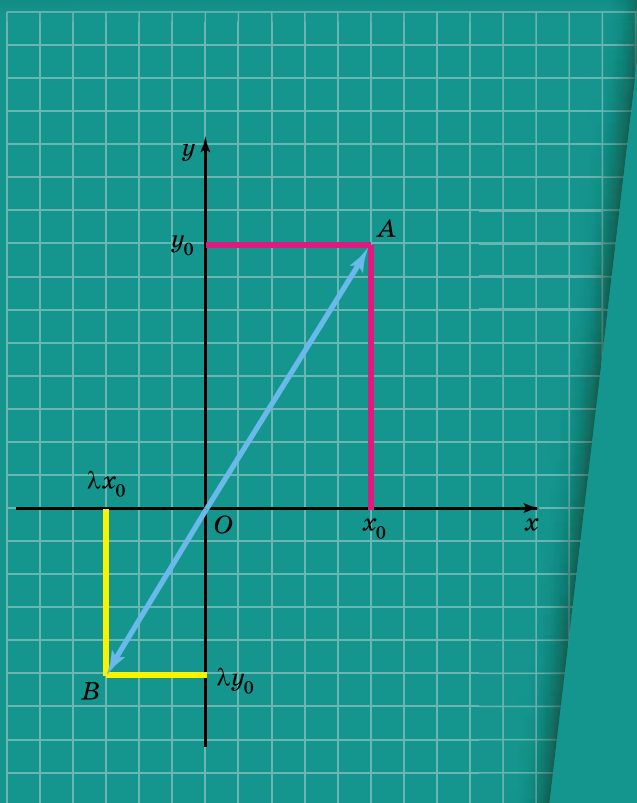


Генеза

НОВА УКРАЇНЬКА
ШКОЛА

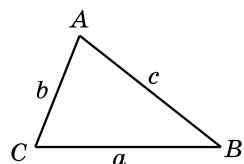
Олександр Істер, Дмитро Істер

ГЕОМЕТРІЯ



9

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ



Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ де } R - \text{ радіус описаного кола}$$

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

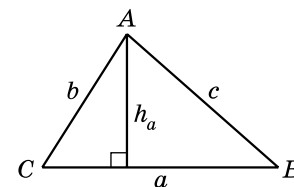
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ де } \alpha \neq 90^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Площа трикутника



$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

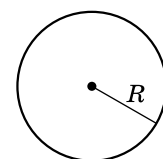
$$S = \frac{abc}{4R}, \text{ де } R - \text{ радіус описаного кола}$$

$$S = pr, \text{ де } r - \text{ радіус вписаного кола}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{ формула Герона,}$$

$$\text{де } p = \frac{a+b+c}{2} - \text{ півпериметр}$$

Довжина кола і площа круга

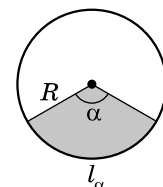


$$C = 2\pi R$$

$$C = \pi d, \text{ де } d - \text{ діаметр}$$

$$S = \pi R^2$$

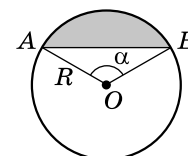
Довжина дуги кола і площа сектора



$$l_\alpha = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

$$S_\alpha = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

Площа сегмента



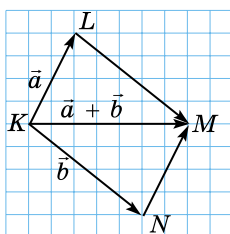
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \pm S_{\triangle AOB}$$

Олександр Істер, Дмитро Істер

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



Київ
«Генеза»
2026

УДК 514(075.3)
І-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 27.01.2026 № 110)*

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі
«Геометрія. 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти
(автор Істер О. С.)

Інтерактивний електронний додаток до підручника

<https://cutt.ly/qtS5sG2K>



Інтерактивні методичні матеріали до підручника

<https://faino.school/>



Істер О. С.

І-89 Геометрія : підруч. для 9-го кл. закл. заг. серед.
освіти / Олександр Істер, Дмитро Істер. – Київ : Генеза,
2026. – 272 с. : іл.

ISBN 978-617-8468-40-8.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-617-8468-40-8

© Істер О. С., Істер Д. О., 2026
© ТОВ «Генеза»,
оригінал-макет, 2026

Шановні дев'ятикласниці та дев'ятикласники!

Ви продовжуєте вивчати геометрію, а підручник, який тримаєте в руках, допоможе вам у цьому. Вивчаючи теоретичний матеріал, зверніть увагу на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Так виділено нові, незнайомі поняття.

У підручнику є такі умовні позначення:

-  – пригадай (раніше вивчене);  – зверни особливу увагу;
-  – запитання і завдання до теоретичного матеріалу;
- 1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;
-  – «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);
-  – теорема;  – наслідок з теореми;
-  – кінець доведення теореми або задачі;
-  – рубрика «Україна – це ми»;
-  – рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;
-  – рубрика «Життєва математика»;
-  – вправи для підготовки до вивчення нової теми;
-  – вправи для повторення;
-  – рубрика «Головне в розділі».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: з позначок , , , ,  починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього, високого рівнів та підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, стисло теоретичний матеріал (рубрика «Головне в розділі»), а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс геометрії 9 класу» та «Задачі підвищеної складності». Заняття геометрією стануть ще цікавішими, якщо ви розв'язуватимете вправи рубрики «Цікаві задачі – поміркуй одначе».

У рубриці «Життєва математика» зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Автори намагалися подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки ви знайдете в рубриці «А ще раніше...».

Бажаємо успіхів на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації та інших критеріїв. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на факультативних та індивідуальних заняттях, під час підготовки до математичних змагань.

Додаткові вправи в «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів / учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Правильне їх розв'язання учитель / учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці «Життєва математика» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності» в кінці підручника допоможуть підготувати учнів / учениць до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс геометрії 9 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі та вправи, що їй під силу, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 9 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

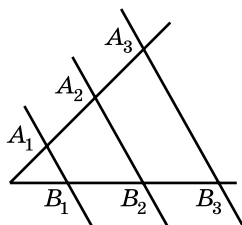
Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

У кінці підручника «Задачі підвищеної складності» допоможуть вашій дитині поглибити знання з геометрії та підготуватися до математичних змагань.

ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 8 КЛАС

Чотирикутники

1. (Усно.) Чи існує чотирикутник з кутами:
 - 1) $80^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ і 110° ;
 - 2) $70^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ і 110° ?
2. Чи можна навколо чотирикутника $ABCD$ описати коло, якщо:
 - 1) $\angle A = 20^\circ, \angle C = 140^\circ$;
 - 2) $\angle B = 80^\circ, \angle D = 100^\circ$?
3. Чи можна навколо чотирикутника $KLMN$ описати коло, якщо:
 - 1) $\angle K = 60^\circ, \angle M = 120^\circ$;
 - 2) $\angle L = 70^\circ, \angle N = 130^\circ$?
4. (Усно.) На малюнку 1: $A_1A_2 = A_2A_3, A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3, B_1B_2 = 4$ см. Знайдіть B_2B_3 і B_1B_3 .
5. На малюнку 1: $B_1B_2 = B_2B_3, A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3, A_1A_2 = 7$ см. Знайдіть A_2A_3 і A_1A_3 .



Мал. 1



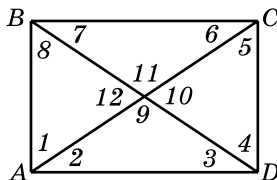
2. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак дізнаєтеся, який позивний був у Героя України Дмитра Коцюбайла. Дізнайтеся з інтернету про життєвий шлях захисника України.

Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A + \angle C = 140^\circ$	В	І
кут A на 80° більший за кут B	Ч	Д
$\angle A : \angle B = 1 : 2$	А	Н

50°	60°

70°	110°	120°	130°	110°

7. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
 - 1) сума двох з них дорівнює 260° ;
 - 2) один з них на 20° менший від іншого;
 - 3) один з них утричі більший за інший.
8. $ABCD$ – прямокутник (мал. 2). Знайдіть:
 - 1) $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 40^\circ$;
 - 2) $\angle 2$, якщо $\angle 9 = 110^\circ$;
 - 3) $\angle 10$, якщо $\angle 1 = 35^\circ$.
9. $ABCD$ – прямокутник (мал. 2). Знайдіть:
 - 1) $\angle 7$, якщо $\angle 4 = 50^\circ$;
 - 2) $\angle 6$, якщо $\angle 11 = 120^\circ$;
 - 3) $\angle 12$, якщо $\angle 5 = 46^\circ$.



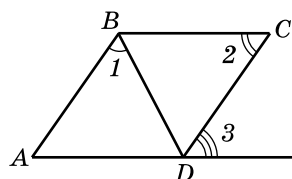
Мал. 2

10. $ABCD$ – ромб (мал. 3). Знайдіть:

- 1) $\angle 1$, якщо $\angle 2 = 50^\circ$;
- 2) $\angle 3$, якщо $\angle 1 = 46^\circ$.

11. $ABCD$ – ромб (мал. 3). Знайдіть:

- 1) $\angle 2$, якщо $\angle 1 = 48^\circ$;
- 2) $\angle 1$, якщо $\angle 3 = 50^\circ$.



Мал. 3

12. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:

- 1) $7 : 4 : 3 : 6$;
- 2) $5 : 8 : 4 : 2$?

13. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак дізнаєтеся прізвище братів – Героїв України, котрих було посмертно нагороджено «Золотою Зіркою» 2023 року.



AB і CD – основи трапеції $ABCD$, середня лінія якої дорівнює 20 см. Знайдіть AB і CD , якщо:	AB	CD
$AB - CD = 4$ см	С	Т
AB у 4 рази менша від CD	Б	Н
$AB : CD = 3 : 2$	І	У

8 см	16 см	18 см	16 см	22 см	24 см	32 см

14. Середня лінія трапеції дорівнює 14 см. Знайдіть основи цієї трапеції, якщо:

- 1) одна з них на 4 см більша за другу;
- 2) одна з них утричі менша від другої;
- 3) їх відношення дорівнює $3 : 4$.

3 15. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки $BK = 4$ см і $KC = 6$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

16. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 7$ см. Бісектриса кута B перетинає AD у точці M . Знайдіть AM і MD .

17. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо цей кут:

- 1) на 30° менший від кута між діагоналями, що лежить проти меншої сторони;
- 2) на 70° менший від кута між діагоналями прямокутника, що лежить проти більшої сторони.

18. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо цей кут:

- 1) на 60° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони;
- 2) на 20° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

19. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 20° .
20. Знайдіть кути ромба, сторона якого утворює з діагоналями кути, які відносяться як $1 : 4$.
21. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі й утворює з нею кут 20° . Знайдіть кути цієї трапеції.
22. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює із цією основою кут 25° . Знайдіть кути трапеції.
23. Сторони трикутника відносяться як $4 : 2 : 3$. Знайдіть ці сторони, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, дорівнює 45 см.
24. Периметр трикутника дорівнює 32 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного, відносяться як $4 : 7 : 5$. Знайдіть сторони заданого трикутника.
- 4 25. Два кути паралелограма відносяться як $4 : 5$. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута.
26. Один з кутів паралелограма на 40° більший за інший. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута.
27. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $CKLM$ так, що прямий кут у них спільний, а точка L належить стороні AB . Катет трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть периметр квадрата.
28. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Периметр квадрата дорівнює 20 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
29. Основи трапеції дорівнюють 12 см і 20 см. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.

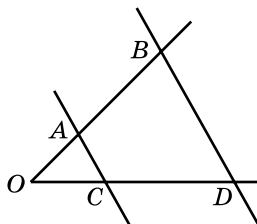
Подібність трикутників

- 1 30. (Усно.) $\triangle ABC \sim \triangle DKM$. Заповніть пропуски:
 1) $\angle A = \dots$; 2) $\angle K = \dots$; 3) $\angle C = \dots$.
31. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, $\frac{AB}{KM} = 3$. Заповніть пропуски:
 1) $\frac{BC}{MN} = \dots$; 2) $\frac{KN}{AC} = \dots$.
32. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:
 1) $\angle B = \angle E$;
 2) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle D = 40^\circ$, $\angle E = 70^\circ$;
 3) $AB = 3DE$, $BC = 3EF$;
 4) $\angle A = \angle D = 50^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle F = 90^\circ$

33. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle MNK$:

- 1) $AB = MN = 40$ см, $BC = NK = 25$ см;
- 2) $\angle A = \angle M$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;
- 3) $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle M = 90^\circ$, $\angle N = 30^\circ$?
- 4) $\angle C = \angle K$, $CB = 6$, $CA = 4$, $KN = 3$, $KM = 2$?

34. На малюнку 4 прямі AC і BD паралельні, $OA = 2$ см, $OC = 3$ см, $AB = 5$ см. Знайдіть CD .



Мал. 4

35. На малюнку 4 прямі AC і BD паралельні, $OC = 3$ см, $CD = 6$ см, $AB = 4$ см. Знайдіть OA .

36. O – точка перетину діагоналей трапеції, у якої $AB \parallel CD$, $AB = 20$ см, $CD = 10$ см, $DO = 6$ см. Знайдіть OB .

37. O – точка перетину діагоналей трапеції ($AB \parallel CD$) поділяє діагональ BD на відрізки $DO = 4$ см, $OB = 12$ см. Знайдіть AB , якщо $CD = 5$ см.

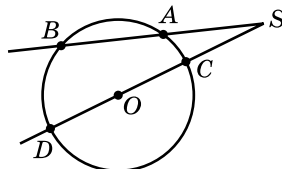
38. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 2 см, а гіпотенуза – 8 см.

39. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу – 9 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

40. AM – бісектриса трикутника ABC , $AB = 6$ см, $AC = 9$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса AM ділить сторону BC , дорівнює 3 см. Знайдіть BC .

41. У трикутнику ABC : $AB = 9$ см, $BC = 15$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса BK ділить сторону AC , дорівнює 5 см. Знайдіть AC .

42. Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках A і B , а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O , – у точках C і D (мал. 5), $SA = 3$ см, $SB = 8$ см, $SC = 2$ см. Знайдіть радіус кола.



Мал. 5

43. Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках A і B , а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O , – у точках C і D (мал. 5), $SA = 5$ см, $SB = 12$ см, $SC = 4$ см. Знайдіть діаметр кола.

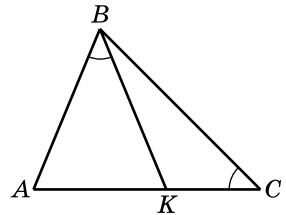
44. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак дізнаєтеся ім'я та прізвище першої жінки – Герої України, котрій це звання присвоїли посмертно. Дізнайтеся в інтернеті відомості про неї.

У трикутнику ABC : $AB : BC : CA = 3 : 5 : 6$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його:	A_1B_1	B_1C_1	C_1A_1
менша сторона дорівнює 6 см	Н	С	Е
більша сторона на 7 см більша за середню	У	І	О
периметр дорівнює 70 см	Р	В	А

35 см	6 см	6 см	30 см

	12 см	15 см	21 см	10 см	42 см	25 см	30 см
Д							

45. Сторони трикутника відносяться як 4 : 7 : 9. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його:
- 1) більша сторона дорівнює 18 см;
 - 2) менша сторона на 9 см менша від середньої;
 - 3) периметр дорівнює 100 см.
46. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC , $M \in AC$, $N \in BC$, $AB = 5$ см, $MN = 2$ см, $AM = 1$ см. Знайдіть довжину сторони AC .
47. Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC , $K \in AB$, $L \in AC$, $KB = 3$ см, $BC = 6$ см, $KL = 4,5$ см. Знайдіть довжину сторони AB .
48. AL – бісектриса трикутника ABC , $AB = 8$ см, $AC = 10$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть BL і LC .
49. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця довжин яких 2 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють 8 см і 12 см.
50. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці Q , $AQ : QB = 1 : 2$, $CD = 17$ см, $CQ = 8$ см. Знайдіть AB .
51. Через точку M , що розміщена всередині кола, проведено дві хорди AB і CD , $AM = MB$, $CM = 8$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Знайдіть AB .
- 4** 52. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle ABK = \angle C$ (мал. 6), $AK = 4$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть KC .
53. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 10 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

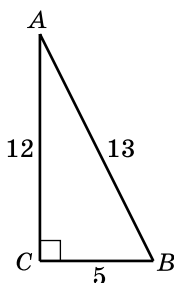


Мал. 6

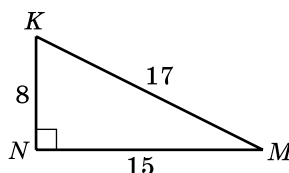
Розв'язування прямокутних трикутників

- 1** 54. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:
- 1) c , якщо $a = 12$ см, $b = 5$ см;
 - 2) a , якщо $c = 17$ дм, $b = 15$ дм;
 - 3) b , якщо $a = 35$ см, $c = 37$ см.
55. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:
- 1) a , якщо $b = 6$ см, $c = 10$ см;
 - 2) b , якщо $c = 25$ дм, $a = 7$ дм;
 - 3) c , якщо $a = 11$ см, $b = 60$ см.

56. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, дорівнює 8 см, а довжина похилої, проведеної із цієї самої точки, – 10 см. Знайдіть проекцію похилої на цю пряму.
57. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, дорівнює 5 см. Із цієї самої точки до прямої проведено похилу, проекція якої на пряму дорівнює 12 см. Знайдіть довжину похилої.
58. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ (мал. 7). Знайдіть:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\cos A$; 5) $\operatorname{tg} B$; 6) $\sin B$.



Мал. 7



Мал. 8

59. Дано: $\triangle KMN$, $\angle N = 90^\circ$ (мал. 8). Знайдіть:
1) $\cos K$; 2) $\sin M$; 3) $\operatorname{tg} M$; 4) $\sin K$; 5) $\operatorname{tg} K$; 6) $\cos M$.
60. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, – 8 см. Знайдіть основу трикутника.
61. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а висота, проведена до основи, – 40 см. Знайдіть периметр трикутника.
62. Діагоналі ромба дорівнюють 14 см і 48 см. Знайдіть периметр ромба.
63. Сторона ромба дорівнює 17 см, а одна з діагоналей – 30 см. Знайдіть іншу діагональ ромба.
64. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 10 см, а її проекція – 6 см. Знайдіть проекцію другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45° .
65. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 16 см і утворює з прямою кут 30° . Знайдіть довжину іншої похилої, якщо її проекція на пряму – 6 см.
66. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
1) AB , якщо $AC = 6$ см, $\cos A = \frac{2}{3}$;
2) AC , якщо $BC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 0,5$;
3) BC , якщо $AB = 12$ см, $\angle A = 60^\circ$.
67. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
1) AB , якщо $BC = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) BC , якщо $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 0,25$;
3) AC , якщо $AB = 16$ см, $\angle A = 45^\circ$.

68. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть з точністю до сотих сантиметра) за двома елементами:

1) $AC = 8$ см, $\angle A = 45^\circ$;

2) $AB = 12$ см, $\angle B = 60^\circ$;

3) $BC = 10$ см, $\angle A = 27^\circ$;

4) $AB = 16$ см, $\angle A = 80^\circ$.

69. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть з точністю до сотих сантиметра) за двома елементами:

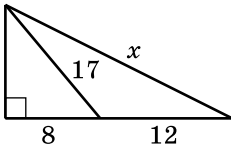
1) $BC = 9$ см, $\angle B = 30^\circ$;

2) $AB = 8$ см, $\angle A = 45^\circ$;

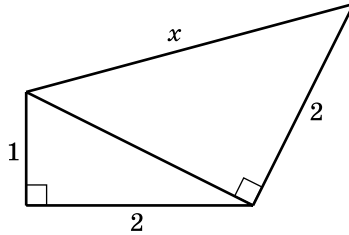
3) $AC = 12$ см, $\angle B = 70^\circ$;

4) $AB = 10$ см, $\angle B = 35^\circ$.

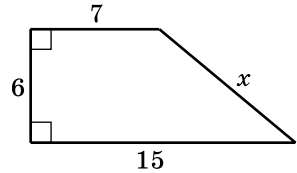
3 70. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 9–11.



Мал. 9



Мал. 10



Мал. 11

71. З точки, що розміщена на відстані 12 см від прямої, проведено дві похилі завдовжки 13 см і 15 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

72. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AC = 12$ см, $\cos B = 0,8$.

73. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AB = 34$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{8}{15}$.

74. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (невідому сторону знайдіть з точністю до сотих сантиметра, кути – з точністю до градусів) за двома сторонами:

1) $AB = 6$ см, $AC = 5$ см;

2) $AC = 8$ см, $BC = 3$ см.

75. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (невідому сторону знайдіть з точністю до сотих сантиметра, кути – з точністю до градусів) за двома сторонами:

1) $BC = 5$ см, $AB = 9$ см;

2) $BC = 7$ см, $AC = 2$ см.

4 76. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 5 см і 13 см завдовжки. Знайдіть периметр трикутника.

77. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 30 см і 40 см завдовжки. Знайдіть периметр трикутника.

78. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 20 см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника з точністю до градуса.

Многокутники. Площа многокутників

- 1** 79. Площа паралелограма дорівнює 35 см^2 , а одна зі сторін – 7 см . Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.
80. Площа паралелограма – 24 см^2 , а одна з його висот – 3 см . Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.
81. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
- 1) $a = 6 \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$, $h = 4 \text{ см}$; 2) $a = 1 \text{ дм}$, $b = 8 \text{ см}$, $h = 30 \text{ мм}$.
82. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
- 1) $a = 4 \text{ см}$, $b = 9 \text{ см}$, $h = 5 \text{ см}$; 2) $a = 80 \text{ мм}$, $b = 5 \text{ см}$, $h = 1 \text{ дм}$.
- 2** 83. Обчисліть суму кутів опуклого n -кутника, якщо:
- 1) $n = 8$; 2) $n = 15$.
84. Обчисліть суму кутів опуклого n -кутника, якщо:
- 1) $n = 6$; 2) $n = 12$.
85. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторони прямокутника дорівнюють 8 см і 2 см . Знайдіть периметр квадрата.
86. Прямокутник і квадрат мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 6 см , а одна зі сторін прямокутника – 9 см . Знайдіть периметр прямокутника.
87. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см , а висота, проведена до другої сторони, – 4 см . Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 28 см^2 .
88. Площа паралелограма дорівнює 40 см^2 . Одна з його сторін – 10 см , а одна з висот – 5 см . Знайдіть периметр паралелограма.
89. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см , а висота, проведена до основи, – 6 см . Знайдіть площу трикутника.
90. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30 см , а бічна сторона – 17 см . Знайдіть площу трикутника.
91. Площа трапеції дорівнює 24 см^2 , одна з її основ – 7 см , а висота – 4 см . Знайдіть іншу основу трапеції.
92. Основи трапеції дорівнюють 11 см і 19 см , а її площа – 45 см^2 . Знайдіть висоту трапеції.
- 3** 93. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо градусні міри цих кутів відносяться як $4 : 5 : 6 : 6 : 6$.
94. Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, менший від попереднього на 2° .
95. Бісектриса AK кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки $BK = 7 \text{ см}$, $KC = 3 \text{ см}$. Знайдіть площу прямокутника.
96. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см , а його гострий кут – 30° . Знайдіть площу паралелограма.
97. Периметр ромба дорівнює 40 см , а один з його кутів – 150° . Знайдіть площу ромба.

98. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а інший – на 4 см менший від гіпотенузи. Знайдіть площу трикутника.
99. Один з катетів прямокутного трикутника на 7 см більший за інший, а гіпотенуза дорівнює 13 см. Знайдіть площу трикутника.
100. Площа прямокутної трапеції – 34 см^2 , її периметр – 26 см, а менша бічна сторона – 4 см. Знайдіть більшу бічну сторону.
101. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 40 см, її бічна сторона – 10 см, а площа – 60 см^2 . Знайдіть висоту трапеції.
- 4** 102. Дві сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 6 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, – 8 см. Знайдіть площу паралелограма.
103. Дві висоти паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а сума двох суміжних сторін – 14 см. Знайдіть площу паралелограма.
104. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника.
105. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки завдовжки 3 см і 9 см. Знайдіть площу трикутника.
- *** 106. Основа трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

РОЗДІЛ 1

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

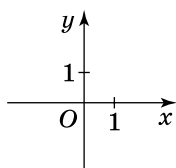
- **пригадаєте** все, що вивчали раніше про координатну площину;
- **дізнаєтеся**, як знаходити синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° , координати середини відрізка та відстань між двома точками координатної площини, рівняння кола і прямої;
- **навчитеся** розв'язувати геометричні задачі на площині за допомогою методу координат.

§ 1. Координатна площина

1. Поняття про прямокутну систему координат



З поняттям *координатної площини* ми ознайомилися в курсі математики 6 класу, а в курсі алгебри використовували його для побудови графіків функцій.



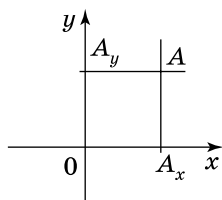
Мал. 1.1

Пригадаємо, як задають координатну площину.

Нехай на площині вибрано дві взаємно перпендикулярні прямі x і y , що перетинаються в точці O (мал. 1.1). Ці прямі називають *осями координат*, а точку їх перетину – *початком координат*. Вісь x (зазвичай вона горизонтальна) називають *віссю абсцис*, вісь y – *віссю ординат*.

Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі. Одну з них прийнято називати додатною та зображати зі стрілочкою, а другу – від'ємною. На кожній з осей координат вибирають одиничний відрізок. Початок відліку кожної з осей – число 0 – збігається з точкою O . У такому разі кажуть, що на площині задано *прямокутну систему координат*.

Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають *координатною площиною*.



Мал. 1.2

2. Координати точки

Кожній точці A координатної площини можна поставити у відповідність пару чисел – *координати точки*. Для цього через точку A потрібно провести пряму, паралельну осі y , і пряму, паралельну осі x , які перетнуть осі x і y в деяких точках A_x і A_y відповідно (мал. 1.2). *Абсцисою* точки A називають число x ,

модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_x . Причому, якщо A_x належить додатній півосі, то $x > 0$, а якщо A_x належить від'ємній півосі, то $x < 0$. Якщо точка A лежить на осі y , то її абсциса дорівнює нулю. *Ординатою* точки A називають число y , модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_y . Причому, якщо A_y належить додатній півосі, то $y > 0$, а якщо A_y належить від'ємній півосі, то $y < 0$. Якщо точка A лежить на осі x , то її ордината дорівнює нулю.

Координати точки записують у дужках поряд з назвою точки: $A(x; y)$. На першому місці завжди пишуть абсцису, на другому – ординату. Абсцису точки A можна позначати x_A , а ординату – y_A . Ці позначення зручно використовувати під час розв'язування задач, де кожную координату знаходять окремо. Якщо, наприклад, $A(-2; 3)$, то $x_A = -2$, $y_A = 3$.

Уведені на площині координати x і y називають *декартовими* на честь французького математика Рене Декарта (1596–1650), якому належить ідея введення і застосування координат у математиці.

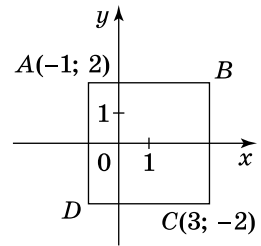
Приклад 1. Сторони прямокутника $ABCD$ паралельні осям координат. Знайти координати точок B і D , якщо $A(-1; 2)$, $C(3; -2)$.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 1.3.

1) Оскільки пряма AB паралельна осі абсцис, то ординати точок A і B однакові: $y_A = y_B = 2$. Аналогічно, оскільки пряма BC паралельна осі ординат, то абсциси точок B і C однакові: $x_B = x_C = 3$. Отже, $B(3; 2)$.

2) Міркуючи в той самий спосіб, отримаємо: $D(-1; -2)$.

Відповідь: $B(3; 2)$, $D(-1; -2)$.

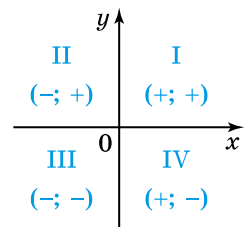


Мал. 1.3

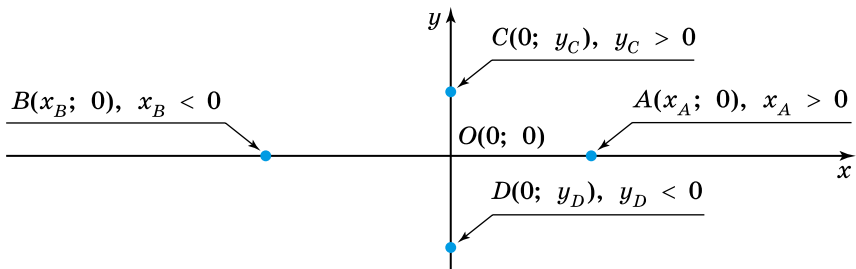
3. Координатні чверті

Осі координат розбивають площину на чотири частини, кожную з яких називають *координатною чвертю*, або *координатним кутом* (мал. 1.4). У межах однієї координатної чверті знаки кожної з координат не змінюються. Знаки координат та загальноприйняту нумерацію координатних кутів показано на малюнку 1.4.

На малюнку 1.5 вказано координати точок, які належать осям координат, та координати точки O .



Мал. 1.4



Мал. 1.5

Приклад 2. У яких координатних чвертях може лежати точка B , якщо

добуток її абсциси й ординати є числом:

- 1) додатним; 2) від'ємним?

Розв'язання. Нехай маємо точку $B(x; y)$.

1) $xy > 0$, отже, x і y – числа одного знака, тобто $x > 0$ і $y > 0$ або $x < 0$ і $y < 0$. Тому точка B лежить у першій або третій чверті.

2) $xy < 0$, отже, x і y – числа різних знаків, тобто $x > 0$ і $y < 0$ або $x < 0$ і $y > 0$. Тому точка B лежить у другій або четвертій чверті.

Відповідь: 1) у першій або третій чверті; 2) у другій або четвертій чверті.

А ще раніше...

Ідея введення координат на площині прийшла до нас із давнини. Перші застосування координат були пов'язані з астрономією і географією, тобто з необхідністю визначати положення світил на небі й точок на поверхні Землі, що використовувалося для складання календарів, зоряних та географічних карт. Відомий давньогрецький астроном, географ та математик Клавдій Птолемей уже на той час використовував довготу і широту як географічні координати. Ідеї прямокутних координат у вигляді прямокутної сітки (палетки) було знайдено у гробниці батька Рамзеса II – фараона Сеті I (котрий помер близько 1279 р. до н. е.). За допомогою палетки можна було переносити зображення у збільшеному вигляді. Починаючи з XV ст., прямокутну сітку також використовували й художники доби Відродження.

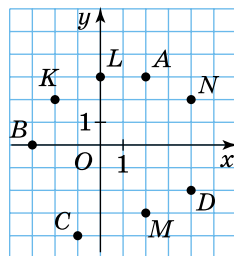
Термін *абсциса* походить від латинського *abscissus* – той, що відсікається (відрізок на осі x), *ордината* – від латинського *ordinatus* – упорядкований, оскільки ординатами спочатку називали відрізки, паралельні осі y . Ці терміни були вперше застосовані в латинському перекладі робіт відомого давньогрецького математика Аполлонія, їх також запропонував у 70–80-х роках XVII ст. Готфрід Лейбніц, після чого вони стали загальноновживаними. Лейбніц запропонував абсцису разом з ординатою називати координатами.

- ? Що називають осями координат? Початком координат? Як знаходять координати точки? Назвіть абсцису й ординату точки $P(-2; 5)$. Які знаки в координат точки, якщо вона лежить у першій (другій, третій, четвертій) координатній чверті? Чому дорівнює абсциса точки, яка належить осі y ? Чому дорівнює ордината точки, яка належить осі x ?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1.1.** Знайдіть координати точок A, B, C, D на малюнку 1.6.
- 1.2.** Знайдіть координати точок K, L, M, N (мал. 1.6).
- 1.3.** Позначте на координатній площині точки $E(-2; 1), F(0; -3), P(4; -2), T(-5; -1)$.
- 1.4.** Позначте на координатній площині точки $A(2; -3), B(5; 0), C(4; 1), D(-2; 4)$.
- 1.5.** Які з точок $A(0; -2), B(4; -3), C(2; 0), D(0; 19), E(2; 2), F(-14; 0)$ належать осі абсцис, а які – осі ординат?



Мал. 1.6

- 1.6. Які з точок $P(2; -17)$, $T(5; 0)$, $F(0; -2)$, $N(-4; 0)$, $M(-1; -1)$, $K(0; 17)$ належать осі абсцис, а які – осі ординат?
- 1.7. Не виконуючи побудови, укажіть, у яких чвертях лежать точки $M(2; -3)$, $N(-4; -5)$, $L(1; 2)$, $K(-9; 4)$.
- 1.8. Не виконуючи побудови, укажіть, у яких чвертях лежать точки $A(-2; -3)$, $B(4; 5)$, $C(1; -5)$, $D(-4; 1)$.
- 2** 1.9. (Усно.) На малюнку 1.6 знайдіть точки, у яких однакові:
1) абсциси; 2) ординати.
- 1.10. На прямій, паралельній осі x , узято дві точки. Одна з них має ординату $y = -3$. Яка ордината у другої точки?
- 1.11. На прямій, паралельній осі y , узято дві точки. Одна з них має абсцису $x = 2$. Яка абсциса у другої точки?
- 1.12. З точки $M(-5; 3)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Знайдіть координати основ перпендикулярів.
- 1.13. З точки $N(2; -3)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Знайдіть координати основ цих перпендикулярів.
- 3** 1.14. Сторони прямокутника $KLMN$ паралельні осям координат, $K(4; 5)$, $M(-2; -3)$. Знайдіть координати вершин L і N прямокутника.
- 1.15. Катети прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) паралельні осям координат. Знайдіть координати вершини C , якщо $A(2; -3)$, $B(7; 4)$.
- 1.16. Що можна сказати про координати точки A , якщо вона належить бісектрисі:
1) першого координатного кута; 2) другого координатного кута?
- 1.17. 1) Знайдіть відстані від точок $A(2; -3)$ і $B(-2; -5)$ до координатних осей.
2) Зробіть узагальнення щодо відстаней від точки $M(x; y)$ до координатних осей.
- 1.18. Знайдіть відстані від точок $C(-1; 5)$ і $D(3; 4)$ до координатних осей.
- 1.19. Точка перетину діагоналей ромба збігається з початком координат, а діагоналі ромба лежать на осях координат. Довжина однієї діагоналі дорівнює 10 одиниць, а другої – 8 одиниць. Знайдіть координати вершин ромба. Скільки розв'язків має задача?
- 1.20. Центр кола, радіус якого дорівнює 3 одиниці, збігається з початком координат. Які координати мають точки перетину кола з осями координат?
- 4** 1.21. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 2 одиниці, а його сторони паралельні осям координат. Знайдіть координати вершин квадрата, якщо $A(3; 3)$. Розгляньте всі можливі випадки.
- 1.22. Знайдіть геометричне місце точок $(x; y)$ координатної площини, для яких $|x| = 3$.



- 1.23.** Знайдіть геометричне місце точок $(x; y)$ координатної площини, для яких $|y| = 2$.



Вправи для повторення

- 1.24.** Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 7 см, а висота – 8 см.
- 1.25.** Дві сторони трикутника дорівнюють 4,3 см і 1,2 см, а довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів. Якого найменшого та якого найбільшого значень може набувати периметр цього трикутника?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 1.26.** Знайдіть за допомогою калькулятора, таблиць або комп'ютера:
- | | | |
|--------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\sin 18^\circ$; | 2) $\sin 26^\circ 30'$; | 3) $\cos 83^\circ$; |
| 4) $\cos 30^\circ 15'$; | 5) $\operatorname{tg} 70^\circ$; | 6) $\operatorname{tg} 19^\circ 45'$. |
- 1.27.** Відомо, що α – гострий кут прямокутного трикутника. Знайдіть α , якщо:
- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| 1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; | 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 3) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$. |
|----------------------------------|---|--|
- 1.28.** У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть:
- | | | |
|---------------|---------------|----------------------------|
| 1) $\sin A$; | 2) $\cos A$; | 3) $\operatorname{tg} A$; |
| 4) $\sin B$; | 5) $\cos B$; | 6) $\operatorname{tg} B$. |



Життєва математика

- 1.29.** Грядка полуниці має прямокутну форму 30 м завдовжки і 10 м завширшки. Скільки відер води знадобиться для її поливу, якщо на кожен квадратний метр цієї грядки потрібно 20 л води, а відро вміщує 12 л?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 1.30.** (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 рік.) З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляр BO до сторони AD . Коло із центром у точці A проходить через вершину B і перетинає сторону AD у точці K . Відомо, що $AK = 8$ см, $KD = 6$ см, $AO = 7$ см.
- 1) Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$ (у см).
 - 2) Обчисліть довжину діагоналі BD (у см).

§ 2. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності

1. Означення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180°

Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника як відношення певних його сторін. Тепер сформулюємо означення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180° .

Уведемо на площині прямокутну систему координат і проведемо в її першому і другому координатних кутах півколо радіуса 1, центр якого збігається з початком координат (мал. 2.1). Назвемо його *одиничним півколом*. Позначимо буквою A точку перетину цього півкола з додатним напрямком осі x і домовимися відкладати від променя OA куту проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ – гострий кут, точка B належить півколу. Проведемо з точки B перпендикуляр BC до осі x . Утворився прямокутний трикутник OBC з гіпотенузою OB , де $OB = 1$.

Значення синуса, косинуса, тангенса гострого кута α виразимо через координати точки B :

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Так само будемо знаходити синус, косинус і тангенс інших кутів від 0° до 180° . Нехай $B_1(x_1; y_1)$ – точка одиничного півкола, що лежить у другій чверті (мал. 2.2).

Тоді $\angle B_1OA$ – тупий. Маємо:

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{1} = y_1; \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{1} = x_1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1}.$$

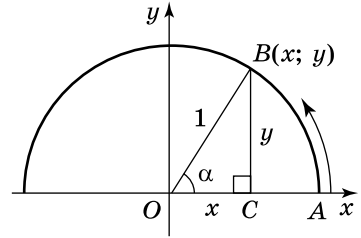
Оскільки координати $(x; y)$ точок одиничного півкола змінюються в межах $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, то для довільного α такого, що $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, справджуються нерівності:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

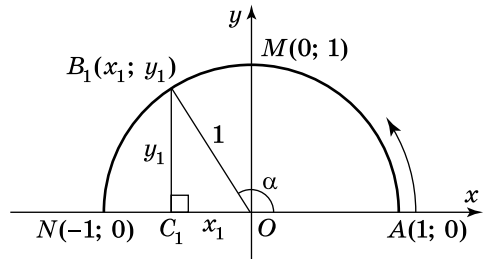
Але якщо:

$$\alpha - \text{гострий, то } \sin \alpha = y > 0; \cos \alpha = x > 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} > 0;$$

$$\alpha - \text{тупий, то } \sin \alpha = y > 0; \cos \alpha = x < 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} < 0.$$



Мал. 2.1



Мал. 2.2

Крім того, якщо кут α збільшується від 0° до 90° , то його синус збільшується від 0 до 1, а косинус зменшується від 1 до 0. Якщо кут α збільшується від 90° до 180° , то його синус зменшується від 1 до 0, а косинус зменшується від 0 до -1 .

Знайдемо значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0° , 90° і 180° .

На малюнку 2.2 куту 0° відповідає точка $A(1; 0)$. Тому $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Куту 90° відповідає точка $M(0; 1)$, тому $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, але $\operatorname{tg} 90^\circ$ – не існує, оскільки на нуль ділити не можна. Куту 180° відповідає точка $N(-1; 0)$, тому $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$.

Отже,

якщо $B(x; y)$ – точка одиничного півкола, що відповідає куту α (мал. 2.1), то

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Із цього означення випливає, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Оскільки кожному куту α від 0° до 180° відповідає єдине значення синуса, косинуса і тангенса, то можна вважати синус, косинус і тангенс функціями з аргументом α . Ці *функції* ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$) називають *тригонометричними* і вивчають у курсі алгебри старших класів.

2. Тригонометричні тотожності

Розглянемо деякі залежності між функціями одного й того самого аргументу, які називають *тригонометричними тотожностями*.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Доведення. Розглянемо $\triangle BOC$ (див. мал. 2.1). За теоремою Піфагора: $BC^2 + OC^2 = OB^2$, тобто $y^2 + x^2 = 1$. Тому $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$. Вираз $(\sin \alpha)^2$ та аналогічні йому для зручності прийнято записувати без дужок, наприклад $\sin^2 \alpha$. Отже, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ■

Рівність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ називають *основною тригонометричною тотожністю*. Із цієї тотожності можна виразити синус кута через його косинус:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

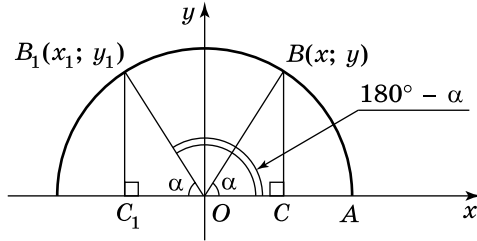
та косинус кута через його синус:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

В останній формулі знак « $\pm$ » пишуть, якщо кут α – тупий або розгнута.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad (2)$$

Доведення. Розглянемо точки $B(x; y)$ і $B_1(x_1; y_1)$ одиничного півкола, що відповідають кутам α і $180^\circ - \alpha$ (мал. 2.3).



Мал. 2.3

Оскільки $\angle B_1OA = 180^\circ - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$. Отже, $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $BC = B_1C_1$ і $OC = OC_1$. Звідки випливає, що абсциси точок B і B_1 є протилежними, а ординати — однаковими: $x = -x_1$, $y = y_1$.

Ураховуючи, що $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\sin(180^\circ - \alpha) = y_1$, $\cos(180^\circ - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha. \quad \blacksquare$$

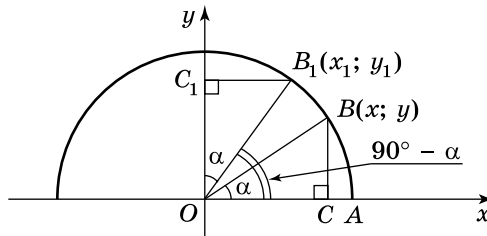
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

Доведення. Ураховуючи тотожність (2), маємо:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha. \quad \blacksquare$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (4)$$

Доведення. Розглянемо точки $B(x; y)$ і $B_1(x_1; y_1)$ одиничного півкола, що відповідають кутам α і $90^\circ - \alpha$ (мал. 2.4).



Мал. 2.4

Оскільки $\angle B_1OA = 90^\circ - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Тому $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Маємо $OC = OC_1$, $BC = B_1C_1$, тобто $x = y_1$ і $y = x_1$.

Ураховуючи, що $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\sin(90^\circ - \alpha) = y_1$, $\cos(90^\circ - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Спростити: 1) $\sin^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2(180^\circ - \alpha)$;

$$2) \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha).$$

Розв'язання.

$$1) \sin^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$2) \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} - (-\operatorname{tg} \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Відповідь: 1) 1; 2) 0.

3. Синус, косинус і тангенс табличних кутів

Використовуючи формули (2) і (3), можна виразити синус, косинус і тангенс тупого кута $180^\circ - \alpha$ через синус, косинус і тангенс гострого кута α .

 **Приклад 2.** Знайти синус, косинус і тангенс кутів 120° , 135° і 150° .

Розв'язання. $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Систематизуємо відомості з 8 класу та отримані в цьому параграфі у вигляді таблиці.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Кути $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ прийнято називати *табличними кутами*.

4. Обчислення нетабличних значень синуса, косинуса і тангенса

Синус, косинус і тангенс інших кутів можна знаходити за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\operatorname{tg}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan}$). Наприклад, $\sin 124^\circ \approx 0,8290$; $\cos 157^\circ \approx -0,9205$; $\operatorname{tg} 178^\circ \approx -0,0349$.

За допомогою таблиць або калькулятора можна за даними значеннями $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ або $\operatorname{tg} \alpha$ знаходити значення кута α . Для обчислення на калькуляторі використовуємо клавіші $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ і $\boxed{\operatorname{tg}^{-1}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan^{-1}}$) або послідовне натискання клавіші $\boxed{\operatorname{arc}}$ і однієї з клавіш $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ або $\boxed{\operatorname{tg}}$ ($\boxed{\tan}$).

Приклад 3. Знайти α , якщо:

- 1) $\cos \alpha = -0,3584$; 2) $\sin \alpha = 0,2588$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = -2,1445$.

Розв'язання. 1) $\cos \alpha = -0,3584$. За допомогою калькулятора знаходимо значення кута α у градусах: $\alpha \approx 111^\circ$.

2) $\sin \alpha = 0,2588$. За допомогою калькулятора знаходимо значення кута α у градусах: $\alpha \approx 15^\circ$. Але $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, тому $\sin(180^\circ - 15^\circ) \approx 0,2588$, тобто $\sin 165^\circ \approx 0,2588$. Отже, існують два таких кути, синус яких дорівнює 0,2588, а саме: $\alpha \approx 15^\circ$ і $\alpha \approx 165^\circ$.

3) Використовуючи калькулятор, отримаємо $\alpha \approx -65^\circ$. До числа -65° треба додати 180° , щоб отримати тупий кут, тангенс якого дорівнює числу $-2,1445$. (Формулу $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$ буде доведено у старших класах.) Маємо $\alpha \approx -65^\circ + 180^\circ \approx 115^\circ$.

Відповідь: 1) 111° ; 2) 15° або 165° ; 3) 115° .



Поясніть, як знаходять синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° . Сформулюйте і доведіть основну тригонометричну тотожність.

Доведіть, що

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 2.1. Знайдіть за допомогою калькулятора:
 1) $\sin 92^\circ$; 2) $\cos 108^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 157^\circ$;
 4) $\sin 118^\circ 6'$; 5) $\cos 175^\circ 30'$; 6) $\operatorname{tg} 129^\circ 24'$.
- 2.2. Знайдіть за допомогою калькулятора:
 1) $\cos 110^\circ$; 2) $\sin 116^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 138^\circ$;
 4) $\cos 120^\circ 30'$; 5) $\sin 125^\circ 18'$; 6) $\operatorname{tg} 120^\circ 6'$.
- 2.3. (Усно.) Який із записів правильний:
 1) $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ чи $\sin 140^\circ = -\sin 40^\circ$;
 2) $\cos 140^\circ = \cos 40^\circ$ чи $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$?
- 2.4. (Усно.) 1) Чи може абсциса точки одиничного півкола дорівнювати числу 0,5; -3,8; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}$; $1\frac{3}{4}$?
 2) Чи може ордината точки одиничного півкола дорівнювати числу 0,2; 5; 2,03; -0,3; $\frac{1}{7}$?
- 2.5. Обчисліть: 1) $\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$; 2) $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.
- 2.6. Обчисліть: 1) $\operatorname{tg} 135^\circ - \cos 120^\circ$; 2) $\sin 135^\circ : \cos 135^\circ$.
- 2** 2.7. Чи існує кут α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, для якого:
 1) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$; 3) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$;
 4) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$; 5) $\cos \alpha = 1,2$; 6) $\sin \alpha = 1,2$?
- 2.8. Чи існує кут β , де $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$, для якого:
 1) $\cos \beta = -\frac{4}{9}$; 2) $\sin \beta = -\frac{4}{9}$; 3) $\cos \beta = \frac{4}{9}$;
 4) $\sin \beta = \frac{4}{9}$; 5) $\cos \beta = -1,3$; 6) $\sin \beta = -1,3$?
- 2.9. Кут β – гострий. Знайдіть:
 1) $\cos \beta$, якщо $\sin \beta = \frac{4}{5}$; 2) $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{5}{13}$.
- 2.10. Кут α – гострий. Знайдіть:
 1) $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$; 2) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{8}{17}$.
- 2.11. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць гострий кут α , якщо: 1) $\sin \alpha = 0,2756$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5498$.
- 2.12. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць гострий кут β , якщо: 1) $\cos \beta = 0,6691$; 2) $\operatorname{tg} \beta = 2,0965$.
- 2.13. Обчисліть значення виразу $4\sin 90^\circ - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 120^\circ$ та дізнається, у якому столітті було засновано місто Володимир-Волинський (Волинська обл.).

2.14. Знайдіть значення виразу $8\sin 150^\circ - \sqrt{3}\operatorname{tg} 150^\circ$ та дізнаєтеся, яке місце посідає Україна в Європі за кількістю населення.



2.15. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin^2 \alpha$;

2) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$;

3) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha)$;

4) $\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)}$.

2.16. Спростіть вираз:

1) $1 - \cos^2 \alpha$;

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;

3) $\cos(90^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha)$;

4) $\frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$.

3 **2.17.** Побудуйте гострий кут:

1) синус якого дорівнює $\frac{1}{3}$;

2) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{5}$.

2.18. Побудуйте гострий кут:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{5}$;

2) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{4}$.

2.19. Запишіть у порядку зростання:

1) $\cos 137^\circ$; $\cos 125^\circ$; $\cos 142^\circ$;

2) $\sin 118^\circ$; $\sin 127^\circ$; $\sin 119^\circ$.

2.20. Запишіть у порядку спадання:

1) $\sin 142^\circ$; $\sin 148^\circ$; $\sin 138^\circ$;

2) $\cos 119^\circ$; $\cos 137^\circ$; $\cos 109^\circ$.

2.21. Знайдіть:

1) $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,6$;

2) $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

2.22. Знайдіть:

1) $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,28$;

2) $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.23. Доведіть тригонометричну тотожність:

1) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$;

2) $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) = 1 - 2\cos^2 \alpha$.

2.24. Обчисліть:

1) $\cos^2 150^\circ - \sin^2 120^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 120^\circ$.

2.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 150^\circ + \cos^2 120^\circ - \operatorname{tg}^2 150^\circ$;

2) $\frac{\sin 150^\circ}{\operatorname{tg} 150^\circ} - \cos 150^\circ$.

2.26. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць значення кута α , якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha = -1,8807$;

2) $\sin \alpha = 0,9272$.

2.27. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць значення кута β , якщо:

1) $\operatorname{tg} \beta = -0,7002$; 2) $\sin \beta = 0,9848$.



2.28. Побудуйте кут α , якщо:

1) $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$; 2) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

2.29. Побудуйте кут α , якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$; 2) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

2.30. Знайдіть суму косинусів усіх кутів трапеції.

2.31. Обчисліть: 1) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$; 2) $5 - \cos 137^\circ - \cos 43^\circ$.

2.32. Обчисліть: 1) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ$; 2) $6 + \sin 42^\circ - \sin 138^\circ$.



Вправи для повторення

2.33. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до другої сторони, – 3 см. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 24 см^2 .

2.34. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця яких 2 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві його інші сторони дорівнюють 9 см і 6 см.

2.35. Коло, вписане у трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки a см і b см. Знайдіть висоту трапеції.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.36. Знайдіть відстань між точками A і B координатної прямої, якщо:
1) $A(7)$, $B(4)$; 2) $A(-2)$, $B(9)$; 3) $A(-9)$, $B(-12)$; 4) $A(x_1)$, $B(x_2)$.

2.37. 1) Побудуйте точки $A(1; 4)$, $B(5; 1)$, $C(1; 1)$ на координатній площині, одиничний відрізок якої дорівнює 1 см.

2) Знайдіть довжини відрізків AB , AC , BC за допомогою лінійки.

3) Як за допомогою обчислень знайти довжину відрізка AB , якщо довжини відрізків AC і BC відомі?

2.38. 1) Побудуйте на координатній площині точки $A(-2; 4)$ і $B(6; 2)$.

2) Знайдіть, використовуючи лінійку з поділками, координати точки M – середини відрізка AB .

3) Порівняйте координати точки M із середнім арифметичним відповідних координат точок A і B .



Життєва математика

2.39. 1) Ділянку у формі прямокутного трикутника з катетами 24 м і 18 м потрібно по периметру обсадити кущами жасмину так,

щоб у кожній вершині ділянки був кущ. Скільки знадобиться таких кущів, якщо відстань між ними на кожній стороні трикутника має дорівнювати 3 м?

2) *Проектна діяльність.* Дізнайтеся (наприклад, з інтернету) скільки коштує кущ жасмину (або інший декоративний кущ) та визначте, яку суму потрібно заплатити за ці кущі.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.40. Бічні сторони трапеції дорівнюють 6 см і 8 см, а відстань між серединами її діагоналей дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.

§ 3. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами

1. Метод координат

Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара чисел $(x; y)$, і навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка координатної площини. У такому разі кажуть, що існує взаємно однозначна відповідність між точками координатної площини і їхніми координатами $(x; y)$. Це дає можливість розв'язувати деякі задачі *методом координат*, тобто подавати геометричні співвідношення розташування точок та фігур через алгебраїчні співвідношення між їхніми координатами. Розділ геометрії, що вивчає такі методи розв'язування, називають *аналітичною геометрією*.

Аналітична геометрія – розділ геометрії, у якому досліджують геометричні фігури та їхні властивості засобами алгебри на основі методу координат.

Далі розглянемо найпростіші задачі аналітичної геометрії, повний курс якої вивчають у закладах вищої освіти.

2. Координати середини відрізка

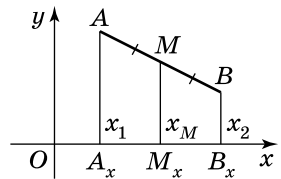
Приклад 1. Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Точка M – середина відрізка AB . Знайти координати точки M .

Розв'язання. 1) Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний осі y , тобто $x_1 \neq x_2$. Проведемо через точки A, B і M прямі, паралельні осі y (мал. 3.1). Вони перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$, $B_x(x_2; 0)$ і $M_x(x_M; 0)$.

Оскільки прямі AA_x , BB_x і MM_x паралельні між собою і M – середина AB , то, за теоремою Фалеса, M_x – середина A_xB_x .

Маємо $A_xM_x = M_xB_x$, тобто $|x_1 - x_M| = |x_M - x_2|$.

Тому $x_1 - x_M = x_M - x_2$ або $x_1 - x_M = -(x_M - x_2)$.



Мал. 3.1

З першої рівності маємо формулу $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, а друга – не має змісту, оскільки $x_1 \neq x_2$.

2) Якщо відрізок AB паралельний осі y , то $x_1 = x_2 = x_M$ і формула $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ також справджується.

3) Аналогічно доводимо, що $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Отже,

координати точки M – середини відрізка AB , де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, знаходимо за формулами: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Приклад 2. Знайти координати точки M – середини відрізка, кінцями якого є точки $A(-5; 8)$ і $B(3; -12)$.

Розв'язання. $x_M = \frac{-5 + 3}{2} = -1$, $y_M = \frac{8 + (-12)}{2} = -2$.

Відповідь: $M(-1; -2)$.

Приклад 3. Точка C – середина відрізка AB . Знайти координати точки A , якщо $B(-2; 4)$, $C(8; 0)$.

Розв'язання. 1) Нехай $C(x_C; y_C)$. Тоді $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$, тобто $8 = \frac{x_A - 2}{2}$, звідки $x_A = 18$.

2) Аналогічно, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$, тобто $0 = \frac{y_A + 4}{2}$, звідки $y_A = -4$.

3) Отже, $A(18; -4)$.

Відповідь: $A(18; -4)$.

Приклад 4. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(5; -4)$, $B(-4; 1)$, $C(-3; 2)$ і $D(6; -3)$ – паралелограм.

Розв'язання. 1) Нехай точка O – середина діагоналі AC чотирикутника $ABCD$. Тоді $x_O = \frac{5 + (-3)}{2} = 1$; $y_O = \frac{-4 + 2}{2} = -1$. Отже, $O(1; -1)$.

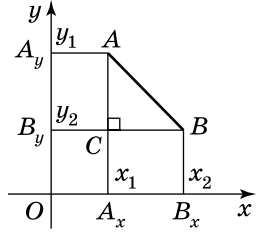
2) Нехай точка Q – середина діагоналі BD чотирикутника $ABCD$. Тоді

$x_Q = \frac{-4 + 6}{2} = 1$, $y_Q = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$. Отже, $Q(1; -1)$.

3) Маємо, що середини діагоналей чотирикутника $ABCD$ збігаються і точка $O(1; -1)$ ділить кожну з діагоналей навпіл. Отже, діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тому $ABCD$ – паралелограм. ■

3. Відстань між двома точками

Приклад 5. Знайти відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.



Мал. 3.2

Розв'язання. 1) Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний жодній з осей координат, тобто $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A і B прямі, паралельні осям координат (мал. 3.2). Вони перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$ і $B_x(x_2; 0)$, а вісь y у точках $A_y(0; y_1)$ і $B_y(0; y_2)$. Оскільки $A_x B_x B C$ – прямокутник, то

$$BC = A_x B_x = |x_1 - x_2|.$$

Аналогічно $AC = A_y B_y = |y_1 - y_2|$.

У прямокутному трикутнику ABC за теоремою Піфагора знайдемо гіпотенузу AB : $AB^2 = BC^2 + AC^2$, тому $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2) Якщо відрізок AB паралельний осі y , то $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ і $AB = |y_1 - y_2|$. Той самий результат матимемо і за отриманою в попередньому пункті

формулою: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$.

3) Якщо відрізок AB паралельний осі x , то $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ і $AB = |x_1 - x_2|$. Той самий результат матимемо і за наведеною для AB формулою.

4) Якщо точки A і B збігаються, тобто $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то $AB = 0$ і отримана формула для AB знову справджується. ■

Отже,

відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна знайти за формулою $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Приклад 6. Знайти відстань між точками A і B , якщо:

- 1) $A(4; -2)$, $B(1; 2)$; 2) $A(3; 5)$, $B(7; -1)$.

Розв'язання. 1) $AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;

2) $AB = \sqrt{(3 - 7)^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$.

Відповідь: 1) 5; 2) $2\sqrt{13}$.

Приклад 7. Знайти на осі абсцис точку, яка рівновіддалена від точок $A(2; 7)$ і $B(6; 1)$.

Розв'язання. Нехай $C(x; 0)$ – шукана точка.

1) Оскільки за умовою $AC = BC$, то $AC^2 = BC^2$. Маємо: $AC^2 = (2 - x)^2 + (7 - 0)^2 = 53 - 4x + x^2$; $BC^2 = (6 - x)^2 + (1 - 0)^2 = 37 - 12x + x^2$.

2) Враховуючи, що $AC^2 = BC^2$, маємо рівняння: $53 - 4x + x^2 = 37 - 12x + x^2$, звідки $x = -2$. Отже, шуканою є точка $C(-2; 0)$.

Відповідь: $(-2; 0)$.

А ще раніше...

Метод координат у математиці запропонували французькі математики П. Ферма та Р. Декарт у XVII ст.

Про перше наукове пояснення координатного методу стало відомо 1637 р. завдяки праці Рене Декарта «Геометрія». Саме тому описану Декартом систему координат почали називати декартовою, а координати точок у цій системі – декартовими координатами.



Р. Декарт (1596–1650)



П. Ферма (1601–1665)

У своїй праці Декарт навів велику кількість прикладів, що ілюстрували дієвість методу координат для розв'язування геометричних задач, та отримав результати, про які не знали давні математики. Декарт також висунув припущення про можливість застосування координатного методу не тільки на площині, а й у просторі, проте саме цій ідеї не надав подальшого розвитку.

Аналітичний метод, який запропонував Декарт, взяли на озброєння ван Схоутен, Валліс та багато інших математиків. Вони коментували «Геометрію» Декарта, виправляли його помилки, застосовували метод координат для розв'язування нових математичних задач, у тому числі й у тривимірному просторі. Так, наприклад, Валліс 1655 р. вперше розглянув конічні перерізи як плоскі криві.

Приблизно в той самий час, коли Декарт опублікував працю «Геометрія», П'єр Ферма оприлюднив мемуари «Вступ до вивчення плоских і тілесних місць», де, зокрема, описав рівняння кривих 2-го порядку (тобто кривих, рівняння яких містять одночлени 2-го степеня відносно x і y), та використав революційний на той час метод перетворення координат для спрощення вигляду рівнянь. Проте робота Ферма не набула такої популярності, як «Геометрія» Декарта, що більш повно розвивала ті самі ідеї.

Видатний математик та вчений Ісаак Ньютон спирався на координатний метод у своїх роботах з математичного аналізу та геометрії, у яких продовжив дослідження Декарта і Ферма. Зокрема, Ньютон увів класифікацію кривих 3-го порядку, а для кожної кривої 2-го порядку визначив такі характеристики, як діаметр, вісь симетрії, вершини, центр, асимптота, особливі точки тощо.



У чому полягає суть координатного методу? ○ Запишіть і доведіть формули координат середини відрізка. ○ Запишіть і доведіть формулу відстані між двома точками на координатній площині.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. Знайдіть координати середини відрізка CD , якщо:

- 1) $C(-5; 4)$, $D(7; 0)$;
- 2) $C(2; -8)$, $D(-2; 6)$.

- 3.2.** Знайдіть координати середини відрізка MN , якщо:
 1) $M(4; -5)$, $N(2; 1)$;
 2) $M(7; -3)$, $N(-1; 3)$.
- 3.3.** Знайдіть відстань від початку координат до точки:
 1) $A(3; -4)$; 2) $B(5; 12)$.
- 3.4.** Знайдіть відстань від початку координат до точки:
 1) $P(-6; 8)$; 2) $M(8; 15)$.
- 2** **3.5.** M – середина відрізка AB . Знайдіть координати:
 1) точки B , якщо $A(-2; 5)$, $M(4; -7)$;
 2) точки A , якщо $B(0; -2)$, $M(5; 1)$.
- 3.6.** D – середина відрізка AB . Знайдіть координати:
 1) точки A , якщо $B(4; 5)$, $D(-1; 7)$;
 2) точки B , якщо $A(3; 0)$, $D(4; -2)$.
- 3.7.** Знайдіть відстань між точками A і B , якщо:
 1) $A(-2; 4)$, $B(4; 12)$;
 2) $A(4; -5)$, $B(6; -11)$.
- 3.8.** Знайдіть відстань між точками A і B , якщо:
 1) $A(4; -1)$, $B(1; -5)$;
 2) $A(1; 7)$, $B(-5; 1)$.
- 3.9.** Нехай l – відстань між точками $A(-3; 3)$ і $B(4; 27)$. Знайдіть значення виразу $49l$, відтак дізнається довжину (у метрах) київського Хрещатика – найкоротшої з-поміж головних вулиць столиць світу.
- 3.10.** Яка відстань більша, AB чи AC , якщо:
 1) $A(4; -3)$, $B(0; 0)$, $C(2; -1)$;
 2) $A(2; 5)$, $B(8; -3)$, $C(-6; -1)$?
- 3.11.** Яка відстань більша, MN чи ML , якщо:
 1) $M(2; -3)$, $N(2; 2)$, $L(-2; 0)$;
 2) $M(3; -1)$, $N(1; 0)$, $L(5; -1)$?
- 3.12.** Знайдіть периметр трикутника LMN , якщо $L(4; -3)$, $M(4; 5)$, $N(1; 1)$.
- 3.13.** Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $A(0; -2)$, $B(0; -8)$, $C(4; -5)$.
- 3** **3.14.** $A(-1; 2)$, $B(0; 6)$, $C(-5; 3)$ – вершини трикутника ABC . Доведіть, що трикутник ABC – рівнобедрений.
- 3.15.** $K(-2; 2)$, $L(3; -4)$, $M(4; 7)$ – вершини трикутника KLM . Доведіть, що трикутник рівнобедрений.
- 3.16.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2; -5)$, $B(-7; 0)$, $C(-6; 1)$, $D(3; -4)$ – паралелограм.
- 3.17.** Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ з вершинами в точках $K(-2; 8)$, $L(3; -3)$, $M(6; 2)$, $N(1; 13)$ – паралелограм.
- 3.18.** Точки $K(-4; 2)$, $L(3; 5)$, $M(2; 8)$ – вершини паралелограма $KLMN$. Знайдіть координати його четвертої вершини.

- 3.19.** Точки $A(3; -8)$, $B(0; 11)$, $C(1; -12)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати його четвертої вершини.
- 3.20.** Чи є чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
- 1) $A(-7; -2)$, $B(-5; 4)$, $C(5; 2)$, $D(3; -4)$;
 - 2) $A(2; 6)$, $B(3; 1)$, $C(-3; 0)$, $D(-4; 4)$?
- 3.21.** У трикутнику ABC $A(-4; 2)$, $B(4; 7)$, $C(-2; 12)$. Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні AC .
- 3.22.** У трикутнику PLK $P(4; -6)$, $L(2; -11)$, $K(6; -7)$. Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні KL .
- 3.23.** Знайдіть довжину відрізка AB , кінці якого лежать на осях координат, а серединою його є точка $N(-5; 12)$.
- 3.24.** Знайдіть довжину відрізка MN , кінці якого лежать на осях координат, а серединою його є точка $A(8; -15)$.
- 3.25.** Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC , якщо $A(6; 0)$, $B(-3; 4)$, $C(7; 2)$.
- 3.26.** Знайдіть довжину медіани BN трикутника ABC , якщо $A(2; -1)$, $B(-9; 0)$, $C(4; 11)$.
- 3.27.** $ABCD$ – квадрат, $A(-2; 4)$, $C(4; 10)$. Знайдіть периметр квадрата.
- 3.28.** $ABCD$ – квадрат, $A(4; 5)$, $B(10; -3)$. Знайдіть довжину діагоналі квадрата.
- 3.29.** Відстань між точками $A(5; 7)$ і $B(-3; y)$ дорівнює 17. Знайдіть y .
- 3.30.** Відстань між точками $M(3; 0)$ і $N(x; 24)$ дорівнює 25. Знайдіть x .
- 3.31.** Знайдіть на осі абсцис точку, рівновіддалену від точок $M(2; 5)$ і $N(4; 1)$.
- 3.32.** Знайдіть на осі ординат точку, рівновіддалену від точок $A(3; 1)$ і $B(7; 5)$.
- 4** **3.33.** Дано точки $A(2; 3)$ і $B(8; 11)$. Знайдіть координати точки N , яка ділить відрізок AB у відношенні $1 : 3$, починаючи від точки A .
- 3.34.** Дано точки $P(5; 0)$ і $N(13; 6)$. Знайдіть координати точки D , яка ділить відрізок PN у відношенні $3 : 1$, починаючи від точки P .
- 3.35.** Доведіть, що точки $A(-1; -2)$, $B(3; 2)$ і $C(8; 7)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?
- 3.36.** Доведіть, що точки $P(-1; -5)$, $L(4; 5)$ і $M(2; 1)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?
- 3.37.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -2)$ і $D(0; -5)$ – прямокутник.
- 3.38.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1; 3)$, $B(-1; 9)$, $C(5; 7)$ і $D(7; 1)$ – ромб.
- 3.39.** Знайдіть значення x , за якого трикутник з вершинами $A(-4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(x; -x)$ – рівносторонній.
- 3.40.** Доведіть, що трикутник ABC з вершинами в точках $A(-4; 16)$, $B(6; -4)$, $C(3; -5)$ – прямокутний. Знайдіть гострі кути трикутника з точністю до мінути.

- 3.41. Доведіть, що трикутник KLM з вершинами в точках $K(6; -1)$, $L(9; -4)$ і $M(12; 5)$ – прямокутний. Знайдіть гострі кути трикутника з точністю до мінути.



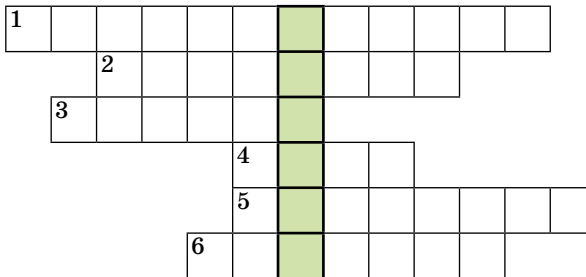
Вправи для повторення

- 3.42. Знайдіть периметр і площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а діагональ – 17 см.
- 3.43. Основи рівнобічної трапеції з кутом при основі 60° дорівнюють 16 см і 6 см. Знайдіть діагональ трапеції.
- 3.44. Хорда 30 см завдовжки перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки, різниця між якими 40 см. Знайдіть діаметр кола.
- 3.45. Одна зі сторін трикутника та висота, проведена до неї, дорівнюють по 20 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо висота, проведена до однієї з них, дорівнює 16 см.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 3.46. Видатні українці й українки. Запишіть по горизонталі прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та інтернет) та отримаєте у виділеному стовпчику назву геометричної фігури, з якою ви ознайомитеся в наступному розділі.



1. Видатний український футбольний тренер, багаторічний наставник команди «Динамо» (Київ).
2. Видатна українська письменниця та поетеса, лауреатка Шевченківської премії, премії Антоновичів, премії Петrarки.
3. Український композитор і поет, один із засновників української естрадної музики.
4. Український поет, перекладач, прозаїк, літературознавець, правозахисник.
5. Українська легкоатлетка, багаторазова призерка Літніх Паралімпійських ігор 2008, 2012 та 2020 років, прототип героїні фільму «Пульс».
6. Українська художниця, одна із представниць андеграунду (underground), авторка монументальних панно, унікальних мозаїк, що прикрашають публічні простори нашої країни. Активна діячка правозахисного руху 1960-х в Україні.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 3.47. Виділіть квадрат двочлена у виразі:

1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 4x$; 3) $y^2 - 8y + 13$; 4) $y^2 + 3y - 1$.

3.48. Точка Q – центр кола, точка A – належить цьому колу. Знайдіть радіус кола, якщо:

- 1) $Q(0; 0)$, $A(-3; 0)$; 2) $Q(-2; 3)$, $A(2; 6)$.

3.49. Відрізок MN – діаметр кола, $M(-4; 2)$, $N(8; 10)$. Знайдіть координати центра кола.



Життєва математика

3.50. Дослідна ділянка має форму прямокутника, розміри якого 12 м і 15 м. Посередині ділянки зробили грядку так, що навколо неї утворилася доріжка однакової ширини. Знайдіть ширину доріжки, якщо площа грядки становить 154 м^2 .

§ 4. Рівняння кола

1. Графік функції та рівняння з двома змінними в алгебрі



Під час вивчення алгебри ми будували графіки деяких функцій у прямокутній системі координат. Наприклад, графіком функції $y = 2x - 7$ є пряма, графіком функції $y = x^2$ – парабола, а графіком функції $y = -\frac{6}{x}$ – гіпербола. Також відомо, що графіком лінійного рівняння з двома змінними, тобто рівняння вигляду $ax + by = c$, є пряма, якщо хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля.

2. Рівняння фігури

Розглянемо поняття рівняння для геометричної фігури.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними x і y , якщо виконуються такі дві умови:

- 1) координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння;
- 2) будь-яка пара чисел $(x; y)$, що задовольняє це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

3. Рівняння кола

Знайдемо формулу, що задає коло радіуса r із центром у точці $Q(a; b)$ (мал. 4.1).

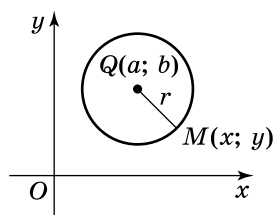
1) Нехай $M(x; y)$ – довільна точка кола.

Відстань QM запишемо за формулою відстані між двома точками:

$$QM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Оскільки точка M лежить на колі, то $QM = r$, а $QM^2 = r^2$. Тому $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Отже, координати x і y кожної точки $M(x; y)$ цього кола задовольняють отримане рівняння.



Мал. 4.1

2) Розглянемо деяку точку $N(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Із цієї рівності випливає, що відстань між точками Q і N дорівнює r . Тому точка N належить колу.

Отже,

рівняння кола із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Зокрема, рівняння кола радіуса r із центром у початку координат має вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Приклад 1. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Розв'язання. Маємо $(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$. Отже, центром кола є точка $Q(-2; 3)$, а радіус кола $r = 5$.

Відповідь: $Q(-2; 3)$, $r = 5$.

Приклад 2. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 10 = 0$ є рівнянням кола. Знайти координати центра кола і його радіус.

Розв'язання. 1) Виділимо квадрати двочленів у лівій частині цього рівняння:

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) - 16 - 9 - 10 = 0,$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 35,$$

$$(x - 4)^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{35})^2.$$

2) Отже, задане рівняння є рівнянням кола із центром у точці $Q(4; -3)$ і радіусом $r = \sqrt{35}$.

Відповідь: $(4; -3)$, $\sqrt{35}$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола з діаметром AB , якщо $A(-5; 7)$, $B(3; 11)$.

Розв'язання. 1) Нехай точка Q – центр кола. Тоді Q – середина AB . Маємо:

$$x_Q = \frac{-5 + 3}{2} = -1, \quad y_Q = \frac{7 + 11}{2} = 9.$$

2) Радіус кола – це відрізок QA :

$$QA = \sqrt{(-1 - (-5))^2 + (9 - 7)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

3) Знайдемо рівняння шуканого кола:

$$(x - (-1))^2 + (y - 9)^2 = (\sqrt{20})^2,$$

$$(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 20.$$

Відповідь: $(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 20$.



Що називають рівнянням фігури на координатній площині? ○ Доведіть, що рівняння кола із центром у точці $(a; b)$ і радіусом r має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 4.1. (Усно.) Які з рівнянь є рівняннями кола:
- 1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$; 2) $x^2 + y^3 = 8$;
 - 3) $x^2 + y^2 = 8$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 7$;
 - 5) $x^2 + (y - 2)^2 = 25$; 6) $-x^2 + y^2 = 16$?
- 4.2. Знайдіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:
- 1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 100$; 2) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$;
 - 3) $(x + 4)^2 + y^2 = 1$; 4) $x^2 + y^2 = 9$.
- 4.3. Знайдіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:
- 1) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$; 2) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;
 - 3) $x^2 + (y + 2)^2 = 81$; 4) $x^2 + y^2 = 49$.
- 4.4. Складіть рівняння кола із центром у точці Q і радіусом r , якщо:
- 1) $Q(1; 4)$, $r = 3$; 2) $Q(0; -2)$, $r = 5$;
 - 3) $Q(8; 0)$, $r = 1$; 4) $Q(0; 0)$, $r = 11$.
- 4.5. Складіть рівняння кола із центром у точці Q і радіусом r , якщо:
- 1) $Q(2; -3)$, $r = 4$; 2) $Q(0; 3)$, $r = 2$;
 - 3) $Q(-7; 0)$, $r = 10$; 4) $Q(0; 0)$, $r = 7$.
- 2** 4.6. Складіть рівняння кола із центром у точці Q , діаметр якого дорівнює d , якщо:
- 1) $Q(-7; 8)$, $d = 9$; 2) $Q(4; -19)$, $d = \sqrt{34}$.
- 4.7. Складіть рівняння кола із центром у точці Q , діаметр якого дорівнює d , якщо:
- 1) $Q(4; 7)$, $d = 13$; 2) $Q(-2; -11)$, $d = \sqrt{26}$.
- 4.8. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням:
- 1) $x^2 + y^2 = 16$; 2) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$;
 - 3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$; 4) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
- 4.9. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням:
- 1) $(x + 3)^2 + y^2 = 36$; 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.
- 4.10. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Чи належить цьому колу точка:
- 1) $A(5; 0)$; 2) $B(4; -1)$; 3) $C(-3; 4)$;
 - 4) $D(0; -5)$; 5) $M(4; -3)$; 6) $N(-1; 5)$?
- 4.11. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 100$. Чи належить цьому колу точка:
- 1) $A(0; -10)$; 2) $B(9; 4)$; 3) $C(6; -8)$;
 - 4) $D(-7; -2)$; 5) $T(-6; 8)$; 6) $P(10; 0)$?
- 4.12. Складіть рівняння кола із центром у точці $Q(-3; 4)$, яке проходить через точку $M(5; -2)$.
- 4.13. Складіть рівняння кола із центром у точці $Q(1; 2)$, яке проходить через точку $P(5; 5)$.
- 4.14. Складіть рівняння кола, для якого AB є діаметром, якщо $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$.

- 4.15.** Складіть рівняння кола, для якого AB є діаметром, якщо $A(-1; 8)$, $B(11; -8)$.
- 4.16.** На колі $x^2 + y^2 = 169$ знайдіть точки:
 1) з абсцисою 12; 2) з ординатою -5 ;
 3) які лежать на осі абсцис; 4) які лежать на осі ординат.
- 4.17.** На колі $x^2 + y^2 = 289$ знайдіть точки:
 1) з абсцисою -8 ; 2) з ординатою 15;
 3) які лежать на осі абсцис; 4) які лежать на осі ординат.
- 4.18.** У Європейських математичних олімпіадах серед дівчат бере участь команда із 4 учасниць від кожної країни. Нехай $O(x_1; y_1)$ – центр кола, заданого рівнянням $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$. Знайдіть координати точки O , відтак дізнаєтеся: x_1 – кількість золотих медалей, y_1 – кількість срібних медалей, які здобула збірна України на олімпіаді 2024 р.
- 3** **4.19.** Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
 1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$; 2) $x^2 + 10x + y^2 - 12y = 0$.
- 4.20.** Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
 1) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$; 2) $x^2 - 12x + y^2 - 5 = 0$.
- 4.21.** Знайдіть відстань між центрами кіл, які задано рівняннями $x^2 + y^2 - 4y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 7 = 0$.
- 4.22.** Знайдіть відстань між центрами кіл, які задано рівняннями $x^2 + 8x + y^2 - 16y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$.
- 4.23.** Складіть рівняння кола радіуса 10, що проходить через точку $A(5; -8)$ і центр якого лежить на осі абсцис.
- 4.24.** Складіть рівняння кола радіуса 5, що проходить через точку $B(-4; 2)$ і центр якого лежить на осі ординат.
- 4.25.** Коло із центром у точці $Q(2; -1)$ проходить через точку $A(4; 0)$. Чи проходить це коло через точку:
 1) $B(0; 2)$; 2) $C(1; 1)$?
- 4.26.** Коло із центром у точці $Q(-3; 1)$ проходить через точку $M(-2; 5)$. Чи проходить це коло через точку:
 1) $N(1; 2)$; 2) $K(4; 4)$?
- 4.27.** Коло задано рівнянням $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 16$. Не виконуючи малюнка, визначте, які з точок $A(4; -2)$, $B(-3; -5)$, $C(-2; -7)$, $D(5; 1)$ лежать:
 1) у середині круга, обмеженого цим колом;
 2) на колі;
 3) поза колом, обмеженим цим колом.
- 4** **4.28.** Складіть рівняння кола із центром, який лежить на бісектрисі другого координатного кута, і радіусом 13, яке проходить через точку $A(1; -8)$.
- 4.29.** Складіть рівняння кола, що проходить через точку $B(-2; 0)$, центр якого лежить на бісектрисі першого координатного кута, а радіус дорівнює 10.

4.30. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин чи немає спільних точок):

1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ і $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 9$;

2) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ і $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$.

4.31. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин чи немає спільних точок):

1) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ і $x^2 + y^2 = 16$;

2) $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 49$ і $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

4.32. Складіть рівняння кола, вписаного у трикутник ABC , якщо $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(0; 0)$.



Вправи для повторення

4.33. Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо: 1) вони відносяться як 1 : 3;

2) одна з них на 4 см більша за другу.

4.34. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону у відношенні 1 : 2, починаючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

4.35. Знайдіть площу прямокутного трикутника, у якому висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 4 см і 9 см.

4.36. Визначте координати кінців A і B відрізка AB , якщо точки $M(3; 3)$ і $N(2; 6)$ ділять його на три рівні частини.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.37. 1) Що є графіком функції вигляду $y = kx + l$?

2) Побудуйте графіки функцій $y = 2x - 3$; $y = \frac{1}{3}x + 2$; $y = -x + 5$; $y = -0,5x - 1$.

4.38. 1) Що є графіком рівняння вигляду $ax + by = c$, де a і b одночасно не дорівнюють нулю?

2) Побудуйте графіки рівнянь $x - y = 6$; $2x + 3y = 5$; $x = -2$; $y = 5$.

4.39. Чи належить точка $M(-1; 2)$:

1) графіку функції $y = x + 1$; $y = 1 - x$; $y = -2x$; $y = -1$;

2) графіку рівняння $x + y = 1$; $2x + y = 4$; $3x - 2y = 7$; $4y - x = 9$?



Життєва математика

4.40. Врожайність часнику – 120 кг з однієї сотки (100 м^2) за умови посадки 10 кг насіння на цій площі. Фермерка має ділянку 50 м завдовжки і 40 м завширшки.

1) Скільки кг насіння потрібно заготовити фермерці?

2) Скільки витратить фермерка на закупівлю насіння, якщо 1 кг насіння коштує 55 грн?

3) Скільки кг часнику збере фермерка із цієї ділянки?

- 4) Яку виручку отримає фермерка, якщо продасть часник по гуртовій ціні 70 грн за кг?
 5) Яким є дохід фермерки?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

4.41. (Задача Стенфордського університету.) Точка лежить у внутрішній області рівностороннього трикутника. Відстані від цієї точки до сторін трикутника дорівнюють a , b і c , а висота трикутника – h . Доведіть, що $a + b + c = h$.

§ 5. Рівняння прямої

Із курсу алгебри ви знаєте, що пряма є графіком лінійної функції $y = kx + l$ та графіком лінійного рівняння $ax + by = c$, якщо хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля. Розглянемо рівняння прямої в геометрії.

1. Загальне рівняння прямої

Нехай a – довільна пряма на координатній площині (мал. 5.1).

1) Виберемо дві точки $A_1(a_1; b_1)$ і $A_2(a_2; b_2)$ так, щоб пряма a була серединним перпендикуляром до відрізка A_1A_2 .

Нехай точка $M(x; y)$ – довільна точка прямої a .

За властивістю серединного перпендикуляра маємо:

$$MA_1 = MA_2, \text{ а отже, } MA_1^2 = MA_2^2.$$

Тому для точки $M(x; y)$ справджується рівність:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \quad (1)$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, матимемо:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

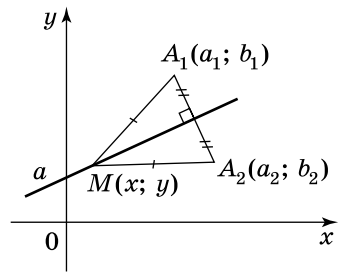
Уведемо позначення $2(a_2 - a_1) = a$, $2(b_2 - b_1) = b$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = c$, отримаємо, що будь-яка точка прямої a задовольняє рівняння

$$ax + by + c = 0. \quad (2)$$

Оскільки $A_1(a_1; b_1)$ і $A_2(a_2; b_2)$ – різні точки, то хоча б один з виразів $(a_2 - a_1)$ або $(b_2 - b_1)$ відмінний від нуля. Отже, хоча б один з коефіцієнтів a або b у рівнянні (2) відмінний від нуля.

2) Розглянемо деяку точку $N(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння (2). Виконавши алгебраїчні перетворення, які є досить громіздкими, можна переконатися, що координати точки N задовольняють також рівняння (1). Тому точка N рівновіддалена від точок A_1 і A_2 .

Отже, точка N належить прямій, яка є серединним перпендикуляром до відрізка A_1A_2 , а тому належить прямій a .



Мал. 5.1

Рівняння прямої у прямокутній системі координат має вигляд

$$ax + by + c = 0,$$

де a, b, c – числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння $ax + by + c = 0$ ще називають загальним рівнянням прямої.

Приклад 1. Знайти точки перетину прямої $3x - 5y - 15 = 0$ з осями координат.

Розв'язання. 1) Нехай точка $A(x; 0)$ – точка перетину прямої з віссю абсцис. Тоді $3x - 5 \cdot 0 - 15 = 0$, звідки $x = 5$. Отже, $A(5; 0)$ – точка перетину прямої з віссю абсцис.

2) Нехай точка $B(0; y)$ – точка перетину прямої з віссю ординат. Тоді $3 \cdot 0 - 5y - 15 = 0$, звідки $y = -3$. Отже, $B(0; -3)$ – точка перетину прямої з віссю ординат.

Відповідь: $A(5; 0)$, $B(0; -3)$.

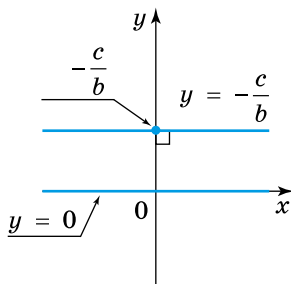
2. Розташування прямої відносно системи координат

Розглянемо розташування прямої відносно системи координат у деяких окремих випадках.

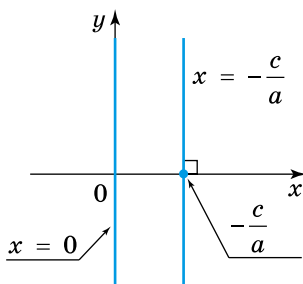
1) $a = 0$, $b \neq 0$. Маємо $by + c = 0$, $y = -\frac{c}{b}$. Усі точки прямої мають одну й ту саму ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$. Тому пряма $y = -\frac{c}{b}$ паралельна осі x (мал. 5.2).

Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма $y = 0$ збігається з віссю x .

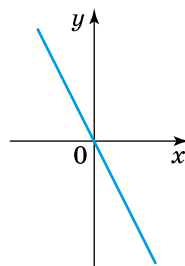
2) $b = 0$, $a \neq 0$. Маємо $ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$. Точки прямої мають одну й ту саму абсцису $\left(-\frac{c}{a}\right)$. Тому пряма $x = -\frac{c}{a}$ паралельна осі y (мал. 5.3).



Мал. 5.2



Мал. 5.3

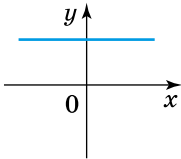
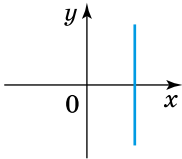
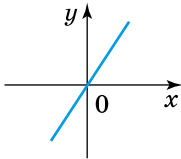


Мал. 5.4

Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма $x = 0$ збігається з віссю y .

3) $c = 0$. Координати точки $(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої. Тому пряма проходить через початок координат (мал. 5.4).

Систематизуємо отримані результати в таблицю.

Часткові випадки розташування прямої $ax + by + c = 0$ в декартовій системі координат		
$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$
$y = -\frac{c}{b}$	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{a}{b}x$
		

3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

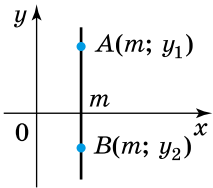
Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Розглянемо випадки.

1) $x_1 = x_2 = m$. Усі точки прямої мають одну й ту саму абсцису, що дорівнює m (мал. 5.5). Рівняння прямої має вигляд:

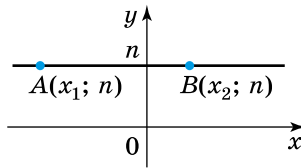
$$x = m.$$

2) $y_1 = y_2 = n$. Усі точки прямої мають одну й ту саму ординату, що дорівнює n (мал. 5.6). Рівняння прямої має вигляд:

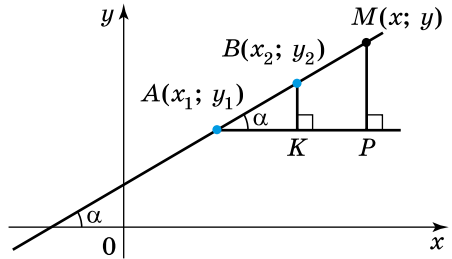
$$y = n.$$



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

3) $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Нехай $M(x; y)$ – деяка точка прямої. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі x , а через точки M і B – прямі, паралельні осі y . Тоді $BK \perp AP$ і $MP \perp AP$ (мал. 5.7). Позначимо $\angle BAK = \alpha$.

У трикутнику BAK : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BK}{AK}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

У трикутнику MAP : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{AP}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

Отже, маємо: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, тобто $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. (3)

Після застосування основної властивості пропорції і спрощення рівняння (3) зводиться до вигляду $ax + by + c = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, має вигляд:

- $x = m$, якщо $x_1 = x_2 = m$;
- $y = n$, якщо $y_1 = y_2 = n$;
- $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, якщо $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; -3)$ і $B(4; -5)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (3), маємо:

$$\frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - (-3)}{-5 - (-3)}; \text{ тобто } \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{-2},$$

звідки $-1(x - 2) = y + 3$, остаточно отримаємо:

$$x + y + 1 = 0.$$

Відповідь: $x + y + 1 = 0$.

Відповідь легко перевірити, підставивши в отримане рівняння координати кожної із заданих точок.

4. Кутовий коефіцієнт прямої

Якщо в загальному рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт b не дорівнює нулю, то, виразивши із цього рівняння y , матимемо:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = l$, отримаємо:

$$y = kx + l.$$

Отже, доходимо висновку, що пряму можна задавати і рівнянням $ax + by + c = 0$, і рівнянням $y = kx + l$ (якщо $b \neq 0$), оскільки кожне з них є рівнянням прямої.

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої. Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, де $x_1 < x_2$ — дві точки прямої. Оскільки координати точок задовольняють рівняння $y = kx + l$, то $y_1 = kx_1 + l$ і $y_2 = kx_2 + l$. Віднімемо почленно від другого рівняння перше, матимемо:

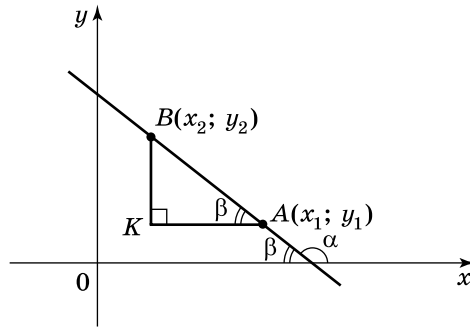
$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

$$\text{звідки } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Але вище ми вже довели, що $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$ (с. 41, мал. 5.7). Оскільки

пряма AP паралельна осі x , то α — це кут, який утворює пряма AB з додатним напрямком осі x .

Отже, якщо кут α — гострий, то $k = \operatorname{tg} \alpha$.



Мал. 5.8

Розглянемо випадок, коли пряма утворює з додатним напрямком осі x тупий кут (мал. 5.8). Маємо:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BK}{KA} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Але $\alpha + \beta = 180^\circ$, тоді $\beta = 180^\circ - \alpha$ і $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

За відомою формулою $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Тоді $-\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

враховуючи, що $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, знову отримаємо, що $k = \operatorname{tg} \alpha$, де кут α – тупий.

Отже, приходимо до висновку про геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямком осі x .

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Причому $k > 0$, якщо пряма утворює гострий кут з додатним напрямком осі x , $k < 0$, якщо цей кут – тупий, і $k = 0$, якщо пряма паралельна осі x .



Приклад 3. Довести, що рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Розв'язання. Запишемо загальний вигляд прямої з кутовим коефіцієнтом k : $y = kx + l$. Знайдемо коефіцієнт l .

1) Оскільки пряма проходить через точку $A(x_0; y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої, тобто:

$$y_0 = kx_0 + l, \text{ звідки } l = y_0 - kx_0.$$

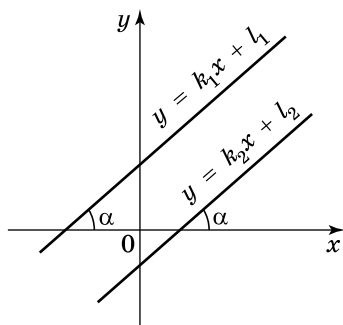
2) Підставимо значення l в рівняння $y = kx + l$, матимемо:

$$y = kx + (y_0 - kx_0), \text{ тобто } y - y_0 = k(x - x_0). \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3; 5)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 135° .

- Розв'язання.** 1) Оскільки $k = \operatorname{tg} \alpha$, то $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.
 2) Узявши до уваги, що $y - y_0 = k(x - x_0)$, маємо: $y - 5 = -1(x - (-3))$, тобто $y - 5 = -x - 3$, отже, маємо рівняння: $x + y - 2 = 0$.
Відповідь: $x + y - 2 = 0$.

5. Умова паралельності прямих



Мал. 5.9

Якщо прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні, то кути, які вони утворюють з додатним напрямком осі x , між собою рівні (мал. 5.9). Тоді й тангенси цих кутів також рівні, а тому $k_1 = k_2$.

І навпаки, якщо $k_1 = k_2$, то тангенси кутів, які утворюють прямі з додатним напрямком осі x , рівні, а тому прямі паралельні.

Прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$, $l_1 \neq l_2$.

Наприклад, паралельними є прямі $y = 0,1x + 5$ і $y = \frac{1}{10}x - 7$, у яких $k = 0,1$ і $k = \frac{1}{10}$ відповідно, тобто $k_1 = k_2$.

6. Координати точки перетину двох прямих

Нехай дано рівняння двох прямих у загальному вигляді:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ і } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Знайдемо координати $(x; y)$ точки їх перетину. Оскільки ця точка належить кожній з прямих, то її координати задовольняють кожне з двох рівнянь. Тому координати точки перетину є розв'язком системи рівнянь, якими задано ці прямі.

Приклад 5. Знайти точку перетину прямих

$$2x - y - 5 = 0 \text{ і } 4x + 3y - 15 = 0.$$

- Розв'язання.** Розв'язавши систему $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0, \\ 4x + 3y - 15 = 0, \end{cases}$ отримаємо $x = 3$,
 $y = 1$. Отже, $(3; 1)$ – точка перетину прямих.
Відповідь: $(3; 1)$.



Покажіть, як скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. ○ Як розташована пряма $ax + by + c = 0$ у координатній площині, якщо $a = 0$? $b = 0$? $c = 0$? ○ Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$? ○ Що таке кутовий коефіцієнт прямої і який його геометричний зміст? ○ За якої умови прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ будуть паралельними? ○ Як знайти координати точки перетину прямих, які задано в загальному вигляді?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1**5.1. (Усно.)** Яке з рівнянь є рівнянням прямої:

- 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $2x - 3y + 7 = 0$; 3) $x^3 - 2y - 13 = 0$;
 4) $x - 2y = 0$; 5) $2x - 9 = 0$; 6) $x + y^2 = 0$?

5.2. Яке з рівнянь є рівнянням прямої:

- 1) $2x - 3y = 0$; 2) $4x^2 - 9y^2 = 5$; 3) $2x - y^4 - 15 = 0$;
 4) $3x + 7y - 10 = 0$; 5) $3y - 12 = 0$; 6) $2x^2 - y = 0$?

5.3. Чи належить прямій $x + y - 7 = 0$ точка:

- 1) $A(3; 4)$; 2) $B(5; 1)$; 3) $C(2; 5)$; 4) $D(0; 8)$?

5.4. Чи належить прямій $x - y = 0$ точка:

- 1) $M(5; 5)$; 2) $N(-4; 4)$; 3) $L(0; 0)$; 4) $K(-2; -2)$?

5.5. Яка з прямих проходить через початок координат:

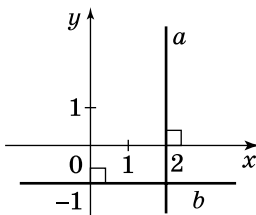
- 1) $2x - 3y = 0$; 2) $3x - 2y - 5 = 0$;
 3) $3x + 2y = 0$; 4) $2x + 3y - 7 = 0$?

5.6. (Усно.) Чи перетинаються прямі:

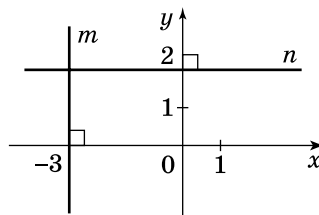
- 1) $y = 2x - 7$ і $y = 2x + 3$; 2) $y = 3x + 7$ і $y = 4x - 9$?

5.7. Чи паралельні прямі:

- 1) $y = 3x - 7$ і $y = -2x + 9$;
 2) $y = -4x + 3$ і $y = -4x$?

2**5.8.** Запишіть рівняння прямих a і b (мал. 5.10).**5.9.** Запишіть рівняння прямих m і n (мал. 5.11).

Мал. 5.10



Мал. 5.11

5.10. Знайдіть координати точок перетину прямої $2x - 5y - 10 = 0$ з осями координат.**5.11.** Знайдіть координати точок перетину прямої $3x - 4y + 12 = 0$ з осями координат.**5.12.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; 3)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.**5.13.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(4; -1)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.**5.14.** Які з точок належать прямій $y = 7$:

- 1) $A(7; 1)$; 2) $B(1; 7)$; 3) $C(2; 5)$; 4) $D(-10; 7)$?

5.15. Які з точок належать прямій $x = 3$:

- 1) $K(1; 3)$; 2) $L(3; 1)$; 3) $M(1; 2)$; 4) $N(3; -8)$?

- 5.16.** Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої MN , якщо:
 1) $M(-1; 2)$, $N(0; 9)$; 2) $M(1; 4)$, $N(-1; 6)$.
- 5.17.** Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої AB , якщо:
 1) $A(3; -1)$, $B(5; -7)$; 2) $A(2; 9)$, $B(3; 4)$.
- 5.18.** Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:
 1) $2x - y - 5 = 0$; 2) $4x + 3y + 7 = 0$.
- 5.19.** Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:
 1) $3x + y + 7 = 0$;
 2) $5x - 2y - 9 = 0$.
- 3** **5.20.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
 1) $A(2; 7)$ і $B(-3; 7)$; 2) $M(-2; 1)$ і $N(-2; -5)$;
 3) $C(3; 8)$ і $D(1; 6)$; 4) $K(-2; 5)$ і $L(3; -1)$.
- 5.21.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
 1) $A(4; 7)$ і $B(4; 0)$; 2) $C(5; -2)$ і $D(7; -2)$;
 3) $M(-1; 2)$ і $N(-3; 4)$; 4) $K(-1; 5)$ і $L(7; 1)$.
- 5.22.** Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AM трикутника ABC , якщо $A(0; -2)$, $B(-7; 5)$, $C(9; 11)$.
- 5.23.** Складіть рівняння прямої, яка містить медіану CN трикутника ABC , якщо $A(2; -3)$, $B(8; -7)$, $C(4; 0)$.
- 5.24.** Знайдіть точку перетину прямих $2x - 3y = 0$ і $3x + 4y + 17 = 0$.
- 5.25.** Знайдіть точку перетину прямих $5x - 4y = 0$ і $2x + 3y + 23 = 0$.
- 5.26.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; -1)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:
 1) 3; 2) -2; 3) 0; 4) $\frac{1}{7}$.
- 5.27.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3; 2)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:
 1) 4; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{1}{5}$.
- 5.28.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $N(-4; -1)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут: 1) 135° ; 2) 60° .
- 5.29.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(2; 5)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут: 1) 45° ; 2) 120° .
- 5.30.** Серед даних прямих укажіть пари паралельних:
 1) $2x - 3y + 7 = 0$; 2) $3x - y + 9 = 0$;
 3) $x + 2y - 19 = 0$; 4) $6x - 2y + 5 = 0$;
 5) $4x - 6y + 9 = 0$; 6) $4x + 8y - 1 = 0$.
- 5.31.** Серед даних прямих укажіть пари паралельних:
 1) $3x + y + 7 = 0$; 2) $2x - y + 7 = 0$;
 3) $x - 5y - 1 = 0$; 4) $6x - 3y - 1 = 0$;
 5) $9x + 3y - 11 = 0$; 6) $2x - 10y - 3 = 0$.

4 5.32. За якого значення a точки $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ і $C(a; 4)$ лежать на одній прямій?

5.33. За якого значення b точки $M(4; -1)$, $K(5; 2)$ і $N(3; b)$ лежать на одній прямій?

5.34. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 2)$ паралельно прямій $4x - 2y + 7 = 0$.

5.35. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $N(2; -3)$ паралельно прямій $6x + 2y - 5 = 0$.

 5.36. Доведіть, що прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, якщо $k_1k_2 = -1$ (умова перпендикулярності прямих).

5.37. Використавши результат задачі № 5.36, складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 3)$ перпендикулярно до прямої $y = \frac{1}{2}x - 7$.

5.38. Використавши результат задачі № 5.36, складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -1)$ перпендикулярно до прямої $y = -\frac{1}{3}x + 8$.

Вправи для повторення

5.39. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \cos 60^\circ$; 2) $\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ$.

5.40. Чи є чотирикутник з вершинами в точках $A(-3; 4)$, $B(5; 2)$, $C(7; -4)$, $D(-1; -2)$ паралелограмом?

5.41. Складіть рівняння кола радіуса 13, що проходить через точку $A(-7; 5)$, якщо його центр належить осі абсцис.

5.42. Чи дотикаються кола $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ і $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$?

Життєва математика

5.43. Жінка-агроном, не вимірюючи кутів чотирикутної земельної ділянки, може з'ясувати, що вона квадратна. Поясніть, як вона це робить, якщо користується досить довгою мотузкою.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.44. (Київська міська математична олімпіада, 1990 р.) Бісектриси AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що коли кут C дорівнює 60° , то $OA_1 = OB_1$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–5)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Точка $M(-1; -2)$ лежить у ... координатній чверті:
 А. Першій Б. другій В. третій Г. четвертій
2. $\sin 150^\circ + \cos 60^\circ = \dots$
 А. 2 Б. 1 В. 0 Г. -1
3. Укажіть рівняння, що є рівнянням прямої.
 А. $x^2 + y^2 = 9$ Б. $x - y^3 = 5$
 В. $x + xy + y = 0$ Г. $2x - 3y + 9 = 0$
- 2** 4. Точки $A(-2; 6)$ і $B(4; 11)$ – кінці відрізка, N – його середина. Укажіть координати точки N .
 А. (1; 8,5) Б. (2; 17) В. (8,5; 1) Г. (-3; -2,5).
5. Знайдіть довжину відрізка KL , якщо $K(-1; 2)$, $L(3; -1)$.
 А. 3 Б. 4 В. 5 Г. 6
6. Знайдіть координати точки перетину прямої $4x - 5y - 20 = 0$ з віссю ординат.
 А. (0; 4) Б. (0; -4) В. (5; 0) Г. (0; -5)
- 3** 7. Знайдіть відстань від точки $A(-3; 7)$ до осі абсцис.
 А. 3 Б. 4 В. 7 Г. $\sqrt{58}$
8. $A(-2; 3)$, $B(4; 7)$, $C(-6; -3)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини D .
 А. (-4; 0) Б. (-8; 0) В. (-12; -3) Г. (-12; -7)
9. Визначте радіус кола, якщо воно задано рівнянням

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0.$$

 А. 7 Б. $2\sqrt{5}$ В. 20 Г. $\sqrt{5}$
- 4** 10. Знайдіть значення виразу $7 - \cos 110^\circ - \cos 70^\circ$.
 А. 6 Б. 7
 В. 8 Г. 9
11. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл, заданих рівняннями $(x + 2)^2 + y^2 = 16$ і $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
 А. Перетинаються
 Б. Мають внутрішній дотик
 В. Мають зовнішній дотик
 Г. Не перетинаються
12. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; -1)$ паралельно прямій $4x - 2y + 7 = 0$.
 А. $2x + y - 5 = 0$ Б. $2x - y + 5 = 0$
 В. $2x - y - 7 = 0$ Г. $2x - y + 7 = 0$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. На площині задано вершини трикутника ABC – точки $A(-2; 3)$, $B(6; -3)$, $C(0; -15)$.

Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок

Довжина

1. Сторона трикутника AB
2. Медіана AM
3. Середня лінія MN , де N – середина AB

- А. 5
- Б. 10
- В. 13
- Г. $\sqrt{82}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–5

- 1** 1. У якій координатній чверті лежить точка:
 1) $M(-2; 7)$; 2) $K(4; -1)$?
2. Обчисліть:
 1) $\sin 30^\circ + \cos 120^\circ$; 2) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ$.
3. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, а яке – рівнянням кола:
 1) $(x - 2)^2 + y^2 = 16$;
 2) $4x - 2y - 17 = 0$?
- 2** 4. Точки $A(-3; 4)$ і $B(1; 7)$ – кінці відрізка, M – його середина.
 1) Знайдіть довжину відрізка AB .
 2) Чи належить точка M осі ординат?
5. Знайдіть координати точок перетину прямої $3x - 4y - 24 = 0$ з осями координат.
6. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням $(x + 3)^2 + y^2 = 16$.
- 3** 7. Складіть рівняння кола радіуса 10, яке проходить через точку $A(8; -1)$ і центр якого лежить на осі ординат.
8. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2; 3)$, $B(4; -3)$, $C(2; 7)$, $D(-4; 13)$ є паралелограмом.
- 4** 9. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 5)$ і паралельна прямій $6x - 3y + 9 = 0$.

Додаткові завдання

- 4** 10. Знайдіть значення виразу:
 1) $\sin^2 23^\circ + \sin^2 67^\circ$;
 2) $4 - \cos 118^\circ - \cos 62^\circ$.
11. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл:
 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ і $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

- 1** 1. Дано точки $A(0; -2)$, $B(-3; 4)$, $C(4; 5)$, $D(-2; 9)$, $E(5; 0)$, $F(0; 5)$, $G(2; -3)$, $H(-2; -2)$, $K(-5; 0)$, $L(4; -1)$, $M(1; 3)$, $N(-5; 1)$. Випишіть з них ті, які належать:

- 1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) I четверті;
4) II четверті; 5) III четверті; 6) IV четверті.

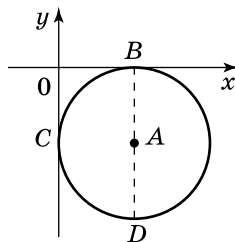
- 2** 2. На прямій, перпендикулярній до осі y , узято дві точки. Одна з них має ординату $y = 5$. Яка ордината другої точки?

3. Через точку $P(-3; -2)$ проведено прямі, паралельні осям координат. Знайдіть координати точок перетину цих прямих з осями координат.

- 3** 4. Які особливості взаємного розташування двох точок, якщо у них:

- 1) абсциси однакові, а ординати – різні;
2) ординати однакові, а абсциси – різні?

5. На малюнку 1 радіус кола дорівнює R . Знайдіть координати точок A , B , C і D .



Мал. 1

6. Чи правильне твердження:

- 1) якщо точки M і N рівновіддалені від осі абсцис, то вони мають рівні між собою ординати;
2) якщо точки M і N мають рівні між собою ординати, то вони однаково віддалені від осі абсцис.

7. Дано точку $A(-3; y)$.

- 1) Чи може точка A належати осі ординат?
2) За якої умови вона може належати осі абсцис?
3) У яких координатних кутах може лежати точка A залежно від знака y ?

8. Дано точки $A(-2; 5)$ і $B(4; 7)$. Чи перетинає відрізок AB :

- 1) вісь абсцис; 2) вісь ординат?

Відповідь обґрунтуйте.

- 4** 9. Знайдіть геометричне місце точок координатної площини, для яких: 1) $(|x| - 2)(|y| + 1) = 0$; 2) $(|x| - 5)(|y| - 1) = 0$.

До § 2

- 1** 10. Обчисліть:

- 1) $\sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$; 2) $\cos 180^\circ + \sin 90^\circ$;
3) $\cos 120^\circ + \sin 30^\circ$; 4) $\cos 135^\circ \cdot \sin 135^\circ$.

11. Чи правильно, що:

- 1) $\operatorname{tg} 45^\circ = -\operatorname{tg} 135^\circ$; 2) $\sin 30^\circ = -\sin 150^\circ$;
3) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$; 4) $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$?

2

12. Порівняйте:

1) $\sin 15^\circ$ і $\sin 43^\circ$;

2) $\cos 18^\circ$ і $\cos 37^\circ$;

3) $\sin 91^\circ$ і $\sin 120^\circ$;

4) $\cos 100^\circ$ і $\cos 170^\circ$.

13. Обчисліть:

1) $\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ$;

2) $9 - \cos^2 27^\circ - \sin^2 27^\circ$.

14. Знайдіть знак виразу:

1) $\sin 18^\circ$;

2) $\sin 125^\circ$;

3) $\cos 137^\circ$;

4) $\cos 81^\circ$;

5) $\operatorname{tg} 78^\circ$;

6) $\operatorname{tg} 92^\circ$.

15. Знайдіть $\cos \alpha$, якщо:

1) $\sin \alpha = 0,8$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3

16. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;

2) $1 - \cos^2 (90^\circ - \alpha)$.

17. Визначте знак різниці:

1) $\cos 127^\circ - \cos 118^\circ$;

2) $\sin 152^\circ - \sin 148^\circ$.

18. Відомо, що $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ і $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$. Чи можна стверджувати, що $\alpha = \beta$, якщо:

1) $\cos \alpha = \cos \beta$;

2) $\sin \alpha = \sin \beta$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$?

19. $ABCD$ – паралелограм. Доведіть, що $\sin A = \sin B$.

4

20. Знайдіть суму квадратів синусів гострих кутів прямокутного трикутника.

21. Доведіть тригонометричну тотожність:

$$\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 - \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$



22. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого синус кута при вершині дорівнює 0,4.

До § 3

1

23. Знайдіть координати середини відрізка KL , якщо:

1) $K(0; 4)$, $L(6; -2)$;

2) $K(-3; 5)$, $L(3; -5)$.

2

24. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:

1) $A(-1; 12)$, $B(6; -12)$;

2) $A(2; -7)$, $B(-2; -11)$.

25. Точки $C_1(2; -3)$ і $B_1(3; -1)$ – відповідно середини сторін AC і AB трикутника ABC . Вершина A має координати $(3; -5)$. Знайдіть координати вершин B і C .

3

26. Визначте вид трикутника ABC за сторонами (рівнобедрений, рівносторонній чи різносторонній), якщо:

1) $A(1; 4)$, $B(2; 8)$, $C(-3; 5)$;

2) $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3\sqrt{3})$;

3) $A(2; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(4; 5)$.

27. $ABCD$ – паралелограм, $O(4; 7)$ – точка перетину його діагоналей. Знайдіть координати вершин C і D , якщо відомо координати вершин $A(-2; 5)$ і $B(3; -4)$.

28. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника ABC , якщо: $A(2; -3)$, $B(6; -1)$, $C(5; -7)$.

29. Знайдіть довжини медіан трикутника ABC , якщо: $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(-4; -6)$.

30. На осях координат знайдіть точки, які розміщені на відстані 5 від точки $A(-3; 4)$.

31. Знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-5; 2)$ і $B(1; 4)$, якщо її абсциса й ордината між собою рівні.

4 32. Дано точки $A(-2; 5)$ і $B(6; 13)$. Знайдіть координати точки F , яка ділить відрізок AB у відношенні $7:1$, починаючи від точки A .

33. Точки $M(-2; 5)$, $N(4; -3)$, $P(0; 1)$ – середини сторін трикутника. Знайдіть координати його вершин.

34. Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо:

1) $A(3; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(-6; -5)$; 2) $A(0; 3)$, $B(4; 8)$, $C(1; 2)$?

Якщо відповідь ствердна, то визначте, яка з точок лежить між двома іншими.

35. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(4; -4)$, $C(8; -1)$ і $D(5; 3)$ є квадратом.

36. Знайдіть точку перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB з віссю ординат, якщо $A(-4; 2)$, $B(0; -2)$.

37. Доведіть, що всі кути трикутника з вершинами в точках $A(0; 4)$, $B(2; 3)$ і $C(1; 5)$ гострі.

38. Обчисліть кути трикутника з вершинами в точках $A(4; -1)$, $B(-1; 0)$, $C(2; 2)$.

До § 4

1 39. Які з рівнянь є рівняннями кола? Знайдіть для цих кіл координати центра та радіус:

1) $x^3 + y = 4$;

2) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 9$;

3) $x^2 + y^2 = 1$;

4) $x^2 - y^2 = 1$;

5) $x^2 + (y - 9)^2 = 25$;

6) $(x + 7)^2 + y^2 = 16$.

2 40. Складіть рівняння кола із центром у точці Q , діаметр якого дорівнює d : 1) $Q(0; -17)$, $d = 0,6$; 2) $Q(-4; 5)$, $d = 4\sqrt{5}$.

41. Коло задано рівнянням $(x - 1)^2 + y^2 = 16$. Чи належить цьому колу точка:

1) $A(5; 0)$;

2) $B(-2; 3)$;

3) $C(1; 4)$;

4) $D(0; -3)$;

5) $M(-3; 0)$;

6) $N(1; -4)$?

42. Точка Q – центр кола, а QA – його радіус. Складіть рівняння кола, якщо $Q(0; 4)$, $A(5; 16)$.

43. Складіть рівняння кола із центром у точці $(-3; -4)$, яке проходить через початок координат.

44. Складіть рівняння кола із центром у початку координат, яке проходить через точку $(-3; -4)$.

3 45. Які з точок належать колу із центром $Q(2; -1)$, радіус якого дорівнює 5:

1) $A(3; -8)$; 2) $B(5; -5)$; 3) $C(0; 4)$; 4) $D(6; -4)$?

46. У яких точках коло $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ перетинає:

1) вісь абсцис; 2) вісь ординат?

47. Складіть рівняння кола із центром $A(-4; 5)$, яке дотикається:

1) до осі абсцис; 2) до осі ординат.

48. Коло дотикається до координатних осей. Складіть рівняння цього кола, якщо до осі абсцис воно дотикається в точці $A(2; 0)$.

4 49. Знайдіть координати центра кола, радіус якого дорівнює 3 і яке дотикається до осей координат. Скільки розв'язків має задача?

50. Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і проходить через точку $A(2; 1)$.

51. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(0; -3)$ і $B(9; 0)$, якщо центр кола лежить на осі абсцис.

52. На осі абсцис знайдіть точки, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, якщо $A(6; 0)$, $B(14; 6)$.



53. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до трьох точок $A(0; 0)$, $B(1; 1)$ і $C(2; 2)$ дорівнює 7.

54. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин чи немає спільних точок):

1) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

До § 5

1 55. Чи належить прямій $2x + y = 0$ точка:

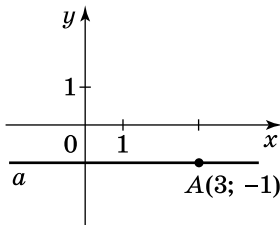
1) $A(2; 1)$; 2) $B(-1; 2)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(1; -3)$?

56. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої:

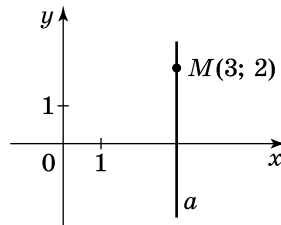
1) $y = 2x - 7$; 2) $y = -x + 3$;

3) $y = \frac{1}{2}x - 17$; 4) $y = -0,01x$.

2 57. Запишіть рівняння прямої a (мал. 2 і 3).



Мал. 2



Мал. 3

58. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, якщо вона утворює з додатним напрямком осі абсцис кут: 1) 45° ; 2) 120° .

59. Наведіть приклад рівняння прямої, яка:

- 1) паралельна прямій $y = 2x - 7$;
- 2) перетинає пряму $y = -3x + 5$;
- 3) паралельна прямій $2x - y - 9 = 0$;
- 4) перетинає пряму $3x + 2y - 15 = 0$.

60. Запишіть рівняння прямих, кожна з яких паралельна осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок, довжина якого дорівнює 2.

3

61. Складіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника, вершинами якого є точки $A(2; -3)$, $B(2; -5)$, $C(3; 7)$.

62. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку:

- 1) $A(0; 7)$; 2) $B(-2; 0)$; 3) $C(-3; 4)$; 4) $D(-1; -8)$.

63. Визначте коефіцієнти a і b у рівнянні прямої $ax + by - 1 = 0$, яка проходить через точки $(3; 2)$ і $(2; 3)$.

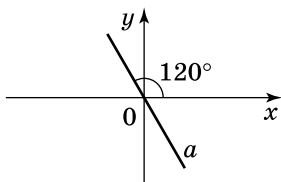
64. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $C(2; -1)$ і:

- 1) має кутовий коефіцієнт $-\frac{1}{3}$;

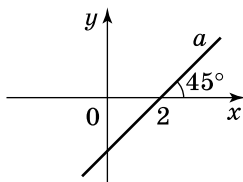
2) утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 30° .

65. Чи проходить пряма $x - 2y = 0$ через точку перетину прямих $2x + y - 5 = 0$ і $x - y - 1 = 0$?

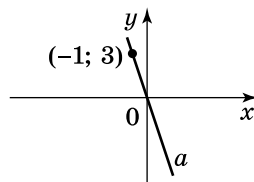
66. Складіть рівняння прямої a (мал. 4–6).



Мал. 4



Мал. 5



Мал. 6

67. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2; 3)$ і паралельна прямій $y = 3x + 7$.

4

68. Знайдіть периметр трикутника, обмеженого віссю абсцис і прямими $4x - 3y = 0$ і $8x - 15y + 72 = 0$.

69. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2)$ паралельно прямій MN , де $M(1; 4)$, $N(3; 6)$.

70. Складіть рівняння прямих, що містять сторони ромба, якщо його діагоналі завдовжки 8 і 4 лежать на осях координат, причому більша діагональ лежить на осі абсцис.

71. Складіть рівняння дотичних до кола радіуса 5 із центром у точці $Q(-2; 1)$, які паралельні осі абсцис.

72. Три вершини прямокутника містяться в точках $(0; 4)$, $(8; 4)$ і $(8; -2)$. У яких точках коло $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ перетинає сторони прямокутника?

73. Використовуючи результат задачі № 5.36 (с. 47), складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(1; -1)$ перпендикулярно до прямої:

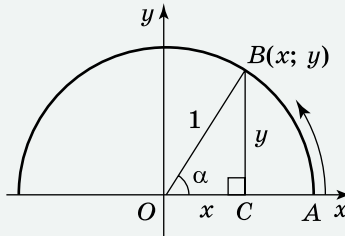
1) $2x - y + 7 = 0$; 2) MN , де $M(0; 2)$, $N(-2; 4)$.

74. Складіть рівняння прямої, що містить висоту AH трикутника з вершинами в точках $A(0; 3)$, $B(1; -3)$, $C(4; -9)$.



Головне в розділі I

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180° . ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ



Якщо $B(x; y)$ – точка одиничного півкола, що відповідає куту α (див. мал.), то

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Координати середини відрізка

Координати точки M – середини відрізка AB , де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Відстань між двома точками

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна знайти за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

РІВНЯННЯ КОЛА

Рівняння кола із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r має вигляд

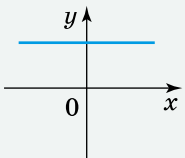
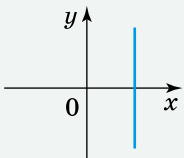
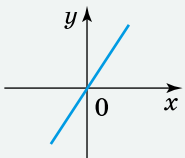
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Рівняння прямої у прямокутній системі координат має вигляд:

$$ax + by + c = 0,$$

де a, b, c – числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

Часткові випадки розташування прямої $ax + by + c = 0$ в декартовій системі координат		
$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$
$y = -\frac{c}{b}$	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{a}{b}x$
		

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, має вигляд:

- $x = m$, якщо $x_1 = x_2 = m$;
- $y = n$, якщо $y_1 = y_2 = n$;
- $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, якщо $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямком осі x .

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Умова паралельності прямих

Прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

РОЗДІЛ 2

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями векторної величини і вектора;
- **дізнаєтеся** про модуль, напрямок і координати вектора, колінеарність векторів;
- **навчитеся** будувати вектор, який дорівнює даному вектору, сумі або різниці векторів, добутку вектора на число; знаходити модуль вектора за його координатами; координати вектора, який є сумою або різницею даних векторів; скалярний добуток векторів.

§ 6. Вектор. Модуль і напрямок вектора. Колінеарні вектори. Рівність векторів

1. Скалярні та векторні величини. Вектор

Є величини, які цілком характеризуються своїм числовим значенням. Прикладами таких величин є довжина, площа, маса, час, температура та інші параметри. Такі величини називають *скалярними величинами*, або, коротше, *скалярами*.

Проте є величини, які, крім числового значення, задаються ще й напрямком. Такими є, наприклад, фізичні величини: сила, переміщення матеріальної точки, швидкість, прискорення. Щоб схарактеризувати рух автомобіля, часто недостатньо знати, з якою швидкістю він рухається; треба знати також, у якому напрямку.

Величини, що характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямком, називають *векторними величинами*, або *векторами*.

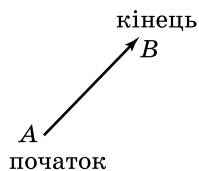
Зображають вектори в математиці напрямленим відрізком.

Відрізок, для якого визначено напрямок, називають *направленим відрізком*, або *вектором*.

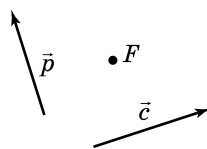
Вектор зручно зображувати відрізком зі стрілкою, яка показує напрямок вектора (мал. 6.1). Вектор позначають двома великими латинськими літерами, першу з яких вважають *початком* вектора, а другу – його *кінцем*, та стрілкою над ними.

Вектор, зображений на малюнку 6.1, записують так: $\overline{AB}$. Літера A – початок вектора $\overline{AB}$, літера B – його кінець.

Іноколи вектори позначають однією малою латинською літерою, наприклад вектори $\vec{p}$ і $\vec{c}$ (мал. 6.2).



Мал. 6.1



Мал. 6.2

2. Нульовий вектор

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називають *нульовим вектором*, або *нуль-вектором*. Такий вектор зображують точкою. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити літерою F , то цей нульовий вектор можна називати $\overline{FF}$ (мал. 6.2). Нульовий вектор позначають ще символом $\vec{0}$. Нульовий вектор напрямку не має.

3. Модуль вектора

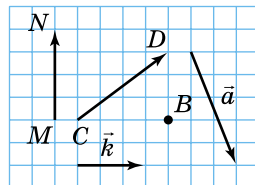
Модулем (довжиною або абсолютною величиною) вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка AB .

Модуль вектора $\overline{AB}$ позначають: $|\overline{AB}|$, вектора $\vec{p}$: $|\vec{p}|$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Приклад 1. Знайти модулі векторів, зображених на малюнку 6.3, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

Розв'язання. $|\overline{MN}| = 4$; $|\vec{k}| = 3$; $|\overline{CD}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$;

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$; $|\overline{BB}| = |\vec{0}| = 0$.



Мал. 6.3

4. Колінеарні вектори

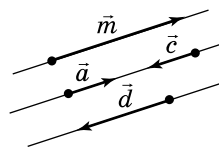
Колінеарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Наприклад, на малюнку 6.4 колінеарними є пари векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ тощо.

Для колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$ використовують запис: $\vec{a} \parallel \vec{m}$.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Колінеарні вектори бувають *співнаправленими*, тобто мають однаковий напрямок (вектори $\vec{a}$ і $\vec{m}$ на мал. 6.4), або *протилежно напрямленими* (вектори $\vec{a}$ і $\vec{d}$ на мал. 6.4). Записують так: $\vec{a} \uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \updownarrow \vec{d}$.

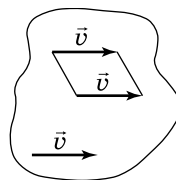


Мал. 6.4

5. Рівність векторів

Розглянемо поняття рівності векторів.

Нехай тіло рухається з певною швидкістю в певному напрямку (мал. 6.5). Тоді всі точки цього тіла рухаються із цією швидкістю в цьому напрямку. Тому всі напрям-



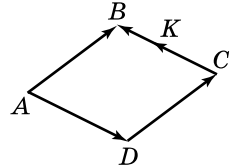
Мал. 6.5

лені відрізки (вектори) $\vec{v}$, якими зображено швидкості цих точок, є співнапрямленими і мають однакові модулі. Такі вектори називають *рівними*.

Два вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрямлені і їхні модулі між собою рівні.

Рівність векторів $\vec{AB}$ і $\vec{MN}$ записують так: $\vec{AB} = \vec{MN}$.

Приклад 2. $ABCD$ – ромб (мал. 6.6). Чи рівні вектори:

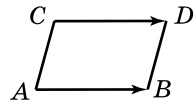


Мал. 6.6

- 1) $\vec{AB}$ і $\vec{DC}$; 2) $\vec{AB}$ і $\vec{AD}$; 3) $\vec{AD}$ і $\vec{CB}$; 4) $\vec{CB}$ і $\vec{CK}$?
- Розв'язання.* 1) Так, оскільки $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{DC}$ і $|\vec{AB}| = |\vec{DC}|$.
 2) Оскільки $\vec{AB}$ і $\vec{AD}$ не є співнапрямленими, то вони не є рівними.
 3) $\vec{AD}$ і $\vec{CB}$ також не є рівними, оскільки не є співнапрямленими.
 4) $\vec{CB} \uparrow\uparrow \vec{CK}$, але $|\vec{CB}| \neq |\vec{CK}|$, тому вектори $\vec{CB}$ і $\vec{CK}$ теж не є рівними.
- Відповідь:* 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) ні.



Приклад 3. Точки A, B, C і D не лежать на одній прямій. Тоді, якщо $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $ABDC$ – паралелограм. І навпаки, якщо $ABDC$ – паралелограм, то $\vec{AB} = \vec{CD}$. Доведіть.



Мал. 6.7

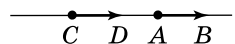
- Доведення.* 1) Нехай $\vec{AB} = \vec{CD}$ та $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ не лежать на одній прямій (мал. 6.7). Тоді $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$ і $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.
 За ознакою паралелограма, ураховуючи, що точки B і D лежать по один бік від прямої AC , отримаємо, що $ABDC$ – паралелограм.
 2) Нехай $ABDC$ – паралелограм, тоді $AB \parallel CD$ і $AB = CD$ (мал. 6.7).
 Тому $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$ і $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$. Отже, $\vec{AB} = \vec{CD}$. ■

6. Відкладання вектора, що дорівнює заданому, від заданої точки

Розглянемо, як від заданої точки відкласти вектор, що дорівнює даному. Якщо дано вектор $\vec{AB}$ і точку C , то відкласти вектор $\vec{AB}$ від точки C означає побудувати вектор $\vec{CD}$ такий, що $\vec{CD} = \vec{AB}$.

Приклад 4. Від точки C відкласти вектор, що дорівнює вектору $\vec{AB}$.

- Розв'язання. 1-й випадок.* Точка C лежить на прямій AB (мал. 6.8). Відкладемо від точки C у тому самому напрямку, що й у вектора $\vec{AB}$, відрізок CD (точка D належить прямій AB), який дорівнює відрізку AB . Тоді $\vec{CD} = \vec{AB}$.



Мал. 6.8

- 2-й випадок. Точка C не лежить на прямій AB (мал. 6.7). Будуємо паралелограм $ABDC$. Тоді $\overline{CD} = \overline{AB}$ (див. доведення попередньої задачі).
- Зауважимо, в обох випадках побудована точка D є єдиною.

А ще раніше...



Евдокс
Кнідський

Цікавість до векторів з'явилась у математиків XIX ст. у зв'язку з розвитком механіки й фізики, проте витoki числення з напрямленими відрізками виникли в далекому минулому.

Математики часів Піфагора та математики пізніших часів намагались зводити розв'язання питань арифметики й алгебри до розв'язування задач геометричним шляхом. Так було покладено початок геометричній теорії відношень Евдокса (408–355 рр. до н. е.), а пізніше – геометричній алгебрі.

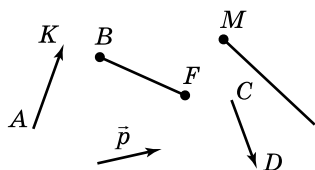
Сам термін *вектор* (від латинського *vector*, що можна перекласти як «той, що веде», «той, що переносить») запропонував Гамільтон. Він же описав і деякі операції векторного аналізу. Незабаром, завдяки роботам Геббса (кінець XIX ст.) та Хевісайда (початок XX ст.), векторний аналіз як частина математики набув сучасного вигляду.

- Які величини називають скалярними? Які величини називають векторними?
- Що називають вектором? Яка точка є початком вектора $\overline{MN}$, а яка – кінцем цього вектора? Як позначають вектори? Що називають модулем вектора $\overline{AB}$?
- Які вектори називають колінеарними? Якими можуть бути колінеарні вектори?
- Які вектори називають рівними? Що означає відкласти вектор $\overline{CD}$ від точки X ?

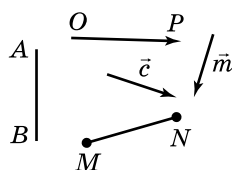


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 6.1. Запишіть вектори, зображені на малюнку 6.9.



Мал. 6.9



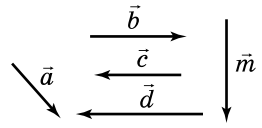
Мал. 6.10

- 6.2. Запишіть вектори, зображені на малюнку 6.10.
- 6.3. Позначте в зошиті точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$.
- 6.4. Позначте в зошиті точки P , L і K , що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overline{PL}$, $\overline{PK}$ і $\overline{KL}$.
- 6.5. За малюнком 6.11 запишіть усі пари:
1) колінеарних векторів;

- 2) співнаправлених векторів;
- 3) протилежно напрямлених векторів.

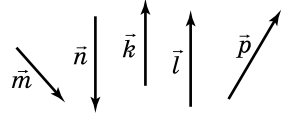
6.6. За малюнком 6.12 запишіть усі пари:

- 1) колінеарних векторів;
- 2) співнаправлених векторів;
- 3) протилежно напрямлених векторів.



Мал. 6.11

2 Накресліть довільний вектор $\overline{MN}$. Накресліть вектор $\overline{AB}$, співнаправлений з вектором $\overline{MN}$, та вектор $\overline{CD}$, протилежно напрямлений вектору $\overline{MN}$.



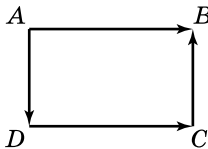
Мал. 6.12

- 1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів.
- 2) Чи є колінеарними вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?
- 3) Співнаправленими чи протилежно напрямленими є вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?

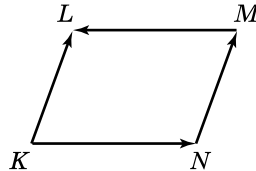
6.8. Накресліть довільний вектор $\vec{a}$. Накресліть вектор $\vec{b}$, співнаправлений з вектором $\vec{a}$, та вектор $\vec{c}$, протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$.

- 1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів.
- 2) Чи є колінеарними вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?
- 3) Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?

6.9. На малюнку 6.13 $ABCD$ – прямокутник. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають однакові модулі. Виконайте відповідні записи.



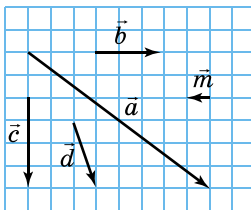
Мал. 6.13



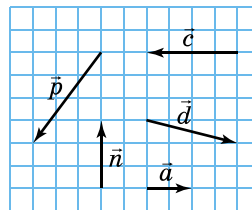
Мал. 6.14

6.10. На малюнку 6.14 $KLMN$ – паралелограм. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають однакові модулі. Виконайте відповідні записи.

6.11. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 6.15, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.



Мал. 6.15



Мал. 6.16

6.12. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 6.16, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

6.13. Накресліть два вектори, що:

- 1) мають рівні модулі і неколінеарні;
- 2) мають рівні модулі і співнапрямлені;
- 3) мають рівні модулі і протилежно напрямлені.

У якому випадку накреслені вектори рівні?

6.14. Дано вектор $\overline{CD}$. Від точки A відкладіть вектор $\overline{AB}$ такий, що $\overline{AB} = \overline{CD}$.

6.15. Дано вектор $\overline{AB}$. Від точки M відкладіть вектор $\overline{MN}$ такий, що $\overline{MN} = \overline{AB}$.

3 6.16. $KLMN$ – ромб, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, рівний вектору:

- 1) $\overline{LM}$; 2) $\overline{KL}$; 3) $\overline{OK}$; 4) $\overline{NO}$.

6.17. $ABCD$ – квадрат, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, що дорівнює вектору:

- 1) $\overline{AB}$; 2) $\overline{DA}$; 3) $\overline{BO}$; 4) $\overline{OA}$.

6.18. (Усно.) Чи можуть бути рівними вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$, якщо точки A і B різні?

6.19. Дано точки $A(-2; 1)$, $B(0; 2)$, $M(1; -1)$. Відкладіть від точки M вектор $\overline{MN}$, що дорівнює вектору $\overline{AB}$. Якими є координати точки N ?

6.20. Дано точки $C(1; -3)$, $D(-1; -2)$, $P(3; -1)$. Відкладіть від точки P вектор $\overline{PK}$, рівний вектору $\overline{CD}$. Якими є координати точки K ?

6.21. У прямокутнику $ABCD$: $AB = 3$, $BC = 4$, M – середина BC . Знайдіть модулі векторів $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AM}$.

6.22. У квадраті $ABCD$ діагональ AC дорівнює $4\sqrt{2}$, N – середина AD . Знайдіть модулі векторів $\overline{BD}$, $\overline{AB}$, $\overline{DN}$, $\overline{BN}$.

6.23. (Усно.) Чи правильне твердження:

- 1) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; 2) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
- 3) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$; 4) якщо $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$;
- 5) якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$?

4 6.24. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

- 1) $\overline{AB} = \overline{DC}$, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$; 2) $\overline{BC} \uparrow \uparrow \overline{AD}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ – неколінеарні.

6.25. У чотирикутнику $ABCD$: $\overline{AB} = \overline{DC}$, точка E – середина BC . Пряма AE перетинає промінь DC у точці F . Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ укажіть усі пари:

- 1) колінеарних векторів; 2) співнапрямлених векторів;
- 3) протилежно напрямлених векторів;
- 4) рівних векторів; 5) векторів, що мають рівні модулі.

6.26. У чотирикутнику $ABCD$ $\overline{AB} = \overline{DC}$. Через точку O перетину його діагоналей проведено пряму, що перетинає сторони BC і AD у точках E і F відповідно, причому $BE \neq EC$. Серед векторів $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{CF}$ укажіть усі пари:

- 1) колінеарних векторів;
- 2) співнаправлених векторів;
- 3) протилежно направлених векторів;
- 4) рівних векторів;
- 5) векторів, що мають рівні модулі.



Вправи для повторення

6.27. Точка M – середина відрізка AB . Знайдіть координати точки:

- 1) A , якщо $M(-2; 5)$, $B(0; -7)$;
- 2) B , якщо $A(7; -1)$, $M(1,5; 2,5)$.

6.28. Знайдіть на осі абсцис точку A , відстань від якої до точки $B(7; 5)$ дорівнює 13.

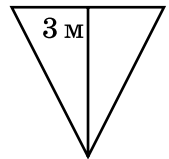
6.29. Дано відрізки a і b ($a > b$). Використовуючи метричні співвідношення у прямокутному трикутнику, побудуйте відрізок:

- 1) $x = \sqrt{ab}$;
- 2) $y = \sqrt{a(a - b)}$.



Життєва математика

6.30. Канал, який має в перерізі форму трикутника, 3 м завглибшки перегороджено вертикально щитом у формі рівностороннього трикутника. Щоб визначити гідростатичний тиск на цей щит, потрібно знати його площу. Обчисліть площу щита (з точністю до сотих м^2).



Цікаві задачі – поміркуй одначе

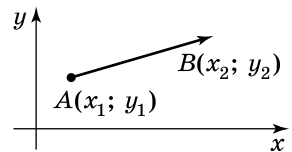
6.31. Якого найменшого значення може набувати вираз $\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$? За яких значень x і y досягається це значення?

§ 7. Координати вектора

1. Означення координат вектора

Якщо на площині ввести систему координат, то кожен вектор можна задати парою чисел – *координатами вектора*.

Координатами вектора $\overline{AB}(x; y)$ з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$ (мал. 7.1).



Мал. 7.1

Записують вектор $\overline{AB}$, указуючи його координати, так: $\overline{AB}(x; y)$. Наприклад, $\overline{KL}(3; -4)$, $\vec{a}(0; -2)$.

Приклад 1. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, якщо:

- 1) $A(-2; 5)$, $B(7; 3)$; 2) $A(-4; 8)$, $B(-4; 10)$.

Розв'язання. 1) За означенням координат вектора маємо:

$x = 7 - (-2) = 9$; $y = 3 - 5 = -2$, отже, $\overline{AB}(9; -2)$.

2) Аналогічно, $x = -4 - (-4) = 0$; $y = 10 - 8 = 2$, отже, $\overline{AB}(0; 2)$.

Відповідь: 1) $(9; -2)$; 2) $(0; 2)$.

Координатами вектора можуть бути будь-які дійсні числа. Обидві координати нуль-вектора дорівнюють нулю: $\vec{0}(0; 0)$.

2. Модуль вектора, що задано координатами

Відстань AB між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ знаходять за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Оскільки $x_2 - x_1 = x$ і $y_2 - y_1 = y$, то

модуль вектора $\overline{AB}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Отже, $|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Приклад 2. Знайти модуль вектора: 1) $\overline{MN}(3; -4)$; 2) $\overline{CD}(4; -1)$.

Розв'язання.

1) $|\overline{MN}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$; 2) $|\overline{CD}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

Відповідь: 1) 5; 2) $\sqrt{17}$.

Приклад 3. Модуль вектора $\vec{p}(-6; y)$ дорівнює 10. Знайти y .

Розв'язання. 1) $|\vec{p}| = \sqrt{(-6)^2 + y^2} = \sqrt{36 + y^2}$.

2) За умовою $\sqrt{36 + y^2} = 10$; тобто $36 + y^2 = 100$.

Розв'язавши отримане рівняння, матимемо $y_{1,2} = \pm 8$.

Відповідь: 8 або -8.

3. Рівність векторів, що задано координатами



Теорема (про рівність векторів). У рівних векторів відповідні координати рівні, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Доведення. Розглянемо вектор $\overline{AB}$, де $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, тоді $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

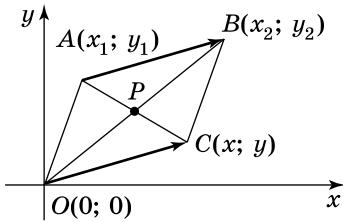
1) Нехай вектор $\overline{AB}$ не лежить на жодній з координатних осей (мал. 7.2). Відкладемо від точки $O(0; 0)$ вектор $\overline{OC} = \overline{AB}$, де $C(x; y)$. Тоді $\overline{OC}(x; y)$. У паралелограмі $ABCO$ точка $P(x_0; y_0)$ – точка перетину діагоналей. Тоді за формулою координат середини відрізка:

$$x_0 = \frac{x_1 + x}{2} = \frac{x_2 + 0}{2} \text{ і } y_0 = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{y_2 + 0}{2}.$$

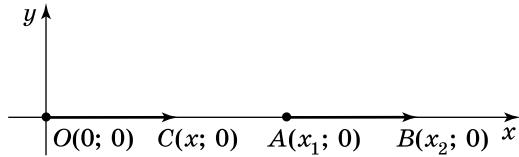
Звідки маємо: $x_1 + x = x_2$, $y_1 + y = y_2$, а тому $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, тобто $\overline{OC}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Отже, відповідні координати векторів $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ рівні.

Якщо вектор $\overline{AB}$ лежить на осі x (мал. 7.3), то $x - 0 = x_2 - x_1$, тобто $x = x_2 - x_1$, отже, відповідні координати векторів $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ рівні.

Аналогічно доводимо у разі, якщо $\overline{AB}$ лежить на осі y .



Мал. 7.2



Мал. 7.3

2) Нехай відповідні координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{OC}$ рівні (мал. 7.2), тобто $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$. Тому $x + x_1 = x_2$; $y + y_1 = y_2$.

У чотирикутнику $ABCO$ точка P_1 – середина AC ; $x_{P_1} = \frac{x_1 + x}{2}$; $y_{P_1} = \frac{y_1 + y}{2}$; точка P_2 – середина BO ; $x_{P_2} = \frac{x_2}{2}$; $y_{P_2} = \frac{y_2}{2}$.

Але $x + x_1 = x_2$ і $y + y_1 = y_2$, тому точки P_1 і P_2 збігаються, тобто середини діагоналей чотирикутника $ABCO$ збігаються. При цьому точка P_1 ділить кожну з них навпіл. Отже, $ABCO$ – паралелограм, а тому $\overline{AB} = \overline{OC}$.

Якщо вектори $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ лежать на осі x і $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ (мал. 7.3), то очевидно, що $|\overline{OC}| = |\overline{AB}|$, а тому й $\overline{OC} = \overline{AB}$, оскільки вектори $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ співнаправлені.

Аналогічно доводимо у разі, якщо $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ лежать на осі y . ■

Приклад 4. Дано точки $M(-3; 4)$, $N(5; -7)$, $C(4; -2)$, $D(x; y)$. Знайти x

і y , якщо $\overline{MN} = \overline{CD}$.

Розв'язання. 1) $\overline{MN}(5 - (-3); -7 - 4)$, тобто $\overline{MN}(8; -11)$, $\overline{CD}(x - 4; y - (-2))$, тобто $\overline{CD}(x - 4; y + 2)$.

2) Але $\overline{MN} = \overline{CD}$, тому $x - 4 = 8$ і $y + 2 = -11$, тобто $x = 12$, $y = -13$.

Відповідь: $x = 12$, $y = -13$.



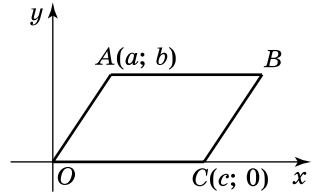
Що таке координати вектора? Як знайти модуль вектора $\overline{AB}(x; y)$? Доведіть, що рівні вектори мають рівні координати, а вектори з відповідно рівними координатами – рівні.



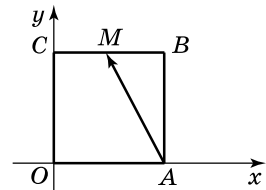
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 7.1.** Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) $A(-3; 5), B(4; -7)$; 2) $A(2; -7), B(2; 3)$.
- 7.2.** Знайдіть координати вектора $\overline{CD}$, якщо:
1) $C(4; -7), D(8; -2)$; 2) $C(5; -1), D(1; -1)$.
- 7.3.** Знайдіть модуль вектора: 1) $\vec{a}(-3; 4)$; 2) $\vec{b}(12; 5)$.
- 7.4.** Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{m}(6; -8)$; 2) $\vec{n}(8; 15)$.
- 7.5.** Дано: $\vec{m}(x; -5), \vec{n}(4; y), \vec{m} = \vec{n}$. Знайти: x і y .
- 7.6.** Дано: $\vec{a}(7; y), \vec{b}(x; -2), \vec{a} = \vec{b}$. Знайти: x і y .
- 7.7.** Знайдіть координати вектора $\overline{CD}$ та його модуль:
1) $C(5; -4), D(4; -7)$; 2) $C(-2; 5), D(0; 8)$.
- 7.8.** Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$ та його модуль:
1) $A(7; -2), B(6; 0)$; 2) $A(2; 7), B(4; 11)$.
- 7.9.** Чи рівні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{MN}$, якщо:
1) $A(5; 7), B(6; -1), M(8; -2), N(9; -10)$;
2) $A(6; -1), B(0; -2), M(4; 5), N(-2; 6)$?
- 7.10.** Чи рівні вектори $\overline{CD}$ і $\overline{PK}$, якщо:
1) $C(4; -2), D(8; -5), P(7; -1), K(3; -4)$;
2) $C(0; 4), D(7; 0), P(-3; 2), K(4; -2)$?
- 7.11.** Порівняйте модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(4; 1), |\vec{b}| = 4$; 2) $\vec{a}(2; 1), \vec{b}(-1; 2)$.
- 7.12.** Порівняйте модулі векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:
1) $|\vec{c}| = 3, \vec{d}(-3; 1)$; 2) $\vec{c}(-1; 4), \vec{d}(4; 1)$.
- 7.13.** Задано вектори $\vec{a}(-6; 8)$ і $\vec{b}(-12; -5)$. Знайдіть значення $|\vec{a}| + |\vec{b}|$, відтак дізнаєтеся, скільки загалом нагород здобула збірна України на перших літніх Олімпійських іграх 1996 р. Дізнайтеся з інтернету про інші досягнення українських спортсменів на олімпійських іграх.
- 7.14.** Задано вектори $\vec{c}(12; -16)$ і $\vec{d}(8; 15)$. Знайдіть значення $|\vec{c}| - |\vec{d}|$, відтак дізнаєтеся, яке загальнокомандне місце посіла паралімпійська збірна України на іграх 2016 р., здобувши 41 золоту, 37 срібних і 39 бронзових нагород. Дізнайтеся з інтернету про героїв тієї Олімпіади.

- 7.15. Дано точки $C(2; -3)$, $D(4; -5)$, $M(3; 5)$, $N(x; y)$. Знайдіть x і y , якщо $\overline{CD} = \overline{MN}$.
- 7.16. Дано точки $A(2; -5)$, $B(3; -6)$, $C(x; y)$, $D(0; 5)$. Знайдіть x і y , якщо $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- 3** 7.17. Вектор $\vec{a}(4; -7)$ відкладено від точки $P(-2; 5)$. Знайдіть координати кінця вектора.
- 7.18. Вектор $\vec{b}(-3; 2)$ відкладено від точки $M(4; -1)$. Знайдіть координати кінця вектора.
- 7.19. Точка $A(-2; 7)$ – кінець вектора $\vec{c}(7; -5)$. Знайдіть координати початку вектора.
- 7.20. Точка $B(1; -8)$ – кінець вектора $\vec{d}(-3; 0)$. Знайдіть координати початку вектора.
- 7.21. Знайдіть координати вершини B паралелограма $ABCO$ (мал. 7.4).
- 7.22. Сторона квадрата дорівнює 6 (мал. 7.5). Знайдіть координати вектора $\overline{AM}$, де M – середина BC .
- 7.23. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; -2)$, $D(4; -5)$.
- 7.24. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $KLMN$ є паралелограмом, якщо $K(0; -2)$, $L(3; 0)$, $M(7; 2)$, $N(4; 0)$.
- 7.25. Модуль вектора $\vec{a}(x; -3)$ дорівнює 5. Знайдіть x .
- 7.26. Модуль вектора $\vec{b}(-8; y)$ дорівнює 10. Знайдіть y .
- 4** 7.27. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(4; 2)$, $B(5; 5)$, $C(4; 8)$ і $D(3; 5)$ – ромб.
- 7.28. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(4; 0)$ і $D(4; 4)$ – прямокутник.
- 7.29. Модуль вектора $\vec{a}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{10}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо координата x цього вектора на 2 більша за координату y .
- 7.30. Модуль вектора $\vec{b}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{5}$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо їх сума дорівнює 1.
- 7.31. Знайдіть рівняння координат усіх таких точок B , що вектор $\overline{AB}$ має той самий модуль, що і вектор $\vec{a}(2; -3)$, якщо $A(4; 5)$.



Мал. 7.4



Мал. 7.5



Вправи для повторення

- 7.32. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційні числам:
 1) 5, 7, 2; 2) 5, 6, 7; 3) 11, 8, 2?

- 7.33. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 14 см і 17 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, сума найбільшої і найменшої сторін якого дорівнює 70 см.
- 7.34. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5:3. Знайдіть периметр трикутника, якщо його бічна сторона на 3 см менша від основи.



Життєва математика

- 7.35. Щоб засіяти 1 м² землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 180 грн. Скільки коштів знадобиться, щоб засіяти газонною травою клумбу прямокутної форми зі сторонами 30 м і 20 м?



Цікаві задачі – поміркуй окремо

- 7.36. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC . Бісектриса кута ABC перетинає середню лінію трапеції в точці N , а основу AD – у точці K . Чи можна знайти градусну міру кута ANB ? У разі ствердної відповіді знайдіть градусну міру цього кута.

§ 8. Додавання та віднімання векторів

1. Додавання векторів, що задані координатами. Властивості додавання векторів

Як і числа, вектори можна додавати та віднімати. Результатом додавання або віднімання векторів є вектор.

Сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Наприклад, сумою векторів $\vec{a}(-5; 2)$ і $\vec{b}(4; -11)$ є вектор $\vec{c}(-5 + 4; 2 + (-11))$, тобто $\vec{c}(-1; -9)$.

Для суми векторів справджуються рівності:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переставна властивість додавання);
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (сполучна властивість додавання).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати, що стоять у лівій і правій частинах рівностей. Ці координати рівні між собою, а вектори з відповідно рівними координатами рівні.

Приклад 1. За якого значення x модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ буде найменшим, якщо $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(x; 4)$, $\vec{c}(3; 8)$?

Розв'язання. 1) Нехай $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Тоді $\vec{d}(-2 + x + 3; 3 + 4 + 8)$, тобто $\vec{d}(x + 1; 15)$.

2) Знайдемо його модуль: $|\vec{d}| = \sqrt{(x + 1)^2 + 15^2}$. Модуль вектора $\vec{d}$ буде найменшим, коли вираз $(x + 1)^2$ набуватиме найменшого значення. Це значення дорівнює 0 і досягається, якщо $x = -1$.

Відповідь: $x = -1$.

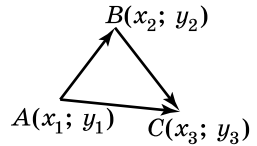
2. Правило трикутника додавання векторів



Теорема (правило трикутника додавання векторів). Хоч які були б точки A , B і C , справджується рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Доведення. Нехай $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ – дані точки (мал. 8.1). Тоді $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{BC}(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$. Позначимо $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, маємо:



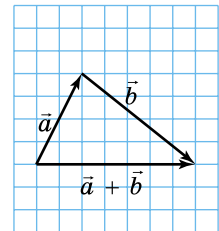
Мал. 8.1

$$\vec{m}(x_2 - x_1 + x_3 - x_2; y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = \vec{m}(x_3 - x_1; y_3 - y_1).$$

Отже, $\vec{m} = \overrightarrow{AC}$, тому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. ■

Отже, приходимо до правила побудови суми двох довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – *правила трикутника* (мал. 8.2):

- 1) від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}$;
- 2) будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



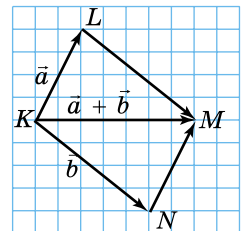
Мал. 8.2

3. Правило паралелограма додавання векторів

Суму двох векторів можна знаходити і за *правилом паралелограма* (мал. 8.3):

- 1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку (точки K);
- 2) будуємо на цих векторах паралелограм;
- 3) будуємо вектор, що є діагоналлю паралелограма, яка виходить із точки K ; цей вектор і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Справді $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$, але $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KN}$, тому $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KM}$; $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{KM}$.



Мал. 8.3

Зауважимо, що за правилом трикутника можна знайти суму будь-яких двох векторів, а за правилом паралелограма – лише неколінеарних.

4. Віднімання векторів, що задані координатами

Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{d}(x_3; y_3)$ такий, що $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$.

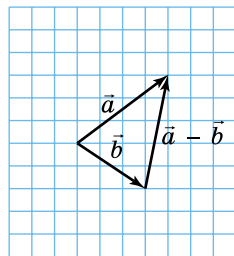
Маємо: $x_3 + x_2 = x_1$, $y_3 + y_2 = y_1$. Тоді $x_3 = x_1 - x_2$, $y_3 = y_1 - y_2$.
Отже,

різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ буде вектор $\vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

5. Побудова різниці двох векторів

Оскільки $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 8.1), то $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Звідси отримаємо правило побудови різниці двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 8.4):

- 1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку;
- 2) будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{a}$, що і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

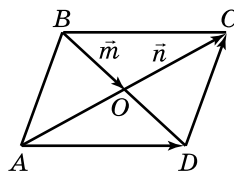


Мал. 8.4

Приклад 2. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 8.5), $\overrightarrow{BO} = \vec{m}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{n}$. Визначити вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

Розв'язання.

- 1) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{m} + \vec{n}$.
Але $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$.
 - 2) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$, звідси $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.
Але $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$, тому $\overrightarrow{DC} = \vec{n} - \vec{m}$.
- Відповідь:** $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{n} - \vec{m}$.



Мал. 8.5

А ще раніше...

У «Началах» Евкліда дії додавання і віднімання зводилися до додавання і віднімання відрізків, а дія множення – до побудови прямокутника на відрізках, довжини яких дорівнюють довжинам множників.

1587 р. голландською мовою було опубліковано трактат фламандського вченого С. Стевена «Початки статки». У ньому автор розглянув додавання двох взаємно перпендикулярних сил та прийшов до висновку, що для розв'язування цієї задачі необхідно скористатися «паралелограмом сил». Також С. Стевен увів стрілки для позначення сил.

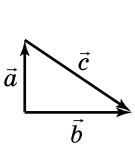
Значно пізніше французький математик Луї Пуансо (1777–1859) у праці «Елементи статики», що вийшла 1803 р., розробив теорію векторів, що відповідають силам, які діють у різних напрямках.

- ? Який вектор називають сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про правило трикутника додавання векторів. ○ Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів. ○ Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів. ○ Що називають різницею двох векторів? ○ Як знайти різницю векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$? ○ Сформулюйте правило побудови різниці двох векторів.

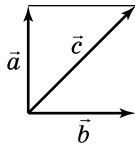


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

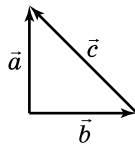
- 1** 8.1. Знайдіть суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
 1) $\vec{a}(2; -5)$, $\vec{b}(4; 7)$; 2) $\vec{a}(-3; 8)$, $\vec{b}(3; -11)$.
- 8.2. Знайдіть суму $\vec{c} + \vec{d}$, якщо:
 1) $\vec{c}(4; -7)$, $\vec{d}(-2; 5)$; 2) $\vec{c}(4; -7)$, $\vec{d}(-6; 7)$.
- 8.3. Знайдіть різницю $\vec{c} - \vec{d}$, якщо:
 1) $\vec{c}(8; -5)$, $\vec{d}(4; 0)$; 2) $\vec{c}(2; -3)$, $\vec{d}(5; -2)$.
- 8.4. Знайдіть різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
 1) $\vec{a}(4; -2)$, $\vec{b}(5; -7)$;
 2) $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(4; 0)$.
- 8.5. (Усно.) На яких із малюнків 8.6–8.10 вектор $\vec{c}$ є сумою $\vec{a} + \vec{b}$, а на яких – різницею $\vec{a} - \vec{b}$?



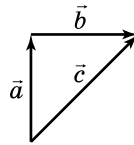
Мал. 8.6



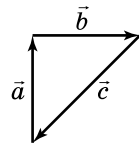
Мал. 8.7



Мал. 8.8



Мал. 8.9



Мал. 8.10

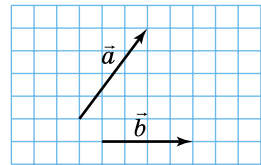
- 2** 8.6. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 8.11). Побудуйте вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

- 8.7. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте вектор $\vec{m} = \vec{c} + \vec{d}$.

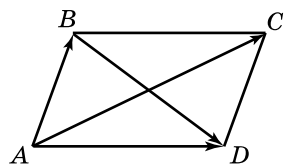
- 8.8. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Побудуйте вектор $\vec{p} = \vec{m} - \vec{n}$.

- 8.9. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 8.11). Побудуйте вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

- 8.10. Дано паралелограм $ABCD$ (мал. 8.12). Виразіть вектори $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$ через вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AD}$.



Мал. 8.11



Мал. 8.12

8.11. Дано: $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(x; y)$, $\vec{c}(-2; 8)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Знайти: $x + y$. Дізнається, скільки разів українські атлети ставали призерами змагань із силової атлетики «Найсильніша людина світу» (*World's Strongest Man*).

8.12. Дано: $\vec{a}(3; -1)$, $\vec{b}(x; y)$, $\vec{c}(0; 2)$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Знайти: x та y .

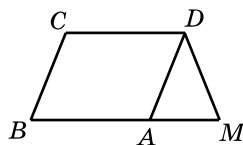
3 8.13. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму:

- 1) $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AB} + \overline{DA} + \overline{BC} + \overline{CD}$;
3) $\overline{CB} + \overline{CD} + \overline{AB} + \overline{BD}$; 4) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CA}$.

8.14. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму:

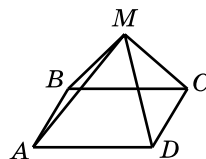
- 1) $\overline{CB} + \overline{AD} + \overline{BA}$; 2) $\overline{BD} + \overline{CB} + \overline{AB}$.

8.15. $ABCD$ – паралелограм (мал. 8.13). Доведіть, що $\overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CA} = \overline{MD} + \overline{CB}$.



Мал. 8.13

8.16. $ABCD$ – паралелограм (мал. 8.14). Доведіть, що $\overline{BM} + \overline{MD} + \overline{DC} = \overline{MD} + \overline{AM}$.



Мал. 8.14

8.17. Доведіть, що для будь-яких точок K, L, M, T справджується рівність $\overline{MK} + \overline{LM} = \overline{LT} + \overline{TK}$.

8.18. Дано точки $A(0; -8)$ і $B(10; 0)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overline{AK} - \overline{KB} = \vec{0}$.

8.19. Дано точки $C(6; 0)$ і $D(0; -18)$. Знайдіть координати точки A такої, що $\overline{CA} + \overline{DA} = \vec{0}$.

4 8.20. Дано вектори $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(3; -4)$, $\vec{c}(x; 8)$. За якого значення x модуль вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ буде найменшим?

8.21. Дано вектори $\vec{p}(4; -3)$, $\vec{m}(9; y)$, $\vec{n}(-2; 5)$. За якого значення y модуль вектора $\vec{p} + \vec{m} - \vec{n}$ буде найменшим?



Вправи для повторення

8.22. $ABCD$ – трапеція з основами AB і CD . Укажіть усі пари векторів:
1) співнаправлених; 2) протилежно направлених.

8.23. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 4 см. Знайдіть висоту, проведenu до більшої сторони.

8.24. Знайдіть значення виразу $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 5$.



Життєва математика

8.25. Брус, поперечним перерізом якого є прямокутник, має найбільшу міцність тоді, коли перпендикуляри, проведені з протилежних вершин цього прямокутника до його діагоналі, ділять її на три рівні частини. Визначте з точністю до десятих сантиметра, яких максимальних розмірів можна випилати брус із колоди циліндричної форми діаметром 36 см.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.26. (Національна олімпіада Швеції, 1982 р.) Доведіть, що коли для деякої точки O , яка лежить у внутрішній області чотирикутника $ABCD$, площі трикутників ABO , BCO , CDO і DAO рівні між собою, то ця точка належить хоча б одній з діагоналей AC або BD .

§ 9. Множення вектора на число

1. Множення вектора, який задано координатами, на число.

Властивості множення вектора на число

Знаючи, що таке сума векторів, можна розглядати суми вигляду $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{m} + \vec{m} + \vec{m}$ тощо. Такі суми, як і в алгебрі, будемо записувати у вигляді добутків $2\vec{a}$, $3\vec{m}$ тощо.

Результатом множення вектора на число є вектор.

Добутком вектора $\vec{a}(x; y)$ на число λ називають вектор $\lambda\vec{a}(\lambda x; \lambda y)$.

Наприклад, добутком вектора $\vec{a}(-5; 4)$ на число -1 є вектор $-\vec{a}(5; -4)$, на число 2 – вектор $2\vec{a}(-10; 8)$, на число 3 – вектор $3\vec{a}(-15; 12)$.

Для добутку вектора на число справджуються *властивості*:

для будь-яких вектора $\vec{a}$ і чисел α і β

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};$$

для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і числа α

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати лівої і правої частин рівностей. Ці координати між собою рівні, а отже, рівні і вектори.

За означенням суми, різниці векторів та добутку вектора на число можна визначити координати будь-якого вектора, записаного у вигляді алгебраїчної суми векторів, координати яких відомі.

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a}(2; -5)$ і $\vec{b}(-4; 1)$. Знайти координати векто-

ра: 1) $\vec{m} = 2\vec{a} + 7\vec{b}$; 2) $\vec{n} = 9\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання. Розв'язання зручно записати так:

$$\begin{array}{rcl} 1) & 2\vec{a}(4; -10) & 2) \quad 9\vec{a}(18; -45) \\ & + 7\vec{b}(-28; 7) & - \vec{b}(-4; 1) \\ \hline & \vec{m}(-24; -3) & \vec{n}(22; -46) \end{array}$$

Відповідь: 1) $\vec{m}(-24; -3)$;

2) $\vec{n}(22; -46)$.

2. Теорема про добуток вектора на число



Теорема (про добуток вектора на число). Модуль вектора $\lambda \vec{a}$ дорівнює $|\lambda| |\vec{a}|$. Вектор $\lambda \vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Доведення. Побудуємо в координатній площині вектори $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$, що відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\lambda \vec{a}$, де точка O – початок координат (мал. 9.1).

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати $\vec{a}(x_0; y_0)$, тоді маємо: $\lambda \vec{a}(\lambda x_0; \lambda y_0)$, $A(x_0; y_0)$, $B(\lambda x_0; \lambda y_0)$.

Складемо рівняння прямої OA :

$$\frac{x - 0}{x_0 - 0} = \frac{y - 0}{y_0 - 0},$$

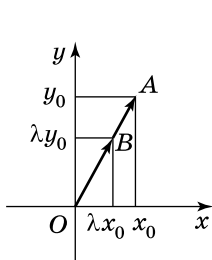
спростивши яке, отримаємо:

$$y_0 x - x_0 y = 0.$$

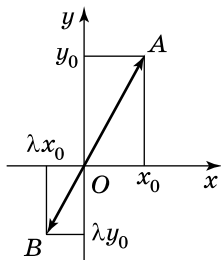
Координати точки B задовольнятимуть це рівняння. Справді:

$$y_0 \cdot \lambda x_0 - x_0 \cdot \lambda y_0 = 0.$$

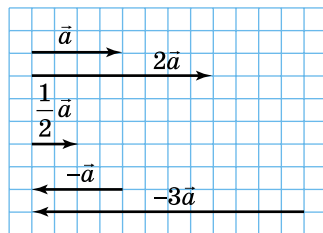
Це означає, що точка B належить прямій OA . У разі, коли вона належить променю OA , її координати λx_0 і λy_0 мають відповідно ті самі знаки, що й координати x_0 і y_0 точки A (мал. 9.1). У разі, коли точка B лежить на доповняльному до OA промені, її координати λx_0 і λy_0 матимуть знаки, протилежні до знаків координат x_0 і y_0 точки A (мал. 9.2).



Мал. 9.1



Мал. 9.2



Мал. 9.3

Якщо $\lambda > 0$, то точка B лежатиме на промені OA , а якщо $\lambda < 0$, то точка B лежатиме на доповняльному до OA промені. Тому якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\lambda \vec{a}$ – співнапрямлені, а якщо $\lambda < 0$, то вони – протилежно напрямлені.

Знайдемо модуль вектора $\lambda \vec{a}$:

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{(\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |\lambda| |\vec{a}|. \quad \blacksquare$$

На малюнку 9.3 для даного вектора $\vec{a}$ побудовано вектори $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$.

3. Умова колінеарності векторів

Із прикладу вище та доведеної теореми випливає важливий висновок:

вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

Нехай дано вектори $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$. Якщо вони колінеарні, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $x_2 = \lambda x_1$ і $y_2 = \lambda y_1$. Тоді (якщо $x_1 \neq 0$ і $y_1 \neq 0$) маємо, що $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$ і $\lambda = \frac{y_2}{y_1}$, тому $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, тобто *координати колінеарних векторів пропорційні*.

Отже, приходимо до умови колінеарності векторів:

Нехай $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ – довільні вектори. Тоді, якщо:

1) $x_1 = x_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(0; y_1)$ і $\vec{b}(0; y_2)$ – колінеарні; причому, якщо $\frac{y_2}{y_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\frac{y_2}{y_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

2) $y_1 = y_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(x_1; 0)$ і $\vec{b}(x_2; 0)$ – колінеарні; причому, якщо $\frac{x_2}{x_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\frac{x_2}{x_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

3) $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$, причому, якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Приклад 2. За якого значення x вектори $\vec{a}(2; -7)$ і $\vec{b}(x; 21)$ колінеарні?

• Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

• *Розв'язання.* 1) Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\frac{x}{2} = \frac{21}{-7}$, звідки $x = -6$.

• 2) Оскільки $\frac{-6}{2} = \frac{21}{-7} = -3 < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

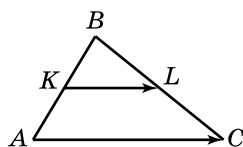
• *Відповідь:* $x = -6$; протилежно напрямлені.

? Який вектор називають добутком вектора $\vec{a}(x; y)$ на число λ ? **○** Сформулюйте і доведіть теорему про добуток вектора на число. **○** Сформулюйте умови колінеарності векторів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 9.1. Дано: $\vec{a}(2; -4)$. Знайдіть:
 1) $2\vec{a}$; 2) $-3\vec{a}$; 3) $4\vec{a}$; 4) $-\vec{a}$; 5) $0,5\vec{a}$; 6) $-10\vec{a}$.
- 9.2. Дано: $\vec{b}(-6; 2)$. Знайдіть:
 1) $3\vec{b}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\vec{b}$; 5) $10\vec{b}$; 6) $-5\vec{b}$.
- 9.3. Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
 1) $\vec{a} = 2\vec{b}$; 2) $\vec{b} = -3\vec{a}$?
- 9.4. Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:
 1) $\vec{n} = -2\vec{m}$; 2) $\vec{m} = 3\vec{n}$?
- 2** 9.5. Накресліть вектор $\vec{b}$. Побудуйте вектор:
 1) $2\vec{b}$; 2) $-\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-3\vec{b}$; 5) $2,5\vec{b}$; 6) $-1,5\vec{b}$.
- 9.6. Накресліть вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор:
 1) $3\vec{a}$; 2) $-\vec{a}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{a}$; 4) $2\vec{a}$; 5) $-3,5\vec{a}$; 6) $1,5\vec{a}$.
- 9.7. На малюнку 9.4 KL – середня лінія трикутника ABC . Виразіть:
 1) $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{KL}$; 2) $\overrightarrow{KL}$ через $\overrightarrow{AC}$.
- 9.8. Дано вектори $\vec{m}(-1; 2)$ і $\vec{n}(3; 1)$. Знайдіть координати вектора:
 1) $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$; 2) $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$;
 3) $\vec{c} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$; 4) $\vec{d} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$.
- 9.9. Дано вектори $\vec{a}(1; -5)$ і $\vec{b}(4; -1)$. Знайдіть координати вектора:
 1) $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$; 3) $\vec{k} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$; 4) $\vec{l} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 9.10. Чи колінеарні вектори:
 1) $\vec{a}(2; -3)$ і $\vec{b}(6; -9)$; 2) $\vec{a}(-1; 5)$ і $\vec{b}(2; 10)$?
- 9.11. Чи колінеарні вектори:
 1) $\vec{m}(-3; 1)$ і $\vec{n}(9; 3)$; 2) $\vec{m}(4; -1)$ і $\vec{b}(8; -2)$?
- 9.12. Дано вектор $\vec{a}(-6; 8)$. Знайдіть модуль вектора: 1) $-\vec{a}$; 2) $3\vec{a}$.
- 9.13. Дано вектор $\vec{b}(3; -4)$. Знайдіть модуль вектора: 1) $-\vec{b}$; 2) $4\vec{b}$.
- 9.14. (Усно.) Чи завжди колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$?
- 9.15. Серед векторів $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-2; 4)$, $\vec{c}(4; -8)$, $\vec{d}(-0,2; 0,4)$ знайдіть пари співнаправлених і пари протилежно напрямлених векторів.
- 9.16. Серед векторів $\vec{m}(-1; 3)$, $\vec{n}(3; -9)$, $\vec{k}(-0,1; 0,3)$, $\vec{l}(30; -90)$ знайдіть пари співнаправлених і пари протилежно напрямлених векторів.
- 3** 9.17. Дано: $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(-5; 1)$. Знайдіть модуль вектора:
 1) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.



Мал. 9.4

9.18. Дано: $\vec{c}(-1; 4)$, $\vec{d}(-6; 7)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{a} = 2\vec{c} + \vec{d}$; 2) $\vec{b} = 3\vec{c} - 2\vec{d}$.

9.19. 1) Дано: $\vec{a}(4; -6)$, $\vec{b}(-2; 0)$, $\vec{c}(-7; -1)$. Знайдіть координати векто-

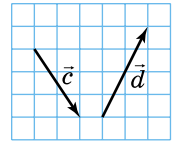


ра $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

2) Знайдіть $|\vec{m}|$, відтак дізнаєтеся, скільки разів жіноча збірна України із шахів була призеркою чемпіонатів Європи.

9.20. Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (мал. 9.5). Побудуйте вектор

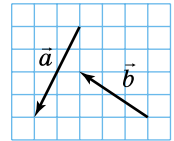
$$\vec{a} = 2\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}.$$



Мал. 9.5

9.21. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 9.6). Побудуйте вектор

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}.$$



Мал. 9.6

9.22. За якого значення m колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(-4; 5)$ і $\vec{b}(-12; m)$;

2) $\vec{c}(m; -1)$ і $\vec{d}(-4; 2)$?

Співнаправлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

9.23. За якого значення n колінеарні вектори:

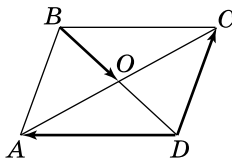
1) $\vec{a}(1; n)$ і $\vec{b}(-4; 8)$; 2) $\vec{c}(12; 9)$ і $\vec{d}(n; 3)$?

Співнаправлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

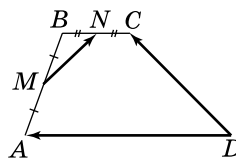
9.24. За якого значення p вектори $\vec{a}(1; p)$ і $\vec{b}(p; 16)$ протилежно напрямлені?

9.25. За якого значення t вектори $\vec{c}(t; 4)$ і $\vec{d}(1; t)$ співнаправлені?

9.26. Дано паралелограм $ABCD$ (мал. 9.7). Виразіть вектор $\vec{BO}$ через вектори $\vec{DA}$ і $\vec{DC}$.



Мал. 9.7



Мал. 9.8

9.27. M і N – середини сторін AB і BC трапеції $ABCD$ (мал. 9.8). Доведіть, що $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{DC} - \vec{DA})$.



9.28. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(-8; 6)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

9.29. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(5; -12)$, якщо $|\vec{b}| = 26$.

- 9.30. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-1; 4)$, $B(5; 7)$, $C(5; 2)$, $D(-3; -2)$ є трапецією.
- 9.31. Доведіть, що точки $A(5; -1)$, $B(6; 2)$ і $C(8; 8)$ лежать на одній прямій.
- 9.32. На колі $x^2 + y^2 = 1$ знайдіть таку точку A , щоб вектор $\overrightarrow{OA}$, де O – початок координат, був співнапрямлений з вектором $\vec{c}(3; -4)$.



Вправи для повторення

- 9.33. AB – діаметр кола, радіус якого дорівнює 5 см, точка C належить колу. Знайдіть довжину медіани CM трикутника ABC .
- 9.34. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 16 см, а гострий кут – 60° . Знайдіть діагональ трапеції та її площу.
- 9.35. Хорда AB ділить коло у відношенні 2 : 3. У точці A до кола проведено дотичну. Знайдіть менший кут між дотичною і хордою.



Життєва математика

- 9.36. Юля на міському велосипеді проїхала 3,6 км. Діаметри його переднього і заднього коліс дорівнюють відповідно 80 см і 60 см. На скільки більше обертів зробило заднє колесо порівняно з переднім? (Прийміть $\pi \approx 3$).



Цікаві задачі – поміркуй окремо

- 9.37. До катетів прямокутного трикутника провели медіани 3 см і 4 см завдовжки. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

§ 10. Скалярний добуток векторів

1. Означення скалярного добутку векторів та його властивості

Розглянемо ще одну операцію з векторами – скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Позначають скалярний добуток векторів так само, як добуток чисел або змінних: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів:

- 1) $\vec{a}(-2; 7)$ і $\vec{b}(4; 1)$; 2) $\vec{c}(0; 8)$ і $\vec{d}(-2; 5)$.
- *Розв'язання.* 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = -1$;
- 2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \cdot (-2) + 8 \cdot 5 = 40$.
- *Відповідь:* 1) -1 ; 2) 40 .

З означення скалярного добутку векторів випливають такі *властивості*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Для доведення цих властивостей достатньо порівняти числа, яким відповідно дорівнюватимуть ліва і права частини рівностей.

2. Скалярний квадрат вектора

Знайдемо скалярний добуток рівних між собою векторів. Нехай дано вектор $\vec{a}(x_1; y_1)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 x_1 + y_1 y_1 = x_1^2 + y_1^2 = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток вектора самого на себе $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора*.

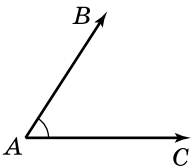
Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

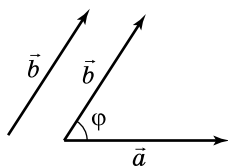
З останньої рівності випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

3. Поняття про кут між векторами

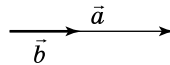
Кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (мал. 10.1). Кутом між двома ненульовими векторами, які не мають спільного початку, називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок (мал. 10.2).



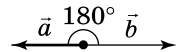
Мал. 10.1



Мал. 10.2



Мал. 10.3



Мал. 10.4

Кут між співнаправленими векторами дорівнює нулю (мал. 10.3), кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° (мал. 10.4).

4. Теорема про скалярний добуток векторів і наслідки з неї



Теорема (про скалярний добуток векторів). Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Доведення. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – задані вектори, а φ – кут між ними. Доведемо, що

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Розглянемо скалярний квадрат вектора $\vec{a} + \vec{b}$. Враховуючи властивості скалярного добутку векторів, матимемо:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b})\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2. \end{aligned}$$

Враховуючи властивості скалярного квадрата, отримаємо:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2; \text{ звідки } \vec{a}\vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2},$$

тобто скалярний добуток векторів залежить від довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$, а тому не залежить від вибору системи координат.

Виберемо таку систему координат, щоб додатний напрямок осі абсцис збігався з напрямком вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}(|\vec{a}|; 0)$.

Якщо $\varphi = 0^\circ$ (мал. 10.5), то $\vec{b}(|\vec{b}|; 0)$ і тоді

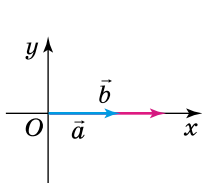
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| + 0 \cdot 0 = |\vec{a}| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 0^\circ.$$

Нехай $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (мал. 10.6). Тоді $MK = |\vec{b}| \sin \varphi$, $OK = |\vec{b}| \cos \varphi$, а тому $\vec{b}(|\vec{b}| \cos \varphi; |\vec{b}| \sin \varphi)$. Маємо:

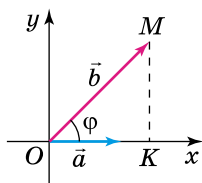
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi + 0 \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Якщо $\varphi = 90^\circ$ (мал. 10.7), то

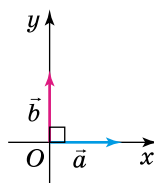
$$\vec{b}(0; |\vec{b}|) \text{ і } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot 0 + 0 \cdot |\vec{b}| = 0 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ.$$



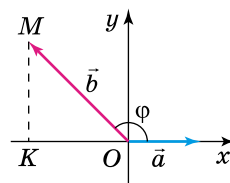
Мал. 10.5



Мал. 10.6



Мал. 10.7



Мал. 10.8

Якщо $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ (мал. 10.8), то

$$MK = |\vec{b}| \sin(180^\circ - \varphi) = |\vec{b}| \sin \varphi, OK = |\vec{b}| \cos(180^\circ - \varphi) = -|\vec{b}| \cos \varphi.$$

Оскільки друга координата вектора $\vec{b}$ дорівнює числу, протилежному довжині відрізка OK , то координатами вектора $\vec{b}$ є пара чисел $(|\vec{b}| \cos \varphi; |\vec{b}| \sin \varphi)$, а тому

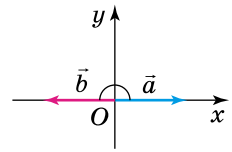
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi + 0 \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Якщо $\varphi = 180^\circ$ (мал. 10.9), то координатами вектора $\vec{b}$ є пара чисел $(-|\vec{b}|; 0)$. Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (-|\vec{b}|) + 0 \cdot 0 = -|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 180^\circ.$$

Отже, для будь-яких значень $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi. \quad \blacksquare$$



Мал. 10.9



Наслідок 1. Якщо вектори перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.

Домовимося кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначати так:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ або } (\vec{a}, \vec{b}).$$

Приклад 2. За якого значення x вектори $\vec{a}(x; -3)$ і $\vec{b}(6; 10)$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Щоб вектори були взаємно перпендикулярними, їх скалярний добуток має дорівнювати нулю. Маємо: $6x + (-3) \cdot 10 = 0$, звідки $x = 5$.

Відповідь: $x = 5$.

Приклад 3. Дано: $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{c}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Знайти: $|4\vec{c} - 3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$, то

$$\begin{aligned} |4\vec{c} - 3\vec{b}| &= \sqrt{(4\vec{c} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{16\vec{c}^2 - 24\vec{c}\vec{b} + 9\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{16|\vec{c}|^2 - 24\vec{c} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{16|\vec{c}|^2 - 24|\vec{c}||\vec{b}| \cos 120^\circ + 9|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{16 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{252} = 2\sqrt{63}. \end{aligned}$$

Відповідь: $2\sqrt{63}$.

5. Знаходження кута між векторами

Скалярний добуток векторів дає змогу знайти косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Косинус кута φ між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

За косинусом кута між векторами можна знайти і градусну міру кута (за таблицями або за допомогою калькулятора).

Приклад 4. Знайти градусну міру кута C трикутника ABC , якщо $A(3; 5)$, $B(3; 7)$, $C(1; 5)$.

Розв'язання. 1) Кут C трикутника ABC збігається з кутом між векторами $\vec{CA}$ і $\vec{CB}$ (мал. 10.10), тобто $\angle C = \angle(\vec{CA}, \vec{CB})$.

2) Маємо:

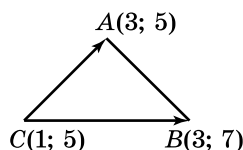
$\vec{CA}(3 - 1; 5 - 5)$, тобто $\vec{CA}(2; 0)$;

$\vec{CB}(3 - 1; 7 - 5)$, тобто $\vec{CB}(2; 2)$.

3) Тоді $\cos C = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

звідки $\angle C = 45^\circ$.

Відповідь: 45° .



Мал. 10.10

- ? Що називають скалярним добутком векторів? ○ Що називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$? Чому він дорівнює? ○ Що називають кутом між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про скалярний добуток векторів. ○ Сформулюйте наслідки із цієї теореми. ○ Як знайти косинус кута між векторами?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 10.1. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 1)$ і $\vec{b}(0; 3)$; 2) $\vec{c}(1; -3)$ і $\vec{d}(-2; 1)$.

10.2. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(1; -4)$ і $\vec{b}(5; 0)$; 2) $\vec{c}(2; -1)$ і $\vec{d}(1; 3)$.

10.3. Знайдіть $\vec{m}^2$, якщо: 1) $\vec{m}(-1; -2)$; 2) $\vec{m}(4; 1)$.

10.4. Знайдіть $\vec{n}^2$, якщо: 1) $\vec{n}(3; -1)$; 2) $\vec{n}(0; -5)$.

10.5. Дано: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{d} = 5$. Який з векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$?

10.6. Використовуючи транспорир, накресліть два вектори, що мають спільний початок і кут між якими дорівнює 140° .

10.7. Використовуючи транспорир, накресліть два вектори, які мають спільний початок і кут між якими дорівнює 50° .

2 **10.8.** Дано $\vec{c}(-2; 5)$ і $\vec{d}(x; 4)$. За якого значення x $\vec{c} \cdot \vec{d} = 16$?

10.9. Дано вектори $\vec{a}(3; y)$ і $\vec{b}(-1; 5)$. За якого значення y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$?

10.10. Дано: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

- | | |
|---|--|
| 1) $ \vec{a} = 5, \vec{b} = 2, \varphi = 30^\circ;$ | 2) $ \vec{a} = 4, \vec{b} = 1, \varphi = 60^\circ;$ |
| 3) $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 1, \varphi = 135^\circ;$ | 4) $ \vec{a} = 10, \vec{b} = 5, \varphi = 180^\circ.$ |

10.11. Дано: $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо:

- | | |
|---|---|
| 1) $ \vec{c} = 2, \vec{d} = 4, \varphi = 0^\circ;$ | 2) $ \vec{c} = 1, \vec{d} = 6, \varphi = 45^\circ;$ |
| 3) $ \vec{c} = 2, \vec{d} = 1, \varphi = 120^\circ;$ | 4) $ \vec{c} = 3, \vec{d} = 8, \varphi = 150^\circ.$ |

10.12. Доведіть, що вектори $\vec{m}(-1; 10)$ і $\vec{n}(20; 2)$ взаємно перпендикулярні.

10.13. Доведіть, що вектори $\vec{p}(4; -3)$ і $\vec{q}(6; 8)$ взаємно перпендикулярні.

10.14. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

- 1) $\vec{c}(1; 5), \vec{d}(-5; -1);$
- 2) $\vec{c}(2; 3), \vec{d}(-6; 4)?$

10.15. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}(2; -1), \vec{b}(1; 2);$
- 2) $\vec{a}(0; 4), \vec{b}(2; 3)?$

3 **10.16.** За якого значення x вектори $\vec{a}(-2; 5)$ і $\vec{b}(x; 4)$ взаємно перпендикулярні?

10.17. За якого значення y вектори $\vec{a}(10; y)$ і $\vec{b}(-4; 5)$ взаємно перпендикулярні?

10.18. Дано вектори $\vec{a}(3; 0)$ і $\vec{b}(2; 2)$. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

10.19. Дано вектори $\vec{a}(1; 0)$ і $\vec{b}(-2; 2)$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

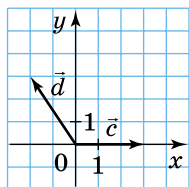
10.20. Знайдіть кути трикутника, вершинами якого є точки $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$ і $C(4; 1)$. З'ясуйте вид трикутника.

10.21. Знайдіть косинуси кутів трикутника KLM , де $K(0; 6)$, $L(-8; 0)$ і $M(3; 2)$. З'ясуйте вид трикутника.

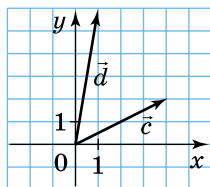
10.22. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два ненульових вектори. Знайдіть кут між ними, якщо:

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} ;$ | 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} ;$ |
| 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = - \vec{a} \cdot \vec{b} ;$ | 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} .$ |

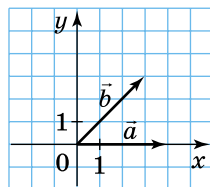
10.23. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (мал. 10.11 і 10.12).



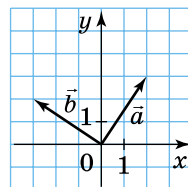
Мал. 10.11



Мал. 10.12



Мал. 10.13



Мал. 10.14

10.24. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнках 10.13 і 10.14.

10.25. Дано: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти:

- 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $(\vec{a} - \vec{b})\vec{a}$; 3) $\vec{b}(\vec{a} + \vec{b})$; 4) $\vec{a}(3\vec{a} - 4\vec{b})$.

10.26. Дано: $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 60^\circ$, $|\vec{c}| = 6$, $|\vec{d}| = 1$. Знайти:

- 1) $\vec{c}\vec{d}$; 2) $\vec{c}(\vec{c} + \vec{d})$; 3) $(\vec{d} - \vec{c})\vec{d}$; 4) $\vec{c}(4\vec{c} + 3\vec{d})$.

10.27. Паралімпієць-візочник, українець Олег Іваненко, проплив  62 км Ла-Маншем. Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} + \vec{b})(13\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$, відтак дізнаєтеся, за скільки годин спортсмен проплив цю небезпечну протоку.

10.28. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Чи може $\vec{a}\vec{b}$ дорівнювати:

- 1) -12; 2) -6; 3) -14; 4) 0; 5) 11; 6) $12\frac{1}{2}$?

4 **10.29.** Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Знайти:

- 1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$.

10.30. Дано: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайти:

- 1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

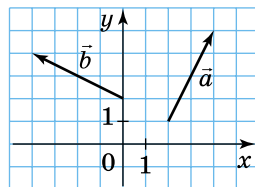
10.31. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{a}$ взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

10.32. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $2\vec{b} - \vec{a}$ взаємно перпендикулярні.

10.33. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(-1; 4)$, якщо $\vec{a}\vec{b} = -34$.

10.34. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(3; -1)$, якщо $\vec{a}\vec{b} = 30$.

10.35. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнку 10.15.

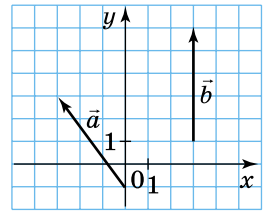


Мал. 10.15

10.36. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнку 10.16.

10.37. Знайдіть координати вектора $\vec{d}$, перпендикулярного до вектора $\vec{c}(-2; 1)$, якщо $|\vec{d}| = 3|\vec{c}|$.

10.38. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, перпендикулярного до вектора $\vec{d}(1; -5)$, модуль якого дорівнює модулю вектора $\vec{d}$.



Мал. 10.16

10.39. Відомо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Вправи для повторення

10.40. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$ та його модуль, якщо:

1) $C(5; -2)$, $D(-1; -10)$; 2) $C(0; -5)$, $D(7; 0)$.

10.41. За якого значення m вектори $\vec{a}(m; -2)$ і $\vec{b}(-8; m)$ колінеарні?

10.42. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3; 1)$, $B(7; 4)$, $C(4; 0)$, $D(0; -3)$.

10.43. Чи лежать точки $A(-2; 3)$, $B(0; 4)$ і $C(8; 8)$ на одній прямій?



Життєва математика

10.44. Дві водопровідні труби однакового діаметра d потрібно замінити однією трубою з такою самою пропускною здатністю. Яким має бути діаметр цієї труби порівняно з діаметром кожної із заміняєних труб?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

10.45. Точки K і L – середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$, $KL = \frac{AD + BC}{2}$. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 6–10)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Дано: $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(4; 1)$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Які координати у вектора $\vec{c}$?

А. $(-6; 4)$ Б. $(-2; 6)$ В. $(2; 6)$ Г. $(2; 4)$

2. Дано: $\vec{c}(5; -1)$, $\vec{d}(2; 3)$, $\vec{m} = \vec{c} - \vec{d}$. Які координати у вектора $\vec{m}$?

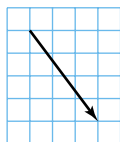
А. $(3; 2)$ Б. $(3; -4)$ В. $(-3; -4)$ Г. $(7; -4)$

3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a}(2; -5)$ і $\vec{b}(1; -2)$?

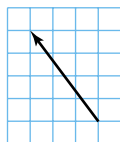
А. -4 Б. 0 В. -8 Г. 12

- 2** 4. Знайдіть модуль вектора $\overline{AB}$, якщо $A(-4; 6)$, $B(0; 9)$.
 А. 5 Б. 6 В. 8 Г. 9

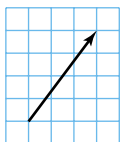
5. Укажіть вектор, що є сумою векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, зображених на малюнку 10.17.



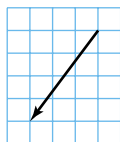
А.



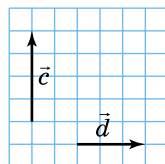
Б.



В.



Г.



Мал. 10.17

6. Знайдіть координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2; 4)$, $\vec{b}(3; 7)$.
 А. $(-5; -3)$ Б. $(-3; 19)$ В. $(-15; -9)$ Г. $(-9; 5)$

- 3** 7. Дано вектори $\vec{a}(x; -2)$ і $\vec{b}(6; 12)$. За якого значення x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні?

А. 4 Б. -1 В. 1 Г. -4

8. Дано вектори $\vec{c}(3; -8)$ і $\vec{d}(12; y)$. За якого значення y вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярні?

А. 4,5 Б. 32 В. -32 Г. -4,5

9. Дано вектори $\vec{a}(-2; 0)$ і $\vec{b}(3; -3)$. Знайдіть $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

А. 45° Б. 60° В. 120° Г. 135°

- 4** 10. Модуль вектора $\vec{p}(x; y)$ дорівнює 5. Знайдіть координати вектора $\vec{p}$, якщо координата x цього вектора на 1 менша від координати y .

А. $(3; 4)$ Б. $(3; 4)$ або $(-4; -3)$ В. $(-4; -3)$ Г. $(4; 3)$

11. Чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(7; 15)$, $B(5; 9)$, $C(7; 3)$, $D(9; 9)$ є...

А. квадратом Б. трапецією В. ромбом Г. прямокутником

12. Дано: $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Знайти: $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

А. 5 Б. 4 В. $4\sqrt{2} - 1$ Г. 3

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. Дано вектори $\vec{a}(5; -4)$, $\vec{b}(2; -14)$, $\vec{c}(x; -8)$. Установіть відповідність між характеристиками векторів або результатами дій над ними (1–3), та їхніми числовими значеннями (А–Г).

Характеристики векторів
або результати дій над ними

Числове
значення

1. Модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

А. 5

2. $\vec{a} \cdot \vec{m}$

Б. 6

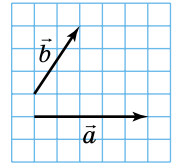
3. Значення x , за якого $\vec{m} \perp \vec{c}$

В. 7

Г. 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 6–10

1. Позначте в зошиті точки A , K і L , що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AL}$.
2. Дано вектори $\vec{a}(-2; 4)$ і $\vec{b}(7; 1)$. Знайдіть координати вектора:
 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(4; -7)$ і $\vec{b}(2; 1)$.
4. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його модуль, якщо $A(-2; 4)$, $B(2; 1)$.
5. Дано вектори $\vec{m}(-1; 4)$ і $\vec{n}(4; 5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{p} = 3\vec{m} - 5\vec{n}$.
6. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 10.18). Побудуйте вектори:
 1) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$.
7. Дано вектори $\vec{a}(x; -2)$ і $\vec{b}(5; 10)$. За якого значення x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
 1) колінеарні; 2) перпендикулярні?
8. Дано вектори $\vec{a}(0; -3)$ і $\vec{b}(1; -1)$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
9. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $A(4; 8)$, $B(10; 10)$, $C(16; 8)$, $D(10; 6)$ – ромб.



Мал. 10.18

Додаткові завдання

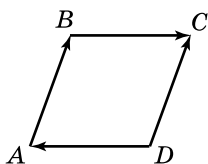
10. Доведіть, що точки $A(5; -7)$, $B(6; -9)$ і $C(3; -3)$ лежать на одній прямій.
11. Відомо, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Знайдіть $|4\vec{a} - 3\vec{b}|$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

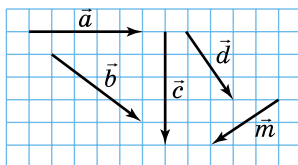
До § 6

1. Укажіть початок і кінець вектора:
 1) $\overrightarrow{MN}$; 2) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PP}$.
2. Позначте три точки A , B і K , що не лежать на одній прямій. Накресліть деякі три вектори, початок і кінець яких збігаються з якими-небудь двома із цих точок. Запишіть усі вектори, що утворилися, і назвіть початок і кінець кожного з них.
3. Накресліть два протилежно напрямлених вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$, співнаправлений з вектором $\vec{a}$, та вектор $\vec{d}$, співнаправлений з вектором $\vec{b}$.
 1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів $\uparrow\uparrow$ і $\uparrow\downarrow$.
 2) Чи є колінеарними вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$?
 3) Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$?

4. На малюнку 1 $ABCD$ – ромб. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають рівні модулі. Виконайте відповідні записи.



Мал. 1



Мал. 2

5. 1) Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 2, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

2) Які з них мають однакові модулі? Виконайте відповідні записи.

3

6. $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, що дорівнює вектору:

1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{OA}$; 4) $\overrightarrow{DO}$.

7. $ABCD$ – прямокутна трапеція ($\angle A = \angle B = 90^\circ$), $\angle C = 45^\circ$, $AB = 5$, $BC = 12$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

8. 1) Чи правильне твердження: «Якщо вектори не є рівними, то їхні модулі також не є рівними»?

2) Чи правильне обернене твердження?

9. ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 45^\circ$. Чи правильне твердження:

1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$; 3) $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$; 4) $|\overrightarrow{BC}| < |\overrightarrow{AB}|$?

4

10. $ABCD$ – ромб, $|\overrightarrow{AC}| = 12$, $|\overrightarrow{BD}| = 16$. Від вершини A відкладено вектор $\overrightarrow{AE}$ так, що $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$. Знайдіть $|\overrightarrow{EC}|$.

До § 7

1

11. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:

1) $M(2; -5)$, $N(4; -1)$; 2) $M(-3; 5)$, $N(-2; 0)$.

12. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{c}(-4; -3)$; 2) $\vec{d}(-12; 5)$.

2

13. Чи рівні вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $C(-2; 3)$, $D(4; 7)$, $\vec{b}(6; -4)$;

2) $C(0; 5)$, $D(4; 4)$, $\vec{b}(4; -1)$?

14. Серед векторів $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(1; 4)$, $\vec{c}(\sqrt{3}; \sqrt{6})$, $\vec{d}(-5; 2)$, $\vec{e}(3; 0)$, $\vec{f}(-4; 1)$ знайдіть ті, що мають рівні модулі.

15. Дано точки $K(5; -7)$, $L(4; 0)$, $M(x; 5)$, $N(0; y)$. Знайдіть x і y , якщо $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$.

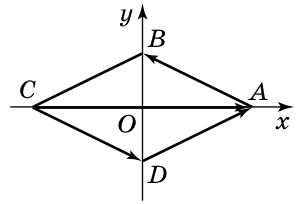
3 16. Дано точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -5)$. Знайдіть координати точки C такої, що:

1) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

17. У ромбі $ABCD$ $AC = 8$, $BD = 6$ (мал. 3).

Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{CA}$.

18. Дано три вершини $A(2; -3)$, $B(4; -7)$ і $C(-5; 3)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть за допомогою векторів координати вершини D .



Мал. 3

19. Модуль вектора $\vec{m}(x; x)$ дорівнює $3\sqrt{2}$. Знайдіть x .

4 20. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами $A(5; 7)$, $B(6; 4)$, $C(3; 3)$, $D(2; 6)$ – квадрат.

21. Модуль вектора $\vec{c}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{17}$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо його координата y в 4 рази більша за координату x .

До § 8

1 22. Знайдіть $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(4; 0)$, $\vec{b}(0; -5)$; 2) $\vec{a}(2; -3)$, $\vec{b}(4; 3)$.

2 23. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Знайдіть їх суму за правилом: 1) трикутника; 2) паралелограма.

24. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AK}$. Побудуйте різницю цих векторів.

25. Дано: $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(3; 5)$, $\vec{c}(x; y)$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знайти: x , y .

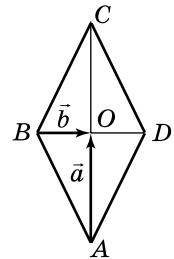
3 26. $ABCD$ – ромб (мал. 4), O – точка перетину його діагоналей. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

27. Не виконуючи малюнка, знайдіть суму:

1) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

4 28. Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

1) 3; 7; 10; 2) 2; 9; 10; 3) 13; 5; 6?



Мал. 4

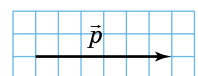
До § 9

1 29. Дано: $\vec{c}(9; -3)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{c}$; 2) $-\vec{c}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{c}$;
4) $-4\vec{c}$; 5) $10\vec{c}$; 6) $-0,1\vec{c}$.

2 30. На малюнку 5 задано вектор $\vec{p}$. Побудуйте вектор:

1) $0,5\vec{p}$; 2) $-\vec{p}$; 3) $1,5\vec{p}$;
4) $-2\vec{p}$; 5) $3\vec{p}$; 6) $-\frac{1}{3}\vec{p}$.



Мал. 5

31. Дано вектори $\vec{c}(-1; 2)$ і $\vec{d}(0; -1)$. Знайдіть координати вектора:
 1) $\vec{c} + 10\vec{d}$; 2) $5\vec{c} - \vec{d}$; 3) $7\vec{c} + 2\vec{d}$; 4) $3\vec{c} - 4\vec{d}$.

3 32. Дано: $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(4; 2)$. Порівняйте модулі векторів $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} - 0,5\vec{b}$.

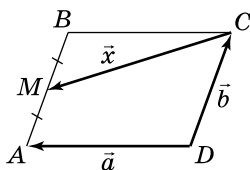
33. За яких значень x вектори $\vec{a}(1; x)$ і $\vec{b}(x; 9)$ колінеарні? Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

34. AM – медіана трикутника ABC . Доведіть, що

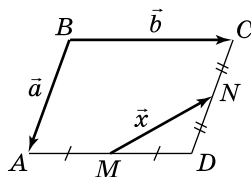
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

35. На площині задано вектор $\vec{a}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 10$. На яке число потрібно помножити цей вектор, щоб отримати протилежно напрямлений йому вектор, модуль якого дорівнює 5?

36. $ABCD$ – паралелограм (мал. 6 і 7). Виразіть вектор $\vec{x}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 6



Мал. 7

37. Дано ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому $2\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{a} - 9\vec{b}$. Доведіть, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

4 38. Відомо, що $\vec{a} = 3\vec{c} - 5\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} - 3\vec{d}$. Знайдіть координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо $\vec{a}(-3; 8)$, $\vec{b}(-1; 6)$.

39. Доведіть, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, де M – точка перетину медіан трикутника ABC .

40. За якого значення x точки $A(1; -2)$, $B(3; -8)$ і $C(x; -14)$ лежать на одній прямій?

До § 10

1 41. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 3)$ і $\vec{b}(6; 4)$; 2) $\vec{c}(-2; 1)$ і $\vec{d}(0; 4)$.

У якій із цих пар вектори є взаємно перпендикулярними?

42. Знайдіть $\vec{p}^2$, якщо:

1) $\vec{p}(-2; 0)$; 2) $\vec{p}(1; 5)$.

43. Використовуючи транспортир, накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, кут між якими дорівнює 80° .

2 44. Дано: $\vec{a}(m; 2)$, $\vec{b}(-3; m)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$. Знайти m .

45. Нехай $\varphi = \angle(\vec{p}, \vec{q})$. Знайдіть $\vec{p} \cdot \vec{q}$, якщо:

- 1) $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 6, \varphi = 60^\circ$; 2) $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 9, \varphi = 135^\circ$.

46. Доведіть, що ненульові вектори $\vec{a}(m; n)$ і $\vec{b}(-n; m)$ взаємно перпендикулярні.

3

47. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}(3; -4)$ і $\vec{d}(15; 8)$.

48. Дано вектори $\vec{a}(2; y)$ і $\vec{b}(4; -1)$. За яких значень y кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

- 1) гострий; 2) прямий; 3) тупий?

49. Знайдіть кути трикутника з вершинами в точках $A(-1; 2)$, $B(-1; 5)$ і $C(3; 2)$.

50. Відомо, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 40^\circ$. Знайдіть кут між векторами:

- 1) $4\vec{a}$ і $5\vec{b}$; 2) $-\vec{a}$ і $7\vec{b}$;
3) $\frac{1}{10}\vec{a}$ і $-\frac{1}{8}\vec{b}$; 4) $-13\vec{a}$ і $-2017\vec{b}$.

51. Дано: $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}\vec{b} = 2$; 2) $\vec{a}\vec{b} = 1$; 3) $\vec{a}\vec{b} = 0$;
4) $\vec{a}\vec{b} = -\sqrt{3}$; 5) $\vec{a}\vec{b} = -1$; 6) $\vec{a}\vec{b} = -2$.

4

52. Відомо, що $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Знайдіть $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 7\vec{b})$.

53. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ і $(\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{a} + 3\vec{b}) = 5$.

54. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{q} - 2\vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ і $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Найвеличніший арифметик своєї епохи

Понад тридцять років тому в науковій термінології набули широкого вжитку такі терміни, як «діаграма Вороного», «клітина Вороного», «розбиття Вороного», «мозаїка Вороного». В Англії поняття «*Voronoi diagram*» введене у шкільну програму.

Георгій Феодосійович Вороний – один із найяскравіших представників України в історії математики кін. XIX – поч. XX ст. Його наукові праці присвячені теорії чисел у всіх її трьох напрямках: аналітичному, алгебраїчному та геометричному. Вороного справедливо вважають найвеличнішим арифметиком своєї епохи, а його працю про кількість точок під гіперболою (1903 р.) – віхою, з якої почалася сучасна аналітична теорія чисел. Із часом з'ясувалося, що його дослідження знайшли застосу-



вання в різних галузях прикладних наук: кристалографії, фізиці, астрономії, хімії, мікробіології, комп'ютерній графіці, проблемах штучного інтелекту, офтальмології.

Народився Георгій Вороний 28 квітня 1868 р. в с. Журавка Полтавської губернії (нині Чернігівська обл.). Його батько був магістром філології, викладачем, просвітитником. Мати викладала в жіночій гімназії та недільній школі.

Середню освіту Георгій здобув у гімназії, а 1885 р. вступив на математичне відділення Петербурзького університету. Після складання на «відмінно» 1889 р. випускних іспитів його залишили при університеті для здобуття звання професора. 1894 р. Вороний захистив магістерську дисертацію і став професором Варшавського університету, а 1897 р. блискуче захистив докторську дисертацію. Ці дослідження було відзначено премією імені академіка Буняковського. Пропрацював Г. Вороний як науковець і педагог у стінах Варшавського університету аж до останніх днів свого життя.

Творчу і педагогічну діяльність Георгія Феодосійовича високо оцінили математики, обравши його 1898 р. членом Математичного товариства. 1904 р., виступивши з доповідями на Міжнародному конгресі математиків у м. Хейдельберг (Німеччина), Вороний стає знаним у світі.

1907 р. Вороного обирають членом-кореспондентом Імператорської академії наук. Але на той час він був уже невиліковно хворим, і невдовзі (20 листопада 1908 р.) пішов із життя. За заповітом його поховали в рідній Журавці.

Упродовж усього свого життя Г. Ф. Вороний не поривав зв'язків з батьковою хатою, часто приїздив у рідні краї. Ще й дотепер можна почути приємні спогади односельців про сердечну й дуже порядну родину Вороних.

Інститут математики НАН України, починаючи з 1993 р., раз на п'ять років проводить міжнародні конференції, присвячені сучасному стану розвитку напрямів науки, закладених у працях Вороного, а ще раніше видав у трьох томах повне зібрання наукових праць Георгія Вороного.

Пишаймося тим грандіозним внеском, який зробив український математик Г. Ф. Вороний в одне з найоригінальніших творінь людського духу – математику. Його основоположні праці з теорії чисел увійшли у світову математичну скарбницю як символ честі й доблесті людського розуму.



Головне в розділі 2

ВЕКТОР. МОДУЛЬ І НАПРЯМОК ВЕКТОРА. КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ. РІВНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Відрізок, для якого визначено напрямок, називають **напрямленим відрізком**, або **вектором**.

Вектор, зображений на малюнку, записують так: $\overline{AB}$. Літера A – початок вектора $\overline{AB}$, літера B – його кінець.



Модулем (довжиною або **абсолютною величиною**) вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка AB .

Колінеарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори називають **рівними**, якщо вони співнаправлені і їхні модулі між собою рівні.

КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Координатами вектора $\overline{AB}(x; y)$ з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$.

Модуль вектора $\overline{AB}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Теорема (про рівність векторів). У **рівних векторів** відповідні **координати рівні**, і навпаки, якщо у **векторів** відповідні **координати рівні**, то вектори **рівні**.

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

Сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор

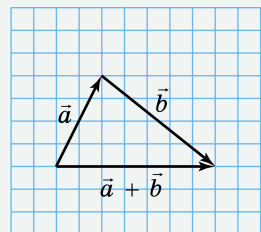
$$\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

Теорема (правило трикутника додавання векторів). Хоч які були б точки A, B і C , справджується **рівність**:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Суму двох векторів можна знаходити за **правилом трикутника**:

- 1) від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}$;
- 2) будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

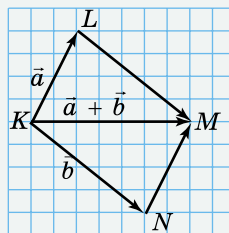


Суму двох векторів можна знаходити і за **правилом паралелограма**:

1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку (точки K);

2) будуємо на цих векторах паралелограм;

3) будуємо вектор, що є діагоналлю паралелограма, яка виходить з точки K ; цей вектор і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

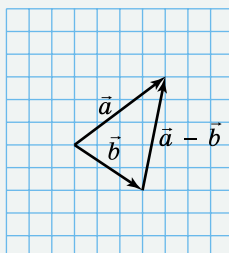


Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ буде вектор $\vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

Правило **побудови різниці двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$** :

1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку;

2) будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{a}$, що і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



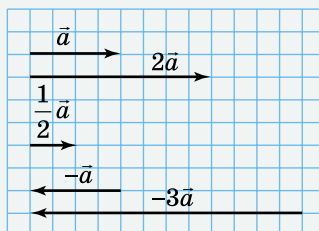
МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Добутком вектора $\vec{a}(x; y)$ на число λ називають вектор $\lambda\vec{a}(\lambda x; \lambda y)$.

Теорема (про добуток вектора на число). Модуль вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Вектор $\lambda\vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

На малюнку для вектора $\vec{a}$ побудовано вектори $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$.

Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – **колінеарні**.



Умова колінеарності векторів:

Нехай $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ – довільні вектори. Тоді якщо:

1) $x_1 = x_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(0; y_1)$ і $\vec{b}(0; y_2)$ – колінеарні;

причому якщо $\frac{y_2}{y_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$;

а якщо $\frac{y_2}{y_1} < 0$, то $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$;

2) $y_1 = y_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(x_1; 0)$ і $\vec{b}(x_2; 0)$ – колінеарні;

причому якщо $\frac{x_2}{x_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

а якщо $\frac{x_2}{x_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;

3) $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$, причому якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Т е о р е м а (про скалярний добуток векторів). Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Наслідок 1. Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.

Косинус кута φ між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **дізнаєтеся** про теорему косинусів і теорему синусів; про існування різних формул для знаходження площ трикутника і паралелограма;
- **навчитесь** розв'язувати трикутники та прикладні задачі; знаходити площі трикутника, паралелограма, ромба, використовуючи різні формули.

§ 11. Теорема косинусів

1. Теорема косинусів

Доведемо одну з найважливіших теорем про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.



Теорема косинусів. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 11.1). Доведемо, що

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Очевидно, що $\angle C$ може бути прямим, гострим або тупим. Розглянемо всі три випадки.

1) Нехай $\angle C$ – прямий. Тоді $\cos C = 0$ і формула, яку потрібно довести, набуває вигляду: $c^2 = a^2 + b^2$, тобто маємо теорему Піфагора для трикутника ABC .

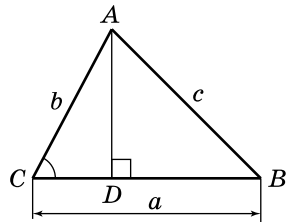
2) Нехай $\angle C$ – гострий. Тоді у трикутнику ABC є ще хоча б один гострий кут, нехай це буде $\angle B$. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD . Оскільки кути B і C – гострі, то точка D належить стороні BC . Тоді у прямокутному трикутнику ADC : $AD = b \sin C$, $CD = b \cos C$, а $BD = BC - CD = a - b \cos C$.

У прямокутному трикутнику ADB (за теоремою Піфагора):

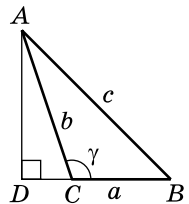
$$\begin{aligned} c^2 &= AB^2 = AD^2 + DB^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C = \\ &= a^2 + b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Але $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, тому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

3) Нехай кут $\angle C$ – тупий (мал. 11.2). Позначимо $\angle ACB = \gamma$. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD . У цьому разі точка D лежатиме на продовженні променя BC , тому $\angle ACD = 180^\circ - \gamma$.



Мал. 11.1



Мал. 11.2

У прямокутному трикутнику ADC :

$$AD = b \sin ACD = b \sin (180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma;$$

$$DC = b \cos ACD = b \cos (180^\circ - \gamma) = -b \cos \gamma.$$

Маємо: $BD = BC + CD = a - b \cos \gamma$. Далі доводимо так, як у разі, коли $\angle C$ – гострий. ■

Зауважимо, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів для прямокутного трикутника, тому її інколи називають *узагальненою теоремою Піфагора*.

Отже, у довільному трикутнику ABC виконуються рівності:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C, & b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

2. Використання теореми косинусів для знаходження сторін трикутника

За допомогою теореми косинусів можна, наприклад, знайти невідому сторону трикутника, якщо відомо дві його інші сторони й один з кутів.

Приклад 1. Дано: $\triangle ABC$, $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle C = 60^\circ$.

Знайти: AB .

Розв'язання. Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ (мал. 11.1).

1) За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

2) Тоді $c = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{49} = 7$ (см).

Відповідь: 7 см.

Приклад 2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $\angle C = 120^\circ$.

Знайти: AC .

Розв'язання. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (мал. 11.2).

1) За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, тобто

$$7^2 = 5^2 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 120^\circ.$$

2) Спростивши останню рівність, отримаємо квадратне рівняння $b^2 + 5b - 24 = 0$, розв'язавши яке, матимемо: $b_1 = 3$, $b_2 = -8$.

Число -8 не задовольняє змісту задачі, оскільки $b > 0$. Отже,

$AC = 3$ см.

Відповідь: 3 см.

3. Використання теореми косинусів для знаходження кутів трикутника

Якщо відомо три сторони трикутника, то за теоремою косинусів можна знайти косинус будь-якого з його кутів, а отже, і сам кут.

Наприклад, косинус кута C можна знайти за формулою, виразивши $\cos C$ із формули теореми косинусів:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Приклад 3. Знайти міру найбільшого з кутів трикутника, довжини сторін якого дорівнюють $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ і 4 см.

Розв'язання. 1) Оскільки у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то найбільшим кутом трикутника буде кут, що лежить проти сторони 4 см завдовжки.

2) Нехай $a = \sqrt{2}$ см, $b = \sqrt{8}$ см, $c = 4$ см.

Тоді за формулою косинуса кута маємо:

$$\cos C = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{3}{4}.$$

3) Використовуючи калькулятор (або таблиці), знайдемо, що $\angle C \approx 138^\circ 35'$.

Відповідь: $138^\circ 35'$.

Отже, теорема косинусів допомагає розв'язувати трикутники.

4. Використання теореми косинусів для визначення виду трикутника відносно кутів

Теорема косинусів є зручною і для визначення виду трикутника. Щоб установити, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, досить знайти знак косинуса його найбільшого кута. З формули косинуса кута зрозуміло, що знак косинуса кута залежить від знака чисельника дробу, оскільки знаменник завжди додатний. Тому знак виразу $a^2 + b^2 - c^2$ дає змогу визначити знак косинуса кута трикутника, а отже, і вид цього кута (гострий, прямий чи тупий).

Якщо c – найбільша сторона трикутника, то для з'ясування виду трикутника достатньо порівняти з нулем значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$. Отже,

якщо c – найбільша сторона трикутника і

$a^2 + b^2 - c^2 > 0$, то $\angle C$ – гострий, а трикутник – гострокутний;

$a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то $\angle C$ – прямий, а трикутник – прямокутний;

$a^2 + b^2 - c^2 < 0$, то $\angle C$ – тупий, а трикутник – тупокутний.

Приклад 4. Визначити вид трикутника зі сторонами $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.

Розв'язання. $a^2 + b^2 - c^2 = 4^2 + 6^2 - 7^2 = 3 > 0$, отже, трикутник гострокутний.

Відповідь: гострокутний.

5. Властивість сторін і діагоналей паралелограма

Розглянемо важливу властивість сторін і діагоналей паралелограма.



Приклад 5. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Доведення. Нехай $ABCD$ – паралелограм, $AB = a$, $AD = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ (мал. 11.3).

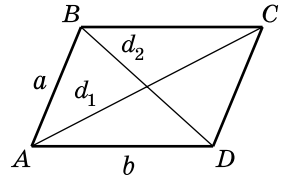
1) З трикутника ABD за теоремою косинусів:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle BAD.$$

2) З трикутника ABC за теоремою косинусів:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ABC = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \angle BAD) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \angle BAD.$$

3) Додавши почленно ці дві рівності, маємо: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. ■



Мал. 11.3

6. Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника



Приклад 6. AM – медіана трикутника ABC . Довести формулу медіани трикутника:

$$AM = m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Розв'язання. 1) Продовжимо медіану AM на відрізок $MD = AM$ (мал. 11.4).

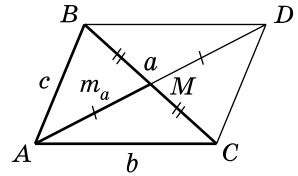
2) Оскільки в чотирикутнику $ABDC$ $AM = MD$ (за побудовою) і $BM = MC$ (за умовою), то $ABDC$ – паралелограм (за ознакою). Тоді $AD = 2m_a$.

3) За доведеною вище властивістю діагоналей паралелограма маємо: $AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, тобто $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$.

Звідки: $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, тоді $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Отже,

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \quad \blacksquare$$



Мал. 11.4

Зауважимо, що в деяких задачах, зокрема тих, розв'язування яких зводиться до розв'язування рівнянь, доцільно використовувати формулу медіани трикутника у вигляді:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

А ще раніше...

Можна вважати, що теорему косинусів було доведено ще в «Началах» Евкліда. У 12-му та 13-му реченнях другої книги Евклід узагальнює теорему Піфагора і виводить формулу, якою записує квадрат сторони, яка лежить проти гострого або тупого кута трикутника. Ці формули для кожної зі сторін, які довів Евклід, еквівалентні формулам теореми косинусів:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

Формули, подібні до цих, використовували також александрійські математики Герон (І ст.) і Пап (ІІІ ст.), учені Індії (Брахмагупта, Бхаскара) та країн Близького та Середнього Сходу (Аль-Біруні), а також деякі європейські математики ХІІІ–ХV ст., зокрема Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Уперше теорему косинусів сформулював словами видатний математик Франсуа Вієт у своїй праці «Математичні таблиці» (1579 р.). У сучасних же позначеннях відповідну формулу Вієта можна записати так:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sin(90^\circ - C)}.$$

Сучасного вигляду теоремі косинусів 1801 р. надав французький математик Лазар Карно (1753–1823).

- ? Сформулюйте і доведіть теорему косинусів. ○ Запишіть рівності, що випливають із теореми косинусів. ○ Як знайти косинус кута трикутника, якщо відомо три його сторони? ○ Як визначити вид трикутника, якщо відомо три його сторони?



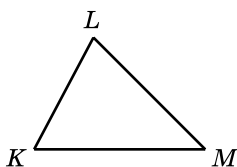
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



11.1. Запишіть теорему косинусів для:

1) сторони MN трикутника MNL ;

2) сторони PF трикутника PFT .



Мал. 11.5

11.2. На малюнку 11.5 зображено $\triangle KLM$. Які з рівностей є правильними:

1) $LM^2 = KL^2 + KM^2 + 2KL \cdot KM \cdot \cos K$;

2) $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2KL \cdot LM \cdot \cos L$;

3) $KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2KM \cdot ML \cdot \cos K$;

4) $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2KL \cdot KM \cdot \cos K$?

11.3. Запишіть формули для обчислення косинусів кутів K і M трикутника KLM (мал. 11.5), вважаючи, що його сторони відомі.



11.4. Знайдіть сторону AB трикутника ABC , якщо:



1) $AC = 13$ см, $BC = 4$ см, $\cos C = -\frac{5}{13}$; Б

2) $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $\cos C = \frac{1}{3}$; О

3) $BC = 10$ см, $CA = 16$ см, $\angle C = 60^\circ$; Л

4) $BC = 7\sqrt{3}$ см, $CA = 1$ см, $\angle C = 150^\circ$. Г



Підставте отримані літери в таблицю, відтак дізнаєтеся прізвище письменника українського походження, продовжувача давнього козацького роду. Дізнайтеся про його внесок в українську літературу, культуру та фольклор.

13 см	$2\sqrt{11}$ см	13 см	$2\sqrt{11}$ см	14 см	15 см

11.5. Знайдіть сторону BC трикутника ABC , якщо:

1) $AC = 11$ см, $AB = 20$ см, $\cos A = \frac{4}{5}$;

2) $AC = 4$ см, $AB = 3$ см, $\cos A = -\frac{1}{4}$;

3) $AC = 5\sqrt{3}$ см, $AB = 13$ см, $\angle A = 30^\circ$;

4) $AC = 3$ см, $AB = 5$ см, $\angle A = 120^\circ$.

11.6. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть діагоналі паралелограма.

11.7. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними – 120° . Знайдіть діагоналі паралелограма.

11.8. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см.

11.9. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 5 см і 8 см.

11.10. У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $AC = \sqrt{3}$ см. Знайдіть градусну міру кожного з кутів трикутника.

11.11. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $BC = 2$ см, $AC = \sqrt{10}$ см. Знайдіть градусну міру найбільшого кута трикутника.

11.12. Знайдіть градусну міру найменшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 8 см і $4\sqrt{3}$ см.

11.13. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відомо три його сторони:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) 4 см, 5 см і 6 см; | 2) 6 см, 8 см і 10 см; |
| 3) 7 см, 8 см і 13 см; | 4) 5 см, 5 см і 8 см. |

11.14. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відомо три його сторони:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 1) 2 см, 8 см і 9 см; | 2) 7 см, 24 см і 25 см; |
| 3) 4 см, 7 см і 8 см; | 4) 5 см, 5 см і 6 см. |

11.15. Дві сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 7 см, а одна з діагоналей – 8 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

11.16. Діагоналі паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а одна зі сторін – 4 см. Знайдіть другу сторону паралелограма.

11.17. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 24 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до більшої сторони.

11.18. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до меншої сторони.

3 11.19. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Дві інші його сторони утворюють кут 60° , а їх різниця дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

11.20. Сторони трикутника, одна з яких на 4 см більша за другу, утворюють кут 120° , а третя сторона дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника.

- 11.21. Дві сторони трикутника відносяться як 3:5, а кут між ними дорівнює 120° . Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.
- 11.22. Периметр трикутника дорівнює 60 см. Дві його сторони відносяться як 5:8, а кут між ними дорівнює 60° . Знайдіть сторони трикутника.
- 11.23. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 8 см, а кут проти меншої з них – 60° . Знайдіть третю сторону трикутника.
- 11.24. Дві сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 5 см, а кут проти більшої з них – 45° . Знайдіть третю сторону трикутника.
- 11.25. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як 4:7, а сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см.
- 11.26. Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться як 2:3, а діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см.
- 11.27. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна зі сторін на 1 см більша за другу. Знайдіть периметр паралелограма.
- 11.28. Одна з діагоналей паралелограма на 2 см більша за другу. Знайдіть ці діагоналі, якщо сторони паралелограма дорівнюють 7 см та 11 см.
- 11.29. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а медіана, проведена до неї, – 3 см. Знайдіть основу трикутника.
- 11.30. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 4 см. Знайдіть третю сторону трикутника.
- 11.31. Доведіть, що коли для трикутника ABC справджується рівність $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, то $\angle A = 60^\circ$.
- 11.32. Доведіть, що коли для трикутника ABC справджується рівність $b^2 = a^2 + c^2 + ac$, то $\angle B = 120^\circ$.
- 11.33. Одна зі сторін трикутника дорівнює 13 см. Сума двох інших сторін дорівнює 23 см. Знайдіть ці сторони, якщо вони утворюють кут 60° .
- 11.34. Середня за довжиною сторона трикутника на 1 см більша за меншу сторону і на 1 см менша від більшої сторони. Косинус середнього за величиною кута трикутника дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть периметр трикутника.
- 4** 11.35. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?
- 11.36. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 7 см, а синус кута між ними дорівнює 0,8. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?
- 11.37. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см та 11 см, а медіана, проведена до третьої сторони, на 8 см менша від цієї сторони. Знайдіть периметр трикутника.

- 11.38.** Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, проведена до третьої сторони, відноситься до цієї сторони як 2 : 7. Знайдіть периметр трикутника.
- 11.39.** У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см. На сторонах AB і AC узято такі точки M і N відповідно, що $AM = 3$ см, $AN = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка MN .
- 11.40.** У трикутнику KLM $KL = 7$ см, $KM = 9$ см, $LM = 11$ см. На сторонах KL і KM узято такі точки A і B відповідно, що $KA = 2$ см, $KB = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка AB .
- 11.41.** У трикутнику ABC $AB = 20$ см, AP і BN – медіани трикутника, $AP = 42$ см, $BN = 36$ см. Знайдіть третю медіану трикутника.
- 11.42.** Більша діагональ ромба дорівнює d , а один з його кутів дорівнює 60° . Знайдіть периметр ромба.



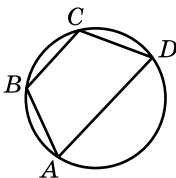
Вправи для повторення

- 11.43.** $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle C = 90^\circ$). Знайдіть невідомі сторони (з точністю до сотих сантиметра) та кути трикутника, якщо:
- 1) $AB = 12$ см, $\angle A = 37^\circ$;
 - 2) $BC = 16$ см, $\angle B = 49^\circ$.
- 11.44.** $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Знайдіть:
- 1) $\vec{a}\vec{b}$;
 - 2) $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$;
 - 3) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$;
 - 4) $\vec{a}(2\vec{a} + 5\vec{b})$.
- 11.45.** Хорда 30 см завдовжки перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки у відношенні 1 : 9. Знайдіть радіус кола.
- 11.46.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, – 10 см. Знайдіть площу трикутника.
- 11.47.** Кут між медіаною і висотою, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює α . Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює c .

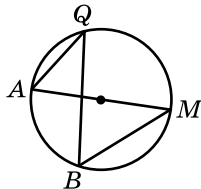


Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

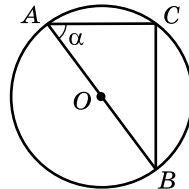
- 11.48.** Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло (мал. 11.6). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle C = 130^\circ$.
- 11.49.** На малюнку 11.7 $\angle AQB = 40^\circ$. Знайдіть $\angle AMB$.



Мал. 11.6



Мал. 11.7



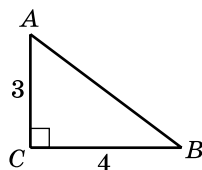
Мал. 11.8

- 11.50.** AB – діаметр кола, $\angle BAC = \alpha$, $OB = R$ (мал. 11.8). Знайдіть BC .

11.51. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$ (мал. 11.9). Знайти:

- 1) AB ;
- 2) $\sin A$, $\sin B$;
- 3) радіус описаного кола R ;
- 4) відношення $\frac{AB}{\sin C}$, $\frac{AC}{\sin B}$, $\frac{BC}{\sin A}$.

Переконайтеся, що $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$.



Мал. 11.9



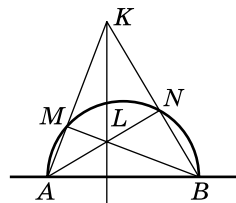
Життєва математика

- 11.52. 1) Скільки гумових плиток, що мають форму квадрата зі стороною 0,5 м, потрібно для покриття підлоги в тренажерному залі, що має форму прямокутника 8,5 м завдовжки і 4,5 м за ширини?
- 2) Скільки потрібно заплатити за цю плитку, якщо ціна однієї плитки 124 грн?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 11.53. На відрізку AB як на діаметрі побудовано півколо (мал. 11.10). Промені AK і BK перетинають півколо відповідно в точках M і N , AN і BM перетинаються в точці L . Знайдіть кут між прямими KL і AB .



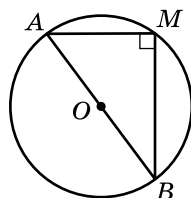
Мал. 11.10

§ 12. Теорема синусів

1. Теорема синусів та її наслідок

Лема. Якщо AB – хорда кола, радіус якого дорівнює R , а M – будь-яка точка кола, то

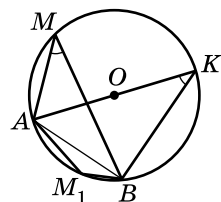
$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R.$$



Мал. 12.1

Доведення. 1) Якщо $AB = 2R$ – діаметр кола (мал. 12.1), то $\angle AMB = 90^\circ$ для будь-якого розташування точки M на колі. Тоді, урахувавши співвідношення у прямокутному трикутнику,

$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = \frac{2R}{\sin 90^\circ} = 2R.$$



Мал. 12.2

2) Нехай AB не є діаметром кола, а M – точка, що належить більшій дузі кола (мал. 12.2). Проведемо діаметр AK . Тоді $\angle AMB = \angle AKB$ (як вписані, що спи-

раються на одну й ту саму дугу). $\angle ABK = 90^\circ$ (як кут, що спирається на діаметр).

У трикутнику ABK ($\angle B = 90^\circ$):

$$\sin \angle AKB = \frac{AB}{AK}, \text{ тому } \sin \angle AMB = \frac{AB}{2R}, \text{ звідки } \frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R.$$

3) Нехай AB не є діаметром, а точка M_1 належить меншій дузі кола, тоді $\angle M + \angle M_1 = 180^\circ$. Маємо:

$$\angle AM_1B = 180^\circ - \angle AMB,$$

$$\text{тому } \sin \angle AM_1B = \sin(180^\circ - \angle AMB) = \sin \angle AMB.$$

Отже, у цьому разі також справджується рівність

$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R. \quad \blacksquare$$

Тепер доведемо важливу теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.



Теорема синусів. Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.

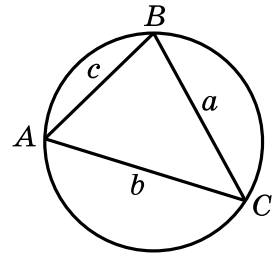
Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 12.3). Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Опишемо коло радіуса R навколо цього трикутника. За доведеною лемою:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\text{Отже, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad \blacksquare$$



Мал. 12.3



Наслідок (узагальнена теорема синусів). У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.$$

Скориставшись теоремою синусів, можна довести відоме з курсу геометрії 7 класу твердження:

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведіть це твердження самостійно.

2. Знаходження елементів трикутника за допомогою теореми синусів

За допомогою теореми синусів можна знаходити невідомі елементи трикутника. Наприклад, за двома даними кутами трикутника і стороною, що лежить проти одного з них, можна знайти сторону, що лежить проти другого кута.

Приклад 1. Дано: $\triangle ABC$ $BC = 7\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Знайти сторону AC .

Розв'язання. За теоремою синусів маємо (мал. 12.3):

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}, \text{ тобто } \frac{7\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ};$$

$$\text{звідки } AC = \frac{7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 7\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Відповідь: $7\sqrt{3}$ см.

Також за двома сторонами трикутника і кутом, що лежить проти однієї з них, можна знайти кут, що лежить проти другої сторони.

Приклад 2. У трикутнику ABC : $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см. Знайти $\angle A$, якщо: 1) $\angle C = 45^\circ$; 2) $\angle C = 30^\circ$.

Розв'язання. Позначимо $AB = c$, $BC = a$.

1) За теоремою синусів маємо:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ тобто } \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A},$$

звідки $\sin A = \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 1$. Тоді $\angle A = 90^\circ$.

$$2) \text{ Аналогічно } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ тобто } \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A},$$

$$\text{звідки } \sin A = \sqrt{2} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Маємо: $\angle A = 45^\circ$ або $\angle A = 135^\circ$. Зауважимо, що в обох випадках $\angle A + \angle C < 180^\circ$, тому задача має два розв'язки.

Відповідь: 1) 90° ; 2) 45° або 135° .

3. Застосування узагальненої теореми синусів для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника

Задачі, у яких потрібно знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, часто можна розв'язати за допомогою наслідку з теореми синусів (узагальненої теореми синусів).

Приклад 3. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 5 см, $\sqrt{7}$ см і $2\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. Нехай $a = 5$ см, $b = \sqrt{7}$ см, $c = 2\sqrt{3}$ см.

1) Знайдемо косинус кута B :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тому $\angle B = 30^\circ$.

2) За узагальненою теоремою синусів $\frac{b}{\sin B} = 2R$, тому

$$R = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 30^\circ} = \sqrt{7} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{7}$ см.

А ще раніше...

Індійські вчені, як і вчені з мусульманських країн, у IX–X ст. зводили розв'язування трикутників до розв'язування прямокутних трикутників, отже, не мали потреби в теоремі синусів, тому і не знали її. Теорему синусів довів лише в XI ст. математик та астроном Аль-Біруні. А вже з XVI ст. її починають використовувати європейські математики.

1799 р. французький математик Жан-Луї Лагранж (1736–1813) вивів теорему синусів із теореми косинусів. Інший французький математик Огюстен-Луї Коші (1789–1857) у своїй праці «Курс аналізу», що була опублікована 1821 р., вивів теорему косинусів із теореми синусів.



Аль-Біруні
(973–1048)

? Сформулюйте і доведіть лему, подану в цьому параграфі. **○** Сформулюйте і доведіть теорему синусів. **○** Сформулюйте наслідок із теореми синусів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 12.1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 50° , а проти сторони b – кут 40° . Які з рівностей правильні:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{a}{\cos 50^\circ} = \frac{b}{\cos 40^\circ};$ | 2) $\frac{a}{\sin 50^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ};$ |
| 3) $\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ};$ | 4) $\frac{a}{b} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ};$ |

12.2. У трикутнику проти сторони b лежить кут 80° , а проти сторони c – кут 70° . Заповніть порожні клітинки:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{b}{\sin \square} = \frac{c}{\sin \square};$ | 2) $\frac{b}{c} = \frac{\sin \square}{\sin \square}.$ |
|---|---|

- 12.3.** У трикутнику ABC $\sin A = 0,2$, $\sin B = 0,4$, $a = 10$ см. Знайдіть b .
- 12.4.** У трикутнику ABC $a = 2$ см, $b = 6$ см, $\sin A = 0,3$. Знайдіть $\sin B$.
- 2** **12.5.** У трикутнику ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Знайдіть відношення сторони BC до сторони AC .
- 12.6.** У трикутнику ABC $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Знайдіть відношення сторони AC до сторони AB .
- 12.7.** У трикутнику OKP $OP = 3\sqrt{2}$ см, $\angle K = 30^\circ$, $\angle P = 45^\circ$. Знайдіть OK .
- 12.8.** У трикутнику OKP $OK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle K = 60^\circ$, $\angle P = 30^\circ$. Знайдіть OP .
- 12.9.** У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 15^\circ$, $\angle C = 135^\circ$. Знайдіть AC .
- 12.10.** У трикутнику ABC $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, $BC = 8\sqrt{3}$ см. Знайдіть AB .
- 12.11.** У трикутнику ABC $AB = 7\sqrt{3}$ см, $\angle C = 120^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 12.12.** У трикутнику ABC $BC = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 12.13.** За допомогою наслідку з теореми синусів знайдіть радіус кола, описаного навколо:
- 1) рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a ;
 - 2) прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c .
- 12.14.** За допомогою наслідку з теореми синусів знайдіть сторони рівностороннього трикутника за радіусом R описаного кола.
- 12.15.** Доведіть, що в будь-якому трикутнику сторона, що лежить проти кута 30° , дорівнює радіусу кола, описаного навколо цього трикутника.
- 12.16.** Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 18 см, а прилеглий до нього кут – 30° .
- 3** **12.17.** У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $AC = 1$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть $\angle B$.
- 12.18.** У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 135^\circ$. Знайдіть $\angle C$.
- 12.19.** У трикутнику ABC $BC = \sqrt{3}$ см, $AB = \sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть $\angle A$.
- 12.20.** У трикутнику ABC $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть $\angle B$.
- 12.21.** Сторона трикутника відноситься до радіуса описаного навколо трикутника кола як $\sqrt{2}:1$. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.
- 12.22.** Сторона трикутника дорівнює радіусу описаного навколо нього кола. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.
- 12.23.** Радіус описаного навколо рівнобічної трапеції кола дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину діагоналі трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 135° .

- 12.24. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 12.25. Дві сторони трикутника дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними – 30° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
-  12.26. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якого кут при основі дорівнює 30° , а основа більша за бічну сторону на 2 см.
- 12.27. Сторона AB трикутника ABC на 1 см більша за сторону AC . Знайдіть сторони AB і AC , якщо $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.
- 12.28. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{3} : 1$. Скільки розв'язків має задача?
- 12.29. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює d і ділить його кут на частини, міри яких дорівнюють α і β . Знайдіть периметр паралелограма.
- 12.30. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює m , а кут при основі – α . Знайдіть довжину бісектриси кута при основі.
- 12.31. У прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює c , а градусна міра одного з гострих кутів – α . Знайдіть довжину бісектриси трикутника, що виходить з вершини прямого кута.



Вправи для повторення

- 12.32. Два кути трикутника дорівнюють 37° і 62° . Знайдіть усі зовнішні кути трикутника.
- 12.33. Один з кутів паралелограма вдвічі менший від іншого. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 5 см і 8 см.
- 12.34. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює a , а одна з діагоналей – d .
- 12.35. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a см і b см. Знайдіть відношення площ, на які ділить трикутник висота, проведена до гіпотенузи.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 12.36. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$. Розв'яжіть трикутник, якщо:
- 1) $AB = 8$ см, $\angle A = 30^\circ$;
 - 2) $AC = 4$ см, $\angle B = 45^\circ$;
 - 3) $AC = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$;
 - 4) $AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см;
 - 5) $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см;
 - 6) $AC = 3$ см, $AB = 6$ см.

12.37. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$. Розв'яжіть цей трикутник (сторони в завданнях 1)–3) знайдіть із точністю до сотих сантиметра, гострі кути у завданнях 4)–6) – із точністю до градуса).

1) $AB = 10$ см, $\angle B = 37^\circ$;

2) $BC = 7$ см, $\angle A = 83^\circ$;

3) $BC = 6$ см, $\angle B = 18^\circ$;

4) $AC = 10$ см, $BC = 6$ см;

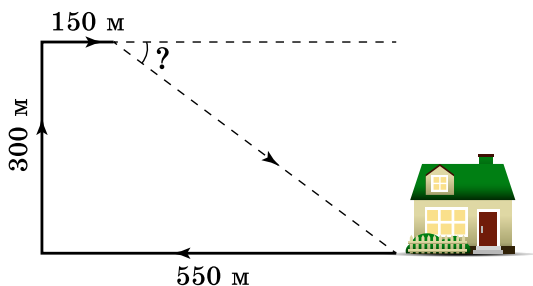
5) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см;

6) $BC = 3$ см, $AB = 7$ см.



Життєва математика

12.38. Яся на моноколесі від будинку в напрямку на захід проїхала 550 м. Потім повернула на північ і проїхала 300 м. Після цього повернула на схід і подолала ще 150 м. Під яким кутом до напрямку на схід вона має рухатися, щоб повернутися додому? У відповіді вкажіть ціле число градусів.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.39. (Всеукраїнська математична олімпіада, 1965 р.) Із деякої точки кола, описаного навколо прямокутника, проведено перпендикуляри до його діагоналей. Довести, що відстань між основами цих перпендикулярів не залежить від положення точки на колі.

§ 13. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі

1. Розв'язування трикутників. Загальні формули та факти

Нагадаємо, що розв'язати трикутник – означає знайти невідомі його сторони і кути за якими-небудь відомими сторонами і кутами. Раніше ми розв'язували прямокутні трикутники.

Під час розв'язування довільного трикутника ABC , де $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 13.1), використовують такі співвідношення:

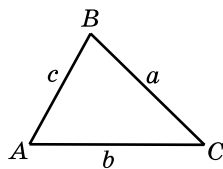
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ (теорема косинусів);}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (теорема синусів).}$$



Мал. 13.1

Розглянемо чотири види задач на розв'язування трикутників. Невідомі сторони будемо знаходити з точністю до сотих, а невідомі кути – із точністю до мінути.

2. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Приклад 1. Дано сторони трикутника a і b та кут C між ними. Знайти сторону c та кути A і B .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Дано: $a, b, \angle C$. Знайти: $c, \angle A, \angle B$. Розв'язання. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць. $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$.	Дано: $a = 4, b = 7, \angle C = 40^\circ$. Знайти: $c, \angle A, \angle B$. Розв'язання. $c = \sqrt{4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos 40^\circ} \approx 4,70$. $\cos A \approx \frac{7^2 + 4,7^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 4,7} \approx 0,8372$, $\angle A \approx 33^\circ 09'$. $\angle B \approx 180^\circ - (33^\circ 09' + 40^\circ) = 106^\circ 51'$.

3. Розв'язування трикутників за стороною і двома кутами

Приклад 2. Дано сторону трикутника a і кути B і C . Знайти сторони трикутника b і c і кут A .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Дано: $a, \angle B, \angle C$. Знайти: $\angle A, b, c$. Розв'язання. $\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$. $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.	Дано: $a = 8, \angle B = 40^\circ, \angle C = 80^\circ$. Знайти: $\angle A, b, c$. Розв'язання. $\angle A = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$. $b = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 5,94$. $c = \frac{8 \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 9,10$.

4. Розв'язування трикутників за трьома сторонами

Приклад 3. Дано три сторони a , b і c трикутника ($|b - c| < a < b + c$).
Знайти три кути A , B і C трикутника.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. 1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць. 2. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.	Дано: $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. 1. $\cos A = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3}$; $\angle A \approx 48^\circ 11'$. 2. $\cos B = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{11}{21}$; $\angle B \approx 58^\circ 25'$. 3. $\angle C \approx 180^\circ - (48^\circ 11' + 58^\circ 25') = 73^\circ 24'$.

5. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

Приклад 4. Дано сторони трикутника a , b і кут A . Знайти сторону c трикутника та кути B і C .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. І спосіб. 1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Із цього рівняння знаходимо c. Задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку. 2. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.	Дано: $a = 10$, $b = 8$, $\angle A = 70^\circ$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. І спосіб. 1. $10^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos 70^\circ$. $c^2 - 5,47c - 36 = 0$; $c_1 \approx 9,33$; $c_2 \approx -3,86$ не задовольняє змісту задачі. Отже, $c \approx 9,33$. 2. $\cos B \approx \frac{10^2 + 9,33^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9,33} \approx 0,659$; $\angle B \approx 48^\circ 45'$. 3. $\angle C \approx 180^\circ - (70^\circ + 48^\circ 45') = 61^\circ 15'$.

II спосіб.

$$1. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Може існувати два, один або не існувати жодного кута, що задовольняли б останню рівність та нерівність $\angle A + \angle B < 180^\circ$.

$$2. \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B).$$

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

II спосіб.

$$1. \sin B = \frac{8 \sin 70^\circ}{10} \approx 0,7518;$$

$$\angle B \approx 48^\circ 45' \text{ або}$$

$$\angle B \approx 180^\circ - 48^\circ 45' = 131^\circ 15'.$$

Оскільки $\angle A + \angle B = 70^\circ + 131^\circ 15' > 180^\circ$, то $\angle B = 131^\circ 15'$ не є розв'язком задачі.

$$2. \angle C \approx 180^\circ - (70^\circ + 48^\circ 45') = 61^\circ 15'.$$

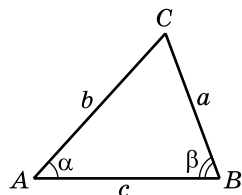
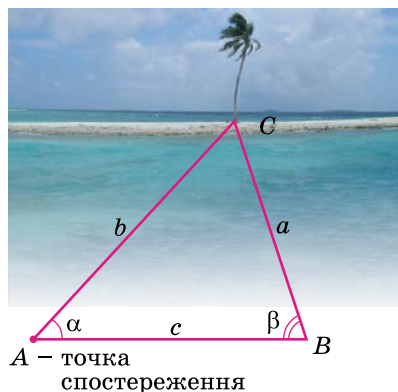
$$3. c \approx \frac{10 \sin 61^\circ 15'}{\sin 70^\circ} \approx 9,33.$$

Ця задача, на відміну від трьох попередніх, які завжди мають єдиний розв'язок, може мати один, два або не мати жодного розв'язку.

6. Розв'язування прикладних задач

Уміння розв'язувати трикутники допоможе і в розв'язуванні прикладних задач.

Приклад 5. (Вимірювання відстані до недоступної точки). Знайти відстань від точки спостереження A до недоступної точки C (мал. 13.2).



Мал. 13.2

Розв'язання. Цю задачу ми вже розв'язували у 8 класі за допомогою подібності трикутників. Розглянемо тепер інший спосіб – за допомогою теореми синусів.

1) Позначимо на місцевості точку B і виміряємо довжину відрізка AB . Нехай $AB = c$. Потім виміряємо (наприклад, за допомогою астролябії) кути A і B , нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

2) За теоремою синусів: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

3) $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$, тому $\sin C = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.

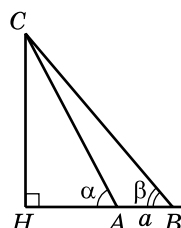
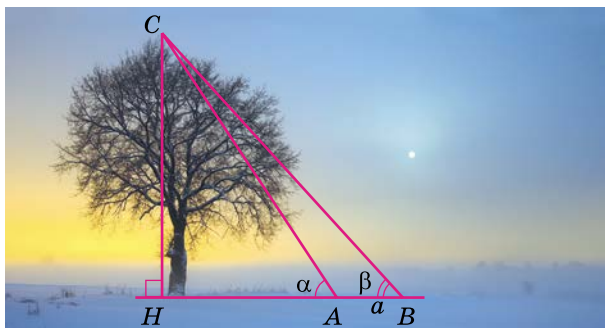
Остаточно отримаємо: $b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Приклад 6. (Вимірювання висоти предмета, основа якого недоступна).

Знайти висоту дерева CH , якщо точка H – недоступна (мал. 13.3).

Розв'язання. Цю задачу ми також розв'язували у 8 класі за допомогою співвідношень між сторонами і кутами в прямокутних трикутниках CHA і CHB . Розглянемо ще один спосіб розв'язування.

1) На прямій, що проходить через основу предмета – точку H , виберемо дві точки A і B , відстань між якими дорівнює a . Виміряємо кути CAH і CBH , нехай $\angle CAH = \alpha$, $\angle CBH = \beta$.



Мал. 13.3

2) Із трикутника ABC : $\frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$.

Оскільки $\angle CAB = 180^\circ - \alpha$, то $\angle ACB = 180^\circ - (\beta + 180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$.

Тоді $CA = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

3) Із трикутника CHA : $CH = AC \cdot \sin \alpha$. Тоді $CH = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.



Які співвідношення між сторонами і кутами трикутника використовуємо під час розв'язування трикутників? Як розв'язати трикутник: 1) за двома сторонами і кутом між ними; 2) за стороною і двома кутами; 3) за трьома сторонами; 4) за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

У задачах №№ 13.1–13.4, 13.12, 13.13 невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, кути в разі використання калькулятора – з точністю до мінути або з точністю до градуса в разі використання таблиць.

2

13.1. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом між ними:

- 1) $AB = 7$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$;
- 2) $AC = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle C = 46^\circ$;
- 3) $BC = 10$ см, $AB = 6$ см, $\angle B = 117^\circ$;
- 4) $AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 129^\circ$.

13.2. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом між ними:

- 1) $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\angle C = 42^\circ$;
- 2) $BC = 8$ см, $AB = 9$ см, $\angle B = 62^\circ$;
- 3) $AB = 9$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 120^\circ$;
- 4) $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 147^\circ$.

13.3. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за стороною і двома кутами:

- 1) $AB = 8$ см, $\angle A = 37^\circ$, $\angle B = 30^\circ$;
- 2) $AC = 10$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 92^\circ$;
- 3) $BC = 6$ см, $\angle B = 12^\circ$, $\angle A = 18^\circ$;
- 4) $AB = 7$ см, $\angle A = 57^\circ$, $\angle C = 62^\circ$.

13.4. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за стороною і двома кутами:

- 1) $AC = 5$ см, $\angle A = 150^\circ$, $\angle C = 8^\circ$;
- 2) $BC = 4$ см, $\angle B = 108^\circ$, $\angle A = 23^\circ$;
- 3) $AB = 12$ см, $\angle B = 56^\circ$, $\angle C = 94^\circ$;
- 4) $AC = 9$ см, $\angle A = 63^\circ$, $\angle C = 67^\circ$.

13.5. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці (кути знайдіть із точністю до градуса), відтак дізнаєтеся прізвище українського борця греко-римського стилю, олімпійського чемпіона 2020 р.



Розв'яжіть $\triangle ABC$ за трьома сторонами						$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
$AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $BC = 7$ см						Н	Ю	Б
$AB = 9$ см, $AC = 8$ см, $BC = 13$ см						К	Е	Л
$\approx 22^\circ$	$\approx 37^\circ$	$\approx 43^\circ$	$\approx 37^\circ$	60°	$\approx 98^\circ$	$\approx 100^\circ$		

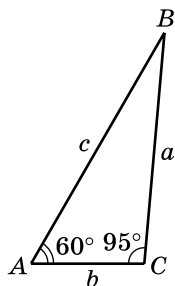
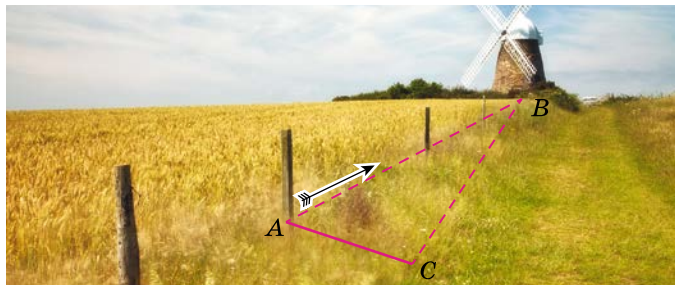
13.6. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці (кути знайдіть із точністю до градуса), відтак прочитаєте назву міста в Київській області, у якому народилася видатна українська поетеса Ліна Костенко.



Ліна Костенко

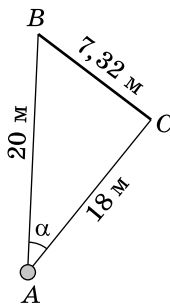
Розв'яжіть $\triangle ABC$ за трьома сторонами						$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
$AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $BC = 7$ см						В	И	Р
$AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $BC = 7$ см						Щ	Ж	І
$\approx 22^\circ$	$\approx 36^\circ$	$\approx 38^\circ$	$\approx 44^\circ$	$\approx 100^\circ$	120°			

- 13.7.** Сторона паралелограма дорівнює 7 см і утворює з його діагоналлю 8 см завдовжки кут 67° . Знайдіть другу сторону паралелограма та його кути.
- 13.8.** Діагональ паралелограма дорівнює 8 см і утворює кути 37° і 42° зі сторонами паралелограма. Знайдіть кути і сторони паралелограма.
- 13.9.** Щоб знайти відстань AB до млина (мал. 13.4), виміряли відстань $AC = 36$ м, $\angle A = 60^\circ$ і $\angle C = 95^\circ$. Знайдіть відстань AB з точністю до сотих метра.



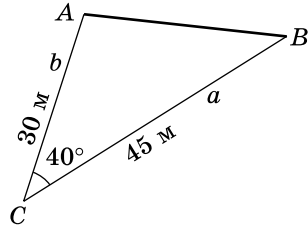
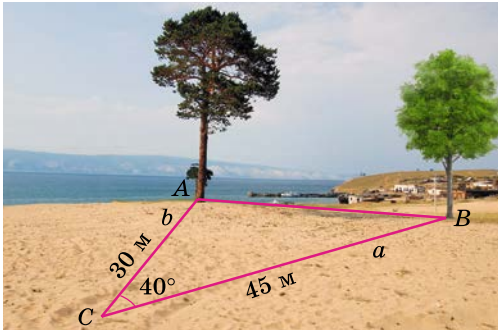
Мал. 13.4

- 13.10.** Футбольний м'яч міститься в точці A футбольного поля на відстанях 20 м і 18 м від основ B і C стійок воріт (мал. 13.5). Футболістка спрямовує м'яч у ворота. Знайдіть кут α (з точністю до градуса), під яким м'яч влучає у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7,32 м.



Мал. 13.5

- 13.11.** Дальномір – прилад для знаходження відстані до об'єкта без безпосередніх вимірювань на місцевості. Використовується у фотографії, геодезії, військовій справі, астрономії. За допомогою дальноміра було виміряно відстані $AC = 30$ м і $BC = 45$ м, а за допомогою астролії $\angle ACB = 40^\circ$ (мал. 13.6). Більшою чи меншою за 30 м є відстань між двома недоступними точками A і B ?



Мал. 13.6

3

13.12. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них:

- 1) $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle A = 80^\circ$;
- 2) $AC = 10$ см, $AB = 7$ см, $\angle B = 60^\circ$;
- 3) $BC = 2$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 61^\circ$;
- 4) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 30^\circ$.

13.13. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них:

- 1) $AB = 12$ см, $BC = 5$ см, $\angle C = 120^\circ$;
- 2) $AC = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 40^\circ$;
- 3) $AC = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 50^\circ$;
- 4) $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, $\angle B = 17^\circ$.

13.14. Сторона паралелограма дорівнює 6 см і утворює з діагоналями паралелограма кути 27° і 48° . Знайдіть другу сторону і кути паралелограма.

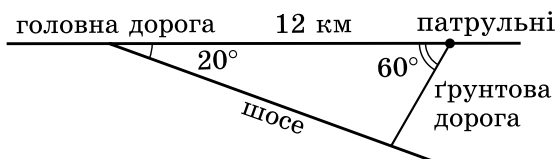
13.15. Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см і перетинаються під кутом 70° . Знайдіть сторони і кути паралелограма.

13.16. AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $AC = 6$ см, $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle CAD = 20^\circ$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

13.17. AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $BD = 8$ см, $\angle ABD = 49^\circ$, $\angle DBC = 62^\circ$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

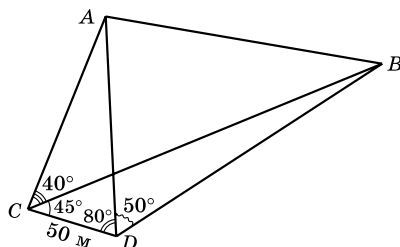
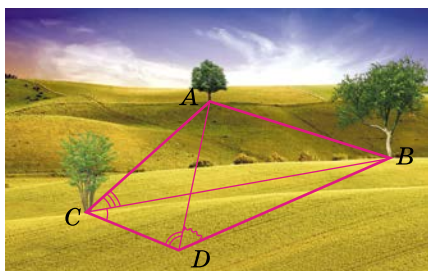
4

13.18. О 8:00 порушник правил дорожнього руху повернув з головної дороги і помчав уздовж шосе зі швидкістю 150 км/год. О 8:01 екіпаж патрульної поліції отримав наказ затримати порушника й помчав йому напереріз ґрунтовою дорогою зі швидкістю 80 км/год (мал. 13.7). Чи встигнуть патрульні зупинити порушника на перехресті шосе і ґрунтової дороги?



Мал. 13.7

- 13.19.** З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути 50° і 70° . Відстань між основами похилих дорівнює 6 см. Знайдіть кут між похилими та довжини похилих із точністю до сотих сантиметра. Скільки випадків слід розглянути?
- 13.20.** З точки до прямої проведено дві похилі, відстань між основами яких 7 см. Одна з них дорівнює 5 см і утворює з прямою кут 60° . Знайдіть другу похилу (з точністю до сотих сантиметра), кут між похилими та кут, що утворює друга похила з прямою (з точністю до градуса). Скільки випадків слід розглянути?
- 13.21.** Щоб за відсутності дальноміра знайти відстань між двома недоступними точками A і B , вибрали дві доступні точки C і D , провели вимірювання й отримали, що $CD = 50$ м, $\angle ADB = 50^\circ$, $\angle ADC = 80^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ (мал. 13.8). Знайдіть відстань AB (з точністю до метра).



Мал. 13.8



Вправи для повторення

- 13.22.** Знайдіть діагональ квадрата, площа якого дорівнює 36 см^2 .
- 13.23.** Одна зі сторін прямокутника вдвічі більша за іншу, а його діагональ дорівнює 10 см. Знайдіть площу й периметр прямокутника.
- 13.24.** Сусідні сторони паралелограма дорівнюють a і b , а його гострий кут дорівнює α . Знайдіть модуль різниці квадратів діагоналей паралелограма.
- 13.25.** Складіть рівняння прямої, що є серединним перпендикуляром до відрізка AB , якщо $A(-3; 2)$, $B(5; 0)$.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 13.26.** Знайдіть площу трикутника, сторона якого довжини a , а висота, проведена до неї, дорівнює h_a , якщо:
- 1) $a = 5$ см, $h_a = 8$ см;
 - 2) $a = 4$ см, $h_a = 22$ мм.
- 13.27.** Знайдіть площу паралелограма, сторона якого довжини a , а висота, проведена до неї, дорівнює h_a , якщо:
- 1) $a = 2$ см, $h_a = 3$ см;
 - 2) $a = 8$ см, $h_a = 0,5$ дм.



Життєва математика

- 13.28. Проектна діяльність.** Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. У проєкті будівництва школи вказано, що клас має довжину 12 м, а ширина становить 45 % від довжини. У класі заплановано три однакових вікна. Визначте, яких розмірів мають бути вікна, щоб вони відповідали санітарним нормам.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 13.29.** У трикутнику ABC $\angle C = 120^\circ$, H – ортоцентр трикутника, O – центр описаного кола. Точка M – середина дуги ACB . Доведіть, що $HM = MO$.

§ 14. Формули для знаходження площі трикутника

1. Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними та наслідок із неї

Нагадаємо, що у 8 класі ми знаходили площу S трикутника за формулою

$$S = \frac{1}{2}ah_a,$$

де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.

Доведемо ще кілька формул для знаходження площі трикутника.



Теорема 1 (формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними). **Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.**

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$, S – площа трикутника. Доведемо, що

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

- 1) Проведемо у трикутнику висоту AK , $AK = h$.
Тоді

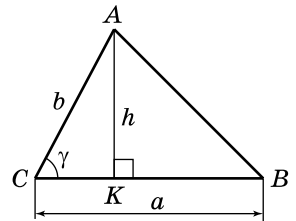
$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- 2) Якщо кут C – гострий (мал. 14.1), то із трикутника ACK маємо:

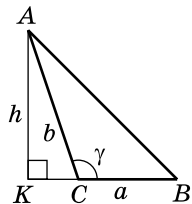
$$h = AK = AC \sin C = b \sin \gamma.$$

- 3) Якщо кут C – тупий (мал. 14.2), то із трикутника ACK маємо:

$$h = AK = AC \sin ACK = b \sin (180 - \gamma) = b \sin \gamma.$$



Мал. 14.1

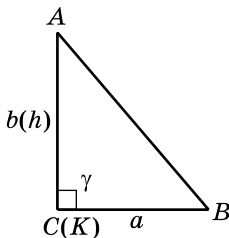


Мал. 14.2

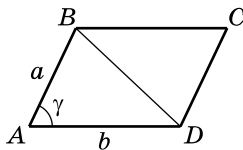
4) Якщо кут C – прямий (мал. 14.3), то

$$h = AK = AC = b = b \cdot 1 = b \sin 90^\circ = b \sin \gamma.$$

5) Отже, у всіх випадках $h = b \sin \gamma$, тобто $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$. ■



Мал. 14.3



Мал. 14.4



Наслідок. Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними.

Доведення. У паралелограмі $ABCD$ проведемо діагональ BD (мал. 14.4). Оскільки $\triangle ABD = \triangle CDB$ (за трьома сторонами), то $S_{ABD} = S_{CDB}$. Тому

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma = ab \sin \gamma. \quad \blacksquare$$



Приклад 1. Знайти площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a .

Розв'язання. Нагадаємо, що ми вже знаходили площу рівностороннього трикутника у 8 класі за формулою $S = \frac{1}{2} ah_a$. Знайдемо тепер площу цього трикутника й іншим способом, тобто за доведеною вище формулою. Оскільки всі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60° , маємо:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Приклад 2. Знайти площу трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, $\sqrt{3}$ см, $\sqrt{13}$ см.

Розв'язання. Нехай $a = 5$ см, $b = \sqrt{3}$ см, $c = \sqrt{13}$ см, $\angle C = \gamma$ (мал. 14.1).

$$1) \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тому } \gamma = 30^\circ.$$

$$2) S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2.$$

Зауважимо, якщо за косинусом кута неможливо знайти точне значення міри кута, тобто якщо кут γ виявиться не табличним, то знаходити сам кут γ не потрібно. Адже для знаходження площі достатньо знайти значення синуса кута, скориставшись формулою

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}.$$

2. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними



Приклад 3. Довести, що площа будь-якого опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей чотирикутника на синус кута між ними.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \varphi$, де O – точка перетину діагоналей (мал. 14.5), S – площа чотирикутника.

Доведемо, що $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$.

1) Нехай $AO = m_1$, $OC = m_2$, $BO = n_1$, $OD = n_2$.

Тоді $AC = m_1 + m_2$, $BD = n_1 + n_2$.

Очевидно, що $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$.

2) За доведеною вище формулою:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}m_1n_1\sin \varphi;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}n_1m_2\sin (180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}n_1m_2\sin \varphi;$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}m_2n_2\sin \varphi;$$

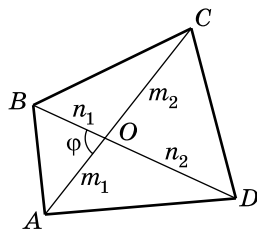
$$S_{\triangle DOA} = \frac{1}{2}m_1n_2\sin (180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}m_1n_2\sin \varphi.$$

$$3) \text{ Маємо: } S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOA} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin \varphi(n_1m_1 + n_1m_2 + m_2n_2 + m_1n_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(n_1(m_1 + m_2) + n_2(m_1 + m_2))\sin \varphi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(n_1 + n_2)\sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \varphi = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi. \quad \blacksquare$$



Мал. 14.5

3. Формула Герона

Т Теорема 2 (формула Герона). Площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна знайти за формулою:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

Доведення. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

1) За теоремою косинусів: $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

2) Тоді $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{(1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma)} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{2ab} \sqrt{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)} =$$

$$= \frac{1}{2ab} \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{c - a + b}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a + b + c}{2}}.$$

3) Але $\frac{c + b - a}{2} = \frac{a + b + c - 2a}{2} = \frac{a + b + c}{2} - a = p - a$.

Аналогічно $\frac{c + a - b}{2} = p - b$, $\frac{a + b - c}{2} = p - c$.

4) Тоді: $\sin \gamma = \frac{1}{2ab} \cdot 4 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$$= \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

5) Отже, $S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ■

Зауважимо, що формулою Герона зручно користуватися у разі, якщо довжини сторін a , b і c є раціональними числами.

Якщо серед сторін трикутника є хоч одна, довжина якої – ірраціональне число, то зручніше використовувати метод, запропонований для розв'язування прикладу 2 в цьому параграфі.

За допомогою формули Герона, якщо відомо сторони, можна знаходити висоти трикутника, зокрема, використовуючи формулу:

$$h_a = \frac{2S}{a},$$

де $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, a – сторона, до якої проведено висоту.

Із цієї формули висоти приходимо до висновку, що

найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони.

Приклад 4. Знайти найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 25 см, 29 см і 6 см.

Розв'язання. 1) Знайдемо площу S трикутника за формулою Герона.

Оскільки $p = \frac{25 + 29 + 6}{2} = 30$ (см), то

$$S = \sqrt{30(30-25)(30-29)(30-6)} = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Найбільшою висотою цього трикутника є та, що проведена до сторони 6 см завдовжки. Отже, $h = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 60}{6} = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

4. Формула площі трикутника за радіусом описаного кола



Теорема 3 (формула площі трикутника за радіусом описаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де a, b, c – сторони трикутника, R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Доведення. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

За узагальненою теоремою синусів: $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$, де γ – кут, протилежний до сторони c трикутника. Звідси $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$.

$$\text{Маємо: } S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}. \quad \blacksquare$$

З доведеної формули отримаємо формулу для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Зауважимо, що цю формулу доцільно використовувати, якщо відомо довжини всіх трьох сторін трикутника.

Радіус R кола, описаного навколо прямокутного трикутника, зручно знаходити за вивченою раніше формулою:

$$R = \frac{c}{2},$$

де c – гіпотенуза трикутника.

5. Формула площі трикутника за радіусом вписаного кола



Теорема (формула площі трикутника за радіусом вписаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника, r – радіус кола, вписаного у трикутник.

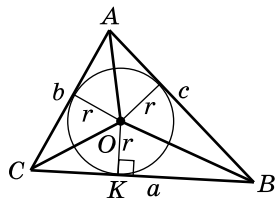
Доведення. Нехай O – центр кола, вписаного у $\triangle ABC$ (мал. 14.6), а точка K – точка дотику кола до сторони BC , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

1) Оскільки $OK \perp BC$, то OK є висотою трикутника COB . Тоді $S_{\triangle COB} = \frac{1}{2}ar$.

2) Аналогічно $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}br$; $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}cr$.

3) Тоді $S = S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr. \quad \blacksquare$$



Мал. 14.6



Наслідок. Площу S будь-якого описаного багатокутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де p – півпериметр багатокутника, r – радіус кола, вписаного у багатокутник.

З доведеної формули випливає формула для обчислення радіуса кола, вписаного у трикутник або в описаний багатокутник:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Радіус r кола, вписаного у прямокутний трикутник, зручно знаходити за формулою

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

де a і b – катети трикутника, c – його гіпотенуза.

Доведіть цю формулу самостійно.

Приклад 5. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайти радіус R кола, описаного навколо трикутника, та радіус r кола, вписаного у трикутник.

Розв'язання. 1) Знайдемо півпериметр трикутника:

$$p = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \text{ (см)}, \text{ та його площу за формулою Герона}$$

$$S = \sqrt{16(16 - 4)(16 - 13)(16 - 15)} = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$2) \text{ Отже, } R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8} = 8,125 \text{ (см)},$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24}{16} = 1,5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $R = 8,125$ см, $r = 1,5$ см.

А ще раніше...

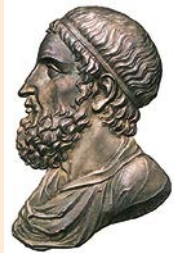
Грецький математик Герон Александрійський, який жив у I ст. до н. е., багато уваги приділяв проблемам геодезії та практичному застосуванню геометрії та механіки. Хоча його праці мали радше енциклопедичний характер, Герона вважають видатним механіком того часу. Недарма за ним закріпилося прізвисько «Герон-механік».

Однією з праць Герона була «Геометрика», що є фактично збірником формул та відповідних їм завдань. У ній містилися вправи на обчислення площ квадратів, прямокутників і трикутників. У цій праці Герон наводить методику обчислення площі трикутника зі сторонами 13, 14 і 15, а в іншій своїй праці, яка має назву «Метрика», наводить доведення формули:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Саме тому цю формулу для обчислення площі трикутника за трьома його сторонами прийнято називати формулою Герона, проте вона була відома Архімеду ще у III ст. до н. е.

Відомі на той час правила для обчислення площ застосовували також грецькі, латинські й середньовічні європейські землеміри і техніки.



Герон
Александ-
рійський



Сформулюйте і доведіть теорему про формулу площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними. ○ Сформулюйте і доведіть формулу Герона. ○ Які співвідношення між сторонами трикутника і висотами, проведеними до них, ви знаєте? ○ Сформулюйте і доведіть формули знаходження площі трикутників за радіусами вписаного та описаного кіл. ○ Запишіть формули для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника, і радіуса кола, вписаного у трикутник.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



14.1. (Усно.) Укажіть формули, за якими можна знайти площу трикутника:

- 1) $S = ab \sin \gamma$;
- 2) $S = \frac{1}{2} a h_a$;
- 3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
- 4) $S = \frac{a+b}{2} h$;
- 5) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;
- 6) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

14.2. (Усно.) Укажіть формули, за якими можна знайти площу паралелограма:

- 1) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;
- 2) $S = a h_a$;
- 3) $S = \frac{1}{2} a h_a$;
- 4) $S = ab \sin \gamma$.

14.3. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\gamma = 30^\circ$;
- 2) $a = 7$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 120^\circ$.

14.4. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\gamma = 45^\circ$;
- 2) $a = 6$ см, $b = 2$ см, $\gamma = 150^\circ$.

14.5. a і b – сторони паралелограма, γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

- 1) $a = 7$ см, $b = 6$ см, $\gamma = 60^\circ$;
- 2) $a = 6$ см, $b = 13$ см, $\gamma = 135^\circ$.

14.6. Сторони паралелограма a і b , γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

- 1) $a = 8$ см, $b = 6$ см, $\gamma = 30^\circ$;
- 2) $a = 9$ см, $b = 12$ см, $\gamma = 120^\circ$.



14.7. Доведіть, що площу S ромба, сторона якого дорівнює a , а один з кутів – α , можна знайти за формулою $S = a^2 \sin \alpha$.

14.8. Обчисліть площу ромба:

- 1) сторона якого дорівнює 4 см, а гострий кут – 45° ;
- 2) сторона якого дорівнює 8 см, а тупий кут – 150° .

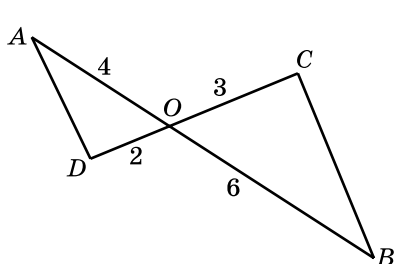
14.9. Обчисліть площу ромба:

- 1) сторона якого дорівнює 6 см, а гострий кут – 60° ;
- 2) сторона якого дорівнює 10 см, а тупий кут – 135° .

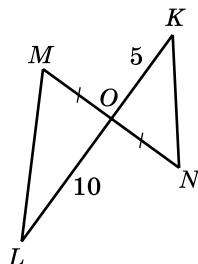
14.10. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при основі – 75° . Знайдіть площу трикутника.

- 14.11. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює 8 см.
- 14.12. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 11 см, 25 см і 30 см.
- 14.13. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 51 см і 53 см.
- 14.14. Знайдіть площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а кут між діагоналями – 30° .
- 14.15. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагональ якої дорівнює 8 см, а кут між діагоналями – 60° .
- 14.16. Знайдіть сторону BC трикутника ABC , якщо $AB = 8$ см, $\angle B = 45^\circ$, $S_{ABC} = 6\sqrt{2}$ см².
- 14.17. Площа паралелограма дорівнює 24 см², одна з його сторін – 8 см, а один з кутів – 30° . Знайдіть невідому сторону паралелограма.
- 14.18. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 7 см і 16 см, а його площа дорівнює 28 см². Обчисліть кут між цими сторонами.
- 14.19. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 8 см і 10 см. Обчисліть кут між цими сторонами, якщо площа трикутника дорівнює $20\sqrt{2}$ см².
- 3** 14.20. Знайдіть найменшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.
- 14.21. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 29 см і 30 см.
- 14.22. Висоти паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між сторонами дорівнює 30° . Знайдіть площу паралелограма.
- 14.23. Висота ромба дорівнює 8 см, а гострий кут – 60° . Знайдіть площу ромба.
- 14.24. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 150° , а його площа – 25 см². Знайдіть сторони трикутника.
- 14.25. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30° , а його площа – 9 см². Знайдіть сторони трикутника.
- 14.26. Доведіть, що діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликих трикутники.
- 14.27. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 25 см, 29 см і 36 см.
- 14.28. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 40 см і 51 см.
- 14.29. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см.
- 14.30. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см.

- 14.31. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (мал. 14.7), $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, $CO = 3$ см, $DO = 2$ см. Знайдіть відношення площ трикутників AOD і COB .



Мал. 14.7

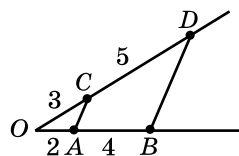


Мал. 14.8

- 14.32. Відрізки MN і KL перетинаються в точці O (мал. 14.8), $MO = ON$, $KO = 5$ см, $LO = 10$ см. Знайдіть відношення площ трикутників KON і MOL .
- 14.33. Кути ромба відносяться як 1:3. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см.
- 4** 14.34. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R , а два його кути — α і β . Знайдіть площу трикутника.
- 14.35. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 14 см і 22 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 12 см.
- 14.36. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 16 см і 30 см, а медіана, проведена до більшої із цих сторін, дорівнює 25 см.
- 14.37. Розгляньте рівнобедрений трикутник з кутом 2α при вершині та бічною стороною a . Знайдіть площу цього трикутника двома способами і доведіть формулу $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.
- 14.38. У трикутнику ABC $AB = 10$ см, $AC = 6$ см. У якому відношенні бісектриса кута A ділить площу трикутника ABC ?
- 14.39. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 3, $\sqrt{5}$ і $\sqrt{10}$ см.

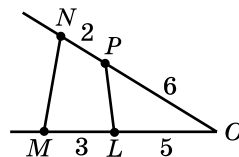
- 14.40. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 4, $\sqrt{11}$ і $\sqrt{13}$ см.

- 14.41. На сторонах OB та OD кута O відкладено відрізки $OA = 2$ см, $AB = 4$ см, $OC = 3$ см і $CD = 5$ см (мал. 14.9). Знайдіть відношення площі трикутника OBD до площі чотирикутника $ABDC$.



Мал. 14.9

- 14.42. На сторонах OM та ON кута O відкладено відрізки $OL = 5$ см, $LM = 3$ см, $OP = 6$ см і $PN = 2$ см (мал. 14.10). Знайдіть відношення площі трикутника OLP до площі чотирикутника $MNPL$.



Мал. 14.10



Вправи для повторення

- 14.43. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 2 см, а кут між ними дорівнює 30° . Знайдіть третю сторону трикутника.
- 14.44. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо:
 1) $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 82^\circ$;
 2) $AC = 5$ см, $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.
- 14.45. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60° , а їх різниця дорівнює 5 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 14.46. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника. Скільки розв'язків має задача?



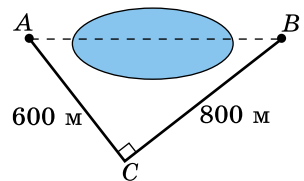
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 14.47. Знайдіть суму кутів опуклого:
 1) дев'ятикутника;
 2) двадцятикутника.
- 14.48. Усі кути опуклого восьмикутника між собою рівні. Знайдіть градусну міру одного із цих кутів.
- 14.49. Чи існує опуклий багатокутник, сума кутів якого дорівнює:
 1) 1620° ;
 2) 2000° ?
- 14.50. 1) Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть його периметр.
 2) Периметр квадрата дорівнює 28 см. Знайдіть його сторону.
- 14.51. Побудуйте рівносторонній трикутник і квадрат. Навколо кожної із цих фігур опишіть коло і в кожну з них впишіть коло.



Життєва математика

- 14.52. Використовуючи дані (див. мал.), знайдіть відстань у метрах між пунктами A і B , розміщеними на різних берегах озера.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 14.53. Доведіть, що в будь-якому опуклому чотирикутнику сума довжин діагоналей менша від його периметра.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 11–14)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 70° , а проти сторони b – кут 80° . Укажіть правильну рівність.

А. $\frac{a}{\cos 70^\circ} = \frac{b}{\cos 80^\circ}$

Б. $\frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ}$

В. $\frac{a}{70^\circ} = \frac{b}{80^\circ}$

Г. $\frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ}$

2. Сторони трикутника завдовжки a і b утворюють між собою кут γ . Якщо $a = 6$ см, $b = 10$ см, $\gamma = 45^\circ$, то площа трикутника дорівнює ...

А. $15\sqrt{2}$ см²

Б. $30\sqrt{2}$ см²

В. 60 см²

Г. $60\sqrt{2}$ см²

3. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 5 см, а один з його кутів – 120° . Знайдіть площу паралелограма.

А. 40 см²

Б. $40\sqrt{3}$ см²

В. $10\sqrt{3}$ см²

Г. $20\sqrt{3}$ см²

- 2** 4. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 15 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть третю сторону трикутника.

А. 14 см

Б. 13 см

В. 17 см

Г. $\sqrt{379}$ см

5. У трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 8\sqrt{2}$ см. Знайдіть AC .

А. 8 см

Б. $8\sqrt{3}$ см

В. 16 см

Г. $16\sqrt{2}$ см

6. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 13 см.

А. 90°

Б. 120°

В. 135°

Г. 150°

- 3** 7. Одна зі сторін трикутника дорівнює 14 см, дві інші утворюють кут 120° , а їх різниця дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трикутника.

А. 30 см

Б. 32 см

В. 28 см

Г. 34 см

8. У трикутнику ABC $\angle B = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть $\angle A$.

А. 30°

Б. 45°

В. 60°

Г. 45° або 135°

9. Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 13 см і 20 см завдовжки.

А. 12 см

Б. $10\frac{2}{13}$ см

В. $6\frac{3}{5}$ см

Г. $13\frac{1}{5}$ см

- 4** 10. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см. На сторонах AB і AC відповідно взято точки K і L такі, що $AK = 2$ см, $AL = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка KL .

А. 4 см

Б. $\sqrt{17}$ см

В. $\sqrt{41}$ см

Г. 5 см

11. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 16 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо її відношення до радіуса описаного кола дорівнює $\sqrt{3} : 1$.

А. 14 см Б. 16 см В. 14 см або $2\sqrt{97}$ см Г. 18 см

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, що проведена до третьої сторони, – 4 см. Знайдіть менший з відрізків, на які бісектриса трикутника ділить цю сторону.

А. 6,125 см Б. 6,5 см В. 6 см Г. 7,875 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 13. Установіть відповідність між довжинами сторін трикутника (1–3) та його видом (А–Г).

Довжини сторін трикутника Вид трикутника

1. 5 см, 7 см, 9 см

А. Прямокутний

2. 6 см, 8 см, 10 см

Б. Різносторонній гострокутний

3. 7 см, 7 см, 9 см

В. Рівнобедрений гострокутний

Г. Тупокутний

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО §§ 11–14

1 1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 20° , а проти сторони b – кут 70° . Які з рівностей правильні:

1) $\frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 20^\circ}$; 2) $\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ}$;

3) $\frac{a}{\cos 20^\circ} = \frac{b}{\cos 70^\circ}$; 4) $\frac{a}{b} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ}$?

2. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 9 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть площу трикутника.

3. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 5 см, а один з кутів – 135° . Знайдіть площу паралелограма.

2 4. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см, а кут між ними дорівнює 120° . Знайдіть третю сторону трикутника.

5. У трикутнику ABC $AB = 6\sqrt{2}$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Знайдіть довжину сторони BC .

6. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо $AB = 8$ см, $AC = 9$ см, $BC = 5$ см (невідомі кути знайдіть із точністю до градуса).

3 7. Одна зі сторін трикутника дорівнює 13 см, дві інші утворюють кут 60° , а їх різниця дорівнює 7 см. Знайдіть периметр трикутника.

8. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см.

4 9. Дві сторони трикутника дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 2 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{2} : 1$. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові завдання

4 10. У трикутнику ABC $AB = 7$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см. На сторонах BC і CA відповідно позначено точки M і N так, що $CM = 5$ см, $CN = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка MN .

11. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 16 см і 38 см, а медіана, проведена до третьої сторони, – 25 см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 11

1 1. Сторони трикутника a , b , c лежать відповідно проти кутів A , B , C . Які з рівностей правильні:

$$1) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad 2) \cos C = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2ab};$$

$$3) \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \quad 4) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}?$$

2 2. Знайдіть сторону AC трикутника ABC , якщо:

1) $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $\angle B = 60^\circ$;

2) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 120^\circ$.

3. Знайдіть середній за величиною кут трикутника зі сторонами 3 см, 7 см і 8 см.

4. Одна з бічних сторін трапеції дорівнює 10 см і утворює з меншою основою кут 120° . Знайдіть діагоналі трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 см і 16 см.

5. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі – 30° . Знайдіть основу трикутника.

6. Знайдіть медіану рівнобедреного трикутника, проведену до бічної сторони, якщо основа трикутника дорівнює 6 см, а бічна сторона – 8 см.

7. Знайдіть суму квадратів діагоналей ромба, сторона якого дорівнює 10 см.

3 8. Дві сторони трикутника відносяться як $\sqrt{3} : 2$, а кут між ними 30° . Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона дорівнює 5 см.

9. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 14 см, а кут проти більшої з них – 120° . Знайдіть периметр трикутника.

10. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відношення його сторін дорівнює $10 : 14 : 19$.

11. Для трикутника ABC справджується рівність $c^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab$. Знайдіть градусну міру кута C .

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 3 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть довжину медіани, проведеної до третьої сторони трикутника.

4

13. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см і лежить проти кута 60° . Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 3 см.

14. У трикутнику зі сторонами 3 см, 4 см і 6 см проведено медіану до більшої сторони. Визначте косинус кута, що утворює ця медіана з меншою стороною трикутника.

15. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює m , а кут при основі – α . Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

16. Сторони гострокутного трикутника ABC дорівнюють a , b і c . Знайдіть довжину проєкції сторони b на сторону a .

17. Навколо чотирикутника, сторони якого в порядку слідування дорівнюють a , b , c і d , можна описати коло. Знайдіть косинус кута між сторонами a і b .

18. Доведіть, що в будь-якому трикутнику відношення суми квадратів сторін до суми квадратів медіан дорівнює $\frac{4}{3}$.

19. Для медіан трикутника m_1 , m_2 , m_3 справджується рівність $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$. Доведіть, що трикутник прямокутний.

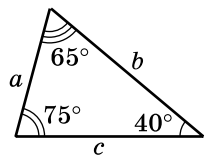
До § 12

1

20. Запишіть теорему синусів для трикутника, зображеного на малюнку 1.

2

21. У трикутнику ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Знайдіть відношення довжини сторони BC до довжини сторони AB .



Мал. 1

22. У трикутнику ABC $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $AC = 8\sqrt{6}$ см. Знайдіть BC .

23. У трикутнику ABC $AC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

24. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а кут при основі – 30° .

3

25. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2, 3. Знайдіть відношення сторін трикутника.

26. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють $10\sqrt{2}$ см і $10\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, – 10 см. Знайдіть кути трикутника.

27. У трикутнику ABC $AC = 10$ см, $BC = 7$ см. Чи можливо, що:

- 1) $\sin B = \frac{2}{3}$; 2) $\sin A = \frac{4}{5}$?

28. Сторона трикутника у $\sqrt{3}$ разів більша за радіус описаного навколо нього кола. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.

4

29. Два кути трикутника дорівнюють α і β . Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R . Знайдіть периметр трикутника.

30. Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну йому сторону на частини, обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

31. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кола, що проходить через кінці більшої сторони і середину меншої сторони.

32. У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AC = b$. Знайдіть довжину бісектриси трикутника AL .

33. Сторона квадрата дорівнює a . Знайдіть радіус кола, що проходить через вершину квадрата, середину сторони, що не містить цієї вершини, і точку перетину діагоналей квадрата.

До § 13

2

34. Розв'яжіть трикутник ABC , якщо:

1) $BC = 3$ см, $AB = 4$ см, $\angle B = 58^\circ$;

2) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 139^\circ$;

3) $BC = 4$ см, $\angle B = 48^\circ$, $\angle C = 115^\circ$;

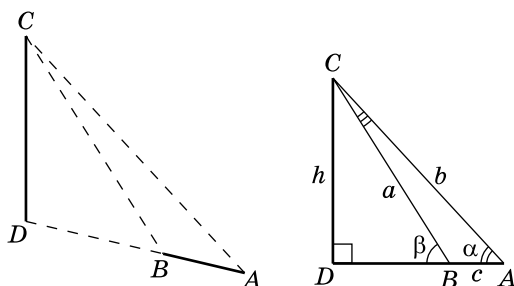
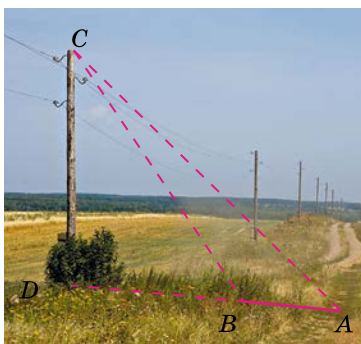
4) $AB = 10$ см, $\angle A = 9^\circ$, $\angle C = 97^\circ$;

5) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AC = 7$ см;

6) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см.

Невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, а невідомі кути – із точністю до мінути (у разі використання калькулятора) або з точністю до градуса (у разі використання таблиць).

35. Щоб знайти висоту CD стовпа лінії електропередачі, основа якого недоступна, виміряли відстань $AB = 2$ м та кути A і B : $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ (мал. 2). Знайдіть висоту стовпа CD двома способами (знайшовши спочатку BC або знайшовши спочатку AC).



Мал. 2

3

36. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо:

- 1) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $\angle B = 50^\circ$;
- 2) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 110^\circ$;
- 3) $BC = 2$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 35^\circ$;
- 4) $AB = 7$ см, $BC = 8$ см, $\angle C = 60^\circ$.

Невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, а невідомі кути – із точністю до мінути (у разі використання калькулятора) або з точністю до градуса (у разі використання таблиць).

37. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Кут між діагоналлю трапеції та бічною стороною дорівнює 60° , а між діагоналлю та основою – 40° . Знайдіть основи трапеції та її діагональ.

4

38. Розв'яжіть трикутник ABC , якщо:

- 1) $BC = 10$ см, $AC = 15$ см, CM – медіана, $CM = 11$ см;
- 2) $BC = 12$ см, AH – висота, $AH = 6$ см, AM – медіана, $AM = 10$ см.

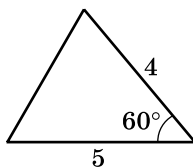
39. Спортивний літак летить по замкненому маршруту, траєкторія якого має форму трикутника, у якого два кути дорівнюють 100° і 50° . Відстань, що є довжиною сторони, яка лежить проти третього кута, літак долає за 1 год. За який час літак подолає весь маршрут, якщо його швидкість є сталою? Відповідь округліть до хвилин.

40. Три дороги утворюють трикутник ABC , у якого $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 145^\circ$, причому AB – шосе, AC і BC – ґрунтові дороги. Швидкість руху шосейною дорогою вдвічі більша за швидкість руху ґрунтовою дорогою. Водій хоче якнайшвидше потрапити з пункту A в пункт C . Який маршрут має обрати водій?

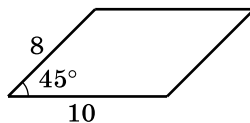
До § 14

1

41. Знайдіть площі трикутника і паралелограма, зображених на малюнках 3 і 4.



Мал. 3



Мал. 4

2

42. Знайдіть площу трикутника ABC , якщо $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, а зовнішній кут при вершині A дорівнює 30° .

43. Знайдіть гострий кут ромба, сторона якого дорівнює 6 см, а площа – 18 см^2 .

44. Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а кут між бічними сторонами – 120° .

3

45. Знайдіть середню за довжиною висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.

46. Сторони паралелограма дорівнюють 16 см і 10 см, а кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, – 120° . Знайдіть площу паралелограма.

47. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, і радіус кола, вписаного у трикутник, якщо сторони трикутника дорівнюють 8 см, 26 см і 30 см.

48. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а висота, проведена до неї, – 16 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

49. Одна зі сторін трикутника вдвічі більша за іншу, а кут між цими сторонами дорівнює 60° . Знайдіть третю сторону трикутника, якщо його площа – $8\sqrt{3}$ см².

4

50. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а його площа – $3\sqrt{3}$ см². Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

51. Площа трикутника 5 см², а дві його сторони дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть площі трикутників, на які він ділиться бісектрисою кута між цими сторонами.

52. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{6}$ см і $\sqrt{7}$ см.

53. AM – медіана трикутника ABC . Знайдіть площу трикутника AMB , якщо $AB = 16$ см, $AC = 10$ см, $\angle BAC = 120^\circ$.

54. Три кола, радіуси яких дорівнюють 6 см, 7 см і 8 см, попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

55. У трикутник зі сторонами 12 см, 50 см і 58 см вписано коло, а центр кола сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трьох отриманих трикутників.

56. Діагоналі паралелограма дорівнюють 40 см і 74 см, а одна з його сторін – 51 см. Знайдіть площу паралелограма.

57. Основи трапеції дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони – 13 см і 20 см. Знайдіть висоту трапеції.



Головне в розділі 3

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

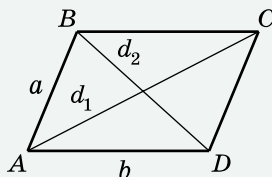
Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

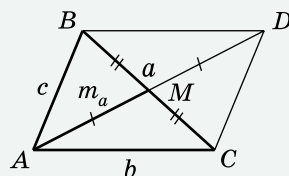
Якщо c – найбільша сторона трикутника і $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, то $\angle C$ – гострий, а трикутник – гострокутний; $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то $\angle C$ – прямий, а трикутник – прямокутний; $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, то $\angle C$ – тупий, а трикутник – тупокутний.



Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

AM – медіана трикутника ABC . Формула медіани трикутника:

$$AM = m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$



ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.

Наслідок (узагальнена теорема синусів). У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.$$

ФОРМУЛИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

Теорема 1 (формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними). Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Наслідок. Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними.

Теорема 2 (формула Герона). Площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна знайти за формулою

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

Найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони.

Теорема 3 (формула площі трикутника за радіусом описаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де a , b , c – сторони трикутника, R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Формула для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Теорема 4 (формула площі трикутника за радіусом вписаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника, r – радіус кола, вписаного у трикутник.

Формула для обчислення радіуса кола, вписаного у трикутник або в описаний многокутник:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Наслідок. Площу S будь-якого описаного многокутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де p – півпериметр многокутника, r – радіус кола, вписаного у многокутник.

РОЗДІЛ 4

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

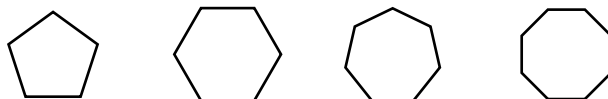
- пригадаєте формули довжини кола і площі круга;
- ознайомитеся з поняттями правильного многокутника, сектора і сегмента круга;
- дізнаєтеся формули радіусів вписаних і описаних кіл для правильних многокутників, довжини дуги кола, площ сектора і сегмента;
- навчитеся будувати правильні многокутники.

§ 15. Правильні многокутники

1. Означення правильного многокутника

Правильним многокутником називають опуклий многокутник, у якого всі сторони між собою рівні і всі кути між собою рівні.

Прикладами правильних многокутників є рівносторонній трикутник і квадрат. На малюнку 15.1 зображено правильні п'ятикутник, шестикутник, семикутник і восьмикутник.



Мал. 15.1

2. Формула для обчислення кута правильного n -кутника

Оскільки сума кутів будь-якого опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$, а всі кути правильного многокутника рівні між собою, то неважко знайти міру такого кута.

Якщо α_n – кут правильного n -кутника, то

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

Наприклад, кут правильного трикутника

$$\alpha_3 = \frac{180^\circ(3 - 2)}{3} = 60^\circ;$$

правильного чотирикутника (квадрата)

$$\alpha_4 = \frac{180^\circ(4-2)}{4} = 90^\circ,$$

це узгоджується з тим, що відомо з попередніх класів.

Приклад 1. Знайти кількість вершин правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 45° .

Розв'язання. 1) Оскільки зовнішній кут правильного многокутника дорівнює 45° , то легко знайти його внутрішній кут:

$$\alpha_n = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

$$2) \text{ Маємо рівняння: } 135^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n}, \text{ звідки } n = 8.$$

Відповідь: 8.

3. Формула для обчислення зовнішнього кута правильного n -кутника

Приклад 1 можна було б розв'язати іншим способом, якщо знати формулу, яка пов'язує градусну міру зовнішнього кута правильного многокутника β_n з кількістю його вершин (сторін). Маємо:

$$\beta_n = 180^\circ - \alpha_n = 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Отже,

якщо β_n – зовнішній кут правильного n -кутника, то

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

За цією формулою приклад 1 можна розв'язати простіше. Дійсно,

$$n = \frac{360^\circ}{\beta_n} = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8.$$

4. Правильний многокутник, вписаний у коло та описаний навколо кола

Нагадаємо, що

коло називають *описаним навколо многокутника*, якщо всі його вершини лежать на колі;

коло називають *вписаним у многокутник*, якщо всі його сторони дотикаються до кола.



Теорема (про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього). Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.

Доведення. Нехай $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ – правильний n -кутник (мал. 15.2).

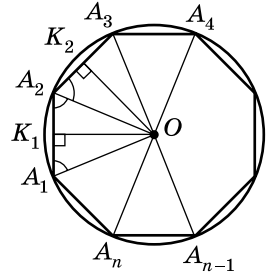
1) З вершин A_1 і A_2 проведемо бісектриси кутів n -кутника. Нехай вони перетнулися в точці O . Трикутник A_1OA_2 – рівнобедрений, бо $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha_n}{2}$.

2) Сполучимо точку O з вершиною A_3 , $\angle OA_2A_3 = \frac{\alpha_n}{2}$ (бо A_2O – бісектриса кута $A_1A_2A_3$). Тоді $\triangle A_1A_2O = \triangle A_3A_2O$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $A_1O = A_2O = A_3O$.

3) Сполучаючи всі вершини цього n -кутника з точкою O і встановлюючи послідовно рівність кожної наступної пари трикутників, отримаємо, що $A_1O = A_2O = A_3O = \dots = A_{n-1}O = A_nO$. Це означає, що всі вершини цього правильного n -кутника рівновіддалені від точки O , а тому точка O є центром описаного навколо нього кола, а OA_1 – радіусом цього кола.

4) Проведемо висоти OK_1 і OK_2 в рівних між собою рівнобедрених трикутниках A_1A_2O і A_3A_2O до основ A_1A_2 і A_2A_3 відповідно. $\triangle OK_1A_1 = \triangle OK_2A_2$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $OK_1 = OK_2$.

5) Аналогічно доводимо, що рівними між собою є висоти всіх рівнобедрених трикутників, вершиною яких є точка O , а основою – сторона правильного многокутника. Усі сторони цього правильного многокутника рівновіддалені від точки O , а тому точка O – центр кола, вписаного в цей многокутник, а OK_1 – радіус цього кола. ■



Мал. 15.2



Наслідок 1. Центри вписаного й описаного кіл правильного многокутника збігаються.

Цю точку називають *центром правильного многокутника*. На малюнку 15.2 точка O – центр многокутника.



Наслідок 2. Коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їхніх серединах.

5. Центральний кут правильного многокутника

Кут між двома радіусами описаного кола, кінцями яких є сусідні вершини правильного многокутника, називають *центральною кутом правильного многокутника*.

На малюнку 15.2 центральними кутами правильного n -кутника є кути A_1OA_2 , A_2OA_3 , A_3OA_4 , ..., $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1 . Усі вони рівні між собою (за доведеною теоремою) і дорівнюють по $\frac{360^\circ}{n}$.

Нехай γ_n – центральний кут правильного n -кутника, тоді

$$\gamma_n = \frac{360^\circ}{n},$$

де γ_n – центральний кут правильного n -кутника.

6. Знаходження площі правильного многокутника



Приклад 2. Знайти площу правильного n -кутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R .

Розв'язання. Нехай S_n – площа правильного n -кутника, S_1 – площа трикутника A_1OA_2 (мал. 15.2).

1) Тоді $S_n = n \cdot S_1$. Знайдемо S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin \angle A_1OA_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

$$2) \text{ Маємо: } S_n = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Оскільки у правильний многокутник можна вписати коло, то його площу S_n за наслідком з теореми про площу трикутника за радіусом вписаного кола можна знайти і так:

$$S_n = pr,$$

де p – півпериметр n -кутника, r – радіус вписаного в нього кола.

7. Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників

Нехай $A_1A_2 = a_n$ – сторона правильного n -кутника, $OA_1 = R$ – радіус описаного навколо нього кола, $OK_1 = r$ – радіус вписаного в нього кола (мал. 15.2).

$$\text{Тоді } A_1K_1 = \frac{a_n}{2}, \angle A_1OK_1 = \frac{\angle A_1OA_2}{2} = \frac{360^\circ}{n} : 2 = \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{Із трикутника } A_1OK_1: \quad 1) \quad r = OK_1 = \frac{A_1K_1}{\operatorname{tg} \angle A_1OK_1} = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$2) \quad R = OA_1 = \frac{A_1K_1}{\sin \angle A_1OK_1} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$3) \quad r = OK_1 = OA_1 \cos \angle A_1OK_1 = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Систематизуємо отримані формули в таблицю та подамо в ній також формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного трикутника, чотирикутника (квадрата), шестикутника.

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \frac{a_4}{2}$	$r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$	$r = \frac{R}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Запам'ятовувати ці формули необов'язково, але потрібно вміти їх виводити.

Приклад 3. Знайти радіуси вписаного й описаного кіл правильного трикутника, якщо їхня різниця дорівнює 6 см. Чому дорівнює сторона цього трикутника?

Розв'язання. Нехай $R = x$ см, тоді $r = (x - 6)$ см.

1) Оскільки у правильному трикутнику $r = \frac{R}{2}$, то маємо рівняння:

$$x - 6 = \frac{x}{2}, \text{ звідки } x = 12 \text{ (см).}$$

2) Отже, $R = 12$ см, $r = 6$ см, $a_3 = R\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см).

Відповідь: $R = 12$ см, $r = 6$ см, $a_3 = 12\sqrt{3}$ см.

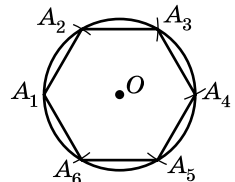
8. Побудова правильних многокутників

Розглянемо, як за допомогою циркуля і лінійки без поділок побудувати правильні трикутник, чотирикутник і шестикутник, вписані в коло.

Приклад 4. Побудувати правильний шестикутник, вписаний у коло.

Розв'язання. Ураховуючи, що $a_6 = R$, побудову виконаємо у такій послідовності.

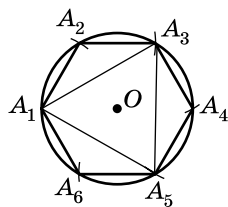
- 1) Накреслимо довільне коло (мал. 15.3).
 - 2) Позначимо на колі довільну точку A_1 — одну з вершин правильного шестикутника.
 - 3) З точки A_1 як із центра радіусом, що дорівнює радіусу кола, зробимо на колі по обидва боки від точки A_1 засічки й отримаємо точки A_2 і A_6 .
 - 4) Продовжуємо робити засічки, рухаючись від точки A_2 , тим самим радіусом, отримуючи вершини A_3 , A_4 , A_5 , і сполучаємо їх.
- Отримаємо правильний шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



Мал. 15.3

Приклад 5. Побудувати правильний трикутник, вписаний у коло.

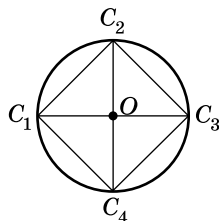
Розв'язання. Для побудови правильного вписаного трикутника потрібно відрізками сполучити вершини правильного вписаного шестикутника через одну (мал. 15.4). Отримаємо правильний трикутник $A_1A_3A_5$.



Мал. 15.4

Приклад 6. Побудувати правильний чотирикутник (квадрат), вписаний у коло.

Розв'язання. Для побудови вписаного чотирикутника (квадрата) достатньо через центр кола провести дві взаємно перпендикулярні прямі. Вони перетнуть коло у вершинах квадрата (мал. 15.5). Маємо квадрат $C_1C_2C_3C_4$.



Мал. 15.5

А ще раніше...

У давніх єгипетських та вавилонських пам'ятках трапляються правильні чотирикутники, п'ятикутники і восьмикутники у вигляді зображень на стінах та прикрас.

Давньогрецькі математики виявляли цікавість до правильних багатокутників та їхньої побудови ще із часів Піфагора. Поділ кола на деяку кількість рівних частин для побудови правильних багатокутників мав важливе значення для піфагорійців.

Учення про правильні багатокутники, що розпочалося у школі Піфагора та продовжило розвиватися у V–IV ст. до н. е., було систематизовано Евклідом у четвертій книзі «Начал». За допомогою циркуля і лінійки Евклід умів будувати правильні n -кутники для $n = 3, 4, 5, 6, 15$. Крім того, Евклід визначив два критерії побудови правильних багатокутників. Перший полягав у тому, що коли відомо, як побудувати правильний n -кутник, то можна побудувати і правильний $2n$ -кутник, для чого, очевидно, кожен з дуг, що міститься між двома сусідніми вершинами правильного n -кутника, потрібно ділити навпіл. Евклід указав і другий критерій. Якщо відомо, як будувати правильні багатокутники з кількістю сторін j і s , а j і s – взаємно прості числа, то можна побудувати правильний багатокутник з $j \cdot s$ сторонами. Так можна дійти висновку, що давні вчені вміли будувати багатокутники з $2^m \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{k_2}$ сторонами, де m – ціле невід'ємне число, а k_1 і k_2 набувають значень 0 або 1.

Остаточне розв'язання задачі про те, як можна побудувати правильні n -кутники за допомогою тільки циркуля і лінійки, належить видатному німецькому математику Карлу Фрідріху Гауссу (1777–1855). У віці 19 років Гаусс довів, що за допомогою циркуля і лінійки можна поділити коло на просте число N рівних частин, таке, що обчислюється за формулою $N = 2^{2^n} + 1$, де n – натуральне число або нуль.

Після цього, у 1801 р., Гаусс засобами алгебри довів, що за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати лише такі правильні n -кутники, де число n можна розкласти на множники у вигляді:

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m,$$

де k – ціле невід'ємне число, а $p_1, p_2, \dots, p_m$ – прості числа вигляду $2^{2^t} + 1$ (де t – ціле невід'ємне число)*.

* Ці числа називають простими числами Ферма. На сьогодні відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Відкриття Гаусса наблизило математиків до висновку, що, крім раніше відомих правильних многокутників, які можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, з кількістю вершин, що дорівнює 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, ..., за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати й правильні многокутники, кількість вершин яких дорівнює 17, 34, 68, 126, 252, 257, Натомість неможливо за допомогою лише циркуля і лінійки побудувати правильний многокутник, у якого 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 28, ... вершин.



Що називають правильним многокутником? Чому дорівнює кут правильного n -кутника? Сформулюйте і доведіть теорему про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього. Сформулюйте наслідки із цієї теореми. Що називають центром правильного многокутника, центральним кутом правильного многокутника? Доведіть формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. (Усно.) Які з наведених многокутників є правильними:

- 1) паралелограм;
- 2) рівносторонній трикутник;
- 3) ромб;
- 4) рівнобедрений трикутник;
- 5) квадрат;
- 6) рівнобічна трапеція?

15.2. Знайдіть центральний кут правильного:

- 1) шестикутника;
- 2) двадцятикутника.

15.3. Знайдіть центральний кут правильного:

- 1) трикутника;
- 2) десятикутника.

15.4. Центральний кут правильного многокутника дорівнює 15° . Знайдіть кількість сторін многокутника.

15.5. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 10° .

2

15.6. (Усно.) Чи правильне твердження:

- 1) будь-який правильний многокутник опуклий;
- 2) будь-який опуклий многокутник є правильним?

15.7. (Усно.) Які з тверджень правильні, а які – неправильні:

- 1) якщо чотирикутник не є квадратом, то він не може бути правильним;
- 2) многокутник є правильним, якщо він опуклий і всі його сторони між собою рівні;
- 3) серед прямокутників є правильні чотирикутники;
- 4) трикутник є правильним, якщо всі його кути між собою рівні?

15.8. Чи правильне твердження:

- 1) серед трапецій є правильні чотирикутники;
- 2) терміни «рівносторонній трикутник» і «правильний трикутник» означають одне й те саме;
- 3) будь-який чотирикутник, у якого всі сторони між собою рівні, є правильним;
- 4) якщо багатокутник не є опуклим, то він не може бути правильним?

15.9. Знайдіть міру кута правильного n -кутника, якщо:

- 1) $n = 8$;
- 2) $n = 15$.

15.10. Знайдіть міру кута правильного:

- 1) дев'ятикутника;
- 2) дванадцятикутника.

15.11. Знайдіть міру зовнішнього кута правильного:

- 1) п'ятикутника;
- 2) тридцятикутника.

15.12. Знайдіть міру зовнішнього кута правильного n -кутника, якщо:

- 1) $n = 10$;
- 2) $n = 36$.

15.13. 1) Скільки сторін має правильний багатокутник, якщо його кут дорівнює 165° ?



2) Сприймаючи кількість сторін як число, згадайте, яка визначна подія для України пов'язана із цим числом.

15.14. 1) Знайдіть кількість сторін правильного багатокутника, якщо його кут дорівнює 108° .



2) Кількість сторін буде дорівнювати століттю, у якому засновано м. Алушта (Автономна Республіка Крим).

15.15. Який найбільший центральний кут може бути у правильного багатокутника?

15.16. Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

15.17. Сторона квадрата дорівнює 2 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

15.18. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо кола з радіусом $2\sqrt{3}$ см.

15.19. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в коло з радіусом $8\sqrt{3}$ см.

15.20. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в коло з радіусом $7\sqrt{2}$ см.

15.21. Накресліть коло, радіус якого 4 см. Впишіть у коло правильний шестикутник.

15.22. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Впишіть у коло правильний трикутник.

15.23. Накресліть коло, діаметр якого 5 см. Впишіть у коло квадрат.

15.24. Скільки сторін має правильний багатокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює 30° ?

- 15.25.** Зовнішній кут правильного многокутника дорівнює 20° . Знайдіть, скільки у многокутника вершин.
- 3** **15.26.** Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{2}{7}$ від внутрішнього. Скільки вершин у цього многокутника?
- 15.27.** Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, зовнішній кут якого на 108° менший від внутрішнього.
- 15.28.** Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{6}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.
- 15.29.** Сторона квадрата, описаного навколо кола, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.
- 15.30.** Впишіть у коло правильний восьмикутник.
- 15.31.** Впишіть у коло правильний дванадцятикутник.
- 4** **15.32.** Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 12 см, а радіус вписаного в нього кола – $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.
- 15.33.** Радіус кола, вписаного у правильний многокутник, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо нього, – 4 см. Знайдіть кількість вершин многокутника та його сторону.
- 15.34.** Сторона правильного восьмикутника дорівнює $4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ см. Знайдіть його площу.
- 15.35.** Сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $3\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ см. Знайдіть його площу.
- 15.36.** Кути квадрата, сторона якого дорівнює $(2 + \sqrt{2})$ см, зрізали так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть його сторону.



Вправи для повторення

- 15.37.** Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 7 см і 24 см; 2) $6a$ см і $8a$ см.
- 15.38.** Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.
- 15.39.** Дві хорди перетинаються всередині круга. Відрізки, на які точка перетину хорд ділить одну з них, дорівнюють 4 см і 9 см. Знайдіть відрізки, на які ця точка ділить другу хорду, якщо:
1) вони між собою рівні;
2) один з них на 16 см більший за інший.
- 15.40.** Периметр трапеції дорівнює 108 см, а точка дотику вписаного в неї кола ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 16 см завдовжки. Знайдіть площу трапеції.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 15.41. Практичне завдання.** 1) Візьміть стакан (циліндр, підставку для ручок циліндричної форми тощо) та за допомогою нитки обведіть цей предмет. Знайдіть довжину C нитки.
 2) Поставте цей предмет на аркуш паперу й обведіть олівцем. Знайдіть центр отриманого кола, а потім його діаметр d (або знайдіть діаметр за допомогою штангенциркуля).
 3) Знайдіть відношення $C : d$ з точністю до тисячних. Систематизуйте дані, що отримали, в таблицю:

№ досліду	Довжина нитки C , см	Діаметр d , см	Відношення $C : d$
1			
2			
3			



Життєва математика

- 15.42.** 1) Потрібно пофарбувати стелю у двох тренажерних залах: один з них квадратної форми зі стороною 4,5 м, а інший – прямокутної, розмірами 5 м і 3 м. Для фарбування 1 м² стелі витрачається 220 г фарби. Фарба продається в банках по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби потрібно для цього придбати?
 2) Скільки потрібно заплатити за цю фарбу, якщо одна банка коштує 370 грн?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

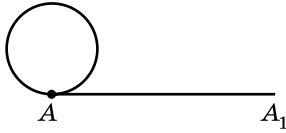
- 15.43.** Відстані від точки перетину медіан до вершин гострих кутів прямокутного трикутника дорівнюють $6\sqrt{73}$ і $12\sqrt{13}$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

§ 16. Довжина кола. Довжина дуги кола

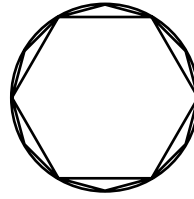
1. Уявлення про довжину кола

Наочне уявлення про довжину кола можна отримати так. Уявімо, що коло виготовлено з тонкої нитки, яка не розтягується. Розріжемо нитку в деякій точці A і вирівняємо її (мал. 16.1). Матимемо відрізок AA_1 , довжина якого є довжиною кола.

Периметр будь-якого правильного многокутника, вписаного в коло, є наближеним значенням довжини цього кола. Що більшою є кількість сторін многокутника, то точнішим буде це наближене значення (мал. 16.2). Так, наприклад, периметр правильного вписаного в коло дванадцятикутника менше відрізняється від довжини кола, ніж пери-



Мал. 16.1



Мал. 16.2

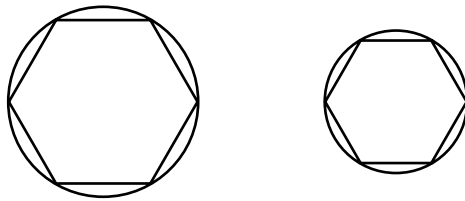
метр правильного шестикутника, вписаного в те саме коло. Якщо кількість сторін правильного многокутника збільшувати необмежено, то його периметр буде необмежено наближатися до довжини кола.

2. Відношення довжини кола до його діаметра

Доведемо важливу властивість довжини кола.



Теорема (про відношення довжини кола до його діаметра). Відношення довжини кола до його діаметра є сталим для всіх кіл.



Мал. 16.3

Доведення. Розглянемо два довільних кола, радіуси яких R і R' , а довжини кіл C і C' (мал. 16.3).

1) У кожне з кіл впишемо правильний n -кутник з однаковою кількістю сторін. Нехай сторони цих n -кутників a_n і a'_n , їхні периметри P_n і P'_n .

2) Маємо:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \quad \text{і} \quad P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

3) Тоді:

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

4) Ця рівність є пропорцією за будь-якого значення n . Якщо n збільшувати необмежено, то периметри многокутників P_n і P'_n необмежено наближатимуться до довжин кіл C і C' . Тому:

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}, \quad \text{звідки} \quad \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Отже, відношення довжини кола до його діаметра є числом, сталим для всіх кіл. ■

Відношення довжини кола до його діаметра прийнято позначати грецькою літерою π (читають «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Число π ірраціональне, його наближене значення $\pi \approx 3,1416$. Для практичних потреб наближене значення найчастіше використовують з точністю до сотих: $\pi \approx 3,14$.

3. Формула для обчислення довжини кола

З рівності $\frac{C}{2R} = \pi$ отримаємо, що

довжина кола, радіус якого дорівнює R , обчислюється за формулою

$$C = 2\pi R.$$

А враховуючи, що діаметр кола дорівнює $2R$, маємо формулу довжини кола: $C = \pi d$, де d – діаметр.

Приклад 1. Знайти довжину кола, радіус якого дорівнює:

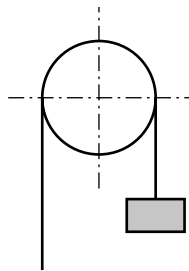
- 1) 5 см; 2) 0,8 дм.
- *Розв'язання.* 1) $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ (см);
- 2) $C = 2\pi \cdot 0,8 = 1,6\pi$ (дм).
- *Відповідь:* 1) 10π см; 2) $1,6\pi$ дм.

Приклад 2. Знайти радіус кола, довжина якого дорівнює:

- 1) 12π см; 2) 8 дм.
- *Розв'язання.* 1) $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$ (см).
- 2) $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ (дм).
- *Відповідь:* 1) 6 см; 2) $\frac{4}{\pi}$ дм.

Приклад 3. Вантаж піднімають за допомогою блока (мал. 16.4). На скільки підніметься вантаж за 10 обертів блока, якщо діаметр блока становить 15 см?

- *Розв'язання.* 1) Оскільки $d = 15$ см, то довжина кола блока: $C = \pi d = 15\pi$ (см).
- 2) Якщо блок зробить 10 обертів, то підніме вантаж на висоту:
 $10 \cdot 15\pi = 150\pi \approx 150 \cdot 3,14 = 471$ (см) = 4,71 (м).
- *Відповідь:* 4,71 м.

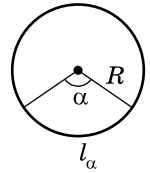


Мал. 16.4

4. Формула для обчислення довжини дуги кола

Знайдемо *формулу* для обчислення довжини дуги кола, що відповідає центральному куту α , якщо радіус кола дорівнює R (мал. 16.5).

Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то довжина дуги, що відповідає центральному куту 1° , складає $\frac{1}{360}$ від довжини кола, тобто $l_{1^\circ} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді довжину дуги l_α можна обчислити за формулою:



Мал. 16.5

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha, \text{ де } \alpha - \text{градусна міра дуги.}$$

Приклад 4. Радіус кола дорівнює 4 см. Знайти довжину дуги, що відповідає центральному куту: 1) 20° ; 2) 270° .

Розв'язання. 1) $l_{20^\circ} = \frac{\pi \cdot 4}{180} \cdot 20 = \frac{4\pi}{9}$ (см);

2) $l_{270^\circ} = \frac{\pi \cdot 4}{180} \cdot 270 = 6\pi$ (см).

Відповідь: 1) $\frac{4\pi}{9}$ см; 2) 6π см.

Приклад 5. Довжина дуги кола дорівнює 3π см, а її градусна міра — 36° . Знайти радіус кола.

Розв'язання. $3\pi = \frac{\pi \cdot R}{180} \cdot 36$, звідки $R = 15$ см.

Відповідь: 15 см.

А ще раніше...

І в далекому минулому людям доводилося розв'язувати задачі на обчислення довжини кола.

У різні часи значення відношення довжини кола C до його діаметра d , які використовували під час обчислень, різнилися. Наприклад, у Давньому Єгипті (≈ 3500 років тому) це значення дорівнювало 3,16, а давні римляни вважали, що 3,12. Досить точно значення цього відношення визначив давньогрецький учений Архімед (бл. 287–212 рр. до н. е.). Він довів, що $3\frac{10}{17} < \frac{C}{d} < 3\frac{1}{7}$,

тобто що $3,1408... < \frac{C}{d} < 3,1428...$

Першим використовувати грецьку літеру π для позначення відношення довжини кола до його діаметра запропонував англійський математик Вільям Джонс 1706 р., але загальновживаним це позначення стало завдяки працям видатного німецького математика Леонарда Ейлера (1707–1783), який обчислив число π з точністю до 153 десяткових знаків.

У наш час за допомогою сучасних комп'ютерів обчислено понад 200 мільярдів десяткових знаків числа π .



Як можна отримати уявлення про довжину кола? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про відношення довжини кола до його діаметра. ○ Чому дорівнює це відношення? ○ Як обчислити довжину кола? ○ Як обчислити довжину дуги кола градусної міри α , якщо радіус кола дорівнює R ?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 16.1. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 12 см; 3) 2,3 дм; 4) 0,4 м.
- 16.2. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 1,5 см; 3) 4 дм; 4) 0,2 м.
- 16.3. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 4 см; 2) 8 дм; 3) 3,5 см; 4) 1,6 м.
- 16.4. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 6 дм; 2) 14 см; 3) 2,8 см; 4) 0,7 м.
- 16.5. У скільки разів збільшиться довжина кола, якщо його радіус збільшити у:
1) 2 рази; 2) 5 разів?
- 16.6. У скільки разів зменшиться довжина кола, якщо його радіус зменшити у:
1) 3 рази; 2) 10 разів?
- 2** 16.7. 1) 12-річний український легкоатлет Матвій Строгальєв побив рекорд у стрибках з жердиною серед юнаків, молодших 14 років. Знайдіть довжину кола C , діаметр якого на 2 м більший за радіус.
2) Частка $\frac{C}{\pi}$ допоможе дізнатися, яку висоту підкорив юний легкоатлет.
- 16.8. Знайдіть довжину кола, радіус якого на 8 см менший від діаметра.
- 16.9. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 4 π см; 2) 7 π дм; 3) 6 см; 4) 4 π^2 дм.
- 16.10. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 6 π дм; 2) π см; 3) 8 дм; 4) 6 π^2 см.
- 16.11. Радіус кола дорівнює 20 см. Знайдіть довжину дуги градусної міри α , якщо α дорівнює:
1) 1°; 2) 10°; 3) 45°;
4) 120°; 5) 225°; 6) 300°.
- 16.12. Радіус кола дорівнює 10 см. Знайдіть довжину дуги градусної міри β , якщо β дорівнює:
1) 1°; 2) 20°; 3) 90°; 4) 135°; 5) 240°; 6) 330°.
- 16.13. На котушку радіуса 2 см намотано 10 витків нитки. Знайдіть довжину нитки.
- 16.14. На котушку діаметра 1 м намотано 15 витків дроту. Знайдіть довжину дроту.

3

16.15. Радіус кола зменшили на 4 см. На скільки зменшиться довжина кола?

16.16. Радіус кола збільшили на 5 см. На скільки збільшиться довжина кола?

16.17. Знайдіть радіус кола, у якому дуга, що відповідає центральному куту 20° , має довжину 2π см.

16.18. Довжина дуги дорівнює 18π см, а її градусна міра – 120° . Знайдіть радіус кола.

16.19. Довжина дуги кола радіуса 18 см дорівнює 4π см. Знайдіть градусну міру дуги.

16.20. Знайдіть градусну міру дуги кола, якщо її довжина дорівнює 6π см, а радіус кола – 15 см.

16.21. Хвилинна стрілка годинника, установленого на вежі, має довжину 2,5 м. Дугу якої довжини описує кінець стрілки за 25 хв? (Результат округліть з точністю до сотих метра.)

16.22. Діаметр вала колодязя дорівнює 30 см, а глибина колодязя – 7,6 м. Скільки повних обертів корби треба зробити, щоб витягти відро води?



16.23. На котушку радіуса 3,6 см намотано 1,4 м мотузки. Скільки зроблено повних витків?



16.24. Хорда $6\sqrt{2}$ см завдовжки стягує дугу кола, градусна міра якої становить 90° . Знайдіть довжину кола.

16.25. Хорда 8 см завдовжки стягує дугу кола, градусна міра якої становить 60° . Знайдіть довжину кола.

16.26. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут – 30° .

16.27. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.

4

16.28. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, якщо градусна міра дуги дорівнює:

- 1) 60° ;
- 2) 90° ;
- 3) 120° .

16.29. За даною довжиною дуги, що дорівнює 2π см, знайдіть її хорду, якщо градусна міра дуги:

- 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

16.30. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції, сторони якої дорівнюють 6 см, 6 см, 6 см і 12 см.

16.31. У колі проведено дві паралельні хорди, довжини яких 12 см і 16 см. Відстань між хордами становить 14 см. Знайдіть довжину кола.

16.32. Три кола з радіусами 2 см, 3 см і 27 см попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть довжину кола, що проходить через центри цих кіл.



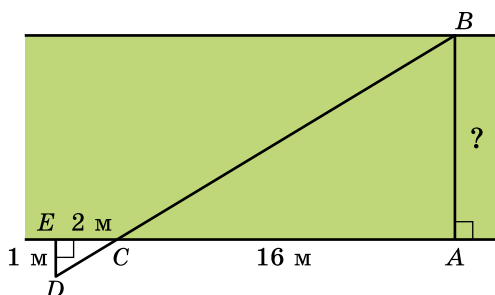
Вправи для повторення

- 16.33.** Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
- 1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 5$, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $C_1A_1 = 10$ см;
 - 2) $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, $\angle A_1 = 20^\circ$, $\angle B_1 = 70^\circ$, $\angle C_1 = 90^\circ$?
- 16.34.** Розв'яжіть трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$:
- 1) $AC = 6$ см, $BC = 4$ см;
 - 2) $AB = 7$ см, $BC = 2$ см.
- Гострі кути трикутника знайдіть з точністю до мінути.
- 16.35.** Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 26 см і 30 см. Знайдіть:
- 1) площу трикутника;
 - 2) висоти трикутника;
 - 3) радіус кола, вписаного у трикутник;
 - 4) радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 16.36.** Кути правильного трикутника зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону трикутника, якщо сторона шестикутника дорівнює a см.



Життєва математика

- 16.37.** Використовуючи дані, наведені на малюнку, знайдіть ширину AB річки.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 16.38.** (Олімпіада Нью-Йорка, 1977 р.) Нехай a , b , c – сторони трикутника, P – його периметр. Доведіть, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{P^2}{3}.$$

§ 17. Площа круга та його частин

1. Площа круга

Нагадаємо, що *крі́гом* називають частину площини, обмежену колом, об'єднану із самим колом.



Теорема (про площу круга). Площа S круга, радіус якого дорівнює r , обчислюється за формулою:

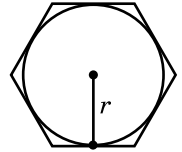
$$S = \pi r^2.$$

Доведення. Опишемо навколо кола правильний n -кутник, нехай P_n – периметр n -кутника, S_n – його площа (мал. 17.1).

1) За наслідком з теореми про площу трикутника за радіусом вписаного кола маємо: $S_n = \frac{P_n}{2} \cdot r$.

2) Якщо n збільшувати необмежено, то периметр многокутника необмежено наближатиметься до довжини C кола, а площа многокутника необмежено наближатиметься до площі S круга. Тоді:

$$S = \frac{C}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2. \quad \blacksquare$$



Мал. 17.1

Приклад 1. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює:

- 1) 3 см; 2) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ дм.

Розв'язання. 1) $S = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ (см²); 2) $S = \pi \left(\frac{7}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = \frac{49\pi}{\pi} = 49$ (дм²).

Відповідь: 1) 9π см²; 2) 49 дм².

Приклад 2. Знайти радіус круга, площа якого дорівнює:

- 1) 16π см²; 2) 7 дм².

Розв'язання. 1) $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$, отже, $r = 4$ см.

2) $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{7}{\pi}$, отже, $r = \sqrt{\frac{7}{\pi}}$ дм.

Відповідь: 1) 4 см; 2) $\sqrt{\frac{7}{\pi}}$ дм.

Приклад 3. Дві водопровідні труби, діаметр яких 10 см, потрібно замінити однією трубою тієї самої пропускної спроможності. Яким має бути діаметр цієї труби?

Розв'язання. 1) Радіус кожної з двох труб $r = 5$ см.

2) Переріз кожної з труб $S = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ (см²).

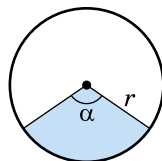
3) Переріз нової труби має дорівнювати сумі перерізів двох старих, тобто $25\pi \cdot 2 = 50\pi$ (см²).

4) Нехай R – радіус нової труби. Тоді $50\pi = \pi R^2$, $R = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ (см). Тоді діаметр цієї труби 14,14 см.

Відповідь: 14,14 см.

2. Сектор та його площа

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*. На малюнку 17.2 зображено два сектори, один з яких зафарбований, а другий – ні. Знайдемо *формулу площі сектора* кола радіуса r , що відповідає центральному куту градусної міри α . Оскільки площа круга дорівнює πr^2 , то площа сектора, що відповідає центральному куту 1° , становить $\frac{1}{360}$ від площі круга й дорівнює $\frac{\pi r^2}{360}$. Тому



Мал. 17.2

площа сектора, що відповідає центральному куту градусної міри α , обчислюється за формулою:

$$S_{\alpha} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$$

Приклад 4. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює:

- 1) 30° ; 2) 225° .

Розв'язання.

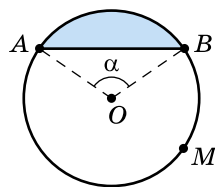
1) $S_{30^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 30 = 3\pi \text{ (см}^2\text{)};$

2) $S_{225^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 225 = 22,5\pi \text{ (см}^2\text{)}.$

Відповідь: 1) $3\pi \text{ см}^2$; 2) $22,5\pi \text{ см}^2$.

3. Сегмент та його площа

Частину круга, обмежену хордою і відповідною їй дугою, називають *сегментом*. На малюнку 17.3 зображено два сегменти, один з яких обмежено хордою AB і дугою AB , а другий – хордою AB і дугою AMB . Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, менша від 180° , то площу сегмента знаходимо як різницю площ відповідного сектора і трикутника AOB . Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, більша за 180° , то площу сегмента знаходимо як суму площ відповідного сектора і трикутника AOB (мал. 17.3). Сегмент, якому відповідає розгорнутий кут, є півкругом, і його площа дорівнює $\frac{\pi r^2}{2}$, де r – радіус круга.



Мал. 17.3

Отже,

площа сегмента, що не є півкругом, обчислюється за формулою

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\triangle AOB}.$$

Приклад 5. Кінці хорди ділять коло у відношенні 1 : 2. Знайдіть площі двох сегментів, що утворилися, якщо радіус круга дорівнює 12 см.
Розв'язання. Нехай на малюнку 17.3 менша з дуг, що утворилися, дорівнює x° , тоді більша дорівнює $(2x)^\circ$.

1) Маємо $x^\circ + (2x)^\circ = 360^\circ$, звідси $x = 120^\circ$. Отже, меншому із сегментів відповідає центральний кут 120° , а більшому – 240° .

2) $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin AOB = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 120^\circ = 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$

3) Позначимо площі сегментів S_1 і S_2 . Матимемо:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 120 - 36\sqrt{3} = 48\pi - 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 240 + 36\sqrt{3} = 96\pi + 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $(48\pi - 36\sqrt{3}) \text{ см}^2$, $(96\pi + 36\sqrt{3}) \text{ см}^2$.

А ще раніше...

Задачі щодо обчислення площі круга, як і задачі щодо знаходження довжини кола, виникли в давнину.

У папірусі Ахмеса (≈ 2 тис. років до н. е.) указано, що площею S круга слід вважати площу квадрата, сторона якого дорівнює $\frac{8}{9}$ діаметра, тобто:

$$S = \left(\frac{8}{9} \cdot 2R \right)^2 = \frac{256}{81} R^2.$$

Це означає, що на той час значенням відношення довжини кола до його діаметра (у сучасних позначеннях – число π) вважали число $\frac{256}{81} \approx 3,1605\dots$

У творах Герона «Метрика» і «Геометрика» є багато вправ на обчислення діаметра і довжини кола, площі круга, сегмента й сектора круга.

Термін *сегмент* латинського походження (*segmentum* – відрізок) і є дослівним перекладом відповідного грецького терміна, який використовував ще Евклід. Термін *сектор* також латинського походження (*sector* – резець).

Крім задачі на знаходження площі круга, видатні геометри Давньої Греції намагалися розв'язати також і задачу про квадратуру круга, тобто за допомогою циркуля і лінійки побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі заданого круга. Лише в XIX ст. було доведено, що задачу про квадратуру круга неможливо розв'язати, тому під виразом *квадратура круга* мають на увазі задачу, яку неможливо розв'язати.

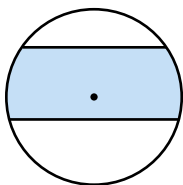


- Сформулюйте і доведіть теорему про площу круга. ○ Що називають сектором?
 ○ За якою формулою обчислюють площу сектора? ○ Що називають сегментом?
 ○ За якою формулою обчислюють площу сегмента?

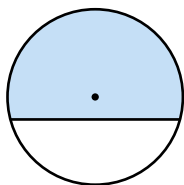


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

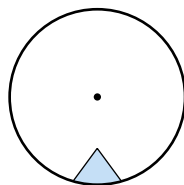
- 1** 17.1. (Усно.) На якому з малюнків 17.4–17.7 зафарбована фігура є сектором, а на якому – сегментом?



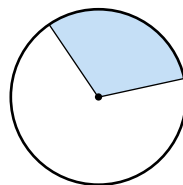
Мал. 17.4



Мал. 17.5



Мал. 17.6



Мал. 17.7

- 17.2. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

- 1) 2 см; 2) 5 дм; 3) 1,4 см; 4) $\frac{2}{5}$ м.

- 17.3. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

- 1) 4 дм; 2) 7 см; 3) $\frac{1}{3}$ см; 4) 0,8 м.

- 17.4. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:

- 1) 6 см; 2) 1,4 дм.

- 17.5. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:

- 1) 12 дм; 2) 1,6 дм.

- 2** 17.6. Знайдіть площу круга, радіус якого на 10 см менший від діаметра.

- 17.7. Знайдіть площу круга, діаметр якого на 12 дм більший за радіус.

- 17.8. Площа одного круга в 9 разів більша за площу другого. Знайдіть відношення їхніх радіусів.

- 17.9. Радіус круга збільшили втричі. У скільки разів збільшиться площа круга?

- 17.10. Площа круга дорівнює 25π см². Знайдіть радіус круга.

- 17.11. Площа круга дорівнює 121π см². Знайдіть радіус круга.

- 17.12. Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює 20π см.

- 17.13. Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює 18π дм.

- 17.14. Знайдіть площу сектора круга радіуса 8 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

- 1) 36° ; 2) 60° ; 3) 135° ; 4) 225° .

- 17.15. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

- 1) 18° ; 2) 75° ; 3) 150° ; 4) 240° .

- 17.16. Площа круга чисельно дорівнює довжині кола, що його обмежує. Знайдіть радіус круга.

- 17.17. (Усно.) 1) Чи може сегмент круга бути водночас сектором?

- 2) За якої умови сегмент круга можна розрізати на сектори?

3



17.18. 1) Щоб засіяти 1 м^2 землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Скільки насіння необхідно, щоб засіяти дві клумби круглої форми, діаметр кожної з яких становить 16 м? (Відповідь округліть до десятих кілограма.)

2) Насіння газонної трави продають на вагу за ціною 450 грн за кілограм. Скільки коштів знадобиться, щоб засіяти ці дві клумби?

17.19. 1) Норма висадження троянд становить 8 штук на 1 м^2 . Потрібно висадити троянди на трьох клумбах круглої форми, радіус кожної з яких дорівнює 3 м. Скільки знадобиться троянд для цього?



2) Скільки коштів знадобиться для цього, якщо насіння троянди продають у пакетиках по 10 штук за ціною 80 грн за пакетик?

17.20. Знайдіть площу круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $4\sqrt{3}$ см.

17.21. Знайдіть площу круга, вписаного у правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

17.22. Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат, площа якого дорівнює 8 см^2 .

17.23. Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата, площа якого дорівнює 12 см^2 .

17.24. Знайдіть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 2 см і 5 см.

17.25. Визначте площу тієї частини круга, що лежить поза вписаним у нього квадратом зі стороною 10 см.

17.26. Знайдіть площу тієї частини круга, що лежить поза вписаним у нього прямокутним трикутником з катетами 12 см і 16 см.

17.27. 1) Круг, радіус якого 2 м, поділено на два сектори, центральний кут одного з яких дорівнює 120° . Сектори пофарбовано у два різних кольори. Скільки витратили фарби кожного кольору, якщо на один квадратний метр площі потрібно 0,2 кг фарби? Відповідь округліть до десятих кілограма.



2) Фарба продається у банках по 0,3 кг за ціною 120 грн за банку. Скільки коштів знадобиться, щоб пофарбувати весь круг?

17.28. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює $180\pi \text{ см}^2$, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 72° .

17.29. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює $12\pi \text{ см}^2$, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 120° .

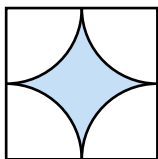
17.30. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 12 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

1) 30° ; 2) 120° ; 3) 225° .

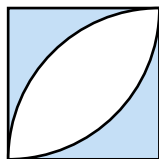
17.31. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

1) 45° ; 2) 90° ; 3) 210° .

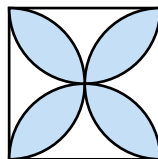
- 4** 17.32. Кінці хорди $6\sqrt{3}$ см завдовжки ділять коло у відношенні 1 : 2. Знайдіть площі двох утворених сегментів.
- 17.33. Кінці хорди 12 см завдовжки ділять коло у відношенні 1 : 5. Знайдіть площі двох утворених сегментів.
- 17.34. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 5 см і 3 см.
- 17.35. У рівнобічну трапецію вписано круг, площа якого дорівнює 48π см². Знайдіть площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60° .
- 17.36. Знайдіть площі зафарбованих фігур на малюнках 17.8–17.10, якщо сторона квадрата дорівнює a .



Мал. 17.8



Мал. 17.9



Мал. 17.10



Вправи для повторення

- 17.37. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Невідомі сторони знайдіть з точністю до сотих:
- 1) $AB = 5$ см, $\angle A = 72^\circ$;
 - 2) $BC = 4$ см, $\angle B = 15^\circ$.
- 17.38. Скільки вершин має правильний багатокутник, якщо різниця його внутрішнього і зовнішнього кутів дорівнює 100° ?
- 17.39. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть найменшу висоту трикутника.
- 17.40. Побудуйте трапецію з основами a і b та діагоналями d_1 і d_2 .



Життєва математика

- 17.41. Тарас та Яна проводять кілька разів на тиждень легкоатлетичне тренування, пробігаючи по колу радіуса 50 м. Тарас пробігає 10 кіл зі швидкістю 15 км/год, а Яна зі швидкістю 12 км/год біжить 7 кіл. Хто з них витрачає більше часу на тренування? На скільки (дати відповідь з точністю до секунди)?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 17.42. (Всеукраїнська математична олімпіада, 1985 р.) Точки A , B , C і D є вершинами опуклого чотирикутника. П'ять із шести можливих відстаней між парами цих точок дорівнюють 1, 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3. Знайдіть шосту відстань.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 15–17)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Центральний кут правильного шестикутника дорівнює ...
 А. 30° Б. 45° В. 60° Г. 120°
2. Довжина кола, радіус якого 6 см, дорівнює ...
 А. 12 см Б. 12π см В. 6π см Г. 24π см
3. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює 10 см.
 А. 25 см^2 Б. $100\pi\text{ см}^2$ В. $20\pi\text{ см}^2$ Г. $25\pi\text{ см}^2$
- 2** 4. Чому дорівнює градусна міра внутрішнього кута правильного вісімнадцятикутника?
 А. 100° Б. 155° В. 160° Г. 165°
5. Радіус кола дорівнює 9 см. Знайдіть довжину дуги, градусна міра якої 240° .
 А. 12π см Б. 6π см В. 9π см Г. 18π см
6. Знайдіть площу сектора круга, радіус якого 6 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 100° .
 А. $20\pi\text{ см}^2$ Б. $10\pi\text{ см}^2$ В. $36\pi\text{ см}^2$ Г. $\frac{5}{3}\pi\text{ см}^2$
- 3** 7. Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{1}{4}$ від внутрішнього. Знайдіть, скільки сторін у цього многокутника.
 А. 9 Б. 10 В. 12 Г. 16
8. Хорда, довжина якої $8\sqrt{2}$ см, стягує дугу кола, градусна міра якої становить 90° . Знайдіть довжину кола.
 А. 8π см Б. 32π см В. $8\sqrt{2}\pi$ см Г. 16π см
9. Знайдіть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 7 см і 4 см.
 А. $3\pi\text{ см}^2$ Б. $9\pi\text{ см}^2$ В. $33\pi\text{ см}^2$ Г. $45\pi\text{ см}^2$
- 4** 10. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 6 см, а радіус кола, вписаного у правильний многокутник, – $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника.
 А. 3 Б. 4 В. 6 Г. 8
11. За довжиною дуги, що дорівнює 4π см, знайдіть її хорду, якщо дуга містить 120° .
 А. 6 см Б. 12 см
 В. $6\sqrt{2}$ см Г. $6\sqrt{3}$ см
12. Кінці хорди, 6 см завдовжки, ділять коло у відношенні 1 : 5. Знайдіть площу меншого з утворених сегментів.
 А. $36\pi\text{ см}^2$ Б. $(6\pi - 9\sqrt{3})\text{ см}^2$
 В. $(6\pi + 9\sqrt{3})\text{ см}^2$ Г. $6\pi\text{ см}^2$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. Установіть відповідність між характеристикою геометричного об'єкта (1–3) та її числовим значенням (А–Г).

Характеристика геометричного об'єкта

Числове значення

- | | |
|--|------------|
| 1. Довжина кола, описаного навколо правильного шестикутника зі стороною 6. | А. 6π |
| 2. Довжина меншої дуги кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $9\sqrt{3}$, кінцями якої є вершини трикутника. | Б. 12π |
| 3. Площа круга, описаного навколо квадрата зі стороною $4\sqrt{2}$. | В. 16π |
| | Г. 24π |

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 15–17

- 1** 1. Знайдіть центральний кут правильного двадцятикутника.
 2. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює 6 см.
 3. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює 8 дм.
- 2** 4. Знайдіть міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного тридцятикутника.
 5. Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту 150° .
 6. Знайдіть площу сектора круга радіуса 4 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 45° .
- 3** 7. Знайдіть кількість сторін правильного багатокутника, у якого зовнішній кут на 90° менший від внутрішнього.
 8. Хорда, довжина якої $4\sqrt{3}$ см, стягує дугу кола, градусна міра якої становить 120° . Знайдіть довжину кола.
- 4** 9. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 6 см і 10 см.

Додаткові завдання

- 4** 10. Радіус кола, вписаного у правильний багатокутник, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а радіус кола, описаного навколо правильного багатокутника, – 6 см. Знайдіть кількість сторін багатокутника та його сторону.
 11. Кінці хорди, $6\sqrt{2}$ см завдовжки, ділять коло у відношенні 1 : 3. Знайдіть площі сегментів, що утворилися.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 15

- 1** 1. Знайдіть центральний кут правильного:
 - 1) чотирикутника;
 - 2) п'ятнадцятикутника.
- 2** 2. Знайдіть міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного шістнадцятикутника.
3. Сторона правильного шестикутника дорівнює 4 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.
4. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо кола з радіусом $10\sqrt{3}$ см.
5. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей квадрат.
- 3** 6. Яким може бути найменший кут правильного многокутника?
7. Доведіть, що центральний кут правильного многокутника дорівнює його зовнішньому куту.
8. Сума зовнішніх кутів правильного многокутника, узятих по одному при кожній вершині, разом з одним із внутрішніх кутів дорівнює 528° . Знайдіть кількість сторін многокутника.
9. Сторона шестикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону трикутника, описаного навколо цього кола.
10. Радіус кола, вписаного у правильний шестикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть меншу діагональ шестикутника.
11. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильний шестикутник. Продовження сторін A_1A_2 і A_4A_3 перетнулися в точці K . Знайдіть градусну міру кута A_2KA_3 .
- 4** 12. Знайдіть радіуси вписаного у правильний шестикутник та описаного навколо нього кіл, сума яких дорівнює $8\sqrt{3}$ см.
13. Опишіть навколо даного кола правильний:
 - 1) трикутник;
 - 2) шестикутник.
14. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є для одного з них стороною вписаного квадрата, а для другого – стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо радіус меншого з них дорівнює r (розгляньте два можливих випадки розміщення кіл).
15. Знайдіть відношення площ квадрата, правильного трикутника і правильного шестикутника, вписаних в одне й те саме коло.
16. У правильний трикутник зі стороною, що дорівнює a , вписано коло, у яке вписано правильний шестикутник. Знайдіть площу шестикутника.

17. Дано відрізок завдовжки a . Побудуйте правильний шестикутник, сторона якого дорівнює $a\sqrt{2}$.

18. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього квадрата є величиною сталою. Знайдіть цю величину, якщо радіус кола дорівнює R .

До § 16

1 19. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:

- 1) $\frac{2}{\pi}$ см; 2) π см.

20. У скільки разів збільшиться або зменшиться довжина кола, якщо радіус кола:

- 1) збільшити у 8 разів; 2) зменшити в 6 разів?

2 21. Побудуйте коло, довжина якого 8π см.

22. Знайдіть діаметр кола, довжина якого дорівнює:

- 1) 18π см; 2) 9π дм; 3) 10 см; 4) $4\pi^2$ дм.

23. Радіус кола дорівнює 1 см. Знайдіть довжину дуги, градусна міра якої:

- 1) 30° ; 2) 60° ; 3) 150° ;
4) 270° ; 5) 315° ; 6) 345° .

3 24. Довжина першого кола на 8π см більша за довжину другого. На скільки сантиметрів радіус першого кола більший за радіус другого?

25. Знайдіть довжину кола, якщо його дуга градусної міри 120° має довжину 8 см.

26. Діаметр ведучого колеса електровоза дорівнює 1,6 м. Знайдіть швидкість електровоза (у км/год), якщо ведуче колесо за одну хвилину робить 120 обертів. Відповідь округліть до десятих.

27. Кінці хорди ділять коло у відношенні 1 : 5, при цьому більша дуга має довжину 20π см. Знайдіть довжину хорди.

28. Довжина сторони правильного шестикутника дорівнює a . У шестикутник вписано коло. Знайдіть довжину дуги кола між точками його дотику до сусідніх сторін шестикутника.

29. Знайдіть довжину кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 8 см і бічною стороною 5 см.

4 30. Периметр прямокутної трапеції становить 60 см, а більша бічна сторона – 17 см. Знайдіть довжину кола, вписаного у трапецію.

31. Із вала зняли шар стружки 0,3 см завтовшки. Знайдіть довжину кола вала до обробки, якщо довжина кола після обробки становила 14,5 см.

32. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, градусна міра якої:

- 1) 30° ; 2) 150° .

33. За даною довжиною дуги l знайдіть її хорду, якщо градусна міра дуги:

- 1) 135° ; 2) 240° .

34. Навколо кола радіуса r описано трикутник, кути якого відносяться як $1:2:3$. Знайдіть довжини дуг, кінцями яких є точки дотику.

До § 17

1 35. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

- 1) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см; 2) $\frac{1}{\pi}$ дм.

2 36. Площа круга дорівнює 196π см². Знайдіть діаметр круга.

37. Площа круга дорівнює 10 дм². Знайдіть з точністю до десятих дециметра радіус круга.

38. Площі двох кругів відносяться як $9:16$. Визначте відношення їхніх радіусів.

39. Яку частину площі круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює:

- 1) 10° ; 2) 36° ; 3) 108° ;
4) 150° ; 5) 230° ; 6) 315° ?

40. Знайдіть градусну міру центрального кута, що відповідає сектору, площа якого становить:

- 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$;
3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{12}$

від площі круга.

3 41. Довжини двох кіл дорівнюють $a\pi$ см і $3a\pi$ см. Знайдіть відношення площ обмежених ними кругів.

42. Знайдіть площу круга, вписаного в рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см².

43. Знайдіть відношення площі круга до площі вписаного в нього квадрата.

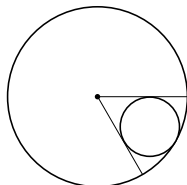
44. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 10π см², а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 225° .

45. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 18 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

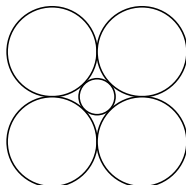
- 1) 60° ; 2) 135° ; 3) 150° ;
4) 240° ; 5) 300° ; 6) 330° .

4 46. Кінці хорди, довжина якої $8\sqrt{2}$ см, ділять коло у відношенні $1:3$. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

47. У круговий сектор, дуга якого містить 60° , вписано коло радіуса r см, як показано на малюнку 1 (коло дотикається до радіусів і дуги, що обмежують сектор). Знайдіть площу сектора.



Мал. 1



Мал. 2

48. Навколо круга радіуса r розташовано чотири однакових кола, кожен з яких дотикається до даного круга, і кожні два сусідніх кола дотикаються між собою (мал. 2). Знайдіть площу одного із цих кіругів.

49. Знайдіть площу кільця, що міститься між двома концентричними колами, довжини яких дорівнюють C_1 і C_2 ($C_1 > C_2$).

50. У крузі радіуса R по різні боки від центра проведено дві паралельні між собою хорди, одна з яких стягує дугу 60° , друга – 120° . Знайдіть площу частини круга, що міститься між хордами.



Головне в розділі 4

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Правильним многокутником називають опуклий многокутник, у якого всі сторони між собою рівні і всі кути між собою рівні.

Якщо α_n – кут правильного многокутника, то

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

Якщо β_n – зовнішній кут правильного n -кутника, то

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

Теорема (про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього). Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.

Наслідок 1. Центри вписаного й описаного кіл правильного многокутника збігаються.

Наслідок 2. Коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їхніх серединах.

$$\gamma_n = \frac{360^\circ}{n},$$

де γ_n – центральний кут правильного n -кутника.

$$S_n = pr,$$

де p – півпериметр n -кутника, r – радіус вписаного в нього кола.

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \frac{a_4}{2}$	$r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$	$r = \frac{R}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

ДОВЖИНА КОЛА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

Довжина кола, радіус якого дорівнює R , обчислюється за формулою:

$$C = 2\pi R.$$

Довжину дуги l_α можна обчислити за формулою:

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha,$$

де α – градусна міра дуги.

ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

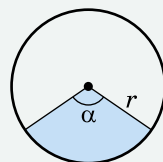
Теорема (про площу круга). Площа S круга, радіус якого дорівнює r , обчислюється за формулою:

$$S = \pi r^2.$$

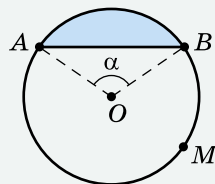
Частина круга, обмежену двома його радіусами, називають **сектором**.

Площа сектора, що відповідає центральному куту градусної міри α , обчислюється за формулою:

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$$



Частина круга, обмежену хордою і відповідною їй дугою, називають **сегментом**. На малюнку зображено два сегменти, один з яких обмежено хордою AB і дугою AB , а другий – хордою AB і дугою AMB . Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, менша від 180° , то площу сегмента знаходимо як різницю площ відповідного сектора і трикутника AOB . Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, більша за 180° , то площу сегмента знаходимо як суму площ відповідного сектора і трикутника AOB . Сегмент, якому відповідає розгорнутий кут, є півкругом, і його площа дорівнює $\frac{\pi r^2}{2}$, де r – радіус круга.



Площа сегмента, що не є півкругом, обчислюється за формулою:

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{AOB}.$$

РОЗДІЛ 5

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте** поняття подібності трикутників і рівності фігур;
- **дізнаєтеся** про переміщення (рух) і його властивості, симетрію відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності;
- **навчитеся** виконувати перетворення фігур, знаходити площі подібних фігур.

§ 18. Переміщення (рух) та його властивості. Рівність фігур

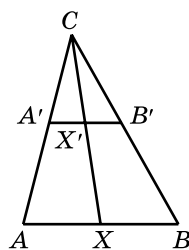
1. Перетворення фігур

Будь-яку геометричну фігуру можна розглядати як множину точок. Наприклад, відрізок – це множина точок прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками.

Іноді між точками двох геометричних фігур можна встановлювати певну відповідність.

Нехай $A'B'$ – середня лінія трикутника ABC , що паралельна стороні AB (мал. 18.1). Уважатимемо, що кожній точці X сторони AB трикутника ABC відповідає точка X' середньої лінії $A'B'$, що лежить на промені CX . Наприклад, точці A відповідає точка A' , точці B – точка B' . Точку X' , яка відповідає точці X , називають *образом* точки X , точку X при цьому називають *прообразом* точки X' .

За встановленою відповідністю кожній точці X відрізка AB відповідає певна точка X' відрізка $A'B'$. При цьому кожна точка відрізка $A'B'$ є відповідною деякій точці відрізка AB . Окрім цього, різним точкам відрізка AB відповідають різні точки відрізка $A'B'$. Множиною всіх точок, які відповідають точкам відрізка AB , є відрізок $A'B'$. Так отримали перетворення відрізка AB у відрізок $A'B'$.



Мал. 18.1

Перетворенням фігури F у фігуру F' називають таку відповідність, за якої:

- 1) кожній точці фігури F відповідає певна точка фігури F' ;
- 2) кожна точка фігури F' є образом деякої точки фігури F ;
- 3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F' .

Кажуть, що фігура F' є *образом* фігури F для такого перетворення, а фігура F є *прообразом* фігури F' .

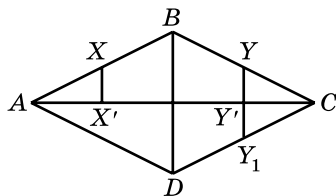
Зауважимо, що не кожна відповідність між точками двох фігур є перетворенням.

Приклад 1. Чи є перетворенням відповідність, за якої кожній точці X ромба $ABCD$ ставиться у відповідність точка X' – точка перетину діагоналі ромба AC з перпендикуляром, проведеним через точку X до прямої, що містить AC ?

Розв'язання. 1) Для заданої відповідності кожній точці X ромба $ABCD$ відповідає єдина точка X' діагоналі ромба AC (мал. 18.2).

2) Але водночас кожній точці Y' діагоналі AC (за винятком точок A і C) відповідають дві точки ромба Y і Y_1 . Тому задана відповідність не є перетворенням.

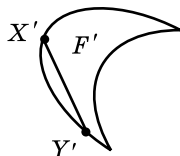
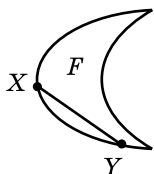
Відповідь: ні.



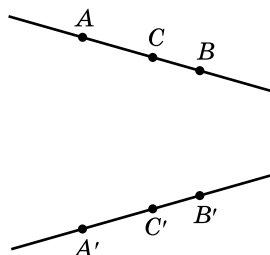
Мал. 18.2

2. Переміщення (рух) та його властивості

Перетворення однієї фігури в іншу називають **переміщенням** (**рухом**), якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X і Y першої фігури в точки X' і Y' другої так, що $XU = X'Y'$ (мал. 18.3).



Мал. 18.3



Мал. 18.4

Розглянемо основні *властивості* переміщення.



Теорема 1 (властивість переміщення). Точки, що лежать на прямій, під час переміщення переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розміщення.

Доведення. 1) Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій. Тоді одна з них лежить між двома іншими, наприклад, точка C лежить між точками A і B (мал. 18.4). Тоді:

$$AB = AC + CB.$$

2) Деяке переміщення переводить точку A в точку A' , точку B – у точку B' , точку C – у точку C' . Оскільки переміщення зберігає відстані між будь-якими двома точками, то:

$$A'B' = AB, A'C' = AC, C'B' = CB.$$

Тому:

$$A'B' = A'C' + C'B'.$$

3) З останньої рівності випливає, що точки A' , B' і C' лежать на одній прямій, причому точка C' лежить між точками A' і B' . ■



Наслідок. Під час переміщення прямі переходять у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.



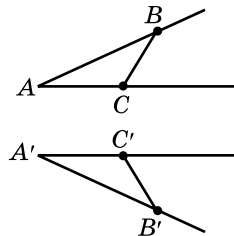
Теорема 2 (властивість переміщення). Під час переміщення кут переходить у рівний йому кут.

Доведення. 1) Нехай маємо нерозгорнутий кут BAC . Під час переміщення два промені AB і AC , що виходять зі спільної точки і не лежать на одній прямій, переходять у деякі два промені $A'B'$ і $A'C'$ (мал. 18.5).

2) Оскільки переміщення зберігає відстані між будь-якими двома точками, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

3) Тоді $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (за трьома сторонами).

Із рівності трикутників випливає, що $\angle BAC = \angle B'A'C'$. ■



Мал. 18.5

3. Рівність фігур

Використовуючи поняття переміщення, можна сформулювати загальне означення рівності геометричних фігур.

Дві фігури називають *рівними*, якщо при переміщенні вони переходять одна в одну.

Відомі нам з попередніх класів означення рівності відрізків, кутів і трикутників не суперечать наведеному загальному означенню рівних фігур.

Із цього означення випливає, що:

1) якщо фігура F дорівнює фігурі F_1 , то і F_1 дорівнює F ;

2) якщо фігура F дорівнює фігурі F_1 , а F_1 дорівнює F_2 , то F дорівнює F_2 ;

3) якщо фігура F дорівнює фігурі F_1 , то існує деяке переміщення, що переводить фігуру F у фігуру F_1 .

Які саме види переміщень існують, ми розглянемо в наступних параграфах.

Приклад 2. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB . Чи існує переміщення, за якого: 1) відрізок AC переходить у відрізок BC ; 2) кут A переходить у кут B ?

Розв'язання. Оскільки трикутник рівнобедрений з основою AB , то $AC = BC$ і $\angle A = \angle B$. Тому існує переміщення, що переводить відрізок AC у відрізок BC , і існує переміщення, що переводить кут A в кут B .

Відповідь: 1) так; 2) так.



Що називають перетворенням фігури F у фігуру F' ? Яке перетворення фігури називають переміщенням? Сформулюйте і доведіть властивості переміщення. Які фігури називають рівними? Які висновки можна зробити із загального означення рівності фігур?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 18.1. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$, якщо:

- 1) $AB = 5$ см, $A'B' = 5$ см; 2) $AB = 4$ см, $A'B' = 7$ см?

18.2. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок MN у відрізок $M'N'$, якщо:

- 1) $MN = 6$ см, $M'N' = 4$ см; 2) $MN = 7$ см, $M'N' = 7$ см?

18.3. Чи існує переміщення, яке переводить кут D в кут D' , якщо:

- 1) $\angle D = 60^\circ$, $\angle D' = 62^\circ$; 2) $\angle D = 30^\circ$, $\angle D' = 30^\circ$?

18.4. Чи існує переміщення, яке переводить кут A в кут A' , якщо:

- 1) $\angle A = 100^\circ$, $\angle A' = 100^\circ$; 2) $\angle A = 98^\circ$, $\angle A' = 85^\circ$?

2 18.5. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кути трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC – рівнобедрений з кутом A при вершині і $\angle A = 20^\circ$.

18.6. При переміщенні прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 3$ см і $BC = 4$ см перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть сторони трикутника $A'B'C'$.

18.7. $ABCD$ – паралелограм. Чи існує переміщення, за якого:

- 1) сторона AB переходить у сторону CD ;
2) кут BAD переходить у кут BCD ?

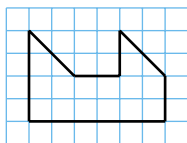
18.8. $KLMN$ – ромб. Чи існує переміщення, за якого:

- 1) сторона KL переходить у сторону KN ;
2) кут KLN переходить у кут MNL ?

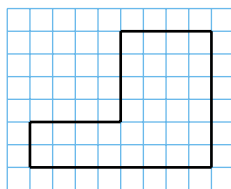
3 18.9. Нехай маємо два кола зі спільним центром O . Кожній точці X першого кола відповідає точка X' другого кола, яка лежить на промені OX . Чи буде ця відповідність між точками двох кіл перетворенням?

18.10. Коло із центром у точці O вписано у квадрат. Кожній точці X кола відповідає точка X' квадрата, яка лежить на промені OX . Чи буде ця відповідність між точками кола і квадрата перетворенням?

- 18.11. Чи існує переміщення, за якого відрізок MN переходить у відрізок KL , якщо $M(-2; 3)$, $N(2; 0)$, $K(5; 1)$, $L(0; 2)$?
- 18.12. Чи існує переміщення, за якого відрізок AB переходить у відрізок CD , якщо $A(0; 5)$, $B(6; -3)$, $C(4; 5)$, $D(-1; 0)$?
- 4** 18.13. Чи існує переміщення, яке переводить коло $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ у коло $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$?
- 18.14. Чи існує переміщення, яке переводить коло $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ у коло $x^2 + y^2 + 8x = 0$?
- 18.15. Розділіть фігуру (мал. 18.6) на дві рівні частини.
- 18.16. Розділіть фігуру (мал. 18.7) на дві рівні частини.



Мал. 18.6



Мал. 18.7



Вправи для повторення

- 18.17. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них на 30° більший за інший.
- 18.18. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60° , а їх різниця дорівнює 3 см. Знайдіть площу трикутника.
- 18.19. Два кола з радіусами 4 см і 9 см мають зовнішній дотик. Спільна зовнішня дотична дотикається до кіл у точках A і B . Знайдіть AB .
- 18.20. У правильному п'ятикутнику $ABCDE$ діагоналі AD і BE перетинаються в точці O . Знайдіть кут DOE .



Життєва математика

- 18.21. 1) Одного рулону шпалер вистачає для обклеювання смуги від підлоги до стелі 1,6 м завширшки. Скільки рулонів шпалер потрібно купити для обклеювання прямокутної кімнати розмірами 3,6 м $\times$ 4,8 м (вікнами та дверима знехтувати)?
 2) *Проектна діяльність.* Дізнайтеся вартість шпалер, які вам до вподоби, та обчисліть, скільки потрібно заплатити грошей за них.



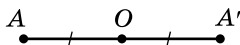
Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 18.22. На колі навмання розташували 5 точок. Доведіть, що:
 1) існує принаймні три трійки точок, що є вершинами тупокутних трикутників;
 2) існує таке розташування точок, за якого тупокутних трикутників буде точно три.

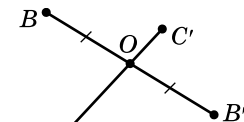
§ 19. Симетрія відносно точки

1. Означення симетрії відносно точки

Дві точки A і A' називають **симетричними відносно точки O** , якщо O є серединою відрізка AA' (мал. 19.1).



Мал. 19.1



Мал. 19.2

Точкою, симетричною точці O , буде сама точка O .

На малюнку 19.2 точки B і B' симетричні відносно точки O , а точки C і C' не є симетричними відносно точки O .

Щоб побудувати точку A' , симетричну точці A відносно точки O :

- 1) проводимо промінь AO ;
- 2) по інший бік від точки O відкладаємо на ньому відрізок $OA' = OA$ (див. мал. 19.1).

Приклад. Точки $A(x; 2)$ і $A'(-3; y)$ симетричні відносно точки $O(4; -5)$.

Знайти x і y .

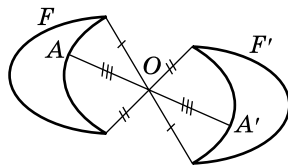
Розв'язання. Точка O – середина відрізка AA' . За формулами середини відрізка: $4 = \frac{x + (-3)}{2}$ і $-5 = \frac{2 + y}{2}$, звідси: $x = 11$, $y = -12$.

Відповідь: $x = 11$, $y = -12$.

2. Фігури F і F' , симетричні відносно деякої точки.

Центрально-симетрична фігура

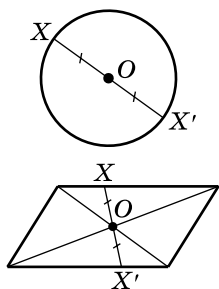
Якщо кожна точка фігури F симетрична деякій точці фігури F' відносно точки O , і навпаки, то фігури F і F' називають **симетричними відносно точки O** (мал. 19.3). Таке перетворення фігури F у фігуру F' називають **перетворенням симетрії відносно точки O** (або **центральною симетрією** відносно точки O). Точку O називають **центром симетрії**.



Мал. 19.3

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то фігуру F називають **центрально-симетричною**, а точку O – її **центром симетрії** (тобто **центром симетрії фігури F**).

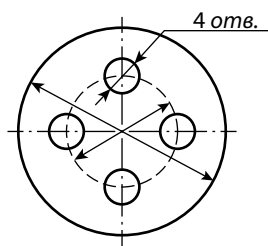
Прикладами центрально-симетричних фігур є коло і паралелограм (мал. 19.4). Центром симетрії кола є центр кола, а центром симетрії паралелограма – точка перетину його діагоналей.



Мал. 19.4



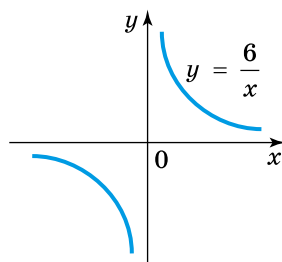
Мал. 19.5



Приклади центрально-симетричних фігур трапляються у природі, техніці, побуті (мал. 19.5). Наприклад, центрально-симетричними є орнаменти на килимах, вишивках тощо (мал. 19.6). В алгебрі, наприклад, графіком функції $y = \frac{6}{x}$ є гіпербола, симетрична відносно початку координат (мал. 19.7).



Мал. 19.6



Мал. 19.7

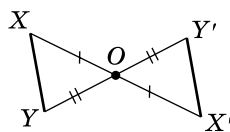
3. Теорема про перетворення симетрії відносно точки

Т Теорема (про перетворення симетрії відносно точки). **Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.**

Доведення. Нехай X і Y – дві довільні точки фігури F , а перетворення симетрії відносно точки O переводить їх у точки X' і Y' (мал. 19.8).

1) Оскільки $OX = OX'$, $OY = OY'$ (за означенням симетрії) і $\angle XOY = \angle X'OY'$ (як вертикальні), то $\triangle XOY = \triangle X'OY'$ (за двома сторонами і кутом між ними).

2) Тому $XY = X'Y'$. Це означає, що симетрія відносно точки O є переміщенням. (Випадок, коли точки X , Y і O лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.) ■



Мал. 19.8

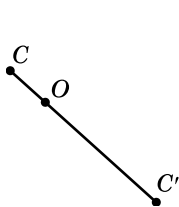
- ❓ Які точки називають симетричними відносно даної точки? ○ Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки? ○ Яку фігуру називають центрально-симетричною? ○ Яку точку називають центром симетрії фігури? ○ Наведіть приклади фігур, що мають центр симетрії. ○ Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.



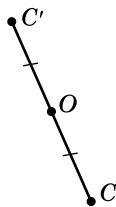
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

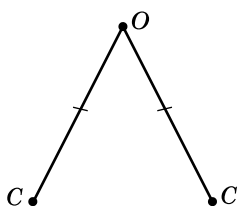
19.1. (Усно.) На якому з малюнків 19.9–19.12 точки C і C' симетричні відносно точки O ?



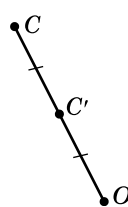
Мал. 19.9



Мал. 19.10



Мал. 19.11



Мал. 19.12

19.2. Дано дві точки O і A . Побудуйте точку A' , симетричну точці A відносно точки O .

19.3. Дано дві точки O і B . Побудуйте точку B' , симетричну точці B відносно точки O .

2

19.4. Дано відрізок AB , $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно початку координат, та запишіть координати його кінців.

19.5. Дано відрізок MN , кінці якого мають координати $M(-2; -1)$, $N(4; -3)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку MN відносно початку координат, та запишіть координати його кінців.

19.6. Серед точок $A(-2; 3)$, $B(2; 3)$, $C(-2; -3)$, $D(2; -3)$ укажіть пари точок, які симетричні відносно початку координат.

19.7. Чи симетричні точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -7)$ відносно точки $O(1; 2)$?

19.8. Які координати має точка O , відносно якої симетричні точки $M(-4; 5)$ і $N(8; -1)$?

19.9. 1) Точки $A(x; -3)$ і $A'(5; y)$ симетричні відносно точки $O(7; 1)$. Знайдіть x і y .



2) Сума $x + y$ вкаже, у якому віці українка Анна Дудченко почала займатися наукою, працюючи у лабораторії.

19.10. 1) Точки $B(5; y)$ і $B'(x; -7)$ симетричні відносно точки $O(-3; 4)$. Знайдіть x і y .



2) Знайдіть суму $x + y$, відтак дізнаєтеся, скільки міжнародних нагород отримала київська школярка Дар'я Зосименко за дослідження імунної відповіді організму на COVID-19.

19.11. Чи має центр симетрії:

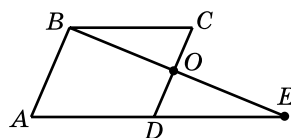
- 1) відрізок; 2) промінь; 3) пряма; 4) коло?

Якщо так, то вкажіть центр симетрії.

3

19.12. $ABCD$ – паралелограм (мал. 19.13). Точка E симетрична точці A відносно точки D . Доведіть, що:

1) точки C і D симетричні відносно точки O ;



Мал. 19.13

2) точки B і E симетричні відносно точки O .

19.13. $ABCD$ – паралелограм (мал. 19.13). Точка E симетрична точці B відносно точки O . Доведіть, що:

1) точки C і D симетричні відносно точки O ;

2) точки A і E симетричні відносно точки D .

19.14. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ відносно:

1) початку координат;

2) точки $O(-1; 5)$.

19.15. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ відносно:

1) початку координат;

2) точки $O(2; -3)$.



19.16. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x - y + 5 = 0$ відносно:

1) початку координат;

2) точки $O(1; 3)$.

19.17. 940. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $x + 2y - 3 = 0$ відносно:

1) початку координат;

2) точки $O(-1; -2)$.



Вправи для повторення

19.18. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, що вдвічі більша за перпендикуляр. Знайдіть кут між похилою і прямою.

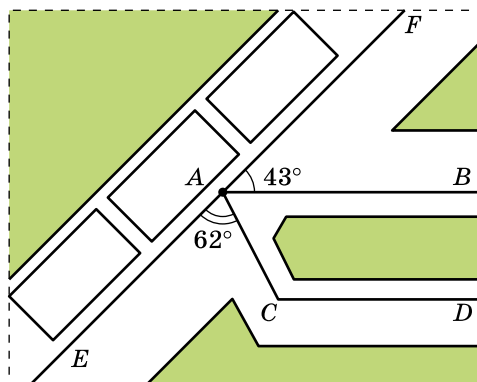
19.19. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, бічна сторона якої перпендикулярна до діагоналі й дорівнює меншій основі.

19.20. Площа прямокутного трикутника в 4 рази менша від площі квадрата, який побудовано на гіпотенузі. Знайдіть гострі кути трикутника.



Життєва математика

19.21. На плані міста вулиці, позначені як AB і CD , паралельні. Вулиця EF становить з вулицями AB і AC кути відповідно 43° і 62° . Знайдіть кут, який утворюють між собою вулиці AC і CD .





Цікаві задачі – поміркуй одначе

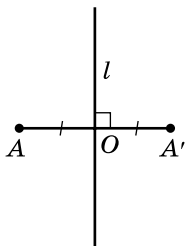
19.22. Знайдіть довжини сторін AB і AC трикутника ABC , якщо $BC = 8$ см, а довжини висот, проведених до AC і BC , дорівнюють відповідно 6,4 см і 4 см. Скільки випадків слід розглянути?

§ 20. Симетрія відносно прямої

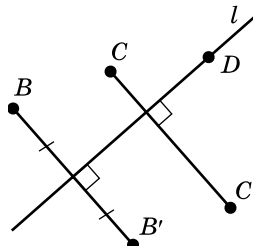
1. Означення симетрії відносно прямої

Дві точки A і A' називають **симетричними відносно прямої l** , якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка AA' (мал. 20.1).

Якщо точка A лежить на прямій l , то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l .



Мал. 20.1



Мал. 20.2

На малюнку 20.2 точки B і B' симетричні відносно прямої l , точки C і C' не симетричні відносно прямої l , а точка D симетрична сама собі відносно прямої l .

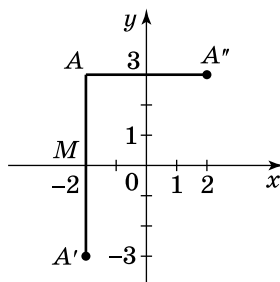
Щоб побудувати точку A' , симетричну точці A відносно прямої l :

1) проводимо перпендикуляр AO з точки A до прямої l ;

2) на його продовженні з іншого боку від прямої l відкладаємо відрізок $OA' = OA$ (див. мал. 20.1).

Приклад. Знайдіть координати точок, симетричних точці $A(-2; 3)$ відносно осей координат.

Розв'язання. Нехай точка A' симетрична точці A відносно осі x (мал. 20.3). Тоді $AA' \perp x$ і точка M – середина відрізка AA' . Тому абсциса точки A' дорівнює абсцисі точки A , а ординати цих точок – протилежні числа. Отже, $A'(-2; -3)$.
Нехай точка A'' симетрична точці A відносно осі y . Міркуючи аналогічно, матимемо $A''(2; 3)$.
Відповідь: $A'(-2; -3)$ і $A''(2; 3)$.

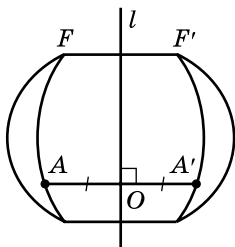


Мал. 20.3

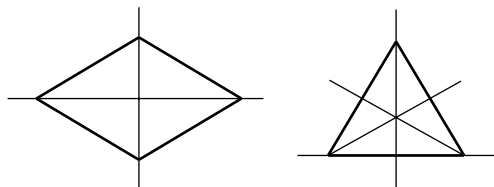
2. Фігури F і F' , симетричні відносно деякої прямої. Фігура, симетрична відносно прямої

Якщо кожна точка фігури F відносно прямої l симетрична деякій точці фігури F' , і навпаки, то фігури F і F' називають *симетричними відносно прямої l* (мал. 20.4). Таке перетворення фігури F у фігуру F' називають *перетворенням симетрії* відносно прямої l (або *осьовою симетрією* відносно прямої l). Пряму l називають *віссю симетрії*.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то фігуру F називають *симетричною відносно прямої l* , а пряму l – її *віссю симетрії* (тобто віссю симетрії фігури F).



Мал. 20.4



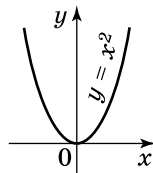
Мал. 20.5

Прикладами фігур, які мають вісь симетрії, є ромб і рівносторонній трикутник (мал. 20.5). Ромб має дві осі симетрії, а рівносторонній трикутник – три.

Фігури, симетричні відносно прямої, оточують нас у повсякденному житті, є у природі, техніці тощо (мал. 20.6).



Мал. 20.6



Мал. 20.7

В алгебрі симетрія відносно прямої трапляється під час побудови графіків. Наприклад, графік функції $y = x^2$ симетричний відносно осі ординат (мал. 20.7).

3. Теорема про перетворення симетрії відносно прямої



Теорема (про перетворення симетрії відносно прямої). Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю y .

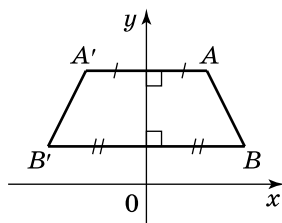
Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ – дві довільні точки фігури F , а A' і B' – точки, симетричні відповідно точкам A і B відносно прямої y (мал. 20.8).

Тоді можемо вказати координати точок A' і B' : $A'(-x_1; y_1)$ і $B'(-x_2; y_2)$ (див. розв'язання задачі на с. 178).

Маємо: $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$;

$A'B'^2 = (-x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Тому $AB^2 = A'B'^2$, отже, $AB = A'B'$, тобто симетрія відносно прямої є переміщенням. ■



Мал. 20.8

А ще раніше...

Слово «симетрія» – грецького походження (*сим* – з, *метрон* – міра) і дослівно означає «співмірність». У давнину цей термін застосовували в архітектурі та мистецтві, маючи на увазі гармонійність, рівновагу, красу.

Пізнаючи в буденному житті явища природи, люди помічали симетричну форму листа та метеликів, спіралі раковин, будови кристалів тощо, а також симетрію будови тіла людини.

Вчення про симетрію веде свій початок з давнини, про що свідчать геометричні орнаменти, які збереглися на кам'яних плитах, посудинах тощо. Багатовікові спостереження людини за симетрією мінералів, рослин, тварин та досвід застосування симетрії в будівництві й мистецтві привели до створення вчення про симетрію.

Про симетрію у трактаті «Про архітектуру» писав римський інженер Вітрувій (I ст.). Симетрію вивчали і застосовували архітектори й художники епохи Відродження, зокрема видатні італійські живописці Леонардо да Вінчі та Рафаель Санті; нею займалися вчені Луї Пастер (1822–1895), П'єр і Жак Кюрі та інші.

У геометрію елементи вчення про симетрію ввів французький математик Адрієн-Марі Лежандр Летанур (1752–1833).



У наші часи вчення про симетрію є основою науки кристалографії та широко застосовується в науці, техніці й промисловості.

З давніх часів люди асоціювали симетрію з красою в будівництві, архітектурі, дизайні, мистецтві, і навіть вважали її важливою рисою особистої привабливості. У математиків симетрія є не лише мірою краси, а й потужним інструментом для аналізу, зокрема для рівнянь. З математичного погляду, симетрія – це таке перетворення математичного об'єкта (наприклад, обертання або переміщення в просторі), після якого об'єкт зберігає свій початковий вигляд. Наприклад, квадрат є симетричним відносно своїх діагоналей і середини сторін, а коло – відносно будь-якої точки свого центра.



Тадж-Махал – величний мавзолей-мечеть (м. Агра, Індія)



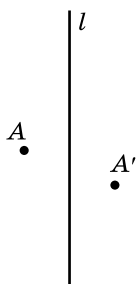
Які точки називають симетричними відносно даної прямої? ○ Яке перетворення називають симетрією відносно прямої? ○ Яку фігуру називають симетричною відносно даної прямої? ○ Як називають пряму, відносно якої фігура є симетричною? ○ Наведіть приклади фігур, що мають вісь симетрії. ○ Доведіть, що перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.



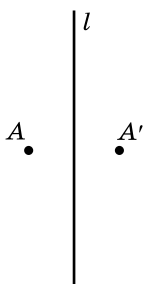
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

20.1. (Усно.) На якому з малюнків 20.9–20.12 точки A і A' симетричні відносно прямої l ?



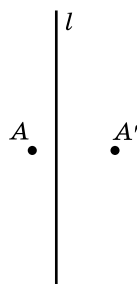
Мал. 20.9



Мал. 20.10



Мал. 20.11



Мал. 20.12

20.2. Дано пряму l і точку M , що їй не належить. Побудуйте точку, симетричну точці M відносно прямої l .

20.3. Дано пряму l і точку N , що їй не належить. Побудуйте точку N' , симетричну точці N відносно прямої l .

2

20.4. Дано відрізок CD , кінці якого мають координати $C(-4; 1)$, $D(2; -3)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку CD відносно осі абсцис, та запишіть координати його кінців.

20.5. Дано відрізок AB , кінці якого мають координати $A(2; 5)$, $B(3; -1)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно осі ординат, та запишіть координати його кінців.

20.6. Серед точок $A(-2; 5)$, $B(-2; -5)$, $C(2; 5)$, $D(2; -5)$ укажіть пари точок, симетричних відносно осі ординат.

20.7. Серед точок $M(3; -4)$, $N(-3; 4)$, $K(-3; -4)$, $L(3; 4)$ укажіть пари точок, симетричних відносно осі абсцис.

20.8. Накресліть трикутник ABC . Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої BC .

20.9. Накресліть прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB . Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої AC .

20.10. Скільки осей симетрії має:

- | | |
|------------------------------------|-------------|
| 1) відрізок; | 2) промінь; |
| 3) пряма; | 4) коло; |
| 5) прямокутник, що не є квадратом; | 6) квадрат? |

3

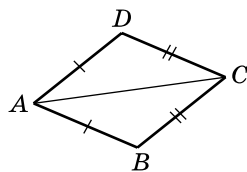
20.11. Знайдіть x і y , якщо точки $A(x; -2)$ і $A'(3; y)$ симетричні відносно:

- 1) осі абсцис; 2) осі ординат.

20.12. Знайдіть x і y , якщо точки $A(-5; y)$ і $A'(x; 6)$ симетричні відносно:

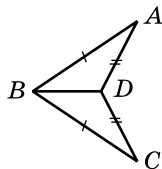
- 1) осі абсцис; 2) осі ординат.

20.13. На малюнку 20.13 $AD = AB$, $CD = CB$. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC .



Мал. 20.13

20.14. На малюнку 20.14 $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що точки A і C симетричні відносно прямої BD .



Мал. 20.14

20.15. Осі координат є осями симетрії ромба. Середина однієї зі сторін ромба – точка $N(-2; 3)$. Знайдіть координати вершин ромба.

20.16. Осі координат є осями симетрії квадрата. Середина однієї зі сторін квадрата – точка $M(2; -2)$. Знайдіть координати вершин квадрата.



20.17. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x - 3y - 6 = 0$ відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат.

20.18. 963. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $4x - y + 8 = 0$ відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат.



Вправи для повторення

20.19. Периметр ромба дорівнює 24 см, а один з його кутів дорівнює 60° . Знайдіть діагоналі ромба.

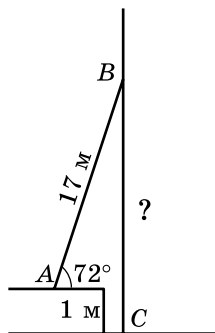
20.20. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 36 см, а основа менша від бічної сторони на 3 см.

20.21. Знайдіть відношення площі правильного шестикутника, вписаного в коло, до площі квадрата, описаного навколо цього кола.



Життєва математика

20.22. Пожежна драбина висунута на 17 м при граничному куту підйому 72° . Знайдіть висоту, якої досяг верхній кінець драбини, якщо її нижній кінець віддалений від поверхні землі на 1 м.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

20.23. (Київська математична олімпіада, 1993 р.)

Дано три ненульових вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які попарно неколінеарні. Доведіть, що коли вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то вектор $\vec{a} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{b}$. Знайдіть суму векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

§ 21. Поворот

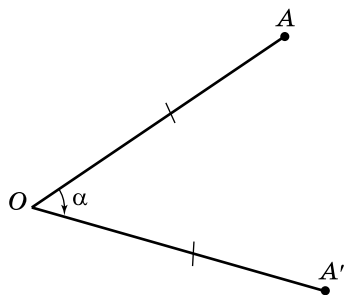
1. Означення повороту

Поворотом навколо точки O на кут α називають перетворення, за якого точка A переходить у точку A' так, що $OA = OA'$ і $\angle AOA' = \alpha$ (мал. 21.1).

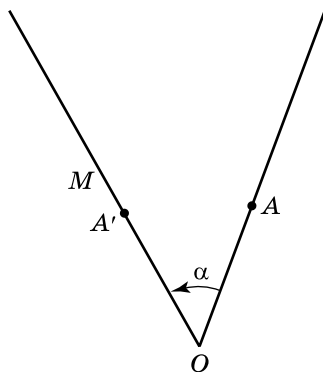
Після повороту точка O переходить у себе. Точку O називають *центром повороту*, а кут AOA' – *кутом повороту*.

Поворот можна виконати у двох напрямках: за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки.

На малюнку 21.1 виконано поворот точки A навколо точки O на кут α за годинниковою стрілкою.



Мал. 21.1



Мал. 21.2

Щоб побудувати точку A' , у яку переходить точка A внаслідок повороту в заданому напрямку (за годинниковою стрілкою або проти) навколо центра повороту (точки O) на кут α :

1) проводимо промінь OA ;

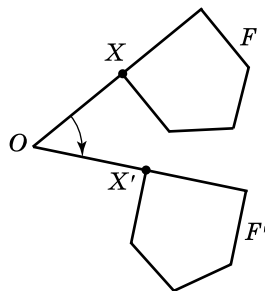
2) від променя OA в заданому напрямку відкладаємо кут AOM , що дорівнює куту α ;

3) на промені OM позначаємо точку A' таку, що $OA = OA'$ (мал. 21.2).

На малюнку 21.2 виконано поворот точки A навколо точки O на кут α проти годинникової стрілки.

Зауважимо, що поворот на 180° навколо точки O за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки є симетрією відносно точки O .

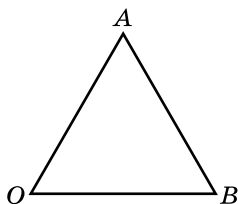
Якщо задано кут α , центр і напрямок повороту, то навколо центра повороту можна виконати поворот будь-якої фігури F . Для цього кожену точку X фігури F потрібно повернути навколо центра повороту на заданий кут α , отримавши у такий спосіб точку X' фігури F' (мал. 21.3). У такому разі кажуть, що поворот навколо точки O на кут α відображає фігуру F у фігуру F' .



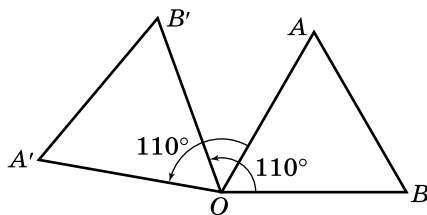
Мал. 21.3

Приклад. Трикутник AOB – рівносторонній (мал. 21.4).

- 1) Побудувати відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 110° проти годинникової стрілки.
- 2) Знайти градусну міру кута AOB' .



Мал. 21.4



Мал. 21.5

Розв'язання. 1) Побудову зображено на малюнку 21.5.

2) $\angle AOB' = \angle B'OB - \angle AOB = 110^\circ - 60^\circ = 50^\circ$.

Відповідь: 2) 50° .

2. Теорема про поворот навколо точки

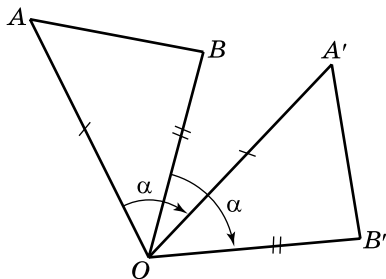


Теорема (про поворот навколо точки). Перетворення повороту є переміщенням.

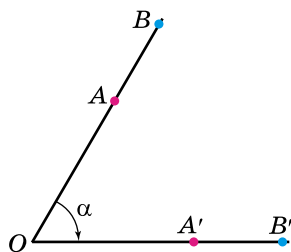
Доведення. Нехай при повороті навколо точки O на кут α точки A і B фігури F переходять відповідно в точки A' і B' фігури F' . Тоді $OA = OA'$, $OB = OB'$ і $\angle AOA' = \angle BOB'$.

1) Нехай точки A , B і O не лежать на одній прямій (мал. 21.6). Тоді $\angle AOB = \angle A'OB'$ (бо кожен із цих кутів дорівнює різниці кутів α і $\angle BOA'$). Тому $\triangle AOB = \triangle A'OB'$ (за двома сторонами і кутом між ними), звідси $AB = A'B'$.

2) Нехай точки A , B і O лежать на одній прямій (мал. 21.7).



Мал. 21.6



Мал. 21.7

Тоді $AB = OB - OA = OB' - OA' = A'B'$.

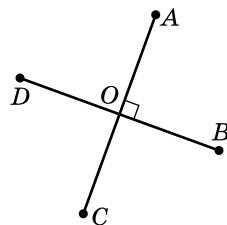
Отже, в обох випадках $AB = A'B'$. ■



Що називають поворотом навколо точки O на кут α ? ○ Що називають центром повороту; кутом повороту? ○ Доведіть, що перетворення повороту є переміщенням.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



Мал. 21.8

- 1** 21.1. У яку точку при повороті на кут 90° за годинниковою стрілкою навколо точки O (мал. 21.8) переходить точка:
1) B ; 2) D ; 3) A ; 4) C ?
- 21.2. У яку точку при повороті на кут 90° проти годинникової стрілки навколо точки O (мал. 21.8) переходить точка:
1) A ; 2) D ; 3) B ; 4) C ?
- 21.3. Стрілки годинника показують 11 год. Який час покаже годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот на 120° ?
- 21.4. Стрілки годинника показують 8 год. Який час покаже годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот на 60° ?
- 2** 21.5. Дано точки A й O . Побудуйте точку A' , у яку переходить точка A при повороті навколо точки O :
1) за годинниковою стрілкою на 80° ;
2) проти годинникової стрілки на 130° .
- 21.6. Дано точки B і O . Побудуйте точку B' , у яку переходить точка B при повороті навколо точки O :
1) проти годинникової стрілки на 70° ;
2) за годинниковою стрілкою на 100° .
- 21.7. У яку точку переходить точка $B(0; -3)$ при повороті відносно початку координат на:
1) 90° проти годинникової стрілки;
2) 90° за годинниковою стрілкою;
3) 180° ?
- 21.8. У яку точку переходить точка $A(2; 0)$ при повороті відносно початку координат на:
1) 90° за годинниковою стрілкою;
2) 90° проти годинникової стрілки;
3) 180° ?
- 3** 21.9. Накресліть трикутник ABC . Виконайте поворот трикутника на 60° за годинниковою стрілкою навколо вершини B .
- 21.10. Накресліть трикутник ABC . Виконайте поворот трикутника на 110° проти годинникової стрілки навколо вершини C .
- 21.11. Побудуйте точки, у які переходять точки $A(3; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(1; 2)$, $D(-4; -4)$ при повороті на 90° проти годинникової стрілки навколо початку координат. Укажіть координати одержаних точок.
- 21.12. Побудуйте точки, у які переходять точки $M(-4; 2)$, $N(1; -1)$, $K(4; 3)$, $L(-2; -2)$ при повороті на 90° за годинниковою стрілкою навколо початку координат. Укажіть координати одержаних точок.

21.13. На який найменший кут треба повернути квадрат відносно його центра симетрії, щоб він перейшов сам у себе?

4



21.14. 1) Точка $A(m; -3)$ переходить у точку $A'(n; 4)$ при повороті навколо початку координат на 90° за годинниковою стрілкою. Знайдіть m і n .

2) Обчисліть добуток mn , відтак дізнаєтеся, скільки діб провів на орбіті перший космонавт незалежної України Леонід Каденюк.

21.15. 1) Точка $B(4; m)$ переходить у точку $B'(-3; n)$ при повороті навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки. Знайдіть m і n .



2) Обчисліть суму $m + n$, відтак дізнаєтеся, скільки українко-науковиць були в 2023 році включені до світового рейтингу «100 успішних жінок у науці».

21.16. Знайдіть координати точки A' , у яку переходить точка $A(2; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут 45° за годинниковою стрілкою.

21.17. Знайдіть координати точки B' , у яку переходить точка $B(0; 2)$ при повороті навколо початку координат на кут 45° проти годинникової стрілки.



21.18. Дано відрізок AB . За допомогою циркуля і лінійки виконайте поворот навколо його середини на 120° за годинниковою стрілкою.



Вправи для повторення

21.19. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 25 см, а один з катетів – 20 см.

21.20. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 9 см і 13 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 84 см.

21.21. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 45° , $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

21.22. 1) Вектор $\vec{m}(-2; 3)$ відкладено від точки $L(4; 5)$. Знайдіть координати кінця вектора.

2) Вектор $\vec{m}(a; b)$ відкладено від точки $K(x; y)$. Знайдіть координати кінця вектора.

21.23. 1) Точка $M(4; -3)$ – кінець вектора $\vec{d}(-5; 0)$. Знайдіть координати початку вектора.

2) Точка $C(x'; y')$ – кінець вектора $\vec{d}(a; b)$. Знайдіть координати початку вектора.



Життєва математика

- 21.24. Аліса й Сергій виготовляли кільце для гри в баскетбол. Кільце має бути діаметром 18 дюймів. Якої довжини (із точністю до десятих см) потрібно взяти металевий дріт для виготовлення кільця, щоб воно відповідало вимогам гри?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 21.25. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D . Знайдіть довжини хорд DC і DB , якщо $DI = l$, де I – центр кола, вписаного у трикутник.

§ 22. Паралельне перенесення

1. Означення паралельного перенесення.

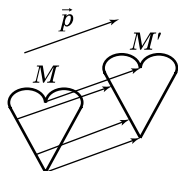
Формули паралельного перенесення

Нехай дано вектор $\vec{p}$.

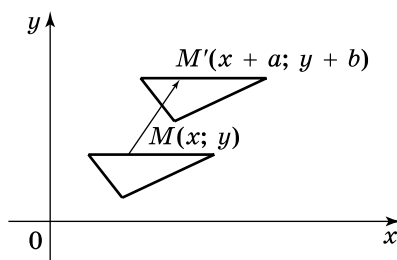
Паралельним перенесенням на вектор $\vec{p}$ називають таке перетворення, за якого кожній точці M відповідає така точка M' , що $\overline{MM'} = \vec{p}$ (мал. 22.1).

Якщо координати вектора відомі, то можна дати інше означення паралельного перенесення на вектор $\vec{p}(a; b)$.

Паралельним перенесенням називають таке перетворення фігури, за якого її довільна точка $M(x; y)$ переходить у точку $M'(x + a; y + b)$, де a і b – одні й ті самі для всіх точок фігури (мал. 22.2).



Мал. 22.1



Мал. 22.2

Якщо точка M' має координати $(x'; y')$, то отримаємо *формули паралельного перенесення*:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Приклад 1. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 2$, $y' = y - 3$. З'ясувати:

1) у яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A(5; 4)$;

2) яка точка при цьому паралельному перенесенні переходить у точку $B'(-7; -3)$.

Розв'язання. 1) Нехай точка $A(5; 4)$ переходить у точку $A'(x'; y')$, тоді $x' = 5 + 2$, $x' = 7$, $y' = 4 - 3$, $y' = 1$. Отже, $A'(7; 1)$.

2) Нехай у точку $B'(-7; -3)$ перейшла точка $B(x; y)$, тоді $-7 = x + 2$, звідки $x = -9$ і $-3 = y - 3$, звідки $y = 0$. Отже, $B(-9; 0)$.

Відповідь: 1) $A'(7; 1)$; 2) $B(-9; 0)$.

Приклад 2. Знайти формули, що задають паралельне перенесення, за якого точка $C(2; -5)$ переходить у точку $C'(4; 9)$.

Розв'язання. Щоб знайти значення a і b , у формули паралельного перенесення $x' = x + a$ і $y' = y + b$ підставимо значення відповідних координат точок C і C' . Матимемо:

$$4 = 2 + a \text{ і } 9 = -5 + b; \text{ звідки } a = 2 \text{ і } b = 14.$$

Отже, формули паралельного перенесення мають вигляд: $x' = x + 2$, $y' = y + 14$.

Відповідь: $x' = x + 2$, $y' = y + 14$.

2. Теорема про паралельне перенесення



Теорема (про паралельне перенесення). Паралельне перенесення є переміщенням.

Доведення. Нехай за деякого паралельного перенесення точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ фігури F переходять відповідно в точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ і $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ фігури F' .

Тоді за формулою відстані між двома точками:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$

$$A'B'^2 = (x_1 + a - (x_2 + a))^2 + (y_1 + b - (y_2 + b))^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

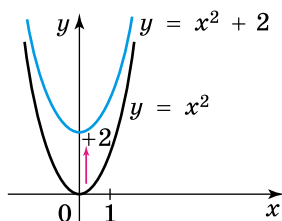
Отже, $AB^2 = A'B'^2$, а тому $AB = A'B'$. ■

Доведену властивість паралельного перенесення використовують у повсякденному житті, алгебрі тощо.

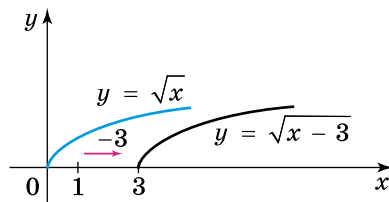
Однакові малюнки, що періодично повторюються на шпалерах, тканинах, вишитих рушниках, секції огорожі, паркетна підлога з малюнками, які повторюються, зовнішній вигляд поверхів багатоповерхівок є прикладами паралельного перенесення у повсякденному житті.

За допомогою паралельного перенесення будують графіки функцій в алгебрі. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, треба

для графіка функції $y = x^2$ виконати паралельне перенесення на дві одиниці вгору (мал. 22.3), а щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{x - 3}$, треба графік функції $y = \sqrt{x}$ паралельно перенести на три одиниці праворуч (мал. 22.4).



Мал. 22.3



Мал. 22.4

- ?** Що називають паралельним перенесенням (сформулюйте два означення)? **○** Які формули задають паралельне перенесення? **○** Доведіть, що паралельне перенесення є переміщенням. **○** Наведіть приклади паралельного перенесення з життя. **○** Наведіть приклади паралельного перенесення в алгебрі.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

22.1. (Усно.) Які з тверджень правильні:

- 1) існує паралельне перенесення, за якого більша основа трапеції переходить у меншу;
- 2) при паралельному перенесенні коло переходить у коло того самого радіуса;
- 3) при паралельному перенесенні прямокутний трикутник переходить у рівносторонній;
- 4) існує паралельне перенесення, за якого сторона паралелограма переходить у паралельну їй сторону?

22.2. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 2$, $y' = y + 5$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

- 1) $O(0; 0)$; 2) $A(3; -1)$; 3) $B(2; -5)$; 4) $C(10; 1)$?

22.3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 1$, $y' = y - 2$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

- 1) $O(0; 0)$; 2) $M(-2; 4)$; 3) $N(-1; 2)$; 4) $K(-5; 8)$?

2

22.4. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 7$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

- 1) $K'(2; 3)$; 2) $M'(3; -7)$;
- 3) $N'(0; 0)$; 4) $L'(4; -5)$?

22.5. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$, $y' = y + 7$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

- 1) $A'(2; 4)$; 2) $B'(-3; 7)$;
- 3) $C'(0; 0)$; 4) $D'(-3; 17)$?

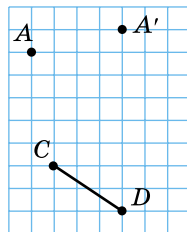
22.6. Запишіть формули паралельного перенесення, за якого точка A переходить у точку A' , якщо:

- 1) $A(2; 7)$, $A'(-4; 5)$; 2) $A(-1; 3)$, $A'(2; -5)$.

22.7. Запишіть формули паралельного перенесення, за якого точка B переходить у точку B' , якщо:

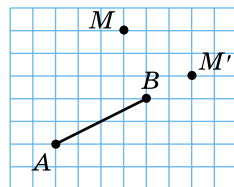
- 1) $B(-1; 2)$, $B'(0; -2)$; 2) $B(2; 4)$, $B'(5; 0)$.

22.8. При деякому паралельному перенесенні точка A перейшла в точку A' (мал. 22.5). Перемалюйте малюнок у зошит і побудуйте фігуру, у яку при цьому паралельному перенесенні переходить відрізок CD .



Мал. 22.5

22.9. При деякому паралельному перенесенні точка M перейшла в точку M' (мал. 22.6). Перемалюйте малюнок у зошит і побудуйте фігуру, у яку при цьому паралельному перенесенні переходить відрізок AB .



Мал. 22.6

3 **22.10.** Чи існує паралельне перенесення, за якого:

1) точка $A(2; -1)$ переходить у точку $B(4; -7)$, а точка $C(0; 2)$ — у точку $D(2; -3)$;

2) точка $M(4; -2)$ переходить у точку $N(0; -3)$, а точка $K(3; 0)$ — у точку $L(-1; -1)$?

22.11. Чи існує паралельне перенесення, за якого:

1) точка $C(0; 0)$ переходить у точку $D(4; 5)$, а точка $A(-1; 2)$ — у точку $B(2; 7)$;

2) точка $K(-1; -1)$ переходить у точку $L(2; -3)$, а точка $M(0; 2)$ — у точку $N(3; 0)$?

22.12. Запишіть рівняння кола, у яке переходить коло $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 15$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x - 5$, $y' = y + 2$.

22.13. Запишіть рівняння кола, у яке переходить коло $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 7$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 4$.

4 **22.14.** Запишіть рівняння прямої, у яку переходить пряма $x + 2y - 4 = 0$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x + 1$, $y' = y - 2$.

22.15. Запишіть рівняння прямої, у яку переходить пряма $3x - y - 6 = 0$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x - 2$, $y' = y + 3$.

22.16. Виконали паралельне перенесення прямої $2x - 5y - 10 = 0$. Запишіть рівняння прямої, що при цьому отримали, якщо вона проходить через точку:

- 1) $O(0; 0)$; 2) $A(2; -1)$.

22.17. Виконали паралельне перенесення прямої $3x - 2y + 6 = 0$. Запишіть рівняння прямої, що при цьому отримали, якщо вона проходить через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $B(4; -1)$.



Вправи для повторення

- 22.18. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 45° , а інший прямокутний трикутник є рівнобедреним. Чи подібні ці трикутники?
- 22.19. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30° , а бічна сторона – 4 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони.
- 22.20. Знайдіть площу трапеції з основами 20 см і 12 см, якщо центр кола, описаного навколо цієї трапеції, лежить на більшій основі.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 22.21. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:
- 1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = \angle B_1 = 100^\circ$, $\angle C_1 = 30^\circ$;
 - 2) $\angle C = \angle C_1 = 20^\circ$, $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $A_1C_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 10$ см;
 - 3) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см.
- 22.22. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$, $P_{ABC} = 24$ см. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1}$.



Життєва математика

- 22.23. У шкільній майстерні шаблони гайок мають форму правильних многокутників та кути 90° , 120° і 135° відповідно. Визначте форму гайок, для яких можна використати ці шаблони.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 22.24. Кожне з трьох рівних між собою кіл радіуса r дотикається до двох інших. Знайдіть площу трикутника, утвореного спільними дотичними до цих кіл.

§ 23. Перетворення подібності та його властивості.

Подібність фігур

1. Означення перетворення подібності

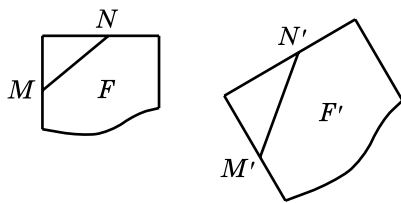
Раніше ми вже розглядали подібність трикутників. Поняття подібності можна ввести не тільки для трикутників, але й для довільних фігур.

Перетворення фігури F у фігуру F' називають **перетворенням подібності**, або **подібністю**, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли довільні точки M і N фігури F при перетворенні подібності переходять у точки M' і N' фігури F' , то

$$M'N' = kMN,$$

де k — одне й те саме додатне число для всіх пар точок M і N (мал. 23.1). Це число k називають *коефіцієнтом подібності* фігури F' по відношенню до фігури F , або просто коефіцієнтом подібності фігур.



Мал. 23.1

2. Основні властивості перетворення подібності

Розглянемо основні властивості перетворення подібності.

1. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$.
2. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

Доведення. 1) Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C . Тоді $AC = AB + BC$.

2) При перетворенні подібності точки A , B і C переходять відповідно в точки A' , B' і C' , причому $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$.

3) Маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A' , B' і C' лежать на одній прямій, причому точка B' лежить між точками A' і C' . ■



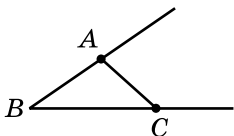
Наслідок. Перетворення подібності переводить прямі у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

3. При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

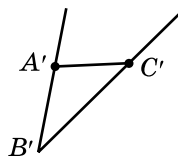
Доведення. Нехай $\angle ABC$ перетворенням подібності з коефіцієнтом переводиться в $\angle A'B'C'$ (мал. 23.2).

1) Тоді $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$.

2) Тому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (за трьома пропорційними сторонами).



Мал. 23.2



А отже, $\angle ABC = \angle A'B'C'$. ■

3. Означення подібних фігур

Дві фігури називають **подібними**, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

Якщо перетворенням подібності точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F' і $M'N' = k \cdot MN$, то кажуть, що фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k , і записують так: $F' \sim F$ (читають: «фігура F' подібна фігурі F »), або $F' \overset{k}{\sim} F$, коли треба вказати коефіцієнт (читають: «фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k »).

Зауважимо, що введено раніше означення подібності трикутників не суперечить загальному означенню подібності фігур.

Подібні фігури трапляються нам у повсякденному житті. Подібними є, наприклад, фотознімки, надруковані з одного негатива, але при різних збільшеннях; зображення на кіноплівці й зображення на екрані; карти однієї місцевості різних масштабів тощо.

Масштаб карти (креслення), добре відомий вам з молодших класів, є коефіцієнтом подібності карти (креслення) по відношенню до реальних розмірів. Так, наприклад, масштаб $1 : 1000$ означає, що одному сантиметру на карті відповідає 1000 см (або 10 м) на місцевості.

4. Основні властивості подібних фігур

Розглянемо основні властивості подібних фігур.

1. Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом 1.
2. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k , то фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Доведення. Нехай фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k , а точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F' .

Тоді $M'N' = k \cdot MN$, звідки $MN = \frac{1}{k} \cdot M'N'$.

Остання рівність означає, що фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$. ■

3. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1 , а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2 , то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом $k_1 k_2$.

Доведення. 1) Нехай фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1 , і довільні точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F' . Тоді $M'N' = k_1 \cdot MN$.

2) Нехай фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2 , і точки M' і N' фігури F' переходять у точки M'' і N'' фігури F'' . Тоді $M''N'' = k_2 \cdot M'N'$.

3) Маємо: $M''N'' = k_2 \cdot M'N' = k_2 \cdot k_1 MN = k_1 k_2 \cdot MN$.

Остання рівність означає, що фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом $k_1 k_2$. ■

4. У подібних багатокутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.

Ця властивість впливає з властивостей перетворення подібності.

5. Правильні багатокутники з однаковою кількістю сторін подібні.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Зауважимо, що при позначенні подібних багатокутників (як і при позначенні подібних трикутників) має значення порядок слідування вершин у назвах.



Приклад 1. Довести, що периметри подібних багатокутників відносяться як відповідні сторони цих багатокутників.

Розв'язання. 1) Нехай $A_1 A_2 \dots A_n \sim A_1' A_2' \dots A_n'$
і $A_1' A_2' = k \cdot A_1 A_2$, $A_2' A_3' = k \cdot A_2 A_3$, ..., $A_n' A_1' = k \cdot A_n A_1$.

Тоді $\frac{A_1' A_2'}{A_1 A_2} = \frac{A_2' A_3'}{A_2 A_3} = \dots = \frac{A_n' A_1'}{A_n A_1} = k$.

$$\begin{aligned} 2) \frac{P_{A_1' A_2' \dots A_n'}}{P_{A_1 A_2 \dots A_n}} &= \frac{A_1' A_2' + A_2' A_3' + \dots + A_n' A_1'}{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1} = \\ &= \frac{k \cdot A_1 A_2 + k \cdot A_2 A_3 + \dots + k \cdot A_n A_1}{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1} = \\ &= \frac{k(A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1)}{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1} = k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 2. Сторони чотирикутника відносяться як 3:4:5:6. Знайти сторони подібного йому чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

Розв'язання. 1) Сторони чотирикутника, подібного даному, відносяться так само, як сторони даного чотирикутника, тобто 3:4:5:6. Позначимо сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 72 см, відповідно $3x$ см, $4x$ см, $5x$ см і $6x$ см.

2) Маємо рівняння: $3x + 4x + 5x + 6x = 72$, звідки $x = 4$ (см).

3) Тепер знайдемо сторони чотирикутника:

$3 \cdot 4 = 12$ (см), $4 \cdot 4 = 16$ (см), $5 \cdot 4 = 20$ (см), $6 \cdot 4 = 24$ (см).

Відповідь: 12 см, 16 см, 20 см, 24 см.

- Яке перетворення називають перетворенням подібності? Що називають коефіцієнтом подібності? Сформулюйте і доведіть властивості перетворення подібності. Сформулюйте наслідок з властивості 2. Які фігури називають подібними? Наведіть приклади подібних фігур з повсякденного життя. Сформулюйте і доведіть властивості подібних фігур.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 23.1. (Усно.) Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$ подібні. Заповніть пропуски:

- 1) $\angle A = \dots$; 2) $\angle C = \dots$;
3) $\angle D = \dots$; 4) $\angle B = \dots$.

23.2. Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$ подібні, $\frac{AB}{KL} = 3$. Чому дорівнює відношення:

- 1) $\frac{BC}{LM}$; 2) $\frac{CD}{MN}$; 3) $\frac{AD}{KN}$?

23.3. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом 7. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F' ?

23.4. Фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. З яким коефіцієнтом фігура F' подібна фігурі F ?

23.5. Фігура F' подібна фігурі F'' з коефіцієнтом $\frac{1}{5}$, а фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F'' ?

23.6. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом 2, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом 4. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F ?

23.7. Чи подібні між собою:

- 1) два квадрати; 2) два правильних десятикутники?

23.8. Чи подібні між собою:

- 1) два рівносторонніх трикутники;
2) два правильних шестикутники?



23.9. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{3}{4}$. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F' , якщо фігури F і F'' рівні?

23.10. Периметри двох правильних п'ятикутників відносяться як 2 : 3. Сторона п'ятикутника з меншим периметром дорівнює 12 см. Знайдіть сторону п'ятикутника з більшим периметром.

23.11. Сторони двох квадратів відносяться як 4 : 3. Знайдіть периметр квадрата, сторона якого менша від сторони іншого, якщо периметр другого квадрата дорівнює 24 см.

- 23.12.** На малюнку, виконаному в масштабі $1:1000$, земельну ділянку зображено прямокутником зі сторонами 3 см і 4 см . Знайдіть площу цієї ділянки.
- 23.13.** На плані земельної ділянки у масштабі $1:2000$ відстань між точками дорівнює $3,7\text{ см}$. Обчисліть відповідну відстань на місцевості.
- 23.14.** Довжина кабінету математики – 8 м , а ширина – 5 м . Накресліть план кабінету в масштабі $1:200$.
- 23.15.** Довжина кімнати дорівнює 4 м , а ширина – 3 м . Накресліть план кімнати у масштабі $1:100$.
- 23.16.** Відстань між двома селами на місцевості – 20 км , а на карті – 2 см . Знайдіть масштаб карти.
- 23.17.** Відстань між двома містами на місцевості – 350 км , а на карті – $3,5\text{ см}$. Знайдіть масштаб карти.
- 23.18.** Чотирикутники $ABCD$ і $A'B'C'D'$ подібні, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B' = 90^\circ$, $\angle C = 130^\circ$. Знайдіть невідомі кути обох чотирикутників.
- 23.19.** Чотирикутники $KLMN$ і $K'L'M'N'$ подібні, $\angle K' = 20^\circ$, $\angle L = 100^\circ$, $\angle M' = 140^\circ$. Знайдіть невідомі кути обох чотирикутників.
- 3** **23.20.** Чи можна стверджувати, що два чотирикутники подібні, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого? Наведіть приклади.
- 23.21.** Чи можна стверджувати, що два чотирикутники подібні, якщо сторони одного з них відповідно пропорційні сторонам другого? Наведіть приклади.
- 23.22.** Сторони чотирикутника відносяться як $3:4:5:6$. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо в нього:
- 1) найбільша сторона дорівнює 12 см ;
 - 2) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см ;
 - 3) периметр дорівнює 90 см .
- 23.23.** Сторони п'ятикутника відносяться як $3:4:5:6:7$. Знайдіть сторони подібного йому п'ятикутника, якщо в нього:
- 1) найменша сторона дорівнює 15 см ;
 - 2) сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см ;
 - 3) периметр дорівнює 50 см .
-  **23.24.** Доведіть, що перетворення подібності переводить прямокутник у прямокутник, сторони якого пропорційні сторонам даного.
- 23.25.** Два прямокутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 4 см і 6 см , а одна зі сторін другого – 12 см . Знайдіть іншу сторону другого прямокутника. Скільки розв'язків має задача?
- 23.26.** Два прямокутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 3 см і 6 см , а одна зі сторін другого – 18 см . Знайдіть іншу сторону другого прямокутника. Скільки розв'язків має задача?
- 23.27.** (Усно.) Що означає масштаб $10:1$, $100:1$, $1000:1$? У яких випадках використовується цей масштаб?

23.28. $ABCD$ – прямокутник, $AB = a$, $BC = b$. Відрізок FE , де точка F належить AB , а точка E належить DC , відтинає прямокутник $CBFE$, подібний даному. Знайдіть сторону BF цього прямокутника.



23.29. Доведіть, що перетворення подібності переводить ромб у ромб, кути якого дорівнюють кутам даного.

23.30. Чи подібні два ромби, якщо в одного з них менша діагональ дорівнює стороні, а в другого – більша діагональ у $\sqrt{3}$ разів більша за сторону?

23.31. Доведіть, що перетворення подібності переводить коло в коло.

23.32. Периметри подібних п'ятикутників відносяться як $2:3$, а сума їх найбільших сторін дорівнює 30 см. Знайдіть сторони обох п'ятикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює $2:2:3:4:6$.

23.33. Периметри подібних чотирикутників відносяться як $4:3$, а різниця їх найбільших сторін дорівнює 5 см. Знайдіть сторони обох чотирикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює $2:2:3:5$.



Вправи для повторення

23.34. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо інші його сторони дорівнюють:

- 1) 17 см і 8 см;
- 2) $13b$ см і $5b$ см.

23.35. Дано відрізок AB і точку O , що йому належить, але не є його серединою. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O .

23.36. Периметр паралелограма дорівнює 50 см, а його сторони відносяться як $2:3$. Знайдіть площу паралелограма, якщо один з його кутів на 60° більший за інший.

23.37. Хорда $8\sqrt{2}$ см завдовжки стягує дугу кола, градусна міра якої 90° . Знайдіть довжину кола та площу круга, обмеженого цим колом.

23.38. Знайдіть площу квадрата, якщо сума радіусів його вписаного й описаного кіл дорівнює 7 см.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

23.39. 1) Сторона квадрата втричі більша за сторону іншого квадрата. У скільки разів площа першого квадрата більша за площу другого?

2) Площа першого квадрата у 25 разів менша від площі другого. У скільки разів сторона першого квадрата менша від сторони другого?

- 23.40. 1) Сторона правильного трикутника вдвічі менша від сторони іншого правильного трикутника. У скільки разів площа першого трикутника менша від площі другого?
 2) Площа одного правильного трикутника у 16 разів більша за площу другого правильного трикутника. У скільки разів сторона першого трикутника більша за сторону другого?



Життєва математика

- 23.41. Скільки спиць у колесі, якщо кути між сусідніми спицями дорівнюють 150° ?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 23.42. (Національна олімпіада Болгарії, 1981 р.) Бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині C трикутника ABC перетинають пряму AB у точках L і M відповідно. Доведіть, що якщо $CL = CM$, то $AC^2 + BC^2 = 4R^2$, де R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC .

§ 24. Площі подібних фігур

1. Теорема про площі подібних многокутників та її наслідки



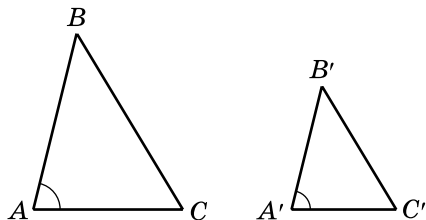
Теорема (про площі подібних многокутників). Площі подібних многокутників відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів.

Доведення. 1) Спочатку доведемо теорему для трикутників.

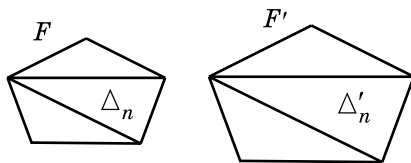
Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$, $\angle A = \angle A'$ (мал. 24.1).

Тоді $AB = k \cdot A'B'$, $AC = k \cdot A'C'$ і

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A}{\frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'} = \frac{k \cdot A'B' \cdot k \cdot A'C'}{A'B' \cdot A'C'} = k^2.$$



Мал. 24.1



Мал. 24.2

2) Розглянемо два n -кутники F і F' , подібних з коефіцієнтом k . Розіб'ємо фігуру F діагоналями, що виходять з однієї вершини, на скінченну кількість трикутників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ (мал. 24.2). Перетворенням подібності ці трикутники перейдуть відповідно у трикутники $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \dots, \Delta'_n$ фігури F' . Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{S_F}{S_{F'}} &= \frac{S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \dots + S_{\Delta_n}}{S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \dots + S_{\Delta'_n}} = \frac{k^2 S_{\Delta_1} + k^2 S_{\Delta_2} + \dots + k^2 S_{\Delta_n}}{S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \dots + S_{\Delta'_n}} = \\ &= \frac{k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \dots + S_{\Delta_n})}{S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \dots + S_{\Delta'_n}} = k^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Наслідок. Відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Цей наслідок є очевидним, оскільки відношення відповідних лінійних розмірів багатокутника дорівнює коефіцієнту подібності.

Узагалі, можна довести, що

відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Для багатокутників це твердження вже доведене, для кругів виконайте доведення самостійно. Якщо фігури не є багатокутниками, кругами або частинами кругів, то доведення є досить громіздким. Тому ми його не наводимо.

2. Застосування теореми про площі подібних багатокутників до розв'язування задач

Розглянемо задачу, під час розв'язування яких використовують теорему про площі подібних багатокутників.

Приклад 1. Сторони двох правильних трикутників відносяться як 4 : 5. Як відносяться їхні площі?

Розв'язання. Оскільки правильні трикутники подібні, то можна використати теорему про площі подібних багатокутників. Отже, відношення площ трикутників дорівнює:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 16 : 25.$$

Відповідь: 16 : 25.

Приклад 2. Площі двох подібних багатокутників відносяться як 4 : 9.

Як відносяться периметри цих багатокутників?

Розв'язання. 1) Нехай a_1 і a_2 – відповідні лінійні розміри багатокутників. Тоді:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \text{ звідки } \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} = 2 : 3.$$

2) Оскільки периметри подібних багатокутників відносяться як відповідні сторони цих багатокутників (див. приклад 1 § 23), то відношення периметрів багатокутників також дорівнює 2 : 3.

Відповідь: 2 : 3.

Приклад 3. Площа земельної ділянки на карті становить 1,2 см², масштаб карти дорівнює 1 : 1000. Яка площа земельної ділянки насправді?

Розв'язання. 1) Нехай S см² – площа ділянки.

2) Оскільки масштаб є коефіцієнтом подібності карти по відношенню до земельної ділянки, то $\frac{1,2}{S} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2$.

Тоді $S = 1,2 \cdot 1000^2 = 1\,200\,000$ (см²) = 120 (м²).

Відповідь: 120 м².



Сформулюйте та доведіть теорему про площі подібних багатокутників. Сформулюйте наслідок із цієї теореми. Як відносяться площі подібних фігур?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 24.1. Сторона першого квадрата втричі більша за сторону другого. У скільки разів площа другого квадрата менша від площі першого?
- 24.2. Сторона першого правильного трикутника вдвічі менша від сторони другого. У скільки разів площа другого правильного трикутника більша за площу першого?
- 24.3. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як 4 : 7. Як відносяться їхні площі?
- 24.4. Сторони двох правильних шестикутників відносяться як 5 : 3. Як відносяться їхні площі?
- 2** 24.5. Площі двох подібних багатокутників відносяться як 4 : 3. Як відносяться їхні відповідні лінійні розміри?
- 24.6. Площі двох подібних багатокутників відносяться як 7 : 9. Як відносяться їхні відповідні лінійні розміри?
- 24.7. Площі двох правильних трикутників відносяться як 25 : 36. Як відносяться відповідні медіани цих трикутників?
- 24.8. Площі двох квадратів відносяться як 9 : 4. Як відносяться діагоналі цих квадратів?

- 3** 24.9. Сторона одного квадрата дорівнює діагоналі іншого квадрата. Як відносяться площі цих квадратів?
- 24.10. Висота одного правильного трикутника дорівнює стороні іншого правильного трикутника. Як відносяться площі цих трикутників?
- 24.11. Відповідні сторони двох подібних багатокутників відносяться як 2 : 3. Площа першого з них становить 48 см². Знайдіть площу другого багатокутника.
- 24.12. Площі двох подібних багатокутників відносяться як 25 : 4. Одна зі сторін першого багатокутника дорівнює 15 см. Знайдіть відповідну їй сторону другого багатокутника.
- 24.13. Периметри двох подібних багатокутників відносяться як 3 : 4, а сума їх площ – 50 см². Знайдіть площу кожного з багатокутників.
- 24.14. Різниця площ двох подібних багатокутників дорівнює 45 см². Знайдіть площу кожного з багатокутників, якщо їхні відповідні сторони відносяться як 5 : 4.
- 4** 24.15. Площа лісу дорівнює 20 га, а на карті ліс займає площу 20 см². Знайдіть масштаб карти.
- 24.16. План парку виконано в масштабі 1 : 1000. У скільки разів площа парку більша за площу цього плану?
- 24.17. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC , ділить його на дві рівновеликі фігури. Знайдіть відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами AC і CB трикутника, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см.
- 24.18. Висота трикутника ABC , що виходить з вершини C , дорівнює $6\sqrt{2}$ см. На якій відстані від точки C треба провести пряму, паралельну стороні AB , щоб ця пряма розділила трикутник на дві рівновеликі частини?



Вправи для повторення

- 24.19. При переміщенні рівносторонній трикутник MNK перейшов у трикутник $M'N'K'$. Знайдіть кути трикутника $M'N'K'$.
- 24.20. Периметри подібних трикутників відносяться як 3 : 5, а сума їх найменших сторін дорівнює 32 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 4 : 7 : 8.



Життєва математика

- 24.21. При піднятті води з колодязя вал робить 14 обертів. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 25 см. (Для спрощення обчислень прийміть $\pi \approx 3$.)



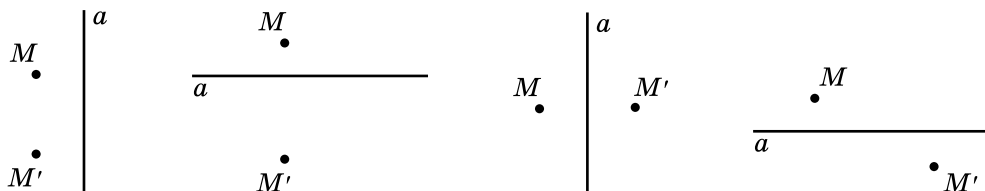
Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 24.22. Спільну хорду двох кіл, що перетинаються, видно з їх центра під кутами 90° і 60° . Знайдіть радіуси кіл, якщо відстань між їх центрами дорівнює $\sqrt{3} + 1$. Скільки випадків слід розглянути?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 18–24)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1.** На якому з малюнків точки M і M' симетричні відносно прямої a ?



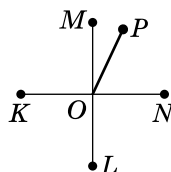
A.

Б.

B.

Γ.

2. У яку точку при повороті навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки переходить точка N (мал. 1)?



Мал. 1

- A. K** **Б. M** **В. P** **Г. L**

3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 1$, $y' = y + 3$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $T(2; -5)$?

- A.** $T'(3; 8)$ **Б.** $T'(-2; 1)$ **В.** $T'(5; -6)$ **Г.** $T'(1; -2)$

- 2** 4. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кут A' трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC є рівнобедреним і його кут при вершині C дорівнює 140° .

- A. 20°** **Б. 40°** **В. 140°** **Г. 100°**

5. Укажіть координати точки, що симетрична точці $M(-1; 5)$ відносно початку координат.

- A. (5; -1) Б. (1; 5) В. (-1; -5) Г. (1; -5)**

- 6. Медіани двох правильних трикутників відносяться як 2 : 7. Як відносяться площі цих трикутників?**

- A. 4:7 Б. 2:7 В. 4:49 Г. 2:49**

- 3** 7. Точки $A(-2; y)$ і $B(x; 5)$ симетричні відносно осі абсцис. Знайдіть x і y .

- A.** $x = -2, y = 5$ **B.** $x = 2, y = 5$

- B.** $x = -2, y = -5$ **Г.** $x = 2, y = -5$

8. При паралельному перенесенні точка $A(-2; 3)$ переходить у точку $A'(4; 0)$. У яку точку при такому паралельному перенесенні перейде точка $B(3; -1)$?

- A.** $B'(-3; 2)$ **Б.** $B'(9; -4)$ **В.** $B'(-9; 4)$ **Г.** $B'(3; -2)$

9. Сторони п'ятикутника відносяться як $3:4:5:6:7$. Знайдіть найменшу сторону подібного йому п'ятикутника, периметр якого дорівнює 75 см.

- A. 3 cm Б. 12 cm В. 21 cm Г. 9 cm**

4 10. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $x - 2y - 10 = 0$ відносно початку координат.

А. $x - 2y + 10 = 0$

Б. $x + 2y - 10 = 0$

В. $x + 2y + 10 = 0$

Г. $x - 2y = 0$

11. Виконали паралельне перенесення прямої $3x - y = 0$. Запишіть рівняння цієї прямої, якщо вона проходить через точку $M(-1; 4)$.

А. $x - 3y + 13 = 0$

Б. $3x - y + 7 = 0$

В. $3x - y - 7 = 0$

Г. $3x + y - 1 = 0$

12. Периметри двох подібних трикутників відносяться як $2:3$, а сума їхніх найбільших сторін дорівнює 30 см. Знайдіть периметр другого трикутника, якщо сторони першого відносяться як $4:5:6$.

А. 30 см

Б. 40 см

В. 45 см

Г. 60 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2 13. Задано точки $A(-4; 3)$, $B(6; -1)$, $C(4; -3)$, $D(6; 1)$. До кожного початку речення (1–3) підберіть його закінчення (А–Г).

Початок речення

Закінчення речення

1. Точки A і C ...

А. симетричні відносно осі абсцис

2. Точки B і C ...

Б. симетричні відносно осі ординат

3. Точки B і D ...

В. симетричні відносно початку координат

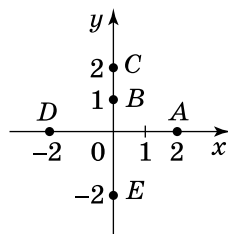
Г. симетричні відносно точки $O(5; -2)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 18–24

1 1. Дано пряму a і точку M , що їй не належить. Побудуйте точку M' , симетричну точці M відносно прямої a .

2. У яку точку при повороті навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки перейде точка A (мал. 1)?

3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 2$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $L(-3; 8)$?



Мал. 1

2 4. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кути трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC рівнобедрений з основою AC , а кут B дорівнює 40° .

5. Дано відрізок MN , $M(-4; 2)$, $N(-2; 5)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрітку MN відносно початку координат, та знайдіть координати його кінців.

6. Площі двох правильних трикутників відносяться як 9:4. Як відносяться висоти цих трикутників?

3 7. Точки $A(x; -6)$ і $B(4; y)$ симетричні відносно осі ординат. Знайдіть x і y .

8. Сторони чотирикутника відносяться як 2:3:4:6. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, периметр якого дорівнює 45 см.

4 9. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $3x - 4y - 24 = 0$ відносно початку координат.

Додаткові завдання

4 10. Периметри двох подібних п'ятикутників відносяться як 3:4, а сума їхніх найменших сторін дорівнює 28 см. Знайдіть сторони кожного з п'ятикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 2:5:6:7:9.

11. Виконали паралельне перенесення прямої $2x + y - 8 = 0$. Запишіть рівняння прямої, яку при цьому отримали, якщо вона проходить через точку $A(5; 1)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 5

До § 18

1 1. При переміщенні відрізок AB перейшов у відрізок $A'B'$. Чи рівні між собою відрізки AB і $A'B'$?

2. При переміщенні фігура F перейшла у фігуру F' . При другому переміщенні фігура F' перейшла у фігуру F'' . Чи рівні між собою фігури F і F'' ?

2 3. $ABCD$ – квадрат. Чи існує переміщення, яке переводить:

- 1) сторону AB у сторону BC ;
- 2) кут ABC у кут BCD ?

4. Три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника. Чи існує переміщення, яке переводить перший трикутник у другий?

3 5. Чи рівні між собою два квадрати, якщо:

- 1) рівні їхні периметри;
- 2) рівні їхні площі;
- 3) діагональ одного з них дорівнює діагоналі другого;
- 4) діагональ одного з них дорівнює стороні другого?

6. Периметри двох ромбів рівні. Чи завжди існує переміщення, яке переводить один з них у другий?

4 7. Коло із центром у точці O описано навколо квадрата. Як задати відповідність між точками кола і квадрата так, щоб ця відповідність була перетворенням фігур?

8. Чи існує переміщення, яке переводить кут BAC у кут BCA , якщо $A(2; -3)$, $B(-2; -6)$, $C(-5; -2)$?

До § 19

1 9. Побудуйте точку $A(-2; 5)$ та точку, їй симетричну відносно початку координат.

2 10. Дано відрізок AB і точку O . Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O , якщо:

1) точка O не належить відрізку AB ;

2) точка O належить відрізку AB .

11. Чи симетричні точки A і A' відносно початку координат, якщо:

1) $A(4; -5)$ і $A'(-4; -5)$;

2) $A(-3; 2)$ і $A'(3; -2)$?

12. Знайдіть координати точки A' , симетричної точці $A(-4; 5)$ відносно точки $O(2; -9)$.

13. Чи може пряма при симетрії відносно точки перейти сама в себе?

3 14. Точки A і A' симетричні відносно початку координат. Знайдіть довжину відрізка AA' , якщо $A(-3; 4)$.

15. Запишіть рівняння прямої, у яку при симетрії відносно початку координат переходить пряма:

1) $x = 3$;

2) $y = -2$.

16. Відрізки AB і CD симетричні відносно точки O . Доведіть, що прямі AB і CD паралельні.

4 17. Чи може точка перетину діагоналей трапеції бути її центром симетрії?

18. Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці лежать на двох даних прямих, що перетинаються.



19. Дано точки A і O . Використовуючи лише циркуль, побудуйте точку A' , у яку переходить точка A при симетрії відносно точки O .

До § 20

1 20. Побудуйте точку $A(3; -4)$ та точки, симетричні точці A відносно координатних осей.

2 21. Побудуйте коло радіуса 3 см і пряму, що його не перетинає. Побудуйте коло, симетричне даному відносно цієї прямої.

22. Накресліть тупокутний трикутник ABC з тупим кутом C . Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої BC .

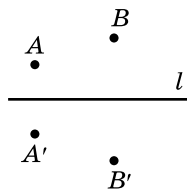
3 23. На кожній зі сторін кута позначили по точці на однаковій відстані від його вершини. Доведіть, що ці точки симетричні відносно прямої, яка містить бісектрису кута.

24. Складіть рівняння кола, симетричного відносно осі абсцис колу з радіусом 2 і центром у точці $O(-2; 3)$.

25. Осі координат є осями симетрії прямокутника. Одна з його вершин має координати $(-3; 4)$. Знайдіть координати інших вершин прямокутника.

4 26. Прямі AC і BD – осі симетрії чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

27. Точки A і A' , B і B' попарно симетричні відносно прямої l (мал. 1). Доведіть, що навколо чотирикутника $ABB'A'$ можна описати коло.



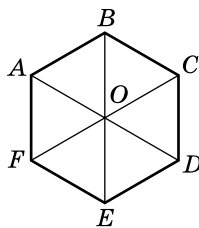
Мал. 1

28. Доведіть, що фігура, яка має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, має і центр симетрії.

29. Точки A і B лежать по один бік від прямої l . Знайдіть на цій прямій таку точку C , щоб значення суми $AC + CB$ було найменшим.

До § 21

1 30. $ABCDEF$ – правильний шестикутник (мал. 2). У яку точку при повороті навколо точки O :



Мал. 2

1) на кут 60° за годинниковою стрілкою перейде точка A ; точка C ;

2) на кут 120° проти годинникової стрілки перейде точка E ; точка B ?

2 31. Дано відрізок AB і точку O , яка йому не належить. Побудуйте відрізок $A'B'$, у який перейде відрізок AB при повороті навколо точки O :

1) на 90° проти годинникової стрілки;

2) на 20° за годинниковою стрілкою.

32. У яку точку переходить точка $C(-5; 0)$ при повороті навколо початку координат:

1) на 90° за годинниковою стрілкою;

2) на 90° проти годинникової стрілки;

3) на 180° ?

3 33. Побудуйте фігуру, у яку переходить квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на 45° за годинниковою стрілкою.

34. У результаті повороту навколо точки A рівносторонній трикутник ABC перейшов у трикутник ACD . На який кут виконали поворот?

4 35. Знайдіть координати точки C' , у яку перейде точка $C(2; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут 60° проти годинникової стрілки.

36. Складіть рівняння прямої, яку отримають у результаті повороту прямої $2x - y + 1 = 0$ навколо початку координат на кут 90° :

1) за годинниковою стрілкою;

2) проти годинникової стрілки.



37. Дано відрізок AB . За допомогою тільки циркуля і лінійки без поділок виконайте поворот навколо його середини на кут 135° за годинниковою стрілкою.

До § 22

1

38. Які з тверджень правильні:

- 1) існує паралельне перенесення, за якого одна бічна сторона трикутника переходить в іншу його бічну сторону;
- 2) при паралельному перенесенні зберігається градусна міра кута;
- 3) існує паралельне перенесення, за якого сторона ромба переходить у протилежну сторону;
- 4) існує паралельне перенесення, за якого квадрат переходить у ромб, жоден з кутів якого не є прямим?

39. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$, $y' = y + 2$. У які точки при цьому паралельному перенесенні перейдуть кінці відрізка AB , якщо:

- 1) $A(3; -2)$, $B(0; 0)$;
- 2) $A(2; 5)$, $B(1; -3)$?

2

40. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 5$. При цьому паралельному перенесенні трикутник ABC переходить у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть координати вершин трикутника ABC , якщо $A'(3; -5)$, $B'(0; 0)$, $C'(2; -7)$.

41. При паралельному перенесенні точка $A(2; -7)$ перейшла у точку $A'(-3; 5)$.

- 1) Запишіть формули цього паралельного перенесення.
- 2) У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A'(-3; 5)$?

42. Дано точки $A(2; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(5; -13)$. Запишіть формули паралельного перенесення, за якого образом точки A є середина відрізка BC .

3

43. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-3; 5)$, $B(4; 7)$, $C(-1; 2)$. Виконайте таке паралельне перенесення трикутника, за якого точка A переходить у точку C . Зробіть малюнок і запишіть координати вершин отриманого трикутника.

44. Дано коло із центром у точці $O(-1; 2)$, яке проходить через точку $B(3; 5)$. Запишіть рівняння кола, у яке переходить дане коло при паралельному перенесенні, що задано формулами: $x' = x$, $y' = y + 2$.

4

45. При паралельному перенесенні точка $A(5; -2)$ перейшла в точку $A'(4; 0)$. Запишіть рівняння образу кривої $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ при такому паралельному перенесенні та побудуйте його.

46. Вершини трикутника ABC мають координати $A(0; 4)$, $B(3; 0)$, $C(3; 4)$. Після паралельного перенесення центр вписаного у трикутник кола перейшов у початок координат. У яку точку перейшов центр кола, описаного навколо трикутника?

- 1** 47. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{2}{3}$. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F' ?
48. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{2}{3}$, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{3}{4}$. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F ?
- 2** 49. Периметри двох правильних трикутників відносяться як 5 : 6. Сторона трикутника з меншим периметром дорівнює 50 см. Знайдіть сторону трикутника, периметр якого більший.
50. Довжина газопроводу – 450 км. Зобразіть цей газопровід відрізком у масштабі 1 : 10 000 000.
51. Чотирикутник $A'B'C'D'$ подібний чотирикутнику $ABCD$ з коефіцієнтом 2, $AB = 5$ см, $B'C' = 12$ см, $CD = 7$ см, $AD' = 4$ см. Знайдіть невідомі сторони обох чотирикутників.
- 3** 52. Сторони шестикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7. Знайдіть сторони подібного йому шестикутника, якщо у нього:
- 1) сума двох рівних сторін дорівнює 40 см;
 - 2) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 8 см;
 - 3) периметр дорівнює 90 см.
53. Чи подібні прямокутники, якщо сторони одного з них дорівнюють 4 см і 3 см, а сторона другого дорівнює 12 см і його діагональ дорівнює 15 см?
54. В одному з ромбів один з кутів утричі більший за інший, а у другому ромбі – один з кутів на 80° більший за інший. Чи подібні ці ромби?
- 4** 55. Рамка для фотографій – прямокутної форми (прямокутник не є квадратом). Чи подібні зовнішній і внутрішній прямокутники цієї рамки, якщо ширина рамки скрізь однакова?
56. Доведіть, що перетворення подібності переводить паралельні прямі в паралельні прямі.
57. Середня лінія ділить трапецію на дві трапеції.
- 1) Чи подібні між собою трапеції, що утворилися?
 - 2) Чи подібна будь-яка із цих трапецій даній?
58. Два многокутники розбито на однакову кількість попарно подібних між собою трикутників. Чи можна стверджувати, що ці многокутники подібні?
59. У трапеції з основами a і b проведено відрізок, паралельний основам трапеції. Цей відрізок розбиває трапецію на дві трапеції, подібні між собою. Знайдіть довжину цього відрізка.

До § 24

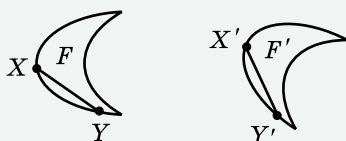
- 1** 60. Сторона одного правильного шестикутника у 4 рази більша за сторону другого. У скільки разів площа першого шестикутника більша за площу другого?
61. Сторони двох правильних десятикутників відносяться як $2:9$. Як відносяться їхні площі?
- 2** 62. Площі двох квадратів відносяться як $4:7$. Як відносяться їхні периметри?
63. Площі двох правильних трикутників відносяться як $16:9$. Як відносяться радіуси кіл, описаних навколо цих трикутників?
64. Яку частину площі даного трикутника складає площа трикутника, що відтинається від даного його середньою лінією?
- 3** 65. Сторони двох квадратів відносяться як $3:4$, а площа одного з них дорівнює 144 см^2 . Знайдіть площу другого квадрата. Скільки розв'язків має задача?
66. Менша діагональ одного правильного шестикутника дорівнює стороні другого. Знайдіть відношення площ цих шестикутників.
67. Площі двох квадратів відносяться як $9:4$, а сума їх периметрів – 80 см . Знайдіть сторону кожного з квадратів.
68. Площа озера на карті становить $1,5\text{ см}^2$, масштаб карти дорівнює $1:2000$. Яка площа озера?
69. Карту, яку виконано в масштабі $1:20\ 000$, перемалювали в масштабі $1:60\ 000$. У скільки разів при цьому збільшиться або зменшиться площа будь-якої земельної ділянки на карті?
70. Знайдіть відношення площі трикутника до площі трапеції, яка відтинається від цього трикутника його середньою лінією.
- 4** 71. Знайдіть відношення площі трикутника і трапеції, на які трикутник ділиться прямою, проведеною через точку перетину медіан паралельно одній з його сторін.
72. Медіана трикутника дорівнює 10 см . Пряма, паралельна медіані, ділить трикутник на частини, площі яких відносяться як $1:7$. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.
73. Побудуйте чотирикутник, подібний даному, площа якого у $2,25$ рази більша за площу даного.



Головне в розділі 5

ПЕРЕМІЩЕННЯ (РУХ) ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. РІВНІСТЬ ФІГУР

Перетворення однієї фігури в іншу називають **переміщенням (рухом)**, якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X і Y першої фігури в точки X' і Y' другої так, що $XY = X'Y'$.



Теорема 1 (властивість переміщення). Точки, що лежать на прямій, під час переміщення переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розташування.

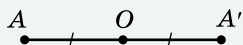
Наслідок. Під час переміщення прямі переходять у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.

Теорема 2 (властивість переміщення). Під час переміщення кут переходить у рівний йому кут.

Дві фігури називають **рівними**, якщо при переміщенні вони переходять одна в одну.

СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

Дві точки A і A' називають **симетричними відносно точки O** , якщо O є серединою відрізка AA' .

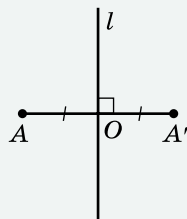


Теорема (про перетворення симетрії відносно точки). Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Дві точки A і A' називають **симетричними відносно прямої l** , якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка AA' .

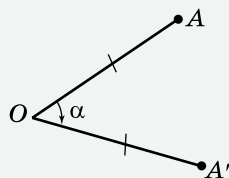
Теорема (про перетворення симетрії відносно прямої). Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.



ПОВОРОТ

Поворотом навколо точки O на кут α називають перетворення, за якого точка A переходить у точку A' так, що $OA = OA'$ і $\angle AOA' = \alpha$.

Точку O називають **центром повороту**, а кут AOA' – **кутом повороту**.

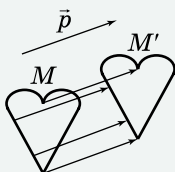


Теорема (про поворот навколо точки). Перетворення повороту є переміщенням.

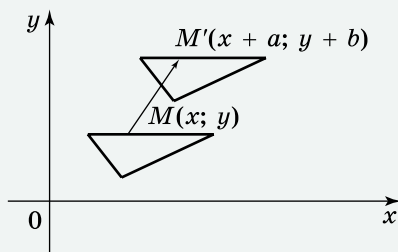
ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Нехай дано вектор $\vec{p}$.

Паралельним перенесенням на вектор $\vec{p}$ називають таке перетворення, за якого кожній точці M відповідає така точка M' , що $\overline{MM'} = \vec{p}$.



Паралельним перенесенням називають таке перетворення фігури, за якого її довільна точка $M(x; y)$ переходить у точку $M'(x + a; y + b)$, де a і b — одні й ті самі для всіх точок фігури.



Формули паралельного перенесення:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Теорема (про паралельне перенесення). Паралельне перенесення є переміщенням.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ВЛАСТИВОСТІ ПОДІБНИХ ФІГУР

Властивості перетворення подібності

Перетворення фігури F у фігуру F' називають **перетворенням подібності**, або **подібністю**, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

1. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$.
2. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

Н а с л і д о к. Перетворення подібності переводить прямі у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

3. При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

Дві фігури називають *подібними*, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

Властивості подібних фігур

1. Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом 1.
2. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k , то фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.
3. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1 , а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2 , то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом $k_1 k_2$.
4. У подібних багатокутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.
5. Правильні багатокутники з однаковою кількістю сторін подібні.

ПЛОЩІ ПОДІБНИХ ФІГУР

Т е о р е м а (про площі подібних багатокутників). Площі подібних багатокутників відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних розмірів.

Жінки в науці: Краса симетрії та шлях до відкриттів

Ванеєва Олена Олександрівна – видатна українська науковиця та яскравий приклад жінки в сучасній науці. Вона є докторкою фізико-математичних наук (з 2020 р.), а також провідним науковим співробітником Інституту математики НАН України (з 2021 р.) та членом-кореспондентом НАН України (з 2024 р.).

Її досягнення були відзначені на міжнародному рівні: Олена є лауреаткою престижних премій L'OREAL-UNESCO «Для жінок у науці» (і української, і міжнародної «International Rising Talents», 2018 р.). Вона увійшла до 15 найвидатніших молодих талантів світу, нагороджених цією премією, і гідно представила Україну на світовій арені в штаб-квартирі ЮНЕСКО в Парижі.

Окрім наукової діяльності, Олена Ванеєва є виконавчою редакторкою Українського математичного журналу, активною популяризаторкою математики та наставницею у проєкті STEM Girls, надихаючи дівчат обирати технічні спеціальності.

Олена Ванеєва досліджує нелінійні моделі математичної фізики та біології. Її робота пов'язана з пошуком математично красивих рівнянь та розробкою нових підходів для розв'язання складних проблем симетрійного аналізу. Тож критерієм краси рівняння для Олени Ванеєвої є саме симетрія, яка дає змогу знаходити елегантні та ефективні рішення.

Цікаво, що Олена не одразу зрозуміла, що хотіла б займатися математикою. У дитинстві їй подобалася біологія, а її твори з літератури зачитувалися в класі як зразкові. Проте приблизно з дев'ятого класу в дівчини з'явився потяг до математики, і, готуючись до іспиту, вона остаточно зрозуміла, що понад усе любить розв'язувати математичні задачі.

На початку своєї кар'єри Олена намагалася розв'язати одну складну задачу, пов'язану з рівняннями Дірака, які описують рух електронів у графені (надтонкому матеріалі з унікальними властивостями). Їй вдалося розв'язати цю задачу лише через 10 років! Цим математикиня на власному прикладі показала, що здаватися не треба, а варто наполегливо намагатися розв'язати поставлене завдання.

У своїх інтерв'ю Олена Ванеєва щоразу наголошує, що наукою займатися слід обережно, адже виникає своєрідна залежність: «не розв'язуєш рівняння два тижні – і відчуваєш недостатність дофаміну» (дофамін – це нейромедіатор, що викликає відчуття задоволення).

Своїм прикладом Олена доводить, що, займаючись улюбленою справою, можливо досягти успіху в різних сферах, зокрема в науці. Вона є «математичною музою» для багатьох дівчат, захоплюючи їх своєю любов'ю до математики. Головне – любити те, чим займаєшся, адже це підштовхуватиме до нових відкриттів та звершень. І тоді насправді можливо все.



Олена Ванеєва

РОЗДІЛ 6

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **згадаєте** прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду, циліндр, конус, кулю;
- **ознайомитеся** з поняттями площини, многогранника, прямої призми;
- **дізнаєтеся** про взаємне розміщення у просторі двох прямих, прямої і площини, двох площин;
- **навчитеся** знаходити площі поверхонь та об'єми прямої призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі.

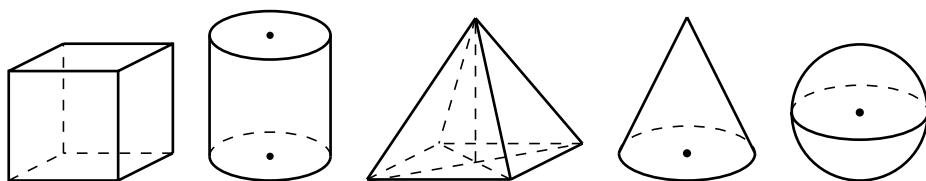
§ 25. Предмет стереометрії. Основні поняття стереометрії

1. Предмет стереометрії

Шкільний курс геометрії складається з двох частин: *планіметрії* і *стереометрії*. Слово «стереометрія» утворене від грецьких слів *stereos* – просторовий і *metreo* – міряю.

Стереометрія – це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури простору.

Це такі фігури, у яких не всі точки містяться в одній площині, наприклад: куб, циліндр, піраміда, конус, куля (мал. 25.1).

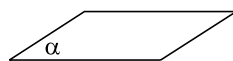


Мал. 25.1

У цьому розділі розглянемо початкові відомості з курсу стереометрії. Основними фігурами стереометрії є *точка*, *пряма* і *площина*.

2. Прямі та площини у стереометрії

Нагадаємо, що уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою, вона не має краю і не має товщини. На малюнках зображують тільки частину площини – зазвичай паралелограмом (мал. 25.2); позначають площини грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) тощо.



Мал. 25.2

Як і в планіметрії,

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того тільки одну (мал. 25.3).

Отже, дві точки A і B (мал. 25.3) визначають положення єдиної прямої, але вони не визначають положення єдиної площини. Через дві точки A і B можна провести безліч площин – площини α , β , γ (мал. 25.4).

Єдину площину можна провести:

1) **через дві прямі, що перетинаються** (мал. 25.5);

2) **через дві паралельні прямі** (мал. 25.6);

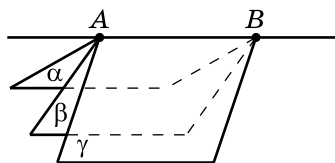
3) **через пряму і точку, що не лежить на цій прямій** (мал. 25.7);

4) **через три точки, що не лежать на одній прямій** (мал. 25.8).

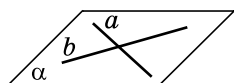
Площину, що проходить через точки A , B і C , які не лежать на одній прямій, іноді називають площиною ABC .



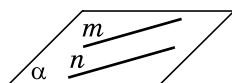
Мал. 25.3



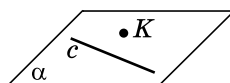
Мал. 25.4



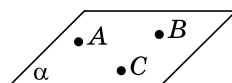
Мал. 25.5



Мал. 25.6



Мал. 25.7

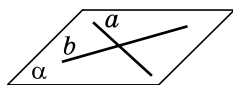


Мал. 25.8

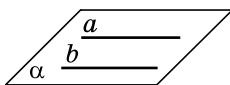
? Що вивчає стереометрія? • Які основні фігури стереометрії? • Скільки прямих і скільки площин можна провести через дві точки? • Через які геометричні фігури можна провести єдину площину?

§ 26. Взаємне розміщення прямих у просторі

Із курсу планіметрії відомо, що дві різні прямі, які лежать в одній площині, можуть або *перетинатися* (мал. 26.1), або бути *паралельними* (мал. 26.2).

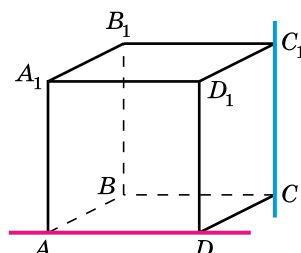


Мал. 26.1



Мал. 26.2

У стереометрії можливий і третій випадок. Розглянемо фігуру, відому нам з молодших класів, – прямокутний паралелепіпед (мал. 26.3). Прямі AD і CC_1 не перетинаються і не паралельні, вони не лежать в одній площині.



Мал. 26.3

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають *мимобіжними*.

На малюнку 26.3 є ще пари мимобіжних прямих: AD і BB_1 , AB і CC_1 , BB_1 і DC та інші.

Як і в планіметрії,

дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 26.3 є пари перпендикулярних прямих: $AD \perp AB$, $AD \perp AA_1$, $AB \perp AA_1$, $AD \perp DD_1$ та інші.

Приклад. Прямі AB , AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка CD , якщо $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $BD = \sqrt{281}$ см.

Розв'язання (мал. 26.4).

1) У $\triangle ABC$ ($\angle A = 90^\circ$):

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ (см)}.$$

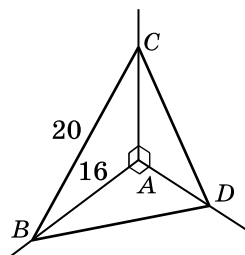
2) У $\triangle ABD$ ($\angle A = 90^\circ$):

$$AD = \sqrt{BD^2 - BA^2} = \sqrt{(\sqrt{281})^2 - 16^2} = 5 \text{ (см)}.$$

3) У $\triangle ACD$ ($\angle A = 90^\circ$):

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 13 см.



Мал. 26.4

? Як можуть бути розміщені прямі у просторі? **○** Які прямі називають мимобіжними? **○** Назвіть кілька пар мимобіжних прямих на малюнку 26.3. **○** Які прямі називають перпендикулярними? **○** Назвіть кілька пар перпендикулярних прямих на малюнку 26.3.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 26.1. На малюнку 26.3 зображено прямокутний паралелепіпед.

1) Назвіть усі ребра, паралельні ребру A_1D_1 .

2) Яке взаємне розміщення прямих AB і BB_1 , AB і DC , AB і CC_1 ?

26.2. На малюнку 26.3 зображено прямокутний паралелепіпед.

1) Назвіть усі ребра, паралельні ребру AB .

2) Яке взаємне розміщення прямих AD і A_1D_1 , A_1D_1 і D_1C_1 , A_1B_1 і DD_1 ?

26.3. Скільки різних прямих можна провести через одну точку?

26.4. Скільки різних площин можна провести через одну точку?

26.5. Намалюйте площину α , що проходить через точку B і пряму c .

26.6. Намалюйте площину β , що проходить через дві прямі m і n , які перетинаються.

2 26.7. (Усно.) З довкілля наведіть кілька прикладів:

1) паралельних прямих;

2) мимобіжних прямих;

3) перпендикулярних прямих.

- 26.8.** (Усно.) Чому стілець на трьох ніжках не хитається, а стілець на чотирьох ніжках інколи буває нестійким?
- 26.9.** Чому мотоцикл з коляскою стоїть надійно, а для його закріплення без коляски потрібна додаткова опора?
- 26.10.** Назвіть на малюнку 26.3 три прямі, мимобіжні із прямою DD_1 .
- 26.11.** Назвіть на малюнку 26.3 три прямі, мимобіжні із прямою BC .
- 3** **26.12.** Прямі AB і CD мимобіжні. Доведіть, що прямі AC і BD мимобіжні.
- 26.13.** Точка M не належить площині, що проходить через точки A , B і C , які не лежать на одній прямій. Доведіть, що прямі MA і BC мимобіжні.
- 26.14.** Прямі AB , AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка BC , якщо:
- 1) $AD = 6$ см, $DC = 14$ см, $AB = 3$ см;
 - 2) $BD = 4,5$ см, $CD = 8$ см, $AB = 2,5$ см.
- 26.15.** Прямі AB , AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка BD , якщо:
- 1) $BC = 17$ см, $AC = 15$ см, $AD = 6$ см;
 - 2) $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $DC = 16$ см.
- 4** **26.16.** Прямі a і b не лежать в одній площині, та прямі b і c не лежать в одній площині. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c ? Розгляньте усі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.
- 26.17.** Прямі a і b паралельні. Пряма c перетинає пряму a . Яким може бути взаємне розміщення прямих c і b ? Розгляньте усі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.
- 26.18.** Скільки різних прямих визначають усі пари вершин куба?



Вправи для повторення

- 26.19.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 14 см і 17 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, сума найбільшої та найменшої сторін якого дорівнює 70 см.
- 26.20.** Кут, утворений медіаною і висотою, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює α . Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює c .



Життєва математика

- 26.21.** Ретрансляційна вежа спирається на основу у формі кільця. Радіус зовнішнього кола дорівнює 15 м, а внутрішнього кола – 6 м. Знайдіть площу фундаменту вежі з точністю до десятих м^2 .





Цікаві задачі – поміркуй одначе

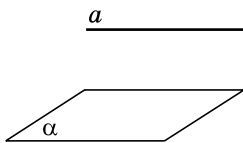
26.22. Один з кутів трикутника дорівнює 120° , а його сторони утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть відношення сторін трикутника.

§ 27. Взаємне розміщення прямої і площини. Перпендикуляр до площини

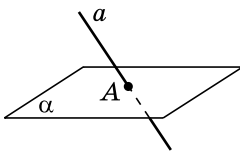
1. Взаємне розміщення прямої і площини

Існує три випадки взаємного розміщення прямої і площини.

1. Пряма a не має з площиною α спільних точок (мал. 27.1). У цьому разі пряму називають *паралельною площині*. Це записують так: $a \parallel \alpha$.
2. Пряма a має з площиною α лише одну спільну точку A (мал. 27.2). У цьому разі кажуть, що пряма і площина *перетинаються в точці A* .
3. Кожна точка прямої a належить площині α (мал. 27.3). Тоді кажуть, що пряма *лежить у площині*.



Мал. 27.1



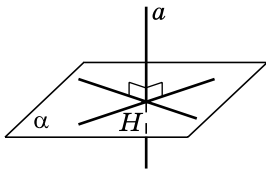
Мал. 27.2



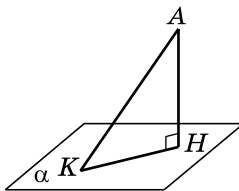
Мал. 27.3

2. Пряма і площина, перпендикулярні між собою

Якщо пряма a перетинає площину α у точці H так, що кожна пряма, яка лежить у площині α і проходить через точку H , перпендикулярна до прямої a (мал. 27.4), то кажуть, що *пряма a перпендикулярна до площини α* . Це записують так: $a \perp \alpha$.



Мал. 27.4



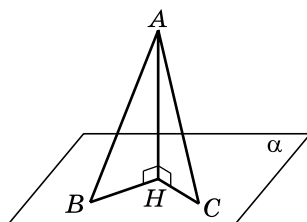
Мал. 27.5

Нехай пряма AH перпендикулярна до площини α , причому точка H належить площині α (мал. 27.5). У цьому разі відрізок AH називають *перпендикуляром*, проведеним з точки A до площини α . Довжину цього перпендикуляра називають *відстанню від точки A до площини α* .

Точку H називають *основою перпендикуляра*. Відрізок, що сполучає точку A з будь-якою іншою точкою K площини α , називають *похилою*, проведеною з точки A до площини α . Точку K називають *основою похилої*, відрізок HK називають *проекцією похилої*.

Приклад. З точки до площини проведено дві похилі 13 см і 20 см завдовжки. Проекція більшої похилої на площину дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини та проекцію другої похилої на цю площину.

Розв'язання. Нехай з точки A проведено перпендикуляр AH до площини α та похилі AB і AC до цієї самої площини (мал. 27.6). За умовою $AB = 13$ см, $AC = 20$ см, $HC = 16$ см.



Мал. 27.6

1) У $\triangle AHC$ ($\angle H = 90^\circ$): $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см). Отже, відстань від точки до площини дорівнює 12 см.

2) У $\triangle AHB$ ($\angle H = 90^\circ$): $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). Отже, проекція другої похилої на площину дорівнює 5 см.

Відповідь: 12 см, 5 см.

Як можуть бути розміщені у просторі пряма і площина? У якому разі кажуть, що пряма перпендикулярна до площини? Поясніть, який відрізок називають перпендикуляром до площини, проведеним із даної точки. Що називають основою перпендикуляра? Поясніть, який відрізок називають похилою, проведеною до даної площини. Що називають основою похилої? Що називають проекцією похилої?



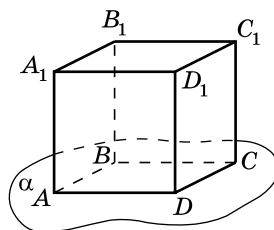
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 27.1. Покажіть на моделях із довідки прямі і площини:

- 1) паралельні між собою;
- 2) перпендикулярні між собою.

27.2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 27.7). Назвіть дві прямі:

- 1) паралельні площині α ;
- 2) які лежать у площині α ;
- 3) перпендикулярні до площини α .



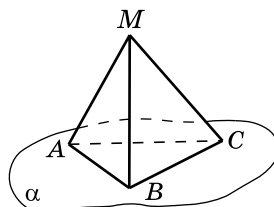
Мал. 27.7

27.3. Точки A , B і C лежать у площині α , а точка M не лежить у цій площині (мал. 27.8). Укажіть три прямі:

- 1) які лежать у площині α ;
- 2) які перетинають площину α .

27.4. AH – перпендикуляр, проведений з точки A до площини α , AK – похила (див. мал. 27.5). Знайдіть KH , якщо $AH = 6$ см, $AK = 10$ см.

27.5. AH – перпендикуляр, проведений з точки A до площини α , AK – похила (див. мал. 27.5). Знайдіть AK , якщо $AH = 15$ см, $KH = 8$ см.



Мал. 27.8

- 2** 27.6. Прямі a і b – паралельні. Пряма a лежить у площині α . Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α ?
- 27.7. Прямі a і b – паралельні. Пряма a перетинає площину α . Яке взаємне розміщення прямої b і площини α ?
- 27.8. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 5 см і 7 см. Знайдіть відстань від площини до середини відрізка.
- 27.9. Через точку B , яка не лежить у площині α , проведено пряму b , паралельну площині α . Скільки існує в площині α прямих, паралельних прямій b ?
- 27.10. Точка C не належить площині α . Скільки існує прямих, які проходять через точку C і паралельні площині α ?
- 3** 27.11. З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 5 см і 7 см, а різниця проєкцій похилих – 4 см. Знайдіть проєкції похилих та відстань від цієї точки до площини.
- 27.12. З точки до площини проведено дві похилі, сума довжин яких дорівнює 24 см. Знайдіть довжини похилих та відстань від точки до площини, якщо проєкції цих похилих дорівнюють 10 см і 2 см.
- 27.13. Чи можна стверджувати, що пряма, яка паралельна даній площині, паралельна і кожній прямій цієї площини?
- 27.14. Чи можна стверджувати, що пряма, паралельна даній площині, паралельна нескінченній кількості прямих цієї площини?
- 4** 27.15. Вершини A , B і C прямокутника $ABCD$ розміщені від площини α , яка не перетинає площину прямокутника, відповідно на відстанях 5 см, 4 см і 7 см. На яких відстанях від площини розміщені точка перетину діагоналей прямокутника і вершина D ?
- 27.16. Вершини M , N і K квадрата $MNKL$ розміщені від площини β , яка не перетинає площину квадрата, відповідно на відстанях 1 см, 4 см і 9 см. На яких відстанях від площини розміщені точка перетину діагоналей квадрата і вершина L ?



Вправи для повторення

- 27.17. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 6 см, а гострий кут – 60° . Знайдіть діагональ трапеції та її площу.
- 27.18. Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює бічній стороні трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо його основа дорівнює a .



Життєва математика

- 27.19. Кімната у формі прямокутника має розміри $3,5 \text{ м} \times 5,2 \text{ м}$. У кімнаті є двері 80 см завширшки.
- 1) Скільки метрів плінтуса треба придбати для цієї кімнати, якщо магазин продає плінтус цілими метрами?
 - 2) Якою буде вартість покупки, якщо ціна за один метр плінтуса – 80 грн?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

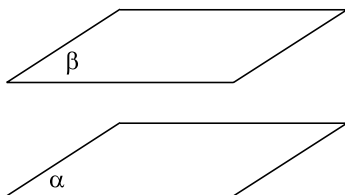
27.20. Сторони прямокутного трикутника утворюють геометричну прогресію зі знаменником q , де $q > 1$. Знайдіть q .

§ 28. Взаємне розміщення площин

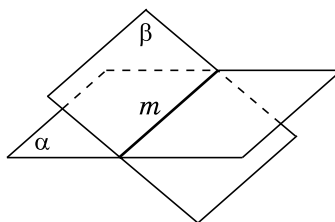
1. Паралельні площини та площини, що перетинаються

Існує два випадки взаємного розміщення двох різних площин:

- 1) площина α не має з площиною β спільних точок (мал. 28.1), тобто ці площини *паралельні*, і записують це так: $\alpha \parallel \beta$;
- 2) площини α і β *перетинаються* по прямій m (мал. 28.2).



Мал. 28.1



Мал. 28.2

У кімнаті моделлю паралельних площин є, наприклад: площини підлоги і стелі, а моделлю площин, що перетинаються, є площини підлоги й однієї зі стін.

Паралельність площин важлива на практиці. Якщо підлога і стеля будівлі не паралельні між собою, то не можна будувати наступний поверх. Непаралельність протилежних стін кімнати робить її незручною, зменшує її корисний об'єм. Щоб зручніше розміщувати вантаж, протилежні стіни вагонів, стінки контейнерів, коробок тощо також роблять паралельними.



Приклад 1. (Властивість паралельних площин.) Довести, що прямі

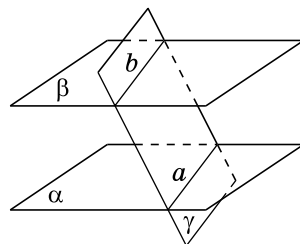
- перетину січною площиною двох паралельних площин паралельні між собою.

Доведення. Нехай січна площина γ перетинає дві паралельні площини α і β відповідно по прямих a і b (мал. 28.3).

- 1) Прямі a і b лежать в одній площині – площині γ , тому вони або паралельні, або перетинаються.

- 2) Припустимо, що a і b перетинаються. Тоді спільна точка цих прямих є також спільною точкою площин α і β . Це суперечить умові, оскільки площини α і β паралельні.

- 3) Отже, наше припущення неправильне. Тому $a \parallel b$. ■



Мал. 28.3

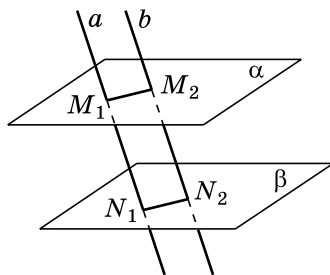


Приклад 2. (Властивість паралельних площин, що перетинають паралельні прямі.) Довести, що відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

Доведення. Нехай $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$, a перетинає α і β відповідно у точках M_1 і N_1 , b перетинає α і β відповідно у точках M_2 і N_2 (мал. 28.4).

1) Проведемо через a і b площину γ . Площина γ перетинає площину α по прямій M_1M_2 , а площину β – по прямій N_1N_2 . За попереднім прикладом $M_1M_2 \parallel N_1N_2$.

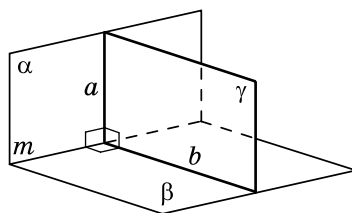
2) Тоді $M_1M_2N_2N_1$ – паралелограм, оскільки має дві пари протилежних паралельних сторін. Тому $M_1N_1 = M_2N_2$. ■



Мал. 28.4

2. Перпендикулярні площини

Нехай площини α і β перетинаються по прямої m (мал. 28.5). Якщо деяка площина γ , перпендикулярна до прямої m , перетинає площини α і β по перпендикулярних прямим, то площини α і β називають *перпендикулярними*. На малюнку 28.5: $\gamma \perp m$, γ перетинає α по прямої a , а β – по прямої b ; $a \perp b$. Тому площини α і β перпендикулярні, і записують це так: $\alpha \perp \beta$.



Мал. 28.5



Як можуть бути розміщені у просторі дві площини? У якому разі кажуть, що площини перпендикулярні? Сформулюйте властивості паралельних площин.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 28.1. Проілюструйте в класній кімнаті перпендикулярність двох площин; паралельність двох площин.

28.2. На скільки частин ділять простір дві площини, що перетинаються?

28.3. На скільки частин ділять простір дві паралельні площини?

28.4. Точка M не лежить у площині трикутника ABC (мал. 28.6).

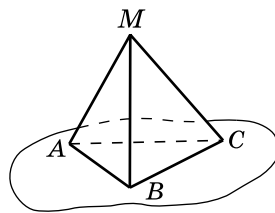
1) Яким є взаємне розміщення площин ABC і MAB ?

2) Назвіть пряму перетину площин MBC і ABC .

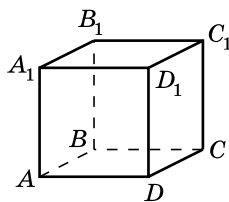
28.5. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 28.7). Назвіть:

1) пару паралельних площин;

2) дві пари перпендикулярних площин.



Мал. 28.6



Мал. 28.7

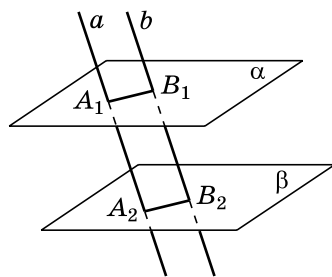
2 28.6. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (див. мал. 28.7).

- 1) Яким є взаємне розміщення площин $A_1 AB$ і $D_1 CD$, $A_1 AD$ і $D_1 CC_1$?
- 2) Назвіть пряму перетину площин $A_1 B_1 C_1$ і $A_1 AD$.
- 3) Чи є на малюнку пара площин, які перетинаються, але не перпендикулярні?

28.7. Площини α і β паралельні площині γ . Яке взаємне розміщення площин α і β ?

28.8. Площини α і β паралельні. Площина γ перетинає площину α . Яке взаємне розміщення площин β і γ ?

28.9. Паралельні прямі a і b перетинають площину α відповідно в точках A_1 і B_1 , а площину β , яка паралельна площині α , відповідно в точках A_2 і B_2 (мал. 28.8). Знайдіть довжини відрізків $A_1 B_1$ і $A_1 A_2$, якщо $A_2 B_2 = 3$ см, $B_1 B_2 = 10$ см.



Мал. 28.8

28.10. Паралельні площини α і β перетинаються паралельними прямими a і b так, що пряма a перетинає площини α і β відповідно в точках A_1 і A_2 , а пряма b – в точках B_1 і B_2 (мал. 28.8). Знайдіть довжини відрізків $A_2 B_2$ і $B_1 B_2$, якщо $A_1 B_1 = 2$ см, $A_1 A_2 = 8$ см.

3 28.11. Кінець A відрізка AB належить площині α , а кінець B – площині β . Площини α і β паралельні. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Чи може відстань від точки A до площини β дорівнювати:

- 1) 11 см; 2) 12 см; 3) 13 см; 4) 15 см?

28.12. Кінець B відрізка BC належить площині β , а кінець C – площині γ . Площини β і γ паралельні, $BC = 10$ см. Чи може відстань від точки B до площини γ дорівнювати:

- 1) 11 см; 2) 10 см; 3) 9,5 см; 4) 9 см?

28.13. Площини α і β – паралельні. Пряма a належить площині α , а пряма b – площині β . Чи можуть прямі a і b :

- 1) бути паралельними; 2) бути мимобіжними; 3) перетинатися?
- Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

28.14. Площини α і β – перетинаються. Пряма a належить площині α , а пряма b – площині β . Чи можуть прямі a і b :

- 1) бути паралельними; 2) бути мимобіжними; 3) перетинатися?
- Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

4 28.15. Прямі a і b паралельні. Площина α паралельна прямій a , а площина β – прямій b . Чи можуть площини α і β :

- 1) бути паралельними; 2) перетинатися; 3) бути перпендикулярними?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

- 28.16.** Кожна з площин α і β паралельна прямій m . Чи можуть площини α і β :
- 1) бути паралельними;
 - 2) перетинатися;
 - 3) бути перпендикулярними?
- Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.
- 28.17.** Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.



Вправи для повторення

- 28.18.** Хорда 30 см завдовжки перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки у відношенні 1 : 9. Знайдіть довжину кола.
- 28.19.** У трапеції $ABCD$ AD і BC – основи, кути A і D – гострі. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці K , що належить стороні BC , $AK = \sqrt{5}$ см, $KD = \sqrt{10}$ см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 1 см.



Життєва математика

- 28.20.** Діаметр вала колодязя становить 36 см, глибина колодязя до води – 9 м. Скільки разів треба повернути ручку вала, щоб витягти відро з водою?



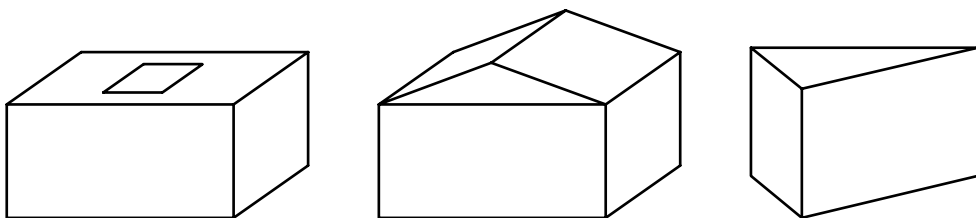
Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 28.21.** h_1, h_2, h_3 – висоти трикутника, $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1$. Доведіть, що трикутник прямокутний.

§ 29. Пряма призма. Площа поверхні та об'єм призми

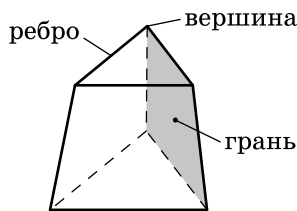
1. Многогранник

Форму многогранника мають різні вироби, деталі, будівлі тощо (мал. 29.1).

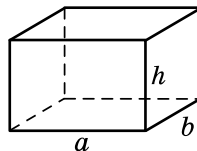


Мал. 29.1

Частину простору, обмежену скінченною кількістю многокутників, називають **многогранником** (мал. 29.2).



Мал. 29.2



Мал. 29.3

Многокутники, які обмежують многогранник, називають його *гранями*, сторони многокутників – *ребрами*, а вершини – *вершинами* многогранників.

У молодших класах ви ознайомилися з видами многогранників – прямокутним паралелепіпедом та кубом. Прямокутний паралелепіпед (мал. 29.3) має 6 граней, кожна з яких є прямокутником, 12 ребер, 8 вершин.

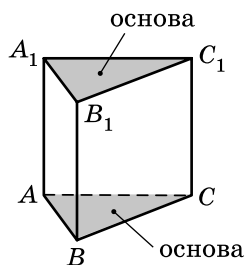
2. Пряма призма

Розглянемо один з найпростіших многогранників – *пряму призму*.

Прямою призмою називають многогранник, у якого дві грані, які є рівними многокутниками, лежать у паралельних площинах, а всі ребра, які не належать цим граням, перпендикулярні до цих площин (мал. 29.4).

Рівні многокутники називають *основами призми*, а інші грані – *бічними гранями*. На малюнку 29.4: основи призми – трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, бічні грані – прямокутники ABB_1A_1 , BB_1C_1C , AA_1C_1C . Ребра призми, які не є сторонами її основ, називають *бічними ребрами* призми. На малюнку 29.4 AA_1 , BB_1 , CC_1 – бічні ребра. *Висотою* прямої призми є бічне ребро.

З означення прямої призми випливає, що бічні ребра прямої призми рівні між собою як відрізки паралельних прямих, що розміщені між паралельними площинами. Отже,



Мал. 29.4

кожна бічна грань будь-якої прямої призми – прямокутник.

Якщо основою призми є n -кутник, то її називають *n -кутною*. На малюнку 29.4 зображено пряму трикутну призму. Куб та прямокутний паралелепіпед є прикладами прямих чотирикутних призм.

Пряму призму, основа якої – правильний багатокутник, називають *правильною*.

3. Площі бічної та повної поверхонь прямої призми

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней.



Теорема (про площу бічної поверхні прямої призми). Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину бічного ребра.

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – сторони основ прямої призми, а h – довжина бічного ребра. Тоді площа бічної поверхні:

$$S_{\text{бічн.}} = a_1 h + a_2 h + \dots + a_n h = h(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = Ph,$$

де $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – периметр основи призми. ■

Площею повної поверхні призми називають суму всіх її граней. Позначимо: $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{бічн.}}$ – площа бічної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи призми. Тоді:

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

4. Об'єм прямої призми

Кожен многогранник, і призма зокрема, має *об'єм*, який виражається додатним числом. Нагадаємо, що за одиницю об'єму приймають об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

Як відомо з попередніх класів, об'єм прямокутного паралелепіпеда (див. мал. 29.4) дорівнює добутку його вимірів:

$$V = abh.$$

Оскільки ab – площа основи паралелепіпеда і $S_{\text{осн.}} = ab$, h – його бічне ребро, то об'єм можна знайти також за формулою:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

За такою самою формулою можна знайти об'єм будь-якої прямої призми.

Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі його основи на бічне ребро.

Цей факт буде доведено у старших класах.

5. Розв'язування прикладних задач на пряму призму

Формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів використовуються під час розв'язування *прикладних задач*.

Приклад 1. Кімната має довжину 4 м, ширину 3 м та висоту 2,5 м, у кімнаті є двері 2 м заввишки і 0,8 м завширшки, а також вікно 1 м заввишки і 1,2 м завширшки. Знайти: 1) об'єм кімнати; 2) площу стін кімнати, які треба обклеїти шпалерами; 3) кількість рулонів шпалер, які потрібні для обклеювання стін кімнати, якщо кожен рулон має 10 м завдовжки та 0,53 м завширшки.

Розв'язання. 1) $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 4 \cdot 3 \cdot 2,5 = 30 \text{ (м}^3\text{)}$.

2) Площа стін, які треба обклеїти шпалерами, дорівнює різниці бічної поверхні призми, форму якої має кімната, та суми площ дверей і вікна.

$S_{\text{бічн.}} = 2 \cdot (4 + 3) \cdot 2,5 = 35 \text{ (м}^2\text{)}$, площа дверей: $S_1 = 2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ (м}^2\text{)}$,

площа вікна: $S_2 = 1 \cdot 1,2 = 1,2 \text{ (м}^2\text{)}$.

Тоді шукана площа S , яку треба обклеїти шпалерами:

$S = S_{\text{бічн.}} - (S_1 + S_2) = 35 - (1,6 + 1,2) = 32,2 \text{ (м}^2\text{)}$.

3) Площа одного рулону дорівнює $10 \cdot 0,53 = 5,3 \text{ (м}^2\text{)}$. Оскільки $32,2 : 5,3 \approx 6,1$, то для обклеювання стін кімнати потрібно 7 рулонів шпалер.

Відповідь: 1) 30 м^3 ; 2) $32,2 \text{ м}^2$; 3) 7 рулонів.

Приклад 2. Ребра пакета соку дорівнюють 6 см, 9 см і 19,5 см. Знайти загальну площу матеріалу, використаного для виготовлення пакета, та об'єм пакета.

Розв'язання. 1) $S_{\text{бічн.}} = 2 \cdot (6 + 9) \cdot 19,5 = 585 \text{ (см}^2\text{)}$; $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 9 = 54 \text{ (см}^2\text{)}$.

Тоді $S = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}} = 585 + 2 \cdot 54 = 693 \text{ (см}^2\text{)}$.

2) $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 54 \cdot 19,5 = 1053 \text{ (см}^3\text{)}$. Об'єм пакета трішки більший за 1 л.

Відповідь: 1) 693 см^2 ; 2) 1053 см^3 .

-  Що називають многогранником?  Що називають гранями, ребрами, вершинами многогранника?  Що називають прямою призмою?  Що називають основами призми, бічними гранями та бічними ребрами призми?  Що називають правильною призмою?  Що називають площею бічної поверхні призми?  Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми.  Як знайти площу повної поверхні призми?  Як знайти об'єм прямої призми?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 29.1. Знайдіть повну поверхню та об'єм куба, ребро якого дорівнює 3 см.

29.2. Знайдіть повну поверхню та об'єм куба, ребро якого дорівнює 2 дм.

29.3. Знайдіть об'єм цеглини, виміри якої становлять 25 см, 12 см, 6,5 см.



2 29.4. Знайдіть об'єм та повну поверхню прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 4 см і 5 см.

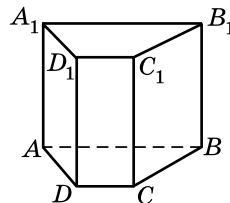
29.5. Знайдіть об'єм та повну поверхню прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 3 см, 5 см і 6 см.

29.6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Знайдіть бічну поверхню призми та її об'єм.

29.7. Знайдіть об'єм та площу бічної поверхні правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 5 см, а бічне ребро – 8 см.

3 **29.8.** На малюнку 29.5 зображено пряму чотирикутну призму, $ABCD$ – трапеція. Запишіть:

- 1) три пари прямих, паралельних між собою;
- 2) три прямі попарно мимобіжні;
- 3) пряму і площину, перпендикулярні між собою;
- 4) прямі, паралельні площині $A_1D_1C_1$;
- 5) прямі, паралельні площині AA_1D ;
- 6) прямі, що перетинають площину CC_1B ;
- 7) паралельні площини;
- 8) прямі, перпендикулярні до площини ABC .



Мал. 29.5

29.9. Знайдіть об'єм та площу повної поверхні прямої призми, основа якої – рівнобічна трапеція з основами 16 см і 6 см та бічною стороною 13 см, а бічне ребро призми дорівнює 20 см.

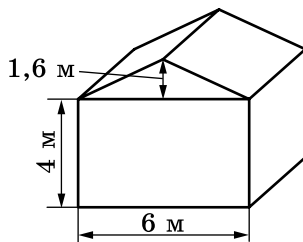
29.10. Знайдіть об'єм та площу повної поверхні прямої призми, в основі якої лежить трикутник зі сторонами 9 см, 10 см і 17 см, а бічне ребро призми дорівнює 5 см.

29.11. В основі прямої призми лежить ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть повну поверхню та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

4 **29.12.** У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні дорівнює 108 см^2 . Знайдіть об'єм призми.

29.13. У прямій чотирикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні дорівнює 256 см^2 . Знайдіть об'єм призми, якщо один з гострих кутів основи дорівнює 30° .

29.14. На малюнку 29.6 зображено будівлю з двосхилим дахом, довжина якої становить 10 м, інші виміри подано на малюнку. Обчисліть: 1) площу даху будинку; 2) місткість горища; 3) місткість усієї будівлі.



Мал. 29.6

Вправи для повторення

29.15. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, – 10 см. Знайдіть площу трикутника.

29.16. Побудуйте рівнобічну трапецію за більшою основою, діагоналлю та тупим кутом.

Життєва математика

29.17. На городі грядка з огірками має форму квадрата зі стороною 12 м. Скільки відер води знадобиться для поливу огірків, якщо вони потребують 4 л на один м^2 , а ємність відра – 12,5 л?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

29.18. Із точки A до кола, радіус якого 35 см, проведено дві дотичні AB і AC , $BC = 56$ см. Знайдіть AB . Знайдіть кілька способів розв'язування задачі.

§ 30. Піраміда. Площа поверхні та об'єм піраміди

1. Піраміда

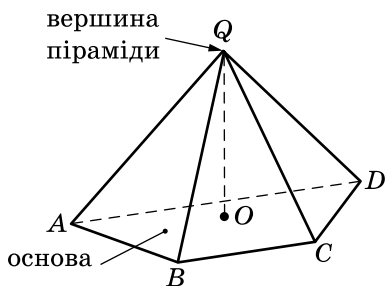
Розглянемо ще один вид многогранників – *піраміду*.

Пірамідою називають многогранник, у якого одна грань – довільний **многокутник**, а всі інші – **трикутники**, що мають спільну вершину (мал. 30.1).

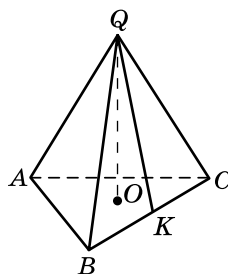
Згаданий многокутник називають *основою піраміди*, спільну вершину трикутних граней – *вершиною піраміди*, а самі ці грані – *бічними гранями піраміди*. На малюнку 30.1: основа піраміди – чотирикутник $ABCD$, вершина – точка Q , бічні грані – трикутники ABQ , BCQ , CDQ і DAQ . Ребра піраміди, які не є сторонами основ, називають *бічними ребрами* піраміди. На малюнку 30.1: AQ , BQ , CQ , DQ – бічні ребра.

Висотою піраміди називають перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини її основи. На малюнку 30.1 – відрізок QO – висота піраміди, точка O – основа цієї висоти.

Якщо основою піраміди є n -кутник, то її називають *n -кутною*. На малюнку 30.1 зображено чотирикутну піраміду, а на малюнку 30.2 – трикутну піраміду.



Мал. 30.1



Мал. 30.2

2. Правильна піраміда

Піраміду, основа якої – **правильний многокутник**, а основа висоти збігається із центром цього многокутника, називають **правильною пірамідою**.

На малюнку 30.2 зображено правильну трикутну піраміду.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, а всі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники.

Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з вершини, називають апофемою. На малюнку 30.2 відрізок QK – апофема.

3. Площа бічної та повної поверхонь піраміди

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.



Теорема (про площу бічної поверхні правильної піраміди).
Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему.

Доведення. Розглянемо правильну n -кутну піраміду, всі сторони основи якої дорівнюють a , а апофема – l . Тоді площа кожної з бічних граней дорівнює $\frac{1}{2}al$, а площа бічної поверхні $S_{\text{бічн.}} = \frac{1}{2}al \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l$.

Оскільки $\frac{1}{2}an = p$ – півпериметр основи піраміди, то $S_{\text{бічн.}} = pl$. ■

Площею повної поверхні піраміди називають суму всіх її граней.

Позначимо: $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{бічн.}}$ – площа бічної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи піраміди. Тоді:

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{\text{осн.}}$$

Приклад 1. Пакетик чаю має форму трикутної піраміди, всі ребра якої дорівнюють 3,2 см. Знайти загальну площу матеріалу, необхідного для виготовлення 20 пакетиків чаю.

Розв'язання. 1) Усі грані піраміди – правильні трикутники зі стороною 3,2 см. Площа такого трикутника дорівнює $S = \frac{3,2^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}$.

2) Тоді площа повної поверхні піраміди

$$S_{\text{п.п.}} = 4 \cdot S = 4 \cdot \frac{10,24 \cdot \sqrt{3}}{4} = 10,24\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) Загальна площа матеріалу, необхідного для виготовлення 20 пакетиків, дорівнює $20 \cdot S_{\text{п.п.}} = 20 \cdot 10,24\sqrt{3} = 204,8\sqrt{3} \approx 354,7 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь: $\approx 354,7 \text{ см}^2$.

4. Об'єм піраміди

Формулу для обчислення об'єму піраміди буде доведено у старших класах, а поки що можна отримати її експериментально. Якщо виготовити, наприклад, з картону пряму призму і піраміду з однаковими основами і висотами. Потім наповнити кожен з них сипким матеріалом, наприклад піском, і таким чином з'ясувати, що для наповнення

призми піску потрібно утричі більше, ніж для наповнення піраміди. Звідси висновок: об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми, тобто:

об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h,$$

де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи, h – висота.

Приклад 2. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 24 см^2 , а висота – 4 см . Знайти бічне ребро піраміди.

Розв'язання (мал. 30.3). 1) $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$,

тоді $S_{\text{осн.}} = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 24}{4} = 18 \text{ (см}^2\text{)}$.

2) Основою правильної чотирикутної піраміди є квадрат $ABCD$, тому $AB^2 = 18 \text{ (см}^2\text{)}$.

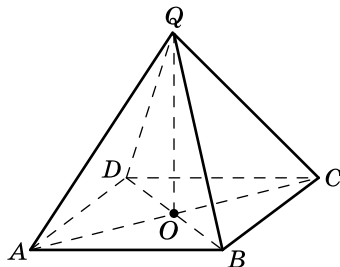
$AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (см)}$.

3) Основа висоти – точка O – є точкою перетину діагоналей квадрата;

$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{18 + 18} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}$.

4) Із $\triangle AOQ$ ($\angle O = 90^\circ$): $AQ = \sqrt{AO^2 + OQ^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см)}$.

Відповідь: 5 см .



Мал. 30.3

- ? Що називають пірамідою? ○ Що називають основою, вершиною піраміди? ○ Що називають бічними ребрами піраміди? ○ Що називають висотою піраміди? ○ Що називають правильною пірамідою? ○ Що називають площею бічної поверхні піраміди? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної піраміди. ○ Як знайти площу повної поверхні піраміди? ○ Як знайти об'єм піраміди?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 30.1. На малюнку 30.2 зображено правильну трикутну піраміду.

- 1) Назвіть пряму перетину площин QAB і ABC .
- 2) Яке взаємне розміщення прямих QB і AC ?
- 3) Яке взаємне розміщення прямої QO і площини ABC ?

30.2. На малюнку 30.3 зображено правильну чотирикутну піраміду.

- 1) Назвіть пряму перетину площин QBC і ABC .
- 2) Яке взаємне розміщення прямих QA і DC ?
- 3) Чи перетинає пряма QO площину ABC ?

30.3. Площа основи піраміди дорівнює 9 см^2 , а висота – 5 см . Знайдіть об'єм піраміди.

30.4. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи – 16 см². Знайдіть об'єм піраміди.

2 **30.5.** Піраміда Хеопса має висоту 146,6 м, а сторона її квадратної основи становить 233 м. Обчисліть об'єм піраміди Хеопса.

30.6. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

30.7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см, а апофема – 5 см. Знайдіть повну поверхню піраміди.

30.8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а апофема – 4 см. Знайдіть повну поверхню піраміди.

3 **30.9.** У правильній трикутній піраміді (див. мал. 30.2) кут $\angle AQB = 90^\circ$, $AQ = a$. Знайдіть:

- 1) бічну поверхню піраміди; 2) повну поверхню піраміди.

30.10. У правильній чотирикутній піраміді (див. мал. 30.3) $\angle AQB = 60^\circ$, $AQ = b$. Знайдіть:

- 1) бічну поверхню піраміди; 2) повну поверхню піраміди.

4 **30.11.** Основою чотирикутної піраміди є прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 26 см.

1) Доведіть, що основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи.

2) Знайдіть об'єм піраміди.

30.12. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а висота – 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.



Вправи для повторення

30.13. Один з кутів паралелограма удвічі менший від іншого. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см.

30.14. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a см і b см. Знайдіть відношення площ, на які ділить трикутник висота, проведена до гіпотенузи.



Життєва математика

30.15. Щоб визначити діаметр стовбура дерева, жінка-лісник виміряла обхват стовбура за допомогою мотузки й отримала 4,2 м. Який діаметр має стовбур цього дерева (результат округліть до сотих метра)?



Цікаві задачі – поміркуй окремо

30.16. У прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см вписано квадрат так, що дві його вершини належать гіпотенузі, а дві інші – катетам. Знайдіть сторону квадрата.

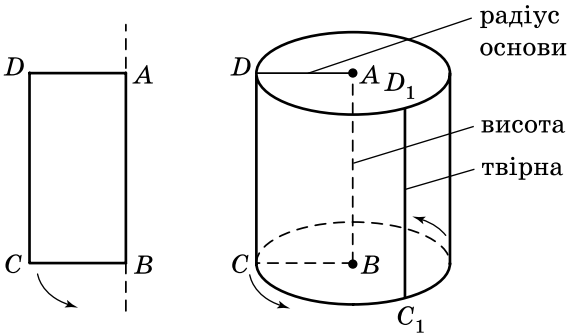
§ 31. Циліндр. Площа поверхні та об'єм циліндра

1. Циліндр

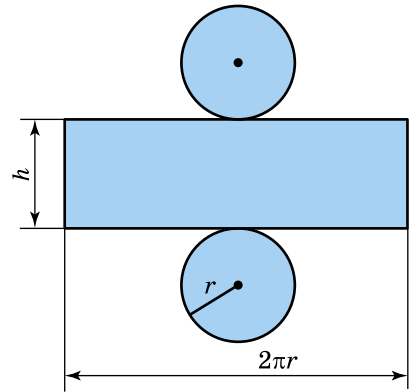
Циліндром називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони (мал. 31.1).

На малюнку 31.1 прямокутник $ABCD$ обертається навколо сторони AB . Пряму, навколо якої обертається прямокутник, називають *віссю циліндра*. Сторона DC описує в просторі *бічну поверхню циліндра*. Вона утворюється з безлічі рівних і попарно паралельних відрізків – *твірних*. Сторони прямокутника AD і BC описують *круги – основи циліндра*. На малюнку 31.1: AB – вісь циліндра, DC і D_1C_1 – твірні циліндра, точки A і B – центри основ циліндра, AD і BC – *радіуси основ циліндра* (або просто *радіуси циліндра*).

Висота циліндра – це відстань від будь-якої точки однієї основи до площини другої. Можна також сказати, що це відстань між основами циліндра. Висота циліндра дорівнює його твірній. На малюнку 31.1: AB , CD , C_1D_1 – висоти циліндра.



Мал. 31.1



Мал. 31.2

Циліндричну форму мають численні деталі машин і механізмів, наприклад: шліфувальні круги, сальники, барабани лебідок тощо. На практиці широко використовують дріт з круговим перерізом, різні колоди, труби, балки. Також циліндричну форму мають просвердлені отвори. З огляду на це важливою є задача знаходження поверхні та об'єму циліндра.

2. Площа бічної та повної поверхонь циліндра

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і одній із твірних, а потім розгорнути на площині, то отримаємо *розгортку циліндра* (мал. 31.2). Вона складається з прямокутника, площа якого дорівнює площі бічної поверхні циліндра, і двох рівних кругів.

Позначимо радіус основи циліндра – r , а висоту – h . В отриманому прямокутнику одна зі сторін дорівнює висоті циліндра h , а друга – довжині кола основи, тобто $2\pi r$. Тому *площу бічної поверхні циліндра* $S_{\text{бічн.}}$ знаходять за формулою: $S_{\text{бічн.}} = 2\pi rh$.

Повна поверхня циліндра складається з бічної поверхні та двох основ – однакових кругів радіуса r . Тому $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$, де $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи. Звідки

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ або } S_{\text{п.п.}} = 2\pi r(h + r).$$

3. Об'єм циліндра

Циліндр можна уявити як правильну n -кутну призму, за умови, що n є нескінченно великим. Звідси висновок: об'єм циліндра можна знайти так само, як об'єм призми.

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

Оскільки основою є круг радіуса r , то маємо: $V = \pi r^2 h$.

4. Розв'язування прикладних задач на циліндр

Розглянемо застосування цих формул до прикладних задач.

Приклад 1. Довжина нафтопроводу Одеса – Броди дорівнює 650 км, діаметр його труби – 102 см. Визначити площу поверхні нафтопроводу, взявши $\pi \approx 3,1416$. Відповідь округлити до одиниць квадратного метра.

Розв'язання. Шукана площа – бічна поверхня циліндра, радіус яко-

го $r = \frac{1,02}{2} = 0,51$ (м), а висота $h = 650\,000$ м. Тоді

$$S_{\text{бічн.}} = 2\pi rh \approx 2 \cdot 3,1416 \cdot 0,51 \cdot 650\,000 = 2\,082\,880,8 \approx 2\,082\,881 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\approx 2\,082\,881 \text{ м}^2$.

Приклад 2. Маса мотка мідного дроту діаметром 1,6 мм дорівнює 2,2 кг. Знайти довжину цього дроту, якщо густина міді становить 8,8 кг/дм³. Відповідь округлити до сантиметрів.

Розв'язання. 1) Об'єм дроту $V = \frac{2,2}{8,8} = 0,25$ (дм³).

2) Дріт можна розглядати як циліндр, радіус якого дорівнює $r = \frac{0,016}{2} = 0,008$ (дм), а висота h – невідома довжина мотка дроту.

Маємо $V = \pi r^2 h$, звідси $h = \frac{V}{\pi r^2}$,

$$h = \frac{0,25}{3,1416 \cdot 0,008^2} \approx 1243,39 \text{ (дм)} \approx 12\,434 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 12 434 см.

- Що називають циліндром? ○ Що називають віссю циліндра? ○ Що називають бічною поверхнею циліндра? ○ Що називають твірними циліндра, основами циліндра? ○ Що називають радіусами основ циліндра, висотою циліндра? ○ Як отримати розгортку циліндра? ○ Як знайти площу бічної поверхні циліндра та площу повної поверхні циліндра? ○ Як знайти об'єм циліндра?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

31.1. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює r , а висота – h .

- 1) $r = 3$ см, $h = 5$ см;
- 2) $r = 2$ дм, $h = 3$ дм.

31.2. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, а висота – 2 см.

31.3. Обчисліть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює r , висота – h , якщо:

- 1) $r = 2$ см, $h = 10$ см;
- 2) $r = 5$ дм, $h = l$ дм.

31.4. Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота – 5 см.

2

31.5. Резервуар має циліндричну форму без кришки, радіус його основи 4 м, а висота – 10 м. Знайдіть:

- 1) скільки матеріалу знадобилося для виготовлення резервуара;
- 2) об'єм резервуара.

31.6. Резервуар має циліндричну форму з кришкою, радіус його основи 5 м, а висота – 8 м. Знайдіть:

- 1) скільки матеріалу знадобилося для виготовлення резервуара;
- 2) об'єм резервуара.

31.7. Радіус основи циліндра збільшили у 3 рази. У скільки разів збільшився об'єм циліндра?

31.8. Висоту циліндра зменшили у 2 рази. У скільки разів зменшився об'єм циліндра?

3

31.9. У циліндричну мензурку, внутрішній діаметр якої дорівнює 10 см, занурили металеву деталь. При цьому рівень води у мензурці піднявся на 6 см. Обчисліть об'єм деталі.

31.10. Металеву деталь занурили у циліндричну мензурку, внутрішній діаметр якої дорівнює 12 см. Після того як деталь вийняли, рівень води у мензурці знизився на 5 см. Знайдіть об'єм деталі.

31.11. Навколо якої сторони треба обертати прямокутник зі сторонами $a = 4$ см і $b = 6$ см, щоб утворився циліндр з:

- 1) більшою бічною поверхнею;
- 2) більшою повною поверхнею;
- 3) більшим об'ємом?

31.12. Знайдіть площу поверхні й об'єм циліндра, утвореного обертанням прямокутника зі сторонами 4 см і 5 см навколо:

- 1) більшої сторони;
- 2) меншої сторони.



31.13. Якої довжини можна виготовити мідний дріт діаметром 4 мм зі зливка міді масою 50 кг? Густина міді становить $8,8 \text{ кг/дм}^3$. Результат округліть до сантиметрів ($\pi \approx 3,1416$).



31.14. Скільки 12-літрових відер води потрібно для того, щоб заповнити один з найбільших в Україні Севастопольський акваріум, який має форму циліндра 9,2 м діаметром, 1,5 м завглибшки ($\pi \approx 3,1416$)?



Вправи для повторення

- 31.15.** Два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого трикутника. Сторони першого трикутника відносяться як $3 : 4 : 5$. Знайдіть сторони та площу другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.
- 31.16.** Медіани трикутника, довжини яких становлять 15 см і 18 см, взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу трикутника.



Життєва математика

- 31.17.** Дитячий майданчик прямокутної форми 8,5 м завдовжки і 6 м завширшки потрібно застелити спеціальним покриттям, що складається з квадратних фрагментів зі стороною 50 см завдовжки.
- 1) Скільки таких елементів потрібно?
 - 2) Скільки грошей буде витрачено на це, якщо один фрагмент покриття коштує 60 грн, а вартість додаткових матеріалів та роботи з укладання становить 40 % від вартості покриття?



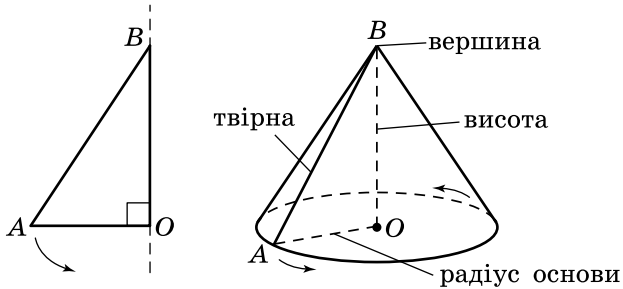
Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 31.18.** У $\triangle ABC$ бісектриси AK і BM перетинаються в точці I , $AI : IK = 2 : 1$, $BI : IM = 4 : 1$. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC .

§ 32. Конус. Площа поверхні та об'єм конуса

1. Конус

Конусом називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо катета (мал. 32.1).



Мал. 32.1

На малюнку 32.1 прямокутний трикутник AOB з прямим кутом O обертається навколо катета BO . Прямую, навколо якої обертається прямокутний трикутник, називають *віссю конуса*. Гіпотенуза BA прямокутного трикутника описує в просторі *бічну поверхню конуса*. Вона складається з безлічі рівних відрізків – *твірних*. На малюнку 32.1: пряма BO – *вісь конуса*, BA – *твірна конуса*. Катет OA описує круг, який називають *основною конуса*. Точка O – *центр цього круга*, OA – *радіус основи конуса*. Точку B називають *вершиною конуса*, а відрізок BO – *висотою конуса*.

Конічна форма є поширеною у природі та техніці. Коли насипають сипкі матеріали (пісок, щебінь, крупи), вони утворюють конус. Конічну форму мають деякі деталі, посудини, лійки, головки шліфувальних інструментів.

2. Площа бічної та повної поверхонь конуса

Для знаходження бічної поверхні конуса розріжемо конус по колу основи й одній із твірних, а потім розгорнемо на площині (мал. 32.2). Отримаємо *розгортку конуса*. Вона складається з основи – круга радіуса r – і сектора, площу якого приймаємо за площу бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}}$.

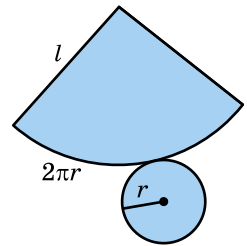
Позначимо радіус основи конуса – r , а твірну – l . Довжина дуги сектора дорівнює $2\pi r$, а довжина всього кола радіуса l – $2\pi l$. Площа сектора відноситься до площі круга радіуса l так само, як довжина дуги сектора до довжини всього кола радіуса l .

Маємо $\frac{S_{\text{бічн.}}}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$, звідки:

$$S_{\text{бічн.}} = \pi r l.$$

Повна поверхня конуса складається з бічної поверхні та основи – круга радіуса r . Тому $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{\text{осн.}}$, де $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи. Звідки:

$$S_{\text{п.п.}} = \pi r l + \pi r^2, \text{ або } S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r).$$



Мал. 32.2

3. Об'єм конуса

Конус можна уявити як правильну n -кутну піраміду, за умови, що n є нескінченно великим. Звідси висновок: об'єм конуса можна знайти так само, як об'єм піраміди.

Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту конуса:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h,$$

де h – висота конуса.

Оскільки основою є круг радіуса r , то маємо:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

4. Розв'язування прикладних задач на конус

Розглянемо застосування цих формул до прикладних задач.

Приклад 1. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібний намет, висота якого становить 2,7 м, а діаметр основи – 7,2 м?

Розв'язання (мал. 32.1).

1) За умовою, $BO = 2,7$ м, $AO = \frac{7,2}{2} = 3,6$ м.

2) У $\triangle AOB$ ($\angle O = 90^\circ$): $AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{2,7^2 + 3,6^2} = 4,5$ (м).

3) Потрібна кількість тканини – площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}} = \pi r l = \pi \cdot AO \cdot AB \approx 3,1416 \cdot 3,6 \cdot 4,5 \approx 50,9$ (м²).

Відповідь: $\approx 50,9$ м².

Приклад 2. З алюмінію виготовлено конус, твірна якого дорівнює 20 см, а радіус основи – 12 см. Обчисліть:

1) площу повної поверхні конуса;

2) об'єм конуса;

3) масу конуса (густина алюмінію $\rho = 2,7$ г/см³).

Розв'язання (див. мал. 32.1). За умовою $AB = l = 20$ см, $AO = r = 12$ см.

У $\triangle AOB$ ($\angle O = 90^\circ$): $BO = h = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (см).

1) $S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r) = \pi \cdot 12(20 + 12) = 384\pi$ (см²).

2) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 16 = 768\pi$ (см³).

3) $m = \rho V = 2,7 \cdot 768\pi \approx 6514$ (г).

Відповідь: 1) 384π см²;

2) 768π см³;

3) ≈ 6514 г.



Що називають конусом? ○ Що називають віссю конуса? ○ Що називають бічною поверхнею конуса? ○ Що називають твірними конуса, основою конуса, вершиною конуса, висотою конуса? ○ Як отримати розгортку конуса? ○ Як знайти площу бічної поверхні конуса та площу повної поверхні конуса? ○ Як знайти об'єм конуса?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

32.1. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, у якого радіус основи дорівнює r , а твірна l :

1) $r = 5$ см, $l = 8$ см; 2) $r = 3$ дм, $l = 7$ дм.

32.2. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, у якого твірна дорівнює 10 см, а радіус основи – 4 см.

32.3. Знайдіть об'єм конуса, у якого радіус основи дорівнює r , а висота – h :

1) $r = 3$ см, $h = 2$ см;

2) $r = 4$ см, $h = 6$ см.

32.4. Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює 6 см, а висота – 5 см.

2

32.5. Скільки жерсті потрібно для виготовлення конусоподібної лійки, твірна якої дорівнює 20 см, а діаметр – 12 см (на шви витрачається 6 % матеріалу)?



32.6. Скільки квадратних метрів тканини треба для виготовлення конусоподібного намету, твірна якого дорівнює 5 м, а радіус основи – 3 м (на шви витрачається 2 % матеріалу)?



32.7. Знайдіть площу повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 15 см, а висота – 9 см.

32.8. Знайдіть площу повної поверхні конуса, висота якого дорівнює 8 см, а радіус основи – 6 см.

3

32.9. Прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза – 17 см, обертається навколо меншого катета. Знайдіть об'єм утвореного конуса.

32.10. Прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 16 см, а гіпотенуза – 20 см, обертається навколо більшого катета. Знайдіть об'єм утвореного конуса.

32.11. Свинцевий конус, радіус основи якого дорівнює 15 см, переплавили у циліндр із такою самою висотою. Знайдіть радіус основи циліндра.



32.12. Свинцевий циліндр, радіус основи якого дорівнює 4 см, переплавили у конус із такою самою висотою. Знайдіть радіус основи конуса.



4

32.13. Об'єм конуса дорівнює 240π см³. Знайдіть повну поверхню конуса, якщо його висота дорівнює 5 см.

32.14. Бічна поверхня конуса дорівнює 369π см². Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 41 см.



Вправи для повторення

32.15. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 45° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$. Знайдіть:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$; 3) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$; 4) $\vec{a}(2\vec{a} + 5\vec{b})$.

32.16. Радіуси описаного і вписаного у прямокутний трикутник кіл відповідно дорівнюють 5 см і 2 см. Знайдіть площу трикутника.



Життєва математика

32.17. Якими плитками, що мають форму правильних многокутників, можна покрити підлогу, якщо використовують:

- 1) один вид плитки; 2) два види плитки?

Наведіть приклади покриття (відходами знехтувати).



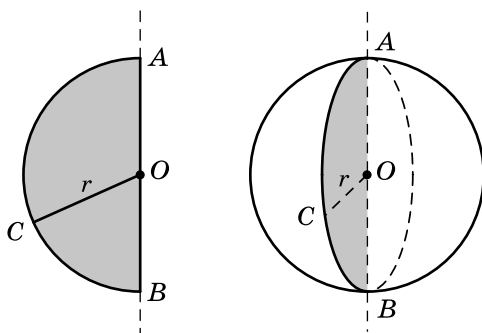
Цікаві задачі – поміркуй одначе

32.18. Сторона правильного трикутника дорівнює 6 см. Із його центра описано коло, радіус якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу частини трикутника, що лежить поза кругом, який обмежує описане коло.

§ 33. Куля. Площа поверхні та об'єм кулі

1. Куля

Кулею називають геометричне тіло, утворене обертанням півкруга навколо діаметра (мал. 33.1).



Мал. 33.1

Радіус півкруга називають *радіусом кулі*, а діаметр півкруга – *діаметром кулі*, центр півкруга – *центром кулі*. На малюнку 33.1: OA , OB , OC – радіуси кулі, AB – діаметр кулі, точка O – центр кулі.

Форму кулі мають глобус, м'яч, деякі ягоди, деталі у техніці, наприклад кульки у підшипнику.

2. Сфера. Площа поверхні кулі

Поверхню кулі називають *сферою*. Кулю не можна представити у вигляді розгортки на площині. Тому задача знаходження площі

поверхні кулі є досить важкою. У старших класах буде показано, що площу поверхні кулі можна знайти за формулою:

$$S = 4\pi r^2,$$

де r – радіус кулі.

3. Об'єм кулі

Також у старших класах буде доведено, що об'єм кулі V знаходять за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4. Прикладні задачі на кулю

Приклад 1. Діаметр футбольного м'яча дорівнює 22 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм м'яча (взяти $\pi \approx 3,1416$, відповідь округлити до цілих).

Розв'язання. 1) $r = \frac{22}{2} = 11$ см;

2) $S = 4\pi r^2 \approx 4 \cdot 3,1416 \cdot 22^2 \approx 6082$ (см²);

3) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3,1416 \cdot 22^3 \approx 44\,602$ (см³).

Відповідь: $S \approx 6082$ см², $V \approx 44\,602$ см³.

Приклад 2. Робітник виготовив з однакового матеріалу дві кулі, причому радіус другої утричі більший за радіус першої. У скільки разів маса другої кулі більша за масу першої?

Розв'язання. 1) Нехай ρ – густина матеріалу, r – радіус першої кулі, тоді $3r$ – радіус другої, V_1 – об'єм першої кулі, V_2 – другої.

2) Маємо: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho V_2}{\rho V_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (3r)^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{27r^3}{r^3} = 27$ (разів).

Відповідь: у 27 разів.

 Що називають кулею?  Що називають радіусом, діаметром, центром кулі?  Що називають сферою?  Як знайти площу поверхні кулі?  Як знайти об'єм кулі?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 33.1. Знайдіть площу поверхні кулі з радіусом:

1) 2 см; 2) 5 дм.

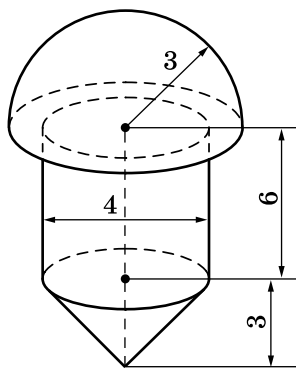
33.2. Обчисліть площу поверхні кулі з радіусом: 1) 4 дм; 2) 7 см.

33.3. Обчисліть об'єм кулі, радіус якої дорівнює: 1) 3 дм; 2) 6 см.

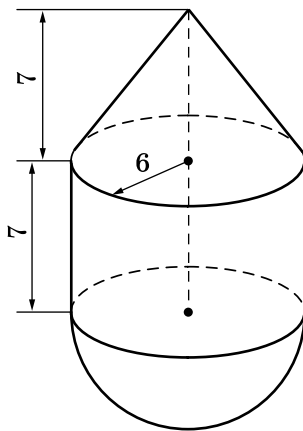
33.4. Знайдіть об'єм кулі, радіус якої дорівнює:

1) 1 дм; 2) 9 см.

- 2** 33.5. Площа поверхні м'яча для мотоболу дорівнює 400π см². Знайдіть радіус м'яча та його об'єм.
- 33.6. Площа поверхні м'яча для хокею з м'ячем дорівнює 9π см². Знайдіть радіус м'яча та його об'єм.
- 33.7. На фарбування 1 м² поверхні витрачають 25 г фарби. Скільки такої фарби знадобиться для фарбування кулі, радіус якої 25 см?
-  33.8. Скляна кулька має радіус 3 см. Знайдіть із точністю до десятих грама масу цієї кульки, якщо маса 1 см³ скла дорівнює 3 г.
-  33.9. Радіус Землі $r \approx 6,4 \cdot 10^3$ км. Знайдіть площу поверхні та об'єм Землі.
- 3** 33.10. З однакового матеріалу виготовлено дві кульки відповідно з діаметрами 4 см і 8 см. У скільки разів маса першої кульки менша від маси другої?
- 33.11. Радіуси двох куль відносяться як 3 : 4. Як відносяться:
1) поверхні куль; 2) об'єми куль?
- 4** 33.12. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку 33.2 (розміри на малюнку подано у сантиметрах).
- 33.13. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку 33.3 (розміри на малюнку подано у сантиметрах).
- 



Мал. 33.2



Мал. 33.3



Вправи для повторення

- 33.14. Із точки кола до діаметра проведено перпендикуляр, який ділить його на відрізки у відношенні 4 : 9. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 12 см.
- 33.15. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть $|4\vec{a} - \vec{b}|$.



Життєва математика

- 33.16. Діаметр зіниці, яка має форму круга, може змінюватися від 1,5 мм до 7,5 мм. У скільки разів при цьому збільшується її площа?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 33.17. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює s , а радіус вписаного кола – r . Знайдіть площу трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 6

До § 26



1. Скільки різних площин можна провести через дві прямі, що перетинаються?

2. Намалюйте:

- 1) площину α , яка проходить через дві паралельні прямі c і d ;
- 2) площину β , яка проходить через три точки A , B і C , що не лежать на одній прямій.



3. Щоб надати стійкого положення фотоапарату або вимірювальним приладам, їх закріплюють на штативах (триногах). Яку властивість при цьому використовують?



4. Чи можна стверджувати, що дві прямі, які не мають спільних точок, паралельні:

- 1) на площині;
- 2) у просторі?



5. Чи правильне твердження: дві прямі у просторі, перпендикулярні до третьої, паралельні між собою? Поясніть на моделі.

6. Одна пряма належить площині стелі кімнати, а друга – площині підлоги. Яким може бути взаємне розміщення цих прямих?



7. Прямі a і b перетинаються, і прямі b і c перетинаються. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c ? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

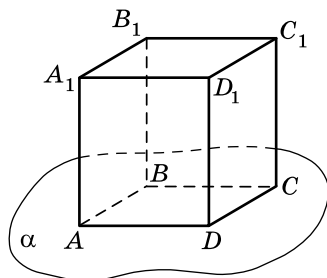
До § 27



8. Проілюструйте всі можливі випадки взаємного розміщення прямої та площини на моделі куба і на малюнку.

9. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 1). Як розміщені площина α і пряма:

- 1) AB ;
- 2) AA_1 ;
- 3) BC ;
- 4) $B_1 C_1$;
- 5) $C_1 C$;
- 6) $A_1 D_1$?



Мал. 1

2 10. AB – перпендикуляр до площини α , AC – похила (мал. 2). Знайдіть:

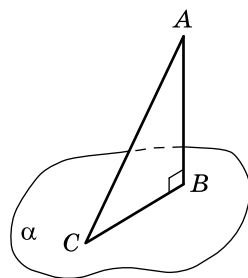
- 1) AB і BC , якщо $AC = 15$ см, $AB : BC = 4 : 3$;
- 2) AB і BC , якщо $AC = 13$ см, $AB + BC = 17$ (см).

11. Чи можна стверджувати, що два перпендикуляри, проведені до площини, лежать в одній площині?

3 12. Із точки до площини проведено дві похилі, довжини яких відносяться як $3 : 4$. Знайдіть довжини похилих та відстань від точки до площини, якщо проекції похилих дорівнюють 9 см і 16 см.

13. Площина α паралельна прямій a , пряма b також паралельна площині α . Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b ?

4 14. Точка перетину діагоналей паралелограма розміщена на відстані 7 см від площини α , яка не перетинає площину паралелограма. Дві вершини паралелограма розміщені на відстанях 5 см і 11 см від площини α . На яких відстанях від площини α розміщені дві інші вершини паралелограма?



Мал. 2

До § 28

1 15. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (див. мал. 1). Назвіть: 1) площину, паралельну площині α ;

2) чотири площини, перпендикулярні до площини α .

16. На скільки частин ділять простір три площини, кожна дві з яких паралельні між собою?

2 17. Площини α і β перетинаються. Площина γ паралельна площині β . Яке взаємне розміщення площин α і γ ?

18. Пряма a належить площині α , а пряма b – площині β , a і b – не паралельні. Чи можуть бути паралельними площини α і β ? Проілюструйте на моделі або на малюнку.

3 19. Пряма a належить площині α і паралельна прямій b , яка належить площині β . Чи можуть площини α і β :

- 1) бути паралельними;
- 2) перетинатися;
- 3) бути перпендикулярними?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

20. Пряма a належить площині α і перетинає пряму b , яка належить площині β . Чи можуть площини α і β :

- 1) бути паралельними;
- 2) перетинатися;
- 3) бути перпендикулярними?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

4 21. Кожна з площин α і β перпендикулярна до площини γ . Чи можуть площини α і β :

- 1) бути паралельними;
- 2) перетинатися;
- 3) бути перпендикулярними?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

До § 29

- 1** 22. Знайдіть об'єм прямої призми, у якої площа основи дорівнює 8 см^2 , а бічне ребро – 7 см .
- 2** 23. Площа повної поверхні куба – 54 см^2 . Знайдіть ребро куба.
 24. Знайдіть об'єм та повну поверхню призми, основа якої – квадрат зі стороною 2 см , а бічне ребро дорівнює 5 см .
 25. 1) Яке найменше число граней може мати пряма призма?
 2) Пряма призма має 7 граней. Який многокутник лежить в основі призми?
- 3** 26. Переріз залізничного насипу має форму трапеції з основами 13 м і 5 м та 3 м заввишки, а насип має форму прямої призми. Знайдіть об'єм такого насипу 100 м завдовжки.
 27. Обчисліть площу повної поверхні та об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 240 см^2 , а бічне ребро – 15 см .
- 4** 28. Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 432 см^2 , а бічної поверхні – 360 см^2 . Обчисліть об'єм призми.
 29. Рулон шпалер 10 м завдовжки має ширину $0,6 \text{ м}$. Кімната має 6 м завдовжки, 4 м завширшки і $2,75 \text{ м}$ заввишки. У кімнаті два вікна розмірами $1,4 \text{ м} \times 0,75 \text{ м}$ та двері розмірами $2 \text{ м} \times 0,8 \text{ м}$. Скільки рулонів шпалер знадобиться, щоб обклеїти кімнату, якщо на підклейку витрачають 1% від площі шпалер?

До § 30

- 1** 30. Скільки граней, вершин і ребер у трикутній піраміді?
 31. Об'єм піраміди дорівнює 45 см^3 , а площа основи – 30 см^2 . Знайдіть висоту піраміди.
- 2** 32. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, висота якої – 12 см , а ребро основи дорівнює 4 см .
 33. Знайдіть бічну поверхню правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 6 см , а бічне ребро – 5 см .
- 3** 34. В основі піраміди лежить ромб, сторона якого дорівнює 30 см , а діагоналі відносяться як $3 : 4$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см .
 35. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, апофема якої дорівнює 8 см , а бічне ребро – 10 см .
- 4** 36. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 4 см , а бічне ребро – 5 см . Знайдіть об'єм піраміди та площу бічної поверхні.

До § 31

- 1** 37. Обчисліть площу бічної поверхні, площу повної поверхні та об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 10 см , а висота – 4 см .
- 38.** Діаметр стовбура шахти дорівнює 8 м , а його глибина – 400 м . Знайдіть об'єм стовбура шахти.

- 2** 39. У скільки разів треба збільшити:
 1) радіус основи циліндра;
 2) висоту циліндра, щоб об'єм циліндра збільшився у 16 разів?
- 3** 40. Скільки жерсті потрібно для виготовлення погонного метра труби діаметром 16 см, якщо на шви витрачають 8 % матеріалу?
- 41.** Радіус основи циліндра збільшили на 20 %, а висоту зменшили на 20 %. Як при цьому змінилися:
 1) площа бічної поверхні циліндра; 2) об'єм циліндра?
- 4** 42. Залізобетонна панель має 3 м завдовжки, 1,5 м завширшки і 0,3 м заввишки. По всій її довжині розміщено 5 наскрізних циліндричних отворів діаметром 0,4 м. Знайдіть масу панелі, якщо густина залізобетону $\rho = 2,5 \text{ т/м}^3$.

До § 32

- 1** 43. Знайдіть бічну поверхню конуса, діаметр основи якого дорівнює 8 см, а твірна – 12 см.
44. Знайдіть об'єм конуса, у якого висота і діаметр основи дорівнюють по 6 см.
- 2** 45. Знайдіть об'єм і площу повної поверхні конуса, у якого твірна дорівнює 5 см, а радіус основи – 3 см.
46. Знайдіть площу основи конуса, твірна якого дорівнює 25 см, а висота – 24 см.
- 3** 47. Рівнобедрений прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $3\sqrt{2}$ см, обертається навколо одного з катетів. Знайдіть об'єм утвореного конуса.
48. Радіус основи конуса вдвічі більший за радіус основи циліндра. Знайдіть відношення об'єму конуса до об'єму циліндра, якщо висоти фігур рівні.
- 4** 49. Повна поверхня конуса дорівнює $588\pi \text{ см}^2$. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 37 см.

До § 33

- 1** 50. Знайдіть площу поверхні та об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 12 см.
- 2** 51. Площа поверхні баскетбольного м'яча дорівнює $144\pi \text{ см}^2$. Знайдіть радіус м'яча та його об'єм.
- 52.** Радіус цинкової кульки становить 9 см. Знайдіть із точністю до десятих масу кульки, якщо маса 1 см^3 цинку дорівнює 7 г.
- 3** 53. Поверхні двох куль відносяться як 1 : 4. Як відносяться:
 1) радіуси куль; 2) об'єми куль?
- 54.** Вісім мідних куль, радіус кожної з яких дорівнює 3 см, переплавлено в одну. Знайдіть:
 1) радіус утвореної кулі;

- 2) площу поверхні утвореної кулі;
 3) масу кулі (густина міді $\rho = 8,8 \text{ г/см}^3$).

4

55. Діаметр Меркурія становить 0,39 від діаметра Землі. Знайдіть:

- 1) який відсоток від площі поверхні Землі становить площа поверхні Меркурія;
 2) який відсоток об'єму Землі становить об'єм Меркурія.

56. Знайдіть відношення об'єму кулі радіуса r до об'єму правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює r .



Головне в розділі 6

ПРИЗМА

Площа бічної поверхні призми $S_{\text{бічн.}} = Ph$,

де P – периметр основи призми, h – бічне ребро.

Площа повної поверхні призми $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$,

де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи.

Об'єм призми $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$.

ПІРАМІДА

Площа бічної поверхні правильної піраміди $S_{\text{бічн.}} = pl$,

де p – півпериметр основи, l – апофема.

Площа повної поверхні піраміди $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$,

де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи.

Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$, де h – висота піраміди.

ЦИЛІНДР

Площа бічної поверхні циліндра $S_{\text{бічн.}} = 2\pi rh$,

де r – радіус основи циліндра, h – висота циліндра.

Площа повної поверхні циліндра

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \text{ або } S_{\text{п.п.}} = 2\pi r(h + r).$$

Об'єм циліндра $V = \pi r^2 h$.

КОНУС

Площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}} = \pi rl$,

де r – радіус основи конуса, l – твірна конуса.

Площа повної поверхні конуса $S_{\text{п.п.}} = \pi rl + \pi r^2$ або $S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r)$

Об'єм конуса $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

КУЛЯ

Площа поверхні кулі $S = 4\pi r^2$, де r – радіус кулі.

Об'єм кулі $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 9 КЛАСУ

- 1** 1. Знайдіть координати середини відрізка CD , якщо $C(-2; 4)$, $D(8; 10)$.
2. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}(-8; 15)$.
3. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як $5:2$. Як відносяться їхні площі?
- 2** 4. Дано вектори $\vec{b}(-2; 4)$ і $\vec{c}(-2; 4)$. Знайдіть координати вектора $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.
5. Знайдіть сторону AB трикутника ABC , якщо $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $BC = \sqrt{6}$ см.
6. Внутрішній кут правильного многокутника дорівнює 144° . Знайдіть:
1) кількість сторін многокутника;
2) сторону многокутника, якщо його периметр дорівнює 80 см.
- 3** 7. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; -1)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 135° .
8. Знайдіть довжину кола, вписаного у трикутник зі сторонами 13 см, 4 см і 15 см.
- 4** 9. Дві сторони трикутника дорівнюють 1 см і $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть третю сторону, якщо вона у $\sqrt{2}$ разів більша за радіус кола, описаного навколо трикутника. Скільки розв'язків має задача?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1. Метод координат на площині

1. Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ і } y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

-  2. Кінці відрізка AB мають координати $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Точка $M(x; y)$ ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Доведіть, що координати точки M можна знайти за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

3. З фізики відомо, що центр мас однорідної трикутної пластини міститься в точці перетину медіан. Знайдіть координати центра мас – точки $M(x; y)$ трикутника ABC , якщо $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

4. Вершини трикутника ABC мають координати $A(-4; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -1)$. Бісектриса кута A перетинає BC у точці N . Знайдіть координати точки N .
5. Нехай точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ лежать на одній прямій, причому $x_2 \neq x_3$ і $y_2 \neq y_3$. Доведіть, що

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

6. За якого значення a точки $A(a; -4)$, $B(2; -a)$, $C(8; 17)$ лежать на одній прямій?
7. Знайдіть координати третьої вершини рівностороннього трикутника ABC , якщо $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$.
8. Знайдіть невідомі координати двох вершин ромба $ABCD$ з кутом 60° , якщо відомо координати двох його вершин $A(-1; 0)$ і $B(1; 0)$.
9. Знайдіть точку перетину прямої $4x - 5y + 3 = 0$ з перпендикуляром, проведеним до неї з точки $A(-6; 4)$.
10. Доведіть, що відстань від точки $A(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

11. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y - 65 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$. Обчисліть його площу.
12. Точка $A(x_0; y_0)$ лежить на колі $x^2 + y^2 = r^2$. Складіть рівняння дотичної до кола, що проходить через точку A .
13. Скільки точок, обидві координати яких – цілі числа, належить колу $x^2 + y^2 = 10$?
14. Точка $A(1; 0)$ лежить на колі із центром у початку координат і є вершиною правильного трикутника, вписаного в це коло. Знайдіть координати двох інших вершин трикутника.
15. Складіть рівняння кола радіуса 10 , що дотикається до кола $x^2 + y^2 - 10y = 0$ у точці $A(3; 1)$.
16. За яких значень k пряма $y = kx - 5$ і коло $x^2 + y^2 = 9$:
1) мають одну спільну точку;
2) мають дві спільні точки;
3) не мають спільних точок?
17. З точки $A(1; 6)$ до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ проведено дотичні. Складіть рівняння цих дотичних.
18. Складіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, що паралельні прямій $2x + y - 7 = 0$.
19. На колі $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$ знайдіть найближчу до точки $A(3; 9)$ точку B . Знайдіть відстань від точки A до точки B .
20. Якого найменшого значення може набувати вираз

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}$$

Розділ 2. Вектори на площині

21. Дано чотирикутник $ABCD$ і точку O . Відомо, що $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.
22. Дано два паралелограми $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$, які мають спільну вершину A . Доведіть, що $CC_1 \leq BB_1 + DD_1$.
23. $ABCD$ – квадрат, $\overrightarrow{AB}(6; 8)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.
24. Через точку O перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) проведено пряму, паралельну основам, яка перетинає бічні сторони AD і BC у точках M і N . Доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \frac{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{DC}}{a + b}$, де $AB = a$, $CD = b$.
25. Дано трикутник ABC , $\overrightarrow{AB}(3; 4)$, $\overrightarrow{BC}(-5; 12)$, BL – бісектриса трикутника. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{BL}$.
26. Доведіть за допомогою векторів, що три висоти трикутника (або їхні продовження) перетинаються в одній точці.
27. Доведіть за допомогою векторів, що всі медіани трикутника перетинаються в одній точці й діляться цією точкою у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини.
28. Доведіть за допомогою векторів, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.
29. Доведіть, що вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.
-  30. Точки M_1 і M_2 лежать на прямій $ax + by + c = 0$. Доведіть, що вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{p}(a; b)$.
31. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; 1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(4; 5)$.
32. Напишіть рівняння прямої, що є дотичною до кола $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ у точці $A(-1; -1)$.
33. Виведіть формулу для знаходження косинуса кута між прямими $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

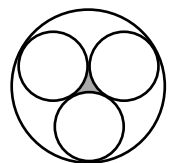
Розділ 3. Розв'язування трикутників

34. Для сторін трикутника a , b , c виконується рівність $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо найбільша сторона трикутника дорівнює $6\sqrt{2}$ см.
35. Медіани AM_1 і BM_2 трикутника ABC дорівнюють 9 см і 15 см відповідно, M – точка перетину медіан, $\angle AMB = 120^\circ$. Знайдіть довжину третьої медіани.
36. Площа трикутника дорівнює S , а довжини двох його сторін – a і b . Знайдіть площі трикутників, на які він ділиться бісектрисою кута між даними сторонами.

37. Усередині рівностороннього трикутника ABC дано точку M так, що $AM = 1$ см, $BM = 2$ см, $\angle AMB = 120^\circ$. Знайдіть CM .
38. Кут при вершині C рівнобедреного трикутника ABC у 4 рази більший за кут при основі. На стороні AB взято точку M таку, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть $\angle ACM$.
39. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взято відповідно точки M і N так, що $BM = \frac{1}{2}BC$ і $DN = \frac{1}{3}DC$. Доведіть, що $\angle MAN = 45^\circ$.
40. Обчисліть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b , а прилеглі до основи a гострі кути дорівнюють α і β .
41. Доведіть, що площу чотирикутника, вписаного в коло, можна обчислити за формулою $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де a, b, c, d – сторони чотирикутника, p – його півпериметр.
42. У коло радіуса R вписано трикутник, вершини якого ділять коло на частини у відношенні $2 : 5 : 17$. Знайдіть площу трикутника.
43. (Теорема Птолемея.) Чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло. Доведіть, що $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.
44. У трикутнику ABC через вершину A проведено пряму, що перетинає BC у точці D , причому $\frac{BD}{BC} = \alpha (\alpha < 1)$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AB , яка перетинає AC у точці E . Обчисліть відношення площі трикутника ABD до площі трикутника ECD .

Розділ 4. Правильні многокутники

45. Навколо круга описано рівнобічну трапецію з основами a і b . Знайдіть площу круга.
46. У коло вписано правильний трикутник ABK і квадрат $BCMN$. Знайдіть градусну міру кута ABC .
47. На сторонах правильного шестикутника зовні нього побудовано квадрати. Вершини квадратів, які не є вершинами шестикутника, сполучено послідовно відрізками.
- 1) Доведіть, що дванадцятикутник, який при цьому утворився, є правильним.
 - 2) Знайдіть площу дванадцятикутника, якщо сторона початкового шестикутника дорівнює α .
48. Дано прямокутний трикутник з гіпотенузою 2 і гострим кутом 60° . Знайдіть спільну частину двох кругів, що проходять через вершину прямого кута, із центрами у вершинах гострих кутів.
49. Накресліть круг, площа якого дорівнює площі кільця між двома даними концентричними колами.
50. У круг радіуса R вписано три круги однакового радіуса так, що кожен з них дотикається до двох інших (мал. 1). Обчисліть площу зафарбованої фігури.



Мал. 1

51. Центр кола, вписаного у прямокутний трикутник, лежить на відстанях $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см від кінців гіпотенузи. Знайдіть довжину кола.
52. На катетах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано круги. Доведіть, що сума площ частин цих кругів, що лежать поза описаним навколо цього трикутника кругом, дорівнює площі трикутника.
53. Навколо рівнобедреного трикутника з основою 6 см описано круг, довжина кола якого становить 10π см. Знайдіть відношення площі круга до площі трикутника.
54. Сторона правильного трикутника дорівнює a . Із його центра описано коло, радіус якого дорівнює $\frac{a}{3}$. Знайдіть площу тієї частини трикутника, що лежить поза колом.

Розділ 5. Геометричні перетворення

55. Дано пряму, коло і точку O . Побудуйте точки, симетричні одна одній відносно центра O , одна з яких належить прямій, а інша – колу.
56. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CD . Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD , дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC .
57. У трикутнику ABC на сторонах AB і BC позначено точки D і E так, що $DE \parallel AC$. Площа трикутника ABC дорівнює 8 см^2 , а площа трикутника DEC дорівнює 2 см^2 . Знайдіть відношення відрізка DE до сторони AC .
58. Побудуйте трикутник за трьома його медіанами.
59. Діагоналі прямокутника лежать на прямих $y = -3x + 1$ і $y = 3x - 5$.
1) Складіть рівняння осей симетрії прямокутника.
2) Знайдіть координати вершин прямокутника, якщо одна з його сторін проходить через точку $(2; -1)$.
60. На кожній медіані трикутника позначено точку, що ділить медіану у відношенні $1 : 3$, починаючи від вершини трикутника. У скільки разів площа трикутника з вершинами в цих точках менша від площі початкового трикутника?
61. Складіть рівняння образу кривої $x^2 - 4x + y^2 = 0$ при повороті навколо початку координат на кут 60° :
1) за годинниковою стрілкою; 2) проти годинникової стрілки.
62. Побудуйте квадрат із центром у даній точці так, щоб прямі, що містять дві його сусідні сторони, проходили через дві дані точки.
63. Крива, рівняння якої $x^2 + y^2 = 2(2 + 2y - x)$, при деякому паралельному перенесенні переходить у криву, рівняння якої $x^2 + y^2 = 2(2x + y - t)$.
1) Знайдіть t .
2) Напишіть рівняння образу прямої $2x - 3y + 6 = 0$ при такому перенесенні.

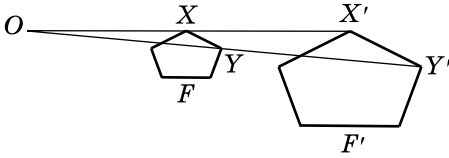
Розділ 6. Початкові відомості зі стереометрії

64. Чи існує шестикутна піраміда, у якої всі ребра рівні?
65. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють a , b , c . Знайдіть:
- 1) бічну поверхню піраміди;
 - 2) об'єм піраміди;
 - 3) площу основи;
 - 4) висоту.
66. Основою прямої призми є паралелограм, один із кутів якого дорівнює 30° . Площа основи дорівнює 4 дм^2 . Площі двох бічних граней призми дорівнюють 6 дм^2 і 12 дм^2 . Знайдіть об'єм призми.
67. Об'єм правильної восьмикутної призми дорівнює 8 м^3 , а її висота дорівнює $2,2 \text{ м}$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
68. Знайдіть відстань між серединами двох мимобіжних ребер куба, площа повної поверхні якого дорівнює 36 см^2 .
69. Куб, ребро якого дорівнює a , зрізаний по кутах так, що від кожної грані залишився правильний восьмикутник. Знайдіть об'єм утвореного многогранника.
70. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює $\frac{269}{32}$ см. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 13 см , 14 см і 15 см .
- 1) Доведіть, що основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо трикутника основи.
 - 2) Знайдіть об'єм піраміди.
71. Циліндр утворено обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін. Визначте об'єм V циліндра через площу S цього прямокутника і довжину C кола, яке описує точка перетину його діагоналей.
72. Висота конуса дорівнює діаметру його основи. Знайдіть відношення площі його основи до площі бічної поверхні.
73. Виразіть об'єм V конуса через його бічну поверхню S і відстань r від центра основи до твірної.
74. Із сектора з радіусом 6 см і дугою 120° виготовили конус. Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні конуса;
 - 2) об'єм конуса.
75. У циліндр вписано кулю так, що вона дотикається до основ і бічної поверхні циліндра. Знайдіть відношення:
- 1) об'єму кулі до об'єму циліндра;
 - 2) площі сфери до площі повної поверхні циліндра.
76. Трикутник зі сторонами 10 см , 17 см і 21 см обертається навколо більшої сторони. Обчисліть:
- 1) об'єм утвореної фігури обертання;
 - 2) поверхню утвореної фігури обертання.
77. У конус вписано кулю так, що вона дотикається до основи конуса і його бічної поверхні. Доведіть, що відношення повної поверхні конуса до поверхні кулі дорівнює відношенню їх об'ємів.

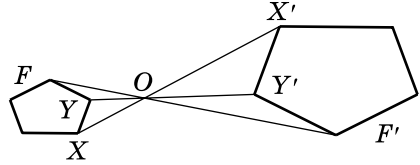
ГОМОТЕТІЯ

Нехай F – дана фігура і O – фіксована точка (мал. 1).

Через кожну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX' такий, що $OX' = k \cdot OX$, де $k > 0$. Отримаємо фігуру F' .



Мал. 1



Мал. 2

Якщо $k < 0$, то для кожної точки X фігури F проведемо промінь OX' , що є доповняльним до променя OX так, що $OX' = |k| \cdot OX$ (мал. 2). Отримаємо фігуру F' .

Перетворення фігури F , при якому кожна її точка X переходить у точку X' фігури F' у способи, які описано вище, називають *гомотетією*, точку O – *центром гомотетії*, число $k \neq 0$ – *коефіцієнтом гомотетії*.

Гомотетією із центром у точці O і коефіцієнтом k називають таке геометричне перетворення, при якому довільна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k| \cdot OX$, причому коли $k > 0$, то точки X і X' лежать на промені з початком у точці O , а якщо $k < 0$, то точки X і X' лежать відповідно на доповняльних променях з початком у точці O .

Фігури F і F' (мал. 1, 2) називають *гомотетичними*.

Дві фігури називають **гомотетичними**, якщо вони переходять одна в одну за допомогою гомотетії.

Якщо при гомотетії кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k| \cdot OX$, то кажуть, що *фігура F' гомотетична фігурі F з коефіцієнтом k* .

При гомотетії з коефіцієнтом $k = 1$ фігура переходить сама в себе.

Гомотетія із центром гомотетії O і коефіцієнтом $k = -1$ є симетрією відносно точки O . Дійсно, у цьому випадку кожна точка X перейде в точку X' так, що точка O буде серединою відрізка XX' .



Теорема (про гомотетію). Гомотетія є перетворенням подібності.

Доведення. Нехай X і Y – дві довільні точки фігури F , які гомотетією із центром у точці O і коефіцієнтом k переходять у точки X' і Y' фігури F' (мал. 1, 2).

Розглянемо випадок, коли $k > 0$ (мал. 1). $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$, тому $\triangle OXY \sim \triangle OX'Y'$ (за двома сторонами і кутом між ними).

Тоді $\frac{OX'}{OX} = \frac{OY'}{OY} = \frac{X'Y'}{XY} = k$. Звідси $X'Y' = k \cdot XY$.

Якщо $k < 0$ (мал. 2), то $\angle XOY = \angle X'OY'$ (як вертикальні). Міркуючи аналогічно випадку, якщо $k > 0$, доходимо висновку, що $X'Y' = |k| \cdot XY$.

Узагальнюючи, маємо, що $X'Y' = |k| \cdot XY$, тому гомотетія є перетворенням подібності.



Наслідок. Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$.

Приклад 1. Гомотетія з коефіцієнтом $k = -3$ переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$. Знайти сторони трикутника $A'B'C'$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см.

Розв'язання. Оскільки гомотетія з коефіцієнтом $k = -3$ є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k| = |-3| = 3$, то $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = 3$. А тому $A'B' = 3 \cdot 6 = 18$ (см), $B'C' = 3 \cdot 7 = 21$ (см), $A'C' = 3 \cdot 8 = 24$ (см).
Відповідь: 18 см, 21 см, 24 см.

Приклад 2. При гомотетії із центром у початку координат точка $A(2; -3)$ переходить у точку $A'(6; -9)$. Знайти коефіцієнт гомотетії.

Розв'язання. Нехай k – коефіцієнт гомотетії. Оскільки точки A і A' лежать в одній чверті, то вони лежать на одному промені з початком координат, тому $k > 0$. $k = \frac{OA'}{OA}$, де точка O – початок координат, що є центром гомотетії.

$$OA = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}; \quad OA' = \sqrt{6^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{13}. \quad k = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 3.$$

Відповідь: $k = 3$.



Що називають гомотетією? Що називають центром гомотетії, коефіцієнтом гомотетії? Які фігури називають гомотетичними? Сформулюйте та доведіть теорему про гомотетію. Сформулюйте наслідок із цієї теореми.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1.1.** Дано точки O і A . Побудуйте точку A' , гомотетичну точці A , із центром гомотетії O , якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 2; 2) 4.
- 1.2.** Дано точки O і B . Побудуйте точку B' , гомотетичну точці B , із центром гомотетії O , якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 3; 2) 5.
- 1.3.** Побудуйте в зошиті відрізок $AB = 2$ см і позначте точку O , що не лежить на цьому відрізку. Побудуйте відрізок, гомотетичний відрізку AB , із центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 3$.

- 1.4.** Побудуйте в зошиті відрізок $MN = 3$ см і позначте точку O , що не лежить на цьому відрізку. Побудуйте відрізок, гомотетичний відрізку MN , із центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 2$.
- 2** **1.5.** Середня лінія трикутника відтинає від нього гомотетичний трикутник. Визначте коефіцієнт гомотетії. Де знаходиться центр гомотетії?
- 1.6.** Дано точки O і B . Побудуйте точку B' , гомотетичну точці B , із центром гомотетії O , якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:
 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) -1 ; 4) -2 .
- 1.7.** Дано точки O і A . Побудуйте точку A' , гомотетичну точці A , із центром гомотетії O , якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:
 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -1 ; 4) -3 .
- 1.8.** (Усно.) Чи може гомотетія бути переміщенням? У якому випадку?
- 1.9.** Побудуйте трикутник, гомотетичний даному, із центром гомотетії в точці перетину медіан трикутника і коефіцієнтом гомотетії $k = 2$.
- 1.10.** Побудуйте прямокутник, гомотетичний даному, із центром гомотетії в точці перетину його діагоналей і коефіцієнтом гомотетії $k = 2$.
- 3** **1.11.** Дано точки A і A' . Побудуйте центр гомотетії, при якій A переходить в A' , якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:
 1) 2 ; 2) $\frac{1}{3}$.
- 1.12.** Дано точки B і B' . Побудуйте центр гомотетії, при якій B переходить у B' , якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:
 1) 3 ; 2) $\frac{1}{2}$.
- 1.13.** (Усно.) Чи можуть дві фігури бути: 1) гомотетичними, але не подібними; 2) подібними, але не гомотетичними; 3) гомотетичними і рівними?
- 1.14.** Гомотетія із центром у початку координат переводить точку B у точку B' . Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо:
 1) $B(2; -5)$, $B'(6; -15)$; 2) $B(-2; 8)$, $B'(-1; 4)$;
 3) $B(4; 5)$, $B'(-8; -10)$; 4) $B(-16; -4)$, $B'(4; 1)$.
- 1.15.** Гомотетія із центром у початку координат переводить точку A в точку A' . Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо:
 1) $A(-3; 4)$, $A'(-6; 8)$; 2) $A(20; 10)$, $A'(4; 2)$;
 3) $A(-5; -1)$, $A'(15; 3)$; 4) $A(2; -6)$, $A'(-1; 3)$.
- 4** **1.16.** Дано два паралельних, але не рівних між собою відрізки AB і CD . Чи може один з них перейти у другий при гомотетії? Якщо так, то поясніть, як знайти центр цієї гомотетії. Скільки таких центрів може бути?
- 1.17.** Дано дві паралельні прямі. Чи може одна з них перейти у другу при гомотетії? Якщо так, то поясніть, як знайти центр цієї гомотетії. Скільки таких центрів може бути?

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо геометрію за 8 клас

6. Да Вінчі. 13. Бутусін. 15. 28 см. 16. $AM = 4$ см, $MD = 3$ см. 17. 1) 50° ; 2) 70° . 18. 1) 40° ; 2) 20° . 19. 70° і 110° . 20. 36° і 144° . 21. 80° і 100° . 22. 50° і 130° . 23. 40 см, 20 см, 30 см. 24. 8 см, 14 см, 10 см. 25. 100° . 26. 70° . 27. 8 см. 28. 15 см. 29. 6 см, 4 см, 6 см. 44. Інна Дерусова. 45. 1) 8 см, 14 см, 18 см; 2) 12 см, 21 см, 27 см; 3) 20 см, 35 см, 45 см. 46. $1\frac{2}{3}$ см. 47. 12 см. 48. $BL = 4$ см, $LC = 5$ см. 49. 30 см. 50. 18 см. 51. 8 см. 52. 5 см. 53. 4 см. 70. На мал. 9: $x = 25$; на мал. 10: $x = 3$; на мал. 11: $x = 10$. 71. 14 см або 4 см, два випадки. 72. 48 см. 73. 80 см. 74. 1) $BC \approx 3,32$ см, $\angle A \approx 34^\circ$, $\angle B \approx 56^\circ$; 2) $AB \approx 8,54$ см, $\angle A \approx 21^\circ$, $\angle B \approx 69^\circ$. 75. 1) $AC \approx 7,48$ см, $\angle A \approx 34^\circ$, $\angle B \approx 56^\circ$; 2) $AB \approx 7,28$ см, $\angle A \approx 74^\circ$, $\angle B \approx 16^\circ$. 76. 45 см. 77. 168 см. 78. 62° . 93. 80° , 100° , 120° , 120° , 120° . 94. 125° , 123° , 121° , 119° , 117° , 115° . 95. 70 см². 96. 40 см². 97. 50 см². 98. 24 см². 99. 30 см². 100. 5 см. 101. 6 см. 102. 30 см². 103. 24 см². 104. 24 см². 105. 54 см². 106. 75 см² або 50 см².

Розділ 1

§ 1. 1.15. $C(7; -3)$ або $C(2; 4)$. 1.16. 1) $x_A = y_A$, $x_A \geq 0$; 2) $x_A = -y_A$, $x_A \leq 0$. 1.17. 2) Відстань від точки $M(x; y)$ до осі абсцис дорівнює $|y|$, а до осі ординат — $|x|$. 1.19. $(-4; 0)$, $(0; 5)$, $(4; 0)$, $(0; -5)$ або $(-5; 0)$, $(0; 4)$, $(5; 0)$, $(0; -4)$. 1.20. $(-3; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 0)$, $(0; -3)$. 1.21. $B(1; 3)$, $C(1; 5)$, $D(3; 5)$, або $B(5; 3)$, $C(5; 5)$, $D(3; 5)$, або $B(1; 3)$, $C(1; 1)$, $D(3; 1)$, або $B(5; 3)$, $C(5; 1)$, $D(3; 1)$. 1.22. Прямі $x = -3$ і $x = 3$. 1.23. Прямі $y = -2$ і $y = 2$. 1.25. 9,5 см, 10,5 см. 1.29. 500 відер. 1.30. 1) 44 см; 2) 8 см.

§ 2. 2.13. Х ст. 2.14. 5 місце. 2.21. 1) $\sin \alpha = 0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{1}{3}$, 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ або $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2.22. 1) $\sin \alpha = 0,96$, $\operatorname{tg} \alpha = -3\frac{3}{7}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$ або $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$. 2.24. 1) -1 ; 2) $\sqrt{3}$. 2.25. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0. 2.26. 1) $\alpha = 118^\circ$; 2) $\alpha = 68^\circ$ або $\alpha = 112^\circ$. 2.27. 1) $\beta = 145^\circ$; 2) $\beta = 80^\circ$ або $\beta = 100^\circ$. 2.28. Порада. 1) Використати $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$. 2) Існує два кути, що задовольняють умову. 2.30. 0. 2.31. 1) 1; 2) 5. 2.32. 1) 1; 2) 6. 2.34. 25 см. 2.35. $2\sqrt{ab}$ см. 2.39. 24 куці. 2.40. 5 см.

§ 3. 3.9. 1225 м. 3.18. $N(-5; 5)$. 3.19. $D(4; -31)$. 3.20. 1) Так; 2) ні. 3.21. $\sqrt{26}$. 3.22. $2\sqrt{2}$. 3.23. 26. 3.24. 34. 3.25. 5. 3.26. 13. 3.27. 24. 3.28. $10\sqrt{2}$. 3.29. $y = 22$ або $y = -8$. 3.30. $x = 10$ або $x = -4$. 3.31. $(-3; 0)$. 3.32. $(0; 8)$. 3.33. $N(3,5; 5)$. 3.34. $D(11; 4,5)$. 3.35. В між А і С. 3.36. М між Р і L. 3.39. $-2 \pm 2\sqrt{3}$. 3.40. $\angle A \approx 8^\circ 8'$, $\angle B \approx 81^\circ 52'$. 3.41. $\angle M \approx 26^\circ 34'$, $\angle L \approx 63^\circ 26'$. 3.43. 14 см. 3.44. 50 см. 3.45. Одна з невідомих сторін дорівнює 25 см, а інша — $5\sqrt{17}$ см або $5\sqrt{65}$ см. 3.50. 0,5 м.

§ 4. 4.18. 3 золотих медалі, 1 срібна медаль. 4.23. $(x - 11)^2 + y^2 = 100$ або $(x + 1)^2 + y^2 = 100$. 4.24. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ або $x^2 + (y + 1)^2 = 25$. 4.25. 1) Ні; 2) так. 4.26. 1) Так; 2) ні. 4.27. 1) С; 2) В; 3) А і D. 4.28. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 =$



$= 169$. **4.29.** $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 100$. **4.30.** 1) Зовнішній дотик; 2) немає спільних точок. **4.31.** 1) Перетин; 2) внутрішній дотик. **4.32.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **4.36.** $A(1; 9)$, $B(4; 0)$. **4.40.** 1) 200 кг; 2) 11 000 грн; 3) 2400 кг; 4) 168 000 грн; 5) 157 000 грн.

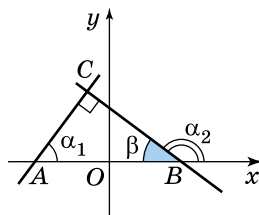
§ 5. 5.22. $10x - y - 2 = 0$. **5.23.** $5x + y - 20 = 0$. **5.24.** $(-3; -2)$. **5.25.** $(-4; -5)$. **5.28.** 1) $x + y + 5 = 0$; 2) $\sqrt{3}x - y + (4\sqrt{3} - 1) = 0$. **5.29.** 1) $x - y + 3 = 0$; 2) $\sqrt{3}x + y - (5 + 2\sqrt{3}) = 0$. **5.32.** $a = -5$. **5.33.** $b = -4$. **5.34.** $2x - y + 4 = 0$. **5.35.** $3x + y - 3 = 0$. **5.36.** Доведення (мал. 1). Розглянемо прямі CA і CB , $CA \perp CB$, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Тоді $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2)) = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (-\operatorname{tg} \beta) =$
 $= -\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha_1) = -\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha_1)}{\cos(90^\circ - \alpha_1)} = -\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1} = -1$.

Отже, $k_1 k_2 = -1$. Нехай прямі задано рівняннями $y = k_1 x + l_1$ і $y = k_2 x + l_2$, де $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, та $k_1 k_2 = -1$ (мал. 1). Тоді $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$, а тому $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta = 1$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$. Можна довести, що для гострого кута α справ-

джується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$. Тому $\alpha_1 = 90^\circ - \beta$,

$\alpha_1 + \beta = 90^\circ$, а отже, $\angle ACB = 90^\circ$. **5.37.** $2x + y - 1 = 0$.

5.38. $3x - y - 7 = 0$. **5.42.** Так.



Мал. 1

Вправи для повторення розділу 1

16. 1) $\sin^2 \alpha$; 2) $\cos^2 \alpha$. **17.** 1) «Мінус»; 2) «мінус». **18.** 1) Так; 2), 3) ні. **20.** 1. **22.** Порада. Розгляньте два випадки. **26.** 1) Рівнобедрений; 2) рівносторонній; 3) різносторонній. **30.** $(0; 0)$, $(-6; 0)$, $(0; 8)$. **31.** $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. **32.** $F(5; 12)$. **34.** 1) Так; точка B між точками A і C ; 2) ні. **36.** $(0; 2)$. **38.** $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. **48.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ або $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. **49.** $(3; 3)$, або $(3; -3)$, або $(-3; 3)$, або $(-3; -3)$. **50.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **51.** $(x - 4)^2 + y^2 = 25$. **52.** $(14; 0)$. **Порада.** Спочатку запишіть рівняння кола, для якого AB є діаметром. **53.** Коло $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **54.** 1) Перетин; 2) зовнішній дотик. **63.** $a = 0,2$, $b = 0,2$. **65.** Так. **68.** **36.** **69.** $x - y + 3 = 0$. **71.** $y = 6$, $y = -4$. **72.** $(8; 1)$, $(7; 4)$, $(7; -2)$. **74.** $x - 2y + 6 = 0$.

Розділ 2

§ 6. 6.18. Ні. **6.19.** $N(3; 0)$. **6.20.** $K(1; 0)$. **6.21.** $|\overline{DC}| = 3$, $|\overline{AD}| = 4$, $|\overline{BD}| = 5$, $|\overline{AM}| = \sqrt{13}$. **6.22.** $|\overline{BD}| = 4\sqrt{2}$, $|\overline{AB}| = 4$, $|\overline{DN}| = 2$, $|\overline{BN}| = 2\sqrt{5}$. **6.24.** 1) $ABCD$ – ромб; 2) $ABCD$ – трапеція. **6.25.** 1) $\overline{BE} \parallel \overline{CE}$, $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$, $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$; 2) $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CF}$, $\overline{BE} \uparrow \uparrow \overline{AD}$; 3) $\overline{BE} \uparrow \downarrow \overline{CE}$, $\overline{AD} \uparrow \downarrow \overline{CE}$; 4) $\overline{AB} = \overline{CF}$; 5) $|\overline{AB}| = |\overline{CF}|$, $|\overline{BE}| = |\overline{CE}|$. **6.26.** 1) $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$, $\overline{AF} \parallel \overline{DF}$, $\overline{AF} \parallel \overline{EC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{EC}$; 2) $\overline{AF} \uparrow \uparrow \overline{EC}$; 3) $\overline{AE} \uparrow \downarrow \overline{CF}$, $\overline{AF} \uparrow \downarrow \overline{DF}$, $\overline{DF} \uparrow \downarrow \overline{EC}$; 4) $\overline{AF} = \overline{EC}$; 5) $|\overline{AF}| = |\overline{EC}|$, $|\overline{AE}| = |\overline{CF}|$.

6.28. $A(-5; 0)$ або $A(19; 0)$. 6.30. $5,20 \text{ м}^2$. 6.31. 5, якщо $y = 3 - \frac{3}{4}x$, де $x \in [0; 4]$.

Порада. Розглянемо деяку точку $M(x; y)$ та точки $A(0; 3)$ і $B(4; 0)$. Тоді заданий в умові вираз є сумою $MA + MB$. Ця сума набуває найменшого значення, якщо точка M належить відрізку AB .

§ 7. 7.13. 23 медалі. 7.14. 3-тє місце. 7.17. $(2; -2)$. 7.18. $(1; 1)$. 7.19. $(-9; 12)$. 7.20. $(4; -8)$. 7.21. $(a + c; b)$. 7.22. $M(-3; 6)$. 7.25. $x = 4$ або $x = -4$. 7.26. $y = 6$ або $y = -6$. 7.29. $\vec{a}(3; 1)$ або $\vec{a}(-1; -3)$. 7.30. $\vec{b}(-1; 2)$ або $\vec{b}(2; -1)$. 7.31. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 13$. 7.34. 48 см. 7.35. 4320 грн. 7.36. Так, $\angle ANB = 90^\circ$.

§ 8. 8.11. 3 рази. 8.13. 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) нуль-вектор; 3) $\overrightarrow{CD}$; 4) нуль-вектор. 8.14. 1) $\overrightarrow{CD}$; 2) нуль-вектор. 8.18. $K(5; -4)$. 8.19. $A(3; -9)$. 8.20. $x = -5$. 8.21. $y = 8$. 8.23. 3 см. 8.24. $\frac{7}{8}$. 8.25. *Примітка.* Візьміть до уваги максимальні розміри бруса. 20,7 см і 29,3 см.

§ 9. 9.17. 1) 13; 2) $\sqrt{130}$. 9.18. 1) 17; 2) $\sqrt{85}$. 9.19. 1) $\vec{m}(3; -4)$; 2) 5 разів. 9.22. 1) $m = 15$; співнапрямлені; 2) $m = 2$; протилежно напрямлені. 9.23. 1) $n = -2$; протилежно напрямлені; 2) $n = 4$; співнапрямлені. 9.24. -4 . 9.25. 2. 9.26. $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$. 9.28. $\vec{a}(-4; 3)$ або $\vec{a}(4; -3)$. 9.29. $\vec{b}(10; -24)$ або $\vec{b}(-10; 24)$. 9.32. $A\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. 9.34. 14 см, $55\sqrt{3} \text{ см}^2$. 9.35. 72° . 9.36. 500. 9.37. $2\sqrt{5} \text{ см}$.

§ 10. 10.16. $x = 10$. 10.17. $y = 8$. 10.18. 45° . 10.19. 135° . 10.20. $45^\circ; 90^\circ; 45^\circ$; прямокутний. 10.21. $\cos K = 0$, $\cos M = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos L = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, прямокутний. 10.22. 1) 0° ; 2) 60° ; 3) 180° ; 4) 120° . 10.23. -6 ; 16. 10.24. 12; 0. 10.27. 18 годин. 10.29. 1) $\sqrt{31}$; 2) $\sqrt{19}$. 10.30. 1) $\sqrt{39}$; 2) $\sqrt{181}$. 10.31. 120° . 10.33. $\vec{a}(2; -8)$. 10.34. $\vec{b}(9; -3)$. 10.35. 0. 10.36. 20. 10.37. $\vec{d}(3; 6)$ або $\vec{d}(-3; -6)$. 10.38. $\vec{c}(5; 1)$ або $\vec{c}(-5; -1)$. 10.39. 12. 10.41. $m = 4$ або $m = -4$. 10.42. Ромб. 10.43. Так. 10.44. $d\sqrt{2}$.

Вправи для повторення розділу 2

7. $|\overrightarrow{AC}| = 13$, $|\overrightarrow{DC}| = 5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{74}$. 9. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так. 10. 20. 16. 1) $C(-8; 11)$; 2) $C(1; -1)$. 19. $x = 3$ або $x = -3$. 21. $\vec{c}(1; 4)$. 26. $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$. 27. 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\vec{0}$. 28. 1), 2) Так; 3) ні. 32. $|\vec{c}| > |\vec{d}|$. 33. Якщо $x = 3$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; якщо $x = -3$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. 35. $-\frac{1}{2}$. 38. $\vec{c}(4; 6)$, $\vec{d}(3; 2)$. 40. $x = 5$. 47. $\frac{13}{85}$. 48. 1) $y < 8$; $y \neq -0,5$; 2) $y = 8$; 3) $y > 8$. 49. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B \approx 53^\circ$, $\angle C \approx 37^\circ$. 52. -223 . 53. $-\frac{5}{11}$. 54. $-\frac{3}{5}$.

Розділ 3

§ 11. 11.10. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. 11.11. 135° . 11.12. 30° . 11.13. 1) Гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний; 4) тупокутний. 11.14. 1) Тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний; 4) гострокутний. 11.15. $\sqrt{106}$ см.

11.16. $\sqrt{34}$ см. 11.17. 13 см. 11.18. $\frac{1}{2}\sqrt{145}$ см. 11.19. 20 см. 11.20. 30 см.

11.21. 6 см, 10 см, 14 см. 11.22. 15 см, 21 см, 24 см. 11.23. 3 см або 5 см.

11.24. 7 см. 11.25. 8 см і 14 см. 11.26. 10 см і 15 см. 11.27. 26 см. 11.28. 12 см

і 14 см. 11.29. $\sqrt{10}$ см. 11.30. 14 см. 11.33. 8 см і 15 см. 11.34. $3\sqrt{10}$ см.

11.35. $2\sqrt{13}$ см або $2\sqrt{109}$ см. 11.36. $\sqrt{65}$ см або $\sqrt{233}$ см. 11.37. 32 см.

11.38. 30 см. 11.39. $\frac{\sqrt{274}}{4}$ см. 11.40. $\frac{\sqrt{595}}{7}$ см. 11.41. $6\sqrt{145}$ см. *Порада.* Якщо

M – точка перетину медіан, то $AM = \frac{2}{3}AP$, $BM = \frac{2}{3}BN$. Медіана $\triangle AMB$,

що проведена з вершини M , дорівнює третині невідомої медіани $\triangle ABC$.

11.42. $\frac{4d\sqrt{3}}{3}$. 11.45. 25 см. 11.46. 75 см². 11.47. $c \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$, $c \cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$.

11.52. 1) 153 плитки; 2) 18 972 грн. 11.53. 90° .

§ 12. 12.17. 30° . 12.18. 30° . 12.19. 60° або 120° . 12.20. 45° або 135° .

12.21. 45° або 135° . 12.22. 30° або 150° . 12.23. 12 см. 12.24. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. 12.25. 2 см.

12.26. $(3\sqrt{3} + 5)$ см. 12.27. $AB = (3 + \sqrt{6})$ см, $AC = (2 + \sqrt{6})$ см. 12.28. 7 см

або $\sqrt{97}$ см. 12.29. $\frac{2d}{\sin(\alpha + \beta)}(\sin \alpha + \sin \beta)$. 12.30. $\frac{m \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$. 12.31. $\frac{c \cos \alpha \sin \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)}$.

12.33. 7 см. 12.34. $\frac{d}{2}\sqrt{4a^2 - d^2}$. 12.35. $a^2 : b^2$. 12.38. 37° . 12.39. *Порада.* Нехай

точка O – точка перетину діагоналей прямокутника, N – деяка точка кола, L і M – основи перпендикулярів, які проведено з точки N до діагоналей прямокутника. Розгляньте коло, діаметр якого ON , та доведіть, що точки L і M належать цьому колу.

§ 13. 13.5. Беленюк. 13.6. Ржищів. 13.9. $\approx 84,86$ м. 13.12. 1) $\angle B \approx 37^\circ 59'$, $\angle C \approx 62^\circ 1'$, $AB \approx 7,17$ см; 2) $\angle C \approx 37^\circ 19'$, $\angle A \approx 82^\circ 41'$, $BC \approx 11,45$ см; 3) немає розв'язків; 4) $\angle A \approx 41^\circ 49'$, $\angle C \approx 108^\circ 11'$, $AB \approx 5,70$ см або $\angle A \approx 138^\circ 11'$, $\angle C \approx 11^\circ 49'$, $AB \approx 1,23$ см. 13.13. 1) $\angle A \approx 21^\circ 9'$, $\angle B \approx 38^\circ 51'$, $AC \approx 8,69$ см; 2) $\angle B \approx 34^\circ 51'$, $\angle C \approx 105^\circ 9'$, $AB \approx 13,51$ см; 3) немає розв'язків; 4) $\angle A \approx 20^\circ 32'$, $\angle C \approx 142^\circ 28'$, $AB \approx 10,42$ см або $\angle A \approx 159^\circ 28'$, $\angle C \approx 3^\circ 32'$, $AB \approx 1,06$ см. 13.14. 4,75 см, $62^\circ 1'$, $117^\circ 59'$. 13.15. 5,23 см, 7,39 см, $76^\circ 34'$, $103^\circ 26'$. 13.16. 4,97 см, 2,16 см, 6,3 см, 2,16 см, 72° , 108° . 13.17. 7,57 см, 6,47 см, 7,57 см, 1,04 см, 69° , 111° . 13.18. Так. 13.19. 60° , 6,51 см, 5,31 см або 20° , 13,44 см, 16,48 см. 13.20. 6,24 см, 76° , 44° або 10,44 см, 35° , 25° . *Порада.* Необхідно розглянути три випадки, але розв'язок матимуть лише два з них. 13.21. ≈ 318 м. 13.24. $4abc \cos \alpha$. 13.25. $4x - y - 3 = 0$.

§ 14. 14.20. 11,2 см. 14.21. 28,8 см. 14.22. 96 см². 14.23. $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см².

- 14.24. 10 см, 10 см, $10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см. 14.25. 6 см, 6 см, $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см.
 14.27. 18,125 см. 14.28. 42,5 см. 14.29. 1,5 см. 14.30. $1\frac{1}{3}$ см. 14.31. 4 : 9. 14.32. 1 : 2.
 14.33. $50\sqrt{2}$ см². 14.34. $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha + \beta)$. 14.35. $48\sqrt{10}$ см².
 14.36. $24\sqrt{91}$ см². 14.38. 3 : 5. 14.39. $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ см². 14.40. $\frac{1}{2}\sqrt{127}$ см². 14.41. 8 : 7.
 14.42. 15 : 17. 14.52. 1 км.

Вправи для повторення розділу 3

7. 400 см². 8. $5\sqrt{3}$ см і 10 см. 9. 30 см. 10. Тупокутний. 11. 135° . 12. $\frac{1}{2}\sqrt{97}$ см.
 13. 6 см і $(3 + \sqrt{22})$ см. 14. $\frac{\sqrt{14}}{12}$. 15. $\frac{m}{4\cos\alpha}\sqrt{1+8\cos^2\alpha}$. 16. $\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.
 17. $\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. 25. 1 : $\sqrt{3}$: 2. 26. 45° , 60° , 75° . 27. 1) Так; 2) ні. 28. 60°
 або 120° . 29. $2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta))$. 31. $\frac{4}{45}\sqrt{690}$ см. 32. $\frac{b\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)}$.
 33. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. 38. 1) $AB = \sqrt{166}$ см, $\angle A \approx 41^\circ 10'$, $\angle B \approx 80^\circ 50'$, $\angle C \approx 58^\circ$;
 2) $AB = 2\sqrt{10}$ см, $AC = 2\sqrt{58}$ см, $\angle A \approx 48^\circ 22'$, $\angle B \approx 108^\circ 26'$, $\angle C \approx 23^\circ 12'$.
 39. 4 год 30 хв. 40. Через пункт В. 45. 24 см. 46. $80\sqrt{3}$ см². 47. $R = 16,25$ см,
 $r = 3$ см. 48. 12,5 см. 49. $4\sqrt{3}$ см. 50. $\sqrt{13}$ см або $\sqrt{37}$ см. 51. $2\frac{1}{7}$ см² і $2\frac{6}{7}$ см².
 52. $\frac{1}{2}\sqrt{26}$ см². 53. $20\sqrt{3}$ см². *Порада.* Доведіть, що площа трикутника АМВ
 дорівнює половині площі трикутника АВС. 54. 84 см². 55. 24 см², 100 см²,
 116 см². 56. 1224 см². 57. 12 см. *Порада.* Нехай АВСD – трапеція, $AB = 4$ см,
 $CD = 25$ см, $AD = 13$ см, $BC = 20$ см. Проведіть АЕ так, що $AE \parallel BC$, Е – на-
 лежить стороні CD, і розгляньте $\triangle AED$.

Розділ 4

- § 15. 15.13. 1) 24; 2) 24 серпня – День Незалежності України.
 15.14. 2) V ст. 15.24. 12. 15.25. 18. 15.26. 9. 15.27. 10. 15.28. 4 см. 15.29. 8 см.
 15.32. $n = 4$, $a_4 = 12\sqrt{2}$ см. 15.33. $n = 6$, $a_6 = 4$ см. 15.34. $32\sqrt{2}$ см². 15.35. 27 см².
 15.36. $\sqrt{2}$ см. 15.39. 1) 6 см, 6 см; 2) 2 см, 18 см. 15.40. 432 см². 15.42. 1) 4 бан-
 ки; 2) 1480 грн. 15.43. 45 см.
 § 16. 16.7. 2) 4 м. 16.17. 18 см. 16.18. 27 см. 16.19. 40° . 16.20. 72° .
 16.21. 6,54 м. 16.22. 8. 16.23. 6. 16.24. 12π см. 16.25. 16π см. 16.26. 4π см.
 16.27. 10π см. 16.28. 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$. 16.29. 1) 6 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см.
 16.30. 12π см. 16.31. 20π см. 16.32. $\frac{725\pi}{24}$ см. 16.35. 1) 96 см²; 2) 24 см,
 $7\frac{5}{13}$ см, 6,4 см; 3) 3 см; 4) 16,25 см. 16.36. $3a$ см. 16.37. 8 м.

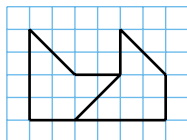
§ 17. 17.18. 1) $\approx 16,1$ кг; 2) 7245 грн. 17.19. 1) 680 троянд; 2) 5440 грн.
 17.20. 16π см². 17.21. π см². 17.22. 2π см². 17.23. 6π см². 17.24. 21π см².
 17.25. $(50\pi - 100)$ см². 17.26. $(100\pi - 96)$ см². 17.27. 1) $\approx 0,8$ кг,
 $\approx 1,7$ кг; 2) 1080 грн. 17.28. 30 см. 17.29. 6 см. 17.30. 1) $(12\pi - 36)$ см²;
 2) $(48\pi - 36\sqrt{3})$ см²; 3) $(90\pi + 36\sqrt{2})$ см². 17.31. 1) $(4,5\pi - 9\sqrt{2})$ см²;
 2) $(9\pi - 18)$ см²; 3) $(21\pi + 9)$ см². 17.32. $(12\pi - 9\sqrt{3})$ см², $(24\pi + 9\sqrt{3})$ см².
 17.33. $(24\pi - 36\sqrt{3})$ см², $(120\pi + 36\sqrt{3})$ см². 17.34. $\frac{15\pi}{4}$ см². 17.35. $128\sqrt{3}$ см².
 17.36. $\frac{a^2(4-\pi)}{4}$, $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$, $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$. 17.38. 9. 17.39. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. 17.41. Тарас на
 1 хв 34 с. 17.42. $\sqrt{7}$.

Вправи для повторення розділу 4

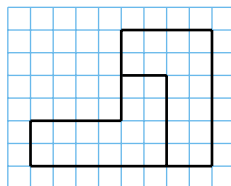
8. 30. 9. 12 см. 10. $8\sqrt{3}$ см. 11. 60° . 12. $r = (48 - 24\sqrt{3})$ см, $R = (32\sqrt{3} - 48)$ см.
 14. $\frac{r(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$ або $\frac{r(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$. 15. $8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$. 16. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 17. *Порада*. По-
 будуйте спочатку рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого a ,
 його гіпотенуза – сторона правильного шестикутника. 18. $8R^2$. 24. На 4 см.
 25. 24 см. 26. $\approx 36,2$ км/год. 27. 12 см. 28. $\frac{\sqrt{3}\pi a}{6}$. 29. $\frac{25}{3}\pi$ см. 30. 13π см.
 31. $\approx 16,4$ см. 32. 1) $\frac{\pi a\sqrt{2+\sqrt{3}}}{6}$; 2) $\frac{5\pi a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{6}$. 33. 1) $\frac{4l}{3\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}l}{4\pi}$.
 34. $\frac{\pi r}{2}$, $\frac{2\pi r}{3}$, $\frac{5\pi r}{6}$. 41. $1 : 9$. 42. 3π см². 43. $\pi : 2$. 44. 4 см. 45. 1) $(54\pi - 81\sqrt{3})$ см²;
 2) $(121,5\pi - 81\sqrt{2})$ см²; 3) $(135\pi - 81)$ см²; 4) $(216\pi + 81\sqrt{3})$ см²;
 5) $(270\pi + 81\sqrt{3})$ см²; 6) $(297\pi + 81)$ см². 46. $(16\pi - 32)$ см²; $(48\pi + 32)$ см².
 47. $\frac{3\pi r^2}{2}$ см². 48. $\pi r^2(3 + 2\sqrt{2})$. 49. $\frac{C_1^2 - C_2^2}{4\pi}$. 50. $\frac{R^2}{2}(\pi + \sqrt{3})$.

Розділ 5

§ 18. 18.9. Так. 18.10. Так. 18.11. Ні. 18.12. Ні. 18.13. Так. *Порада*. Ра-
 діуси кіл рівні. 18.14. Ні. *Порада*. Радіуси кіл різні. 18.15. Див. малюнок 1.
 18.16. Див. малюнок 2. 18.19. 12 см. 18.20. 72° . 18.21. 1) 11 рулонів.



Мал. 1



Мал. 2

§ 19. 19.9. 1) $x = 9$, $y = 5$; 2) у 14 років. 19.10. 1) $x = -11$, $y = 15$; 2) 4 нагороди.
 19.14. 1) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; 2) $(x + 4)^2 + (y - 13)^2 = 16$. 19.15. 1) $(x - 1)^2 +$
 $+(y + 5)^2 = 9$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 11)^2 = 9$. 19.16. 1) $2x - y - 5 = 0$; 2) $2x - y - 3 = 0$.

19.17. 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $x + 2y + 13 = 0$. 19.20. 45° , 45° . 19.21. 105° .

19.22. $AC = 5$ см, $AB = \sqrt{41}$ см або $AB = \sqrt{137}$ см.

§ 20. 20.11. 1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = -2$. 20.12. 1) $x = -5$, $y = -6$; 2) $x = 5$, $y = 6$. 20.17. 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $2x + 3y + 6 = 0$. 20.18. 1) $4x + y + 8 = 0$; 2) $4x + y - 8 = 0$. 20.21. $3\sqrt{3} : 8$. 20.22. $\approx 17,17$ м. 20.23. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

§ 21. 21.13. На 90° за або проти годинникової стрілки. 21.14. 1) $m = -4$, $n = -3$. 21.15. 1) $m = 3$, $n = 4$. 21.16. $A'(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. 21.17. $B'(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. 21.18. *Порада*. Побудуйте рівносторонній трикутник, тоді буде отримано кут 60° . 21.24. 143,6 см.

§ 22. 22.10. 1) Ні; 2) так. 22.11. 1) Ні; 2) так. 22.12. $(x + 8)^2 + (y - 9)^2 = 15$. 22.13. $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 7$. 22.14. $x + 2y - 1 = 0$. 22.15. $3x - y + 3 = 0$. 22.16. 1) $2x - 5y = 0$; 2) $2x - 5y - 9 = 0$. 22.17. 1) $3x - 2y = 0$; 2) $3x - 2y - 14 = 0$. 22.20. 128 см². 22.24. $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$.

§ 23. 23.20. Ні. 23.21. Ні. 23.22. 1) 6 см, 8 см, 10 см, 12 см; 2) 18 см, 24 см, 30 см, 36 см; 3) 15 см, 20 см, 25 см, 30 см. 23.23. 1) 15 см, 20 см, 25 см, 30 см, 35 см; 2) 24 см, 32 см, 40 см, 48 см, 56 см; 3) 6 см, 8 см, 10 см, 12 см, 14 см. 23.25. 18 см або 8 см. 23.26. 9 см або 36 см. 23.28. $\frac{b^2}{a}$. 23.30. Так. 23.32. 4 см, 4 см, 6 см, 8 см, 12 см і 6 см, 6 см, 9 см, 12 см, 18 см. 23.33. 8 см, 8 см, 12 см, 20 см і 6 см, 6 см, 9 см, 15 см. 23.38. $(588 - 392\sqrt{2})$ см². 23.41. 24.

§ 24. 24.9. 2 : 1. 24.10. 4 : 3. 24.11. 108 см². 24.12. 6 см. 24.13. 18 см² і 32 см². 24.14. 125 см² і 80 см². 24.15. 1 : 10 000. 24.16. 10^6 . 24.17. 4 см. 24.18. 6 см. 24.20. 12 см, 21 см, 24 см і 20 см, 35 см, 40 см. 24.21. 10,5 м. 24.22. 2 см і $\sqrt{2}$ см, або $(4 + 2\sqrt{3})$ см та $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$ см.

Вправи для повторення розділу 5

5. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. 6. Ні. 8. Так. 17. Ні. 18. *Порада*. Побудувати пряму, симетричну одній з даних відносно заданої точки. 29. *Порада*. Розглянути точку перетину прямої AB' з прямою l , де B' – точка, симетрична точці B відносно прямої l . 34. 60° . 35. $C'(1; \sqrt{3})$. *Порада*. Точка C' належить прямій $y = \sqrt{3}x$. 36. 1) $x + 2y - 1 = 0$; 2) $x + 2y + 1 = 0$. 45. *Порада*. Образом є коло $x^2 + y^2 = 5$. 46. $(-0,5; -1)$. 53. Так. 54. Ні. 55. Ні. 57. 1) Ні; 2) ні. 58. Ні. 59. $\sqrt{ab}$. 65. 256 см² або 81 см². 66. 1 : 3. 67. 12 см і 8 см. 68. 600 м². 69. Зменшиться в 9 разів. 70. 4 : 3. 71. 4 : 5. 72. 5 см. 73. *Порада*. Сторони шуканого чотирикутника у 1,5 раза більші за сторони заданого, а відповідні кути рівні між собою.

Розділ 6

§ 26. 26.14. 1) 13 см; 2) 7,5 см. 26.15. 1) 10 см; 2) 15 см. 26.16. Паралельні, мимобіжні або перетинаються. 26.17. Мимобіжні або перетинаються. 26.18. 28. 26.19. 105 см. 26.20. $c \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$, $c \cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$. 26.21. $\approx 593,5$ м². 26.22. 3 : 5 : 7.

§ 27. 27.11. 1 см, 5 см, $2\sqrt{6}$ см. 27.12. 14 см, 10 см, $4\sqrt{6}$ см. 27.13. Ні. 27.14. Так. 27.15. 6 см, 8 см. 27.16. 5 см, 6 см. 27.17. 14 см, $55\sqrt{3}$ см².

27.18. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. 27.19. 1) 17 м; 2) 1360 грн. 27.20. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

§ 28. 28.11. 1), 2) Так; 3), 4) ні. 28.12. 1) Ні; 2), 3), 4) так. 28.13. 1), 2) Так; 3) ні. 28.14. 1), 2), 3) Так. 28.15. 1), 2), 3) Так. 28.16. 1), 2), 3) Так. 28.17. *Порада*. Якщо дві площини α і β перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої m , мають спільну точку K , то із цієї точки можна провести два перпендикуляри до прямої m , що неможливо. 28.18. 50л см. 28.19. $10\frac{5}{6}$ см. 28.20. 8 разів.

§ 29. 29.9. 2640 см³, 1224 см². 29.10. 180 см³, 252 см². 29.11. 248 см², 240 см³. 29.12. $54\sqrt{3}$ см³. 29.13. 256 см³. 29.14. 1) 68 см²; 2) 48 м³; 3) 288 м³. 29.15. 75 см². 29.16. *Порада*. Оскільки відомий тупий кут трапеції, то можна знайти гострий. 29.17. ≈ 46 відер. 29.18. $46\frac{2}{3}$ см.

§ 30. 30.9. 1) $1,5a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$. 30.10. 1) $\sqrt{3}b^2$; 2) $b^2(\sqrt{3}+1)$. 30.11. 2) 1536 см³. 30.12. $9\sqrt{3}$ см³. 30.13. 7 см. 30.14. $a^2 : b^2$. 30.15. $\approx 1,34$ м. 30.16. $1\frac{23}{37}$ см.

§ 31. 31.11. 1) Результат буде однаковим в обох випадках; 2) навколо сторони a ; 3) навколо сторони a . 31.13. 45 214 см. 31.14. ≈ 8310 відер. 31.15. 15 см, 20 см, 25 см, 150 см². 31.16. 180 см². 31.17. 1) 204 елементи; 2) 17 136 грн. 31.18. 120°.

§ 32. 32.9. 600π см³. 32.10. 768π см³. 32.11. $5\sqrt{3}$ см. 32.12. $4\sqrt{3}$ см. 32.13. 300π см². 32.14. 1080π см³. 32.16. 24 см². 32.18. $2(3\sqrt{3}-\pi)$ см².

§ 33. 33.10. У 8 разів. 33.11. 1) 9 : 16; 2) 27 : 64. 33.12. 46π см³ $\approx 144,5$ см³. 33.13. 480π см³ ≈ 1508 см³. 33.14. 169π см². 33.15. 7. 33.16. У 25 разів. 33.17. $r^2 + cr$.

Вправи для повторення розділу 6

6. Мимобіжні або паралельні. 7. Паралельні, мимобіжні або перетинаються. 12. 15 см, 20 см, 12 см. 13. Паралельні, мимобіжні або перетинаються. 14. 9 см і 3 см. 19. 1), 2), 3) Так. 20. 1) Ні; 2), 3) так. 21. 1), 2), 3) Так. 27. 272 см², 240 см³. 28. 540 см³. 29. 9 рулонів. 34. 2592 см³. 35. 336 см². 36. $12\sqrt{3}$ см³, $12\sqrt{21}$ см². 40. $\approx 54,26$ м². 41. 1) Зменшилася на 4 %; 2) збільшилася на 15,2 %. 42. $\approx 2,9$ т. 47. 9π см³. 48. 4 : 3. 49. 1680π см³. 53. 1) 1 : 2; 2) 1 : 8. 54. 1) 6 см; 2) 144π см²; 3) ≈ 7962 г. 55. 1) 15,21 %; 2) 5,9319 %. 56. $8\pi\sqrt{3} : 27$.

Задачі підвищеної складності

2. *Порада*. Спроектувати точки A , B і M на вісь x . Матимемо $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$. 3. $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. 4. $\left(\frac{4}{11}; 1\frac{2}{11}\right)$. *Порада*. $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$. 6. $a = -10$ або $a = 1$. 7. $C(0; \sqrt{3})$ або $C(0; -\sqrt{3})$. *Порада*. $AB = BC = CA$. Нехай $C(x; y)$. Тоді $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ (x-1)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ 8. Таких ромбів шість: ABC_1D_1 , де

$D_1(0; \sqrt{3})$, $C_1(2; \sqrt{3})$; ABD_2C_2 , де $D_2(0; \sqrt{3})$, $C_2(-2; \sqrt{3})$; ABC_3D_3 , де $D_3(0; -\sqrt{3})$, $C_3(2; -\sqrt{3})$; ABD_4C_4 , де $D_4(0; -\sqrt{3})$, $C_4(-2; -\sqrt{3})$; AC_5BD_5 , де $C_5(0; \sqrt{3})$, $D_5(0; -\sqrt{3})$; AC_6BD_6 , де $C_6\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $D_6\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 9. $(-2; -1)$. 11. 49. 12. $x_0x + y_0y = r^2$.

13. 8. 14. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 15. $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 100$ або $(x + 3)^2 +$

$+(y - 9)^2 = 100$. 16. 1) $k = \pm \frac{4}{3}$; 2) $k < -\frac{4}{3}$ або $k > \frac{4}{3}$; 3) $-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$.

17. $2x + y - 8 = 0$ і $x - 2y + 11 = 0$. 18. $2x + y - 1 = 0$ і $2x + y + 19 = 0$.

19. $B\left(9\frac{7}{13}; -6\frac{9}{13}\right)$; $AB = 17$. 20. $2\sqrt{13}$. *Порада.* Поданий вираз представи-

ти у вигляді $\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}$, який є сумою відстаней від точки $M(x; y)$ до точок $A(3; -4)$ і $B(-1; 2)$. Вона буде найменшою, якщо M належить відрізку AB . 21. Паралелограм. 22. *Порада.*

$\overline{AC_1} = \overline{AB_1} + \overline{AD_1}$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, тоді $\overline{AC_1} - \overline{AC} = \overline{AB_1} - \overline{AB} + \overline{AD_1} - \overline{AD}$, тому $\overline{CC_1} = \overline{BB_1} + \overline{DD_1}$. 23. $\overline{BC}(8; -6)$, $\overline{CD}(-6; -8)$, $\overline{DA}(-8; 6)$ або $\overline{BC}(-8; 6)$, $\overline{CD}(-6; -8)$, $\overline{DA}(8; -6)$.

24. *Порада.* Використати: $\triangle ABO \sim \triangle CDO$,

$\triangle ADB \sim \triangle MDO$, $\triangle DBC \sim \triangle OBN$. 25. $\overline{BL}\left(-3\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$. 29. *Порада.* Розгляну-

ти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{p}$. 30. Нехай $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, тоді $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ і $\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0; \end{cases}$ звідки $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$.

31. $4x + 5y + 3 = 0$. 32. $4x - 3y + 1 = 0$. 33. $\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

34. 6 см. 35. $3\sqrt{19}$ см. *Порада.* Розглянути $\triangle AMB$ та знайти його медіану

MM_3 . 36. $\frac{aS}{a+b}$ і $\frac{bS}{a+b}$. *Порада.* Нехай S_1 і S_2 - шукані площі, тоді $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$

і $S_1 + S_2 = S$. 37. $\sqrt{3}$ см. *Порада.* Позначимо $\angle BAM = \alpha$, тоді і $\angle CBM = \alpha$.

38. 30° . *Порада.* $\angle ACB = 120^\circ$, $\angle A = \angle B = \angle 30^\circ$. Позначити $AC = CB = x$,

тоді $AB = x\sqrt{3}$, $AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. 40. $\frac{(a^2 - b^2)\sin \alpha \sin \beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$. 41. *Порада.* Використо-

вуючи теорему косинусів, доведіть, що синус кута між сторонами a і b до-

рівнює $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$. 42. $\frac{R^2}{4}$. 43. *Порада.* Використовуючи

теорему косинусів, виразити діагоналі чотирикутника через його сторони.

44. $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$. *Порада.* $\angle ABC = \angle EDC$, $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{AB \cdot BD}{DE \cdot DC}$. Далі використати

подібність трикутників ABC і EDC . 45. $\frac{\pi ab}{4}$. 46. 15° або 75° . 47. 2) $3a^2(\sqrt{3} + 2)$.

48. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. 49. *Порада*. Нехай r_1 і r_2 – радіуси кіл ($r_1 > r_2$), тоді площа кільця $\pi(r_1^2 - r_2^2)$. Тому радіус шуканого кола r дорівнює $\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$. 50. $r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$, де $r = R(2\sqrt{3} - 3)$. 51. 2π см. 52. *Порада*. Позначте катети трикутника через a і b . Доведіть, що шукана площа дорівнює $\frac{ab}{2}$. 53. $25\pi : 3$ або $25\pi : 27$.
54. $\frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{18}$. 55. *Порада*. Розглянути точку перетину прямої, симетричної даній відносно точки O і кола. 56. 5 см. 57. 1 : 2. 58. *Порада*. Нехай M – точка перетину медіан шуканого трикутника ABC , а точка M_1 – точка, симетрична точці M відносно середини сторони AB . Спочатку побудувати трикутник AMM_1 . 59. 1) $x = 1, y = -2$; 2) $(2; -5), (2; 1), (0; 1), (0; -5)$. 60. У 2,56 раз. 61. $(x - 1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$; 2) $(x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4$. 62. *Порада*. Використати поворот навколо центра на 90° . 63. 1) $m = -2$; 2) $2x - 3y - 3 = 0$. 64. Ні. 65. 1) $\frac{1}{2}(ab + bc + ca)$; 2) $\frac{1}{6}abc$; 3) $\frac{\sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2}}{2}$; 4) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2}}$. 66. 12 дм^3 . 67. $16\sqrt{2}, 2(\sqrt{2} - 1) \text{ м}^2$. 68. 3 см. 69. $\frac{7a^3(\sqrt{2} - 1)}{3}$.
70. $60,375 \text{ см}^3$. 71. $V = SC$. 72. $\sqrt{5} : 5$. 73. $\frac{1}{3}Sr$. 74. 1) $12\pi \text{ см}^2$; 2) $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$.
75. 1) 2 : 3; 2) 2 : 3. 76. 1) $448\pi \text{ см}^3$; 2) $216\pi \text{ см}^2$. 77. *Порада*. Нехай r – радіус вписаної кулі, R – радіус основи конуса, l – твірна, h – висота конуса. Доведіть, що відношення і поверхонь, і об'ємів дорівнює $\frac{R^2h}{4r^3}$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА»

№ завдання \ № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Б	Г	А	В	Б	В	Г	Б	Б	А	В	1-Б, 2-В, 3-Г
2	В	Б	Г	А	В	Г	Б	А	Г	Б	В	А	1-А, 2-Г, 3-Б
3	Б	А	Г	Б	В	Б	А	Г	В	Б	В	А	1-Г, 2-А, 3-В
4	В	Б	Г	В	А	Б	Б	Г	В	В	Г	Б	1-Б, 2-А, 3-В
5	В	Б	Г	А	Г	В	В	Б	Г	А	Б	В	1-В, 2-Г, 3-А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютна величина вектора 58

Абсциса точки 14

Аналітична геометрія 27

Бічна поверхня конуса 237

– – циліндра 233

Бічні грані піраміди 229

– – призми 225

Бічні ребра піраміди 229

– – призми 225

Вектор 57

Векторні величини (вектори) 57

Вершина конуса 237

– многогранника 225

– піраміди 229

Вимірювання висоти предмета, основа якого недоступна 114

– відстані до недоступної точки 113

Висота конуса 237

– піраміди 229

– призми 225

– циліндра 233

Від’ємна піввісь 14

Відкладання вектора, рівного даному, від заданої точки 59

Відстань від точки до площини 218

– між двома точками за заданими координатами 29

Вісь абсцис 14

– конуса 237

– ординат 14

– симетрії 179

– циліндра 233

Властивості добутку вектора на число 73

– додавання векторів 68

– паралельних площин 221, 222

– переміщення 170

– перетворення подібності 192

– подібних фігур 193, 194

– скалярного добутку 79

Грань многогранника 225

Декартові координати 15

Діаметр кулі 240

Довжина вектора 58

– кола 148, 150

Додатна піввісь 14

Знаходження площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними 119

– – – радіусом вписаного кола 124

– – – – описаного кола 123

Кінець вектора 57

Коефіцієнт подібності 192

Колінеарні вектори 58

Конус 236

Координати вектора 63

– середини відрізка 28

– точки 14

– точки перетину двох прямих 44

Координатні чверті 15

Координатний метод 27

Круг 154

Куля 240

Кут між векторами 79

– повороту 183

Кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої 43

Мимобіжні прямі 215

Множення вектора на число 73

Многогранник 225

Модуль вектора 58, 64

Нульовий вектор 58

Об’єм конуса 238

– кулі 241

– піраміди 230

– прямої призми 226

– циліндра 234

Образ точки 169

Одиничне півколо 19

Ордината точки 15

Осі координат 14

Основа висоти піраміди 229

– конуса 237

– перпендикуляра 219

– піраміди 229

– похилої 219

– призми 225

– циліндра 233

Основна тригонометрична тотожність 20

Осьова симетрія 179

Паралельне перенесення 187

Паралельні площини 221

- Переміщення 170
- Перетворення подібності 191
 - симетрії 174
 - фігури 169
- Перпендикуляр, проведений з точки до площини 218
- Перпендикулярні площини 222
 - прямі 216
- Піраміда 229
 - n -кутна 229
- Площа бічної поверхні конуса 237
 - – – піраміди 230
 - – – призми 226
 - – – циліндра 234
 - поверхні кулі 241
 - повної поверхні конуса 237
 - – – піраміди 230
 - – – призми 226
 - – – циліндра 234
- Площина 214
- Площини, що перетинаються 221
- Поворот 183
- Подібні фігури 193
- Похила 219
- Початок вектора 57
 - координат 14
- Правило паралелограма додавання векторів 69
 - побудови різниці двох векторів 70
 - трикутника додавання векторів 69
- Правильна піраміда 229
 - призма 226
- Правильний многокутник 139
- Призма n -кутна 225
- Проекція похилої 219
- Прообраз точки 169
- Протилежно напрямлені вектори 58
- Пряма 214
 - і площина, паралельні між собою 218
- Пряма призма 225
- Пряма, що лежить у площині 218
 - , що перетинає площину 218
 - , перпендикулярна до площини 218
- Прямокутна система координат 14
- Р**адіус кулі 240
 - основи конуса 237
- Радіуси основ циліндра 233
- Ребра многогранника 225
- Рівні вектори 58
- Рівність фігур 171
- Рівняння кола 35
 - прямої загальне 40
 - , що проходить через дві точки 42
 - фігури 34
- Різниця векторів 70
- Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними 111
 - – – –, протилежним одній із них 112
 - – – стороною і двома кутами 111
 - – – трьома сторонами 112
- Розгортка конуса 237
 - циліндра 233
- Розташування прямої відносно системи координат 40
- С**егмент 156
- Сектор 156
- Симетрія відносно прямої 178
 - – точки 174
- Скалярний добуток векторів 78
 - квадрат вектора 79
- Скалярні величини (скаляри) 57
- Співнаправлені вектори 58
- Стереометрія 214
- Сума векторів 68
- Сфера 240
- Т**вірна конуса 237
 - циліндра 233
- Теорема косинусів 96
 - про відношення довжини кола до його діаметра 149
 - – гомотетію 255
 - – добуток вектора на число 74
 - – коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього 140
 - – паралельне перенесення 188
 - – перетворення симетрії відносно прямої 179
 - – – – точки 175
 - – поворот навколо точки 184
 - – площі подібних многокутників 198
 - – – бічної поверхні правильної піраміди 230
 - – – – прямої призми 226
 - – площу круга 155
 - – рівність векторів 64
 - – скалярний добуток векторів 79
 - синусів 105
- Точка 214
- Тригонометричні тотожності 19
 - функції 19
- У**загальнена теорема Піфагора 97
 - – синусів 105

Умова колінеарності векторів 75
– паралельності прямих 44
– перпендикулярності прямих 47

Формула Герона 122
– довжини дуги кола 151
– медіани 99
– площі сегмента 157
– сектора 156

Формули, які задають паралельне

перенесення 188

Центр кулі 240
– повороту 183
– правильного многокутника 141
– симетрії 174

Центральний кут правильного многокутника 141

Центрально-симетричні фігури 174

Циліндр 233

ЗМІСТ

<i>Шановні дев'ятикласниці та дев'ятикласники!</i>	3
<i>Шановні вчительки та вчителі!</i>	4
<i>Шановні дорослі!</i>	4

ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 8 КЛАС	5
---	---

Розділ 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

§ 1. Координатна площа	14
§ 2. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності	19
§ 3. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами	27
§ 4. Рівняння кола	34
§ 5. Рівняння прямої	39
<i>Домашня самостійна робота № 1 (§§ 1–5)</i>	48
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 1–5</i>	49
<i>Вправи для повторення розділу 1</i>	50
<i>Головне в розділі 1</i>	55

Розділ 2. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

§ 6. Вектор. Модуль і напрямок вектора. Колінеарні вектори. Рівність векторів	57
§ 7. Координати вектора	63
§ 8. Додавання та віднімання векторів	68
§ 9. Множення вектора на число	73
§ 10. Скалярний добуток векторів	78
<i>Домашня самостійна робота № 2 (§§ 6–10)</i>	85
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 6–10</i>	87
<i>Вправи для повторення розділу 2</i>	87
<i>Найвеличніший арифметик своєї епохи</i>	91
<i>Головне в розділі 2</i>	93

Розділ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

§ 11. Теорема косинусів	96
§ 12. Теорема синусів	104
§ 13. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі	110
§ 14. Формули для знаходження площі трикутника	119
<i>Домашня самостійна робота № 3 (§§ 11–14)</i>	130
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 11–14</i>	131
<i>Вправи для повторення розділу 3</i>	132
<i>Головне в розділі 3</i>	137

Розділ 4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

§ 15. Правильні многокутники	139
------------------------------------	-----



§ 16. Довжина кола. Довжина дуги кола	148
§ 17. Площа круга та його частин	154
<i>Домашня самостійна робота № 4 (§§ 15–17)</i>	<i>161</i>
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 15–17</i>	<i>162</i>
<i>Вправи для повторення розділу 4</i>	<i>163</i>
<i>Головне в розділі 4</i>	<i>167</i>

Розділ 5. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

§ 18. Переміщення (рух) та його властивості. Рівність фігур	169
§ 19. Симетрія відносно точки	174
§ 20. Симетрія відносно прямої	178
§ 21. Поворот	183
§ 22. Паралельне перенесення	187
§ 23. Перетворення подібності та його властивості. Подібність фігур	191
§ 24. Площі подібних фігур	198
<i>Домашня самостійна робота № 5 (§§ 18–24)</i>	<i>202</i>
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 18–24</i>	<i>203</i>
<i>Вправи для повторення розділу 5</i>	<i>204</i>
<i>Головне в розділі 5</i>	<i>210</i>
<i>Жінки в науці</i>	<i>213</i>

Розділ 6. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

§ 25. Предмет стереометрії. Основні поняття стереометрії	214
§ 26. Взаємне розміщення прямих у просторі	215
§ 27. Взаємне розміщення прямої і площини. Перпендикуляр до площини	218
§ 28. Взаємне розміщення площин	221
§ 29. Пряма призма. Площа поверхні та об'єм призми	224
§ 30. Піраміда. Площа поверхні та об'єм піраміди	229
§ 31. Циліндр. Площа поверхні та об'єм циліндра	233
§ 32. Конус. Площа поверхні та об'єм конуса	236
§ 33. Куля. Площа поверхні та об'єм кулі	240
<i>Вправи для повторення розділу 6</i>	<i>243</i>
<i>Головне в розділі 6</i>	<i>247</i>
<i>Завдання для перевірки знань за курс геометрії 9 класу</i>	<i>248</i>
<i>Задачі підвищеної складності</i>	<i>248</i>
<i>Додаток</i>	<i>254</i>
<i>Відповіді та поради до вправ</i>	<i>257</i>
<i>Предметний покажчик</i>	<i>267</i>

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович,
ІСТЕР Дмитро Олександрович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Олена Мовчан*
Художнє оформлення,
ілюстрації *Василя Марущинця, Юрія Лебедєва*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Ірина Хмельовська, Олена Симонова*

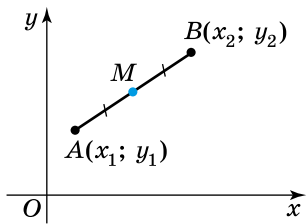
Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 22,10. Обл.-вид. арк. 17,54.
Тираж 318 312 пр. Вид. №0111. Зам. № 26-04-0702.

ТОВ «Генеза», вул. Генерала Алмазова, 18/7
(літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 6847 від 19.07.2019.

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Координати середини відрізка $M(x_M; y_M)$

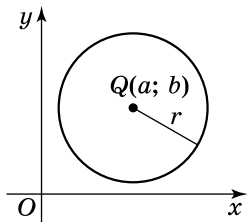


$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Рівняння кола

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,
де $Q(a; b)$ – центр кола,
 r – радіус кола

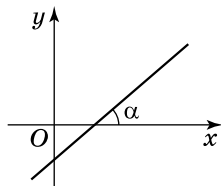
Рівняння прямої

Загальне рівняння прямої:

$$ax + by + c = 0$$

Рівняння прямої, що проходить
через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Рівняння прямої
з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + l, \text{ де } k = \operatorname{tg} \alpha$$

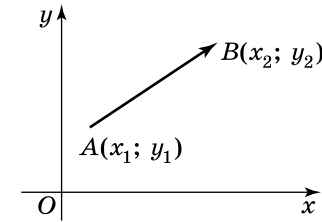
ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

Координати вектора

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

Модуль вектора $\vec{a}(x; y)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Додавання, віднімання векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$,
множення вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ на число λ

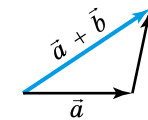
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2);$$

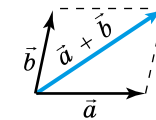
$$\vec{m} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{m}(\lambda x_1; \lambda y_1)$$

Додавання векторів

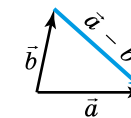
правило трикутника



правило паралелограма



Віднімання векторів



Скалярний добуток векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

