г) спадає на $(-\infty;4]$, зростає на $[4;+\infty)$; д) функція додатна на кожному з проміжків $(-\infty;3)$ і $(5;+\infty)$, функція від'ємна на проміжку $(3;5)$.

32. а) $a<0$; б) $(2;2)$; в) 1; 3; г) зростає на $(-\infty;2]$, спадає на $[2;+\infty)$; д) функція додатна на $(1;3)$, функція від'ємна на кожному з проміжків $(-\infty;1)$ і $(3;+\infty)$.

33. а) $(-1;-4)$; б) вітки спрямовані вгору; в) -5 і -3.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

34. а) $y=(x-2)^2-9$; б) $(2;-9)$; в) вітки спрямовані вгору; г) -1 і 5.

35. Деформація з коефіцієнтом $k=2$ до осі Ox та паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(3;5)}$.

36. Деформація з коефіцієнтом $k=\frac{1}{2}$ до осі Ox та паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(-4;-2)}$.

38. а) $x=1$; б) $x=-2$.

39. $b=6$; $c=11$. **40.** $a=-0,4$; $c=-12$.

41. а) Спадає на $(-\infty;2]$, зростає на $[2;+\infty)$;

б) зростає на $(-\infty;-0,5]$, спадає на $[0,5;+\infty)$.

42. а) Зростає на $(-\infty;1]$, спадає на $[1;+\infty)$;

б) спадає на $(-\infty;-4]$, зростає на $[-4;+\infty)$.

43. $a\in[-5;+\infty)$. **44.** $b\in(-\infty;4]$.

45. а) 1 і -3, функція додатна на кожному з проміжків $(-\infty;-3)$ і $(1;+\infty)$, функція від'ємна на $(-3;1)$;

б) 6 і -1, функція додатна на $(-1;6)$, функція від'ємна на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(6;+\infty)$.

46. а) 1 і -2, функція додатна на $(-2;1)$, функція від'ємна на кожному з проміжків $(-\infty;-2)$ і $(1;+\infty)$;

б) 2 і -4; функція додатна на кожному з проміжків $(-\infty;-4)$ і $(2;+\infty)$, функція від'ємна на $(-4;2)$.

51. Максимальна висота $\approx 7,1$ м, м'яч впаде на землю через $\approx 2,1$ с, графік — частина параболи $h=-4,9t^2+9t+3$ для значень $0\leqslant t\leqslant 2,1$.

52. $h=-4,9t^2+10t+2$, максимальна висота $\approx 7,1$ м, м'яч впаде на землю через $\approx 2,7$ с, графік — частина параболи $h=-4,9t^2+10t+2$ для значень $0\leqslant t\leqslant 2,7$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 4. **2.** 48π см^2. **4.** $Mo=1$, $Me=1,5$. **5.** ЦЕП.

§ 9. Квадратні нерівності

Тренажерний зал

1. $x^2\geqslant 15$. **2.** $x^2>20$. **3.** а; в. **4.** б; г. **5.** а; б; г. **6.** а; в; г. **7.** в. **8.** б.

11. а) $(2;6)$; б) $(-\infty;-2)$; $(2;+\infty)$; в) $(-\infty;-4)$; $(-2;+\infty)$.

12. а) $(-3;1)$; б) $(2;4)$; в) $(-\infty;-4)$; $(0;+\infty)$.

15. а) 2, 3; б) -2, 2; в) -1, 3. **16.** а) 2, 5; б) -3, 3; в) -3, 1.

17. а) $(-1;4)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) такого проміжку не існує, бо графік не лежить вище осі абсцис.

18. а) $(-\infty;-1)$; $(3;+\infty)$; б) такого проміжку не існує, бо графік не лежить нижче осі абсцис; в) $(-\infty;+\infty)$.

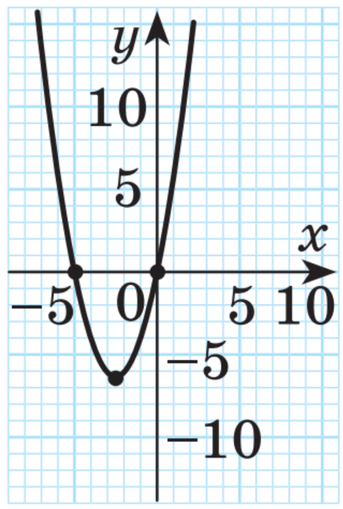
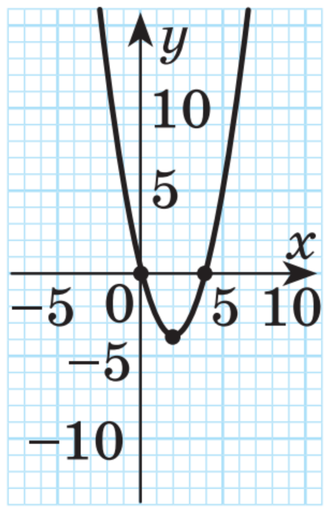
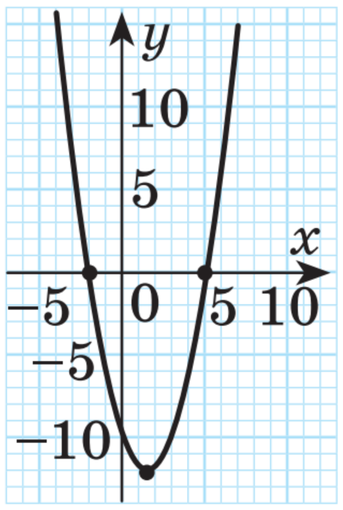
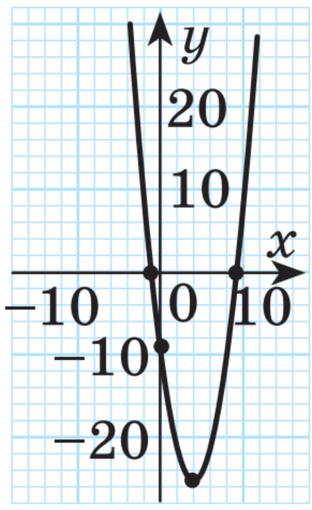
19. а) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$; б) $(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$; в) $(-5;5)$; г) $[-5;5]$.

20. а) $(-2;2)$; б) $[-2;2]$; в) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; г) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

21. а) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; б) $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; в) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; г) $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

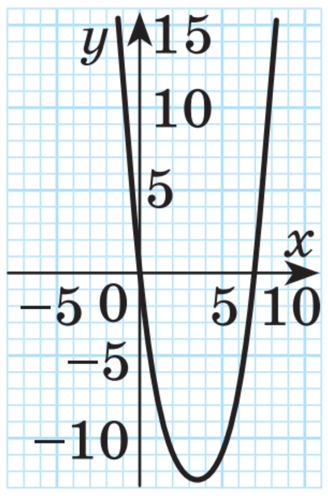
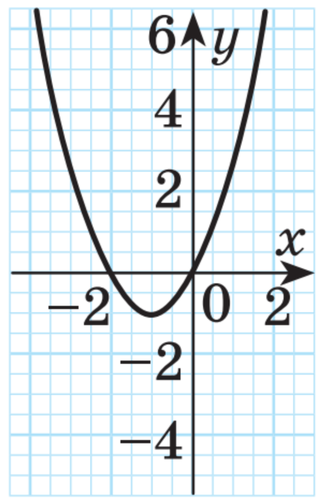
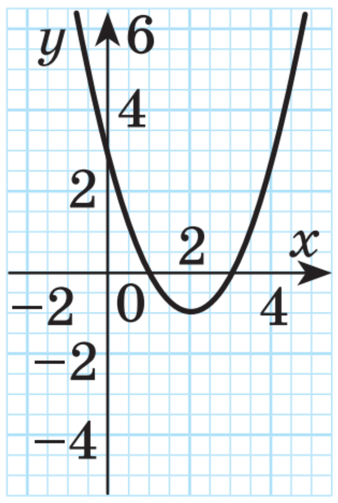
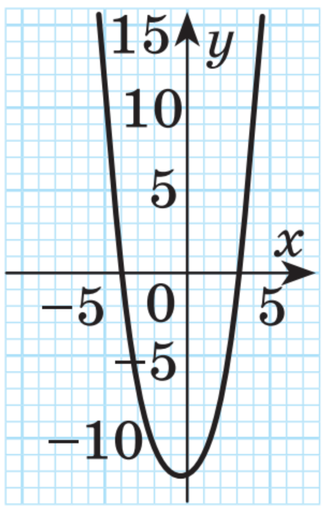
22. а) $\left(\frac{2}{3};4\right)$; б) $\left[\frac{2}{3};4\right]$; в) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(4;+\infty)$; г) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[4;+\infty)$.

23.

	а) $x^2+5x>0$	б) $x^2-4x\leqslant 0$	в) $x^2-3x-10<0$	г) $x^2-8x-9\geqslant 0$
Нулі квадратичної функції, що відповідає квадратній нерівності	$x_1=0$, $x_2=-5$	$x_1=0$, $x_2=4$	$x_1=-2$, $x_2=5$	$x_1=-1$, $x_2=9$
Ескіз графіка функції, що відповідає квадратній нерівності				
Шуканий проміжок (проміжки)	$(-\infty;-5)$ і $(0;+\infty)$	$[0;4]$	$(-2;5)$	$(-\infty;-1]$ і $[9;+\infty)$

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

24.

	а) $x^2-7x\leqslant 0$	б) $x^2+2x<0$	в) $x^2-4x+3>0$	г) $x^2+x-12\geqslant 0$
Нулі квадратичної функції, що відповідає квадратній нерівності	$x_1=0$, $x_2=7$	$x_1=0$, $x_2=-2$	$x_1=1$, $x_2=3$	$x_1=-4$, $x_2=3$
Ескіз графіка функції, що відповідає квадратній нерівності				
Шуканий проміжок (проміжки)	$[0;7]$	$(-2;0)$	$(-\infty;1)$ і $(3;+\infty)$	$(-\infty;-4]$ і $[3;+\infty)$

25. а) $(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$; б) $(-6;6)$; в) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$.

26. а) $(-\infty;-7]\cup[7;+\infty)$; б) $(0;3)$; в) $(0;4)$; г) $\varnothing$.

27. а) $(-\infty;-7)\cup(1;+\infty)$; б) $(-4;7)$; в) $[-4;-1]$; г) $[-2;4,5]$.

28. а) $(-\infty;2]\cup[8;+\infty)$; б) $[-1;7]$; в) $\varnothing$; г) $(-2;7)$.

29. а) $(-1;3)$; б) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{2};6\right]$; г) $(-\infty;-4]\cup\left[-\frac{7}{2};+\infty\right)$.

30. а) $(-1;1)$; б) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; в) $[1,25;3]$; г) $(-\infty;-1]\cup[-0,75;+\infty)$.

31. а) $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$; б) $[-4;5]$; в) $(0;3)$; г) $\varnothing$.

32. а) $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$; б) $(-7;2)$; в) $(-\infty;0)\cup(0,5;+\infty)$; г) $[0;6]$.

33. а) $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$; б) $[-1;1]$; в) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$.

34. а) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; б) $[-7;7]$; в) $[-5;0]$; г) $(-\infty;+\infty)$.

35. а) 0; б) 1. **36.** а) -13; б) 0. **37.** $[-4;-1]$. **38.** $(-\infty;-8)\cup(1;+\infty)$.

39. а) $(-\infty;-1)\cup(2,5;+\infty)$; б) $(-\infty;-0,8)\cup(1;+\infty)$; в) $\varnothing$; г) $\{2\}$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

40. а) $[-3;1]$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $\{1\}$; г) $(-\infty;-0,5)\cup(3;+\infty)$.

41. а) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$; б) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\{2\}$.

42. а) $(-12,5;-3)$; б) $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$; в) $(-0,5;3)$; г) $\varnothing$.

43. а) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$; б) $[-1;4]$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\{3\}$.

44. а) $[-3;1,5]$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $\{-5\}$; г) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$.

45. а) $(-\infty;4]\cup[10;+\infty)$; б) $(4;10)$; в) $(-\infty;4)\cup(10;+\infty)$.

46. а) $(-\infty;-0,25]\cup[1;+\infty)$; б) $(-0,25;1)$; в) $(-\infty;-0,25)\cup(1;+\infty)$.

47. $[-4;4]$. **48.** $[-1;1]$.

49. Через 2 год. **50.** Не більше ніж $2\frac{9}{41}$ години.

51. а) Якщо $a<0$, то всі $x\in(-\infty;2a)\cup(0;+\infty)$; якщо $a=0$, то всі $x\neq 0$; якщо $a>0$, то всі $x\in(-\infty;0)\cup(2a;+\infty)$;

б) якщо $a<2$, то всі $x\in[a;2]$; якщо $a=2$, то $x=2$; якщо $a>2$, то всі $x\in[2;a]$.

52. а) Якщо $a<0$, то всі $x\in(-\infty;0]\cup\left[-\frac{a}{2};+\infty\right)$; якщо $a=0$, то всі $x\in(-\infty;+\infty)$; якщо $a>0$, то всі $x\in\left(-\infty;-\frac{a}{2}\right]\cup[0;+\infty)$;

б) якщо $a<1$, то всі $x\in(a+1;2)$; якщо $a=1$, то розв'язків немає; якщо $a>1$, то всі $x\in(2;a+1)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$. **2.** Не перетинаються. **3.** 11,2 см. **4.** 34 роки.

5. а) ОРТ; б) СЛІД; в) ПІСТ.

§ 10. Дробові раціональні рівняння та нерівності

Тренажерний зал

1. а. **2.** в. **3.** б. **4.** а. **5.** б. **6.** в. **7.** $\frac{27}{x}>12$. **8.** $\frac{126}{x}\leqslant 90$.

9. б; д; е. **10.** г; е. **11.** а; д; е. **12.** а; б; е. **13.** б. **14.** г. **15.** б. **16.** в.

17. а) 2; б) -2; в) 1; г) немає розв'язків.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

18. а) 1; б) -1; в) 5; г) немає розв'язків.
19. а) 3; б) -4; в) 4; г) 3. **20.** а) 4; б) 1; в) 6; г) -1.
21. 2 хв. **22.** 30 км/год.

23. а) $x+12$ км/год; б) $\frac{36}{x}$ год; в) $\frac{36}{x+12}$ год; г) $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+12}$;

$\frac{36}{x}-\frac{36}{x+12}=4$.

24. а) $x+10$ км/год; б) $\frac{28}{x}$ год; в) $\frac{28}{x+10}$ год; г) $\frac{28}{x}-\frac{28}{x+10}$;

$\frac{28}{x}-\frac{28}{x+10}=5$.

25. а) $(-\infty;5)$; б) $(-3;+\infty)$; в) $(-\infty;2)$; г) $(-1;+\infty)$.
26. а) $(-\infty;-7)$; б) $(4;+\infty)$; в) $(-\infty;-2)$; г) $(5;+\infty)$.
27. а) $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$; б) $(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$; в) $(-\infty;-3)\cup[0;+\infty)$; г) $[0;16)$.
28. а) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; б) $(0;8)$; в) $(-\infty;0]\cup(10;+\infty)$; г) $(-9;0]$.

29. $\frac{300}{x}\leqslant 4$; розв'язки нерівності $(-\infty;0)\cup[75;+\infty)$; значення швидкості руху можуть бути тільки із проміжку $[75;+\infty)$, бо значення швидкості руху не може бути виражено від'ємним числом.

30. $\frac{400}{x}\leqslant 80$; $(-\infty;0)\cup[5;+\infty)$; значення часу можуть бути тільки із проміжку $[5;+\infty)$, бо значення часу не може бути виражено від'ємним числом.

31. а) $-\frac{1}{14}$; б) 5; в) $-1{,}6$; г) $\frac{1}{7}$. **32.** а) -1; б) 6; в) -1; г) 1,25.

33. а) 0,4; б) 3; в) 7; -6; г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$. **34.** а) 0,2; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; 9; г) $\frac{1}{2}$; 2.

35. 4 км/год; 16 км/год. **36.** 4 км/год; 14 км/год.
37. 10 км/год. **38.** 60 км/год. **39.** 2 км/год. **40.** 16 км/год.
41. Перша бригада — за 20 днів, друга — за 30 днів.
42. Перший екскаватор — за 64 дні, другий — за 192 дні.

43. а) $(-\infty;-2)$ і $(3;+\infty)$; б) $\left(\frac{1}{2};2\right)$; в) $(-\infty;-3)$ і $[1;+\infty)$; г) $\left[2;\frac{5}{2}\right)$.

44. а) $(-\infty;1)$ і $(8;+\infty)$; б) $(4;8)$; в) $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$ і $(10;+\infty)$; г) $[-2;9)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

45. а) $[-2;1)\cup(1;+\infty)$; б) $(1;+\infty)$; в) $(-\infty;-2]\cup(1;+\infty)$.

46. а) $[4;+\infty)$; б) $(-5;+\infty)$; в) $(-\infty;-5)\cup[4;+\infty)$.

47. а) $(-2;0,5]$; б) $(-\infty;-4]\cup(5;+\infty)$; в) $[0,25;4)$; г) $(-\infty;-2,5)\cup[3;+\infty)$.

48. а) $\left(-2;\frac{1}{3}\right]$; б) $(-\infty;-6]\cup(8;+\infty)$; в) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; г) $(-\infty;-5)\cup[2;+\infty)$.

49. Менш ніж 73,2 км/год. **50.** Понад 78,75 км/год.

51. За 8 днів. **52.** 40 деталей.

53. Перший —за 10 год, другий — за 15 год. *Вказівка.* Прийміть відстань між пунктами за одиницю відстані. **54.** 18 км/год.

55. Перший — за 20 год, другий — за 25 год. **56.** 21 день; 28 днів.

57. 25 кг. **58.** 25 кг.

59. а) $(-\infty;-2)\cup(0;4)$; б) $[-4;-2,5)\cup[4;+\infty)$; в) $(-\infty;-1)\cup(0;1)$; г) $[0;2)\cup[4;+\infty)$. **60.** а) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; б) $(-\infty;-3)\cup[1;3)$; в) $[-5;0)\cup[5;+\infty)$; г) $(-4;0)\cup(1;+\infty)$.

61. а) $(-0,5;0)\cup(0,5;+\infty)$; б) $(-\infty;0]\cup(2;3]$; в) $(-\infty;-3]\cup(1;3]$.

62. а) $[-2;0)\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup(1;3)$; в) $(-3;-1]\cup[1;+\infty)$.

63. а) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; б) $(-2;0)\cup(0;2)$; в) $(0;1]\cup[3;+\infty)$; г) $(-\infty;0)$.

64. а) $(-1;0)\cup(1;+\infty)$; б) $(-\infty;-3)\cup(0;3)$; в) $[-2,5;0)\cup[6;+\infty)$; г) $(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

65. а) $(-2;0,5]$; б) $(-\infty;-4]\cup(5;+\infty)$; в) $[0,25;4)$; г) $(-\infty;-2,5)\cup[3;+\infty)$.

66. а) $\left(-2;\frac{1}{3}\right]$; б) $(-\infty;-6]\cup(8;+\infty)$; в) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; г) $(-\infty;-5)\cup[2;+\infty)$.

67. а) $(-3;-2]\cup[2;+\infty)$; б) $(-3;0]\cup(3;+\infty)$; в) $[0;2]\cup(5;+\infty)$; г) $(-\infty;0)\cup[3;5)$.

68. а) $[-5;0)\cup(6;+\infty)$; б) $(-\infty;-5]\cup[5;8)$; в) $(-2;0]\cup(2;+\infty)$; г) $(-\infty;-7]\cup[0;6)$.

69. а) $(2;3)\cup\{1\}$; б) $(-5;-2)\cup(-2;5)$.

70. а) $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$; б) $[1;3)\cup(3;4]$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $\frac{2}{x+1}$; б) $\frac{2x+1}{3x-1}$. **2.** Перетинаються. Точки перетину $A(-1;3)$, $B(2;0)$. **3.** Блокнот коштує 50 грн, ручка — 20 грн. **4.** а) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$. **5.** Наприклад, $7082+863=7945$.

§ 11. Системи нелінійних рівнянь і нерівностей

Тренажерний зал

1. $\begin{cases} xy=3,6, \\ 2(x+y)=8,4. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} xy=42, \\ 2(x+y)=26. \end{cases}$ **3.** в. **4.** в.

5. а) $y=12-3x$; б) $y=-5-7x$; в) $y=-2x-3$; г) $y=4x+9$.

6. а) $y=6x-2$; б) $y=7-3x$; в) $y=2x-7$; г) $y=8x+11$.

7. а) $x=3+4y$; б) $x=2-6y$; в) $x=-5y-1$; г) $x=4y$.

8. а) $x=4-3y$; б) $x=-5y-6$; в) $x=-7y$; г) $x=-8y-9$.

9. а) $3x^2+5x-8=0$; б) $-6y^2+7y-2=0$; в) $x^2+6x-8=0$.

10. а) $y^2+8y+8=0$; б) $3y^2+8y-6=0$; в) $4x^2-3x+12=0$.

11. а) $(-4;4)$; б) $(3;4)$; в) $(81;9)$. **12.** а) $(-3;5)$; б) $(-8;-2)$; в) $(4;-12)$.

13. г; д. **14.** д; е. **15.** б; г; д; е. **16.** а; е.

17. $\begin{cases} x+y=14, \\ x^2+y^2=100. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2+y^2=169. \end{cases}$

19. а) $x=8-5y$; б) $y=-4x-7$; в) $x=3y$; г) $y=-5-2x$.

20. а) $y=-7-3x$; б) $y=9+5x$; в) $x=-5y$; г) $x=-1-6y$.

21. а) $(4;-1)$; б) $(7;3)$; в) $(13;3)$. **22.** а) $(4;2)$; б) $(-3;-13)$; в) $(-5;2)$.

23. а) $(-3;-2)$, $(-3;2)$; б) $(-3;-7)$, $(3;-7)$; в) $\left(\frac{5}{48};6\right)$.

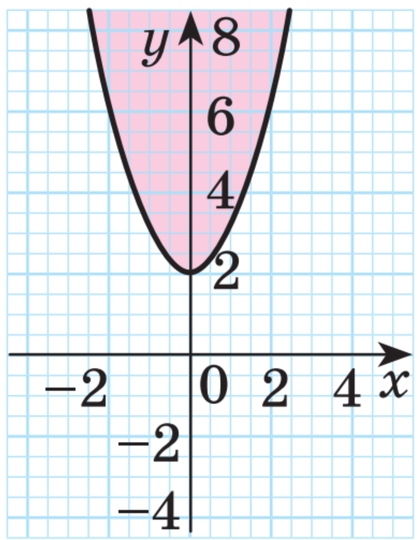
24. а) $(-4;-1)$; б) $(-5;1)$, $(-5;-1)$; в) $(-1;8)$, $(1;8)$.

25. а) $(-1;1)$, $(1;1)$; б) $(0;0)$, $(1;1)$; в) $(-2;4)$, $(1;1)$.

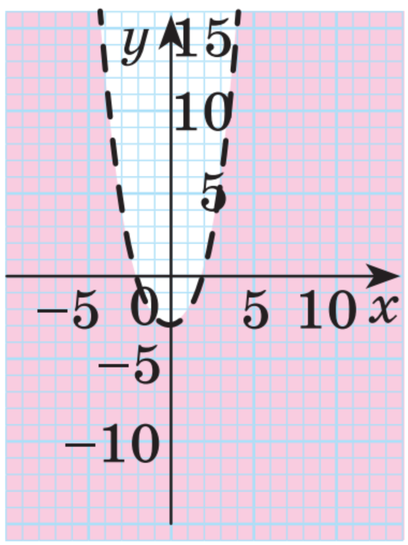
26. а) $(-2;4)$, $(2;4)$; б) $(0;0)$, $(-1;1)$; в) $(-1;1)$, $(2;4)$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

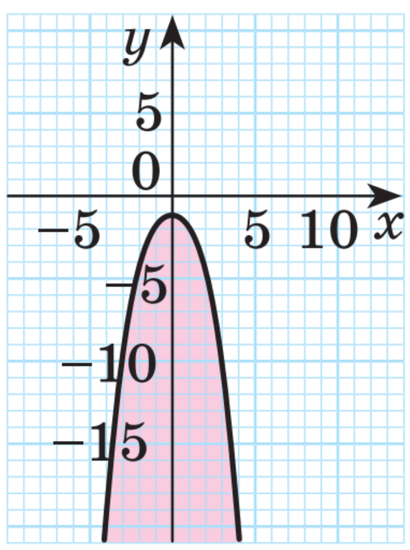
27.



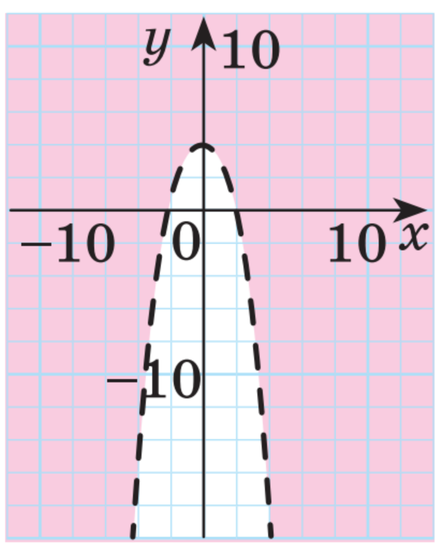
а



б

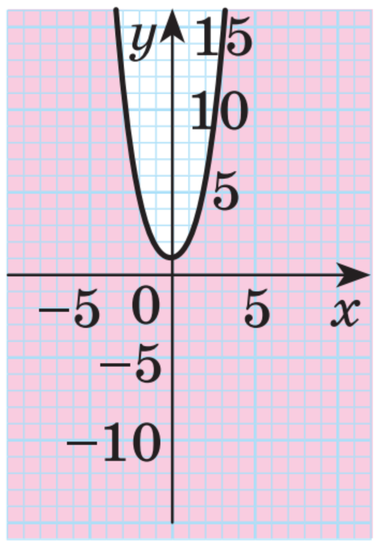


в

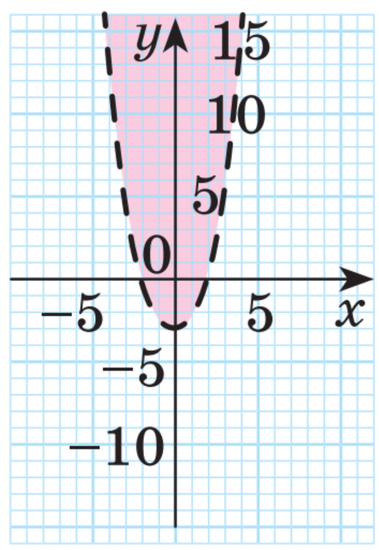


г

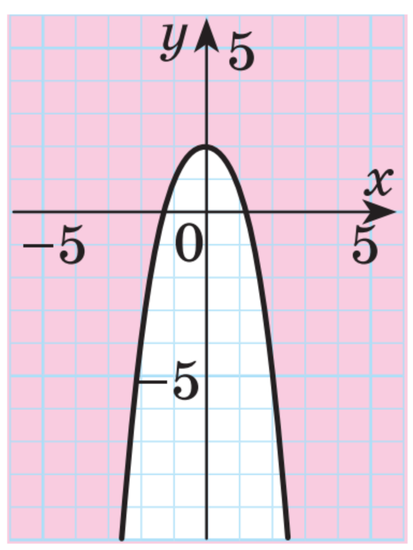
28.



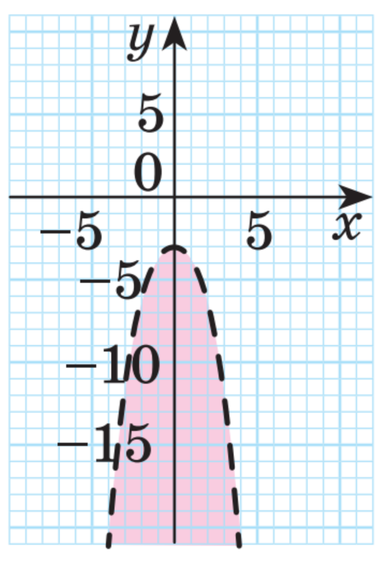
а



б



в



г

29. а) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; б) $(-\infty;1]$; в) $\left(-\frac{1}{2};0\right]\cup[1;+\infty)$.

30. а) $(-2;2)$; б) $(-\infty;2]$; в) $(-\infty;0]\cup[7;3)$.

31. а) $(3;5)$, $(-2;0)$; б) $(-10;-6)$, $(-1;3)$; в) $(3;7)$, $(7;3)$; г) $(1;0)$, $(-2;-3)$.

32. а) $(-5;25)$, $(3;9)$; б) $(2;3)$, $(-5;-4)$; в) $(5;3)$, $(-3;-5)$; г) $(0;-7)$, $(3;2)$.

33. а) $(-4;-2)$, $(2;4)$; б) $(-4;-2)$, $(-2;-4)$, $(2;4)$.

34. а) $(-5;0)$, $(-3;4)$; б) $(-3;-4)$, $(0;5)$, $(3;-4)$.

35. а) $\left(4;\sqrt{3}\right)$, $\left(4;-\sqrt{3}\right)$; б) $(1;-3)$, $(-1;-3)$.

36. а) $(4;2{,}8)$, $(-4;2{,}8)$; б) $(-6;-2)$, $(0;2)$.

37. 35 м і 20 м. **38.** 7 м і 22 м.

39. а) $(-5;2]$; б) $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$; в) $(-\infty;-3]\cup[1;4)$.

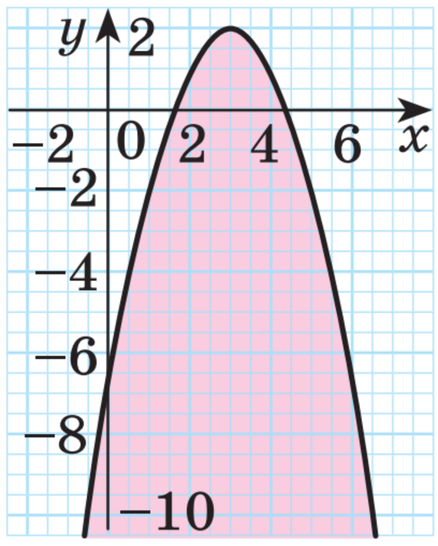
40. а) $(8;+\infty)$; б) $(0;3)$; в) $(-\infty;-2]\cup[1;2]$.

41. а) $[-1;0]\cup[6;+\infty)$; б) $[-5;4]$; в) $(-3;2]\cup[2;+\infty)$.

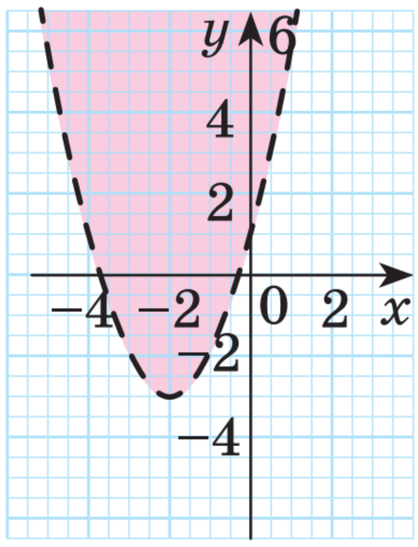
42. а) $[0;2]$; б) $[-5;-4)\cup(4;+\infty)$; в) $[1;6]$.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

43.

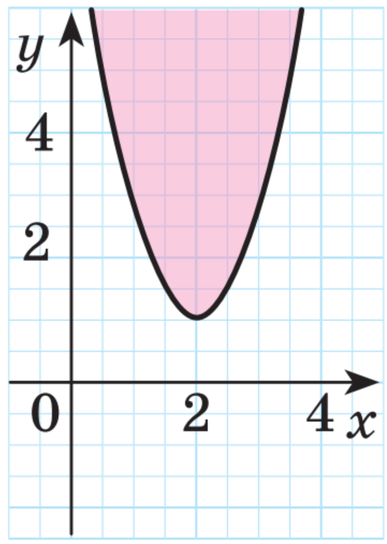


а

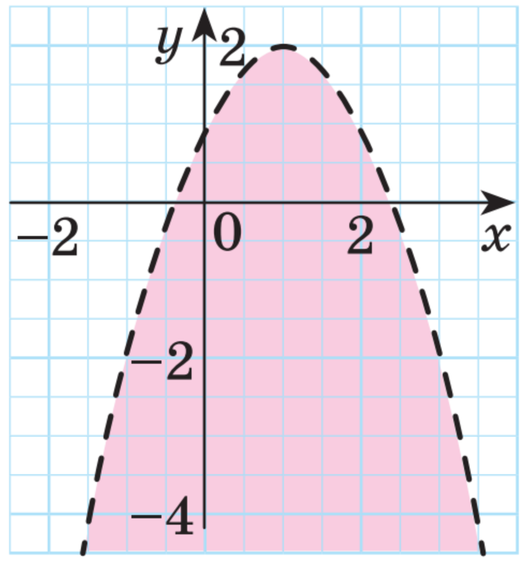


б

44.

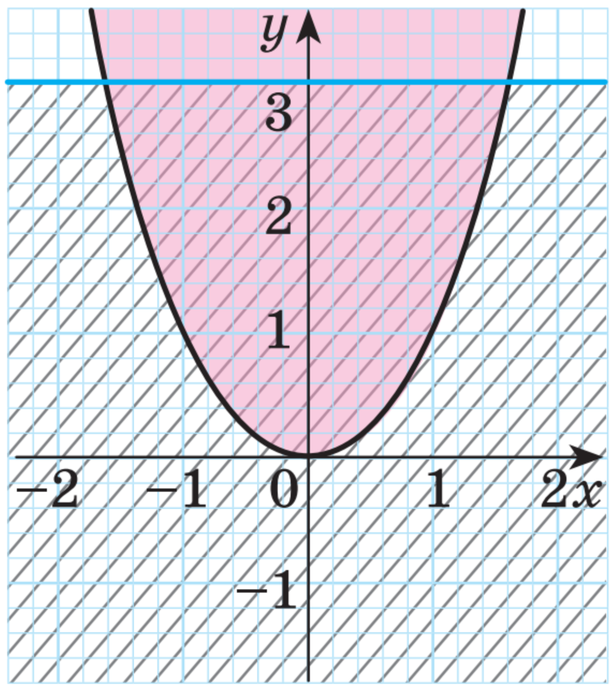


а

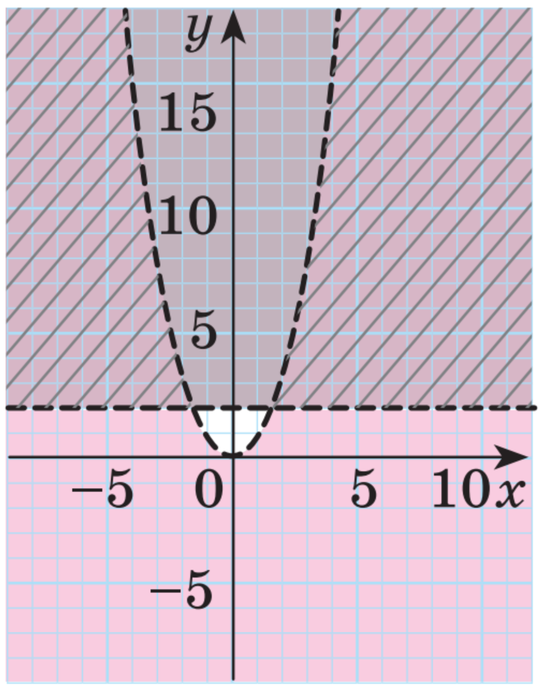


б

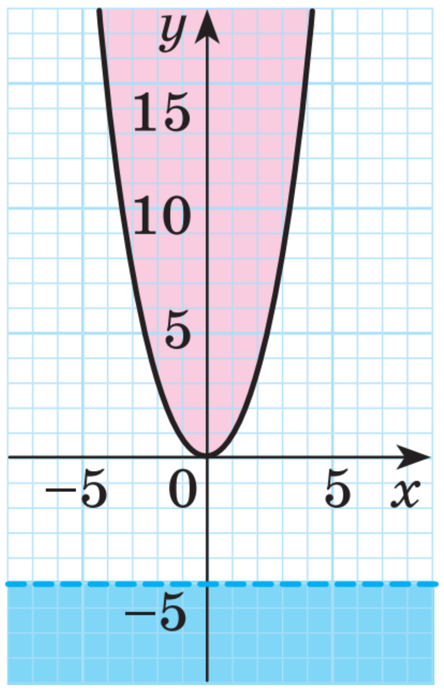
45.



а

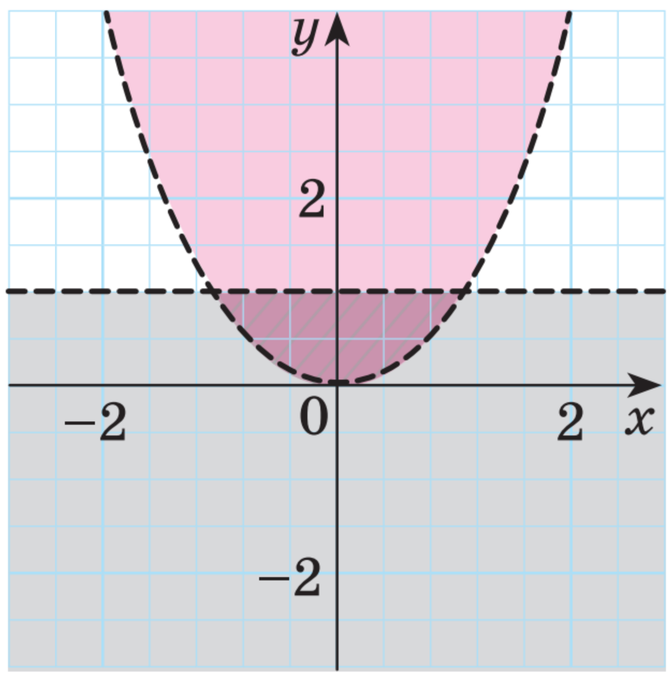


б

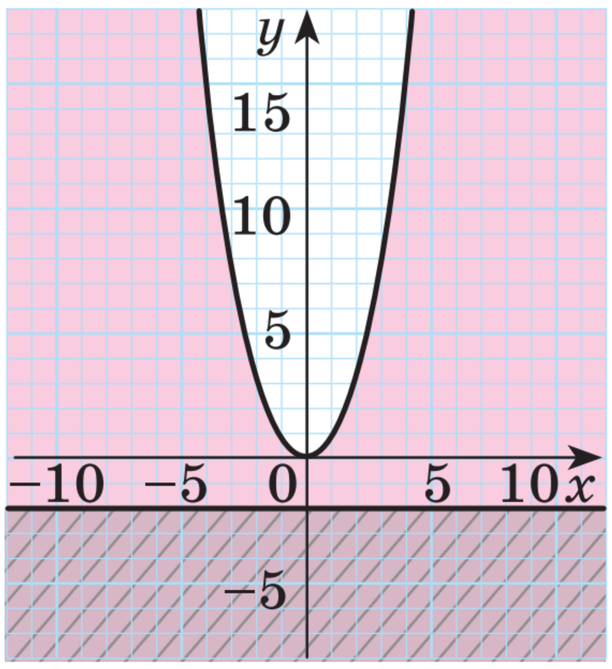


в

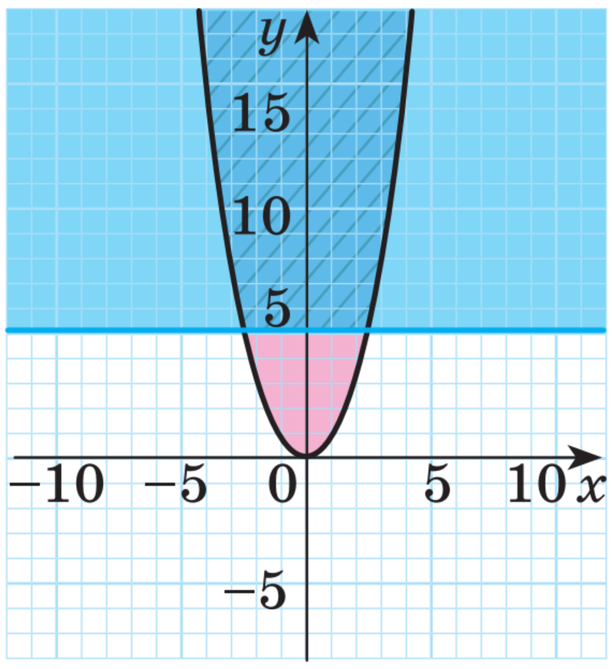
46.



а



б



в

47. а) $(7;2)$; б) $(3;4)$, $(4;3)$; в) $(2;1)$; г) $(-2;4)$, $(4;-2)$.

48. а) $(7;2)$; б) $(1;3)$, $(2{,}5;1{,}5)$; в) $(2;5)$, $(5;2)$; г) $(1;4)$, $(4;1)$.

49. 30 м; 20 м. **50.** 20 рядів; 25 стільців.

51. 18 км/год; 2 км/год. **52.** 50 м/хв; 60 м/хв.

53. 20 год; 30 год. **54.** 45 хв; 36 хв.

55. а) 1) $a > 0{,}75$; 2) $a = 0{,}75$; 3) $a < 0{,}75$; б) 1) $-4 < a < 4$;
2) $a = -4$; $a = 4$; 3) $a < -4$ або $a > 4$.

56. а) 1) $a = 3{,}25$; 2) $a < 3{,}25$; 3) $a > 3{,}25$; б) 1) $a = -6$; $a = 6$;

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

2) $-6 < a < 6$; 3) $a < -6$ або $a > 6$.

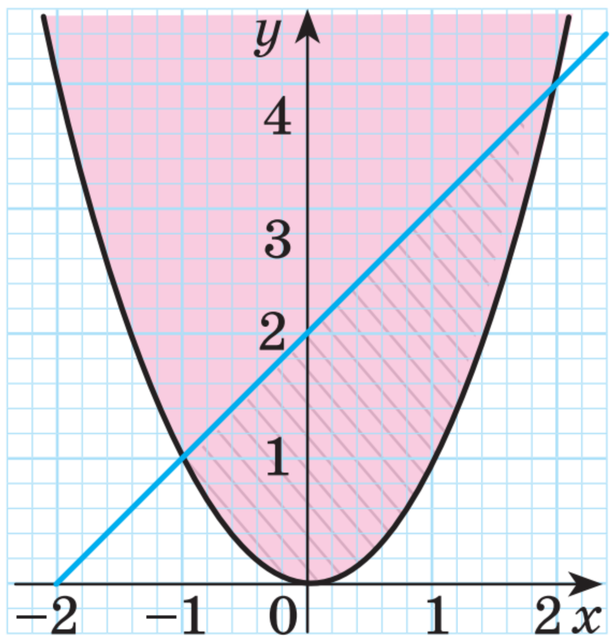
57. а) $[1; 2) \cup (3; 6]$; б) $[-7; -4) \cup (3; 5)$; в) $(0; 2)$; г) $(-\infty; -4] \cup (6; +\infty)$.

58. а) $[1; 2)$; б) $(-\infty; -4) \cup [6; +\infty)$; в) $(-1; 0) \cup (7; 9)$; г) $(1; 6]$.

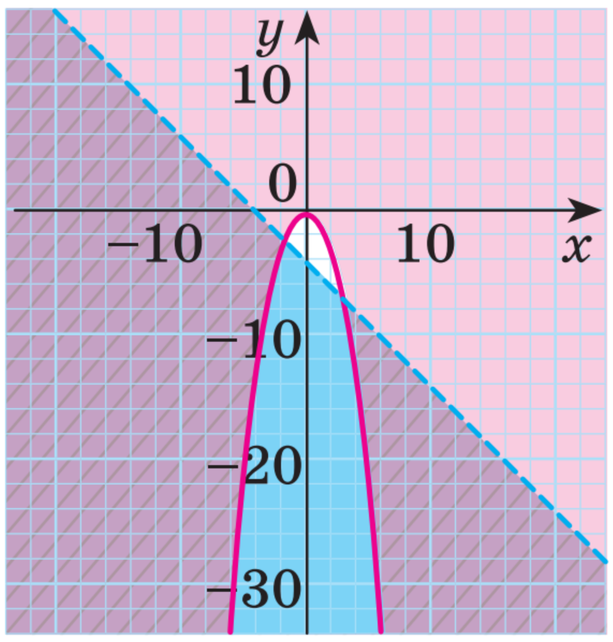
59. а) $[3; 5)$; б) $[-6; 0] \cup [2{,}5; 6]$; в) $(-5; 0] \cup [2; 5)$.

60. а) $[-2; 0) \cup [2; 6]$; б) $[5; 7]$; в) $[-7; 0) \cup (4; 7]$.

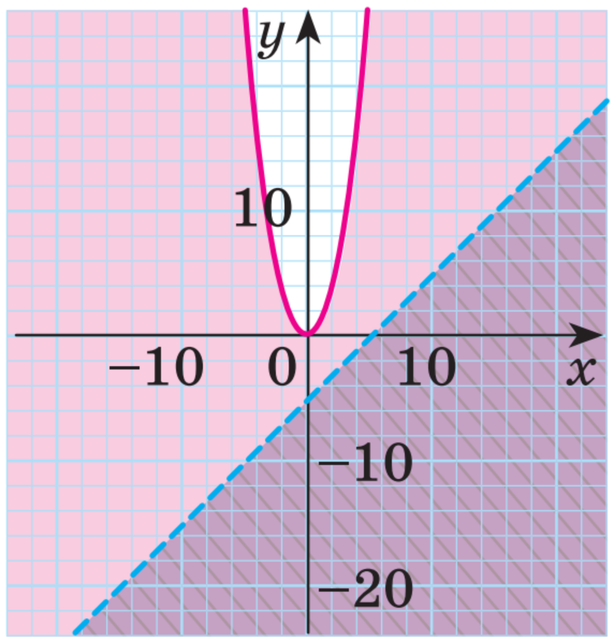
61.



а

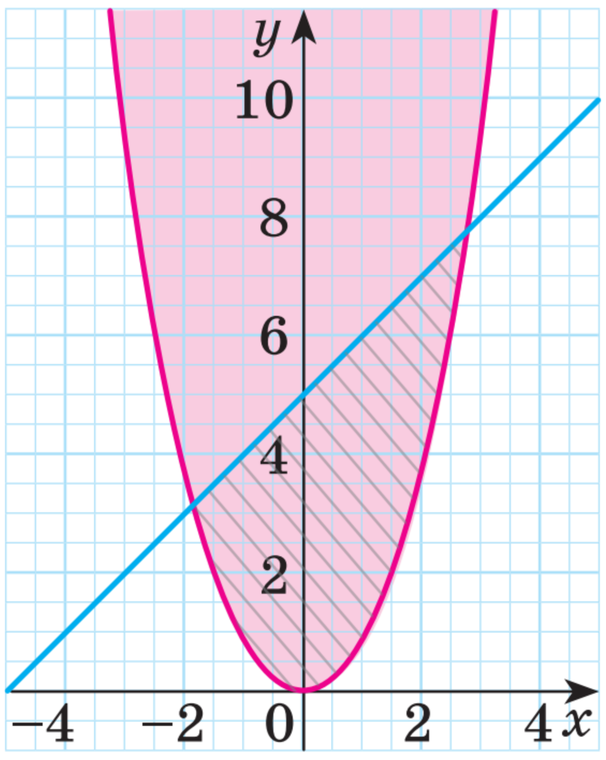


б

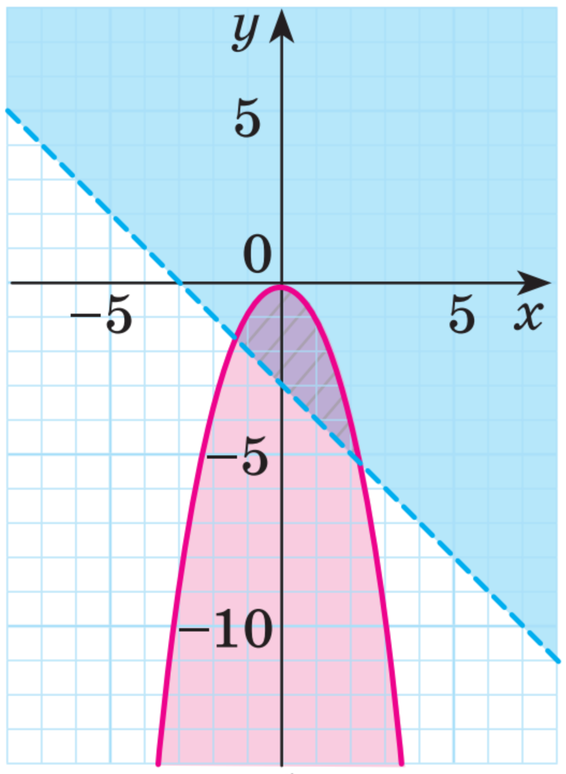


в

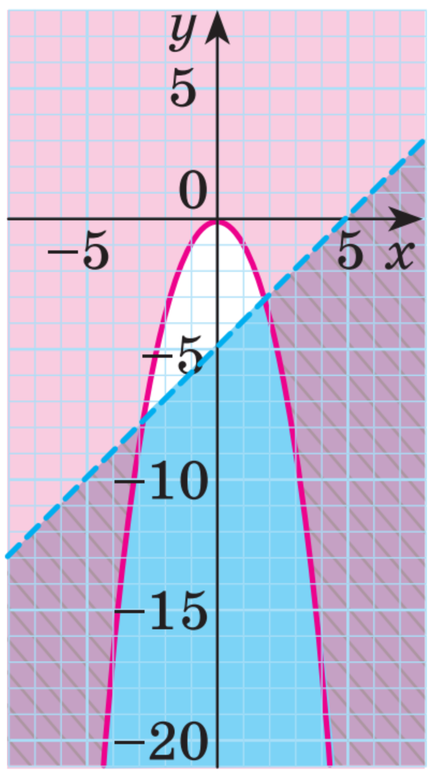
62.



а

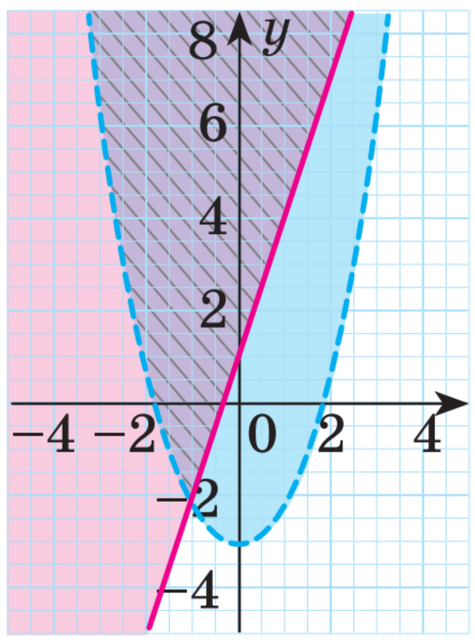


б

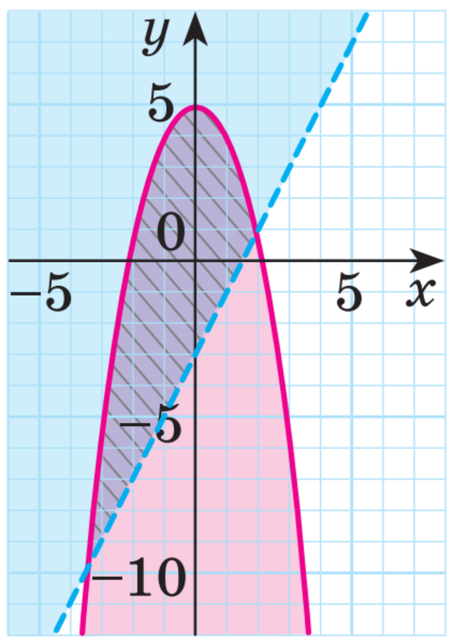


в

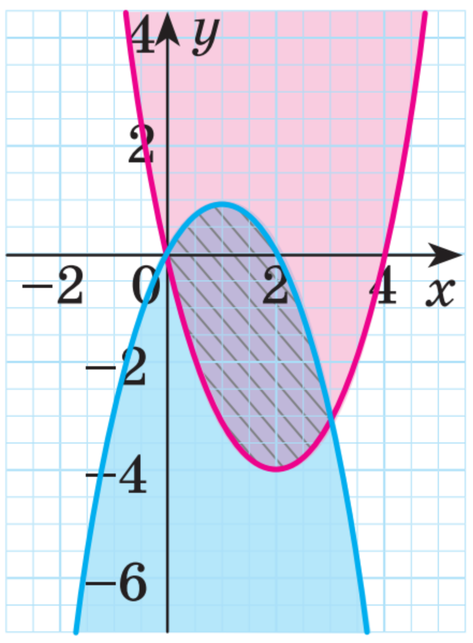
63.



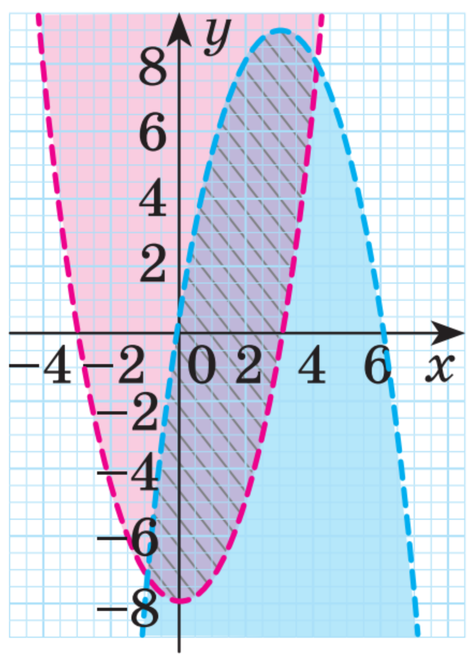
а



б



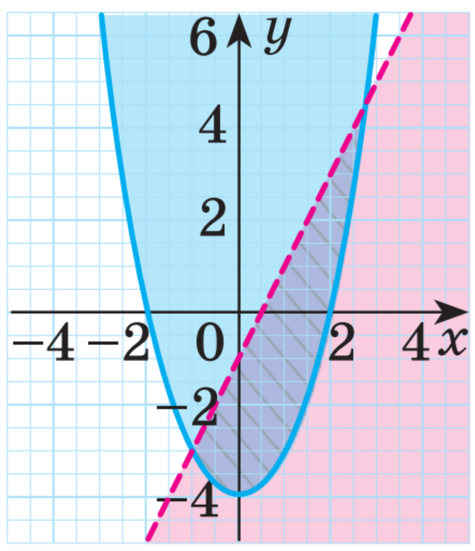
в



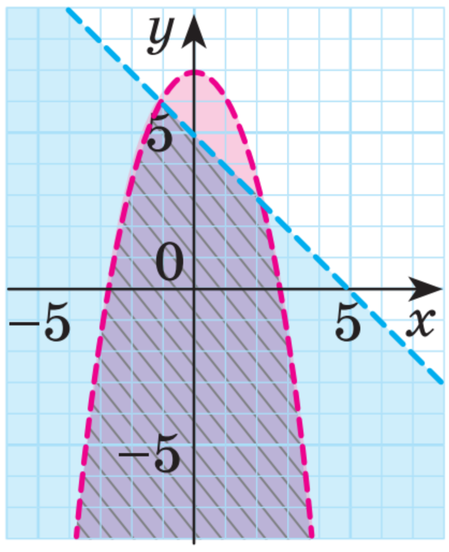
г

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

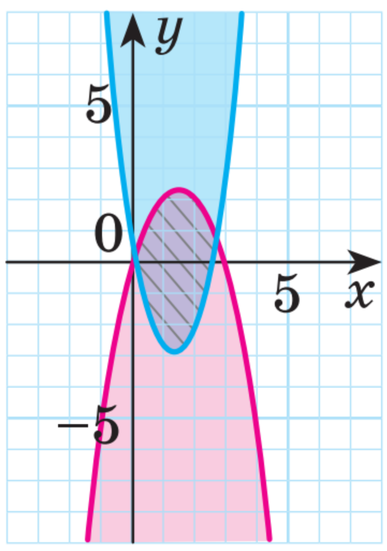
64.



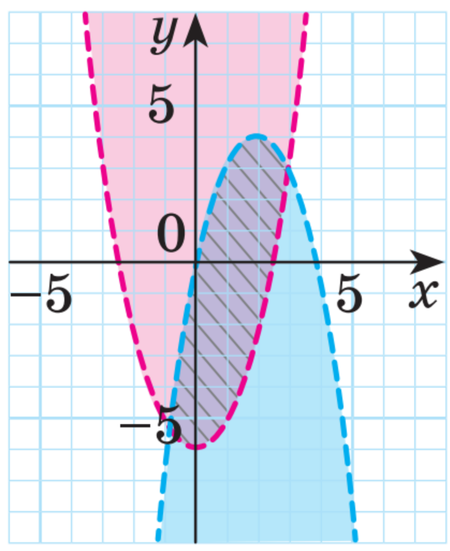
а



б



в



г

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

2. а) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; б) $(x-5)^2+(y+1)^2=4$; в) $(x-1)^2+(y-9)^2=36$.

4. а) $\vec{x}=3{,}04$; б) $Mo=2$; в) $Me=3$; г) $R=7$.

5. Так, наприклад, $(20+39-9)\cdot 2=100$.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 3

1. В. **2.** Г. **3.** А. **4.** Д. **5.** А. **6.** Б. **7.** 11. **8.** 10. **9.** 1,5.

10. а) $D(y)=[-4;6]$; $E(y)=[-3;3]$; б) $D(y)=[-1;9]$; $E(y)=[-2;4]$
в) $D(y)=[-4;6]$; $E(y)=[-4;2]$; г) $D(y)=[-6;4]$; $E(y)=[-2;4]$;
д) $D(y)=[-4;6]$; $E(y)=[-1;2]$; е) $D(y)=[-8;12]$; $E(y)=[-2;4]$.

11. Вершина $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{8}\right)$, нулі $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$. Функція зростає на $\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$. Функція додатна на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$, функція від'ємна на $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

12. $(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$. **13.** $(2;3)$, $(-9;-2{,}5)$.

14. Муся з'їдає пачку корму за 6 днів, а Рудий — за 8 днів.

Завдання підвищеної складності

7. а) $(3;2)$; $(-3;-2)$; б) $(2;1)$; $(-2;-1)$; в) $(1;1)$.

8. а) Немає розв'язків, якщо $a<-3$ або $a>3\sqrt{2}$; єдиний розв'язок, якщо $a=-3$; тільки 2 розв'язки, якщо $-3<a<3$ або $a=3\sqrt{2}$; тільки три розв'язки, якщо $a=3$; чотири розв'язки,

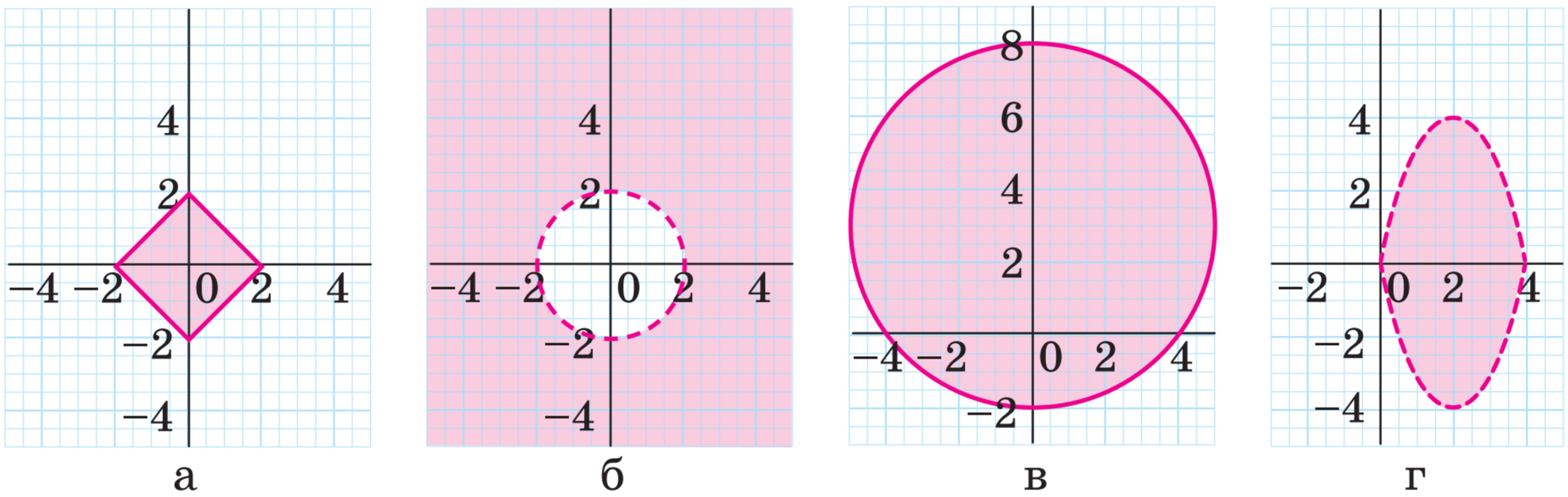
Проєкт підручника видавництва «Ранок»

якщо $3<a<3\sqrt{2}$; б) немає розв'язків, якщо $a<-\sqrt{2}$ або $a>1$; єдиний розв'язок, якщо $a=1$; тільки 2 розв'язки, якщо $-1<a<1$ або $a=-\sqrt{2}$; тільки три розв'язки, якщо $a=-1$; чотири розв'язки, якщо $-\sqrt{2}<a<-1$.

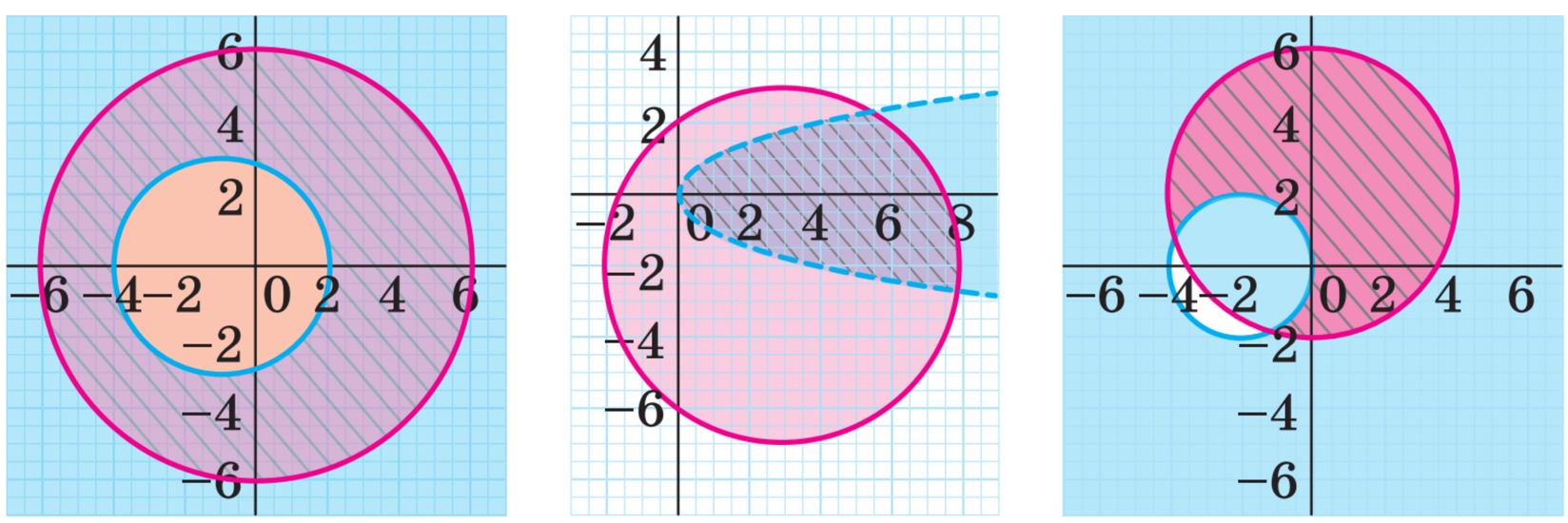
9. Двоє. *Вказівка.* Врахуйте, що кожен із n друзів передав свою фотографію іншим $n-1$ друзям (тобто передав $n-1$ фотографію), отже, всього було передано $n(n-1)$ фотографій.

10. 11 лип, 5 берез.

11.



12.



§ 12. Статистичні показники та їх види. Абсолютні та відносні показники

Тренажерний зал

1. а, в — абсолютні; б, г — відносні.

2. а, г — абсолютні; б, в — відносні.

3. а; в. **4.** а; г.

5. а) Показник інтенсивності; б) показник порівняння; в) показник структури; г) показник динаміки.

6. а) Показник структури; б) показник інтенсивності; в) показник динаміки; г) показник порівняння.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

7. 1,5; показник порівняння. **8.** 90 км/год; показник інтенсивності.
9. У 25 разів; показник динаміки. **10.** 0,6; показник структури.
11. а) 1,125; б) 1,2; в) 1,1. **12.** а) 1,25; б) 0,9; в) 1,2.
13. а) 0,9; б) $1\frac{1}{6}$; в) $1\frac{1}{6}$. **14.** а) $1\frac{1}{6}$; б) $1\frac{1}{20}$; в) $\frac{10}{11}$.
15. Абсолютні показники: а, б, в, д; відносні показники: г, е.
16. Абсолютні показники: а, в, г; відносні показники: б, д, е.
17. 1,04. **18.** 1,17. **19.** 15,7 осіб/км^2. **20.** 378,6 осіб/км^2.
21. 1,14. **22.** 1,52.
23. Дієслова 50 %; іменники 33,3 %; прикметники 16,7 %.
24. 31 % українська мова; 25 % історія України; 44 % математика.
25. Тимофій 34 запити/годину; Олексій 31 запит/годину; більша продуктивність у Тимофія. **26.** У Івана 3,2 кг/м^2, у Степана 2,8 кг/м^2; більша врожайність у Степана.
27. 0,9. **28.** 2. **29.** 1,09. **30.** 1,67.
31. 1,2; перевиконали на 20 %. **32.** 0,9. Не виконали на 10 %.
33. а) Порівняння; б) структури. **34.** а) Динаміки; б) структури.
35. 1,68. **36.** 1,5. **37.** 1,1; на 10 %. **38.** 0,875; на 12,5 %.
39. 1,071. **40.** 1,133. **41.** 1200. **42.** 2000.
43. Пляжний відпочинок 40 %; активний туризм 30 %; автобусні екскурсії 20 %; інші варіанти 10 %.
44. Піца 37,5 %; паста 32,5 %; суші 18,75 %; інші страви 11,25 %.
45. У секції кардіо на 10 учасників більше, ніж у секції силових тренувань, відносний показник порівняння 1,2; у секції йоги на 20 учасників менше, ніж у секції кардіо, відносний показник порівняння 0,67.
46. У відділі HR на 5 співробітників менше, ніж у відділі фінансів, відносний показник порівняння 0,8; у відділі IT на 5 співробітників більше, ніж у відділі фінансів, відносний показник порівняння 1,2.
47. а) $\text{ППЗ} = 1{,}25$; б) $\text{ПД} = 1{,}2$; в) $\text{ПВП} = 0{,}96$. План недовиконано на 4 %. **48.** а) $\text{ППЗ} = 1{,}2$; б) $\text{ПД} = 1{,}24$; в) $\text{ПВП} = 1{,}03$. План перевиконано на 3 %.
49. Наприклад, показник порівняння: в Канаді проживало в 9 разів більше українців, ніж в Австралії; показник структури: в Америці проживало 3,4 % всіх українців.
50. Наприклад, показник порівняння: високий рівень навчальних досягнень мають у 4 рази більше осіб, ніж початковий; показник

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

структури: достатній рівень навчальних досягнень з математики мають 50 % учнів і учениць.

51. 0,968; на 3,2 %. **52.** 1,05; на 5 %.

53. 1,125; 112,5 %; 1,013; 101,3 %; 1,139; 113,9 %. Наприклад, висновок: у поточному році, порівнюючи з попереднім, виробництво зросло на 13,9 %.

54. 0,95; 95 %; 1,020; 102 %: 0,969; 96,9 %. Наприклад, висновок: у серпні, порівнюючи з липнем, товарообіг зменшився на 3,1 %.

55. 101,9 %, тобто план зі збільшення виробництва перевиконано на 1,9 %. **56.** 98,9 %, тобто план зі зменшення витрат електроенергії перевиконано на 1,1 %.

57. ПВП = 1,010; ППЗ = 1,1; ПД = 1,111. Наприклад, висновок: у звітному році план перевиконали на 1 %, а порівняно з минулим роком прибуток зріс на 11,1 %.

58. ПВП = 1,024; ППЗ = 1,05; ПД = 1,075. Наприклад, висновок: у квітні план перевиконали на 2,4 %, а порівняно з березнем обсяг наданих кредитів зріс на 7,5 %.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $x = 4$. **2.** $AB = NK = 9$ см. **3.** У 3,5 рази. **4.** 105. **5.** Наприклад, РІК, РОК, РОТ, БОТ, БОА, БРА, ЕРА.

§ 13. Середні показники. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Тренажерний зал

1. б. **2.** а. **3.** а. **4.** а. **5.** б. **6.** в. **7.** г. **8.** б.

9. а) 6; б) 8; в) 13. **10.** а) 9; б) 17; в) 4. **11.** а) 7; б) 2. **12.** а) 21; б) 13.

13. а) $\frac{15}{8}$; б) $\frac{12}{11}$; в) $\frac{7}{8}$. **14.** а) $\frac{28}{11}$; б) $\frac{28}{11}$; в) 1.

15. а) $\sqrt{20}$; б) $\sqrt{55}$; в) 5. **16.** а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{31}$; в) $\sqrt{17}$.

17. г. **18.** в. **19.** в. **20.** в. **21.** б. **22.** б. **23.** в. **24.** б. **25.** а. **26.** г.

27. 23 г. **28.** 118 мл.

29. а) 8; б) 18; в) 16; г) 15. **30.** а) 24; б) 20; в) 27; г) 25.

31. а) 4,1; б) 8,2; в) 4,3. **32.** а) 5,3; б) 2,2; в) 6,2.

33. На модель А. **34.** На модель *S*. **35.** 15,3 °С. **36.** 18,3 °С.

37. 10. **38.** 28 кг. **39.** 15,8 %. **40.** 22,4 %.

41. 48 км/год. **42.** 37,5 грн за 1 кг. **43.** 4,6 г. **44.** 34 хвилини.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

45. Середні значення врожайності для обох господарств однакові — 30 ц/га. Дисперсія для другого господарства більша, а отже, вирощувати пшеницю менш ризиковано для першого господарства.
46. Оскільки середня прибутковість обох проєктів 150 млн грн, а дисперсія для першого проєкту більша, то менш ризикованим для банку є другий інвестиційний проєкт.
47. *Вказівка*. Позначте середнє арифметичне через $\bar{x}$ і розгляньте суму $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})$.
49. 1) 29,25; 2) −1,25; −1,25; +2,75; −0,25; 3) 3,28.
50. 1) 25,5; 2) −2,5; −2,5; −0,5; −0,5; −0,5; +6,5; 3) 7,45.
51. 1) 3,43 год; 2) −0,43 год; +0,57 год; 3) 0,71 год.
52. 1) 2,4 год; 2) −0,4 год; +0,6 год; 3) 0,72 год.
53. 1) 7,47 %; 2) +2,53 %; −2,47 %; 3) 3,54 %.
54. 1) 13,84 %; 2) +6,16; −5,84; 3) 8,49 %.
55. 1) 34,29 хв; 2) −4,29 хв; +5,71 хв; 3) 5,72 хв.
56. 1) 17,14 хв; 2) −2,14 хв; +2,86 хв; 3) 3,57 хв.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 2. **2.** а) $x=-1{,}6$; б) $x=\frac{1}{81}$. **3.** 6 год. **4.** 100°; 100°; 100° і 60°. **5.** а) КУБ; б) ТОР.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 4

1. В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** Д. **5.** А. **6.** В. **7.** 900. **8.** 31,62. **9.** 267. **10.** 42 %; 28 %; 18 %; 12 %.

11. У 9-Б класі на 2 особи більше, ніж у 9-А, відносний показник порівняння 1,07; у 9-В класі на 3 особи менше, ніж у 9-А, відносний показник порівняння 0,89; у 9-В класі на 5 осіб менше, ніж у 9-Б, відносний показник порівняння 0,83.

12. $\text{ППЗ}=1{,}25$; $\text{ПД}=1{,}67$; $\text{ПВП}=0{,}93$; план недовиконано на 7 %.

13. а) 9; б) 8,42; в) 9,27; середнє гармонійне — найменше, середнє квадратичне — найбільше.

14. а) 182,8 см; б) 10,7 см^2; в) 3,3 см.

Завдання підвищеної складності

3. На 4,35 %. **4.** 3,72 год. **5.** 61,02 грн. **6.** а) 99,44 %; б) 84,69 %. **7.** а) 11,2 %; б) 27,7. **8.** 1) 15,73 хв; 2) −1,73 хв; −0,73 хв; +3,37 хв; 3) 2,23 хв.

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Зміст

Вступ 3

Розділ 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

§ 1. Геометричні перетворення площини та їх аналітичне задання 7

§ 2. Рухи і перетворення подібності. Види рухів та їх властивості: паралельне перенесення, симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот 33

§ 3. Рівність і подібність фігур. Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень. 54

Готуємося до контрольної роботи до розділу 1 78

Завдання підвищеної складності 81

Головне в розділі 1 83

Розділ 2. НЕРІВНОСТІ

§ 4. Числові нерівності. Властивості числових нерівностей 88

§ 5. Нерівності зі змінними. Рівносильні нерівності. Лінійні нерівності з однією змінною 104

§ 6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною. Лінійні нерівності з двома змінними 119

Готуємося до контрольної роботи до розділу 2 137

Завдання підвищеної складності 139

Головне в розділі 2 141

Розділ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 7. Функції та їх властивості. Перетворення графіків функцій. . . 144

§ 8. Квадратична функція, її графік і властивості 171

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

§ 9. Квадратні нерівності 189
§ 10. Дробові раціональні рівняння та нерівності 207
§ 11. Системи нелінійних рівнянь і нерівностей 226
Готуємося до контрольної роботи до розділу 3 247
Завдання підвищеної складності 250
Головне в розділі 3 252

Розділ 4. СИСТЕМА СТАТИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

§ 12. Статистичні показники та їх види. Абсолютні та відносні показники 255
§ 13. Середні показники. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення 274
Готуємося до контрольної роботи до розділу 4 295
Завдання підвищеної складності 298
Головне в розділі 4 301

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Проєкт до інтегрованого модуля 1. Симетрія в мистецтві 302
Проєкт до інтегрованого модуля 4. Розрахунок статистичних показників за допомогою комп'ютера 303
ВІДПОВІДІ 304

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

Підручник інтегрованого курсу для 8 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)

МАТЕМАТИКА 9

ЧАСТИНА 1

Підручник написаний в інноваційному стилі та містить такі матеріали:

- діалоги між учнями та вчителями для мотивації навчальної діяльності
- відповідь на запитання «Навіщо ми це вивчаємо?» для кожного параграфа
- запитання для самоперевірки засвоєння теоретичних знань
- завдання різних рівнів для формування практичних навичок із математики
- завдання для повторення та підготовки до вивчення нового матеріалу
- завдання підвищеної складності
- логічні блок-схеми «Головне в розділі» для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу
- «цікавинки» — матеріал щодо історії виникнення математичних знань і їх застосування
- відомості про досягнення українських математиків і їх внесок у науку

Інтерактивний електронний додаток до підручника містить:

- тестові завдання за кожною темою з автоматичною перевіркою результату
- авторські відео, що доповнюють і поглиблюють навчальний матеріал, сприяють його кращому усвідомленню та розширюють математичний кругозір

Проєкт підручника видавництва «Ранок»