

Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.

«Геометрія»

підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти

УОВЦ «Оріон»

2026

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авторський колектив Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

Оріон

Нова
українська
школа

9

Михайло Бурда
Ніна Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЄМОСЯ РАЗОМ З ПІДРУЧНИКОМ

Розглядаємо
ситуацію

Дивимосся
презентацію

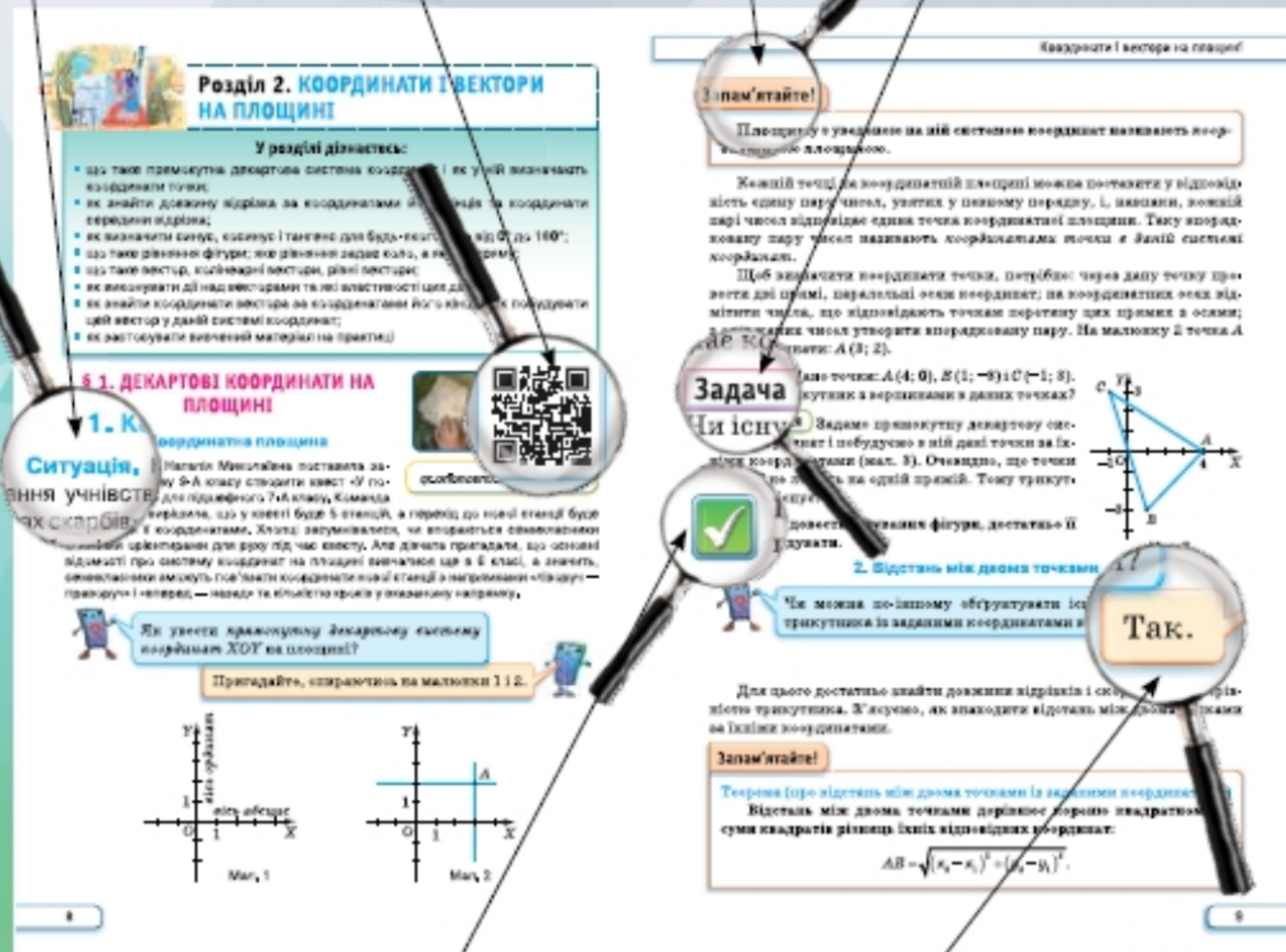
Вчимо
правило

Розглядаємо
типову задачу

Одержуємо
додаткові відомості

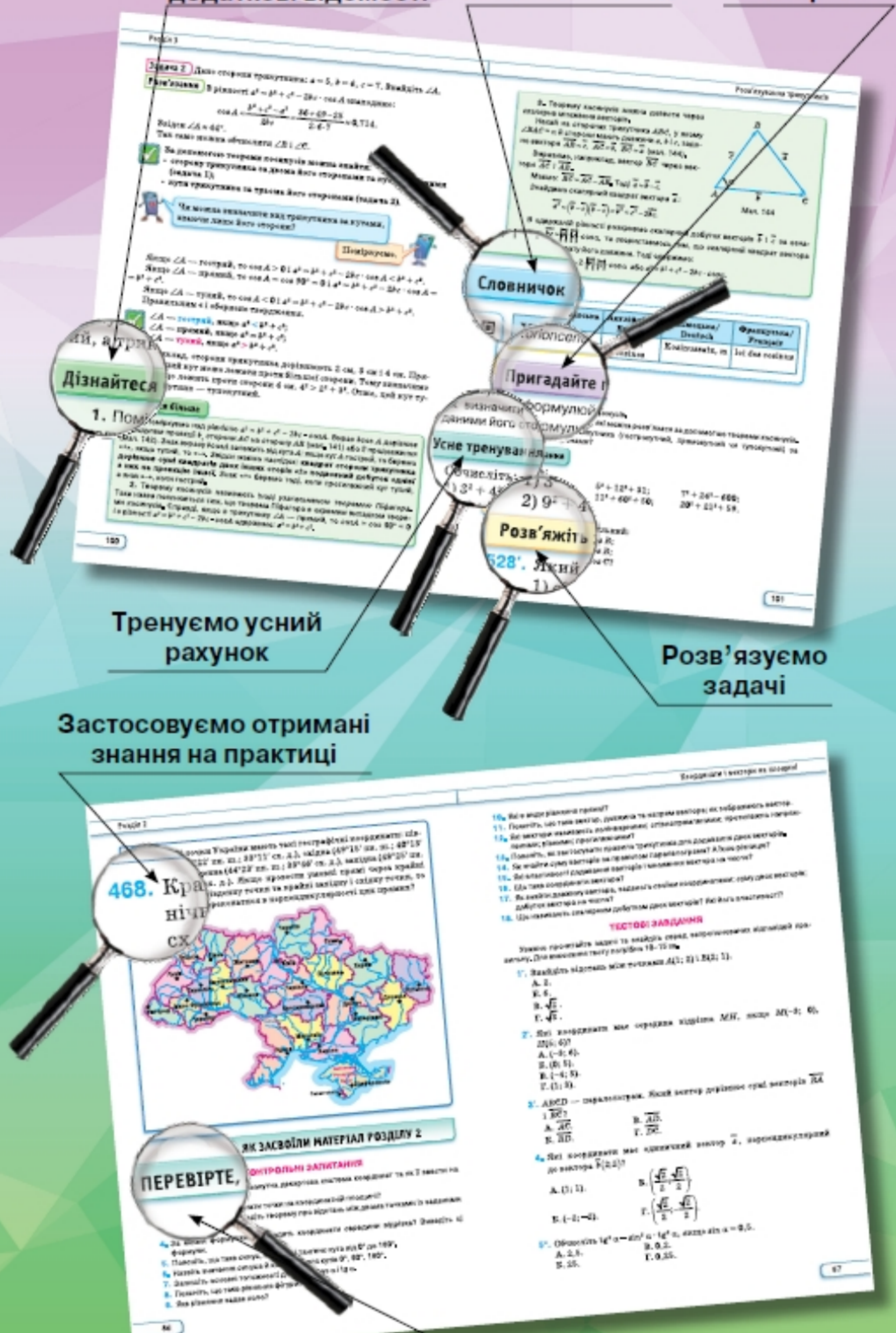
Вчимо терміни
іншими мовами

Перевіряємо
теорію



Вчимося
діяти

Відповідаємо
на запитання



Перевіряємо
свої знання

Михайло Бурда
Ніна Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



Український освітнянський видавничий центр «Оріон»

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 № 110)

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авторський колектив програми:
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва)



Інтерактивний електронний додаток до підручника

<https://faino.school/>

Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.

Б93 Геометрія : підруч. для 9 кл. закладів загальної
середньої освіти. Київ: УОБЦ «Оріон», 2026. 288 с. : іл.

ISBN 978-966-991-506-1.

УДК 514*кл9(075.3)

© Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., 2026
© УОБЦ «Оріон», 2026

ISBN 978-966-991-506-1

ДОРОГІ УЧНІ Й УЧЕНИЦІ!

У 8 класі ви ознайомилися з властивостями й ознаками чотирикутників та подібних трикутників, навчилися знаходити площі трикутників і чотирикутників, ознайомилися з новими способами обчислення сторін і кутів прямокутних трикутників та виробили вміння застосовувати ці способи на практиці.

Цього навчального року ви дізнаєтеся, як застосовувати теореми синусів і косинусів для знаходження невідомих сторін і кутів трикутника, вивчите нові формули для знаходження площі трикутника, одержите знання про правильні многокутники, геометричні перетворення, вектори на площині.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на 6 розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним шрифтом**. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати й уміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять). У параграфі також можна розглянути розв'язання типових задач. У рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано цікавий і корисний додатковий матеріал.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначені штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх потрібно навчитися розв'язувати всім, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначені задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв'язування складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Номери завдань для домашньої роботи виділено рожевим кольором.

Скориставшись рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше», вміщеною в кінці підручника, ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (пiktограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.



— Увага! Не припустіться помилки



— Важливо знати



— Як записати



Словничок — Словничок



— Запитуємо



— Відповідаємо



— Інтерактивні вправи



— Вправи з Е-дodatка

**Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового
і задоволення від навчання!**

Розділ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО У 8 КЛАСІ

ЧОТИРИКУТНИКИ



qr.orioncentr.com.ua/MvUKd

1. Три сторони чотирикутника дорівнюють 10 см, 15 см і 20 см. Чи може периметр чотирикутника дорівнювати:
1) 90 см; 2) 72 см; 3) 115 см?
2. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам:
1) 1, 2, 3 і 4; 2) 4, 6, 12 і 14.



3. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з його кутів у 3 рази більший за інший.

4. Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.



5. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо три його кути дорівнюють:
1) 20° , 60° , 110° ; 2) 60° , 60° , 120° ?

6. Доведіть, що коли в паралелограмі хоча б один кут прямий, то він є прямокутником.



qr.orioncentr.com.ua/Mx26c



7. Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 36 см, а висота — 4,5 см.

8. Доведіть, що діагоналі ромба ділять його на чотири рівні прямокутні трикутники.

9. Ромб, у якого один кут прямий, — квадрат. Доведіть.



10. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють: 1) 3 см, 5 см, 6 см; 2) 7 см, 9 см, 12 см.

11. Гострий кут прямокутної трапеції дорівнює 45° . Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 62 мм і 10 см.

12. Чому дорівнює сума кутів: 1) п'ятикутника; 2) дев'ятикутника?

13. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 45° , якщо один з його катетів дорівнює: 1) 2 см; 2) 0,3 дм.

14. Сторони паралелограма дорівнюють 30 см і 50 см, а висота, яку проведено до меншої сторони, дорівнює 25 см. Знайдіть висоту, проведено до більшої сторони.



qr.orioncentr.com.ua/6Bfkx



15. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:
1) 12 см і 16 см; 2) 1,6 дм і 3 дм.

16. У трикутнику проведено середню лінію. Яку частину площі даного трикутника становить площа утвореного трикутника?
17. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки: 1) 4 см і 9 см; 2) 1 см і 16 см.
18. Площа трапеції дорівнює S , а її середня лінія — q . Знайдіть висоту трапеції, якщо:
 Е 1) $S = 60 \text{ см}^2$, $q = 15 \text{ см}$; 2) $S = 175 \text{ см}^2$, $q = 35 \text{ см}$.
19. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і $3a$, а площа — $2a^2$. Чому дорівнює гострий кут трапеції?
20. Ділянка має форму прямокутної трапеції. Як провести пряму, перпендикулярну до її основ, щоб поділити площу ділянки навпіл?

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

21. Знайдіть сторони рівностороннього трикутника, якщо периметр подібного йому трикутника з коефіцієнтом 4 дорівнює: 1) 36 см; 2) 45 см.



qr.orioncentr.com.ua/pz1Te

22. Чи подібні прямокутні трикутники, якщо в одному з них гострий кут дорівнює 23° , а в іншому — 67° ?
 Е
23. У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) діагоналі AC і BD перетинаються в точці O . Доведіть, що $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

24. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) перетинаються в точці O . Знайдіть довжину основ трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 24 см і $CO : AO = 1 : 3$.
 Е



qr.orioncentr.com.ua/RznwK

25. Сторони одного трикутника дорівнюють 6 см, 5 см і 9 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 25 см.
 Е

26. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см.
 Е

27. Із точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Знайдіть відстань від цієї точки до діаметра, якщо одержані відрізки діаметра дорівнюють: 1) 16 см і 1 см; 2) 0,5 см і 8 см.

28. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 12 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть відстань від основи цієї висоти до бічної сторони трикутника.

29. Знайдіть довжини медіан трикутника, якщо відстані від точки їх перетину до вершин трикутника дорівнюють:
 1) 12 см, 16 см і 24 см; 2) 4 см, 4 см і 6 см.

30. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 120 см, а бісектриса прямого кута ділить діагональ у відношенні 3 : 5.
 Е

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



qr.orioncentr.com.ua/lOzBu

31. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та інший катет відповідно дорівнюють:
 Е 1) 13 см і 12 см; 2) 17 м і 15 м.

32. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з його діагоналей — 16 см. Знайдіть іншу діагональ ромба.

33. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) 10 см.
 Е



34. Із точки O до прямої проведено перпендикуляр OB і похилу OC . Знайдіть:
 1) похилу OC , якщо її проекція BC дорівнює 4 см, а перпендикуляр OB — 3 см;
 2) проекцію BC похилої, якщо перпендикуляр OB дорівнює 12 см, а похила OC — 13 см;
 3) перпендикуляр OB , якщо похила OC дорівнює 25 см, а її проекція BC — 7 см.



qr.orioncentr.com.ua/Zl03O

35. У рівнобічну трапецію з основами a і b вписано коло радіусом r . Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо:
 1) $a = 2 \text{ см}$, $b = 18 \text{ см}$, $r = 3 \text{ см}$; 2) $a = 32 \text{ см}$, $b = 18 \text{ см}$, $r = 12 \text{ см}$.

36. Знайдіть значення виразу: 1) $8 \sin 30^\circ \cos 60^\circ$; 2) $2 \cos 45^\circ - 2 \sin 30^\circ$.

37. Знайдіть катет b прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза c і косинус прилеглого до нього кута A дорівнюють:
 Е 1) $c = 6 \text{ см}$, $\cos A = \frac{1}{3}$; 2) $c = 14 \text{ см}$, $\cos A = \frac{2}{7}$.

38. Знайдіть кут підйому шосейної дороги, якщо на відстані 200 м висота підйому становить 8 м.
 Е

39. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 14 см. Знайдіть кут між його діагоналлю й більшою стороною.

40. Через точку B до кола радіусом 30 см проведено дотичні BM і BC . Знайдіть кут, утворений дотичними, якщо $BM = 30 \text{ см}$.



Розділ 2. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке прямокутна декартова система координат і як у ній визначають координати точки;
- як знайти довжину відрізка за координатами його кінців та координати середини відрізка;
- як визначити синус, косинус і тангенс для будь-якого кута від 0° до 180° ;
- що таке рівняння фігури; яке рівняння задає коло, а яке — пряму;
- що таке вектор, колінеарні вектори, рівні вектори;
- як виконувати дії над векторами та які властивості цих дій;
- як знайти координати вектора за координатами його кінців і як побудувати цей вектор у даній системі координат;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 1. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

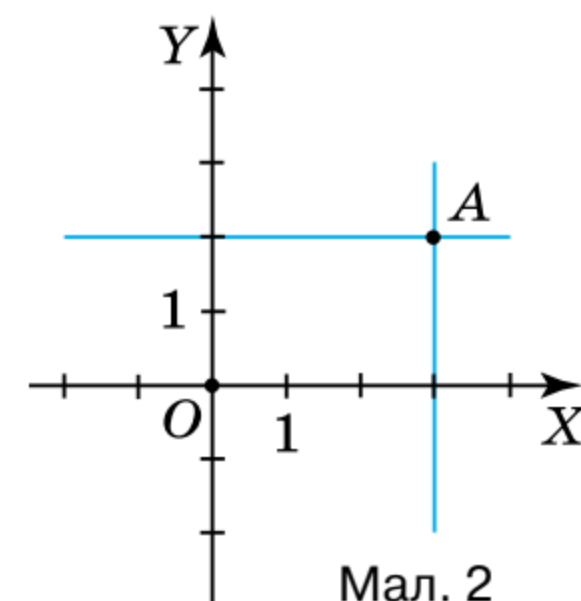
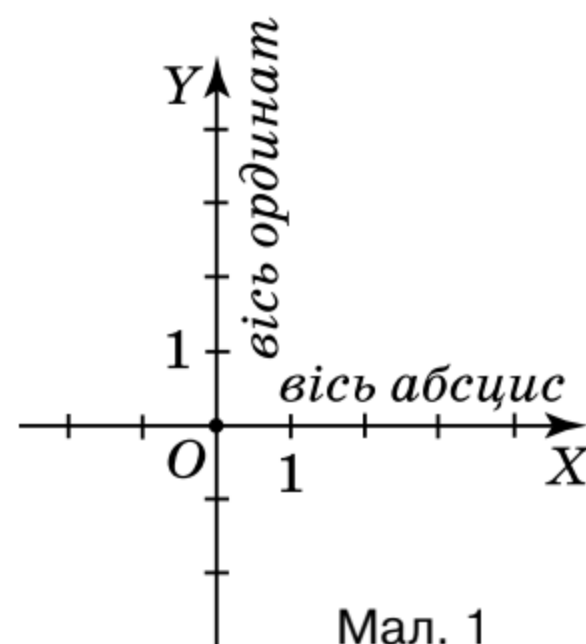
1. Координатна площина

Ситуація. Наталія Миколаївна поставила завдання учнівству 9-А класу створити квест «У пошуках скарбів» для підшефного 7-А класу. Команда розробників вирішила, що у квесті буде 5 станцій, а перехід до нової станції буде задаватися її координатами. Хлопці засумнівалися, чи впораються семикласники з такими орієнтирами для руху під час квесту. Але дівчата пригадали, що основні відомості про систему координат на площині вивчалися ще в 6 класі, а значить, семикласники зможуть пов'язати координати нової станції з напрямками «ліворуч — праворуч» і «вперед — назад» та кількістю кроків у вказаному напрямку.



Як увести прямокутну декартову систему координат $ХОУ$ на площині?

Пригадайте, спираючись на малюнки 1 і 2.



qr.orioncentr.com.ua/Usr7E

Запам'ятайте!

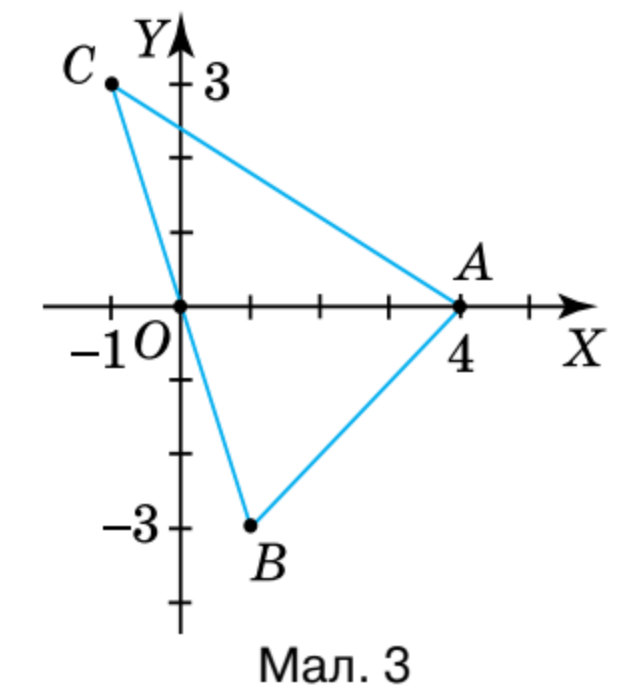
Площину з уведеною на ній системою координат називають *координатною площиною*.

Кожній точці на координатній площині можна поставити у відповідність єдину пару чисел, узятих у певному порядку, і, навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини. Таку впорядковану пару чисел називають *координатами точки в даній системі координат*.

Щоб визначити координати точки, потрібно: через дану точку провести дві прямі, паралельні осям координат; на координатних осях відмітити числа, що відповідають точкам перетину цих прямих з осями; з одержаних чисел утворити впорядковану пару. На малюнку 2 точка A має координати: $A(3; 2)$.

Задача 1 Дано точки: $A(4; 0)$, $B(1; -3)$ і $C(-1; 3)$. Чи існує трикутник з вершинами в даних точках?

Розв'язання Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо в ній дані точки за їхніми координатами (мал. 3). Очевидно, що точки A , B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.



Щоб довести існування фігури, достатньо її побудувати.

2. Відстань між двома точками



Чи можна по-іншому обґрунтувати існування трикутника із заданими координатами вершин?

Так.



Для цього достатньо знайти довжини відрізків і скористатися нерівністю трикутника. З'ясуємо, як знаходити відстань між двома точками за їхніми координатами.

Запам'ятайте!

Теорема (про відстань між двома точками із заданими координатами)

Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їхніх відповідних координат:

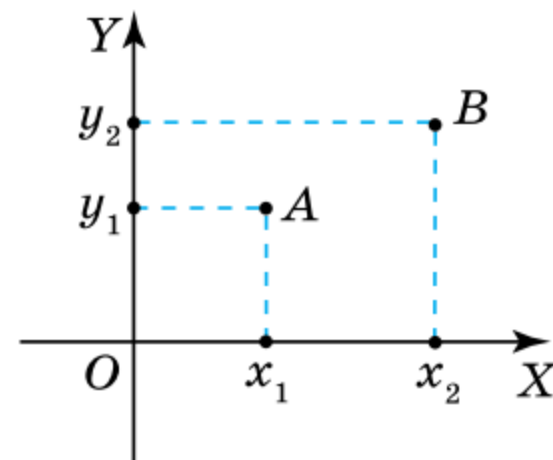
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Дано: HOY — прямокутна декартова система координат; $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

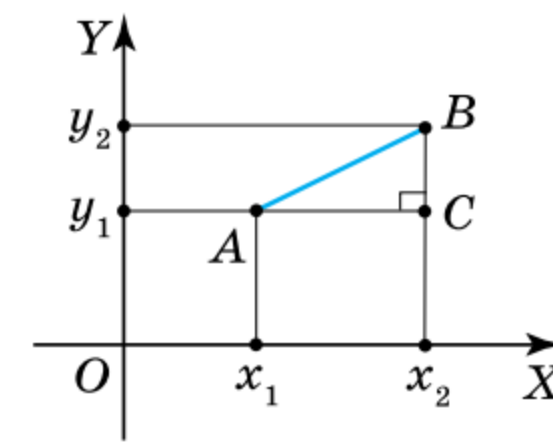
Довести: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Доведення. Нехай точки A і B розміщуються в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$ (мал. 4). З'єднаємо точки A і B відрізком і проведемо через них прямі, паралельні осям координат (мал. 5). Нехай C — точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC , у якому кут C — прямий, катет $AC = x_2 - x_1$, катет $BC = y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню між точками A і B . За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Звідси $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Інші випадки розміщення точок A і B розгляньте самостійно.



Мал. 4



Мал. 5

3. Координати середини відрізка

qr.orioncentr.com.ua/DJTOk



Чи можна знайти інші дані про відрізок за координатами його кінців?

Так.



Запам'ятайте!

Теорема (про координати середини відрізка)

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

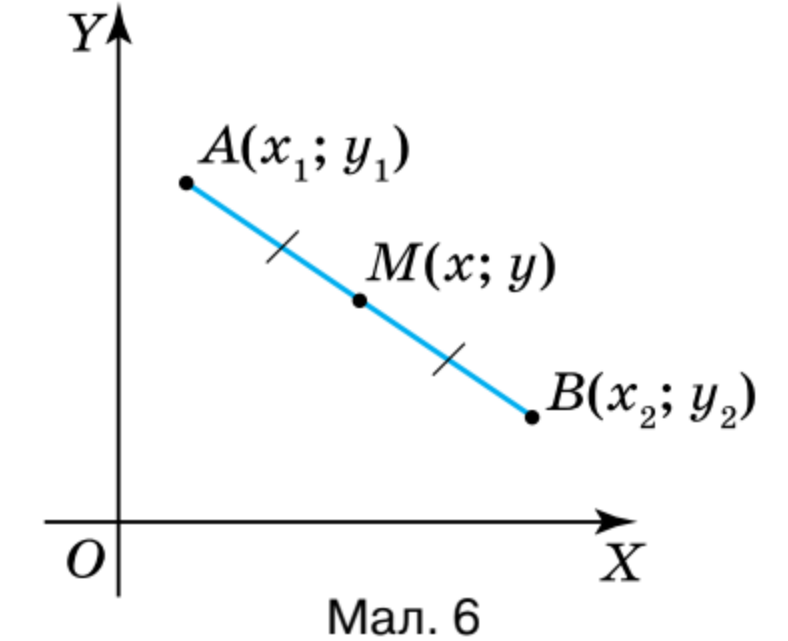
Дано: HOY — прямокутна декартова система координат (мал. 6),

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$; точка $M(x; y)$ — середина відрізка AB .

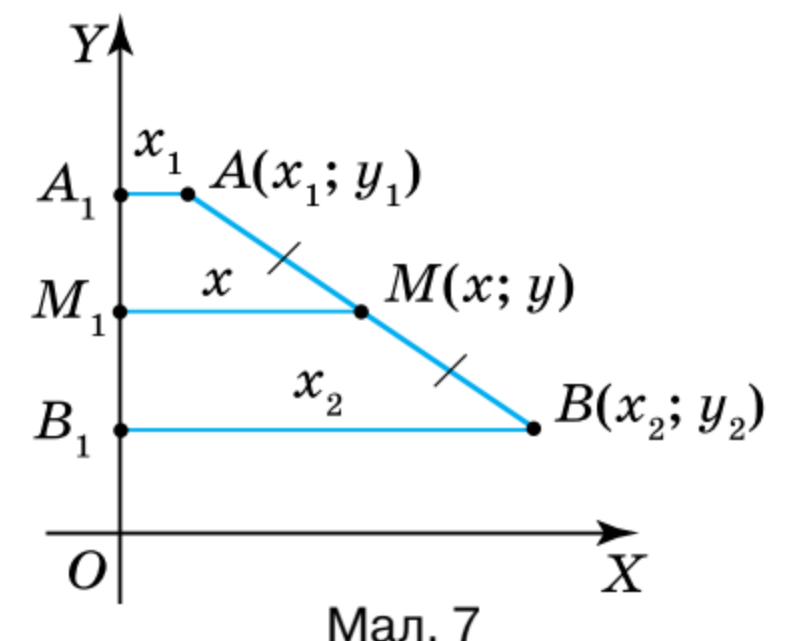
Довести: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Доведення. Нехай кінці відрізка AB містяться в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (мал. 6). Через точки A , B і M проведемо прямі, паралельні осі OX (мал. 7). Точки їх перетину з віссю OY позначимо відповідно A_1 , B_1 і M_1 . Чотирикутник AA_1B_1B — трапеція з основами $AA_1 = x_1$, $BB_1 = x_2$. За побудовою, $MM_1 = x$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1$ (за побудовою), то MM_1 — середня лінія трапеції AA_1B_1B . Тому $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогічно доводимо, що

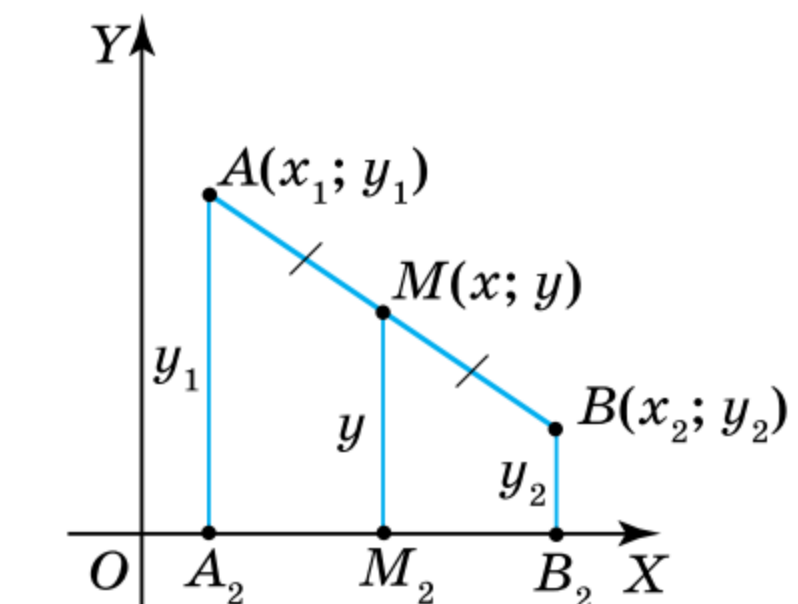
$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Для цього через точки A , B і M проведемо прямі, паралельні осі OY (мал. 8). Точки їх перетину з віссю OX позначимо відповідно A_2 , B_2 і M_2 . Чотирикутник AA_2B_2B — трапеція з основами $AA_2 = y_1$, $BB_2 = y_2$. За побудовою, $MM_2 = y$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_2 \parallel AA_2 \parallel BB_2$ (за побудовою), то MM_2 —



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

Чи залежить формула довжини відрізка від розміщення його кінців у системі координат?

Не залежить.

Задача 2 Відстань від початку координат O до точки $A(4; y)$ дорівнює 5 одиниць. Яку ординату має точка A ?

Розв'язання За умовою задачі, $OA = 5$, $O(0; 0)$, $A(4; y)$. За теоремою про відстань між двома точками, $OA = \sqrt{(4-0)^2 + (y-0)^2}$. Оскільки довжина відрізка є числом додатним, то, за властивістю арифметичного квадратного кореня, $OA^2 = (4-0)^2 + (y-0)^2$. Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$\begin{aligned} 5^2 &= (4-0)^2 + (y-0)^2, \\ 25 &= 16 + y^2, \\ y^2 &= 9, \\ y &= \pm 3. \end{aligned}$$

Обидва корені задовольняють умову задачі, тому точка A має ординату або 3, або -3 . Це означає, що на координатній площині існує дві точки, які є шуканими: $A_1(4; 3)$ і $A_2(4; -3)$.

Складаючи рівняння на основі формули відстані між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, можна відразу скористатися рівністю:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

середня лінія трапеції AA_2B_2B . Тому $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Інші випадки розміщення точок A і B в системі координат XOY розгляньте самостійно.



Чи залежать формули координат середини відрізка від розміщення його кінців у системі координат?

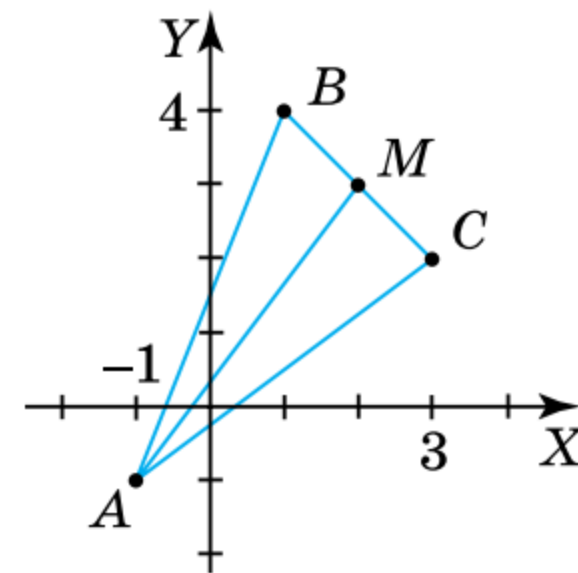
Не залежать.



Задача 3 Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами в точках: $A(-1; -1)$, $B(1; 4)$ і $C(3; 2)$.

Розв'язання Точка M є серединою сторони BC (мал. 9), тому вона має координати: $x = \frac{1+3}{2} = 2$, $y = \frac{4+2}{2} = 3$. Довжина медіани AM дорівнює відстані між точками A і M .

$$\text{Отже, } AM = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$



Мал. 9

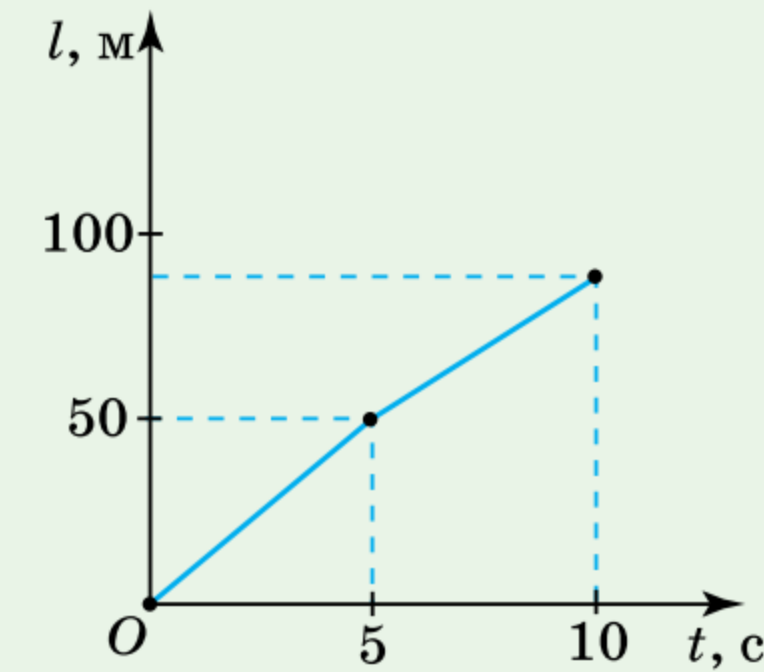


Щоб знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин, визначте координати основи медіани та знайдіть відстань від цієї точки до протилежної вершини трикутника.

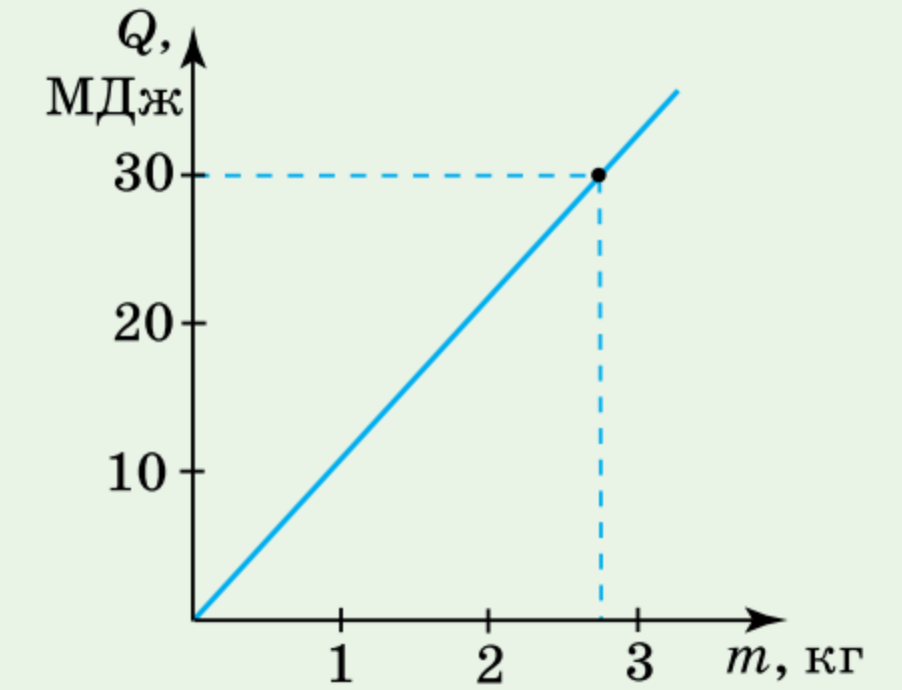
Дізнайтеся більше

1. Прямокутна декартова система координат названа на честь видатного французького вченого **Рене Декарта** (1596–1650), відомого значними досягненнями в галузях філософії, математики, фізики, фізіології. Математичні дослідження Декарта тісно пов'язані з його роботами з фізики й філософії. У «Геометрії» (1637) Декарт уперше ввів поняття змінної та функції, їх теперішнє позначення — малими латинськими буквами x , y . Установлений ним зв'язок між відрізками й числами зумовив взаємне проникнення геометрії та алгебри, зародження нового розділу математичної науки — *аналітичної геометрії*. Її методи використовують у багатьох галузях сучасних математичних досліджень.

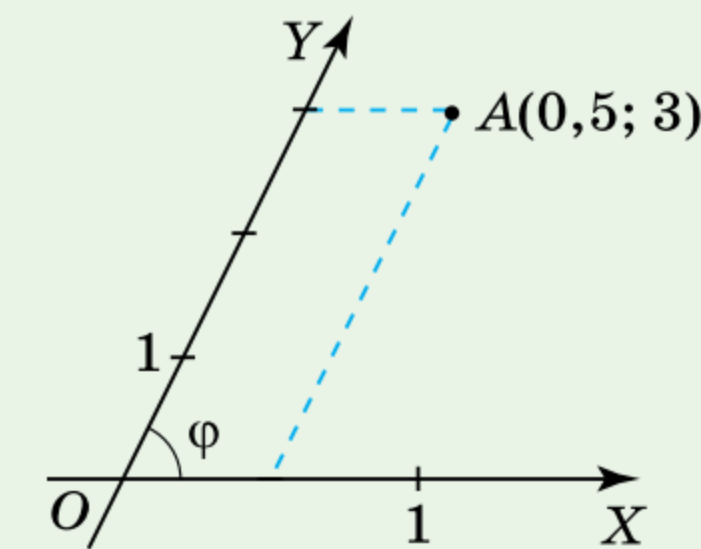
2. Прямокутну систему координат широко застосовують у науці, техніці, на практиці. Наприклад, з курсу фізики ви знаєте, що в такій системі координат зображають графік руху (мал. 10), графік залежності кількості теплоти, що виділяється під час згоряння свіжої деревини, від маси палива (мал. 11) та ін. Загальнішим є випадок, коли осі координат не перпендикулярні й шкали на них не рівнозначні, тобто одиничні відрізки мають різну довжину (мал. 12). Таку систему координат називають *афінною* (загальною косокутною).



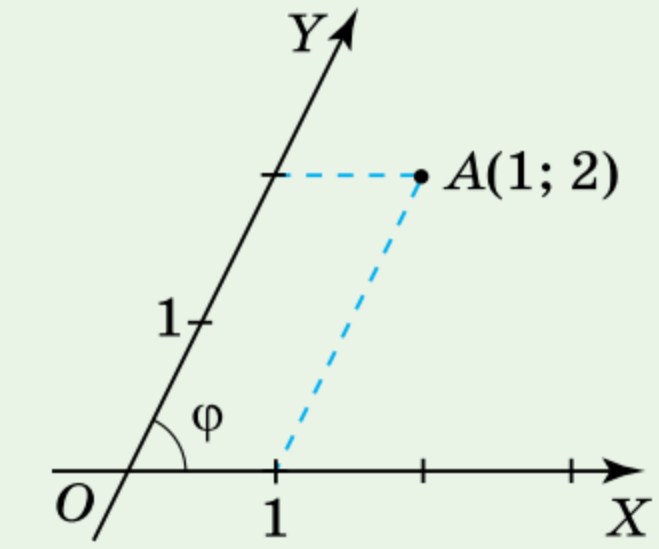
Мал. 10



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

3. Історія свідчить, що Р. Декарт використовував косокутну систему координат з рівнозначними шкалами (мал. 13), причому лише її першу чверть. У такій системі координат також можна знаходити довжини відрізків. Але при цьому треба враховувати координатний кут φ (мал. 13). Відстань від точки $A(x_1; y_1)$ до початку координат можна обчислити за формулою:

$$AO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\varphi},$$

а відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi}.$$

Пригадайте головне

1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат на площині.
2. Що називають координатною площиною?
3. Поясніть, як визначити координати точки.
4. Як знайти відстань між двома точками?
5. За якими формулами визначають координати середини відрізка?
6. Поясніть, як знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин.

Розв'яжіть задачі

41'. Чи правильно, що на координатній площині:

- 1) кожній точці відповідає кілька впорядкованих пар чисел;
- 2) кожній точці відповідає єдина впорядкована пара чисел;
- 3) кожна впорядкована пара чисел задає єдину точку;
- 4) кожна впорядкована пара чисел задає безліч точок?

42'. Чи правильно, що в точки $A(x; y)$:

- 1) x — це ордината, значення якої знаходять за віссю OX ;
- 2) x — це абсциса, значення якої знаходять за віссю OY ;
- 3) x — це абсциса, значення якої знаходять за віссю OX ;
- 4) y — це ордината, значення якої знаходять за віссю OX ;
- 5) y — це абсциса, значення якої знаходять за віссю OY ;
- 6) y — це ордината, значення якої знаходять за віссю OY ?

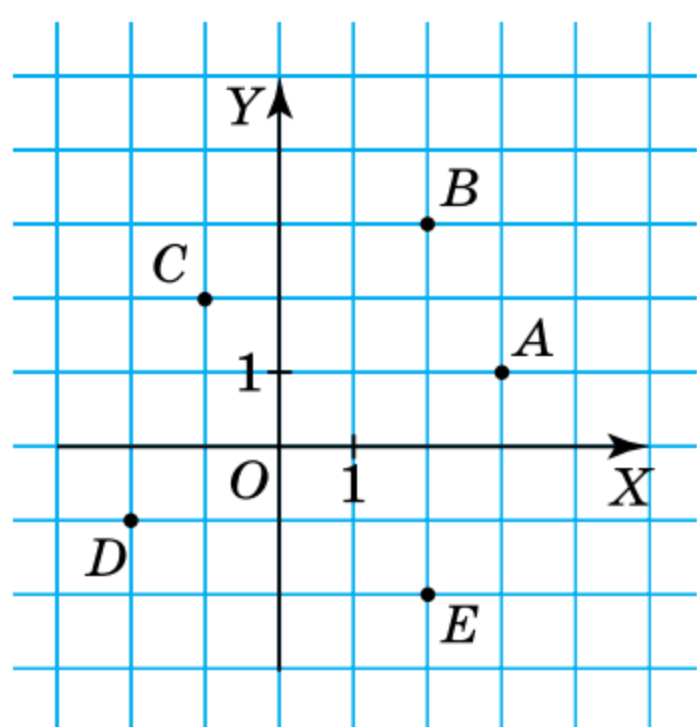
43'. Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Чи правильно, що:

- 1) $AB = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$;
- 2) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$;
- 3) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$?

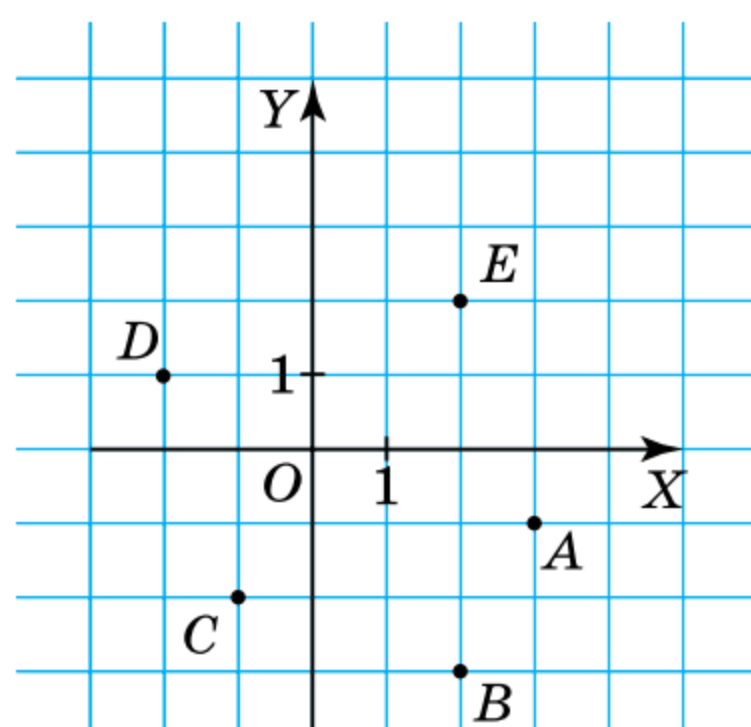
44'. Чи правильно записано формули координат середини відрізка з кінцями в точках $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

- 1) $x = \frac{x_1 + x_2}{3}, y = \frac{y_1 + y_2}{3}$;
- 2) $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$;
- 3) $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$?

45'. За даними на малюнках 14, 15 визначте координати позначених точок.



Мал. 14



Мал. 15

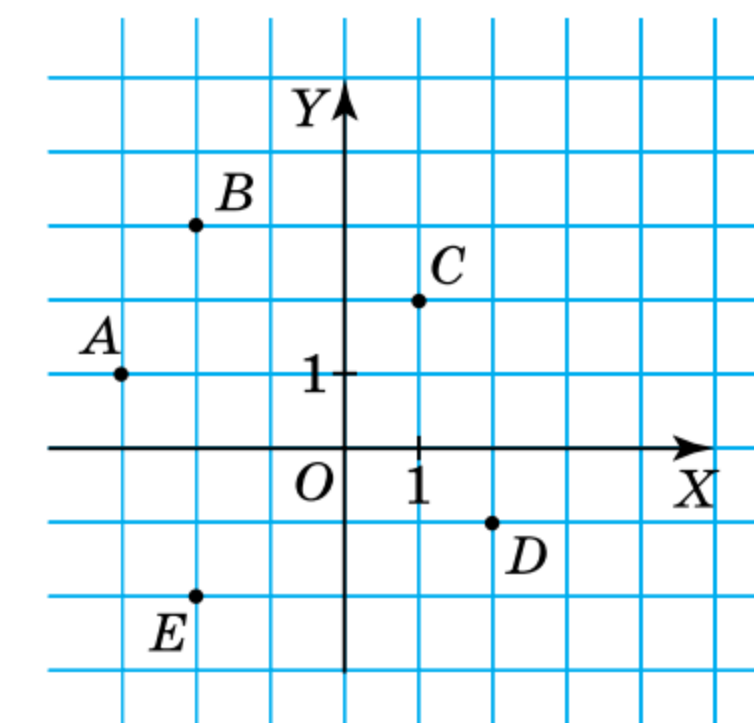
46'. За даними на малюнку 16 визначте координати позначених точок.



47'. Задайте прямокутну декартову систему координат на площині та побудуйте в ній точки: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; -1)$, $D(-1; 1)$.

48'. Задайте прямокутну декартову систему координат на площині та побудуйте в ній точки: $K(-2; 2)$, $L(2; -2)$, $M(-2; -2)$, $N(2; 2)$.

49'. Які знаки мають координати точок у координатних чвертях? Перемалюйте в зошит таблицю 1 і заповніть її.



Мал. 16

Таблиця 1

	I чверть	II чверть	III чверть	IV чверть
Знак абсциси				
Знак ординати				

50'. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, у якій координатній чверті лежить точка: $A(-145; 200)$, $B(358; -422)$, $C(218; 3390)$, $D(-139; -247)$, $E(-371; 2108)$.

51'. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, у якій координатній чверті лежить точка: $F(792; 6203)$, $K(953; -712)$, $L(-37\,401; -47\,732)$.

52'. Знайдіть відстань між точками:



- 1) $A(0; 0)$ і $B(3; 4)$;
- 2) $A(-5; -7)$ і $B(3; 8)$;
- 3) $A(5; -1)$ і $B(-3; 8)$.

53'. Знайдіть відстань між точками



$A(-6; 3)$ і $B(4; -2)$.

54'. Знайдіть довжину діаметра кола за координатами його кінців:

- 1) $(3; 4)$ і $(2; -1)$;
- 2) $(-6; 3)$ і $(0; -5)$.

Який радіус даного кола?

55'. Знайдіть довжину радіуса кола за координатами його кінців: $(5; 2)$ і $(1; -1)$. Який діаметр даного кола?

56'. Знайдіть довжину сторін трикутника ABC , вершини якого мають координати:

- 1) $A(0; 0)$, $B(2; 0)$ і $C(-1; 3)$;
- 2) $A(1; 2)$, $B(8; 26)$ і $C(19; 26)$.

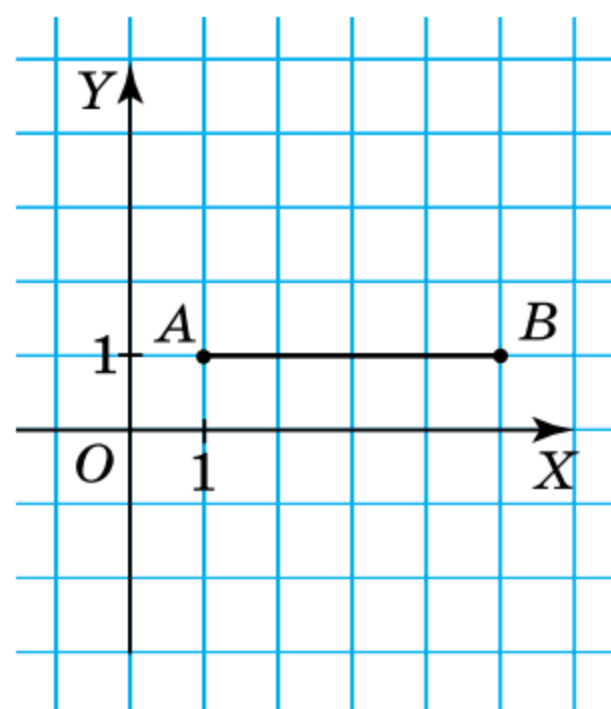


qr.orioncentr.com.ua/l6LH4

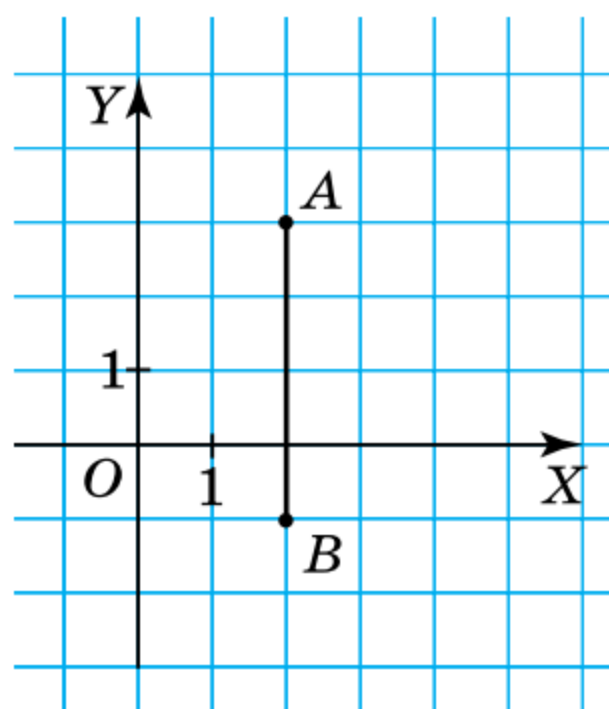
57°. Знайдіть довжину сторін трикутника KLM , вершини якого мають координати: $K(-2; -1)$, $L(0; 1)$ і $M(0; -3)$.

58°. Які координати мають кінці відрізка AB і його середина (мал. 17, 18)?

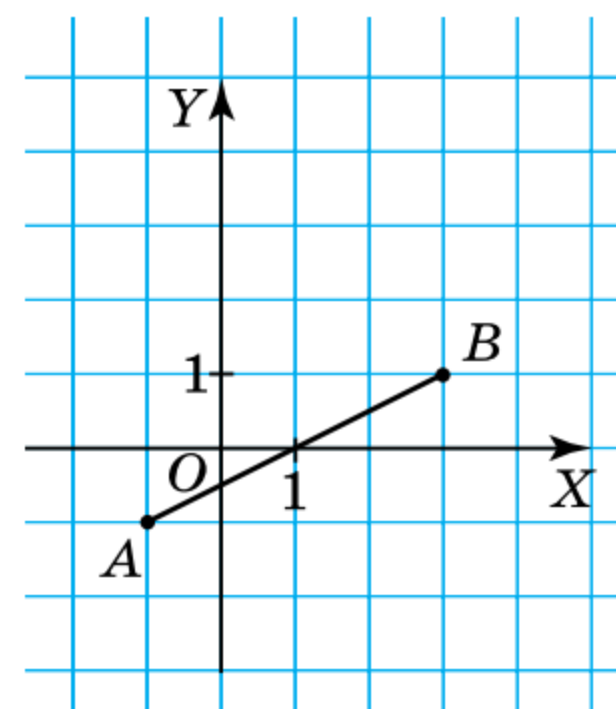
59°. За малюнком 19 визначте, які координати мають кінці відрізка AB і його середина.



Мал. 17



Мал. 18



Мал. 19

60°. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями в точках:

- 1) $A(3; -1)$ і $B(-1; 1)$;
- 2) $A(5; 4)$ і $B(2; 1)$.

61°. Які координати має середина відрізка з кінцями в точках $A(5; 7)$ і $B(11; 17)$?

62°. За координатами одного з кінців відрізка HP та його середини M знайдіть координати іншого кінця цього відрізка, якщо:

- 1) $H(1; -1)$, $M(3; 3)$;
- 2) $P(-1; -2)$, $M(-2; -3)$.

63°. Точка $C(7; 9)$ є серединою відрізка AB . Знайдіть координати точки B , якщо інший кінець даного відрізка має координати $(2; 5)$.

64°. Точка O є серединою відрізка AB . За координатами двох даних точок знайдіть координати третьої точки. Перемалюйте в зошит та заповніть таблицю 2.



qr.orioncentr.com.ua/hj8Ya

Таблиця 2

Точка A	$(1; 4)$	$(4; -6)$		$(5; -2)$	$(3; 7)$	
Точка O	$(-2; -1)$		$(-6; 8)$		$(-4; 0)$	$(-1; 4)$
Точка B		$(-4; 6)$	$(3; -3)$	$(2; 0)$		$(1; -4)$

65°. Знайдіть координати середин сторін трикутника ABC , якщо:

- 1) $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$, $C(3; -3)$;
- 2) $A(2; -3)$, $B(3; 0)$, $C(-1; -2)$.

Яка довжина медіани BM даного трикутника?

66°. Знайдіть координати середин сторін трикутника TOP , якщо:

E $T(2; 3)$, $O(-1; 0)$, $P(2; -3)$.

Яка довжина медіани OM даного трикутника?

67°. Побудуйте паралелограм з вершинами в даних точках:

- 1) $A(-4; 1)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -4)$;
- 2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $C(-2; 16)$, $D(2; 8)$.

Які координати має точка перетину його діагоналей?

68°. Побудуйте паралелограм з вершинами в даних точках: $A(1; -2)$, $B(-4; -1)$, $C(2; 1)$, $D(-1; 0)$.

Які координати має точка перетину його діагоналей?

69°. Пряма a проходить через центр кола й перетинає його в точках A і B . Знайдіть координати центра кола, якщо:

- 1) $A(-5; 2)$, $B(1; -4)$;
- 2) $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$.

70°. Пряма p проходить через центр кола й перетинає його в точках $C(5; 2)$ і $T(-1; -4)$. Знайдіть координати центра кола.

71°. Дві вершини квадрата мають координати:

- 1) $(0; 0)$ і $(1; 2)$;
- 2) $(-1; -1)$ і $(2; 0)$.

Які координати можуть мати дві інші його вершини?

72°. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним, якщо:

- 1) $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$, $C(3; -3)$;
- 2) $A(2; -3)$, $B(3; 0)$, $C(-1; -2)$.

73°. Доведіть, що трикутник MPT є рівнобедреним, якщо $M(-1; 1)$,

E $P(2; 3)$, $T(2; -1)$.

74°. Доведіть, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:

- 1) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 1)$;
- 2) $A(5; 1)$, $B(7; 2)$, $C(9; -2)$.

75°. Доведіть, що трикутник PMT є прямокутним, якщо $P(-2; -1)$, $M(0; 1)$, $T(0; -3)$.

76°. Відстань між точками A і B дорівнює d . Знайдіть x , якщо:

- 1) $A(2; 3)$, $B(x; 1)$, $d = 2$;
- 2) $A(-1; x)$, $B(3; 2x)$, $d = 5$.

77°. Відстань між точками $P(5; x)$ і $T(2; 4)$ дорівнює 3. Чому дорівнює x ?

78°. На осях координат знайдіть точки, рівновіддалені від двох даних точок:

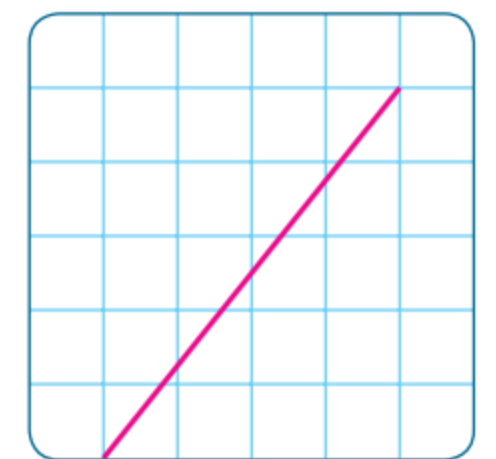
- 1) $(-1; 1)$ і $(3; 5)$;
- 2) $(2; -1)$ і $(-2; 1)$.

- 79.** Визначте довжину сторін трикутника за координатами середин його сторін:
1) $(5; 1)$, $(9; 4)$, $(9; -2)$; 2) $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -2)$.
- 80.** Дві вершини прямокутного трикутника мають координати:
1) $A(2; 5)$, $B(3; 2)$; 2) $A(1; 4)$, $B(9; 6)$.
Чи може третя його вершина міститися в точці: $C(8; 8)$, $D(9; 4)$, $O(4; -1)$, $M(8; 7)$?
- 81.** Знайдіть площу квадрата, знаючи координати двох сусідніх його вершин:
1) $(3; 2)$, $(8; 7)$; 2) $(4; -1)$, $(1; 2)$.
- 82.** Знайдіть площу квадрата, знаючи координати двох протилежних його вершин:
1) $(3; 5)$, $(1; -3)$; 2) $(-2; 2)$, $(10; -3)$.
- 83.** Точки P , Q і T ділять відрізок AB на чотири рівні частини. Знайдіть координати цих точок, якщо:
1) $A(-5; 2)$, $B(-3; -6)$; 2) $A(1; 3)$, $B(9; -7)$.
- 84.** Знайдіть довжину медіан трикутника з вершинами в точках:
E 1) $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$ і $C(-3; 1)$;
2) $K(0; 0)$, $L(6; 4)$ і $M(10; 26)$.
- 85.** Координати точки перетину діагоналей паралелограма дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат протилежних вершин паралелограма. Доведіть.
- 86.** Знайдіть координати точки перетину діагоналей і четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати трьох його вершин:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $D(2; 8)$.
- 87.** Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма за координатами трьох його вершин:
1) $A(2; 5)$, $B(8; 13)$, $C(16; 9)$; 2) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 1)$.
- 88.** Які координати має четверта вершина прямокутника, якщо три його вершини, взяті послідовно, мають координати:
1) $(8; 7)$, $(2; 5)$, $(3; 2)$; 2) $(4; -1)$, $(1; 2)$, $(-1; 0)$?
- 89.** Яку довжину має середня лінія трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) з вершинами в точках:
1) $A(-5; 0)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$ і $D(-1; -4)$;
2) $A(1; -4)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 1)$ і $D(5; -2)$?
- 90.** Знайдіть координати центра кола, описаного навколо трикутника з вершинами в точках:
1) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$ і $C(5; -1)$; 2) $A(-1; 6)$, $B(-5; 3)$ і $D(-2; -1)$.

- 91*.** Який кут утворює відрізок AB з додатною піввіссю абсцис, якщо:
1) $A(0; 2)$, $B(-2; 4)$; 2) $A(-1; -3)$, $B(4; 2)$?
- 92*.** Доведіть, що сума абсцис (ординат) середин сторін трикутника дорівнює сумі абсцис (ординат) його вершин.
- 93*.** Чи можна однозначно задати прямокутник координатами двох його вершин і точки перетину діагоналей, якщо дані вершини є:
1) протилежними; 2) сусідніми?
Відповідь обґрунтуйте.
- 94*.** Якщо протилежні вершини чотирикутника мають координати, такі що сума абсцис і сума ординат однієї пари вершин дорівнює відповідним суммам другої пари вершин, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.
- 95*.** Середини бічних сторін трапеції мають рівні ординати (абсциси). Чи паралельні її основи осі абсцис (ординат)? Відповідь поясніть.

Проявіть компетентність

- 96.** Як на папері в клітинку побудувати відрізок $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$, якщо a — довжина сторони: 1) однієї клітинки; 2) двох клітинок?
- 97.** Основу драбини завдовжки 6 м відсунуто від стіни на 1 м. На скільки метрів знизиться верхній кінець драбини, якщо основу відсунути від стіни ще на 0,5 м? Розв'яжіть задачу, скориставшись системою координат.
- 98.** На папері в клітинку дано відрізок з кінцями у вузлах сітки. Чи завжди його середина буде міститися у вузлі сітки?
- 99.** Вершини трикутника містяться у вузлах сітки. Проведіть його медіани, не виконуючи вимірювань. Чи завжди точка перетину медіан буде міститися у вузлі сітки? Відповідь поясніть.
- 100.** Два туристи, які перебували на відстані 100 м один від одного, одночасно почули вигук керівника групи. На якій найменшій відстані від кожного з них міг бути керівник у момент вигуку, якщо точно посередині між туристами стоїть дерево, яке в обхваті має 2,5 м?



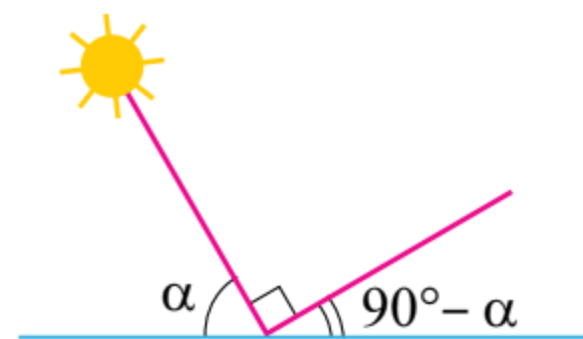
§ 2. СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180° . ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ

1. Кути та одиничне півколо

Ситуація. Батько вирішив установити сонячну панель на даху свого будинку. Щоб панель отримувала максимум сонячного світла, він має розташувати її під певним кутом до горизонту, орієнтуючись на кут підйому Сонця влітку. Його донька Ірина з'ясувала, що в Україні в день літнього сонцестояння, 21 червня, Сонце сягає найвищої точки на небосхилі й піднімається на максимально можливу висоту над горизонтом, а максимальний кут підйому α становить 62° – 63° . Отже, панель треба монтувати під кутом $90^\circ - \alpha$ до горизонту, бо сонячне світло має проходити перпендикулярно до панелі. Син Іван сказав, що за цими даними він може визначити, яка максимальна частка сонячного світла потраплятиме на панель. Для цього він знайшов синуси кутів 62° і 63° : $\sin 62^\circ \approx 0,88$, $\sin 63^\circ \approx 0,89$.



qr.orioncentr.com.ua/un3Rm



Який максимальний відсоток сонячного світла може потрапити на сонячну панель за такого її розміщення?

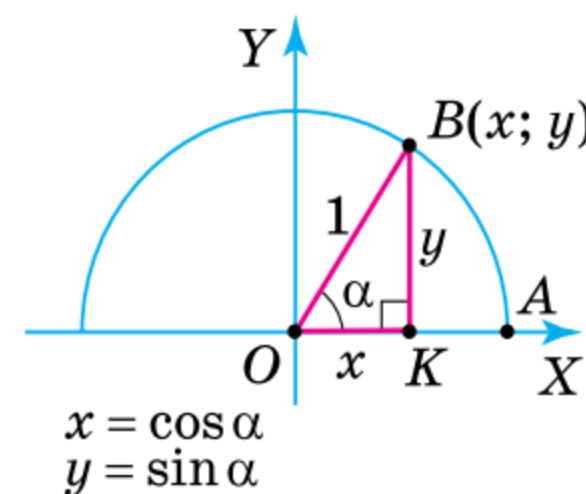
Від 88 % до 89 %.



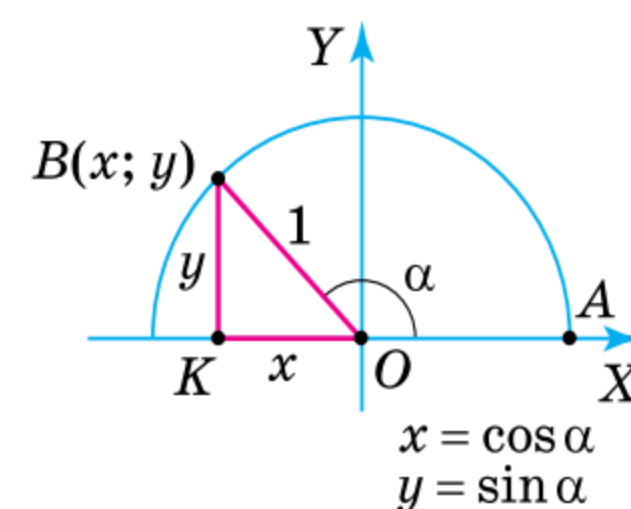
Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута як відношення відповідних сторін прямокутного трикутника. Дамо їм означення для будь-якого кута від 0° до 180° . Для цього використаємо систему координат $ХОУ$.

У I і II чвертях системи координат $ХОУ$ проведемо півколо із центром у початку координат і радіусом $R = 1$ (мал. 20). Таке півколо називають *одиничним*. Будемо відкладати кути від додатної півосі $ОХ$ проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ — гострий і точка B (кінець радіуса OB) має координати x і y . Проведемо $BK \perp OX$ (мал. 20).

У прямокутному трикутнику OBK гіпотенуза $OB = 1$, а катети дорівнюють координатам x і y точки B . Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\tg \alpha$ виразимо через координати точки B :



Мал. 20



Мал. 21

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x, \quad \tg \alpha = \frac{y}{x}.$$

За цими формулами можна визначити синус, косинус і тангенс тупого кута (мал. 21).



Якщо радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю $ОХ$ кут α , то:

$\sin \alpha$ дорівнює **ординаті** кінця цього радіуса;

$\cos \alpha$ дорівнює **абсцисі** кінця цього радіуса;

$\tg \alpha$ дорівнює відношенню **ординати** й **абсциси** кінця цього радіуса.



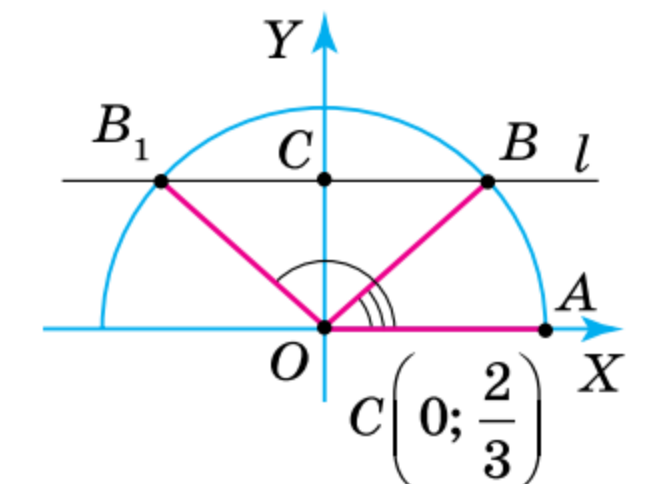
Чому синуси тупих кутів — додатні, а косинуси й тангенси — від'ємні?

Тому що ординати точок у другій чверті — додатні, а абсциси — від'ємні.



Задача 1 Скориставшись одиничним півколом, побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

Розв'язання Проведемо одиничне півколо із центром у початку координат (мал. 22). Позначимо на осі $ОУ$ точку $C(0; \frac{2}{3})$. Через точку C проведемо пряму l : $l \parallel ОХ$. Вона перетне одиничне півколо в точках B і B_1 , ординати яких дорівнюють $\frac{2}{3}$. Сполучивши точки B і B_1 з початком координат, одержимо два кути, синуси яких дорівнюють $\frac{2}{3}$: гострий — $\angle AOB$ і тупий — $\angle AOB_1$.



Мал. 22

2. Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\tg \alpha$ для кутів 0° , 90° і 180°

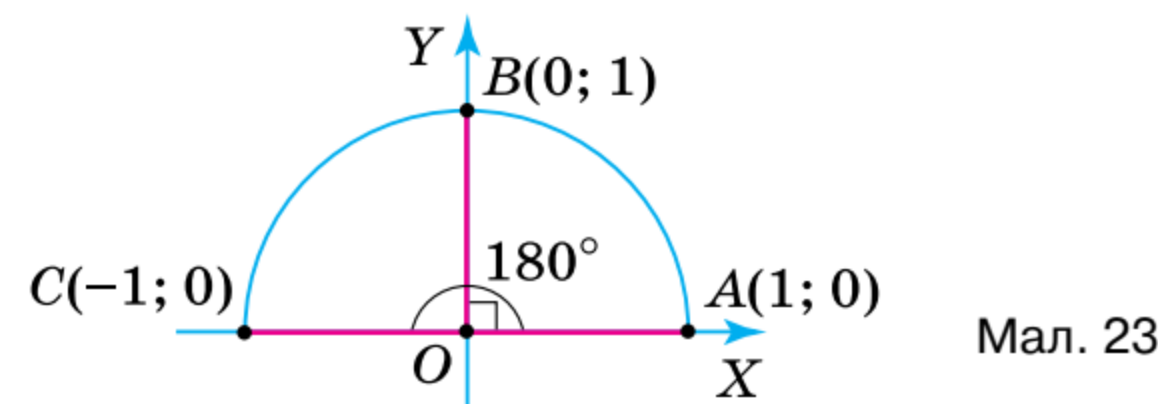


Як знайти значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\tg \alpha$ для кутів 0° , 90° і 180° ?

За допомогою одиничного півкола.



Побудуємо одиничне півколо та проведемо в ньому радіуси OA , OB і OC . Вони утворюють кути 0° , 90° і 180° з додатною піввіссю $ОХ$ (мал. 23). Запишемо двома способами координати точок A , B і C (табл. 3).



Мал. 23

Таблиця 3

Координати	Точка А	Точка В	Точка С
I спосіб	A(1; 0)	B(0; 1)	C(-1; 0)
II спосіб	A(cos 0°; sin 0°)	B(cos 90°; sin 90°)	C(cos 180°; sin 180°)

Тоді:

$\sin 0^\circ = 0,$	$\sin 90^\circ = 1,$	$\sin 180^\circ = 0,$
$\cos 0^\circ = 1,$	$\cos 90^\circ = 0,$	$\cos 180^\circ = -1,$
$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0,$	$\operatorname{tg} 90^\circ$ — не існує,	$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0.$

! Якщо $\alpha = 90^\circ$, то $\operatorname{tg} \alpha$ не існує, оскільки $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$, а на нуль ділити не можна.

Запам'ятайте!

Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ для кутів 0° , 90° і 180° (табл. 4).

Таблиця 4

α	0°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	не існує	0

Задача 2 Доведіть, що для будь-якого кута α від 0° до 180° виконуються нерівності:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Розв'язання Координати x і y точок одиничного півкола змінюються в межах: $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$. Оскільки $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$, то $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

3. Основні тотожності, що пов'язують $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$

Ви знаєте, що за означенням $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, а $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$. Звідси:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Нехай x і y — координати точки B одиничного півкола (мал. 24). Із прямокутного трикутника AOB одержимо: $y^2 + x^2 = 1$. Оскільки $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$, то:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Задача 3 Обчисліть значення $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ і } 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Розв'язання Оскільки $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. У формулі для $\cos \alpha$ беремо знак «-», бо за умовою кут α — тупий, а косинуси тупих кутів — від'ємні.

Одержимо:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}. \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

- ✓** 1) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ для будь-якого кута α від 0° до 180° ;
 2) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, якщо кут α — гострий;
 3) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, якщо кут α — тупий.

4. Формули зведення

qr.orioncentr.com.ua/fAWVB



Як знайти значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ для тупих кутів?

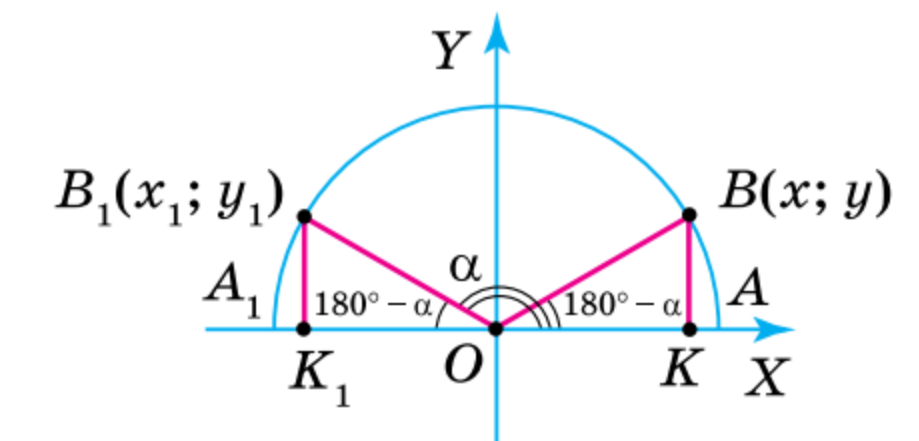


Через відповідні значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ гострих кутів.



Проаналізуємо малюнок 25.

Нехай $\angle AOB_1 = \alpha$ — тупий, тоді $\angle A_1OB_1 = 180^\circ - \alpha$ — гострий. Відкладемо від додатної півосі OX $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = 180^\circ - \alpha$. Проведемо $BK \perp OX$ і $B_1K_1 \perp OX$. Прямокутні трикутники OBK і OB_1K_1 — рівні за гіпотенузою й гострим кутом. Із рівності трикутників випливає, що $OK = OK_1$, $BK = B_1K_1$, тобто: $x = -x_1$, $y = y_1$.



Мал. 25

Тоді, оскільки $\sin(180^\circ - \alpha) = y$, $\sin \alpha = y_1$, то:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad (1)$$

Оскільки $\cos(180^\circ - \alpha) = x$, $\cos \alpha = x_1$, то:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha. \quad (2)$$

Поділивши почленно рівності (1) і (2), одержимо:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Одержані тотожності називають *формулами зведення*, бо вони дозволяють зводити синуси, косинуси і тангенси тупих кутів до синусів, косинусів і тангенсів гострих кутів. Є й інші формули зведення, які ви будете вивчати у старших класах.



Формули зведення можна застосовувати як зліва направо, так і справа наліво.

Задача 4 Обчисліть: 1) $\sin 120^\circ$; 2) $\cos 135^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 150^\circ$.

Розв'язання Застосуємо формули зведення:

$$1) \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 150^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Щоб знайти синус, косинус і тангенс тупого кута, зведіть їх до синуса, косинуса й тангенса гострого кута, скориставшись тотожностями:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$



Як синус і косинус гострого кута, більшого за 45° , виразити через синус і косинус кута, меншого від 45° ?

Скористатися такими тотожностями:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

Наприклад:

$$\begin{aligned} \sin 80^\circ &= \cos(90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ; \\ \cos 75^\circ &= \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ. \end{aligned}$$

Основні тотожності, розглянуті в цьому параграфі, наведено в таблиці 5.

Таблиця 5

Тотожності	Застосування
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	За однією з величин — $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ чи $\operatorname{tg} \alpha$ — знаходимо дві інші величини. Спрощуємо вирази
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$ $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	Знаходимо синус, косинус і тангенс тупого кута. Спрощуємо вирази
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	Знаходимо синус і косинус гострих кутів, що доповнюють один одного до прямого кута. Спрощуємо вирази

Дізнайтеся більше

1. Крім синуса, косинуса й тангенса кута α , є ще *котангенс* кута α . Позначають: $\operatorname{ctg} \alpha$. Це відношення $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, тобто $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Зверніть увагу: $\operatorname{ctg} 0^\circ$ і $\operatorname{ctg} 180^\circ$ не існують, оскільки $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0}$ і $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$, а на нуль ділити не можна.

Вживають спеціальні назви й позначення для величин, обернених до синуса й косинуса.

Косекансом називають величину, обернену до синуса: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, а *секансом* — величину, обернену до косинуса: $\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

2. **Слепкань Зінаїда Іванівна** (1931–2008) — видатна вчена в галузі методики навчання математики в закладах загальної середньої і вищої освіти, перша жінка — доктор наук із цього фаху в Україні. Перші з її досліджень стосувалися культури тригонометричних обчислень. З. І. Слепкань була однією з провідних розробників і розробниць стандартів математичної освіти, авторкою підручників для учнів і студентів, посібників для вчителів.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
синус	sine	Sinus, m	sinus
косинус	cosine	Kosinus, m	cosinus
тангенс	tangent	Tangens, m	tangente

qr.orioncentr.com.ua/62Sbi

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке синус, косинус і тангенс для кута від 0° до 180° .
2. Для якого кута тангенс не існує й чому?
3. Чому синуси тупих кутів додатні, а косинуси й тангенси — від'ємні?
4. Назвіть значення синуса й косинуса для кутів 0° , 90° , 180° .
5. Назвіть значення тангенса для кутів 0° і 180° .
6. Поясніть тотожність: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
7. Поясніть, чому для будь-якого кута від 0° до 180° виконуються рівності $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.
8. Поясніть, як виразити синус і косинус гострого кута, більшого за 45° , через косинус і синус кута, меншого від 45° .

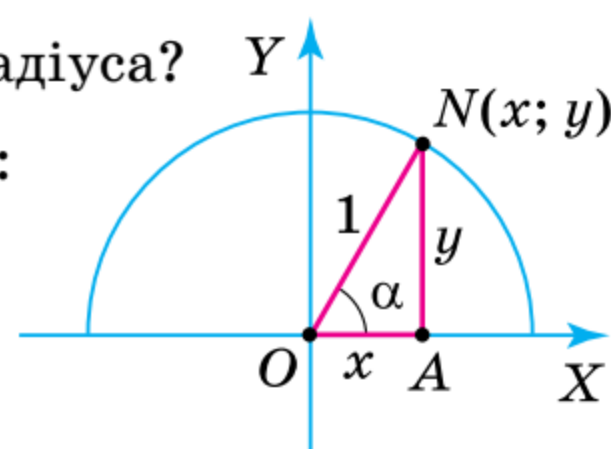
Усне тренування

Обчисліть:

- 1) $136^\circ + 44^\circ$; $143^\circ + 37^\circ$; $109^\circ + 71^\circ$; $122^\circ + 58^\circ$;
- 2) $26^\circ + 64^\circ$; $53^\circ + 37^\circ$; $29^\circ + 61^\circ$; $42^\circ + 48^\circ$.

Розв'яжіть задачі

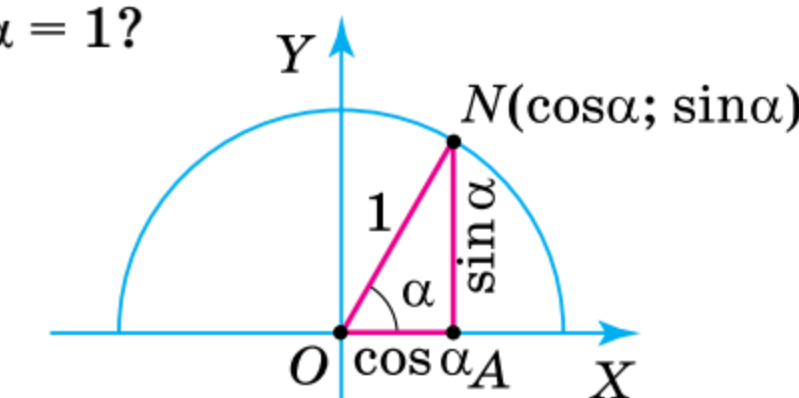
- 101'. Чи може на одиничному півколі: 1) абсциса точки дорівнювати: 2; 0,5; -1; 2) ордината точки дорівнювати: 0,8; 1,4; 1?
- 102'. Радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α . Чи правильно, що $\sin \alpha$ дорівнює:
 - 1) абсцисі кінця радіуса;
 - 2) ординаті кінця радіуса;
 - 3) відношенню ординати й абсциси кінця радіуса?
- 103'. Радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α . Чи правильно, що $\cos \alpha$ дорівнює:
 - 1) абсцисі кінця радіуса;
 - 2) ординаті кінця радіуса;
 - 3) відношенню ординати й абсциси кінця радіуса?
- 104'. Радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α . Чи правильно, що $\operatorname{tg} \alpha$ дорівнює:
 - 1) абсцисі кінця радіуса;
 - 2) ординаті кінця радіуса;
 - 3) відношенню ординати й абсциси кінця радіуса?
- 105'. Розгляньте малюнок 26. Чи правильно, що:
 - 1) $x = \sin \alpha$; 4) $y = \cos \alpha$;
 - 2) $x = \cos \alpha$; 5) $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$;
 - 3) $y = \sin \alpha$; 6) $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$?



Мал. 26

106'. Розгляньте малюнок 27. Чи правильно, що:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; 4) $\sin \alpha - \cos \alpha = 1$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; 5) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
- 3) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$; 6) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$?



Мал. 27

107'. Чи правильно, що:

- 1) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
- 2) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
- 3) $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
- 4) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$;
- 5) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$;
- 6) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$?

108'. Чи правильно, що:

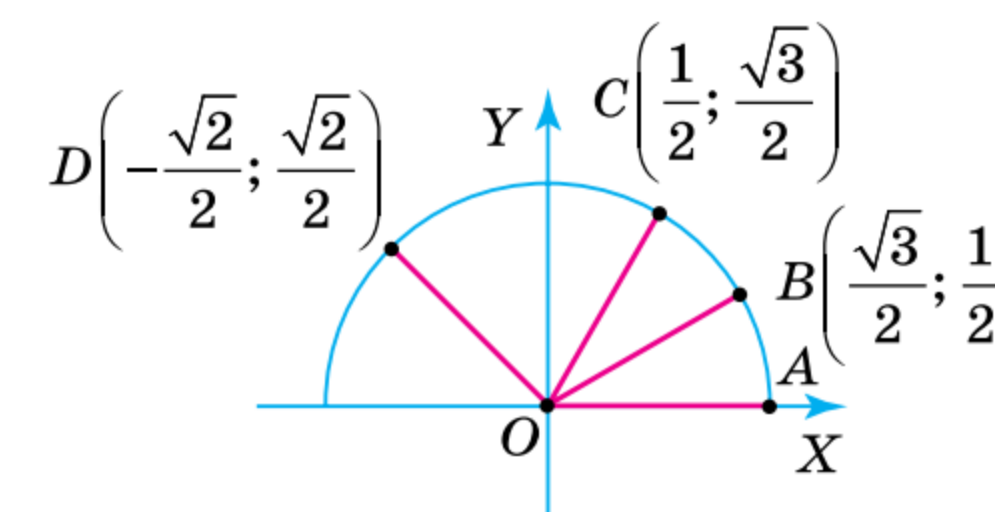
- 1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; 3) $\cos(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
- 2) $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; 4) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$?

109'. На малюнку 28 зображено одиничне півколо.



qr.orioncentr.com.ua/axG8R

1. Назвіть абсциси й ординати точок B, C і D.
2. Дайте назви (α , β , γ) кутам, що утворюють з додатною піввіссю OX радіуси OB , OC і OD .
3. Виразіть значення синуса, косинуса й тангенса цих кутів через координати точок B, C і D.

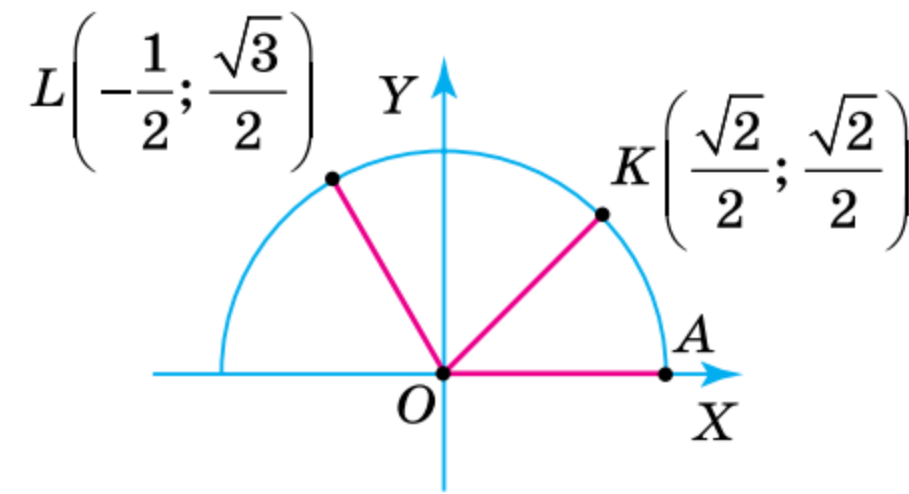


Мал. 28

110'. На малюнку 29 зображено одиничне півколо.



1. Назвіть абсциси й ординати точок K і L.
2. Дайте назви (α , β) кутам, що утворюють з додатною піввіссю OX радіуси OK і OL .
3. Виразіть значення синуса, косинуса й тангенса цих кутів через координати точок K і L.



Мал. 29

111°. 1. Назвіть радіус одиничного півкола (мал. 30), що утворює з додатною піввіссю OX кут: 0° , 90° , 180° .

2. Запишіть значення: а) $\sin 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\sin 180^\circ$; б) $\operatorname{tg} 0^\circ$, $\operatorname{tg} 180^\circ$.

112°. 1. Назвіть радіус одиничного півкола (мал. 30), що утворює з додатною піввіссю OX кут: 0° , 90° , 180° .

2. Запишіть значення: $\cos 0^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 180^\circ$.

113°. Накресліть систему координат, узявши за одиницю довжини відрізок завдовжки 5 см. Побудуйте у I і II чвертях одиничне півколо із центром у початку координат.

1. За допомогою транспортира позначте на одиничному півколі точки A , B , C , D , E так, щоб кути між радіусами OA , OB , OC , OD , OE і додатною піввіссю OX дорівнювали відповідно 35° , 70° , 115° , 130° і 165° .

2. За допомогою лінійки знайдіть координати точок A , B , C , D і E .

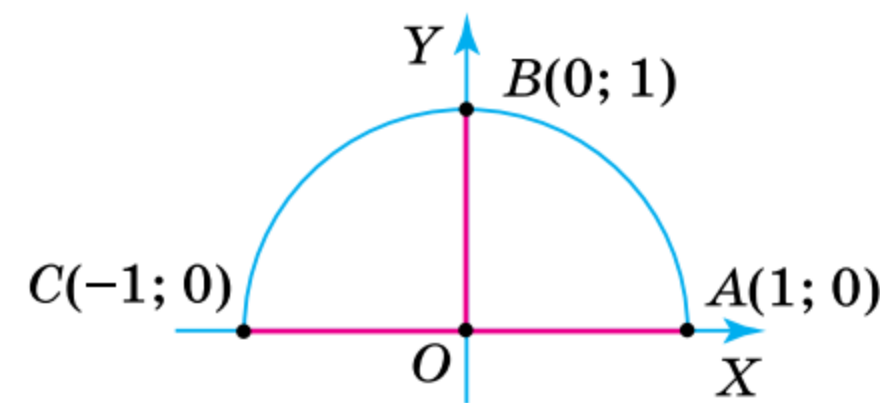
3. Знайдіть наближене значення синуса, косинуса й тангенса для кутів 35° , 70° , 115° , 130° і 165° . Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 6.

Таблиця 6

α	35°	70°	115°	130°	165°
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\operatorname{tg} \alpha$					

114°. Який знак мають $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$? Відповідь поясніть.

115°. Який знак мають $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$? Відповідь поясніть.



Мал. 30

116°. Накресліть у зошиті таблицю 7. У таблиці поставте знак «+», якщо $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ або $\operatorname{tg} \alpha$ — додатний, і знак «-», якщо від'ємний.

Таблиця 7

α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
$\sin \alpha$		
$\cos \alpha$		
$\operatorname{tg} \alpha$		

117°. Гострим чи тупим є кут α , якщо:

- 1) його косинус від'ємний;
- 2) його косинус додатний;
- 3) його тангенс від'ємний?

Відповідь поясніть.

118°. Гострим чи тупим є кут α , якщо: 1) його тангенс додатний; 2) його косинус від'ємний? Відповідь поясніть.

119°. Обчисліть:

- 1) $3 \cos 0^\circ - 2 \sin 90^\circ$; 2) $4 \sin 0^\circ - 5 \cos 180^\circ$; 3) $6 \sin 90^\circ - 3 \operatorname{tg} 180^\circ$.

120°. Обчисліть: $8 \sin 180^\circ + 2 \cos 90^\circ$.



121°. Знайдіть $\sin \alpha$, якщо:

- 1) $\cos \alpha = -1$; 2) $\cos \alpha = 0$; 3) $\cos \alpha = 1$.

122°. Знайдіть $\cos \alpha$, якщо:

- 1) $\sin \alpha = 1$; 2) $\sin \alpha = 0$.

123°. Обчисліть:

- 1) $\sin^2 9^\circ + \cos^2 9^\circ$; 5) $-(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)$;
- 2) $\sin^2 109^\circ + \cos^2 109^\circ$; 6) $-(\sin^2 115^\circ + \cos^2 115^\circ)$;
- 3) $\sin^2 22^\circ + \cos^2 22^\circ$; 7) $-\sin^2 92^\circ - \cos^2 92^\circ$;
- 4) $\sin^2 172^\circ + \cos^2 172^\circ$; 8) $-\sin^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ$.

124°. Обчисліть:

- 1) $\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ$; 2) $-\sin^2 100^\circ - \cos^2 100^\circ$.

125°. Спростіть вираз:



- 1) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; 8) $-1 + \cos^2 \alpha$;
- 2) $1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; 9) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1}$;
- 3) $1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; 10) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$.
- 4) $-1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
- 5) $1 - \sin^2 \alpha$;
- 6) $1 - \cos^2 \alpha$;
- 7) $-1 + \sin^2 \alpha$;



qr.orioncentr.com.ua/uyYSk

126°. Спростіть вираз:

- E** 1) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;
 2) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1$;
 3) $\sin^2 \alpha - 1$;
 4) $\cos^2 \alpha - 1$.

127°. Спростіть вираз:

- 1) $\sin(180^\circ - \alpha)$; 4) $\cos(90^\circ - \alpha)$;
 2) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; 5) $\cos(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha$;
 3) $\cos(180^\circ - \alpha) + \cos \alpha$; 6) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos \alpha$.

128°. Спростіть вираз:

- E** 1) $\cos(180^\circ - \alpha)$;
 2) $\sin(90^\circ - \alpha)$;
 3) $\cos(90^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - \alpha)$.

129°. Виразіть синуси кутів 110° , 125° , 150° , 165° , 176° через синуси гострих кутів.

130°. Виразіть синуси кутів 91° , 92° , 93° через синуси гострих кутів.

131°. Виразіть косинуси кутів 105° , 120° , 122° , 145° , 160° через косинуси гострих кутів.

132°. Виразіть косинуси кутів 93° , 94° , 95° через косинуси гострих кутів.

133°. Спростіть вираз:

- 1) $3\sin(180^\circ - \alpha) - 2\sin(180^\circ - \alpha)$;
 2) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$;
 3) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)$.

134°. Спростіть вираз: $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha)$.



135. Чи можуть синус або косинус кута від 0° до 180° дорівнювати:

- 1) $-0,6$;
 2) $0,8$;
 3) 3 ?

Відповідь поясніть.

136. Чи може тангенс кута дорівнювати:

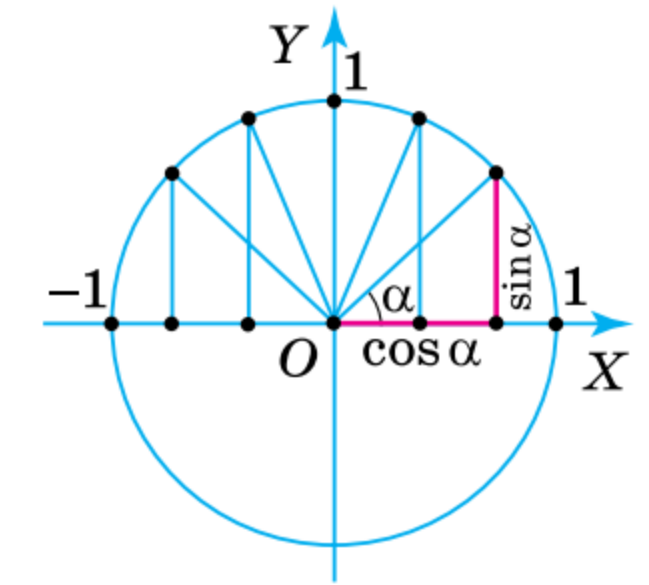
- 1) 8 ;
 2) $0,01$;
 3) 200 ?

Відповідь поясніть.

137. α — кут трикутника. Які з величин $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ можуть бути від'ємними та за яких умов?

138. Скориставшись малюнком 31, обґрунтуйте твердження:

- 1) якщо кут α збільшується від 0° до 90° , то синус цього кута збільшується від 0 до 1, а косинус — зменшується від 1 до 0;
 2) якщо кут α збільшується від 90° до 180° , то синус цього кута зменшується від 1 до 0, а косинус — зменшується від 0 до -1 .



Мал. 31

139. Якщо α , β , γ — кути трикутника, то який знак має сума:

- 1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$; 2) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$?

Відповідь поясніть.

140. Якщо α , β , γ — кути трикутника, то який знак має сума:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}?$$

Відповідь поясніть.

141. Гострий чи тупий кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$; 2) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$?

Відповідь поясніть.

142. Гострий чи тупий кут α , якщо $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0$? Відповідь поясніть.



143. Яких значень може набувати сума:

- 1) $\sin \alpha + 1$; 2) $\cos \alpha + 0,5$?

144. Яких значень може набувати сума $\sin \alpha + 0,2$?

145. Визначте знак різниці:

- 1) $\sin 145^\circ - \sin 169^\circ$; 2) $\cos 178^\circ - \cos 153^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 163^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$.

146. Який знак має добуток:

- 1) $\cos 10^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ$; 2) $\sin 40^\circ \cdot \cos 153^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$?

147. Який знак має добуток: $\operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 160^\circ \cdot \sin 150^\circ$?

148. Обчисліть:

1) $\frac{6 \sin 90^\circ \sin 30^\circ \cos 0^\circ}{\cos 180^\circ}$;

2) $a^2 \sin 90^\circ - b^2 \cos 0^\circ - c^2 \cos 180^\circ$, якщо $a = 4$, $b = 3$, $c = -5$.

149. Обчисліть: $8 \cos 60^\circ + 2 \sin 90^\circ - 10 \cos 180^\circ$.

150. Знайдіть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо:

- 1) $\cos \alpha = -1$; 2) $\sin \alpha = 1$; 3) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; 4) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

151. Побудуйте кут α , якщо:

1) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\sin \alpha = 0,5$.

Скільки розв'язків має задача?

152. Побудуйте кут α , якщо:

1) $\cos \alpha = 0,4$; 2) $\cos \alpha = -0,5$.

153. За якого значення α тотожність $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ не справджується?

Відповідь поясніть.

154. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$; 3) $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
2) $(1 + \sin \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \sin \alpha)$; 4) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$.

155. Спростіть вираз:

 1) $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (2\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1)$.

156. Доведіть тотожність:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$;
2) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$;
3) $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = 1$.

157. Доведіть тотожність: $(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.

158. Чи існує кут α , для якого:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ і $\cos \alpha = \frac{1}{4}$; 2) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ і $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

159. Чи існує кут α , для якого $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і $\cos \alpha = \frac{4}{5}$?

160. Знайдіть $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \sin \alpha$, якщо:

1) $\sin \alpha = 0,5$; 2) $\sin \alpha = 0,1$; 3) $\sin \alpha = 0,2$.

161. Знайдіть $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; 3) $\sin \alpha = 0,8$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
2) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

162. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо:

1) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$; 2) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$; 3) $\sin \alpha = 0,6$.

163. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{11}{60}$.

164. Знайдіть $3\sin(180^\circ - \alpha) + 2\cos(90^\circ - \alpha)$, якщо:

1) $\sin \alpha = 0,6$; 2) $\sin \alpha = 0,4$; 3) $\sin \alpha = 0,2$.

165. Спростіть вираз:

1) $\frac{2\cos(90^\circ - \alpha) - 2\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$;
2) $\frac{2\sin^2(180^\circ - \alpha) + 2\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$;
3) $\frac{\sin^2(90^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - \alpha)\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.

166. Спростіть вираз: $\frac{\cos(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}$.

167. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{1 + \sin \alpha} = 2\operatorname{tg} \alpha$;
2) $\frac{1 - \cos^2(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$;
3) $\left(\frac{1}{\cos^2(90^\circ - \alpha)} - 1 \right) \cdot \operatorname{tg}^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

168. Доведіть тотожність: $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg}^2(180^\circ - \alpha) = -1$.

169*. Доведіть, що коли $\sin \alpha = \sin \beta$, то або $\alpha = \beta$, або $\alpha = 180^\circ - \beta$.

170*. Чи існує кут α , для якого:

1) $\sin \alpha = \cos \alpha$;
2) $\sin \alpha = -\cos \alpha$?

171*. Скориставшись одиничним півколом, доведіть:

1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
2) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

172*. Доведіть нерівність $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \leq 1$.

173*. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 1. З вершини C проведено висоту CD . Знайдіть AC , BC , AD , BD і CD , якщо $\angle BAC = \alpha$.

174*. Спростіть вираз:

1) $\frac{2\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$; 3) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2}$;
2) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha$; 4) $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}$.

175*. Обчисліть $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо: 1) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

176*. Обчисліть $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$, якщо: 1) $\operatorname{tg} \alpha = 0$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$.

177*. Знайдіть $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = m$.

178*. Спростіть вираз:

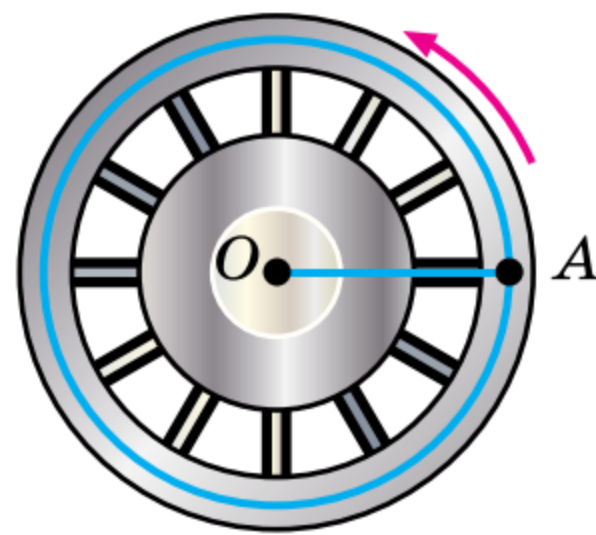
- 1) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 (180^\circ - \alpha)\sin^2 (90^\circ - \alpha)$;
- 2) $\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 (90^\circ - \alpha) - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$;
- 3) $\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 (90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Проявіть компетентність

179. Визначте, який кут утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки протягом 25 хв.

180. Маховик дизеля робить 40 обертів за хвилину. Який кут опише його спиця OA (мал. 32) через 0,5 с?

181. Дві прямі дороги перетинаються під кутом 47° . На одній із цих доріг на відстані 6,5 км від перехрестя розташована автобусна зупинка. Потрібно прокласти найкоротший шлях від цієї зупинки до іншої дороги. Знайдіть довжину цього шляху.



Мал. 32



§ 3. ПОНЯТТЯ РІВНЯННЯ ФІГУРИ. РІВНЯННЯ КОЛА І ПРЯМОЇ

1. Що таке рівняння фігури

Ситуація. На уроці геометрії Оксана Миколаївна запропонувала учнівству 9-А класу з'ясувати, що є рівнянням фігури, та сформулювати відповідне твердження. Вона нагадала, що геометричну фігуру ми уявляємо складеною з точок, а кожен точку можна задати її координатами у прямокутній декартовій системі координат. Клас поділився на чотири групи. Кожна група здійснила «мозковий штурм» і представила свій результат. Початок твердження в усіх групах виявився однаковим, а от його закінчення відрізнялося значно.



qr.orioncentr.com.ua/AtFTB

Рівнянням фігури в даній системі координат є...

Група 1

... рівняння з однією змінною x .

Група 2

... рівняння з однією змінною y .

Група 3

... рівняння з двома змінними x і y , яке задовольняють координати будь-якої точки координатної площини.

Група 4

... рівняння з двома змінними x і y , яке задовольняють координати кожної точки даної фігури й не задовольняють координати будь-якої іншої точки.



Чи є серед отриманих тверджень правильне?

Так. Це твердження групи 4.



Якщо для фігури F відомо її рівняння в деякій системі координат, то говорять: *фігура F задана рівнянням у даній системі координат*.



Щоб установити, що в даній системі координат фігуру F задано певним рівнянням, потрібно довести два взаємно обернені твердження:

- 1) якщо точка належить фігурі F , то її координати задовольняють рівняння фігури F ;
- 2) якщо координати деякої точки задовольняють рівняння фігури F , то ця точка належить фігурі F .

2. Рівняння кола

Запам'ятайте!

Теорема (про рівняння кола)

Коло із центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R задає рівняння:

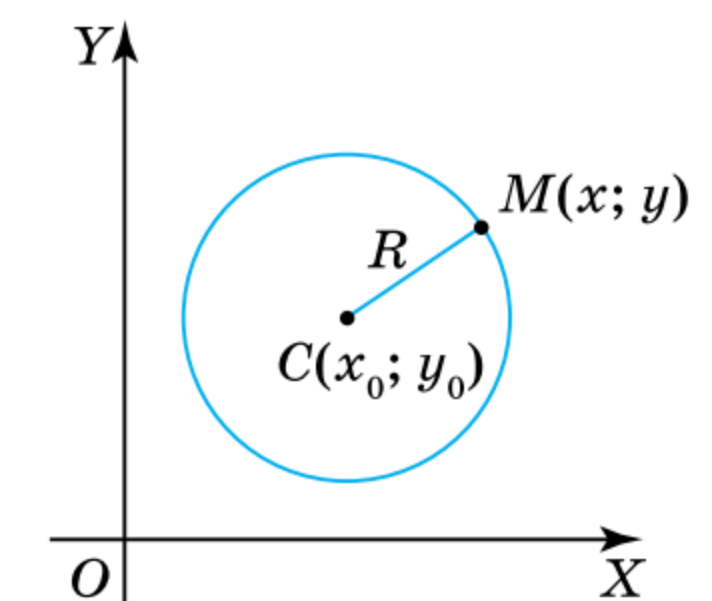
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Дано: $ХОУ$ — прямокутна декартова система координат (мал. 33), коло із центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R .

Довести: дане коло задає рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Доведення. Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ на колі. Тоді $CM = R$ або $CM^2 = R^2$. Звідси одержимо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1)$$



Мал. 33

Оскільки точка M — довільна точка кола, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки кола задовольняють рівняння (1).

Навпаки, нехай координати деякої точки $M_1(x_1; y_1)$ задовольняють рівняння (1). Тоді справджується рівність $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$ або $R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Остання рівність показує, що точка $M_1(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола — точки $C(x_0; y_0)$ — на відстань R , тобто точка $M_1(x_1; y_1)$ належить цьому колу.

НАСЛІДОК. Якщо центр кола міститься в початку координат, то рівняння кола має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

Справді, початок координат O має координати $(0; 0)$, тому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ і рівняння (1) набуває вигляду: $x^2 + y^2 = R^2$.

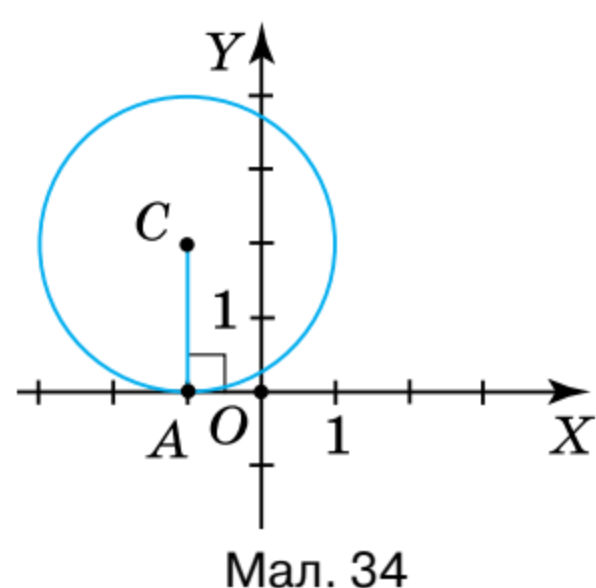
Відомості про особливості рівняння кола наведено в таблиці 8.

Таблиця 8

Радіус кола	Центр кола	Рівняння кола
R	$C(x_0; y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
	$C(0; 0)$	$x^2 + y^2 = R^2$

Задача 1 Коло, яке задано рівнянням $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = R^2$, дотикається до осі OX . Який радіус даного кола?

Розв'язання Нехай C — центр кола. Його координати: $C(-1; 2)$. Перпендикуляр CA до осі OX є радіусом даного кола (мал. 34), а його довжина дорівнює ординаті центра кола C . Тому $R = 2$.



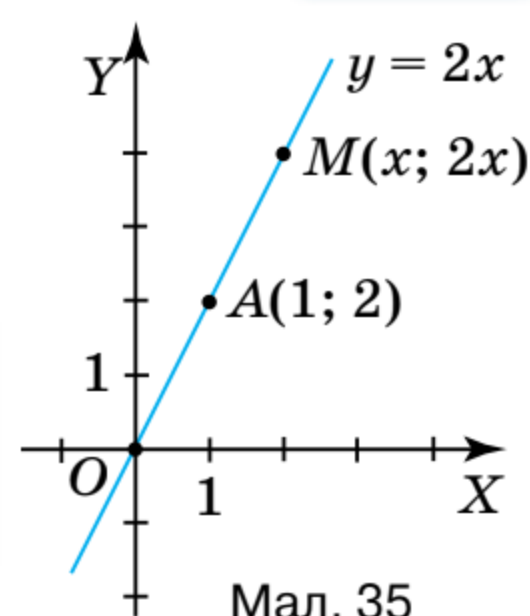
3. Рівняння прямої

Із курсу алгебри ви знаєте, що графіком функції $y = 2x$ є пряма (мал. 35). Координати кожної точки цієї прямої, наприклад $O(0; 0)$ і $A(1; 2)$, задовольняють її рівняння. І навпаки, яку б точку M з координатами $(x; 2x)$ ми не взяли, вона лежатиме на даній прямій. Це означає, що дану пряму задає рівняння $y = 2x$.

Запам'ятайте!

Пряма, що проходить через початок координат, задається рівнянням:

$$y = kx.$$



qr.orioncentr.com.ua/0WFHQ

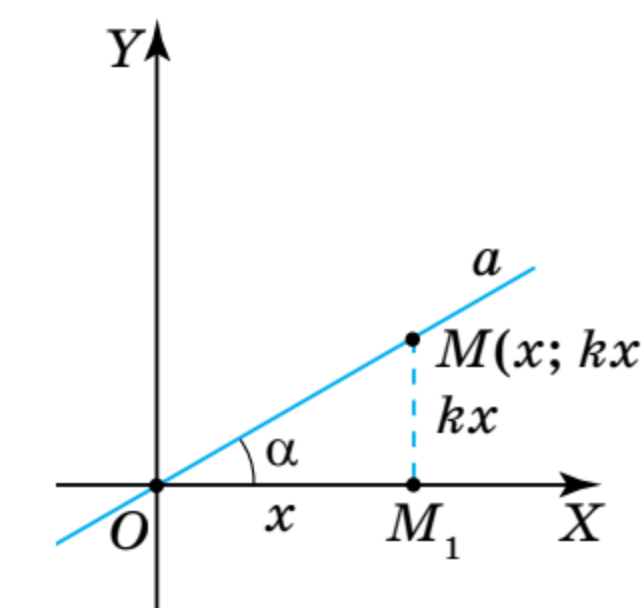


Коефіцієнт k в цьому рівнянні називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. На малюнку 36 ви бачите, що пряма a нахилена до додатної півосі OX під кутом α . Із прямокутного трикутника OM_1M ($\angle M_1 = 90^\circ$) одержуємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MM_1}{OM_1} = \frac{kx}{x} = k.$$

Отже, кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута між даною прямою й додатною піввіссю OX :

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$



Мал. 36



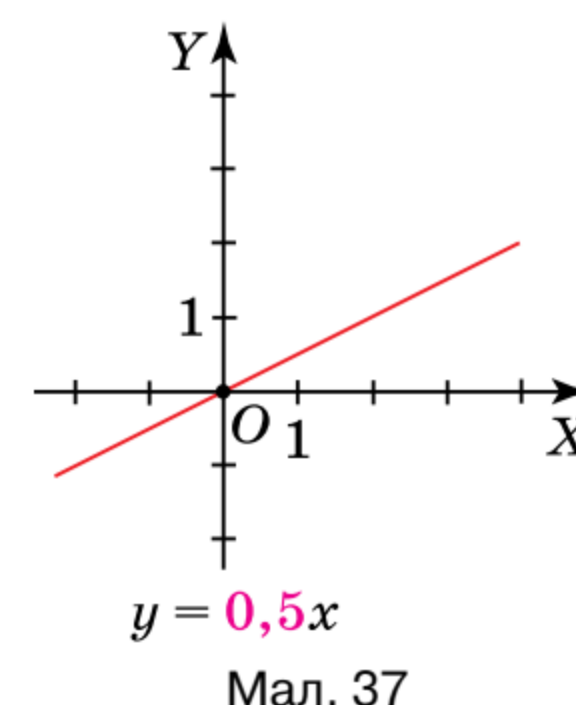
Як розміщується пряма $y = kx$ у системі координат залежно від знака кутового коефіцієнта?

Поміркуємо (табл. 9).

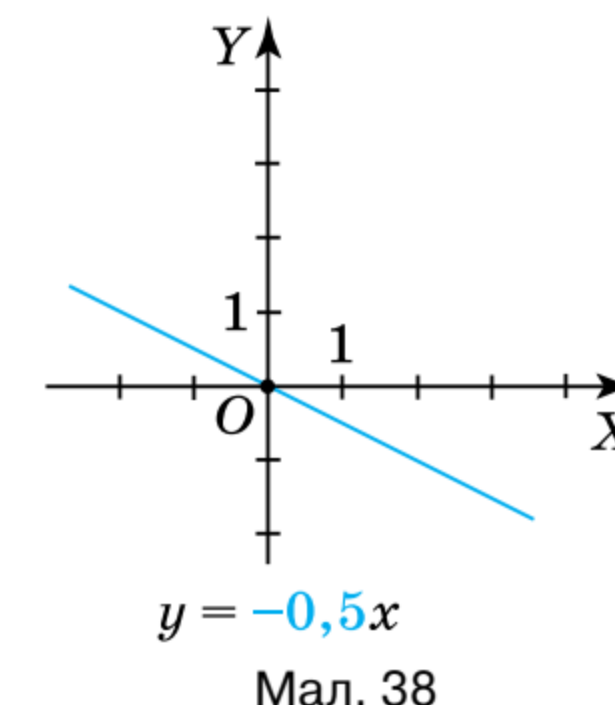


Таблиця 9

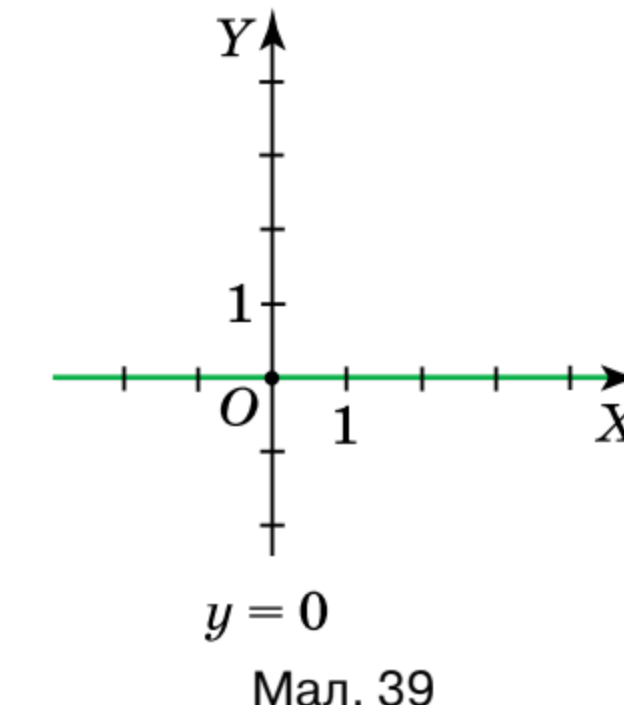
Рівняння прямої	$y = 0,5x$	$y = -0,5x$	$y = 0$
Кутовий коефіцієнт	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$
Кут між прямою і додатною піввіссю OX	гострий	тупий	0°
Зображення прямої	мал. 37	мал. 38	мал. 39



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39



Пряма $y = kx$ проходить через початок координат і розміщується:

- у I і III координатних чвертях, якщо $k > 0$;
- у II і IV координатних чвертях, якщо $k < 0$;
- збігається з віссю OX , якщо $k = 0$.



Чи можна задати рівнянням пряму, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт k ?

Так.



Нехай пряма c перетинає вісь OY у точці $B(0; b)$ і має кутовий коефіцієнт k (мал. 40).

Позначимо на прямій c довільну точку N з абсцисою x та знайдемо її ординату y . Для цього через початок координат проведемо пряму $a \parallel c$. Вона має той самий кутовий коефіцієнт k , тому задається рівнянням $y = kx$.

Нехай пряма, що проходить через точку N паралельно осі OY , перетинає пряму a в точці M , а вісь OX — у точці M_1 . Тоді одержимо:

$$MM_1 = kx \text{ (оскільки } M \in a),$$

$NM = OB = b$ (оскільки чотирикутник $NMOB$ — паралелограм за означенням),

$$NM_1 = kx + b.$$

Отже, ордината точки N виражається через її абсцису так: $y = kx + b$.

Оскільки точка N — довільна точка прямої c , то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $y = kx + b$.

Обернене твердження доведіть самостійно.

Запам'ятайте!

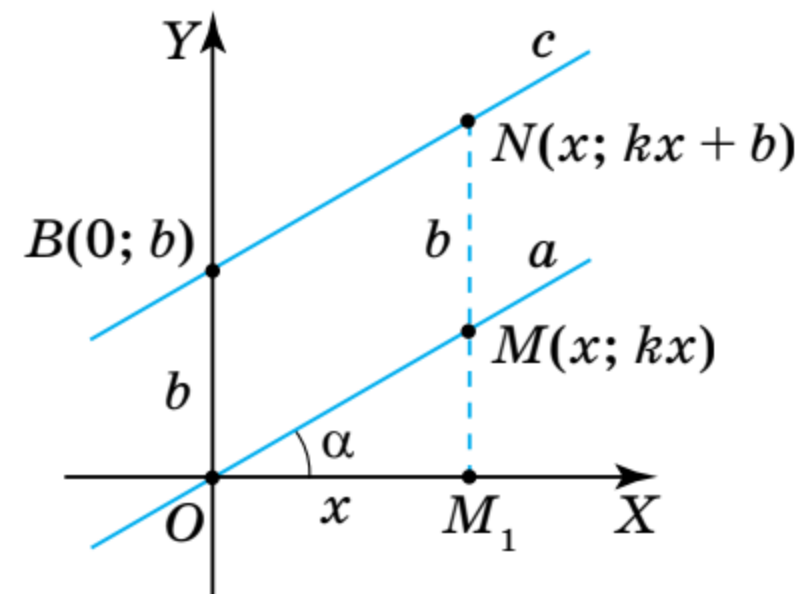
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = kx + b.$$



Чи можна задати рівнянням пряму, що проходить через дві точки?

Так.



Мал. 40

Нехай точки A і B містяться в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (мал. 41). Через ці точки проведемо пряму a й позначимо на ній довільну точку $M(x; y)$. Через точки B і M проведемо прямі, паралельні осі OX , через точку A — пряму, паралельну осі OY . Точки їх перетину позначимо C і D . Одержали два подібні трикутники ACM і ADB (у них кут A — спільний і $\angle ABD = \angle AMC$). З подібності трикутників випливає:

$$\frac{CM}{DB} = \frac{CA}{DA}.$$

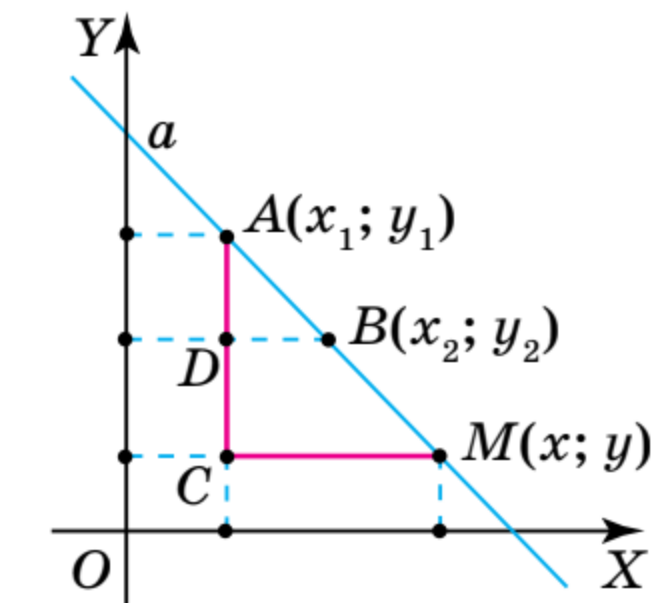
Виразимо довжини цих відрізків:

$$CM = x - x_1, DB = x_2 - x_1, CA = y_1 - y, DA = y_1 - y_2.$$

Підставивши їх у пропорцію, одержимо рівність: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$ або $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Оскільки точка M — довільна точка прямої a , то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Обернене твердження доведіть самостійно.

Інші випадки розміщення точок A і B в системі координат розгляньте самостійно.



Мал. 41

Запам'ятайте!

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, має вигляд: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Одержане рівняння можна звести до вигляду:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0.$$

Позначивши $y_2 - y_1 = a$, $x_1 - x_2 = b$, $y_1x_2 - x_1y_2 = c$, одержимо загальне рівняння прямої.

Запам'ятайте!

Загальне рівняння прямої має вигляд:

$$ax + by + c = 0.$$

Відомості про види рівнянь прямої наведено в таблиці 10.

Таблиця 10

Назва виду рівняння прямої	Рівняння прямої	Особливості рівняння прямої
Загальне рівняння прямої	$ax + by + c = 0$	a, b і c — числа, які одночасно не дорівнюють нулю
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ — точки, через які проходить пряма
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	k — кутовий коефіцієнт, b — відрізок, який відтинає пряма на осі OY
Рівняння прямої, що проходить через початок координат	$y = kx$	k — кутовий коефіцієнт

Дізнайтеся більше

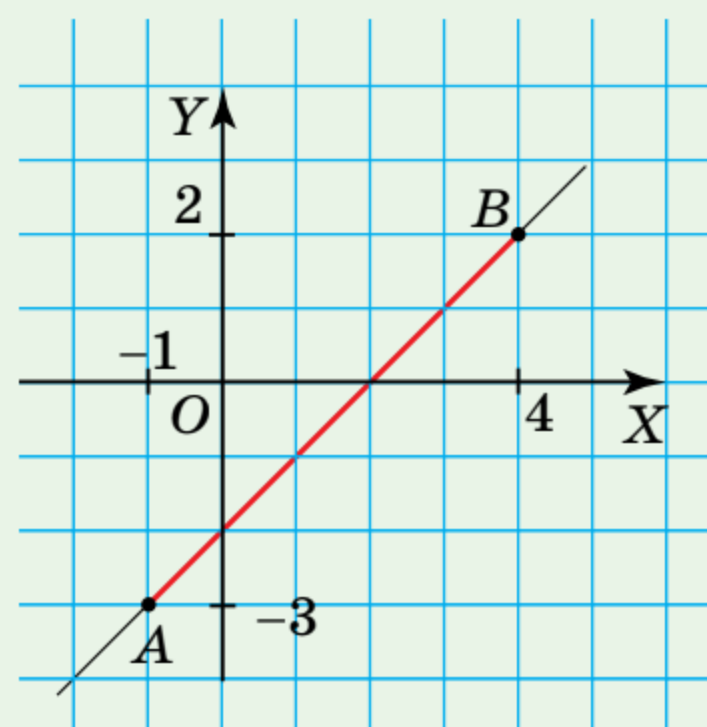
1. У вас могло виникнути запитання: Як аналітично задати відрізок; трикутник; квадрат? Розглянемо приклади.

Нехай потрібно задати відрізок AB прямої $y = x - 2$ (мал. 42). Зрозуміло, що координати кожної точки відрізка AB задовольняють рівняння даної прямої. Але не кожна точка цієї прямої належить відрізку AB . Кінці відрізка мають координати: $A(-1; -3)$ і $B(4; 2)$. Тому абсциси точок відрізка набувають значень від -1 до 4 , а ординати — від -3 до 2 .

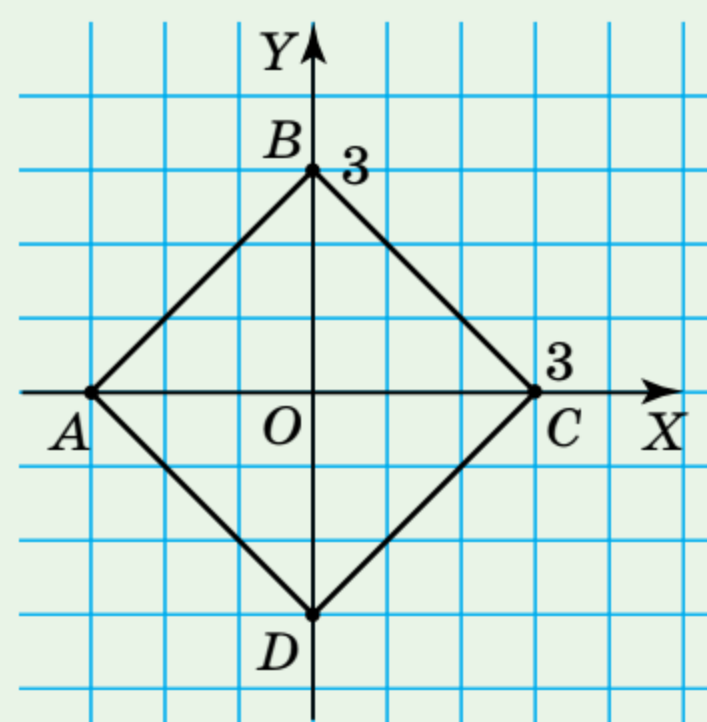
Отже, даний відрізок AB задають системою:

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ -1 \leq x \leq 4, \\ -3 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Трикутник і квадрат можна задати аналітично, відповідно, трьома та чотирма системами, що визначають їхні сторони. Особливим рівнянням задається квадрат, у якого вершини лежать на осях координат: $|x| + |y| = a$, де a — половина довжини діагоналі квадрата (дослідіть це самостійно). На малюнку 43 ви бачите квадрат $ABCD$, рівняння якого $|x| + |y| = 3$.



Мал. 42



Мал. 43

2. Метод координат встановлює зв'язки між алгеброю та геометрією, надає допомогу як одній, так і іншій науці. Його основоположниками вважають французьких учених — **Рене Декарта** (1596–1650) і **П'єра Ферма** (1601–1655), які працювали незалежно один від одного. Однак наукові роботи П. Ферма стали широко відомими лише після смерті вченого, коли в 1669 р. його син опублікував збірник «Різні твори». П. Ферма вивів рівняння прямої, а також еліпса, гіперболи, параболи та інших ліній, що задаються рівняннями другого степеня.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
рівняння фігури	equation of the figure	Gleichung der Figur	équation d'une figure

qr.orioncentr.com.ua/N0AZF

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке рівняння фігури.
2. Як установити, що фігура в даній системі координат задається певним рівнянням?
3. Яке рівняння задає коло в прямокутній декартовій системі координат?
4. Яким є рівняння кола із центром у початку координат?
5. Як розміщується в системі координат пряма $y = kx$?
6. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
7. Яким є рівняння прямої, що проходить через дві точки?
8. Який вигляд має загальне рівняння прямої?

Усне тренування

Обчисліть:

- 1) $\sqrt{36} + \sqrt{144}$; $\sqrt{121} - \sqrt{64}$; $\sqrt{49} + \sqrt{196}$; $\sqrt{625} - \sqrt{225}$;
- 2) $6^2 + 12^2$; $11^2 - 8^2$; $7^2 + 14^2$; $25^2 - 15^2$.

Розв'яжіть задачі

182'. Чи правильно, що коло із центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R задає рівняння:

- 1) $(x - x_0) + (y - y_0) = R$;
- 2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R$;
- 3) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$?

183'. Чи правильно, що коло із центром $O(0; 0)$ і радіусом R задає рівняння:

- 1) $x + y = R$; 2) $x^2 + y^2 = R$; 3) $x^2 + y^2 = R^2$?

184'. Чи правильно, що дана пряма проходить через початок координат:

- 1) $y = x + 1$; 2) $y = -2x$; 3) $y = \sqrt{3}x$; 4) $y = \sqrt{2}x - 3$?

185'. Нехай α — кут, який утворює пряма з додатною піввіссю осі OX . Чи правильно, що кутовий коефіцієнт прямої дорівнює:

- 1) $\cos \alpha$; 2) $\sin \alpha$; 3) $\tan \alpha$?

186'. Чи є дане рівняння рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом:

- 1) $y = kx + b$; 2) $ax + by + c = 0$; 3) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$?

187'. Чи є дане рівняння рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

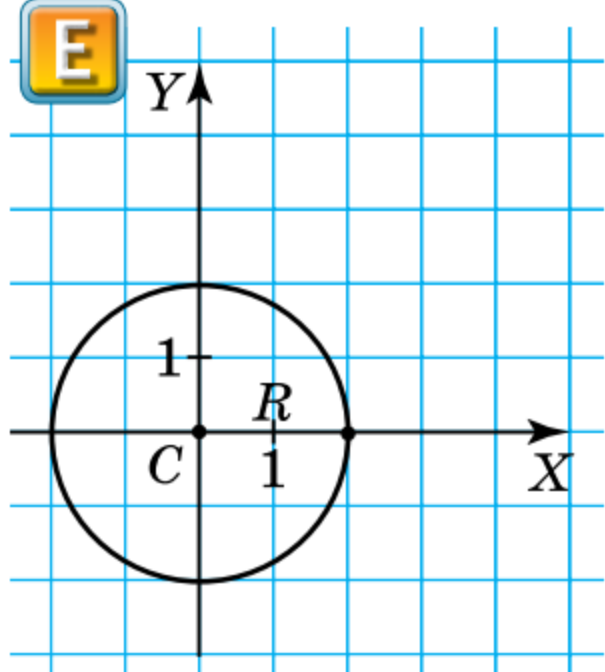
- 1) $y = kx + b$; 2) $ax + by + c = 0$; 3) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$?

188'. Чи є дане рівняння загальним рівнянням прямої:

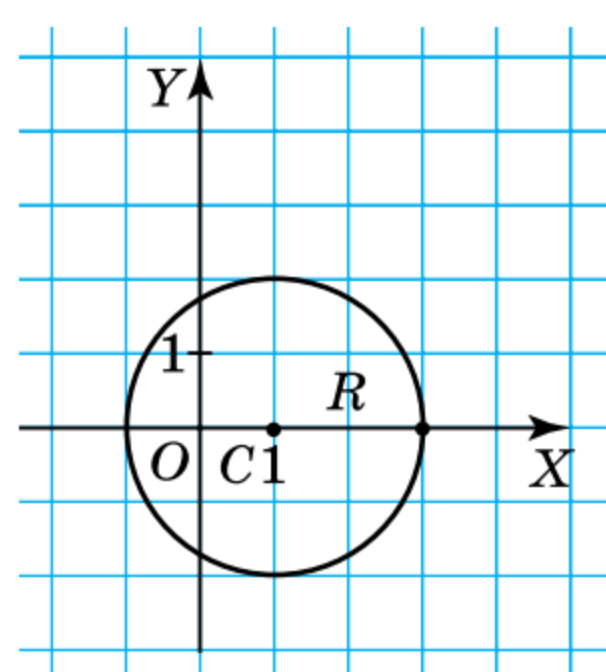
- 1) $y = kx + b$;
2) $ax + by + c = 0$;
3) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$?

189'. За даними на малюнках 44, 45 визначте координати центра C і радіус R кола.

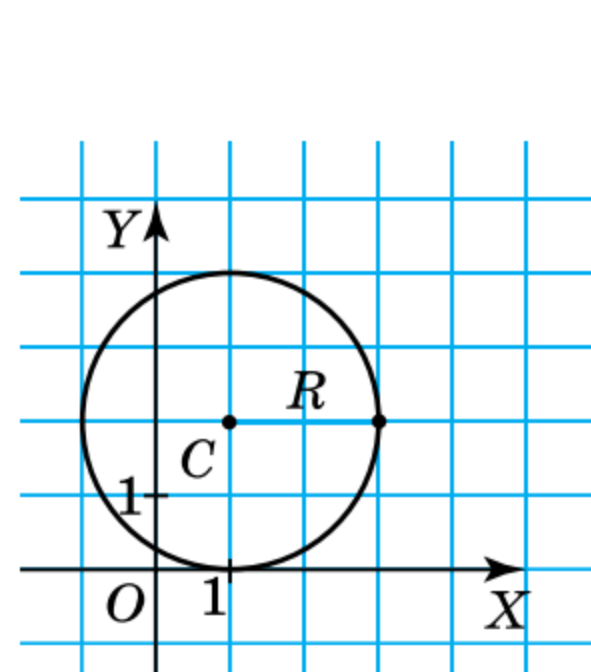
190'. Визначте координати центра C і радіус R кола на малюнку 46.



Мал. 44



Мал. 45



Мал. 46

191'. Побудуйте коло з даним центром C і радіусом R :

- 1) $C(-1; 1)$, $R = 3$; 2) $C(2; -1)$, $R = 1$.

192'. Побудуйте коло із центром $C(-2; -3)$ і радіусом 4.

193'. Визначте координати центра й радіус кола, заданого рівнянням:

- 1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
2) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 3$;
3) $x^2 + (y - 3)^2 = 2$;
4) $(x + 1)^2 + y^2 = 49$.

194'. Визначте координати центра й радіус кола, заданого рівнянням:

- 1) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$; 2) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

195'. Чи лежать точки $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(-6; -4)$, $D(-5; 0)$ на колі:

- 1) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$;
2) $x^2 + (y - 3)^2 = 2$;
3) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$?

196'. Чи лежать точки $O(0; 0)$ і $T(-2; 5)$ на колі $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$?

197'. Складіть рівняння кола з радіусом R і центром у точці C , якщо:

- 1) $R = 5$, $C(2; 1)$; 2) $R = \sqrt{5}$, $C(-2; -1)$.

198'. Складіть рівняння кола з радіусом 4 і центром у точці $C(2; -2)$.



199'. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 11.

Таблиця 11

Координати кінців діаметра кола	Координати центра кола	Радіус кола	Рівняння кола
$(5; -1)$ і $(-5; -1)$			
$(6; 0)$ і $(0; 8)$			
$(6; 8)$ і $(0; 0)$			
$(-6; 0)$ і $(2; -8)$			
$(-1; 6)$ і $(7; -2)$			

200'. Коло проходить через точки A і B , а його центр лежить на прямій AB . Складіть рівняння кола, якщо:

- 1) $A(-5; 2)$, $B(1; -4)$; 2) $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$.

201'. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(5; 2)$ і $B(-1; -4)$, якщо його центр лежить на прямій AB .

202'. Який кут — тупий чи гострий — утворює з додатною піввіссю осі OX пряма:

- 1) $y = 3x$; 2) $y = -7x$; 3) $y = -0,6x$; 4) $y = 1,5x$?

203'. Який кут — тупий чи гострий — утворює з додатною піввіссю осі OX пряма:

- 1) $y = -2x$; 2) $y = 3,2x$?



qr.orioncentr.com.ua/SM9LZ

204°. У яких координатних чвертях розміщується пряма:

- 1) $y = 0,33x$; 2) $y = -7,5x$; 3) $y = -6x$; 4) $y = 5,1x$?

205°. У яких координатних чвертях розміщується пряма:

- 1) $y = -0,2x$; 2) $y = 2,3x$?

206°. Назвіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої:

- 1) $y = x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -\sqrt{3}x$; 4) $y = \sqrt{2}x$.

207°. Назвіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої:

- E** 1) $y = 3x$; 2) $y = -3x$.

208°. Яким є рівняння:

- 1) осі абсцис;
2) осі ординат;
3) бісектриси першого й третього координатних кутів?

209°. Яке рівняння бісектриси другого й четвертого координатних кутів?

210°. Запишіть координати:

- 1) точки A , що лежить на осі абсцис;
2) точки B , що лежить на осі ординат;
3) точки C , що лежить на бісектрисі першого й третього координатних кутів.

211°. Запишіть координати точки A , що лежить на бісектрисі другого й четвертого координатних кутів.

212°. На якому з малюнків (47 чи 48) зображено пряму:

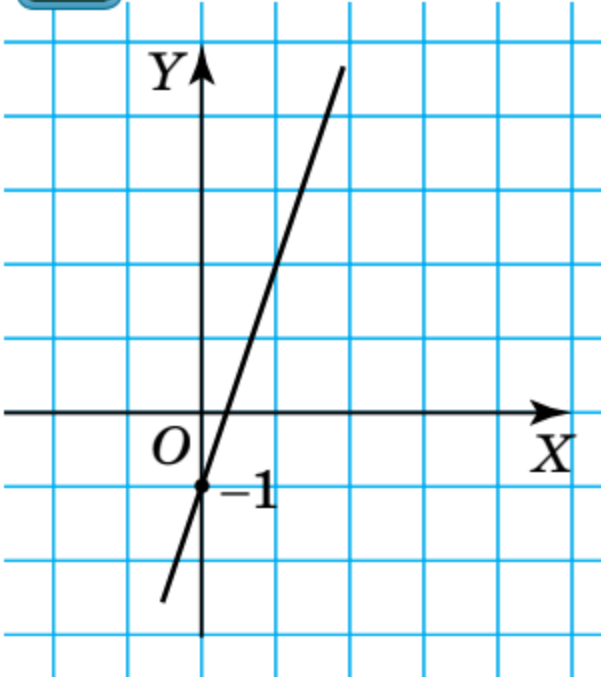
- E** 1) $y = 3x - 1$; 2) $y = -2x + 1$?

Який відрізок на осі ординат відтинає задана пряма? Який у неї кутовий коефіцієнт?

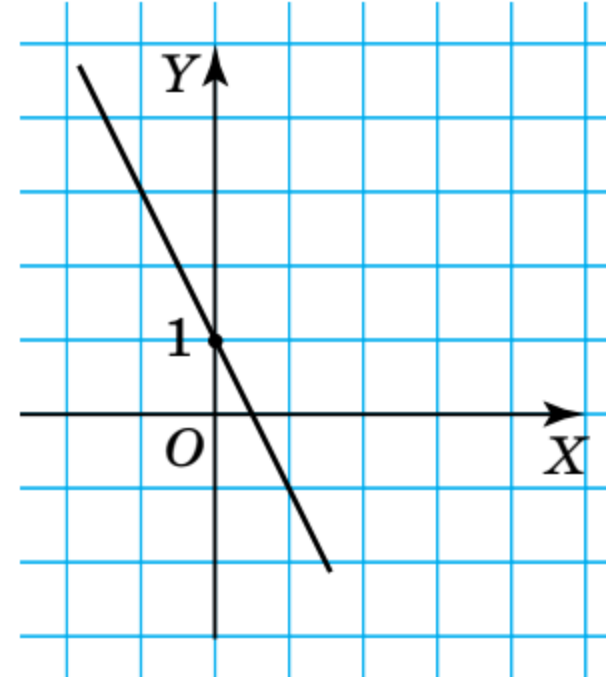


qr.orioncentr.com.ua/Jf9bf

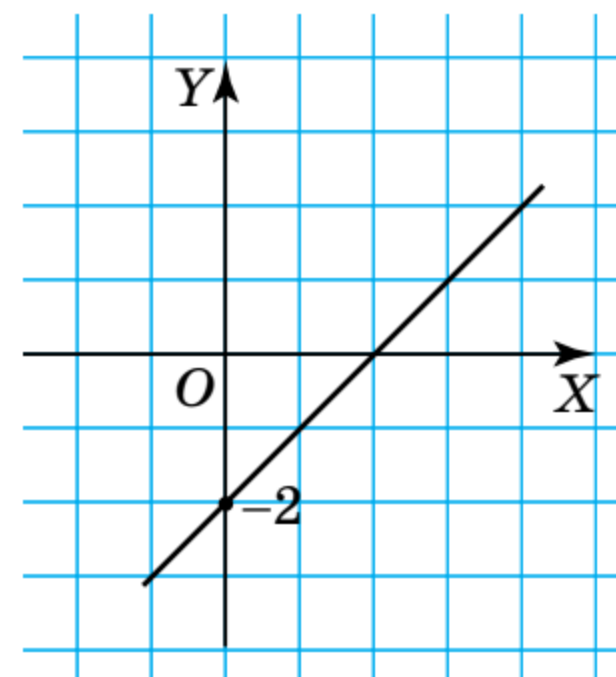
213°. На малюнку 49 зображено пряму $y = x - 2$. Який відрізок на осі ординат відтинає задана пряма? Який у неї кутовий коефіцієнт?



Мал. 47



Мал. 48



Мал. 49

214°. Складіть рівняння прямих a і b , що проходять через точку A паралельно вказаній осі координат. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 12 за зразком, наведеним у другому стовпчику.

Таблиця 12

	$A(1; 2)$	$A(-1; 2)$	$A(-1; -2)$	$A(4; 2)$	$A(-4; 2)$	$A(4; -2)$
$a \parallel OX$	$y = 2$					
$b \parallel OY$	$x = 1$					

215°. Побудуйте прямокутник, сторони якого лежать на прямих:

- 1) $x = 2, x = 5, y = -2, y = 1$; 2) $x = -2, x = 6, y = 7, y = -1$.

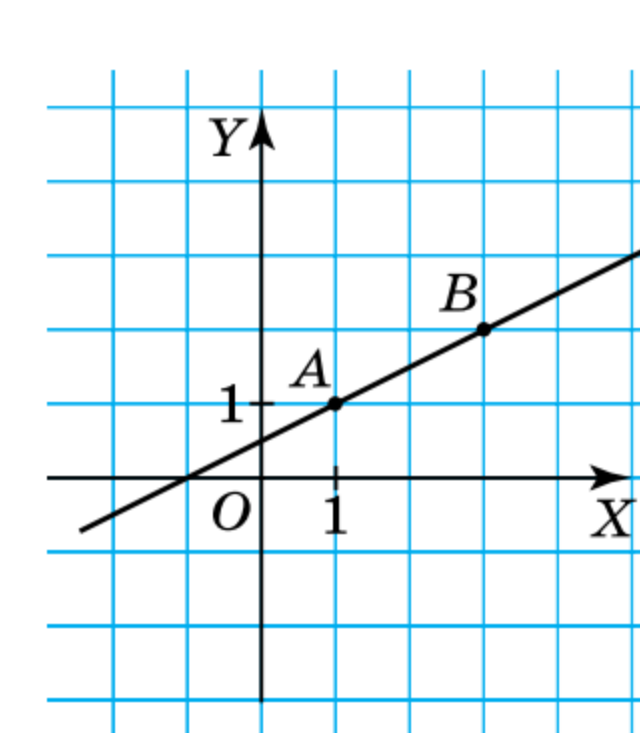
Знайдіть периметр і площу даного прямокутника.

216°. Побудуйте прямокутник, сторони якого лежать на прямих: $x = -9, x = 4, y = 2, y = 8$. Знайдіть периметр і площу даного прямокутника.

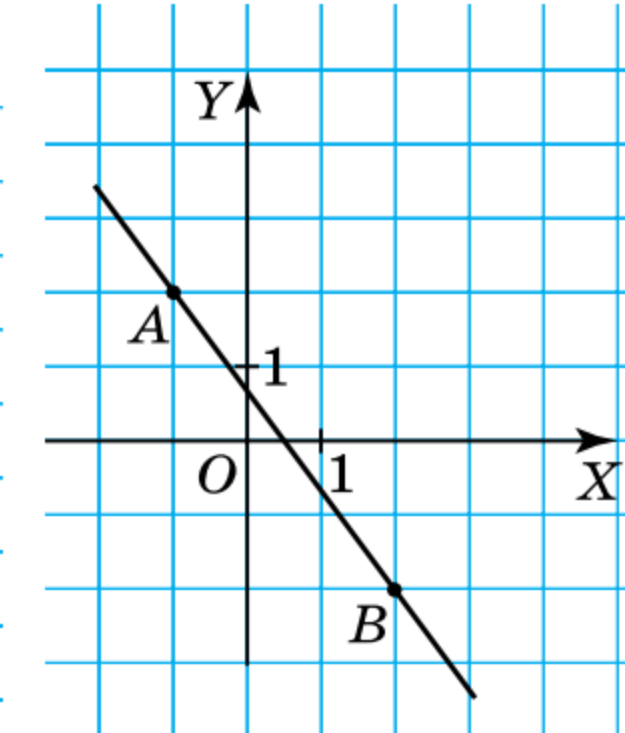
217°. Назвіть координати точок A і B (мал. 50, 51). Яке з наведених рівнянь (1 чи 2) задає пряму AB :

- 1) $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{-2-2}$; 2) $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$?

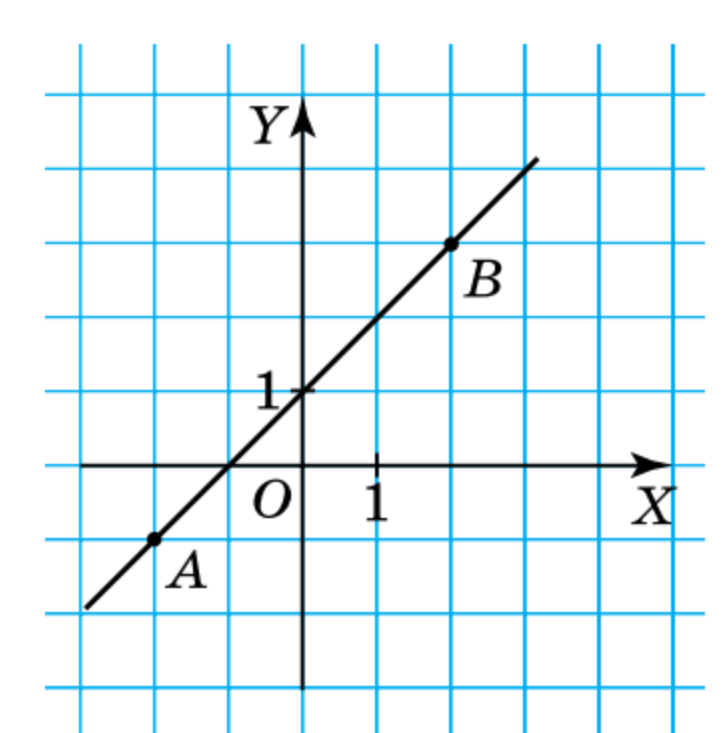
218°. Назвіть координати точок A і B на малюнку 52. Чи правильно **E** записано рівняння, яке задає пряму AB : $\frac{x+2}{2+2} = \frac{y+1}{3+1}$?



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52

219°. Запишіть координати двох точок, через які проходить пряма:

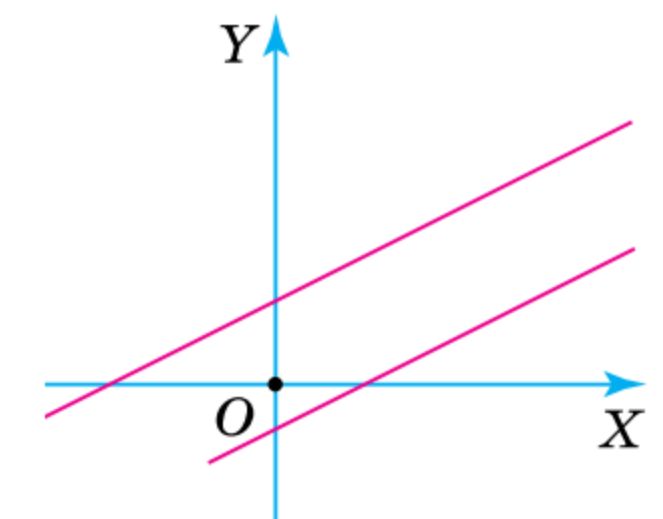
- 1) $\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-1}{3-1}$; 2) $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-3}{2-3}$.

Побудуйте дану пряму.

220°. Запишіть координати двох точок, через які проходить пряма $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{-4-2}$. Побудуйте дану пряму.

- 221°.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
1) $(-1; 2)$ і $(2; -1)$; 2) $(-3; 1)$ і $(2; -2)$.
- 222°.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точки $(2; -4)$ і $(3; -1)$.
- 223°.** Запишіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника з вершинами в точках:
1) $A(2; -3)$, $B(-2; 3)$ і $C(6; -3)$; 2) $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$ і $C(5; 10)$.
- 224°.** Запишіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника з вершинами в точках: $M(-3; 5)$, $P(1; -3)$ і $T(2; 0)$.
- 225°.** Чи лежать на одній прямій точки A , B і C , якщо:
1) $A(-3; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; 14)$; 2) $A(1; -2)$, $B(5; -8)$, $C(3; -5)$?
- 226°.** Чи лежать на одній прямій точки A , B і C , якщо: $A(4; 2)$, $B(0; -6)$, $C(-4; -2)$?
- 227.** Коло із центром у точці $(-2; 3)$ проходить через точку з координатами:
1) $(0; 3)$; 2) $(-2; 4)$.
Чи проходить дане коло через точки $A(-4; 3)$, $B(-2; 4)$, $C(1; 3)$?
- 228.** Складіть рівняння кола із центром на прямій $y = 4$, що дотикається до осі абсцис у точці:
1) $(-1; 0)$; 2) $(2; 0)$.
- 229.** Поясніть, чому прямі $x = -5$ і $y = 5$ не перетинають коло:
1) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 25$; 2) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$.
- 230.** Відстань від центра кола, заданого рівнянням $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, до прямої a дорівнює:
1) 1; 2) 3.
Що можна сказати про взаємне розміщення прямої та кола?
- 231.** Коло з діаметром AB задано рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Знайдіть координати точки B , якщо:
E 1) $A(2; 2)$; 2) $A(-2; 6)$.
- 232.** Складіть рівняння кола, що проходить через точки $A(2; 3)$ і $B(-2; 3)$, якщо його радіус дорівнює:
1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{13}$.
- 233.** Дано коло $x^2 + y^2 = 25$ і дві точки:
1) $A(3; 4)$ і $B(4; -3)$; 2) $A(2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ і $B(-1; 2\sqrt{6})$.
Доведіть, що AB — хорда даного кола.
- 234.** Складіть рівняння геометричного місця точок, віддалених на 5 одиниць від центра кола:
1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$; 2) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$.

- 235.** Складіть рівняння кола, що дотикається до осей координат і прямої:
1) $x = 2$; 2) $y = 5$.
- 236.** Складіть рівняння кола, що проходить через точку $(3; 3)$ і дотикається до осі абсцис та прямої:
1) $y = 6$; 2) $x = -3$.
- 237.** Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом:
1) 45° ; 2) 30° .
- 238.** Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом 60° .
- 239.** Доведіть, що прямі $y = kx$ і $y = kx + b$ — паралельні або збігаються.
- 240.** Якщо дві прямі паралельні, то їхні кутові коефіцієнти — рівні, і навпаки (мал. 53). Доведіть.
- 241.** Яке рівняння задає пряму, що відтинає на осі ординат відрізок завдовжки 5 одиниць і проходить паралельно прямій:
1) $y = 5x + 2$; 2) $y = -x - 15$?
- 242.** Складіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок завдовжки 2 одиниці й проходить паралельно прямій: $y = 3x - 1$.
- 243.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $(-2; 1)$ й утворює з віссю абсцис кут:
1) 45° ; 2) 60° .
- 244.** Яке рівняння задає пряму, що проходить через точку $(3; -\sqrt{3})$ та утворює з віссю абсцис кут 30° ?
- 245.** Складіть рівняння прямих, що містять середні лінії трикутника ABC , якщо:
1) $A(2; -3)$, $B(-2; 3)$, $C(6; -3)$; 2) $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 10)$.
- 246.** Складіть рівняння сторін рівнобедреного трикутника ABC , у якого:
1) $A(-1; 2)$, $B(3; 2)$, $\angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$;
2) $A(-2; -3)$, $B(6; -3)$, $\angle ACB = 120^\circ$.
- 247.** Складіть рівняння сторін квадрата, діагоналі якого лежать на осях координат і дорівнюють $2a$.
- 248.** Які кути утворює з осями координат пряма:
1) $3x - 3y + 1 = 0$; 2) $2x + 2y - 5 = 0$?



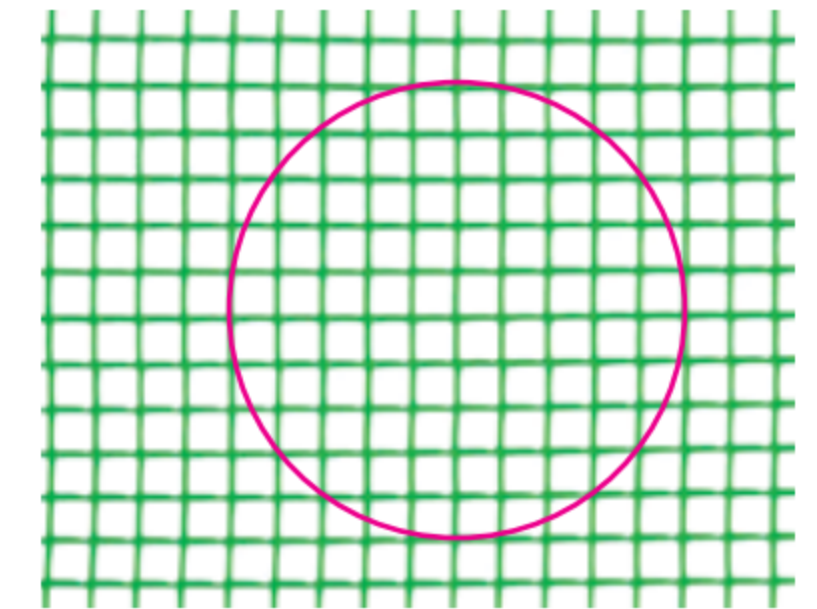
Мал. 53

- 249.** Знайдіть довжину відрізка AB , який відтинають осі координат від прямої:
1) $5x - 12y + 3 = 0$; 2) $4x + 3y - 6 = 0$.
- 250.** Знайдіть довжину відрізка BC , який відтинають осі координат від прямої $4x - 2y - 3 = 0$.
- 251.** Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(2; 3)$, $B(-3; -1)$, $C(4; 2)$.
- 252*.** Складіть рівняння кола, що проходить через початок координат і точки:
1) $(8; 0)$ і $(0; 6)$; 2) $(0; 16)$ і $(12; 0)$.
- 253*.** Складіть рівняння кола, що проходить через точки:
1) $(4; 0)$, $(0; 2)$, $(4; 2)$; 2) $(-1; 5)$, $(-2; -2)$, $(5; 5)$.
- 254*.** Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, перетинає його у двох точках. Доведіть.
- 255*.** Знайдіть довжину хорд кола з кінцями на осях координат, якщо коло задано рівнянням:
1) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$; 2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
- 256*.** Яке рівняння задає коло, описане навколо прямокутника з вершинами в точках:
1) $(0; 0)$, $(24; 0)$, $(24; 10)$ і $(0; 10)$; 2) $(0; 5)$, $(8; 5)$, $(8; -2)$ і $(0; -2)$?
- 257*.** У коло $x^2 + y^2 = 16$ вписано рівносторонній трикутник. Знайдіть координати його вершин, якщо одна з них лежить у точці:
1) $(0; 4)$; 2) $(-4; 0)$.
- 258*.** Знайдіть радіус і центр кола:
1) $x^2 + 8x + y^2 - 10y - 41 = 0$; 3) $x^2 - 4x + y^2 + 4y = 16$;
2) $x^2 - 10x + y^2 + 6y = 0$; 4) $y^2 = (x - 2)(6 - x)$.
- 259*.** Дві прямі взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли добуток їхніх кутових коефіцієнтів дорівнює -1 . Доведіть.
- 260*.** Вершини трикутника мають координати $A(0; 13)$, $B(2; -1)$ і $C(10; 3)$. Доведіть, що його медіани, проведені з вершин B і C , взаємно перпендикулярні.
- 261*.** Яка умова перпендикулярності відрізків AB і CD , якщо відомі координати їхніх кінців: $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, $D(d_1; d_2)$?
- 262*.** Складіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок:
1) $(0; 0)$ і $(a_1; a_2)$; 2) $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$.
- 263*.** Які рівняння мають дотичні до кола $x^2 + y^2 = R^2$, що паралельні осі:
1) абсцис; 2) ординат?

- 264*.** Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = R^2$ у точці $M(x_0; y_0)$.
- 265*.** На якій відстані від початку координат проходить пряма:
1) $y = kx + b$;
2) $ax + by + c = 0$?
- 266*.** Як знайти відстань від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої, заданої рівнянням:
1) $y = kx + b$;
2) $ax + by + c = 0$?

Проявіть компетентність

- 267.** Через яку кількість вузлів сітки проходить коло, центр якого міститься в її вузлі, а радіус дорівнює 25 клітинкам?



- 268.** Де на подвір'ї потрібно розмістити ліхтар, щоб хвіртка, криниця та вхід до будинку освітлювались однаково?

- 269.** Як через даний вузол сітки провести прямі з кутовими коефіцієнтами $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$ відносно горизонтальної лінії сітки? А відносно вертикальної?

- 270.** Населені пункти A і B розташовані на відстані 8 км один від одного. З пункту A вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год, а назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. За малюнком 54 поясніть:
1) як дізнатися про те, який час до зустрічі були в дорозі пішохід і велосипедист;
2) на якій відстані від пункту A пішохід і велосипедист зустрілися.



Мал. 54

§ 4. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Що таке вектор

Ситуація. Юрій Петрович дав завдання учнівству 9-А класу пригадати з курсу фізики, що таке скалярні й векторні величини, та навести відповідні приклади. Ірина й Максим вийшли до дошки й записали свої результати.

Ірина

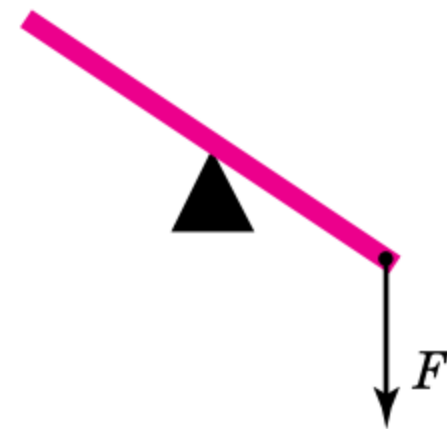
Скалярна величина
(*скаляр*)

характеризується лише
числовим значенням

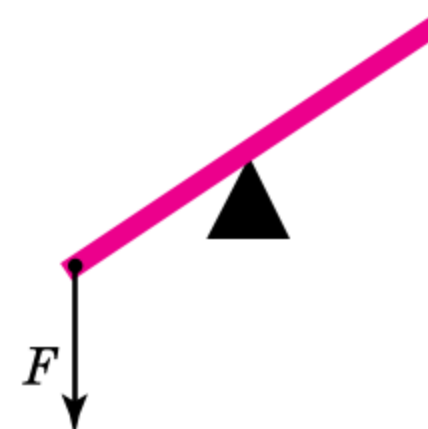
Приклади:

довжина, температура, маса

Максим додав, що силу зображають *напрямленим відрізком*, а її дія залежить від точки прикладання (мал. 55, 56).



Мал. 55



Мал. 56

Юрій Петрович похвалив Ірину й Максима за правильні відповіді. Однак він наголосив, що в геометрії вектор трактують дещо інакше.



Що таке геометричний вектор?

Поміркуймо.



На малюнку 57 ви бачите на столі тацю з деякими предметами. Якщо тацю переставити в інше місце на столі (мал. 58), то для опису цієї зміни розміщення таці на столі ми вкажемо її напрям (наприклад, пересунути праворуч) і відстань (наприклад, до правого краю стола). У такий спосіб ми задамо вектор, на який потрібно перемістити тацю. При цьому кожний предмет, що є на таці, переміститься на той самий вектор.

Міркуючи геометрично, можна сказати, що під час переміщення площини на задану відстань і в указаному напрямі переміщуються всі



qr.orioncentr.com.ua/5lybT

Максим

Векторна величина
(*вектор*)

характеризується
числовим значенням, напрямом
і *точкою прикладання*

Приклади:

сила, швидкість

точки площини. А їх безліч. Тому в геометрії абстрагуються від точки прикладання як характеристики векторної величини й називають таку векторну величину *геометричним вектором*.



Мал. 57



Мал. 58

Зображенням геометричного вектора на площині є всі напрямлені відрізки, які мають ту саму довжину й однаковий напрям.

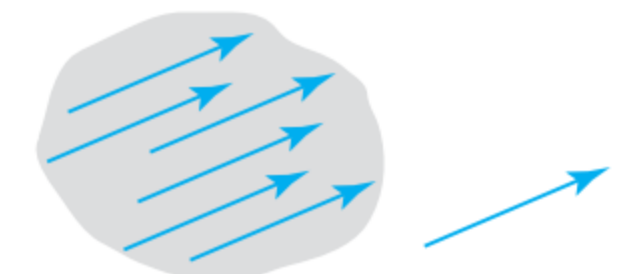


Чи можна на аркуші паперу побудувати повне зображення геометричного вектора?

Ні.



Повне зображення геометричного вектора, як і зображення всієї прямої чи площини, побудувати неможливо. Тому, як і в фізиці, **геометричний вектор зображають лише одним напрямленим відрізком** (мал. 59). Початок і кінець цього напрямленого відрізка задають довжину та напрям решти відповідних напрямлених відрізків. Його можна називати *представником вектора*. Надалі будемо коротко говорити — *вектор*.



Мал. 59



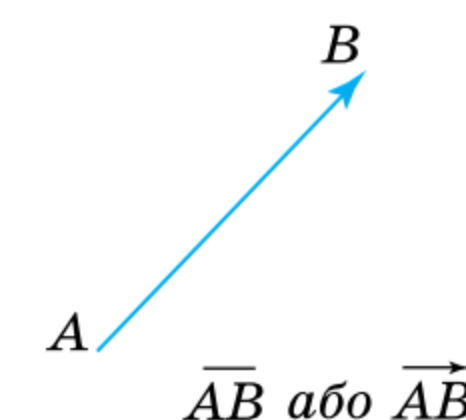
Будь-яка впорядкована пара точок визначає вектор.

Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

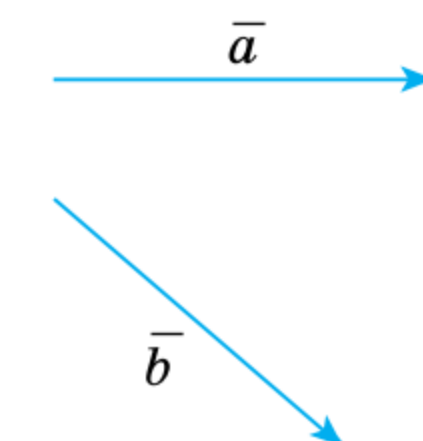
На малюнку 60 ви бачите вектор з початком у точці A й кінцем у точці B .



Коротко записуємо: $\overline{AB}$ або $\vec{AB}$. Риска або стрілка над назвою відрізка замінює слово «вектор». Вектори можна позначати й малими латинськими буквами: $\vec{a}$ або $\vec{a}$, $\vec{b}$ або $\vec{b}$ (мал. 61).

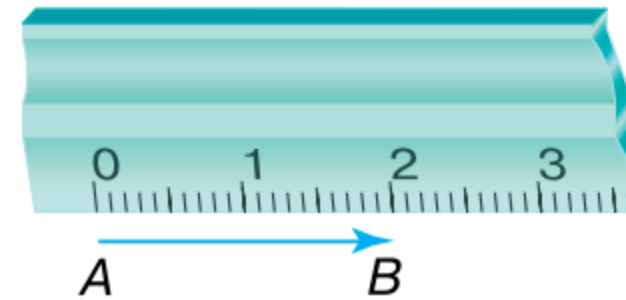


Мал. 60



Мал. 61

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називають *нуль-вектором* і позначають: $\vec{0}$ або $\vec{0}$. Із нуль-вектором не пов'язують жодного напрямку.



Мал. 62

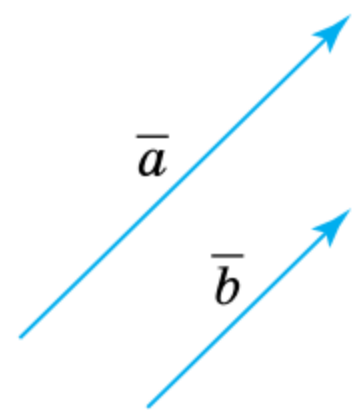
Довжиною або *модулем вектора* називають відстань між його початком і кінцем. На малюнку 62 вектор $\overline{AB}$ має довжину 2 см.

Коротко записуємо: $|\overline{AB}| = 2$ см, і говоримо: довжина (модуль) вектора $\overline{AB}$ дорівнює двом сантиметрам.

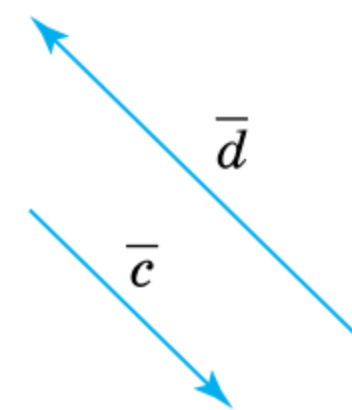
Довжина нуль-вектора дорівнює нулю. Вектор, довжина якого дорівнює 1, називають *одичним вектором*. Його позначають так: $\vec{e}$. За означенням, $|\vec{e}| = 1$.

2. Колінеарні вектори. Рівні вектори

Два ненульові вектори називають *колінеарними*, якщо вони паралельні одній прямій. На малюнку 63 ви бачите два колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Можемо записати: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображені на малюнку 63, мають однаковий напрям. Їх називають *співнаправленими* й записують: $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. На малюнку 64 вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ також є колінеарними, але *протилежно напрямленими*. Їх позначають так: $\vec{c} \updownarrow \vec{d}$.



Мал. 63



Мал. 64

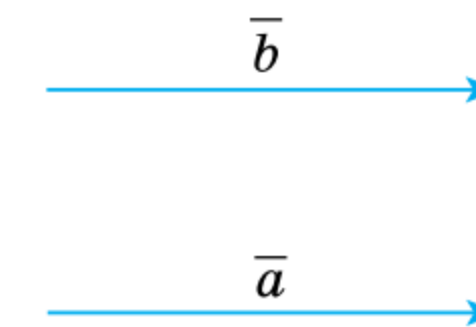
Запам'ятайте!

Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнаправлені й мають рівні довжини.

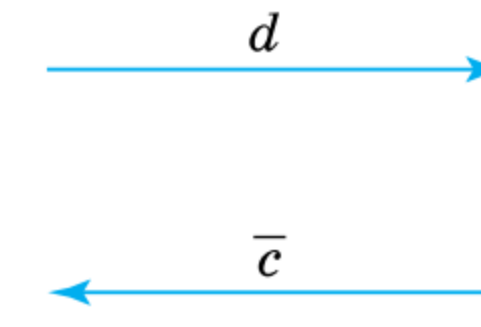
На малюнку 65 ви бачите рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Коротко записуємо: $\vec{a} = \vec{b}$, і говоримо: вектор $\vec{a}$ дорівнює вектору $\vec{b}$.

Якщо два вектори мають рівні модулі, але протилежні напрями, то їх називають *протилежними векторами*. На малюнку 66 вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ є протилежними. Можемо записати: $\vec{c} = -\vec{d}$.



Мал. 65

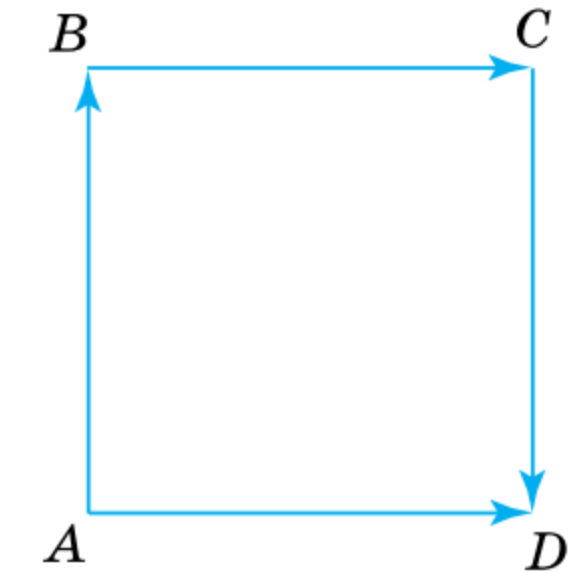


Мал. 66

Задача 1 На сторонах квадрата $ABCD$ задано вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{AD}$ (мал. 67).

Доведіть векторні рівності: $\overline{AD} = \overline{BC}$ і $\overline{AB} = -\overline{CD}$.

Розв'язання Оскільки $ABCD$ — квадрат, то дані вектори мають рівні довжини: $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ і $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. За умовою, $\overline{AD} \uparrow \overline{BC}$, але $\overline{AB} \updownarrow \overline{CD}$. Тому $\overline{AD} = \overline{BC}$ за означенням рівних векторів, а $\overline{AB} = -\overline{CD}$ за означенням протилежних векторів.



Мал. 67



Чи рівні вектори $\overline{AD}$ і $\overline{AB}$ в розглянутій задачі?

Ні, бо ці вектори неколінеарні.



Щоб установити рівність векторів, перевірте виконання двох вимог:

- 1) дані вектори є співнаправленими;
- 2) дані вектори мають рівні довжини.

3. Дії над векторами

qr.orioncentr.com.ua/syfaW



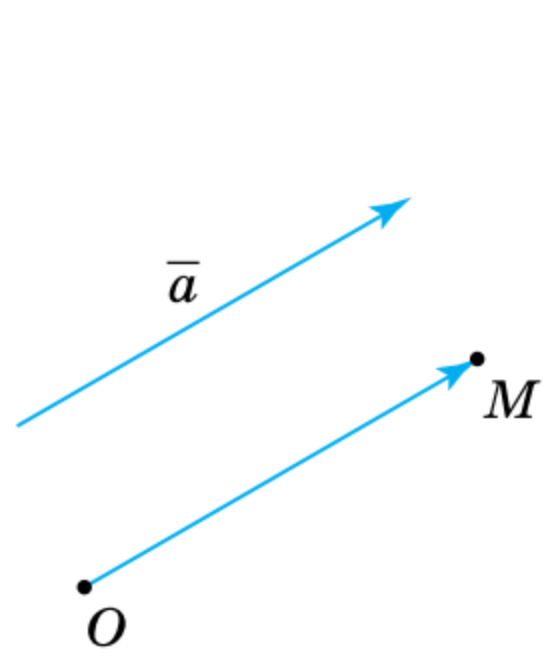
Які дії можна виконувати над векторами?

Вектори можна додавати, віднімати та множити на число.

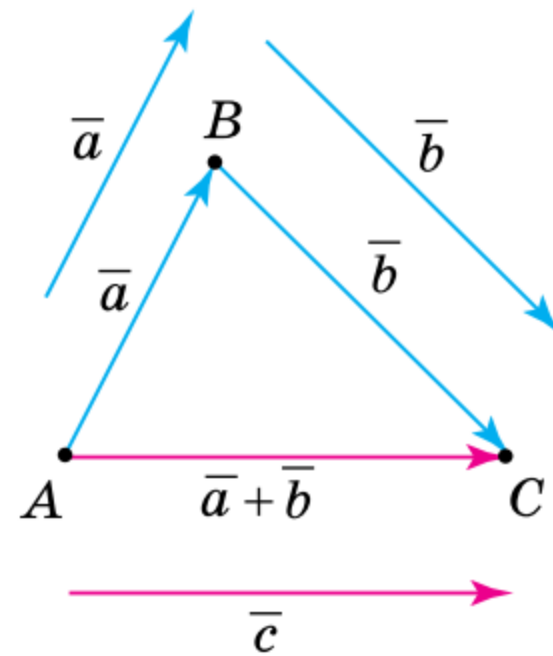


Щоб виконувати дії над векторами, треба вміти відкладати вектор від заданої точки. Поміркуємо, як це робити.

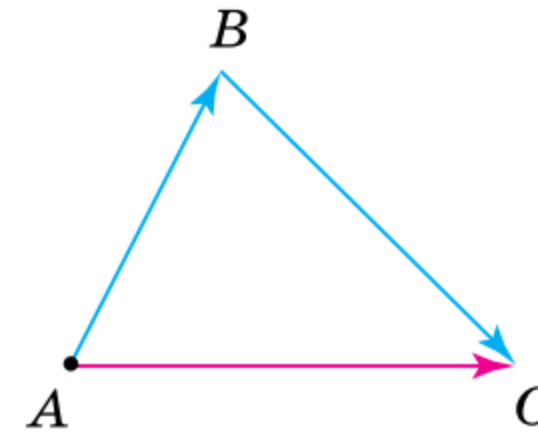
Для будь-якого вектора $\vec{a}$ та деякої точки O існує лише одна точка M , така, що $\overline{OM} = \vec{a}$ (мал. 68). Побудову точки M називають *відкладанням вектора $\vec{a}$ від точки O* .



Мал. 68



Мал. 69

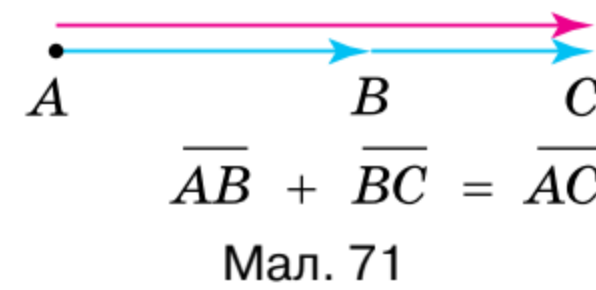


Мал. 70

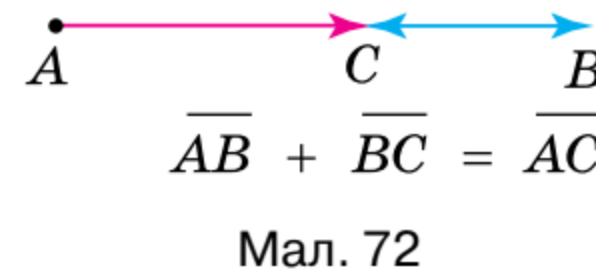
3.1. Додавання векторів. Правило трикутника

Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Від довільної точки A відкладемо вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, потім від точки B — вектор $\vec{BC} = \vec{b}$ (мал. 69). Початок вектора $\vec{AB}$ і кінець вектора $\vec{BC}$ задають вектор $\vec{AC} = \vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ називають *сумою векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Можемо записати: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Якщо будувати суму $\vec{AC}$ неколінеарних векторів $\vec{AB}$ і $\vec{BC}$, спираючись на означення, то утвориться трикутник ABC (мал. 70). Тому цей спосіб знаходження суми називають *правилом трикутника*. Його можна застосувати до будь-яких двох векторів, зокрема колінеарних. На малюнках 71 і 72 ви бачите, як знаходять суму співнапрямлених векторів (мал. 71) і протилежно напрямлених векторів (мал. 72).



Мал. 71



Мал. 72

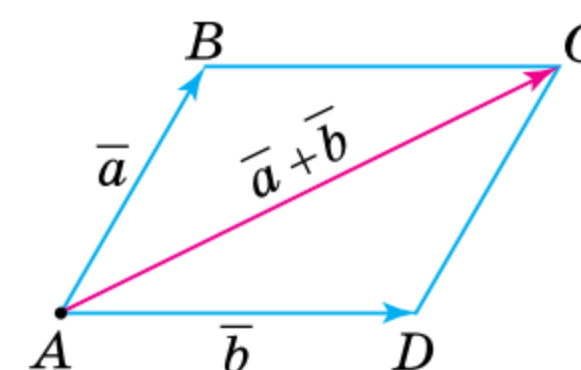


Для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

3.2. Додавання векторів. Правило паралелограма

Суму двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти інакше — за *правилом паралелограма*. Для цього від довільної точки A потрібно відкласти вектори $\vec{AB} = \vec{a}$ і $\vec{AD} = \vec{b}$, а потім побудувати паралелограм $ABCD$ (мал. 73). Тоді вектор $\vec{AC}$ дорівнює $\vec{a} + \vec{b}$.



Мал. 73



Чи можна правило паралелограма застосувати до колінеарних векторів?

Ні, оскільки на таких векторах не можна побудувати паралелограм.



Відмінності в застосуванні двох правил додавання векторів ви бачите в таблиці 13.

Таблиця 13

Дано	Побудова		
	правило трикутника		
	правило паралелограма		
	правило трикутника		
	правило паралелограма		

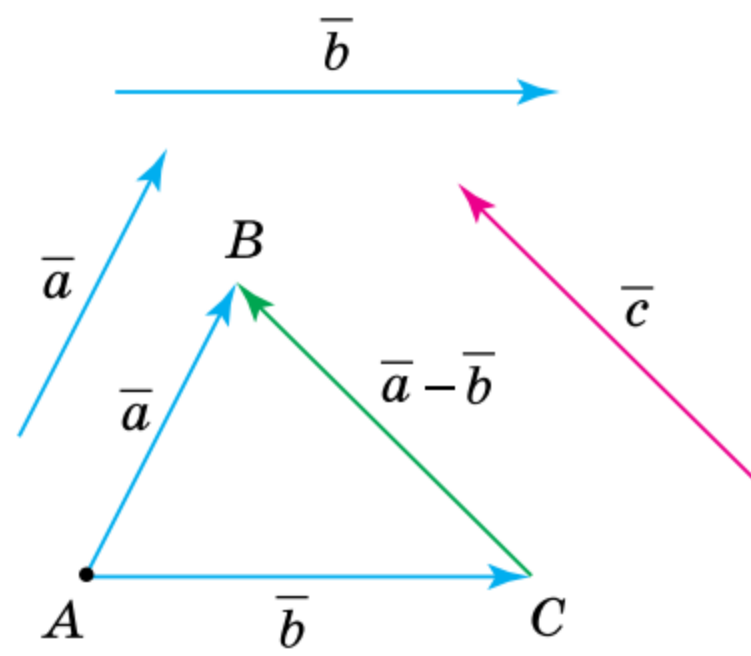
3.3. Віднімання векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, який при додаванні до вектора $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Іншими словами, з рівності $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ випливає рівність $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$. Звідси, щоб побудувати вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, потрібно від довільної точки A відкласти вектори $\vec{AB} = \vec{a}$ і $\vec{AC} = \vec{b}$, (мал. 74). Тоді вектор $\vec{CB} = \vec{c}$ є різницею $\vec{a} - \vec{b}$.

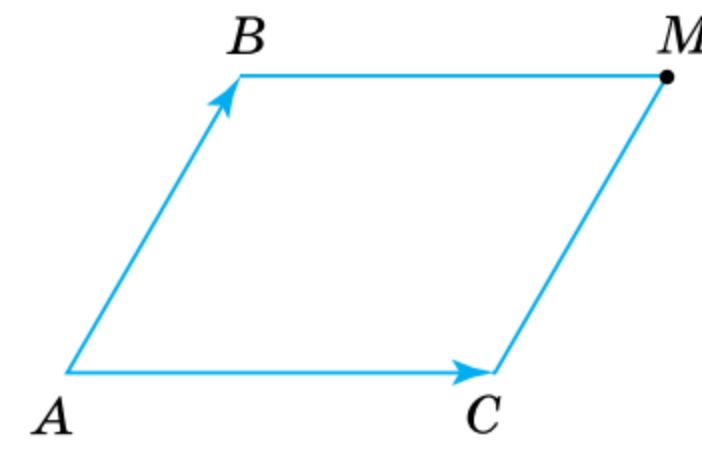


Для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність:

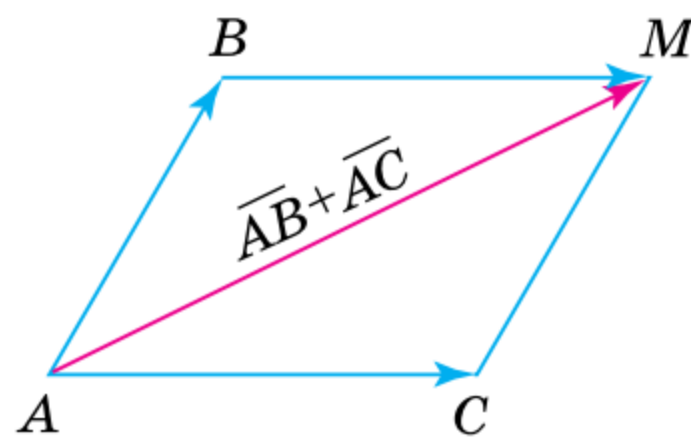
$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}.$$



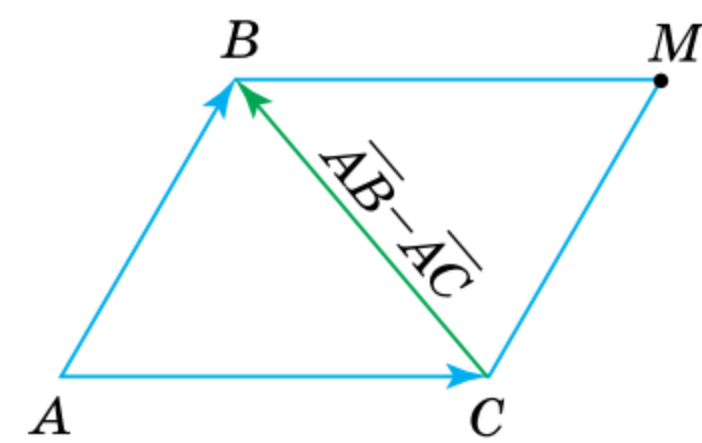
Мал. 74



Мал. 75



Мал. 76



Мал. 77

Задача 2 На сторонах паралелограма $ABMC$ задано вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (мал. 75). Виразіть через дані вектори діагоналі паралелограма.

Розв'язання 1. У паралелограмі $ABMC$ проведемо діагональ AM (мал. 76). За правилом паралелограма: $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

2. У паралелограмі $ABMC$ проведемо діагональ CB (мал. 77). Вектор $\overline{CB}$ дорівнює різниці векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ за означенням. Отже, $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$.

Щоб знайти суму й різницю неколінеарних векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, які відкладено від спільного початку A , побудуйте паралелограм $ABMC$. Тоді:

1) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ (мал. 76);

2) $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$ (мал. 77).

3.4. Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\overline{a}$ на число $k \neq 0$ називають вектор $\overline{d}$, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\overline{a}$ на модуль числа k , а напрям збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $k > 0$, і протилежний напрям вектора $\overline{a}$, якщо $k < 0$.



Коротко записуємо: $\overline{d} = k \cdot \overline{a}$.

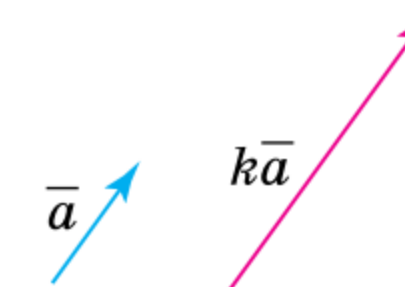


За означенням добутку вектора на число:

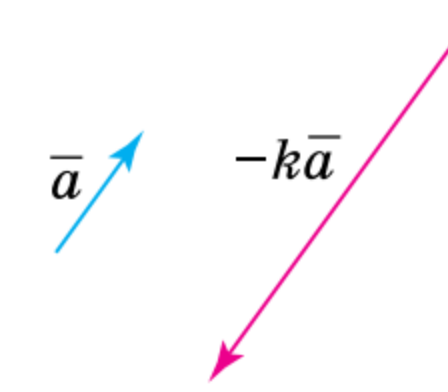
1) $|\overline{d}| = |k| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{d} \uparrow \overline{a}$, якщо $k > 0$ (мал. 78);

3) $\overline{d} \downarrow \overline{a}$, якщо $k < 0$ (мал. 79).



Мал. 78



Мал. 79

Добуток нуль-вектора на число та вектора на число 0 є нуль-вектором:

$$k \cdot \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}.$$

Властивості додавання векторів і множення вектора на число наведено в таблиці 14.

Таблиця 14

Властивості	
Додавання векторів	Множення вектора на число
$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$	$1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$
Переставний закон	
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$	$k \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot k$
Сполучний закон	
$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$	$k \cdot (m \cdot \overline{a}) = (k \cdot m) \cdot \overline{a}$
Перший розподільний закон	
$k \cdot \overline{a} + m \cdot \overline{a} = (k + m) \cdot \overline{a}$	
Другий розподільний закон	
$k \cdot \overline{a} + k \cdot \overline{b} = k \cdot (\overline{a} + \overline{b})$	
$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$	$-1 \cdot \overline{a} = -\overline{a}$
	$k \cdot \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$

Дізнайтеся більше

1. Назву «вектор» (*vector* у перекладі з латинської — той, що несе) запровадив ірландський математик **Вільям Ровен Гамільтон** (1805–1865). Позначення $\overline{AB}$ для напрямленого відрізка вперше в 1806 р. використав швейцарський математик **Жан Робер Арган** (1768–1822). Починаючи з 1853 р., вектор стали позначати й однією буквою $\vec{r}$, як це робив французький математик **Огюстен Луї Коші** (1789–1857). Позначення $\overline{AB}$ почали застосовувати лише у XX ст.



2. Термін «модуль» походить від латинського слова *modulus* — міра. Його вперше став використовувати англійський математик Р. Котес (1682–1716). Знак модуля числа $|x|$ у 1841 р. увів видатний німецький математик К. Вейерштрасс (1815–1897). Термін «колінеарний» походить від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *lineo* — лінія.

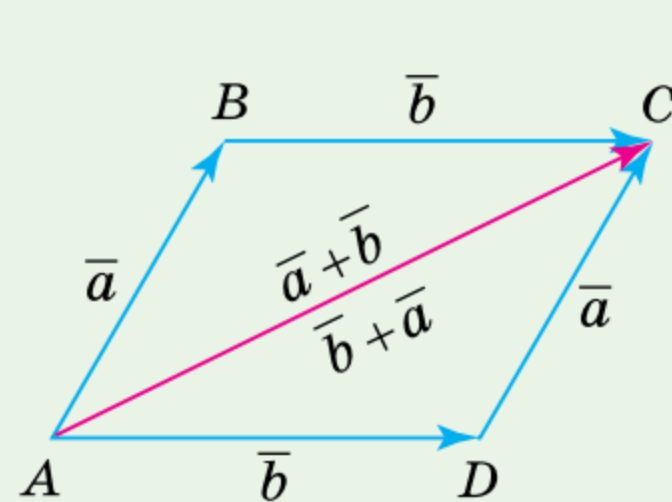
3. У вас могло виникнути запитання: *Як доводять векторні рівності?* Розглянемо приклад.

Щоб довести векторну рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, потрібно:

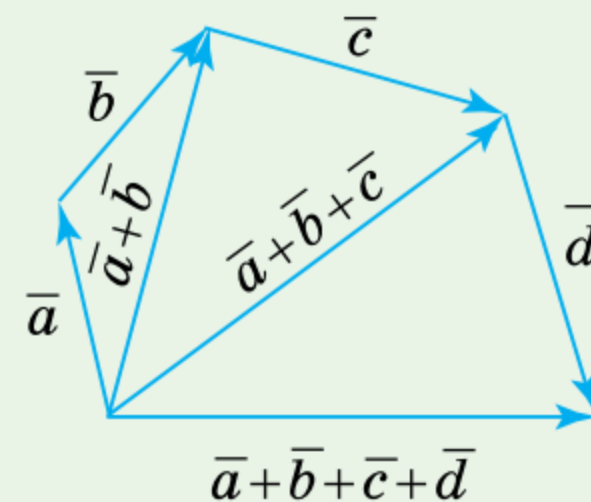
- 1) побудувати вектор $\vec{a} + \vec{b}$;
- 2) побудувати вектор $\vec{b} + \vec{a}$;
- 3) довести, що побудовані вектори рівні.

Нехай дано неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (випадок колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розгляньте самостійно). Від довільної точки A відкладемо вектор $\overline{AB} = \vec{a}$, а від точки B — вектор $\overline{BC} = \vec{b}$ (мал. 80). Тоді маємо:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (1)$$



Мал. 80



Мал. 81

Доповнимо трикутник ABC до паралелограма $ABCD$ так, щоб сторона AC цього трикутника була діагоналлю паралелограма. Тоді

$$\overline{DC} = \overline{AB} = \vec{a}, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = \vec{b} \quad \text{і} \quad \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2)$$

З рівностей (1) і (2) випливає, що $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

4. Щоб побудувати суму кількох векторів, застосовують *правило многокутника*.

Якщо вектори побудовано так, що початок другого вектора збігається з кінцем першого вектора, початок третього — з кінцем другого і т. д., то сума дорівнює вектору, початок якого збігається з початком першого, а кінець — з кінцем останнього вектора. На малюнку 81 ви бачите, як знайшли суму векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
вектор	vector	Vektor, m	vecteur

qr.orioncentr.com.ua/hzBjg

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке вектор. Як його зображають; позначають?
2. Як задати вектор?
3. Що таке довжина або модуль вектора?
4. Який вектор називають нуль-вектором; одиничним вектором?
5. Які вектори називають колінеарними; співнапрямленими; протилежно напрямленими? Як їх позначають?
6. Сформулюйте означення рівних векторів.
7. Які вектори називають протилежними?
8. Що називають сумою двох векторів; різницею двох векторів? Які властивості має додавання векторів?
9. Поясніть, як додати два вектори за правилом трикутника / паралелограма.
10. Що таке добуток вектора на число? Які його властивості?

Усне тренування

1. Подайте у сантиметрах: 2 мм, 2 дм, 2 м, 2 км.
2. Подайте у дециметрах: 6 мм, 6 см, 6 м, 6 км.
3. Подайте у метрах: 10 мм, 10 см, 10 дм, 10 км.

Розв'яжіть задачі

- 271'. Чи правильно, що вектор зображають:
- 1) точкою; 3) напрямленим відрізком?
 - 2) відрізком;
- 272'. Чи правильно, що вектор задають:
- 1) його початком; 3) його початком і кінцем?
 - 2) його кінцем;
- 273'. Чи правильно, що модуль вектора — це:
- 1) точка;
 - 2) відрізок;
 - 3) число, що дорівнює відстані між початком і кінцем вектора?
- 274'. Чи правильно, що колінеарні вектори:
- 1) не паралельні одній прямій; 2) паралельні одній прямій?

275'. Чи правильно, що вектори є рівними, якщо:

- 1) їхні довжини — рівні;
- 2) вони є колінеарними;
- 3) вони мають рівні довжини і є співнапрямленими?

276'. Чи правильно, що сумою двох векторів є:

- 1) число; 2) відрізок; 3) вектор?

277'. Чи правильно, що для знаходження суми двох векторів за правилом трикутника початок другого вектора суміщають:

- 1) з початком першого вектора; 2) з кінцем першого вектора?

278'. Чи правильно, що для знаходження суми двох векторів за правилом паралелограма початок другого вектора суміщають:

- 1) з початком першого вектора; 2) з кінцем першого вектора?

279'. Чи правильно, що для знаходження різниці двох векторів початок другого вектора суміщають:

- 1) з початком першого вектора; 2) з кінцем першого вектора?

280'. Чи правильно, що в паралелограмі, побудованому на двох векторах зі спільним початком:

- 1) обидві діагоналі дорівнюють сумі цих векторів;
- 2) обидві діагоналі дорівнюють різниці цих векторів;
- 3) одна з діагоналей дорівнює сумі цих векторів, а інша — їхній різниці?

281'. Чи правильно, що добутком вектора на число є:

- 1) число; 2) відрізок; 3) вектор?

282'. Чи правильно, що, будуючи добуток вектора на додатне число, відмінне від числа 1, змінюють:

- 1) напрям вектора; 2) модуль вектора?

283'. Чи правильно, що, будуючи добуток вектора на від'ємне число, відмінне від числа -1 , змінюють:

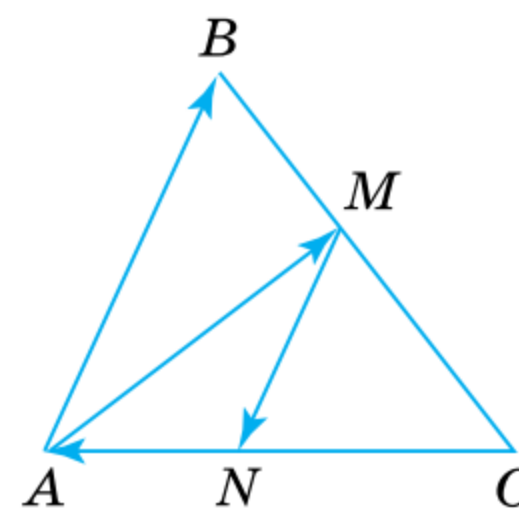
- 1) напрям вектора;
- 2) модуль вектора?

284°. На малюнку 82 назвіть:

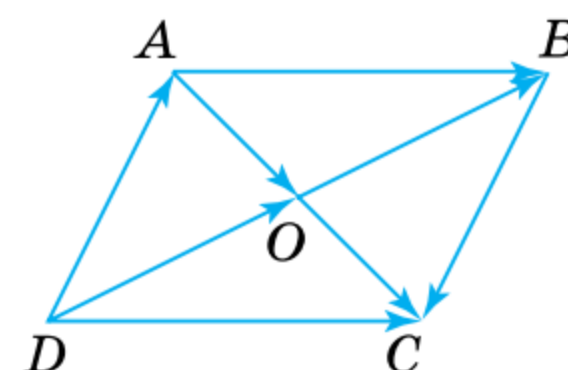
- 1) усі зображені вектори;
- 2) вектори з початком у точці A .
Зробіть відповідні записи.

285°. На малюнку 83 назвіть:

- E**
 - 1) усі зображені вектори;
 - 2) вектори з початком у точці D .
Зробіть відповідні записи.



Мал. 82



Мал. 83

286°. Вектор задано впорядкованою парою точок:

- 1) A і C ; 2) C і A ; 3) H і P ; 4) P і H .

Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.

287°. Вектор задано впорядкованою парою точок:

- 1) O і T ; 2) T і O .

Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.

288°. Як записати, що вектор $\overrightarrow{AB}$ має довжину:

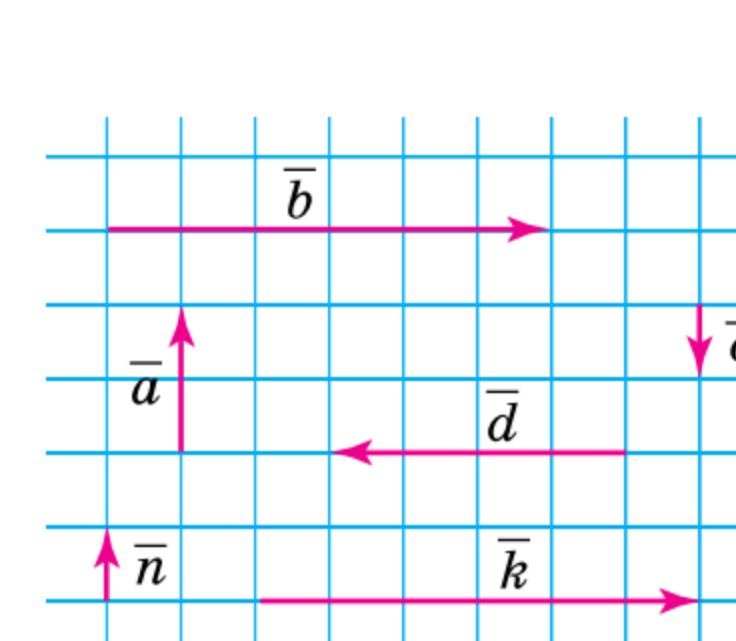
- 1) 5 см; 2) 3 мм; 3) 0,027 дм?

289°. Вектор $\overrightarrow{CD}$ має довжину 3 см. Зробіть відповідний запис.

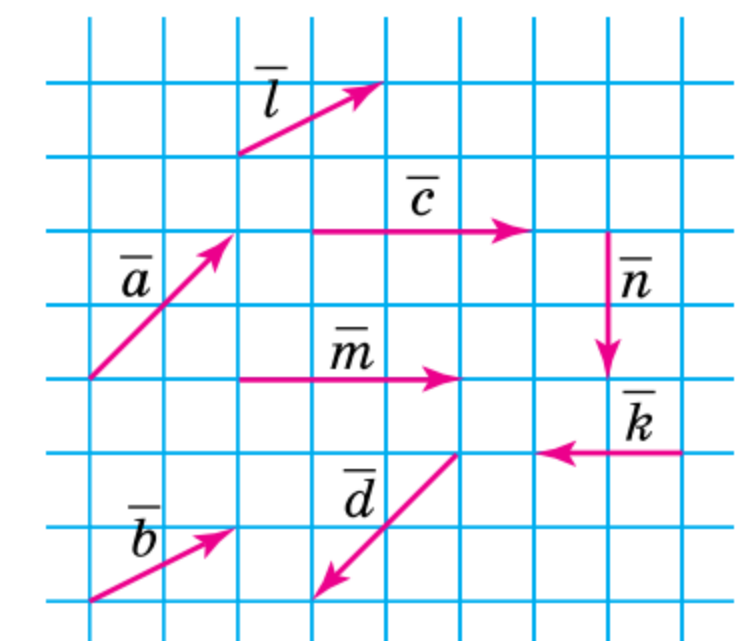
290°. Чому дорівнюють модулі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ на малюнку 84, якщо за одиницю довжини взято:

- 1) одну клітинку; 2) дві клітинки; 3) чотири клітинки?

Чи є серед даних векторів одиничні вектори?



Мал. 84



Мал. 85

292°. На малюнку 84 назвіть вектори, що є:

- E**
 - 1) колінеарними; 4) рівними;
 - 2) співнапрямленими; 5) протилежними.
 - 3) протилежно напрямленими;

qr.orioncentr.com.ua/IUiAv



293°. На малюнку 85 назвіть вектори, що є:

- E**
 - 1) колінеарними; 4) рівними;
 - 2) співнапрямленими; 5) протилежними.
 - 3) протилежно напрямленими;

294°. Побудуйте вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$ так, щоб:

- 1) $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{PQ}$; 3) $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{PQ}$ і $|\overrightarrow{MN}| = 3 \text{ см}$, $|\overrightarrow{PQ}| = 3 \text{ см}$.
- 2) $|\overrightarrow{MN}| = 3 \text{ см}$; $|\overrightarrow{PQ}| = 3 \text{ см}$;

Чи можна стверджувати, що $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$?

295°. Побудуйте паралелограм $ABCD$. На його сторонах і діагоналях позначте два вектори так, щоб вони були:

- 1) колінеарними;
- 2) співнаправленими;
- 3) протилежно напрямленими;
- 4) рівними;
- 5) протилежними.

296°. Побудуйте квадрат $ABCD$. На його сторонах і діагоналях позначте два вектори так, щоб вони були:

- 1) колінеарними;
- 2) співнаправленими;
- 3) протилежно напрямленими;
- 4) рівними;
- 5) протилежними.

297°. Чи можна задати рівні вектори, що визначаються вершинами рівностороннього трикутника? А колінеарні вектори? А рівні за модулем вектори?

298°. Побудуйте рівносторонній трикутник ABC та його середні лінії. Чи можна позначити два вектори так, щоб вони були:

- 1) колінеарними;
- 2) співнаправленими;
- 3) протилежно напрямленими;
- 4) рівними;
- 5) протилежними?

299°. Дано трапецію з основами:

- 1) AC і BD ;
- 2) AB і CD .

Чи правильно, що $\overline{AB} = \overline{CD}$? Відповідь обґрунтуйте.

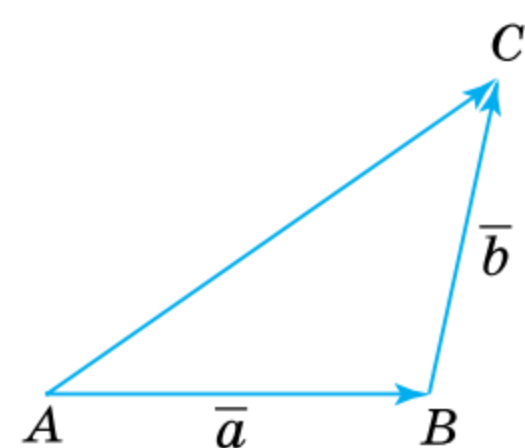
300°. Дано трапецію з основами AD і CB . Чи правильно, що $\overline{AB} = \overline{CD}$? Відповідь обґрунтуйте.

301°. $ABCD$ — ромб. Точка M — середина AB . $AB = 4$. Знайдіть довжину векторів $\overline{CD}$, $\overline{BA}$, $\overline{MB}$, $\overline{AM}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$.

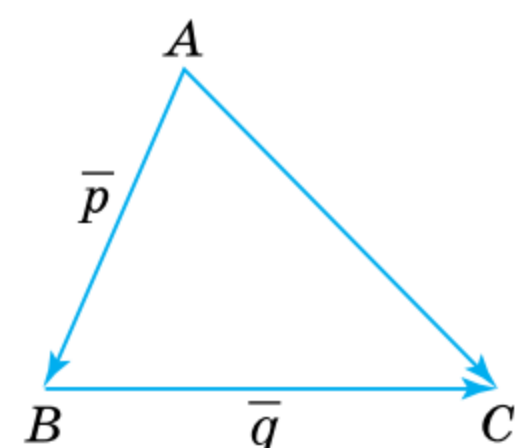
302°. $ABCD$ — квадрат. Точка O — середина AC . $AC = 6$. Знайдіть довжину векторів $\overline{AO}$, $\overline{AD}$, $\overline{BO}$, $\overline{AB}$.

303°. На малюнках 86, 87 назвіть вектор, що є сумою двох даних векторів.

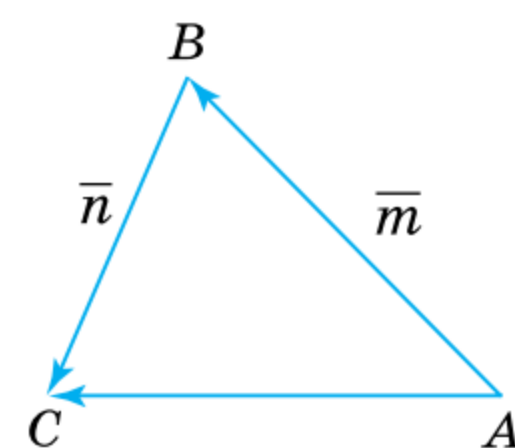
304°. Який вектор на малюнку 88 є сумою двох даних векторів?



Мал. 86



Мал. 87

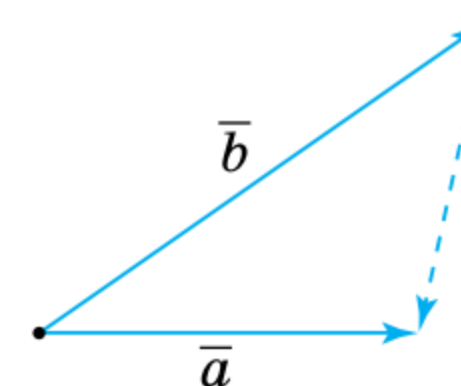


Мал. 88

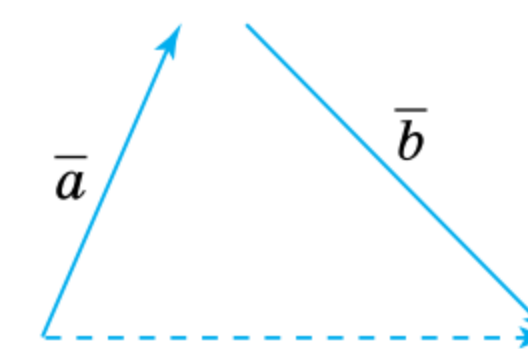
305°. Чи правильно застосували правило трикутника для додавання векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (мал. 89–91)?



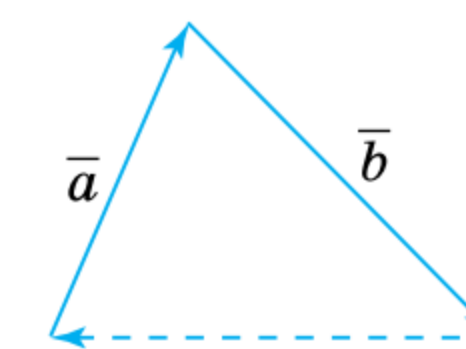
qr.orioncentr.com.ua/gynmW



Мал. 89



Мал. 90



Мал. 91

306°. Який вектор дорівнює сумі векторів:

- 1) $\overline{AM} + \overline{MN}$;
- 2) $\overline{AB} + \overline{BC}$;
- 3) $\overline{BK} + \overline{KN}$?

307°. Який вектор дорівнює сумі векторів:



- 1) $\overline{PO} + \overline{OM}$;
- 2) $\overline{AC} + \overline{CB}$?

308°. ABC — трикутник. Побудуйте суму векторів:

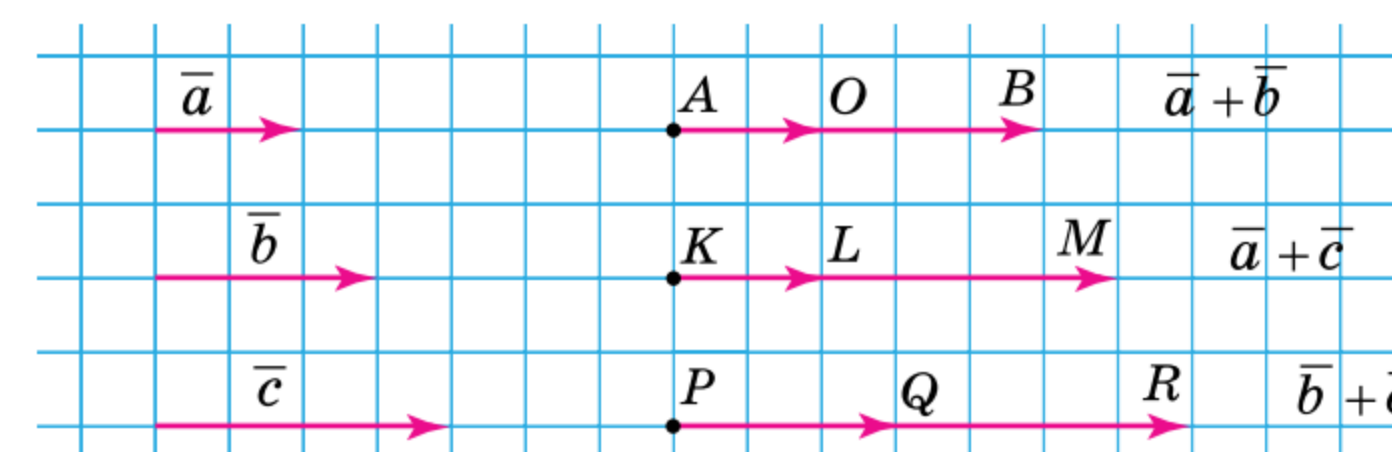
- 1) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$;
- 2) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$;
- 3) $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$.

309°. Точки A , B і C не лежать на одній прямій. Знайдіть суму векторів:

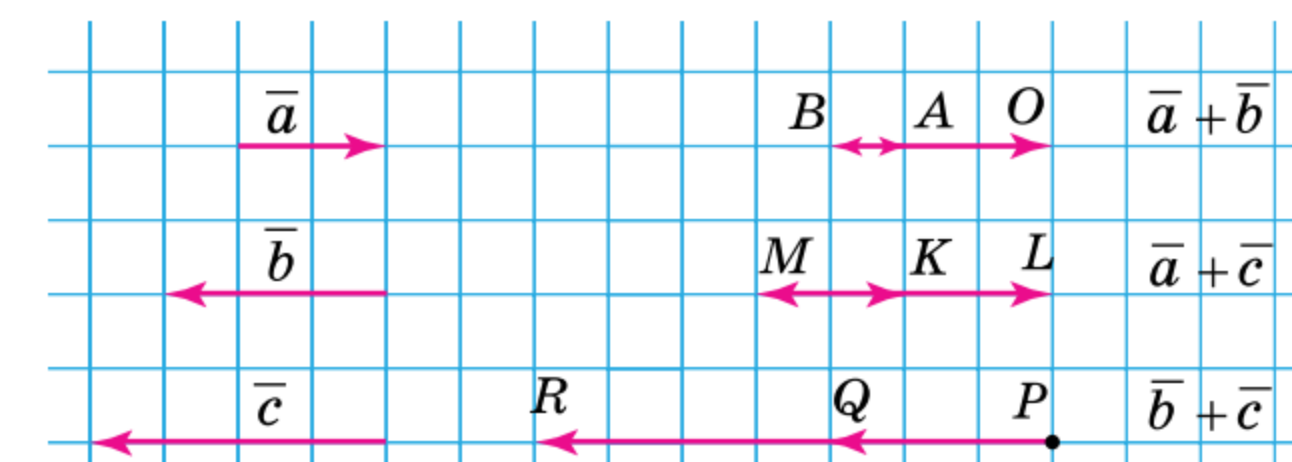
- 1) $\overline{AB} + \overline{BC}$;
- 2) $\overline{AB} + \overline{BA}$;
- 3) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.

310°. На малюнках 92 і 93 для даних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ побудовано їх суми: $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} + \overline{c}$ і $\overline{b} + \overline{c}$. Поясніть за малюнком:

- 1) від якої точки відкладали перший доданок;
- 2) від якої точки відкладали другий доданок;
- 3) який вектор дорівнює сумі двох доданків.



Мал. 92



Мал. 93

311°. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Знайдіть суму векторів:

- 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

312°. Побудуйте паралелограм $ABKL$ та знайдіть суму векторів:

- 1) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KB}$; 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL}$.

313°. Побудуйте паралелограм $BKLM$ та знайдіть суму векторів:

- E** 1) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KB}$; 2) $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LK}$.

314°. Задайте два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуйте їх суму за правилом:

- 1) паралелограма; 2) трикутника.

315°. Задайте два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ та побудуйте їх суму за правилом:

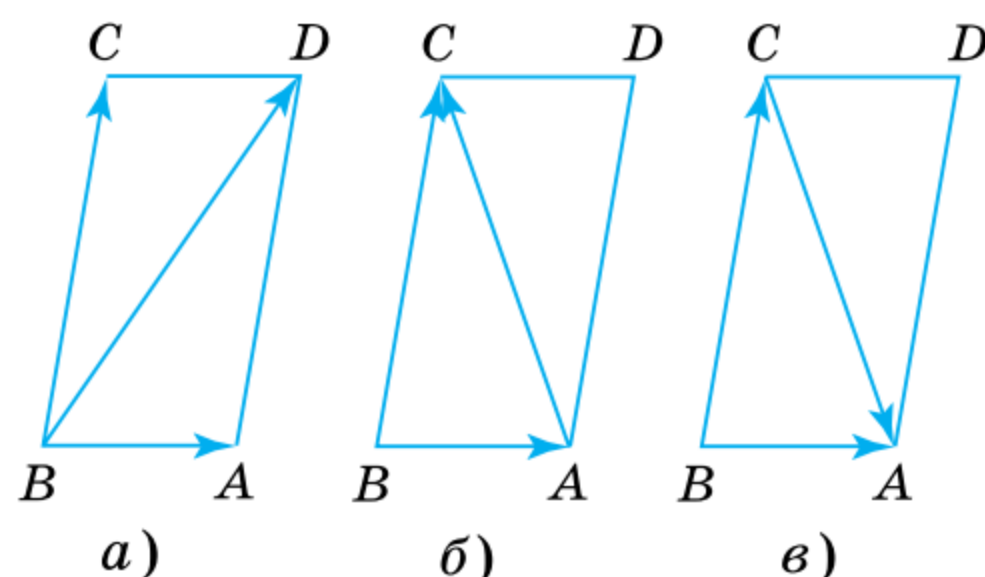
- 1) паралелограма; 2) трикутника.

316°. На сусідніх сторонах паралелограма задано два вектори (мал. 94). Чому дорівнює третій із зображених векторів?

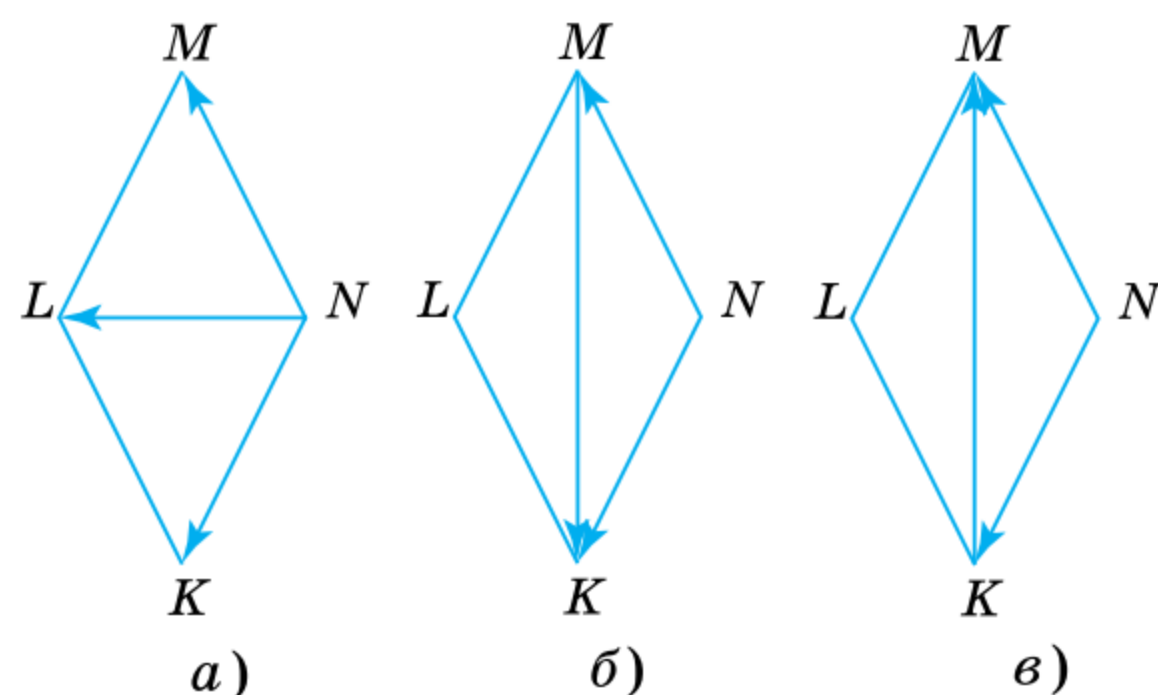


qr.orioncentr.com.ua/Dlxqe

317°. На сусідніх сторонах паралелограма задано два вектори (мал. 95). Чому дорівнює третій із зображених векторів?



Мал. 94



Мал. 95

318°. ABC — трикутник. Побудуйте різницю векторів:

- 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$.

319°. KLM — трикутник. Побудуйте різницю векторів $\overrightarrow{LM}$ і $\overrightarrow{MK}$.



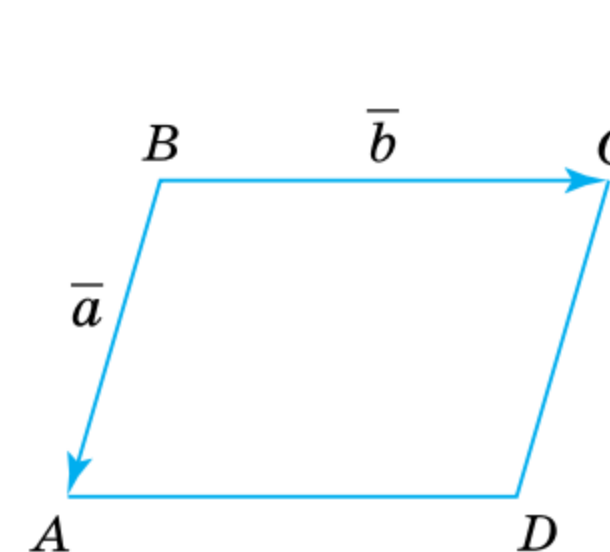
320°. ABC — рівносторонній трикутник зі стороною 1. Яка довжина вектора: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$?

321°. На сторонах паралелограма $ABCD$ задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 96–98).

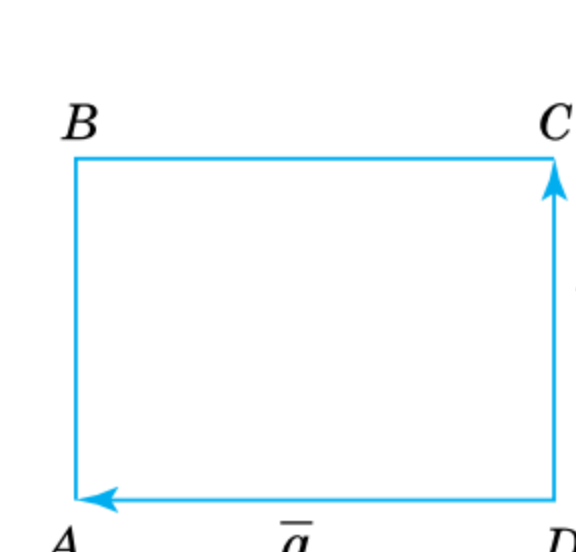


Побудуйте вектор:

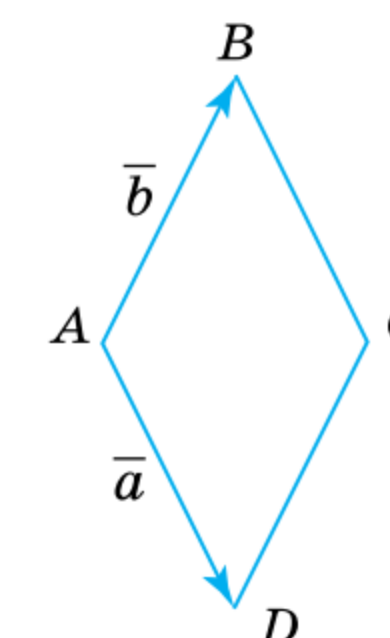
- 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$.



Мал. 96

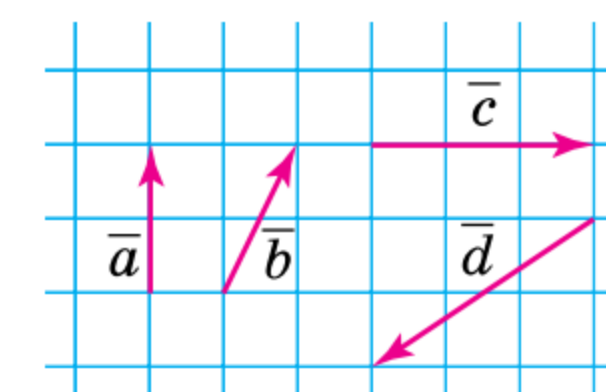


Мал. 97



Мал. 98

322°. На малюнку 99 дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте суму й різницю кожної пари векторів.



Мал. 99

323°. $ABCD$ — квадрат зі стороною 1. Яка довжина вектора:

- 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$?

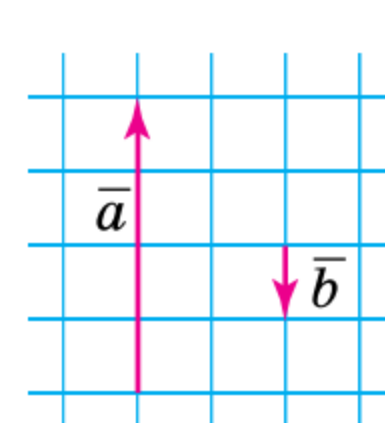


qr.orioncentr.com.ua/WwCaa

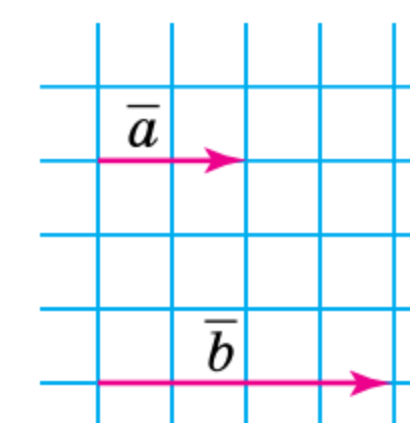
324°. За малюнками 100–103 установіть значення k в рівностях:



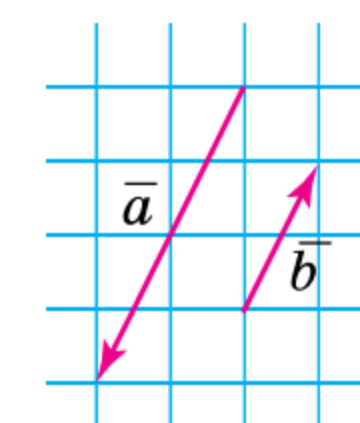
- 1) $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.



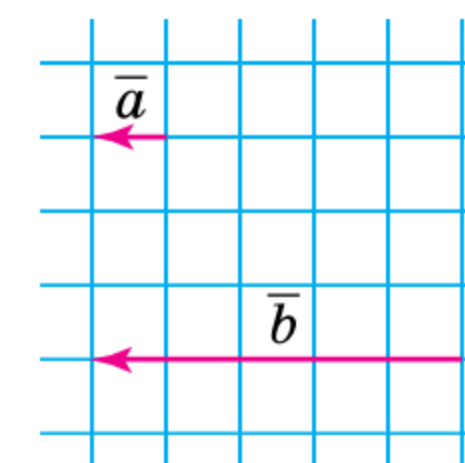
Мал. 100



Мал. 101



Мал. 102



Мал. 103

- 325°.** Накресліть таблицю 15 і в її клітинках поставте знак «+», якщо вектори відповідають указаний вимозі за даного значення k .

Таблиця 15

Вектори $\vec{a}$ і $k \cdot \vec{a}$	$k = 2$	$k = -0,5$	$k = 1$	$k = -1$	$k = 0,5$	$k = -2$
співнаправлені						
протилежно напрямлені						
протилежні						
мають рівні довжини						
рівні						

- 326°.** Задайте вектор $\vec{a}$ та побудуйте вектор:
1) $2\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$.
- 327°.** Задайте вектор $\vec{a}$ та побудуйте вектор:
1) $4\vec{a}$; 2) $-4\vec{a}$; 3) $0,25\vec{a}$.
- 328°.** Порівняйте напрями й довжини векторів:
1) $6\vec{a}$ і $-6\vec{a}$; 2) $-3\vec{a}$ і $\frac{1}{3}\vec{a}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}$ і $-2\vec{a}$.
- 329°.** Порівняйте напрями й довжини векторів:
 1) $2\vec{a}$ і $-2\vec{a}$; 2) $-0,25\vec{a}$ і $\vec{a}$.
- 330.** $ABCD$ — трапеція. Точка M — точка перетину її діагоналей. Скільки ненульових векторів можна задати на сторонах, діагоналях і середній лінії трапеції, що мають початок:
1) у вершинах трапеції;
2) у точці M ;
3) у серединах сторін трапеції?
- 331.** ABC — трикутник, у якому проведено середні лінії. Точки M , P і T — середини сторін трикутника. Скільки ненульових векторів можна задати на сторонах і середніх лініях трикутника, що мають початок:
 1) у вершинах трикутника;
2) у кожній із середин сторін трикутника?
- 332.** Дано чотири точки. Скільки ненульових векторів з кінцями в цих точках можна побудувати? Розгляньте різні випадки розміщення даних точок на площині.
- 333.** Дано три точки. Скільки ненульових векторів з кінцями в цих точках можна побудувати? Розгляньте різні випадки розміщення даних точок на площині.

- 334.** Точка B лежить між точками A і C . Точка M лежить між точками B і A . Серед векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AM}$, $\vec{BA}$, $\vec{BM}$, $\vec{CM}$ і $\vec{MA}$ назвіть:
1) співнаправлені вектори;
2) протилежно напрямлені вектори.
- 335.** Побудуйте вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$, якщо їхні довжини відповідно дорівнюють 4 см і 2 см та відомо, що ці вектори:
1) протилежно напрямлені;
2) співнаправлені.
Скільки розв'язків має задача?
- 336.** Побудуйте вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$, якщо їхні довжини дорівнюють по 1 см і дані вектори — колінеарні. Скільки розв'язків має задача?
- 337.** Дано шестикутник, у якого кожна сторона має довжину 2 см, а кожний кут дорівнює 120° . Яку довжину має вектор, що визначається:
1) двома сусідніми вершинами;
2) кінцями більшої діагоналі;
3) кінцями меншої діагоналі;
4) вершиною й точкою перетину діагоналей?
- 338.** $ABCDEF$ — шестикутник, у якого всі сторони рівні й усі кути рівні. Скільки пар рівних векторів з кінцями в його вершинах можна побудувати?
- 339.** Знайдіть суму векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{CB}$, де A , B і C — три задані точки. Розгляньте два випадки.
- 340.** Доведіть, що для векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ й $\vec{AC}$ справджується нерівність: $|\vec{AC}| \leq |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$.
- 341.** Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Чи рівні суми векторів:
1) $\vec{AB} + \vec{BC}$ і $\vec{DC} + \vec{DA}$; 2) $\vec{AB} + \vec{BD}$ і $\vec{AC} + \vec{CD}$?
- 342.** Чотирикутник $ABCD$ — ромб із гострим кутом A . Порівняйте суми модулів векторів:
 1) $|\vec{AB}| + |\vec{BC}|$ і $|\vec{DC}| + |\vec{AD}|$; 2) $|\vec{AB}| + |\vec{BD}|$ і $|\vec{AC}| + |\vec{CD}|$.
- 343.** $ABCKFP$ — шестикутник, кожна сторона якого дорівнює 2. Знайдіть довжину вектора:
1) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CP}$; 2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AP} + \vec{FP} + \vec{KF} + \vec{KC}$.
- 344.** Спростіть вираз:
1) $\vec{BA} - \vec{BC} + 2\vec{AC}$; 2) $2\vec{CD} - \vec{DA} - \vec{DC} + \vec{CA}$.
- 345.** Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює a . Знайдіть:
 1) $|\vec{AB}| - |\vec{AC}|$; 2) $|\vec{AB}| + |\vec{AC}|$; 3) $|\vec{AB} - \vec{CB}|$.

- 346.** За якого значення k виконується рівність:
 $\overline{AB} + \overline{BC} = k(\overline{CB} - \overline{AB})$?
- 347.** Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. За якої умови вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ — колінеарні?
- 348.** Для яких ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність:
 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;
 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
- 349.** У трикутнику ABC $\overline{AB} = \vec{c}$, $\overline{AC} = \vec{b}$, $\overline{BC} = \vec{a}$. Побудуйте вектор:
 1) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; 2) $\frac{\vec{c} + \vec{b}}{2}$.
- 350.** Побудуйте вектор $\vec{a}$. Збільште його довжину спочатку у 5 разів, а потім довжину вектора, який одержали, — у 2 рази. Скільки розв'язків має задача?
- 351.** $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$.
- 352.** AP — медіана трикутника ABC . Доведіть, що $\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.
- 353.** O — точка перетину медіан трикутника ABC . Доведіть, що $\overline{AO} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$.
- 354*.** Яке геометричне місце точок визначає:
 1) початок вектора $\vec{a}$; 2) кінець вектора $\vec{a}$?
- 355*.** Якщо в трикутнику ABC проведено медіани AA_1 , BB_1 і CC_1 , то $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \vec{0}$. Доведіть.
- 356*.** Щоб точка Q була точкою перетину медіан трикутника ABC , необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} = \vec{0}$. Доведіть.
- 357*.** Якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC , то для будь-якої точки O справджується рівність: $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OM}$. Доведіть.
- 358*.** Медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ перетинаються відповідно в точках O і O_1 . Доведіть, що $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 3\overline{OO_1}$.
- 359*.** На колі з центром у точці O позначено точки A , B і C так, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.
- 360*.** Дано: чотирикутник $ABCD$, $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

- 361*.** Дано точки A , B і C . Побудуйте точку D так, щоб виконувалася рівність:
 1) $\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC} = \vec{0}$; 2) $\overline{AB} + 3\overline{BD} = \overline{BC}$.
- 362*.** Доведіть тотожність:
 1) $-\overline{DB} + \overline{BD} - \overline{CD} = 2\overline{BC} + \overline{CD}$; 2) $\overline{BA} + \overline{DC} + \overline{CD} + \overline{BM} + \overline{MA} + 2\overline{AB} = \vec{0}$.
- 363*.** Задайте вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та побудуйте вектор:
 1) $4\vec{a} + 6(\vec{b} - 3\vec{c} + \vec{a})$; 2) $-(\vec{a} - 8\vec{b}) + 4(2\vec{b} + \vec{a})$.
- 364*.** Дано точки A , B , C і D . Точки M і N — середини відрізків AC і BD . Доведіть, що $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.
- 365*.** Дано три точки A , B і C такі, що $\overline{AC} = k \cdot \overline{CB}$. Доведіть, що для будь-якої точки O справджується рівність: $\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + k \cdot \overline{OB}}{1 + k}$.
- 366*.** Доведіть, що точка M лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли для довільної точки O справджується рівність:
 $\overline{OM} = k \cdot \overline{OA} + (1 - k) \cdot \overline{OB}$, де k — будь-яке дійсне число.

Проявіть компетентність

367. Північний вітер змінився на:

- 1) північно-східний;
- 2) північно-західний;
- 3) східний.

Покажіть початковий і кінцевий напрямки вітру та напрямки його зміни.



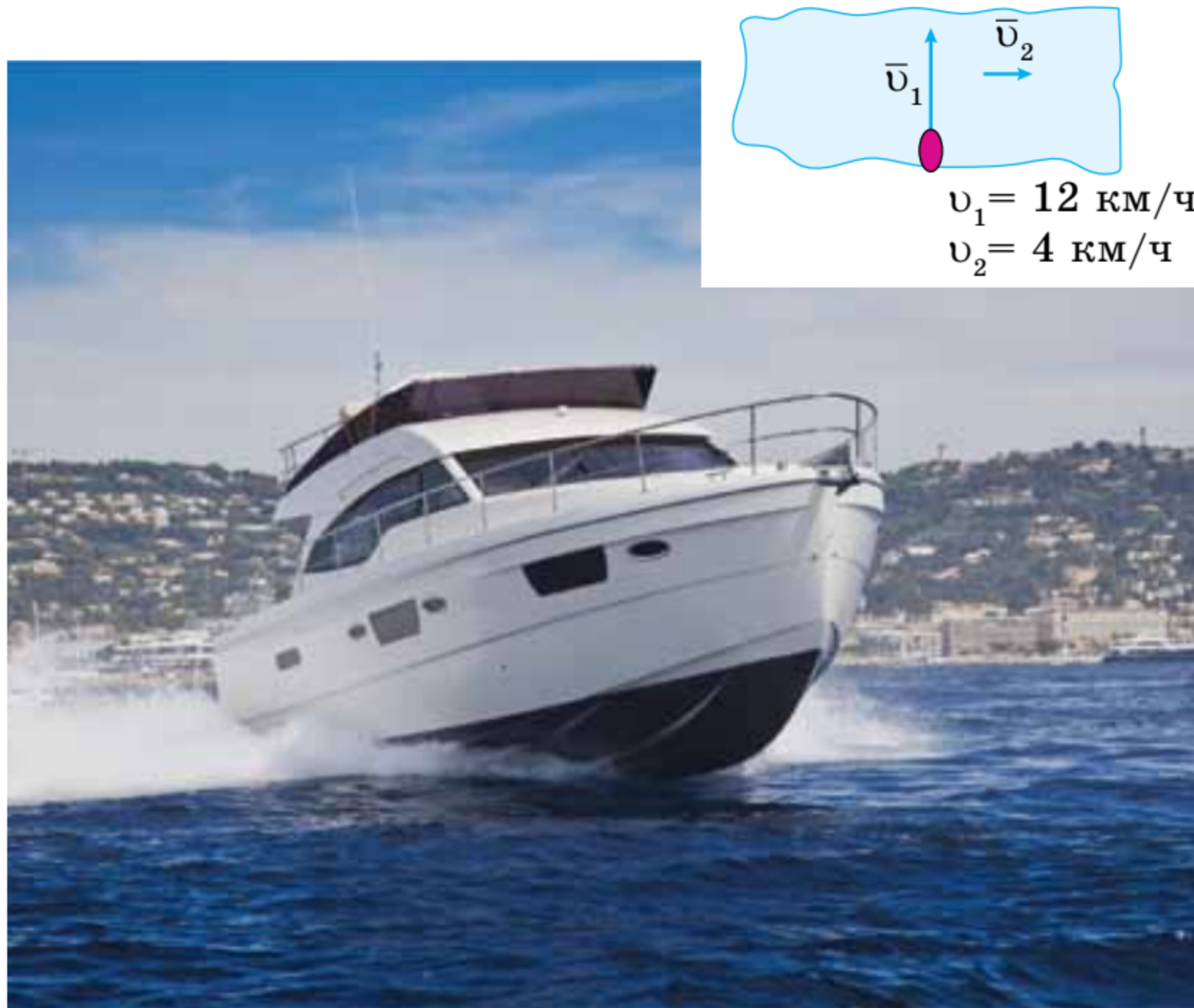
368. Вулиця проходить за напрямком з північного сходу на південний захід. У якому напрямку проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, вважаючи вертикальний край аркуша в зошиті напрямком на північ.

369. Туристи пройшли від базового табору в напрямку на північ 4 км й повернули на схід. Пройшовши за цим напрямком 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Побудуйте напрямки їхнього руху на плані в масштабі 1 км в 1 см.



370. Моторний човен відчалює від берега річки з власною швидкістю $v_1 = 12$ км/год, а течія річки має швидкість $v_2 = 4$ км/год (мал. 104).

- З якою швидкістю човен віддаляється від берега?
 - За який час човен опиниться посередині річки й на якій відстані від причалу, якщо ширина річки становить 6 км?
- Виконайте відповідні малюнки.



Мал. 104

§ 5. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

1. Координати вектора

Ситуація. Перед початком уроку геометрії в 9-А класі Оксана Миколаївна заготовила на дошці малюнок і записи (мал. 105). Зображення зацікавило учнівство — було над чим поміркувати, зіставити й протиставити. Денис висловив гіпотезу, що вектор $\vec{a}$ є сумою векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Але Ірина заперечила: «На малюнку немає векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Це числа». Думки однокласників розділилися, але в одному учнівстві було однаковим: числа a_1 і a_2 точно характеризують вектор $\vec{a}$.

qr.orioncentr.com.ua/SmMni

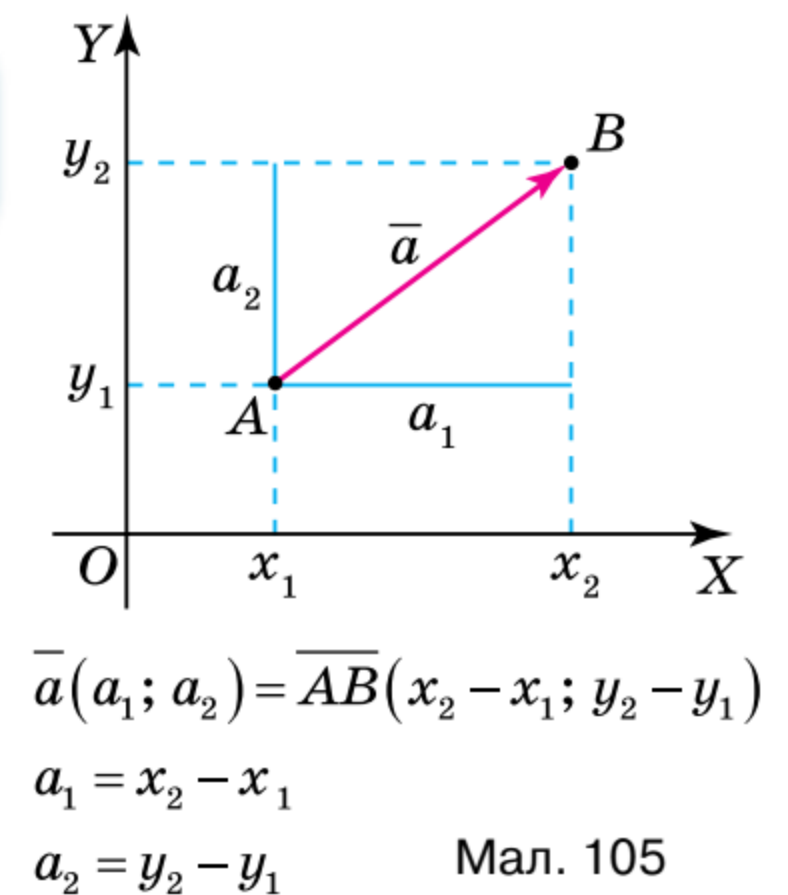


Чи правильно, що числа a_1 і a_2 характеризують вектор $\vec{a}$?

Так.



Ви вже знаєте, що впорядкована пара точок A і B визначає вектор $\vec{AB}$. Нехай точки A і B мають координати: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ (мал. 105). Числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$ називають *координатами вектора $\vec{a}$ в даній системі координат*. Вони характеризують довжину і напрям вектора $\vec{a}$.



Коротко записуємо: $\vec{a}(a_1; a_2)$, і говоримо: вектор $\vec{a}$ з координатами a_1 і a_2 .

Зрозуміло, що координати нуль-вектора дорівнюють нулю:

$$\vec{0}(0; 0).$$



Довжина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ дорівнює відстані між його початком і кінцем:

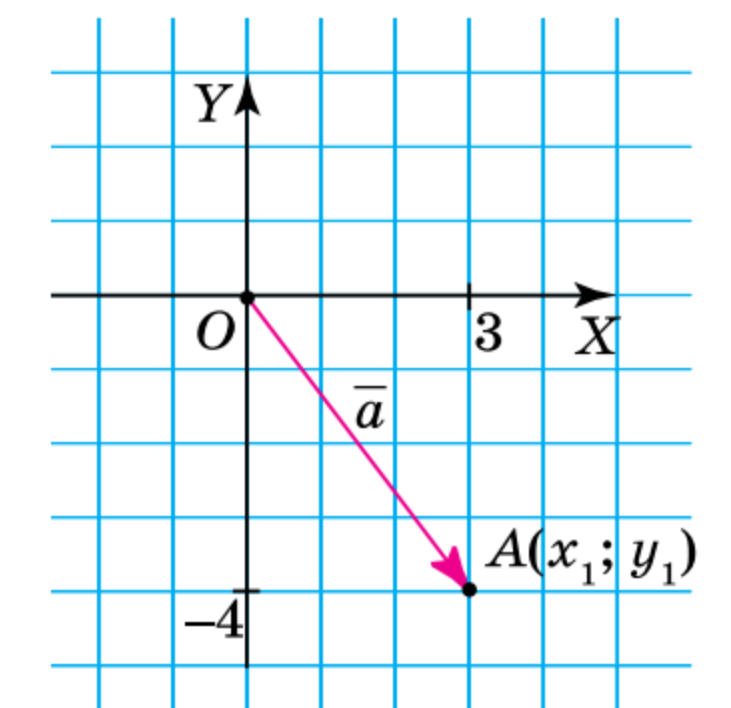
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Доведіть це самостійно.

Задача 1 Побудуйте вектор $\vec{a}(3; -4)$.

Розв'язання Щоб побудувати вектор $\vec{a}$, потрібно задати його початок і кінець у даній системі координат. Нехай початок вектора $\vec{a}$ (мал. 106) міститься в початку координат $O(0; 0)$, а його кінець — у точці $A(x_1; y_1)$.

Тоді, за означенням координат вектора, $3 = x_1 - 0$, $-4 = y_1 - 0$. Звідси $x_1 = 3$, $y_1 = -4$. Отже, точка A має координати $(3; -4)$. Вектор $\vec{OA} = \vec{a}$ — шуканий.



Мал. 106

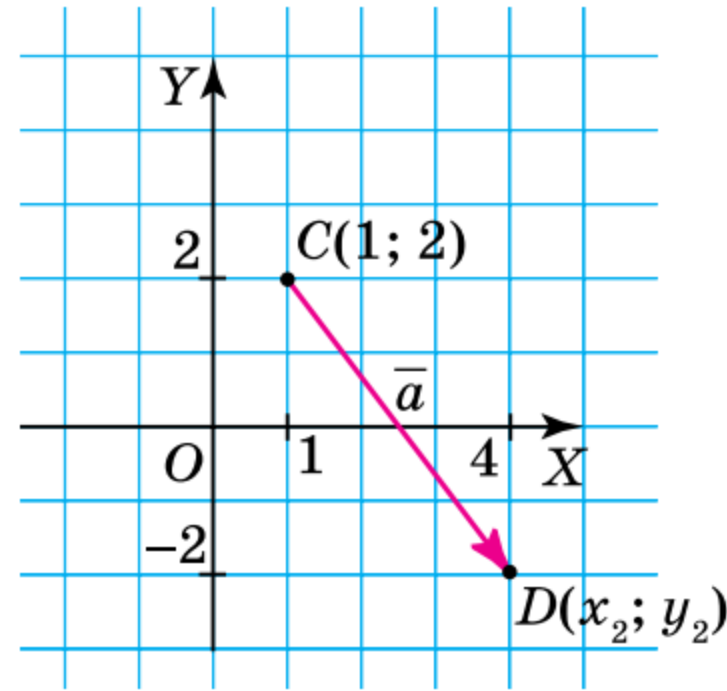


Як побудувати вектор $\vec{a}$, якщо його початок розмістити в іншій точці координатної площини?

Поміркуймо.



На малюнку 107 початок вектора $\vec{a}(3; -4)$ міститься в точці $C(1; 2)$, а кінець — у точці $D(x_2; y_2)$. За означенням координат вектора, $3 = x_2 - 1$, $-4 = y_2 - 2$. Звідси $x_2 = 4$, $y_2 = -2$. Отже, кінець вектора $\vec{a}$ міститься в точці $D(4; -2)$. Вектор $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$ — шуканий.



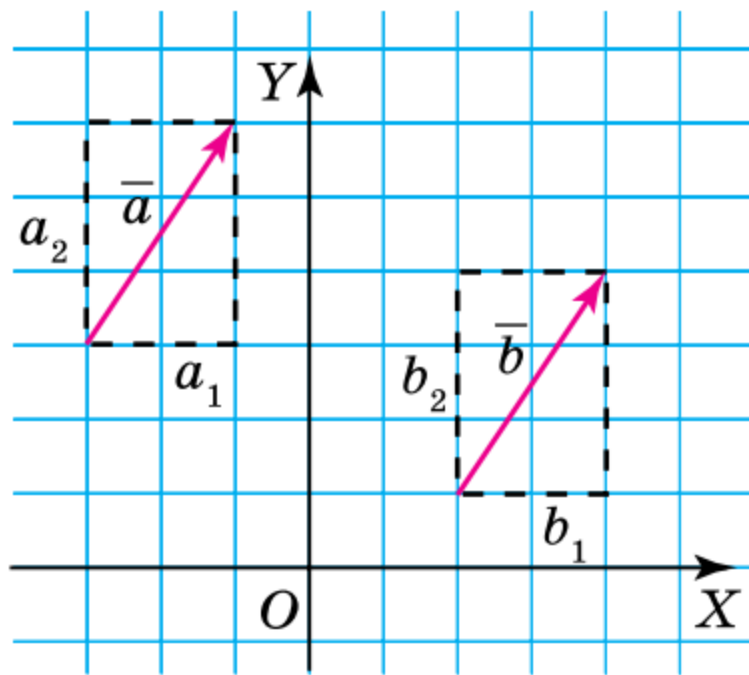
Мал. 107



Довжина і напрям вектора не залежать від розміщення його початку в системі координат.

Наведемо без доведення інші важливі твердження.

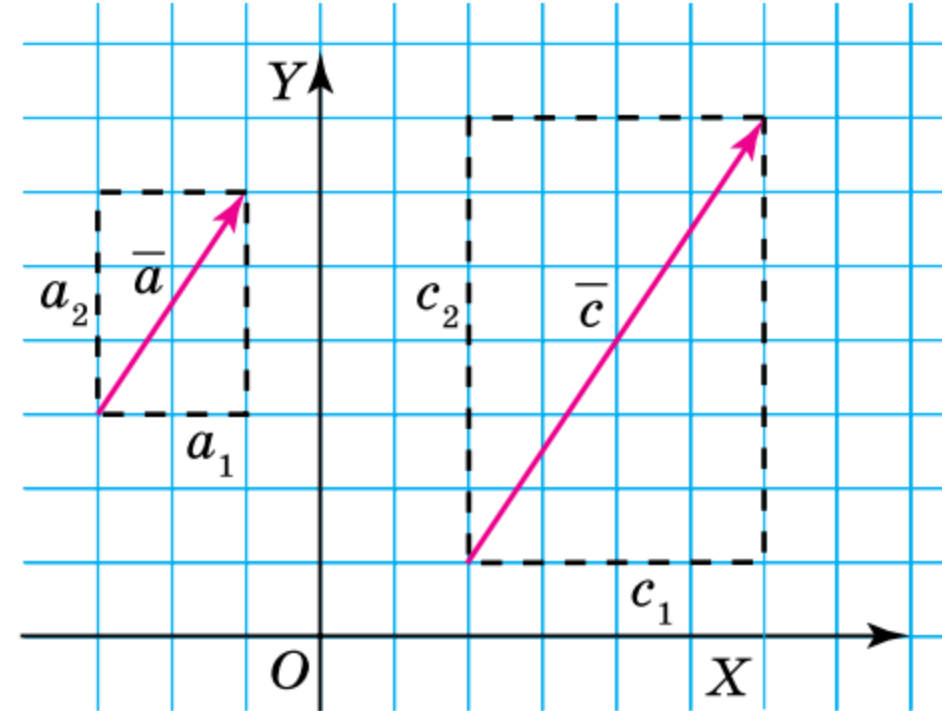
1. Вектори рівні тоді й тільки тоді, коли їхні відповідні координати рівні (мал. 108).



$$\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2)$$

$$a_1 = b_1 \text{ і } a_2 = b_2$$

Мал. 108



$$\vec{a}(a_1; a_2) \parallel \vec{c}(c_1; c_2) \quad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$$

Мал. 109

2. Вектори колінеарні тоді й тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні (мал. 109).

3. Щоб додати вектори, їхні відповідні координати додають.

$$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2);$$

4. Щоб відняти вектори, їхні відповідні координати віднімають.

$$\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2).$$

5. Щоб помножити вектор на число, його координати множать на це число.

$$k\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{c}(ka_1; ka_2)$$

Задача 2 Знайдіть модуль вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(4; 0)$.

Розв'язання Знайдемо координати вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(2; -1) - 3(4; 0) =$$

$$= (4; -2) - (12; 0) = (-8; -2).$$

Обчислимо модуль одержаного вектора.

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} =$$

$$= \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}.$$

2. Дія скалярного множення векторів та її властивості



Чи існують інші дії над векторами, крім додавання та множення вектора на число?

Так.



Вектори можна множити один на одного. Але, на відміну від чисел, результатом такого множення може бути **і число, і вектор**. Тому такі дві дії над векторами розрізняють і першу з них називають **скалярним множенням**, а другу — **векторним множенням**. Ми вивчатимемо лише скалярне множення векторів.



Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ записують так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Щоб з'ясувати, як виконувати скалярне множення двох векторів, спочатку введемо поняття кута між векторами.

На малюнку 110 ви бачите два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо від точки O вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Промені OA і OB утворюють кут AOB , який називають **кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$** .

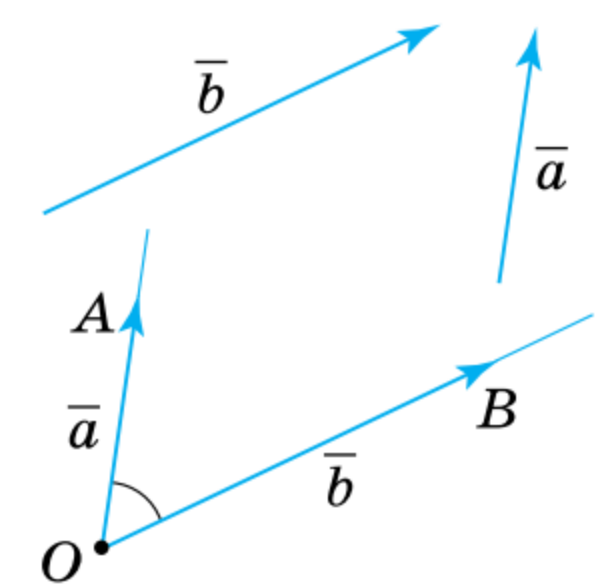


Коротко записуємо: $(\widehat{a; b})$, і читаємо: кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

- співнаправлені, то $(\widehat{a; b}) = 0^\circ$;
- протилежно напрямлені, то $(\widehat{a; b}) = 180^\circ$.



Мал. 110

Запам'ятайте!

Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними:

$$\overline{ab} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\widehat{a; b}).$$



Чим зумовлена назва скалярного добутку?

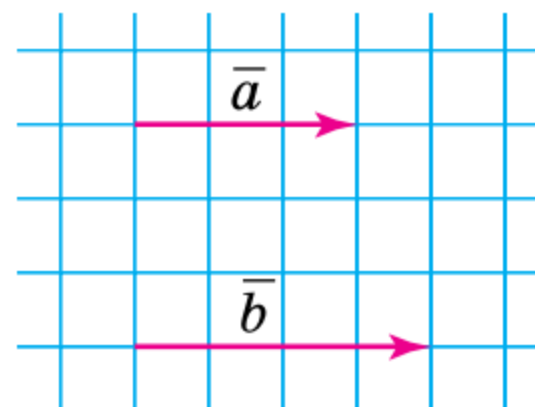
Тим, що результатом цієї дії є число (скаляр).



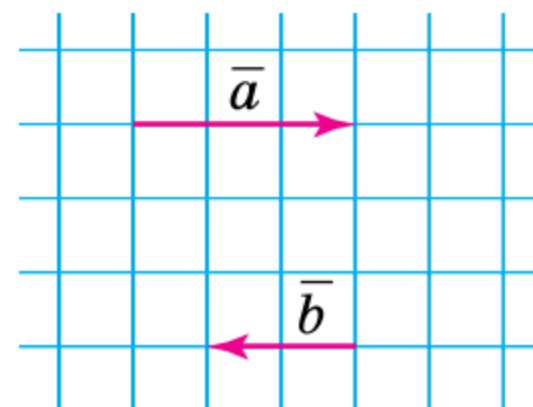
Особливі випадки скалярного множення векторів наведено в таблиці 16.

Таблиця 16

Вектори	Скалярний добуток	Обґрунтування
$\overline{a} \uparrow \uparrow \overline{b}$ (мал. 111)	$\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} $	$\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos 0^\circ = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot 1 = \overline{a} \cdot \overline{b} $
$\overline{a} \uparrow \downarrow \overline{b}$ (мал. 112)	$\overline{ab} = - \overline{a} \cdot \overline{b} $	$\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos 180^\circ = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot (-1) = - \overline{a} \cdot \overline{b} $
$\overline{a} \perp \overline{b}$	$\overline{ab} = 0$	$\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos 90^\circ = 0$
$\overline{a} = \overline{b}$	$\overline{aa} = \overline{a} ^2$	$\overline{aa} = \overline{a} \cdot \overline{a} \cdot \cos 0^\circ = \overline{a} ^2$



Мал. 111



Мал. 112

Добуток $\overline{aa}$ називають скалярним квадратом вектора $\overline{a}$ і позначають $\overline{a}^2$.



Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини:

$$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2.$$

Властивості скалярного множення векторів наведено в таблиці 17.

Таблиця 17

Переставний закон	$\overline{ab} = \overline{ba}$
Сполучний закон (відносно скалярного множника)	$(k \cdot \overline{a}) \overline{b} = k \cdot \overline{ab}$
Розподільний закон	$(\overline{a} + \overline{b}) \overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$

3. Скалярне множення векторів, заданих своїми координатами

Чи можна знайти скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами?

Так.



Якщо вектори задані координатами: $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(b_1; b_2)$, то їх скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат даних векторів:

$$\overline{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

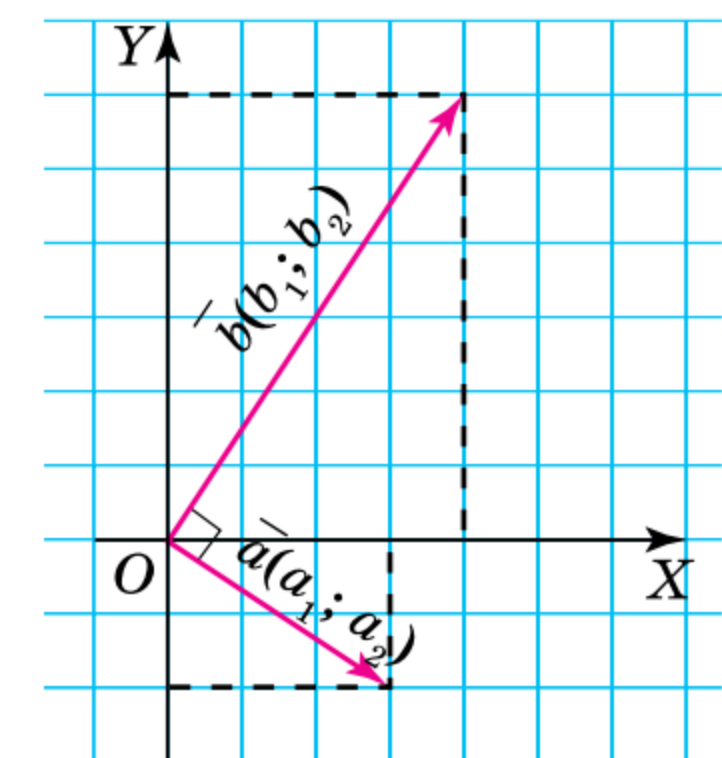
Звідси одержимо такі факти:

1) умова перпендикулярності векторів $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(b_1; b_2)$ (мал. 113):

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0;$$

2) формула для обчислення кута між векторами $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(b_1; b_2)$:

$$\cos(\widehat{a; b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

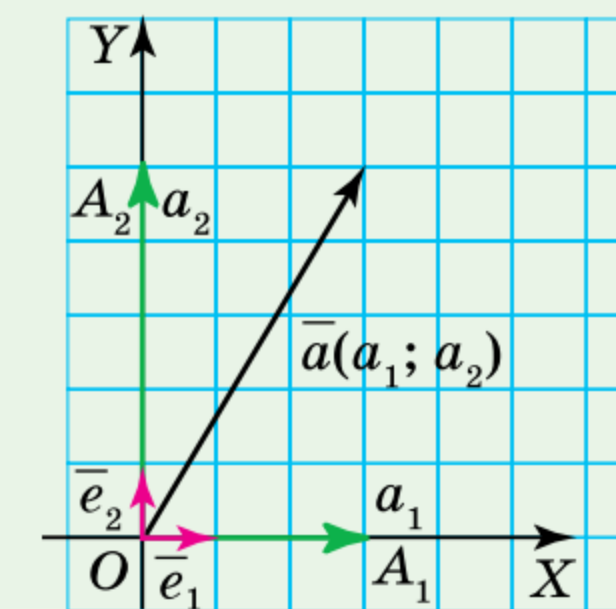


Мал. 113

Дізнайтеся більше

1. Нехай вектор $\overline{a}(a_1; a_2)$ відкладено від початку координат (мал. 114). Відкладемо на осях координат одиничні вектори $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$ (їх ще називають координатними векторами), а також вектори $\overline{OA}_1$ і $\overline{OA}_2$, з довжинами відповідно a_1 і a_2 . Тоді $\overline{OA}_1 = a_1 \cdot \overline{e}_1$, $\overline{OA}_2 = a_2 \cdot \overline{e}_2$. Вектор $\overline{a}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OA}_1$ і $\overline{OA}_2$. Звідси одержимо:

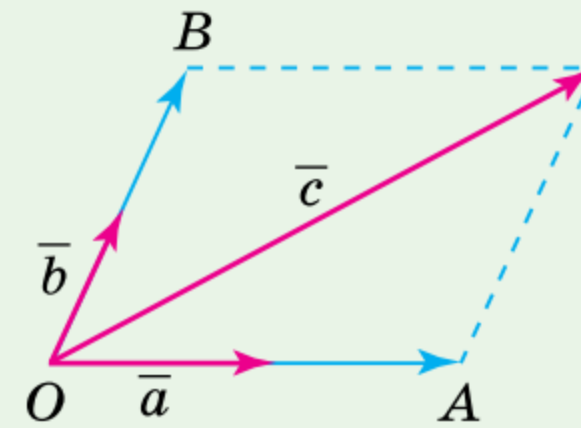
$$\overline{a} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2.$$



Мал. 114

Рівність $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$ називають *розкладом вектора $\vec{a}$ за двома координатними векторами*, а числа a_1 і a_2 — *коефіцієнтами розкладу*. Взагалі, **розклад вектора за двома неколінеарними векторами — єдиний**. Отже, координатами вектора в певній системі координат є коефіцієнти розкладу даного вектора за координатними векторами.

2. Будь-який вектор можна розкласти не лише за координатними векторами, а за будь-якими двома ненульовими неколінеарними векторами. Розглянемо приклад. Нехай дано два ненульові неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та довільний вектор $\vec{c}$. Відкладемо дані вектори від спільного початку O (мал. 115). Вектор $\vec{c}$ дорівнює сумі векторів $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$, колінеарних із векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Тоді $\vec{OA} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{OB} = n \cdot \vec{b}$, де m і n — деякі числа, що одночасно не дорівнюють нулю. Звідси $\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$.



Мал. 115

Отже, одержали розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3. У вас могло виникнути запитання: *Як вивести формулу скалярного добутку двох векторів, заданих своїми координатами?*

Нехай дано вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$. Розкладемо їх за координатними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$: $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2$. Застосувавши відповідні властивості скалярного добутку, одержимо:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2)(b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2) = (a_1 b_1) \vec{e}_1^2 + (a_1 b_2) \vec{e}_1 \vec{e}_2 + (a_2 b_1) \vec{e}_2 \vec{e}_1 + (a_2 b_2) \vec{e}_2^2.$$

Урахувавши, що $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = 1$, $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$, маємо: $\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

4. Термін «скалярний» походить від латинського слова *scalaris*, що означає — східчастий. Уперше його став уживати В.-Р. Гамільтон.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
скалярний добуток векторів	dot product of vectors	Skalarprodukt der Vektoren	produit scalaire de deux vecteurs

qr.orioncentr.com.ua/QBi8y

Пригадайте головне

1. Що називають координатами вектора?
2. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами?
3. Які координати мають рівні вектори? Колінеарні вектори?

4. Як знайти суму векторів, заданих своїми координатами; їх різницю?
5. Як помножити на число вектор, заданий своїми координатами?
6. Поясніть, що таке кут між двома векторами.
7. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
8. Які властивості скалярного множення?
9. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
10. Як знайти скалярний добуток векторів за їхніми координатами?
11. Яка умова перпендикулярності двох векторів?
12. За якою формулою знаходять кут між векторами?

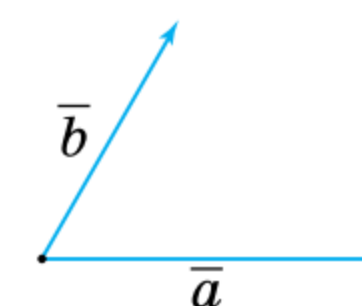
Усне тренування

Обчисліть:

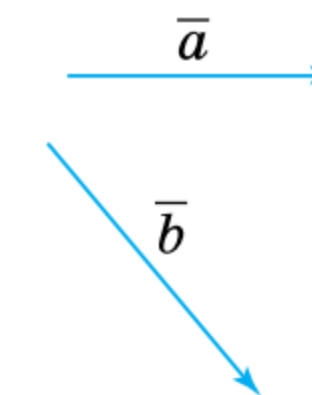
- 1) $480 : 5 + 20 : 5$; $35 \cdot 7 - 15 \cdot 7$; $248 : 3 + 52 : 3$;
- 2) $560 : 6 + 40 : 6$; $42 \cdot 8 - 32 \cdot 8$; $85 \cdot 4 - 25 \cdot 4$.

Розв'яжіть задачі

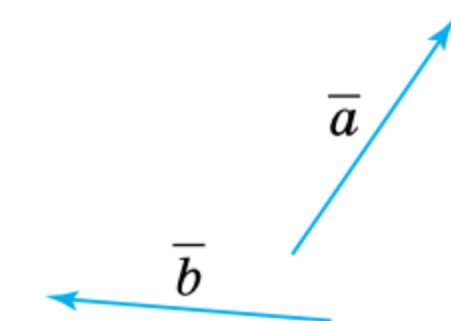
- 371'. Чи правильно, що довжину вектора $\vec{a}(3; 4)$ можна знайти, обчисливши значення виразу:
1) $\pm\sqrt{3^2 + 4^2}$; 2) $-\sqrt{3^2 + 4^2}$; 3) $\sqrt{3^2 + 4^2}$?
- 372'. Чи правильно, що в рівних векторів відповідні координати:
1) нерівні; 2) рівні?
- 373'. Чи правильно, що в колінеарних векторів відповідні координати:
1) непропорційні; 2) пропорційні?
- 374'. Чи правильно, що координати суми векторів дорівнюють:
1) сумі координат векторів-доданків;
2) сумам відповідних координат векторів-доданків?
- 375'. Чи правильно, що координати добутку вектора на число дорівнюють:
1) добутку координат вектора;
2) добутку відповідних координат вектора на дане число?
- 376'. За допомогою транспортира з'ясуйте, який кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на малюнках 116–118.



Мал. 116



Мал. 117



Мал. 118

377'. За наведеним записом сформулюйте твердження для даних векторів:

$$1) \overline{ab} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\widehat{a;b}); \quad 2) \overline{cd} = |\overline{c}| \cdot |\overline{d}| \cdot \cos(\widehat{c;d}); \quad 3) \overline{pq} = |\overline{p}| \cdot |\overline{q}| \cdot \cos(\widehat{p;q}).$$

378'. Чи правильно, що скалярним добутком двох векторів є:

1) вектор; 2) скаляр (число)?

379'. Прочитайте формулу:

$$1) \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2; \quad 2) \overline{b}^2 = |\overline{b}|^2; \quad 3) \overline{c}^2 = |\overline{c}|^2.$$

380'. Чи правильно підставлено координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ у формулу їх скалярного добутку:

$$1) \overline{a}(2;3), \overline{b}(4;5), \overline{ab} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5;$$

$$2) \overline{a}(-3;-4), \overline{b}(2;5), \overline{ab} = (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot 5;$$

$$3) \overline{a}(1;-3), \overline{b}(-4;5), \overline{ab} = 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 5?$$

381'. Чи правильно, що два вектори є взаємно перпендикулярними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює:

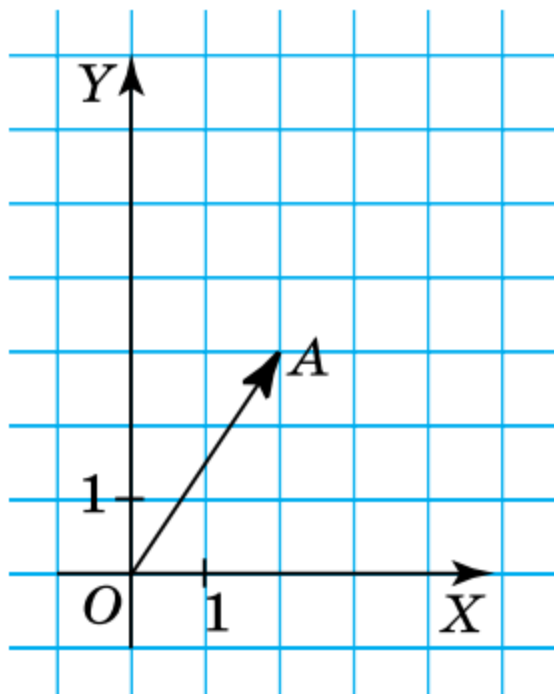
1) 1; 2) -1; 3) 0?

382'. За малюнками 119 і 120 знайдіть координати початку й кінця заданих векторів.

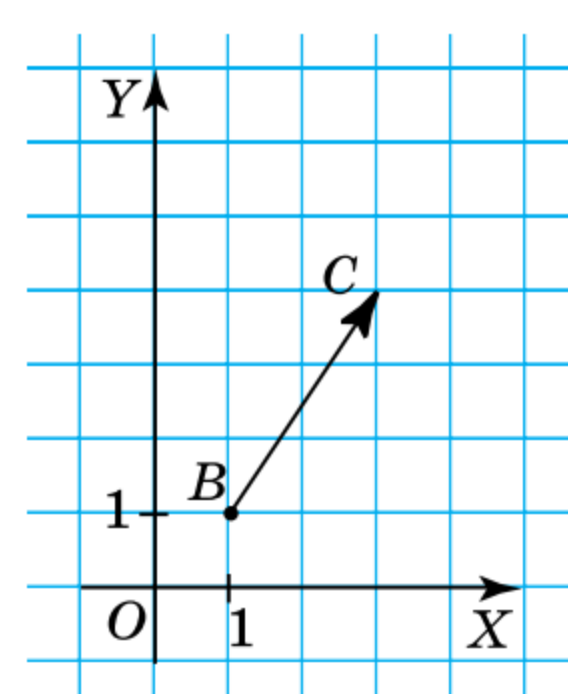
383'. Які координати початку й кінця вектора на малюнку 121?

384'. Які координати має вектор:

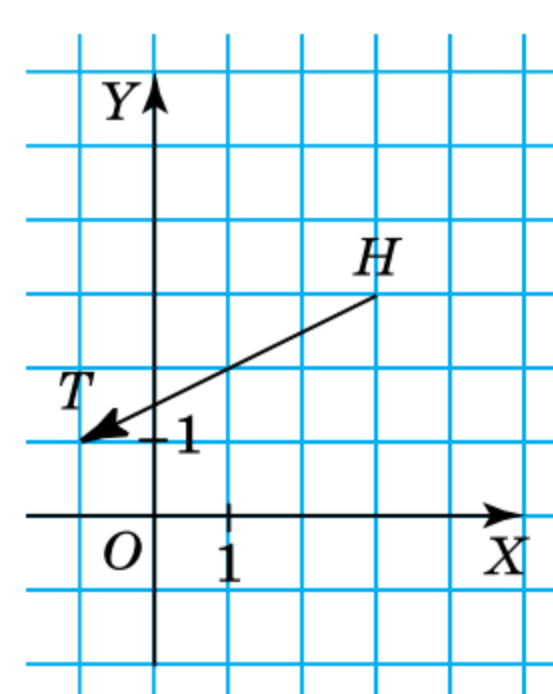
1) $\overline{OA}$ (мал. 119); 2) $\overline{BC}$ (мал. 120)?



Мал. 119



Мал. 120



Мал. 121

385'. Які координати має вектор $\overline{HT}$ (мал. 121)?

386'. Яку довжину має вектор:

$$1) \overline{b}(b_1; b_2); \quad 2) \overline{c}(c_1; c_2); \quad 3) \overline{d}(d_1; d_2)?$$

387'. Складіть вираз для обчислення довжини вектора:

$$1) \overline{p}(p_1; p_2); \quad 2) \overline{t}(t_1; t_2).$$

388'. Чи є рівними вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:



- 1) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(2;4)$;
- 2) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(-2;4)$;
- 3) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(-2;-4)$;
- 4) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(2;-4)$?

Відповідь поясніть.

389'. Чи є рівними вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$, якщо:

- 1) $\overline{c}(-3;1)$ і $\overline{d}(3;-1)$;
- 2) $\overline{c}(-3;1)$ і $\overline{d}(-3;1)$?

Відповідь поясніть.

390'. Чи є колінеарними вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

- 1) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(2;4)$;
- 2) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(-2;4)$;
- 3) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(-2;-4)$;
- 4) $\overline{a}(2;-4)$ і $\overline{b}(2;-4)$?

Чи є дані вектори рівними; протилежними? Відповідь поясніть.

391'. Серед даних векторів знайдіть колінеарні вектори: $\overline{a}(3;2)$, $\overline{b}(6;4)$, $\overline{c}(2;3)$, $\overline{d}(-6;-4)$, $\overline{h}(1,5;1)$, $\overline{k}(-3;4)$, $\overline{p}(15;10)$, $\overline{t}(-9;-6)$.

392'. Чи є колінеарними вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$, якщо:



- 1) $\overline{c}(-3;1)$ і $\overline{d}(3;-1)$;
- 2) $\overline{c}(-3;1)$ і $\overline{d}(-3;1)$?

Відповідь поясніть.

393'. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо:

- 1) $A(-1; 5)$, $B(2; 5)$;
- 2) $A(-4; 6)$, $B(1; 0)$;
- 3) $A(1; 1)$, $B(3; -9)$.

Побудуйте даний вектор.

394'. Накресліть у зошиті таблицю 18 і заповніть її.

Таблиця 18

$\overline{A}$	(1;4)		(5;2)	(6;-6)		(5;7)
$\overline{B}$	(0;-3)	(2;-2)			(2;1)	(11;9)
$\overline{AB}$		$\overline{AB}(8;5)$	$\overline{AB}(4;3)$	$\overline{AB}(-3;5)$	$\overline{AB}(3;0)$	

395'. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо:



- 1) $A(0; 3)$, $B(1; -1)$;
- 2) $A(-3; -3)$, $B(2; 2)$.

Побудуйте даний вектор.

396'. Знайдіть довжину вектора $\overline{a}$:

- 1) $\overline{a}(1;1)$;
- 2) $\overline{a}(4;3)$;
- 3) $\overline{a}(12;-5)$.

397'. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати точок A і B :

- 1) $A(10; 3)$, $B(0; 5)$;
- 2) $A(2; -1)$, $B(5; 2)$;
- 3) $A(-1; -2)$, $B(1; 2)$.

398°. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}(-6; -8)$.

399°. Чи є одиничним вектор:

1) $\vec{a}(1; 0)$; 2) $\vec{b}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$?

400°. Доведіть, що вектор $\vec{d}(1; 1)$ не є одиничним.

401°. Знайдіть координати суми та різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

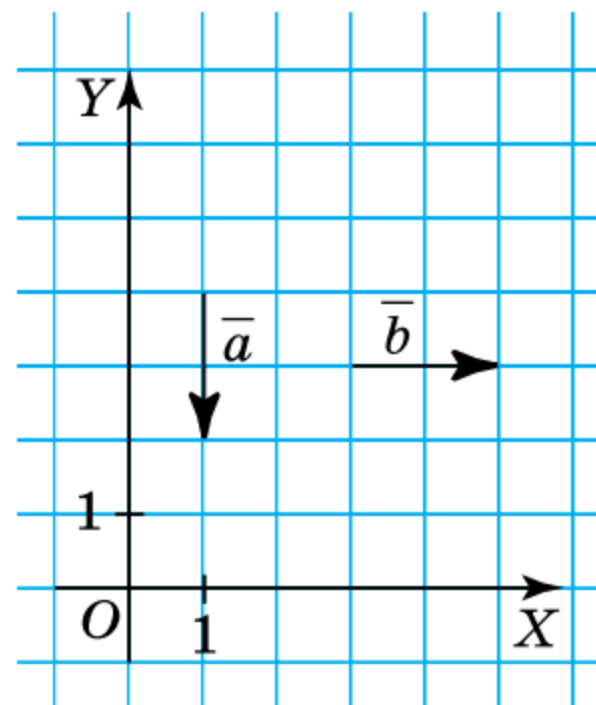
1) $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(3; 4)$; 2) $\vec{a}(-3; 1)$, $\vec{b}(2; -4)$; 3) $\vec{a}(-6; -2)$, $\vec{b}(6; 2)$.

402°. Знайдіть координати суми та різниці векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

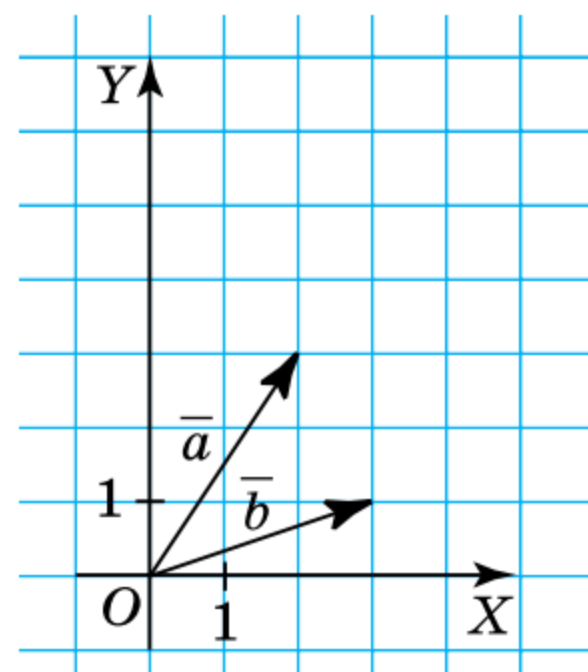
E 1) $\vec{c}(2; 1)$, $\vec{d}(4; 3)$; 2) $\vec{c}(1; -3)$, $\vec{d}(-4; 2)$.

403°. Знайдіть координати суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 122).

404°. Чи є вектор $\vec{c}(5; 2)$ сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 123)?



Мал. 122



Мал. 123

405°. Дано вектор $\vec{a}(1; 4)$. Знайдіть координати вектора:

1) $5\vec{a}$; 2) $-3\vec{a}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 4) $-\vec{a}$.

406°. Дано вектор $\vec{c}(4; -2)$. Знайдіть координати вектора:

1) $0,5\vec{c}$; 2) $-2\vec{c}$.

407°. Дано: $\vec{b}(1; 2)$, $\vec{c}(-5; 8)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо:

1) $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$; 2) $\vec{a} = \vec{b} + 0,5\vec{c}$; 3) $4\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

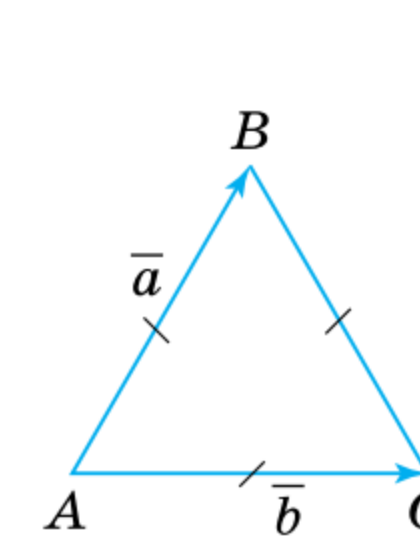
408°. Знайдіть модуль вектора $2\vec{a} - \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2; 4)$, $\vec{b}(-1; 8)$;
2) $\vec{a}(0; -4)$, $\vec{b}(2; 3)$.

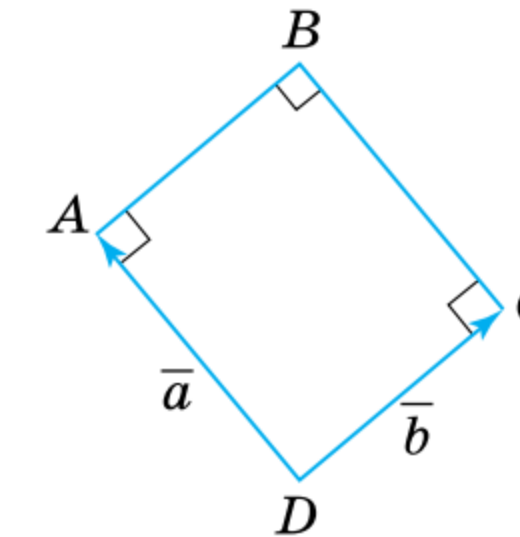
409°. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $\vec{a}(4; 2)$, $\vec{b}(-8; 1)$.



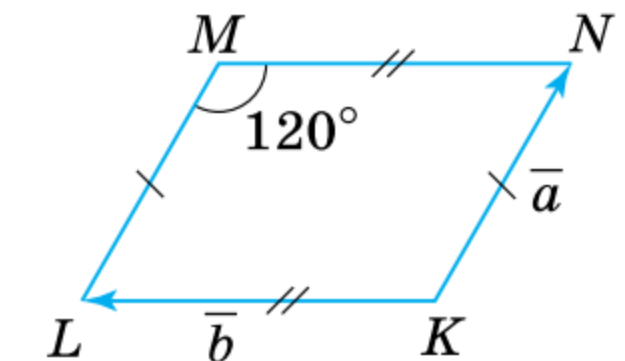
410°. За даними на малюнках 124, 125 назвіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Яка його градусна міра?



Мал. 124



Мал. 125



Мал. 126

412°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:



1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$;

2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$;

3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$;

4) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$;

5) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$;

7) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

6) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

8) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.



qr.orioncentr.com.ua/ZM3Ln

413°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:



1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$;

2) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 150^\circ$.

414°. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора, якщо вектор має довжину:

1) $|\vec{a}| = 2$; 2) $|\vec{b}| = 3$; 3) $|\vec{c}| = 5$?

Зробіть відповідний запис.

415°. Знайдіть скалярний квадрат вектора, якщо:



1) $|\vec{p}| = 4$; 2) $|\vec{m}| = 7$.

Зробіть відповідний запис.

416°. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\vec{b} = \sqrt{2}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$; 2) $\vec{a}\vec{b} = -12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

417°. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\vec{b} = 3\sqrt{3}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.



418°. Знайдіть довжину вектора $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 2$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 30^\circ$; 2) $\vec{a}\vec{b} = 2$, $|\vec{a}| = 2$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 45^\circ$.

419°. Знайдіть довжину вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\vec{b} = -6$, $|\vec{a}| = 3$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 120^\circ$.

420°. Яка довжина вектора $\vec{a}$, якщо його скалярний квадрат дорівнює:

1) 2; 2) 8; 3) 9; 4) 12?

Відповідь поясніть.

421°. Яка довжина вектора $\vec{c}$, якщо його скалярний квадрат дорівнює:

1) 3; 2) 4?

Відповідь поясніть.

422°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(5;-1)$, $\vec{b}(1;8)$; 3) $\vec{a}(-1;2)$, $\vec{b}(2;-1)$;
2) $\vec{a}(1;-3)$, $\vec{b}(-1;7)$; 4) $\vec{a}(0;1)$, $\vec{b}(-1;-1)$.

423°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(-5;1)$, $\vec{b}(-1;-8)$; 2) $\vec{a}(-1;3)$, $\vec{b}(1;-7)$.

424°. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні:

1) $\vec{a}(-2;2)$, $\vec{b}(1;1)$; 3) $\vec{a}(3;2)$, $\vec{b}(4;-6)$;
2) $\vec{a}(-1;-2)$, $\vec{b}(4;-2)$; 4) $\vec{a}(4;2)$, $\vec{b}(-1;2)$.

425°. Що можна стверджувати про дані вектори, якщо:

1) $\vec{a}\vec{b} = 0$; 2) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 3) $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 90^\circ$?

Зробіть відповідний запис.

426°. Що можна стверджувати про дані вектори, якщо:

1) $\vec{p}\vec{q} = 0$; 2) $\vec{p} \perp \vec{q}$; 3) $(\widehat{\vec{p};\vec{q}}) = 90^\circ$?

427°. Знайдіть кут між векторами:

1) $\vec{a}(2;0)$, $\vec{b}(0;-1)$; 3) $\vec{a}(6;-8)$, $\vec{b}(12;9)$;
2) $\vec{a}(2;2\sqrt{3})$, $\vec{b}(1,5;0)$; 4) $\vec{a}(-1;1)$, $\vec{b}(2;-2)$.

428°. Знайдіть кут між векторами:



1) $\vec{a}(0;2)$, $\vec{b}(-1;0)$; 2) $\vec{a}(2\sqrt{3};2)$, $\vec{b}(0;1,5)$.

429°. Знайдіть кут A трикутника ABC , якщо $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(1;7)$.

430°. Знайдіть кут A трикутника ABC , якщо $A(1;2)$, $B(-1;3)$, $C(0;0)$.

431. Серед векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$, $\vec{DA}$, $\vec{BD}$ знайдіть колінеарні вектори, якщо:

1) $A(2;3)$, $B(2;-1)$, $C(1;-1)$, $D(1;13)$;
2) $A(-1;2)$, $B(0;-6)$, $C(1;-4)$, $D(-3;6)$.

432. За якого значення λ вектори $\vec{a}(3;6)$ і $\vec{b}(1;\lambda)$ колінеарні?

433. Знайдіть координати вектора, протилежного до вектора $\vec{AB}$, якщо:

1) $A(10;9)$, $B(1;1)$; 2) $A(4;-7)$, $B(0;6)$.

434. За якого значення λ вектор $\vec{a}(1;\lambda)$:

1) є одиничним; 2) має довжину, що дорівнює 3?

435. Модуль вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює 8. Знайдіть λ , якщо:

1) $\vec{a}(-1;1)$; 2) $\vec{a}(0;-4)$.

436. Побудуйте суму векторів $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$, якщо $A(-1;2)$, $B(2;-1)$, $C(1;-3)$ і $D(-5;3)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

437. Знайдіть координати векторів: $\vec{a} + \vec{b}$; $-3\vec{a} + \vec{b} - 7\vec{c} + \vec{d}$; $5\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$ та побудуйте їх, якщо:

1) $\vec{a}(2;0)$, $\vec{b}(1;4)$, $\vec{c}(-1;1)$, $\vec{d}(0;2)$;
2) $\vec{a}(0;-5)$, $\vec{b}(2;-3)$, $\vec{c}(3;7)$, $\vec{d}(5;4)$.

438. Побудуйте паралелограм на векторах $\vec{OA}(2;1)$ і $\vec{OB}(1;4)$. Визначте довжини його діагоналей.

439. Відомі координати вершин трикутника ABC : $A(6;2)$, $B(1;1)$, $C(-5;9)$. Знайдіть координати вектора $\vec{AM}$, якщо AM — медіана даного трикутника.

440. Чи рівні вектори $\vec{b} + 3\vec{c}$ та $\vec{a} - \vec{c}$, якщо: $\vec{a}(1;3)$, $\vec{b}(-7;-5)$, $\vec{c}(2;2)$?

441. Побудуйте вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярний добуток яких обчислюється за формулою:

1) $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ$; 3) $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ$;
2) $\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$; 4) $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 180^\circ$.

Скільки розв'язків має задача?

442. Яка особливість розміщення векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\vec{b} > 0$;
2) $\vec{a}\vec{b} < 0$;
3) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
4) $\vec{a}\vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

- 443.** Дано квадрат $ABCD$ зі стороною завдовжки 1. Знайдіть:
- 1) $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; 3) $\overline{AB} \cdot \overline{DA}$; 5) $\overline{AB} \cdot \overline{DC}$;
 - 2) $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$; 4) $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; 6) $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$.
- 444.** На двох сусідніх сторонах паралелограма задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдіть довжини його діагоналей, якщо:
- 1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$; 2) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.
- 445.** Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо:
- 1) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$; 2) $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.
- 446.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо:
- 1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$; 2) $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$.
- 447.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо:
- 1) $A(1; 2)$, $B(4; 5)$, $C(7; 2)$, $D(4; -1)$;
 - 2) $A(3; -2)$, $B(1; 1)$, $C(4; 3)$, $D(6; 0)$.
- 448*.** Доведіть, що точки $A(-1; 2)$, $B(2; -1)$, $C(1; -3)$ і $D(-5; 3)$ є вершинами трапеції.
- 449*.** Побудуйте вектор $\overline{AB} + \overline{AC} + 2\overline{CA}$, якщо $A(3; 3)$, $B(-8; 1)$, $C(4; -1)$. Розв'яжіть задачу двома способами.
- 450*.** Побудуйте вектор $2\vec{a} + 5\vec{c}$, якщо $\vec{a}(2; 5)$, $\vec{c}(-1; -1)$. Розв'яжіть задачу двома способами.
- 451*.** На сторонах трикутника ABC задано вектори $\overline{AB}(2; 10)$ і $\overline{AC}(6; -2)$. Які координати мають вектори $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$, що визначаються медіанами даного трикутника? Знайдіть довжини його медіан.
- 452*.** Знайдіть координати вершин трикутника ABC та координати вектора $\overline{CA}$, якщо:
- 1) $A(1; -4)$, $\overline{AB}(0; 6)$, $\overline{BC}(2; -1)$; 2) $A(2; -5)$, $\overline{AB}(0; 2)$, $\overline{BC}(4; 2)$.
- 453*.** Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного з вектором $\vec{a}$, якщо $|\vec{b}| = 10$ і $\vec{a}(4; 3)$.
- 454*.** Визначте координати вектора $\vec{d}$, якщо $\vec{d} \uparrow \downarrow \vec{c}$ і:
- 1) $\vec{c}(1; -2)$, $|\vec{d}| = 5$; 2) $\vec{c}(12; 5)$, $|\vec{d}| = 75$.
- 455*.** Дано: $\overline{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overline{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$, $\overline{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Доведіть, що $ABCD$ — трапеція.

- 456*.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$:
- 1) $\vec{a}(2; 4)$, $\vec{b}(3; -1)$; 2) $\vec{a}(1; 3)$, $\vec{b}(-5; 1)$.
- 457*.** За відомими модулями векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та кутом між ними знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} - 3\vec{b}$ і $2\vec{a} + \vec{b}$, якщо:
- 1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$; 2) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.
- 458*.** Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?
- 459*.** Яким є кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (гострим, прямим чи тупим), якщо:
- 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$; 4) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
- 460*.** Доведіть нерівність $-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$.
- 461*.** Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах:
- 1) $\vec{a}(2; 2)$ і $\vec{b}(5; -2)$;
 - 2) $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(2; -3)$.
- 462*.** Вершини трикутника містяться в точках $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ і $C(-3; 3)$. Знайдіть кут між стороною AB та медіаною AM .
- 463*.** У рівнобічній трапеції $OACB$: $BC = AC = 2$, точки M і N — середини основ трапеції OB і AC відповідно. Гострий кут трапеції дорівнює 60° . Знайдіть кут між векторами $\overline{OM}$ і $\overline{ON}$.
- 464*.** Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знайдіть $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ac}$.

Проявіть компетентність

- 465.** На тіло діють сили $\vec{F}_1(1; 5)$ і $\vec{F}_2(-4; 7)$. Знайдіть вектор рівнодійної сили.
- 466.** Щоб зважити брусок вагою 10 Н за допомогою двох динамометрів, розрахованих на вимірювання сили 5 Н, діють так: обидва динамометри укріплюють поряд на одному рівні, а брусок підвішують одразу до обох гачків динамометрів. Поясніть, чому так можна зважити брусок.
- 467.** Знайдіть, яку роботу виконує сила $\vec{F}(4; 7)$, якщо її точка прикладання переміщується на вектор $\vec{s}(-1; 10)$.

- 468.** Крайні точки України мають такі географічні координати: північна ($52^{\circ}22'$ пн. ш.; $33^{\circ}11'$ сх. д.), східна ($49^{\circ}15'$ пн. ш.; $40^{\circ}13'$ сх. д.), південна ($44^{\circ}23'$ пн. ш.; $33^{\circ}46'$ сх. д.), західна ($48^{\circ}25'$ пн. ш.; $22^{\circ}08'$ сх. д.). Якщо провести умовні прямі через крайні північну й південну точки та крайні західну і східну точки, то чи можна переконатися в перпендикулярності цих прямих?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- Поясніть, що таке прямокутна декартова система координат та як її ввести на площині.
- Як визначити координати точки на координатній площині?
- Сформулюйте та доведіть теорему про відстань між двома точками із заданими координатами.
- За якими формулами знаходять координати середини відрізка? Виведіть ці формули.
- Поясніть, що таке синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180° .
- Назвіть значення синуса й косинуса для кутів 0° , 90° , 180° .
- Запишіть основні тотожності для $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\tan \alpha$.
- Поясніть, що таке рівняння фігури.
- Яке рівняння задає коло?

- Які є види рівняння прямої?
- Поясніть, що таке вектор, довжина та напрям вектора; як зображають вектор.
- Які вектори називають колінеарними; співнапрямленими; протилежно напрямленими; рівними; протилежними?
- Поясніть, як застосувати правило трикутника для додавання двох векторів.
- Як знайти суму векторів за правилом паралелограма? А їхню різницю?
- Які властивості додавання векторів і множення вектора на число?
- Що таке координати вектора?
- Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами; суму двох векторів; добуток вектора на число?
- Що називають скалярним добутком двох векторів? Які його властивості?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- Знайдіть відстань між точками $A(1; 2)$ і $B(2; 1)$.
 А. 2.
 Б. 6.
 В. $\sqrt{2}$.
 Г. $\sqrt{3}$.
- Які координати має середина відрізка MH , якщо $M(-3; 0)$, $H(5; 6)$?
 А. $(-3; 6)$.
 Б. $(0; 5)$.
 В. $(-4; 3)$.
 Г. $(1; 3)$.
- $ABCD$ — паралелограм. Який вектор дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$?
 А. $\overrightarrow{AC}$.
 Б. $\overrightarrow{BD}$.
 В. $\overrightarrow{AD}$.
 Г. $\overrightarrow{DC}$.
- Які координати має одиничний вектор $\overrightarrow{a}$, перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{b}(2; 2)$?
 А. $(1; 1)$.
 Б. $(-2; -2)$.
 В. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
 Г. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- Обчисліть $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,5$.
 А. 2,5.
 Б. 25.
 В. 0,2.
 Г. 0,25.



Розділ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У розділі дізнаєтесь:

- про співвідношення між сторонами й кутами трикутника;
- про алгоритми знаходження невідомих сторін і кутів довільного трикутника за відомими його сторонами й кутами;
- як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач практичного змісту;
- про нові формули для обчислення площі трикутника та як їх використовувати в розв'язуванні задач

§ 6. ТЕОРЕМА СИНУСІВ

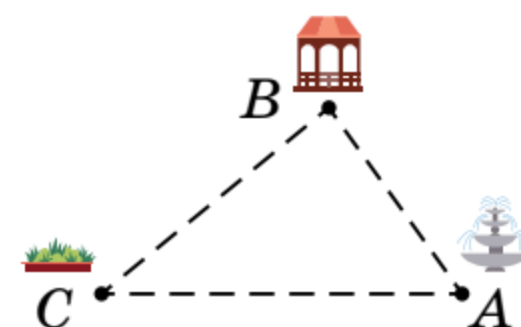
1. Теорема синусів

Ситуація. Під час облаштування паркової зони ландшафтний дизайнер має прокласти доріжки між трьома декоративними об'єктами — фонтаном (точка A), альтанкою (точка B) і клумбою (точка C), яка вже висаджена і не підлягає перенесенню. За планом ділянки доріжки від клумби розходяться під кутом 46° , а від фонтану — під кутом 58° , відстань від фонтану до клумби дорівнює 12 м.



Як визначити довжину двох інших доріжок?

За допомогою теореми синусів.



Позначатимемо сторони трикутника через a, b, c , а протилежні їм кути — через α, β, γ або $\angle A, \angle B, \angle C$ відповідно.

Запам'ятайте!

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

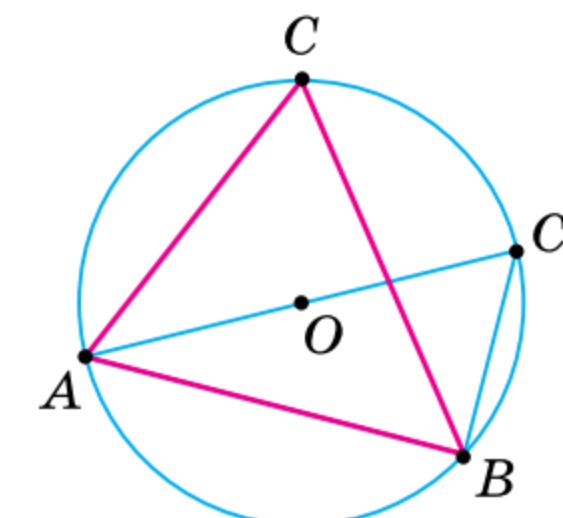
Довести: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



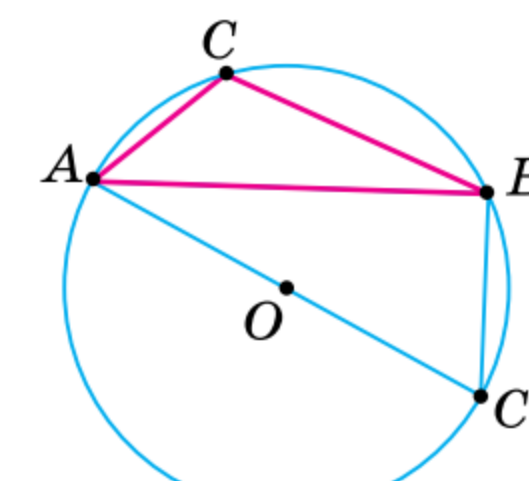
qr.orioncentr.com.ua/4KtMh

Доведення. Опишемо коло радіусом R навколо даного трикутника ABC (мал. 127). Через одну з вершин трикутника, наприклад A , проведемо діаметр AC_1 описаного кола. Трикутник ABC_1 — прямокутний ($\angle B$ — прямий, як вписаний кут, що спирається на діаметр), тому $c = 2R \cdot \sin C_1$ або $\frac{c}{\sin C_1} = 2R$.

Якщо кут C — **гострий** (мал. 127), то $\angle C = \angle C_1$ (як вписані кути, що спираються на одну дугу кола), і $\sin C_1 = \sin C$.



Мал. 127



Мал. 128

Якщо кут C — **тупий** (мал. 128), то кут C_1 — гострий, оскільки $\angle C + \angle C_1 = 180^\circ$. Звідси $\angle C_1 = 180^\circ - \angle C$. Отже, $\sin C_1 = \sin (180^\circ - \angle C) = \sin C$.

В обох випадках маємо, що $\frac{c}{\sin C_1} = 2R$. (1)

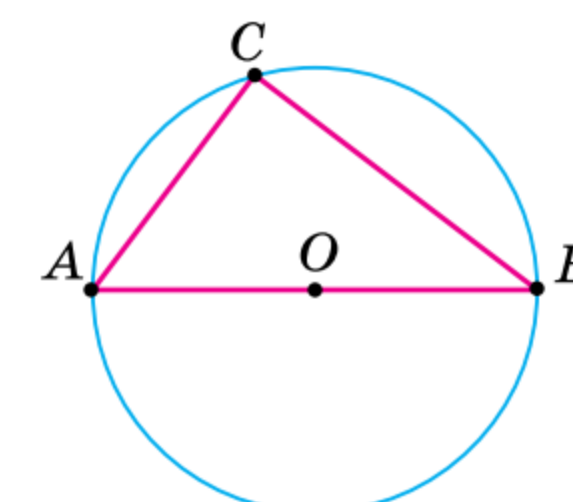
Якщо кут C — прямий (мал. 129), то $c = 2R$, $\sin C = \sin 90^\circ = 1$ і рівність (1) також має місце.

Аналогічні рівності знайдемо для кутів A і B трикутника.

Отже, для будь-якого трикутника ABC :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad \text{звідси}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



Мал. 129

2. Наслідки з теореми синусів



Чи можна знайти сторону трикутника за радіусом R описаного кола та кутом, що лежить проти цієї сторони?

Так, за наслідком 1 з теореми синусів.



qr.orioncentr.com.ua/eNfDv

Наслідок 1. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

За наслідком 1 з теореми синусів випливає, що:

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C.$$



Чи є залежність між мірами кутів трикутника та довжинами його сторін?

Так.



Наслідок 2. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

Спробуйте довести це самостійно, розглянувши гострокутний і тупокутний трикутники.

3. Застосування теореми синусів



Які елементи трикутника потрібно знати, щоб застосувати теорему синусів?

Розглянемо задачу.



Задача 1 У трикутнику дано сторону $a = 6$ і прилеглі до неї кути: $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Знайдіть сторону b .

Розв'язання $\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 80^\circ) = 70^\circ$. За теоремою синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{Звідси } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{6 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 70^\circ} \approx \frac{6 \cdot 0,985}{0,940} \approx 6.$$

Задача 2 У трикутнику дано сторони $a = 8$, $b = 4$ і $\angle A = 48^\circ$, що лежить проти сторони a . Знайдіть $\angle B$.

Розв'язання За теоремою синусів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

$$\text{Звідси } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \sin 48^\circ}{8} \approx \frac{4 \cdot 0,743}{8} \approx 0,372.$$

Цьому значенню синуса відповідають два кути: 22° і $180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$. Оскільки $a > b$, то, за наслідком 2, $\angle A > \angle B$. Оскільки $\angle A$ — гострий, то $\angle B$ — також гострий. Отже, $\angle B = 22^\circ$.

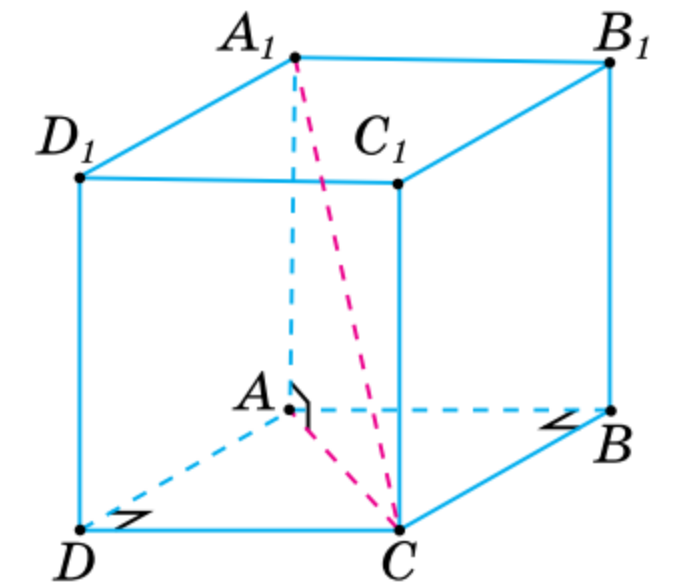


Теорема синусів дає можливість знаходити невідомі сторони й кути трикутника:

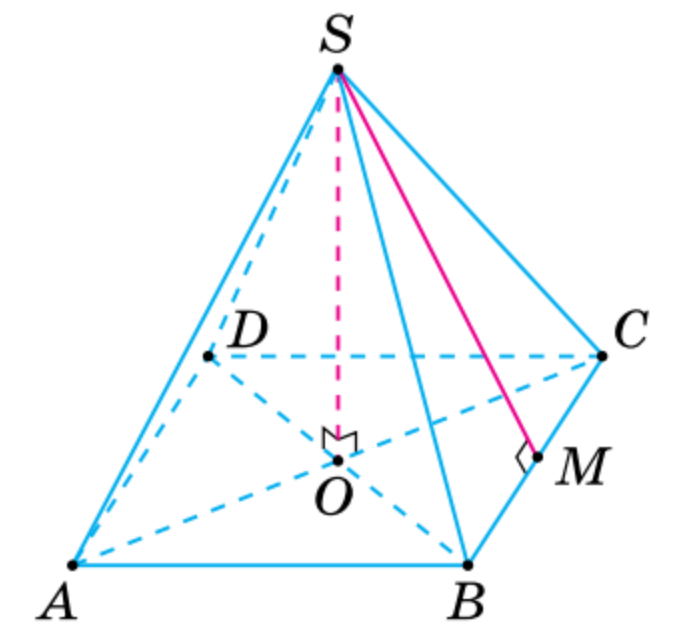
- за стороною і прилеглими до неї кутами (задача 1);
- за двома сторонами й кутом, протилежним до однієї з них (задача 2).

Ви вже знаєте, що трикутники є елементами прямокутного паралелепіпеда або піраміди. У прямокутному паралелепіпеді це прямокутні трикутники, утворені діагоналлю грані і двома її сторонами (наприклад, прямокутні трикутники ADC і CBA на малюнку 130) або діагоналлю паралелепіпеда, відповідною діагоналлю грані і ребром (наприклад, прямокутний трикутник A_1AC на малюнку 130).

Елементами піраміди можуть бути будь-які трикутники: як прямокутні, так і гострокутні або тупокутні. Основою піраміди, зображеної на малюнку 131, є паралелограм $ABCD$, AC і BD — діагоналі основи, SO — висота піраміди, SM — перпендикуляр, проведений до сторони BC . Ці відрізки утворюють прямокутні трикутники (трикутники SMC , SMB , SOC , SOB), тупокутні (трикутники ABC і ADC) або гострокутні (трикутники BCD і BAD).



Мал. 130



Мал. 131



Теорему синусів можна застосовувати і в трикутниках, що є елементами прямокутного паралелепіпеда та піраміди.

Дізнайтеся більше

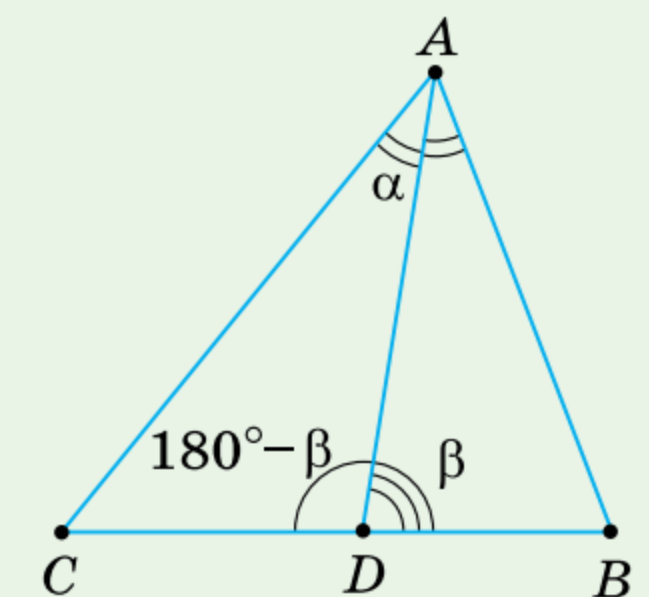
1. Ви вже знаєте, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін. Теорема синусів дозволяє спростити доведення цього математичного факту. Розглянемо таке доведення.

Нехай AD — бісектриса трикутника ABC (мал. 132). Позначимо $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, тоді $\angle ADC = 180^\circ - \beta$. Застосуємо теорему синусів до трикутників ABD і ACD :

$$\text{Із } \triangle ABD: \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}, \quad (1)$$

$$\text{Із } \triangle ACD: \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \beta)}.$$

$$\text{Оскільки } \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta, \text{ то } \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}. \quad (2)$$



Мал. 132

Поділимо почленно рівність (1) на рівність (2). Одержимо: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, що й треба було довести.

Розв'язуючи задачу, ми ввели допоміжні кути α і β , яких не було дано в умові. Використавши теорему синусів, склали рівності (1) і (2). Потім, почленно поділивши ці рівності, позбулися синусів допоміжних кутів α і β й одержали шукану пропорцію. Такий спосіб розв'язування інколи називають *способом введення допоміжного кута*.

2. Гіпатія (370–415) — дочка відомого грецького вченого Теона. Вона народилася й жила в Александрії, була однією з найбільш ерудованих у математиці й астрономії людей у світі. Від Теона, знаменитого астронома і механіка, Гіпатія отримала перші знання з геометрії й астрономії. Вони жили в Мусейоні, у той час провідному науковому центрі Єгипту. Там же розміщувалась і Александрійська бібліотека, заснована й зібрана спадкоємцями Олександра Македонського. Гіпатія була настільки всебічно освіченою, що на її думку зважали всі вчені того часу. «Зберігай своє право на думку. Мислити неправильно краще, ніж не думати зовсім», — говорила Гіпатія. Вона зробила певний внесок у геометрію й астрономію, зіграла важливу роль у створенні астролябії, написала коментарі до праць Діофанта й Аполлонія. Але, на жаль, наукові праці Гіпатії не збереглися. Після смерті Гіпатії Александрійської протягом 1000 років в історії математики ми не зустрічаємо імен жінок.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
теорема синусів	law of sines	Sinussatz, m	loi des sinus

qr.orioncentr.com.ua/8tREW

Усне тренування

Обчисліть:

- $(25 : 0,5 + 9 : 0,1 - 30) \cdot 0,01$;
- $100 : (0,5 \cdot 80 + 6 : 0,1) - 1$.

Пригадайте головне

- Сформулюйте теорему синусів.
- Як знайти сторону трикутника за радіусом описаного кола й кутом, що лежить проти цієї сторони?
- Яка залежність між мірами кутів трикутника та довжинами його сторін?
- Сформулюйте дві задачі, які можна розв'язати за допомогою теореми синусів.

Розв'яжіть задачі

469'. Який із записів правильний:

- $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$;
- $\frac{a}{\angle A} = \frac{b}{\angle B} = \frac{c}{\angle C}$;
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$?

470'. Чи правильно, що в трикутнику ABC :

- $a = R \sin B$;
- $a = R \sin A$;
- $a = 2R \sin A$?

471'. Чи правильно, що в трикутнику проти більшої сторони лежить:

- менший кут;
- більший кут?

472'. Чи правильно, що в трикутнику проти меншого кута лежить:

- менша сторона;
- більша сторона?

473'. Чи правильно, що теорема синусів дає можливість знаходити в трикутнику:

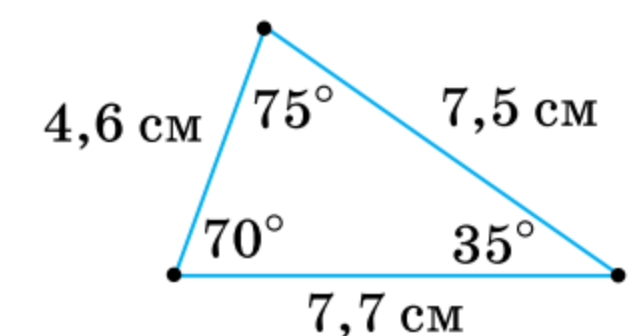
- тільки невідомі сторони;
- тільки невідомі кути;
- невідомі сторони й кути?

474'. Чи правильно, що теорема синусів дає можливість знаходити невідомі сторони й кути трикутника:

- за трьома кутами;
- за трьома сторонами;
- за стороною і прилеглими до неї кутами;
- за двома сторонами й кутом, протилежним до однієї з них?

475'. За даними на малюнку 133:

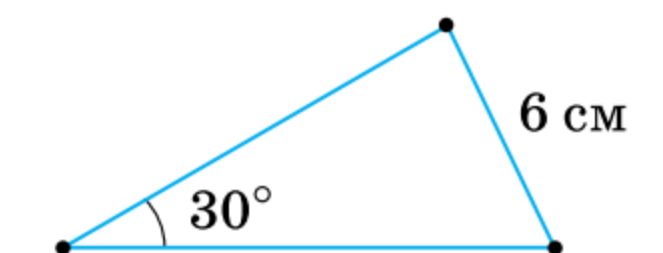
- запишіть відношення кожної сторони трикутника до синуса протилежного кута;
- знайдіть значення синусів цих кутів;
- обчисліть кожне з відношень сторони трикутника до значення синуса протилежного кута і зробіть висновок.



Мал. 133

476'. За даними на малюнку 134:

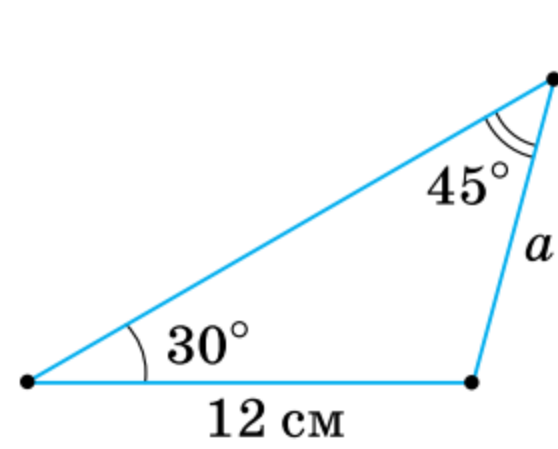
- запишіть відношення заданої сторони до синуса протилежного кута;
- знайдіть значення цього відношення.



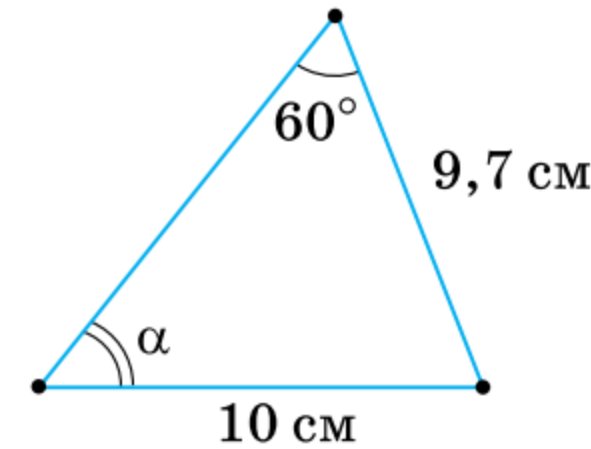
Мал. 134

477'. За даними на малюнках 135, 136 обчисліть:

- сторону a трикутника (мал. 135);
- кут α трикутника (мал. 136).



Мал. 135



Мал. 136

478°. Знайдіть сторону AC трикутника ABC , якщо:



- 1) $c = 4$ см, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$;
- 2) $a = 6$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

479°. Знайдіть сторону AC трикутника ABC , якщо $c = 4$ см, $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 75^\circ$.



480°. Знайдіть кут A трикутника ABC , якщо:

- 1) $a = 2$ см, $b = 4$ см, $\angle B = 60^\circ$;
- 2) $c = 8$ см, $a = 5$ см, $\angle C = 30^\circ$.

481°. Знайдіть кут A трикутника ABC , якщо $b = 6$ см, $a = 4$ см, $\angle B = 45^\circ$.

482°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо проти сторони завдовжки 3 см лежить кут:



- 1) 30° ; 2) 120° ; 3) 135° .

483°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо проти сторони завдовжки 6 см лежить кут 60° .



484°. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 8 см. Знайдіть сторону, яка лежить проти кута:

- 1) 150° ; 2) 45° ; 3) 60° .

485°. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 2 см. Знайдіть сторону, яка лежить проти кута 30° .

486°. Яка зі сторін трикутника ABC (мал. 137) найбільша, а яка — найменша?

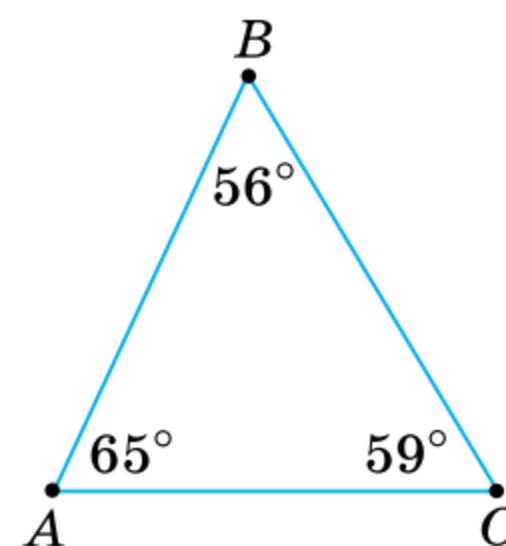
487°. Яка зі сторін трикутника ABC найменша, а яка — найбільша, якщо:

- 1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 20^\circ$;
- 2) $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 85^\circ$;
- 3) $\angle A = 105^\circ$, $\angle C = 32^\circ$?

488°. Порівняйте катети AC і BC прямокутного трикутника ABC , якщо:



- 1) $\angle A = 46^\circ$; 2) $\angle B = 51^\circ$; 3) $\angle A = 65^\circ$.



Мал. 137

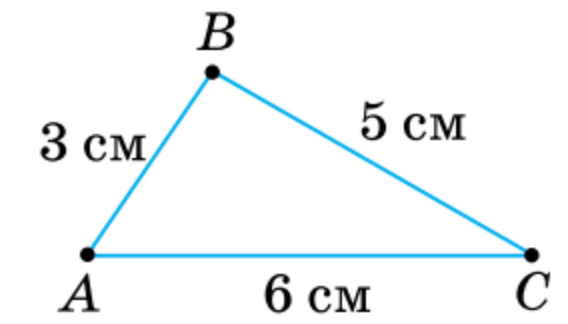


qr.orioncentr.com.ua/sy5Fw

489°. Який з кутів трикутника ABC (мал. 138) найбільший, а який — найменший?

490°. Який з кутів трикутника ABC найбільший, а який — найменший, якщо:

- 1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 7$ см;
- 2) $a = b = c$;
- 3) $a > b > c$?



Мал. 138

491°. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може кут, протилежний до сторони завдовжки 7 см, бути:

- 1) тупим; 2) гострим; 3) прямим?

492°. Знайдіть сторони a і c трикутника ABC , якщо: $b = 5$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$.

493°. Знайдіть сторони a і c трикутника ABC , якщо $b = 1$ см, $\angle A = 100^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.



494°. У трикутній піраміді $SABC$ сторона основи дорівнює 8 см, а протилежний до неї кут — 30° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо основи піраміди.

495°. У трикутній піраміді $SABC$ радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а сторона основи — 6 см. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.

496°. Кути трикутника відносяться як 1 : 2 : 3. Як відносяться його сторони?

497°. Знайдіть сторони b і c трикутника ABC , якщо: $a = 8$ см, $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 3$.

498°. Знайдіть сторони b і c трикутника ABC , якщо: $a = 6$ см, $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 4$.

499°. Сторона трикутника дорівнює a , а прилеглі до неї кути — β і γ . Знайдіть дві інші сторони трикутника.

500°. У трикутнику ABC $a = 12$ см, $b = 5$ см. Чи може $\sin B$ дорівнювати:

- 1) 0,25; 2) 0,5; 3) 0,75?

501°. Знайдіть кути B і C трикутника ABC , якщо:



- 1) $c = 20$ см, $a = 40$ см, $\angle A = 30^\circ$;
- 2) $c = 30$ см, $a = 40$ см, $\angle A = 45^\circ$.

502°. Що більше, основа чи бічна сторона рівнобедреного трикутника, якщо:

- 1) один з його кутів — тупий;
- 2) прилеглий до основи кут менший від 60° ;
- 3) прилеглий до основи кут більший за 60° ?

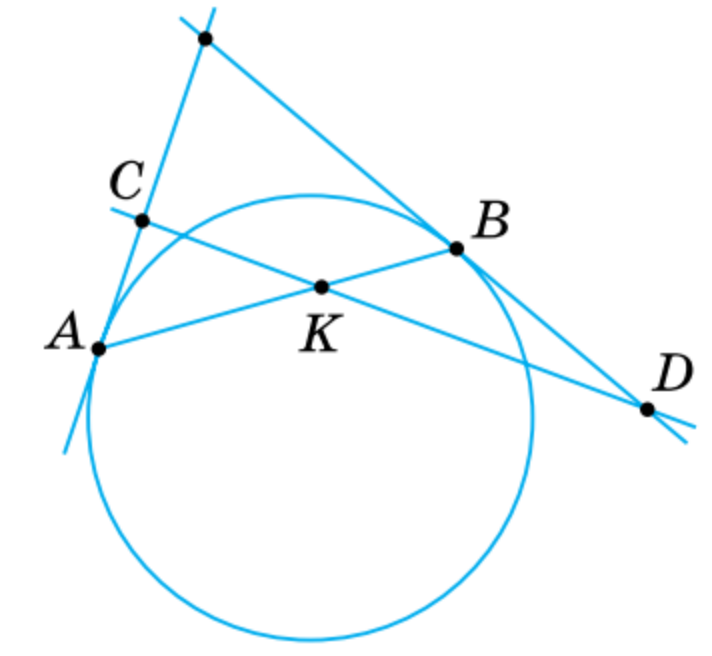
- 503.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а кут при основі — α . Знайдіть довжину бісектриси кута при основі, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 7$ см, $\alpha = 20^\circ$.
- 504.** Знайдіть сторони трикутника ABC , якщо $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, а висота AD дорівнює 3 см.
- 505.** У трикутнику ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Знайдіть сторони a і c , якщо $a - c = 5$.
- 506.** У трикутнику ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Знайдіть сторони a і c , якщо $a + c = 4$.
- 507.** У трикутнику ABC медіана BM утворює зі стороною AB більший кут, ніж зі стороною BC . Доведіть, що $BC > AB$.
- 508.** У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено медіану CM . $\angle ACM > 45^\circ$. Який катет більший: AC чи BC ?
- 509.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а бічна сторона — b . Знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника, якщо:
1) $a = 24$ см, $b = 13$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 10$ см.
- 510.** Діагональ d паралелограма ділить його кут на кути α і β . Знайдіть сторони паралелограма.
- 511.** У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD утворює зі стороною AB більший кут, ніж зі стороною BC . Доведіть, що $BC > AB$.
- 512.** У паралелограмі $ABCD$ $AD = 8$ см, $BD = 4$ см, $\angle A = 22^\circ$. Знайдіть:
1) $\angle BDC$; 2) $\angle DBC$.
- 513.** Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо один з кутів трапеції дорівнює:
1) 135° ; 2) 30° .
- 514.** Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо один з кутів трапеції дорівнює 120° .
- 515*.** У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює бічній стороні, більша основа дорівнює 10 см, а кут при основі — 70° . Знайдіть периметр трапеції.
- 516*.** Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a > b$), а прилеглі до основи a кути — α і β .
- 517*.** Виведіть формули для обчислення довжин відрізків, на які бісектриси кутів трикутника ABC ділять його протилежні сторони.
- 518*.** Доведіть, що медіана трикутника ділить кут при вершині на частини, синуси яких пропорційні до синусів відповідних кутів при основі.

519*. Доведіть, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини.

520*. У колі через кінці хорди AB проведено дотичні, а через її точку K — пряму, що перетинає ці дотичні в точках C і D (мал. 139). Доведіть, що $AC \cdot KD = BD \cdot KC$.

521*. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD кут A більший за кут B . Доведіть, що якщо $AB > CD$, то $BC > AD$.

522*. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) перетинаються в точці O . Доведіть, що якщо $AC > BD$, то $AO > BO$ і $CO > DO$.



Мал. 139

523*. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а кут при вершині — α . Знайдіть радіус кола, що проходить через центр вписаного в цей трикутник кола та кінці основи.

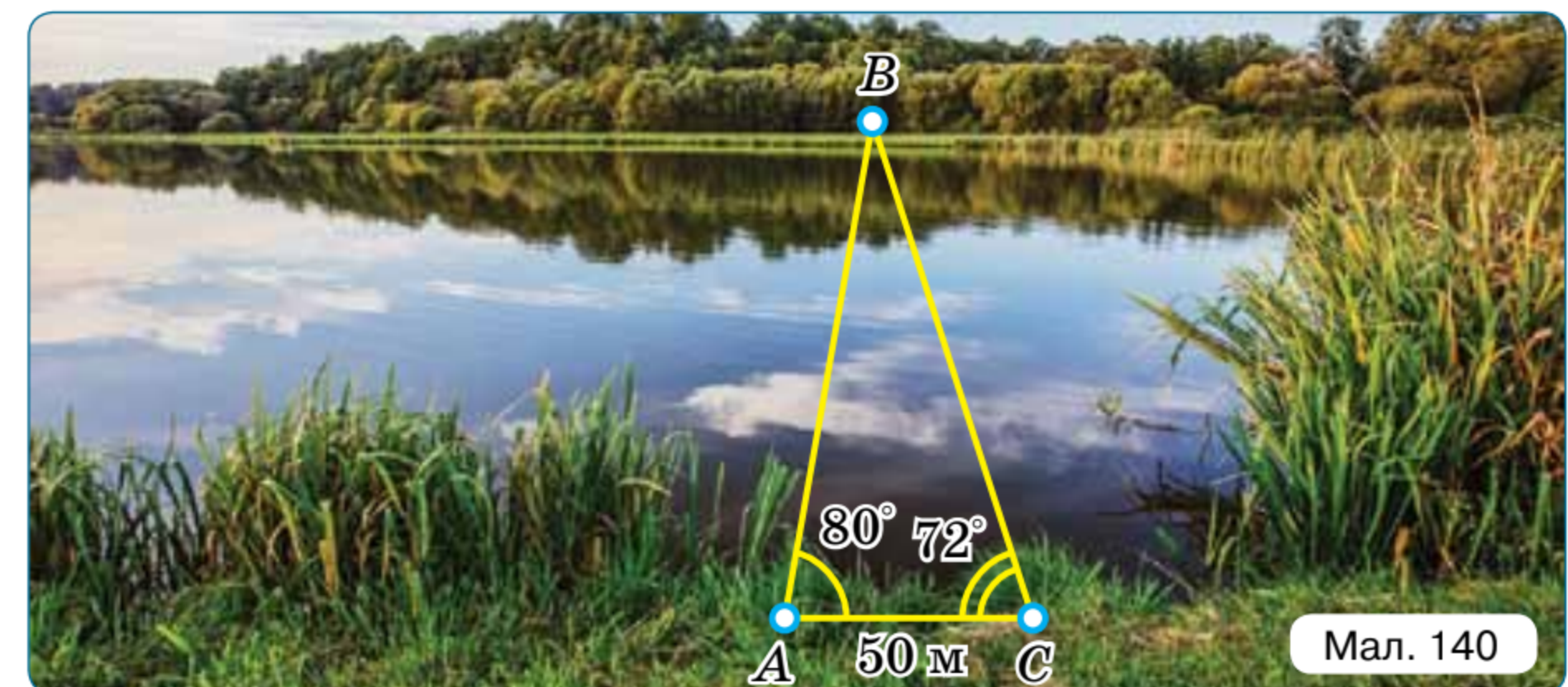
524*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см і 3 см, а бічна сторона — 2 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

525*. У $\triangle ABC$ точка D лежить на стороні AC . Доведіть, що відношення радіусів кіл, описаних навколо $\triangle ABD$ і $\triangle DBC$, не залежить від вибору точки D .

526*. O — точка перетину діагоналей описаного чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що сума радіусів кіл, описаних навколо $\triangle AOB$ і $\triangle COD$, дорівнює сумі радіусів кіл, описаних навколо $\triangle BOC$ і $\triangle AOD$.

Проявіть компетентність

527. Знайдіть відстань від точки A до недоступної точки B , якщо $AC = 50$ м, $\angle CAB = 80^\circ$ і $\angle ACB = 72^\circ$ (мал. 140).



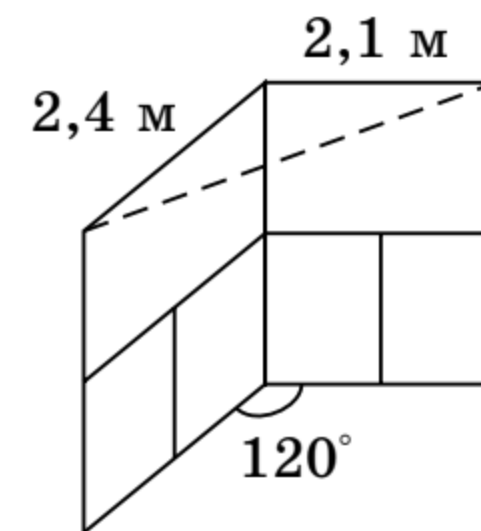
Мал. 140

§ 7. ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

1. Теорема косинусів

qr.orioncentr.com.ua/KBiEj

Ситуація. У кімнаті встановлено кутове вікно, що складається з двох віконних секцій однакової висоти, верхні краї яких утворюють між собою кут 120° . Ширина першої віконної секції дорівнює 2,4 м, а другої — 2,1 м. Мама хоче повісити декоративну штору, натягнувши її по прямій від одного краю вікна до іншого, у такий спосіб відгородивши простір у куті, який утворюють вікна. Чи підійде для цього шмат тканини завширшки 4 м?



Як можна без вимірювань визначити ширину штори?

За допомогою теореми косинусів.



Запам'ятайте!

Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

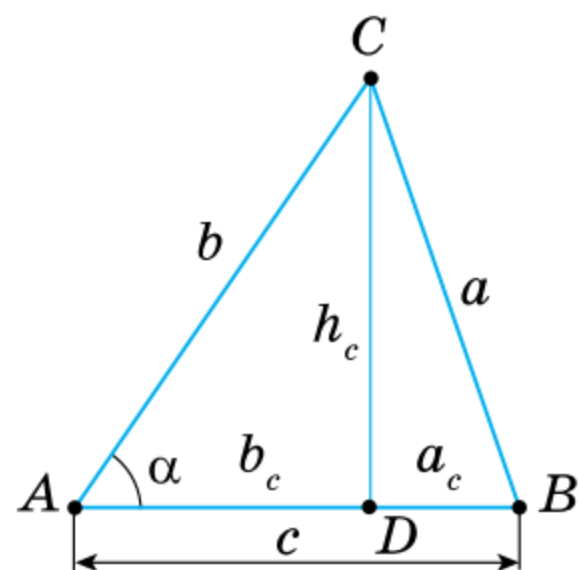
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

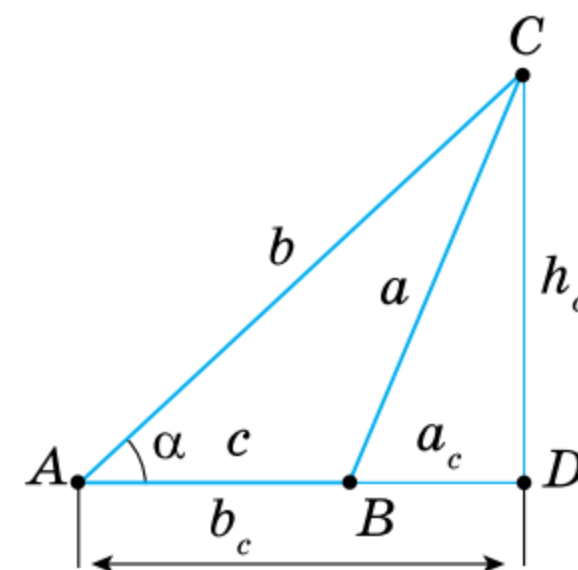
Довести: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Доведення. Кут A трикутника ABC може бути гострим, тупим або прямим. Розглянемо ці випадки.

1. Кут A — гострий. Проведемо висоту CD до сторони AB (мал. 141) або до її продовження (мал. 142). Нехай a_c і b_c — проекції сторін BC і AC на пряму AB , h_c — висота CD . Із прямокутного трикутника BCD : $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)



Мал. 141



Мал. 142

Знайдемо h_c^2 і a_c^2 . Із прямокутного трикутника ACD : $h_c^2 = b^2 - b_c^2$.

Оскільки $a_c = c - b_c$ (мал. 141) або $a_c = b_c - c$ (мал. 142), то в кожному із цих випадків $a_c^2 = (c - b_c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^2$.

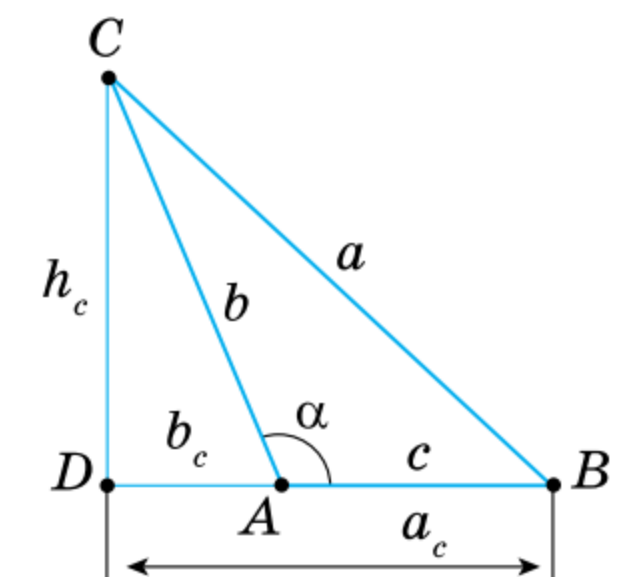
Підставивши вирази для h_c^2 і a_c^2 у рівність (1), маємо: $a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$. Із прямокутного трикутника ACD : $b_c = b \cos A$. Отже, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

2. Кут A — тупий (мал. 143). Так само, як і в першому випадку, проводимо висоту CD і з прямокутного трикутника BCD знаходимо: $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)

Потім знаходимо h_c^2 і a_c^2 . $h_c^2 = b^2 - b_c^2$ (із прямокутного трикутника ACD), $a_c^2 = (c + b_c)^2 = c^2 + 2cb_c + b_c^2$. Підставивши вирази для h_c^2 і a_c^2 у рівність (1), одержимо: $a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 + 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c$. Із прямокутного трикутника ACD : $b_c = b \cos (180^\circ - \angle A) = -b \cos A$. Тоді $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

3. Кут A — прямий. У цьому випадку $\cos A = \cos 90^\circ = 0$. За теоремою Піфагора, маємо: $a^2 = b^2 + c^2$.

Тоді $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.



Мал. 143

Задача 1 У трикутнику дано сторони: $a = 5$, $b = 8$ і $\angle C = 60^\circ$ між ними. Знайдіть сторону c .

Розв'язання За теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0,5 = 49, c = \sqrt{49} = 7.$$



А якої ширини має бути штора в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

$\approx 3,9$ м.



2. Знаходження кутів трикутника

qr.orioncentr.com.ua/c2h51



Як знайти кути трикутника за його трьома сторонами?



Застосувати теорему косинусів.



Задача 2 Дано сторони трикутника: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Знайдіть $\angle A$.

Розв'язання З рівності $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ знаходимо:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} \approx 0,714.$$

Звідси $\angle A \approx 44^\circ$.

Так само можна обчислити $\angle B$ і $\angle C$.



За допомогою теореми косинусів можна знайти:

- сторону трикутника за двома його сторонами та кутом між ними (задача 1);
- кути трикутника за трьома його сторонами (задача 2).



Чи можна визначити вид трикутника за кутами, знаючи лише його сторони?

Поміркуємо.



Якщо $\angle A$ — гострий, то $\cos A > 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A < b^2 + c^2$.

Якщо $\angle A$ — прямий, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2$.

Якщо $\angle A$ — тупий, то $\cos A < 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A > b^2 + c^2$.

Правильним є і обернене твердження.



$\angle A$ — **гострий**, якщо $a^2 < b^2 + c^2$;

$\angle A$ — **прямий**, якщо $a^2 = b^2 + c^2$;

$\angle A$ — **тупий**, якщо $a^2 > b^2 + c^2$.

Наприклад, сторони трикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Прямий або тупий кут може лежати проти більшої сторони. Тому визначимо вид кута, що лежить проти сторони 4 см. $4^2 > 2^2 + 3^2$. Отже, цей кут тупий, а трикутник — тупокутний.

Дізнайтеся більше

1. Поміркуємо над рівністю $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Вираз $b \cos A$ дорівнює за модулем проекції b_c сторони AC на сторону AB (мал. 141) або її продовження (мал. 142). Знак виразу $b \cos A$ залежить від кута A : якщо кут A гострий, то беремо «+», якщо тупий, то «-». Звідси маємо наслідок: **квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію іншої**. Знак «+» беремо тоді, коли протилежний кут тупий, а знак «-», коли гострий.

2. Теорему косинусів називають іноді *узагальненою теоремою Піфагора*. Така назва пояснюється тим, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів. Справді, якщо в трикутнику $\angle A$ — прямий, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ і з рівності $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ одержимо: $a^2 = b^2 + c^2$.

3. Теорему косинусів можна довести через скалярне множення векторів.

Нехай на сторонах трикутника ABC , у якому $\angle BAC = \alpha$ й сторони мають довжини a , b і c , задано вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ (мал. 144).

Виразимо, наприклад, вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$.

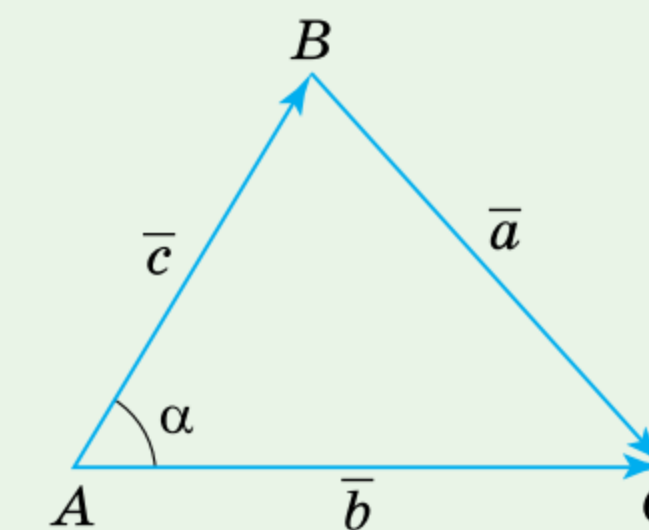
Маємо: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Тоді $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

Знайдемо скалярний квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2 = (\vec{b} - \vec{c})(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{b}\vec{c}.$$

В одержаній рівності розкриємо скалярний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$ за означенням: $\vec{b}\vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha$, та скористаємось тим, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини. Тоді одержимо:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha \text{ або } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$



Мал. 144

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
теорема косинусів	law of cosines	Kosinussatz, m	loi des cosinus

qr.orioncentr.com.ua/ChkV5

Пригадайте головне

1. Сформулюйте теорему косинусів.
2. Сформулюйте дві задачі, які можна розв'язати за допомогою теореми косинусів.
3. Як визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний) за даними його сторонами?

Усне тренування

Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) 3^2 + 4^2 - 10; & 5^2 + 12^2 + 31; & 7^2 + 24^2 - 600; \\ 2) 9^2 + 40^2 - 100; & 11^2 + 60^2 + 50; & 20^2 + 21^2 + 59. \end{array}$$

Розв'яжіть задачі

528'. Який із записів правильний:

- 1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$;
- 2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B$;
- 3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$?

529'. Чи правильно, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:

1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 = b^2 + c^2$; 3) $a^2 > b^2 + c^2$?

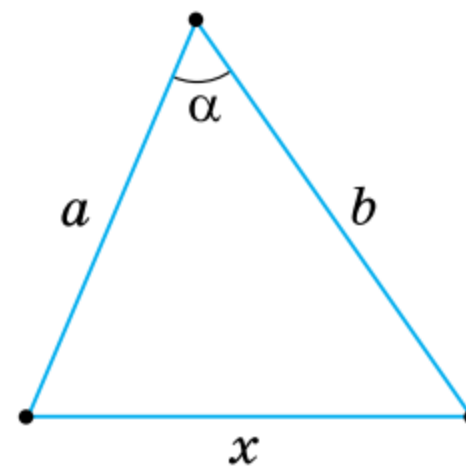
530'. Чи правильно, що трикутник ABC є гострокутним, якщо:

1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 = b^2 + c^2$; 3) $a^2 > b^2 + c^2$?

531'. Чи правильно, що трикутник ABC є тупокутним, якщо:

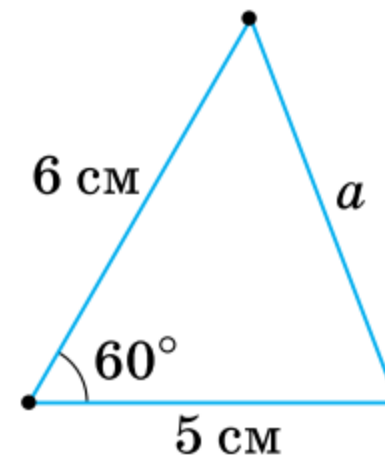
1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 = b^2 + c^2$; 3) $a^2 > b^2 + c^2$?

532'. Скориставшись теоремою косинусів, запишіть, чому дорівнює квадрат сторони x трикутника (мал. 145).



Мал. 145

533'. За даними на малюнку 146 обчисліть сторону a трикутника.



Мал. 146

534'. a, b, c — сторони трикутника ABC . За теоремою косинусів запишіть квадрат сторони:

- 1) b , якщо $\angle B = 45^\circ$; 6) c , якщо $\angle C = 90^\circ$;
- 2) b , якщо $\angle B = 135^\circ$; 7) a , якщо $\angle A = 30^\circ$;
- 3) b , якщо $\angle B = 90^\circ$; 8) a , якщо $\angle A = 150^\circ$;
- 4) c , якщо $\angle C = 60^\circ$; 9) a , якщо $\angle A = 90^\circ$;
- 5) c , якщо $\angle C = 120^\circ$;

535'. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC , якщо:



- 1) $b = 3$ см, $c = 4$ см, $\angle A = 60^\circ$;
- 2) $b = 3$ см, $c = 4$ см, $\angle A = 120^\circ$;
- 3) $b = 3$ см, $c = 4$ см, $\angle A = 90^\circ$;
- 4) $a = 8\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\angle B = 30^\circ$;
- 5) $a = 8\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\angle B = 150^\circ$;
- 6) $a = 8\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\angle B = 90^\circ$.



qr.orioncentr.com.ua/LWOq0

536'. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC , якщо:



- 1) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $\angle C = 45^\circ$; 3) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $\angle C = 90^\circ$.
- 2) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $\angle C = 135^\circ$;

537'. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC , якщо:

- 1) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $\angle C = 120^\circ$;
- 2) $a = 2$ см, $c = 3\sqrt{3}$ см, $\angle B = 150^\circ$.

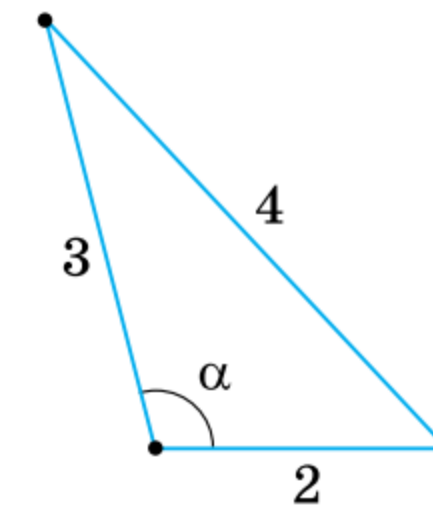
538'. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC , якщо $b = 8$ см, $c = 12$ см, $\angle A = 115^\circ$.



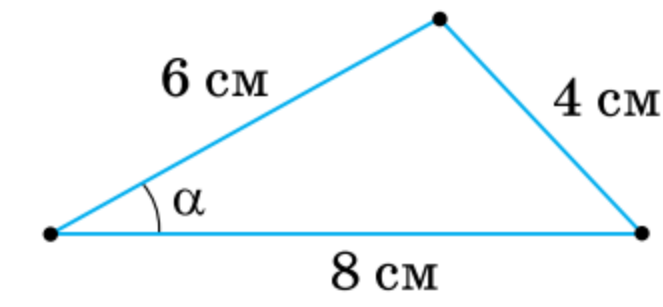
539'. Знайдіть $\cos B$ з рівності $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

540'. За даними на малюнку 147 обчисліть $\cos \alpha$.

541'. За даними на малюнку 148 обчисліть кут α трикутника.



Мал. 147



Мал. 148

542'. Обчисліть косинуси кутів трикутника ABC , якщо його сторони дорівнюють:



- 1) $a = 8$ см, $b = 9$ см, $c = 10$ см;
- 2) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 8$ см;
- 3) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.



qr.orioncentr.com.ua/JFVVG

543'. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо його сторони дорівнюють:

- 1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 2$ см, $c = 4$ см.

544'. Знайдіть кути трикутника, якщо його сторони дорівнюють 5 см, 6 см, 7 см.



545'. За яких значень кута α квадрат сторони трикутника, що лежить проти цього кута:

- 1) менший від суми квадратів двох інших сторін;
- 2) дорівнює цій сумі;
- 3) більший за неї?

546'. Не обчислюючи кутів, установіть вид трикутника (відносно кутів), якщо його сторони дорівнюють:



- 1) 11 см, 17 см, 21 см; 3) 0,3 см, 0,5 см, 0,4 см.
- 2) 8 см, 10 см, 12 см;

547'. Доведіть, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

548'. На сторонах кута A позначено дві точки M і N . Знайдіть відстань MN , якщо:

- 1) $AM = 17$ см, $AN = 12\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45^\circ$;
- 2) $AM = 7\sqrt{3}$ см, $AN = 10$ см, $\angle A = 30^\circ$.

549'. Сторони паралелограма дорівнюють a і b , а один з кутів — α . Знайдіть діагоналі паралелограма.

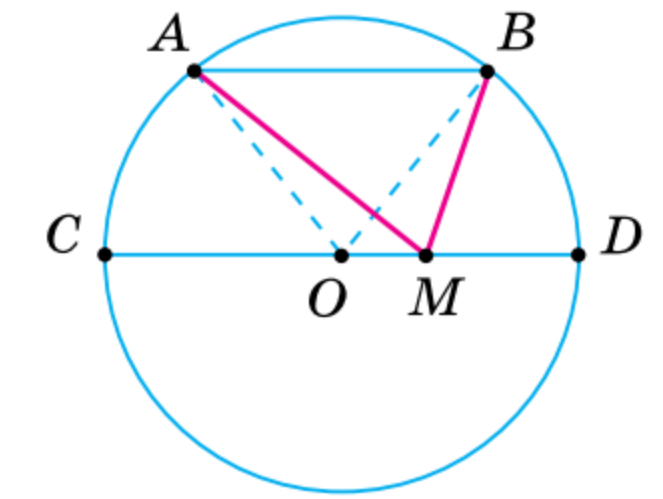
550'. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо кут A дорівнює: 1) 60° ; 2) 48° ; 3) 125° .



- 551.** Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють: $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. На катеті BC побудовано рівносторонній трикутник BCD . Знайдіть довжину відрізка AD (розгляньте два випадки).
- 552.** Знайдіть невідому сторону трикутника ABC , якщо:
 1) $a = 5$ см, $b = 7$ см, $\sin C = 0,8$; 2) $b = 4$ см, $c = 10$ см, $\sin A = 0,6$. Скільки розв'язків має задача?
- 553.** Скориставшись формулою $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, дослідіть, як змінюється сторона a зі зростанням кута α від 0° до 180° (при сталих значеннях b і c).
- 554.** a, b, c — сторони трикутника ABC . Доведіть:
 1) якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то $\angle A$ — гострий;
 2) якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то $\angle A$ — тупий.
- 555.** Знайдіть найбільший кут трикутника ABC , якщо:
 1) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см;
 3) $a = 40$ см, $b = 13$ см, $c = 37$ см.
- 556.** Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.
- 557.** Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як $3 : 5$, а сторони дорівнюють 13 см і 16 см.
- 558.** Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться як $1 : 2$, а діагоналі дорівнюють 9 см і 13 см.
- 559.** Одна зі сторін паралелограма на 1 см довша за іншу, а його діагоналі дорівнюють 7 см і 11 см. Знайдіть сторони паралелограма.
- 560.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 11 см. Одна з її бічних сторін дорівнює 8 см й утворює з основою кут 60° . Знайдіть діагоналі трапеції.
- 561*.** Доведіть, що медіану трикутника можна обчислити за формулою $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.
- 562*.** Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 15 см, а кут між ними — 120° . Знайдіть медіану, проведену до третьої сторони трикутника.
- 563*.** Сторона трикутника дорівнює 26 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 15 см і 30 см. Знайдіть третю медіану трикутника.
- 564*.** Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см. Знайдіть діагональ паралелограма, якщо інша його діагональ дорівнює 9 см.

- 565*.** До даного кола радіусом R дотикаються два рівні менші кола радіусом r : одне — зсередини, інше — зовні. Дуга між точками дотику містить 60° . Знайдіть відстань між центрами менших кіл.

- 566*.** У колі з центром O хорда AB паралельна діаметру CD (мал. 149). На діаметрі або його продовженні позначено довільну точку M . Доведіть, що сума $AM^2 + BM^2$ не залежить від положення хорди при заданому положенні точки M .

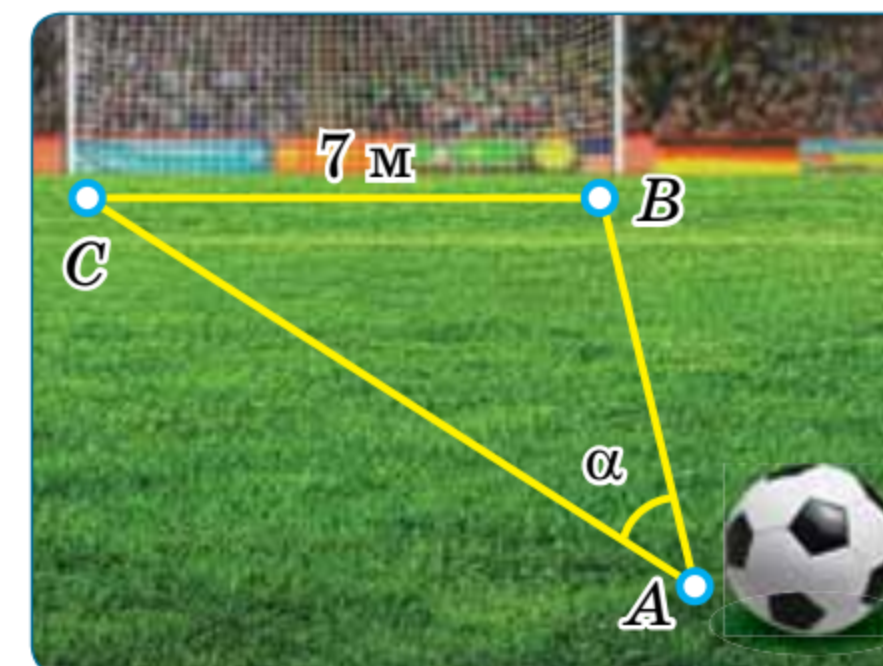


Мал. 149

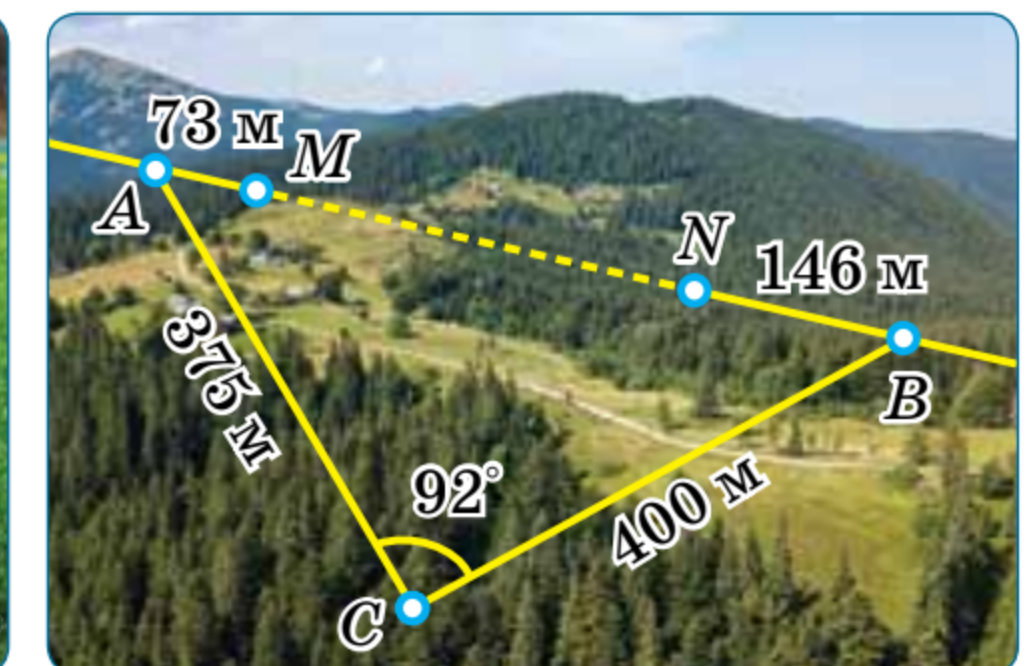
- 567*.** Для сторін трикутника виконується рівність $\frac{a^2 - (b - c)^2}{b} = 1$. Доведіть, що один із кутів трикутника дорівнює 60° .

Проявіть компетентність

- 568.** Футбольний м'яч перебуває в точці A футбольного поля на відстані $4,5$ м і $9,4$ м від основ B і C стійок воріт (мал. 150). Футболіст направляє м'яч у ворота. Знайдіть кут α влучення м'яча у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7 м.
- 569*.** На будівництві залізниці на ділянці AB потрібно прокласти тунель MN (мал. 151). За даними на малюнку поясніть, як знайти довжину й напрямок тунелю. Обчисліть довжину тунелю.
- 570.** Із пунктів A і B на березі моря, відстань між якими дорівнює 3 км, спостерігають за пароплавом, що рухається прямолінійно й рівномірно. У певний час пароплав було видно з пункту A під кутом 102° до напрямку AB , а з пункту B — під кутом 51° до напрямку BA . Через 10 хв кути змінилися й стали дорівнювати відповідно 84° і 74° . Знайдіть швидкість пароплава.



Мал. 150



Мал. 151

§ 8. ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВІДОМИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТРИКУТНИКА

1. Алгоритми розв'язування трикутників

Ситуація. У дідуса на даху будинку встановлено телевізійну антену, яка кріпиться до даху двома розтяжками. Одна з них вийшла з ладу, і дідусь попросив онука Івана визначити довжину шматка дроту для заміни зіпсованої розтяжки. За схемою, яка збереглася в дідуса, Іван з'ясував, що дві розтяжки мають різну довжину, відстань між точками їх кріплення до даху дорівнює 4,8 м. Робоча розтяжка завдовжки 3,84 м утворює кут 52° з прямою кріплення розтяжок на даху.



qr.orioncentr.com.ua/sn1Um



Як знайти довжину зіпсованої розтяжки?

За допомогою теореми косинусів.



Довжина розтяжки дорівнює 3,88 м.

Задача, яку розв'язував Іван, є частиною задачі на розв'язування трикутника. Якби Івану треба було знайти й інші невідомі елементи трикутника (зокрема два невідомі кути), то це була б повна задача на розв'язування трикутника.

Запам'ятайте!

Розв'язати трикутник означає знайти невідомі сторони та кути трикутника за відомими його сторонами й кутами.



Можливі такі види задач, у яких вимагається розв'язати трикутник:

- 1) за двома сторонами й кутом між ними;
- 2) за стороною і прилеглими до неї кутами;
- 3) за трьома сторонами;
- 4) за двома сторонами й кутом, прилеглим до однієї з них.

Задача 1 Дано: $b = 93$, $c = 65$, $\angle A = 42^\circ$ (мал. 152).

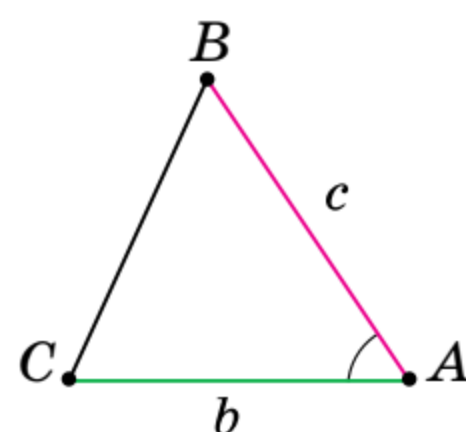
Знайти: a , $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання 1. За теоремою косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

$$a^2 = 93^2 + 65^2 - 2 \cdot 93 \cdot 65 \cdot \cos 42^\circ = 8649 + 4225 - 12\,090 \cdot 0,743 \approx 3890,$$

$$a \approx \sqrt{3890} \approx 62.$$



Мал. 152

2. Застосувавши теорему косинусів, одержимо:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{3890 + 4225 - 8649}{2 \cdot 62 \cdot 65} \approx -0,066.$$

Отже, $\angle B$ — тупий. Знайдемо гострий кут B_1 , косинус якого дорівнює 0,066. $\angle B_1 \approx 86^\circ$. Тоді $\angle B = 180^\circ - \angle B_1 \approx 180^\circ - 86^\circ \approx 94^\circ$.

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B \approx 180^\circ - 42^\circ - 94^\circ \approx 44^\circ.$$

Задача 2 Дано: $c = 40$, $\angle A = 28^\circ$, $\angle B = 31^\circ$ (мал. 153). Знайти: a , b , $\angle C$.

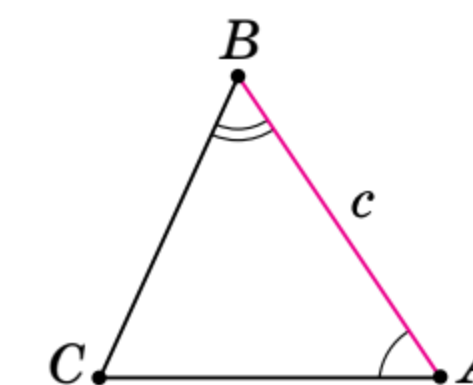
Розв'язання 1. $\angle C = 180^\circ - 28^\circ - 31^\circ = 121^\circ$.

2. Із рівності $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ знаходимо сторону a :

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 28^\circ}{\sin 121^\circ} = \frac{40 \cdot 0,469}{0,857} \approx 22.$$

3. Із рівності $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ знаходимо сторону b :

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 121^\circ} = \frac{40 \cdot 0,515}{0,857} \approx 24.$$



Мал. 153

Задача 3 Дано: $a = 18$, $b = 24$, $c = 13$ (мал. 154). Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання 1. За теоремою косинусів знаходимо $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{576 + 169 - 324}{2 \cdot 24 \cdot 13} = \frac{421}{624} \approx 0,675, \angle A \approx 48^\circ.$$

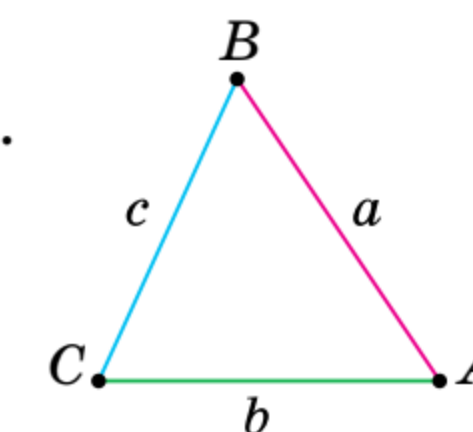
2. За теоремою косинусів:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{324 + 169 - 576}{2 \cdot 18 \cdot 13} = \frac{-83}{468} \approx -0,177.$$

Знайдемо гострий кут B_1 , косинус якого дорівнює 0,177.

$$\angle B_1 \approx 80^\circ. \text{ Тоді } \angle B = 180^\circ - \angle B_1 \approx 180^\circ - 80^\circ \approx 100^\circ.$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B \approx 180^\circ - 48^\circ - 100^\circ \approx 32^\circ.$$



Мал. 154

Задача 4 Дано: $a = 70$, $b = 65$, $\angle A = 40^\circ$ (мал. 155). Знайти: c , $\angle B$, $\angle C$.

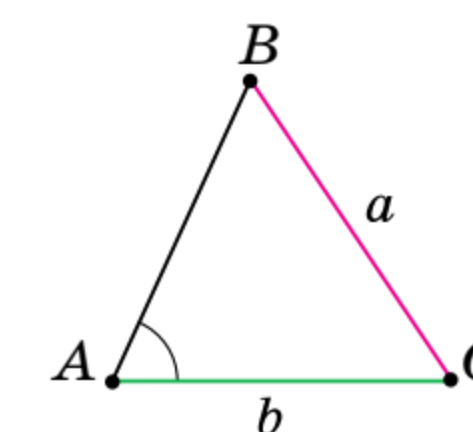
Розв'язання 1. За теоремою синусів:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{65 \cdot \sin 40^\circ}{70} \approx \frac{65 \cdot 0,643}{70} \approx 0,597.$$

Цьому значенню синуса відповідають два кути: 37° і 143° . Оскільки $b < a$, то $\angle B < \angle A$. Тоді $\angle B$ — гострий: $\angle B \approx 37^\circ$.

$$\angle C \approx 180^\circ - 37^\circ - 40^\circ \approx 103^\circ.$$

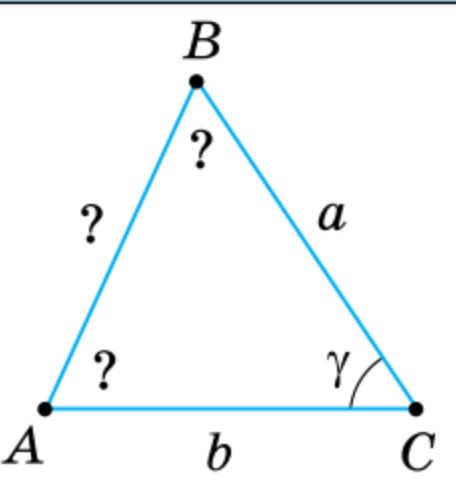
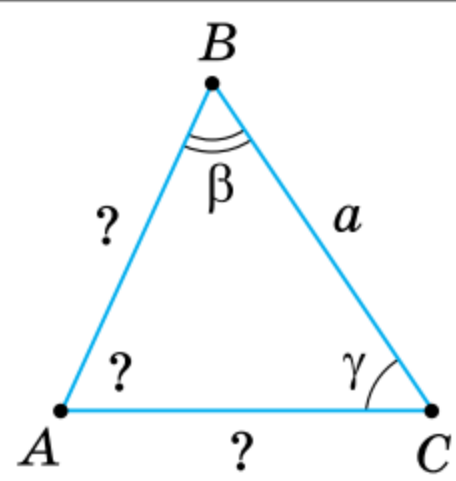
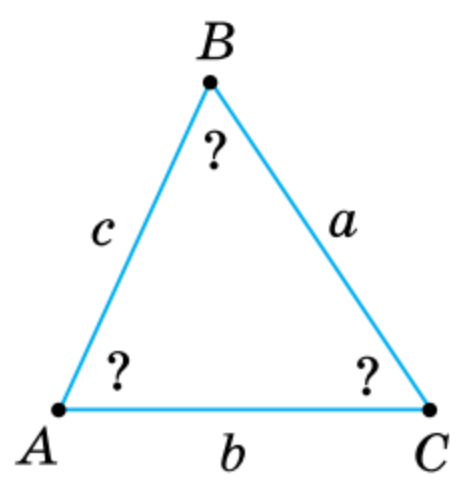
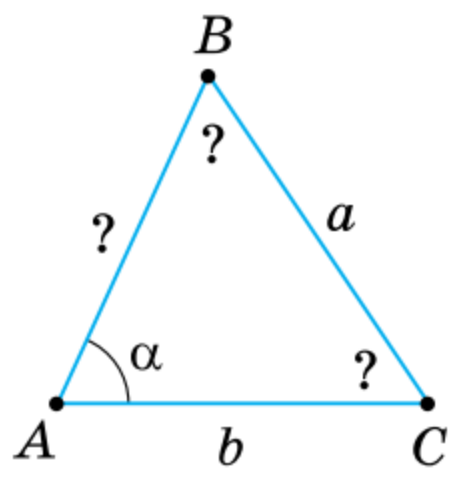
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{70 \cdot \sin 103^\circ}{\sin 40^\circ} \approx \frac{70 \cdot 0,974}{0,643} \approx 106.$$



Мал. 155

Алгоритми розв'язування задач наведено в таблиці 19.

Таблиця 19

Умова задачі	Алгоритм розв'язування
 Дано: $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$.	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$, 2) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $\angle B = 180^\circ - \angle A - \gamma$.
 Дано: $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Знайти: AC, AB, $\angle A$.	1) $\angle A = 180^\circ - \beta - \gamma$, 2) $AC = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin A}$, 3) $AB = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin A}$.
 Дано: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$.
 Дано: $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AB, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\sin B = \frac{b \sin \alpha}{a}$, 2) $\angle C = 180^\circ - \alpha - \angle B$, 3) $AB = \frac{a \cdot \sin C}{\sin \alpha}$.

2. Розв'язування прикладних задач

qr.orioncentr.com.ua/ynpj1



Чи можна поділити на види прикладні задачі, у яких треба розв'язати трикутник?



Так. Розглянемо деякі з них.



2.1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна

Задача 5 Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас річкою (мал. 156).

Розв'язання На горизонтальній прямій, яка проходить через основу вежі, позначимо дві точки A_1 і C_1 . Вимірюємо $A_1C_1 = b$, $\angle DAB = \alpha$ і $\angle DCB = \beta$. За теоремою синусів, із трикутника ABC одержимо:

$$AB = \frac{AC \cdot \sin \beta}{\sin B} = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Із прямокутного трикутника ABD маємо: $BD = AB \cdot \sin \alpha$.

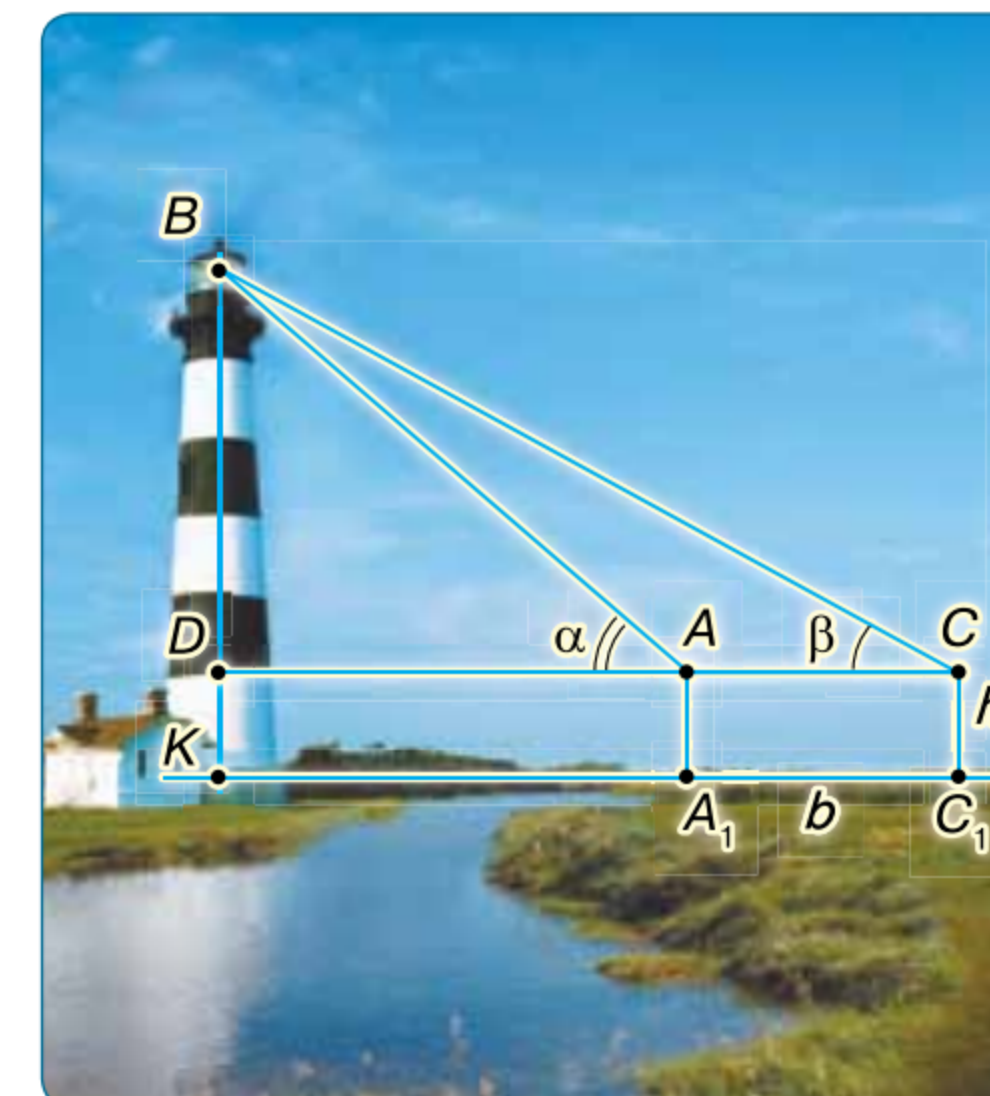
$$\text{Отже, } BD = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Додавши до BD висоту приладу $AA_1 = DK = h$, яким вимірювали кути, одержимо формулу для обчислення висоти вежі:

$$BK = BD + DK = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h.$$

Нехай результати вимірювань такі: $b = 12$ м, $h = 1,5$ м, $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 37^\circ$.

$$\text{Тоді: } BK = \frac{12 \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 37^\circ}{\sin 5^\circ} + 1,5 \approx \frac{12 \cdot 0,669 \cdot 0,602}{0,087} + 1,5 \approx 57 \text{ (м)}.$$



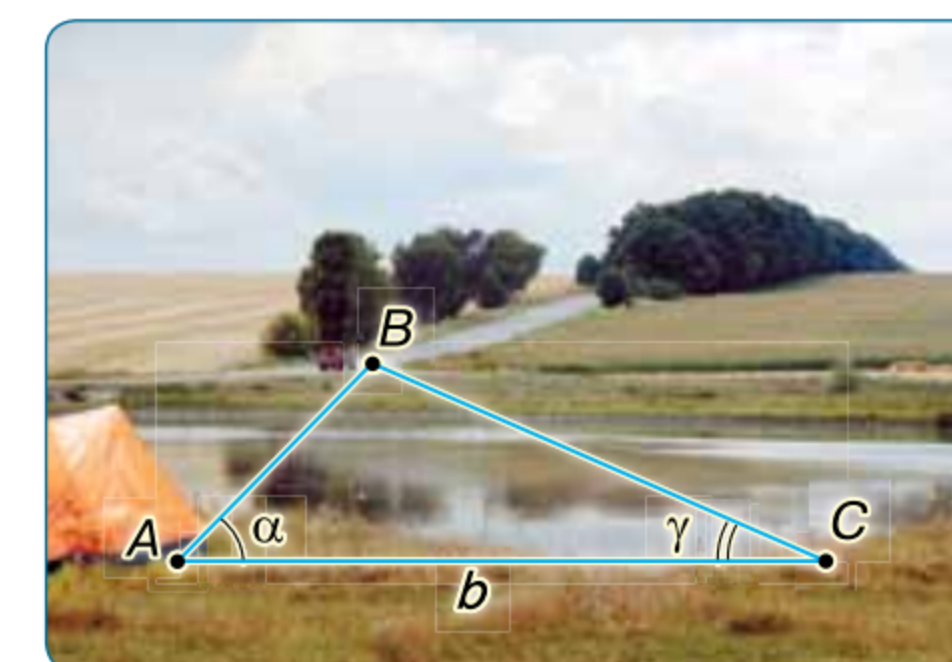
Мал. 156

2.2. Задачі на знаходження відстані до недоступного пункту

Задача 6 Знайдіть відстань від пункту A до недоступного пункту B (мал. 157).

Розв'язання Обираємо на місцевості таку точку C , щоб з неї було видно пункт B і можна було виміряти відстань AC .

Вимірюємо $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Знаходимо $\angle B = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$.



Мал. 157

За теоремою синусів:

$$AB = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin(180^\circ - (\alpha + \gamma))} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Нехай результати вимірювань такі: $b = 90$ м, $\alpha = 46^\circ$, $\gamma = 25^\circ$.

$$\text{Тоді } AB = \frac{90 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 71^\circ} \approx \frac{90 \cdot 0,423}{0,946} \approx 40 \text{ (м)}.$$

2.3. Задачі на знаходження відстані між двома доступними пунктами (якщо безпосереднє вимірювання неможливе)

Задача 7 Знайдіть відстань між пунктами B і C , розділеними ставком (мал. 158).

Розв'язання Обираємо на місцевості точку A так, щоб можна було виміряти відстані AB і AC . Вимірюємо $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAC = \alpha$.

За теоремою косинусів:

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

Нехай результати вимірювань такі: $b = 88$ м, $c = 90$ м, $\alpha = 28^\circ$.

$$\text{Тоді } BC = \sqrt{88^2 + 90^2 - 2 \cdot 88 \cdot 90 \cdot \cos 28^\circ} \approx 43 \text{ (м)}.$$

Дізнайтеся більше

Поміркуємо над задачею четвертого виду.

Дано: $a, b, \angle A$.

Знайти: $c, \angle B, \angle C$.

Відкладемо на стороні кута A відрізок $AC = b$ (мал. 159), а потім із точки C як із центра опишемо коло радіусом a .

Можливі такі випадки.

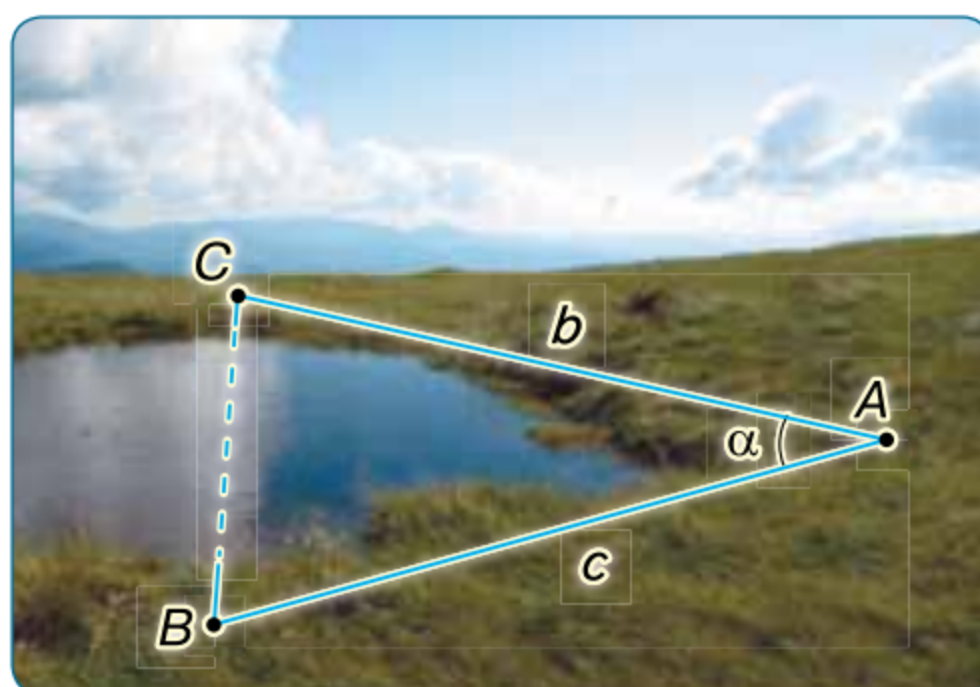
1. Коло не перетинає сторону AB кута A . Задача розв'язку не має.

2. Коло дотикається до сторони AB в точці D . Задача має один розв'язок — прямокутний $\triangle ACD$.

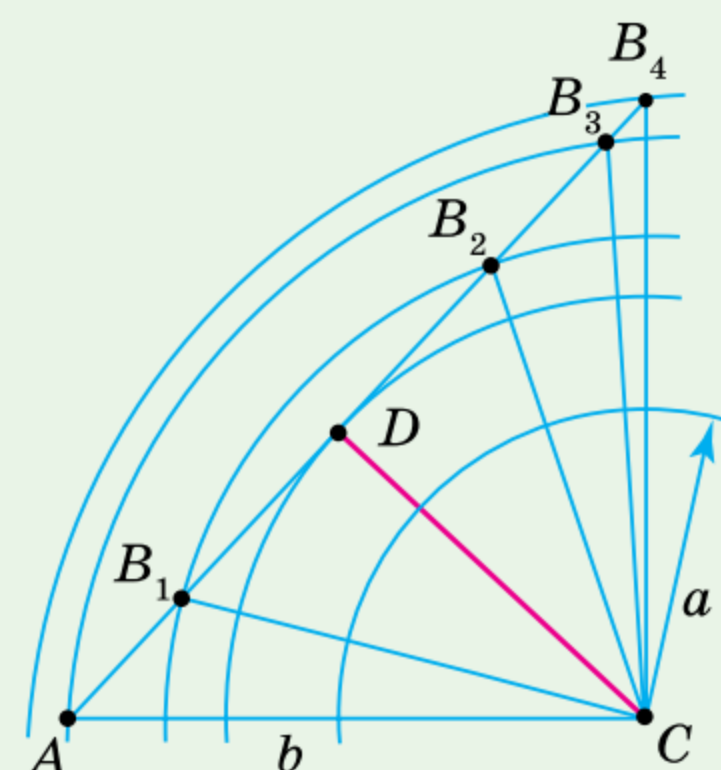
3. Коло перетинає сторону AB у двох точках B_1 і B_2 . Задача має два розв'язки — $\triangle AB_1C$ і $\triangle AB_2C$.

4. Коло перетинає сторону AB в точці B_3 і проходить через вершину A кута. Задача має один розв'язок — рівнобедрений $\triangle AB_3C$.

5. Коло перетинає сторону AB в точці B_4 . Задача має один розв'язок — $\triangle AB_4C$.



Мал. 158



Мал. 159

Виникає запитання: Чи не можна лише на основі числових даних задачі, не виконуючи вказаних побудов, визначити, скільки розв'язків вона має?

Помічаємо, що якщо $\angle A < 90^\circ$, то з прямокутного трикутника ACD (мал. 159): $CD = b \sin A$. Тоді випадки 1–5 запишемо так:

1. $a < CD$, тобто $a < b \sin A$. Задача розв'язку не має, оскільки $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$.

2. $a = b \sin A$. $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$ і $\angle B = 90^\circ$. Задача має один розв'язок.

3. $b \sin A < a < b$. Задача має два розв'язки, оскільки $\angle B$ може бути як гострим, так і тупим.

4. $a = b$. Задача має один розв'язок. $\angle A = \angle B$ як кути рівнобедреного трикутника.

5. $a > b$. $\angle B$ — гострий, оскільки він лежить проти меншої сторони трикутника. Задача має один розв'язок.

Якщо $\angle A > 90^\circ$, то маємо випадок 5, оскільки проти тупого кута завжди лежить більша сторона.

Розглянемо приклад.

Дано: $a = 71$, $b = 96$, $\angle A = 26^\circ$.

Знайти: $c, \angle B, \angle C$.

Знайдемо: $b \sin A = 96 \sin 26^\circ \approx 96 \cdot 0,438 \approx 42 < 71$.

Отже, $b \sin A < a < b$ і задача має два розв'язки.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
прикладна задача	applied problem	Anwendungs- aufgabe, f	problème concret

qr.orioncentr.com.ua/QhmVP

Пригадайте головне

1. Що означає — розв'язати трикутник?
2. Які види задач стосуються розв'язування трикутників?
3. Запишіть алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.
4. Назвіть види прикладних задач, що потребують розв'язування трикутників.

Усне тренування

1. Обчисліть:

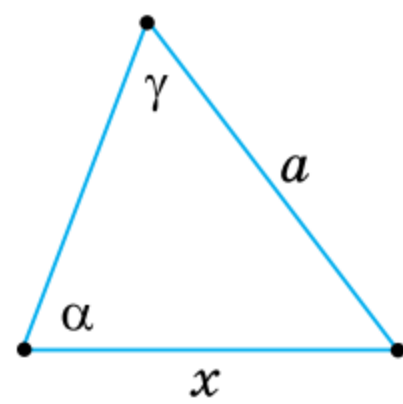
$$123^\circ + 57^\circ; \quad 34^\circ + 146^\circ; \quad 158^\circ + 22^\circ; \quad 51^\circ + 129^\circ.$$

2. Знайдіть x , якщо:

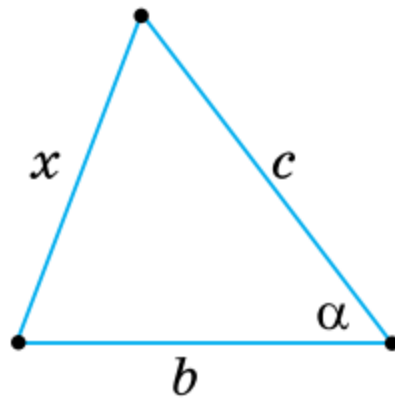
$$\frac{x}{7} = \frac{3}{10}; \quad \frac{4}{x} = \frac{2}{5}; \quad \frac{x}{10} = 8; \quad \frac{15}{x} = 75.$$

Розв'яжіть задачі

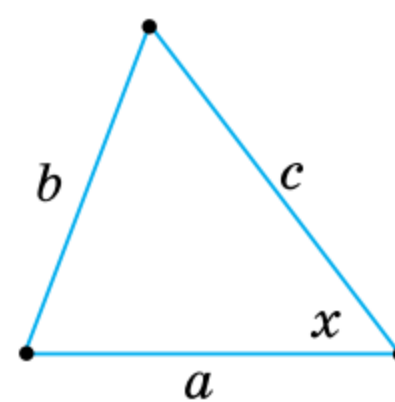
571'. За даними на малюнках 160–162 запишіть формули для обчислення елемента x трикутника.



Мал. 160

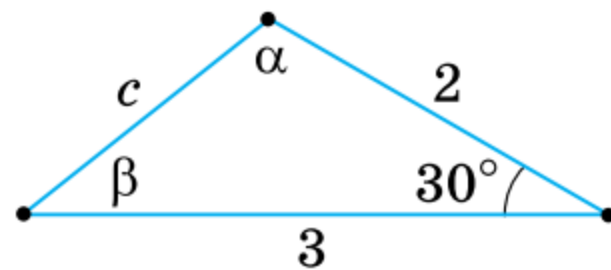


Мал. 161

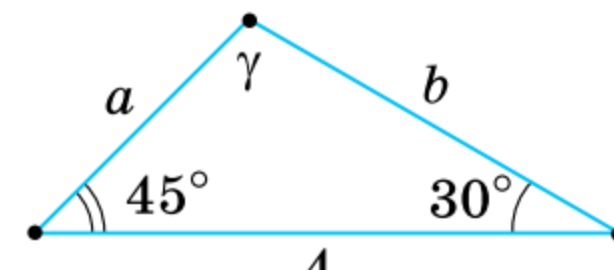


Мал. 162

572'. За даними на малюнках 163 і 164 обчисліть невідомі сторони та кути трикутника.



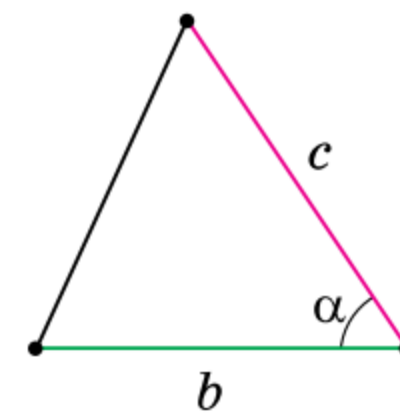
Мал. 163



Мал. 164

573'. Дано дві сторони трикутника й кут між ними. Знайдіть два інші кути і третю сторону, якщо:

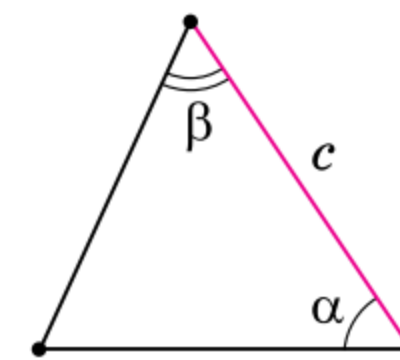
- 1) $a = 6, c = 8, \beta = 30^\circ$;
- 2) $b = 4, c = 5, \alpha = 60^\circ$ (мал. 165);
- 3) $a = 5, b = 7, \gamma = 105^\circ$.



Мал. 165

574'. Дано дві сторони трикутника та кут між ними. Знайдіть два інші кути і третю сторону, якщо:

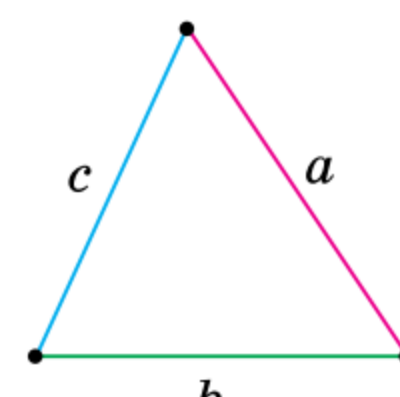
- 1) $a = 3, b = 2, \gamma = 45^\circ$;
- 2) $b = 3, c = 4, \alpha = 120^\circ$.



Мал. 166

575'. Дано сторону і прилеглі до неї кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони, якщо:

- 1) $a = 4, \beta = 30^\circ, \gamma = 45^\circ$;
- 2) $c = 2, \alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$ (мал. 166);
- 3) $b = 10, \alpha = 20^\circ, \gamma = 110^\circ$.



Мал. 167

576'. Дано сторону і прилеглі до неї кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони, якщо:

- 1) $a = 7, \beta = 30^\circ, \gamma = 48^\circ$;
- 2) $c = 5, \alpha = 28^\circ, \beta = 122^\circ$.

577'. Дано три сторони трикутника (мал. 167). Знайдіть його кути, якщо:

- 1) $a = 3, b = 6, c = 5$;
- 2) $a = 4, b = 3, c = 6$;
- 3) $a = 4, b = 7, c = 5$.

578'. Дано три сторони трикутника. Знайдіть його кути, якщо:

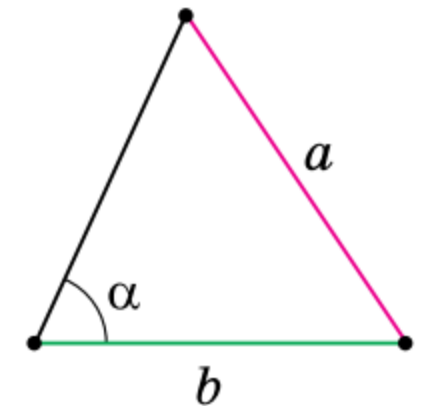
- 1) $a = 2, b = 3, c = 4$;
- 2) $a = 6, b = 8, c = 7$.

579'. У паралелограмі діагональ дорівнює d , сторона — a , а кут між ними — α . Знайдіть невідомі діагональ, сторону й кути паралелограма, якщо:

- 1) $d = 10, a = 6, \alpha = 20^\circ$;
- 2) $d = 12, a = 5, \alpha = 35^\circ$;
- 3) $d = a = 5, \alpha = 32^\circ$.

580'. У трикутнику дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них. Знайдіть два інші кути і третю сторону трикутника, якщо:

- 1) $a = 12, b = 10, \alpha = 40^\circ$ (мал. 168);
- 2) $a = 40, c = 30, \alpha = 45^\circ$;
- 3) $b = c = 15, \gamma = 75^\circ$.



Мал. 168

581'. У трикутнику дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них. Знайдіть два інші кути і третю сторону трикутника, якщо:

- 1) $a = 30, c = 20, \alpha = 30^\circ$;
- 2) $a = 20, b = 13, \alpha = 65^\circ$.

582'. a, b, c — сторони трикутника, α, β, γ — його кути. Накресліть у зошиті таблицю 20 і заповніть її.

qr.orioncentr.com.ua/HoBSq

Таблиця 20

a	5	3	2	
b	4			5
c	8		4	8
α				
β		35°	40°	
γ		30°		20°



583. Розв'яжіть трикутник, якщо:

- 1) $a - b = 5, \angle A = 54^\circ, \angle B = 13^\circ$;
- 2) $b + c = 7, \angle A = 29^\circ, \angle B = 47^\circ$.

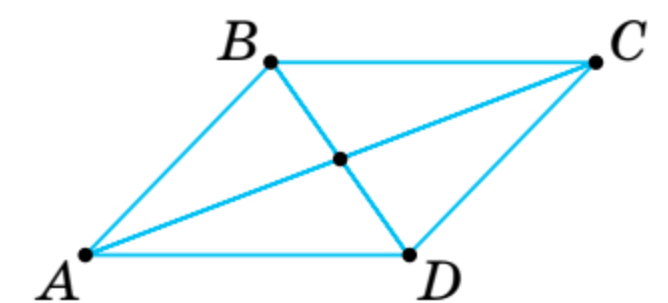
584. Розв'яжіть трикутник, якщо $c - a = 3, \angle B = 44^\circ, \angle C = 102^\circ$.

585. Обчисліть невідомі сторони й кути трикутника, якщо:

- 1) $a = 15, c = 18, m_b = 11,3$;
- 2) $a = 13, b = 15, m_c = 12,3$.

586. Діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2 , а кут між ними — α (мал. 169). Знайдіть сторони паралелограма, якщо:

- 1) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 6$ см, $\alpha = 35^\circ$;
- 2) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 10$ см, $\alpha = 140^\circ$.



Мал. 169

587. Знайдіть бісектриси трикутника ABC, якщо:

- 1) $AC = 7, \angle A = 60^\circ, \angle C = 40^\circ$;
- 2) $BC = 5, \angle B = 45^\circ, \angle C = 70^\circ$.

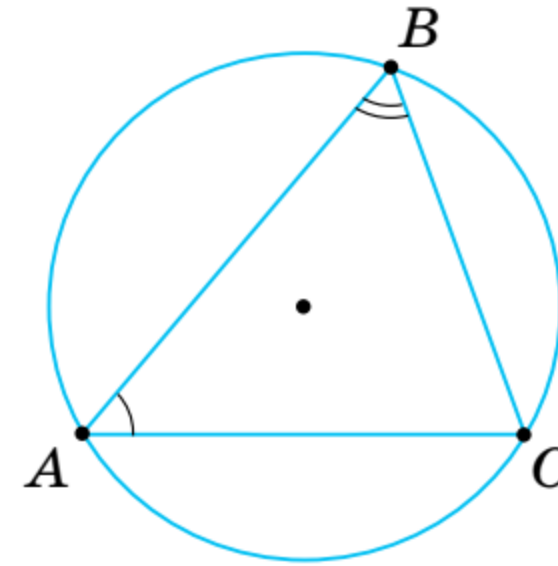
588. Знайдіть сторони трикутника, якщо середня за довжиною сторона відрізняється від кожної з двох інших на 1 см, а проекція більшої сторони на середню дорівнює 9 см.

589. У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC гіпотенузу AB продовжено на довжину $BD = BC$ і точку D сполучено з точкою C . Знайдіть сторони трикутника ADC , якщо катет $BC = a$.

590. Площа трикутника ABC дорівнює 16 см^2 , $AC = 5 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$. Знайдіть сторону AB .

591. У коло радіусом 38 см вписано трикутник, гострі кути якого дорівнюють 49° і 63° . Знайдіть сторони трикутника.

592. У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радіус описаного кола — R (мал. 170). Знайдіть сторони трикутника.



Мал. 170

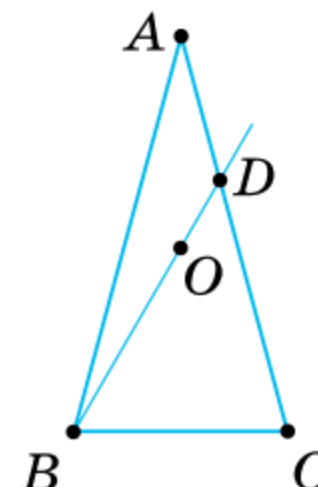
593. Сторона трикутника дорівнює 21 см, а дві інші його сторони утворюють кут 60° і відносяться як 3 : 8. Знайдіть невідомі сторони та кути трикутника.

594. Основи трапеції дорівнюють 60 см і 18 см, а бічні сторони — 28 см і 35 см. Знайдіть кути трапеції.

595*. У трикутнику ABC $AB = 2 \text{ см}$, $AC = 5 \text{ см}$, $BC = 6 \text{ см}$. Знайдіть відстань від вершини B до точки перетину висот трикутника.

596*. Всередині кута A з градусною мірою 60° позначено точку M на відстанях a і b від сторін кута. Знайдіть відстань AM .

597*. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = AC = b$, а $\angle A = 30^\circ$ (мал. 171). Пряма, що проходить через вершину B і центр O описаного кола, перетинає сторону AC в точці D . Знайдіть довжину відрізка BD .

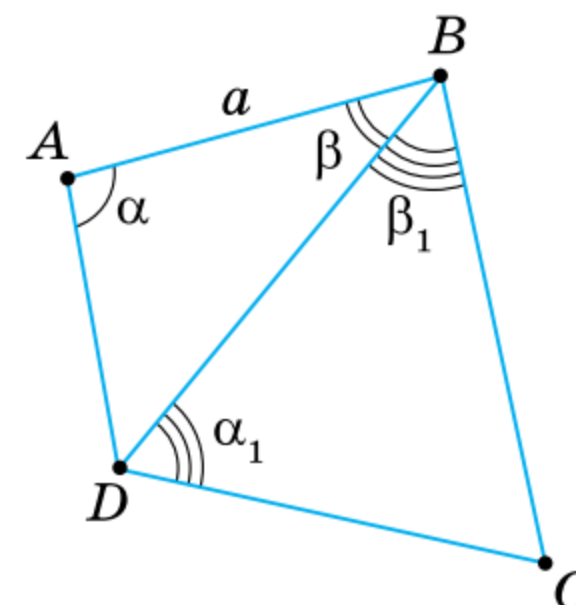


Мал. 171

598*. Знайдіть діагоналі трапеції, якщо її основи дорівнюють 23,8 см і 43,5 см, а кути при більшій основі — 64° і 71° .

599*. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a > b$), а прилеглі до основи a кути — α і β .

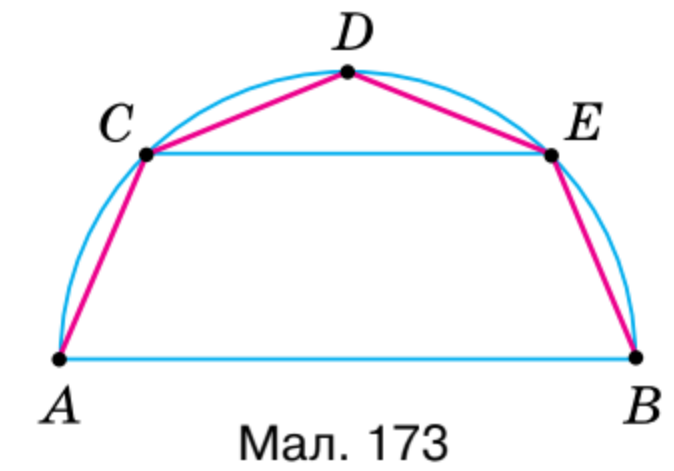
600*. За даними на малюнку 172 знайдіть сторону BC чотирикутника $ABCD$.



Мал. 172

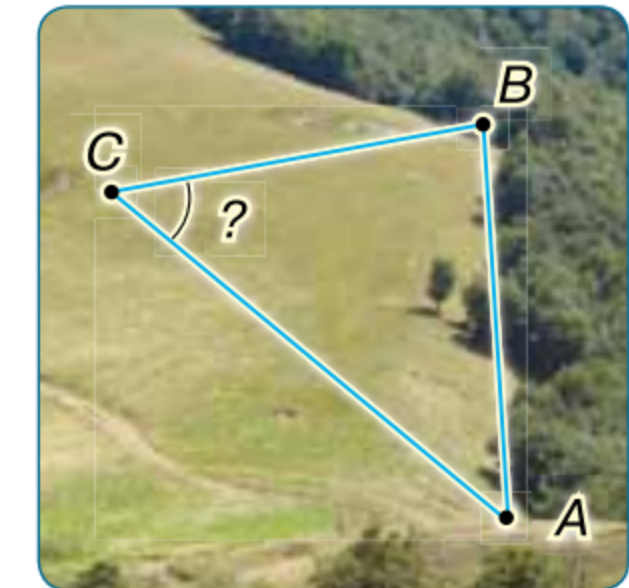
Проявіть компетентність

601. Мансардну покрівлю спроектували так: на відрізку $AB = 11,5 \text{ м}$ (ширина перекриття) описали півколо та поділили його на чотири рівні частини (мал. 173). Точки A, C, D, E і B сполучили відрізками. Знайдіть:
1) довжину схилів покрівлі AC і CD ;
2) довжину поперечки CE ;
3) кути нахилу схилів AC і CD покрівлі.



Мал. 173

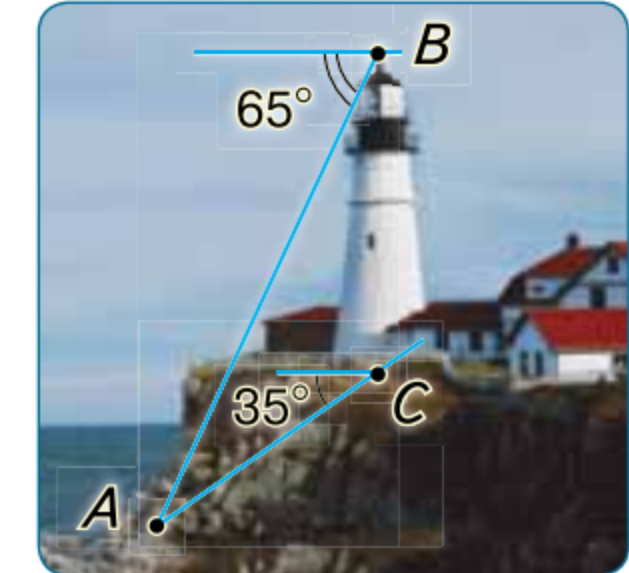
602. Під яким кутом видно прямолінійний край лісу $AB = 1240 \text{ м}$ з пункту C , що віддалений від пункту A на 1600 м і від пункту B — на 1170 м (мал. 174)?



Мал. 174

603. Щоб знайти кут на місцевості, на його сторонах від вершини відклали по 10 м і виміряли відстань між одержаними точками — 16 м. Дістали, що кут дорівнює 106° . Поясніть, як обчислили кут.

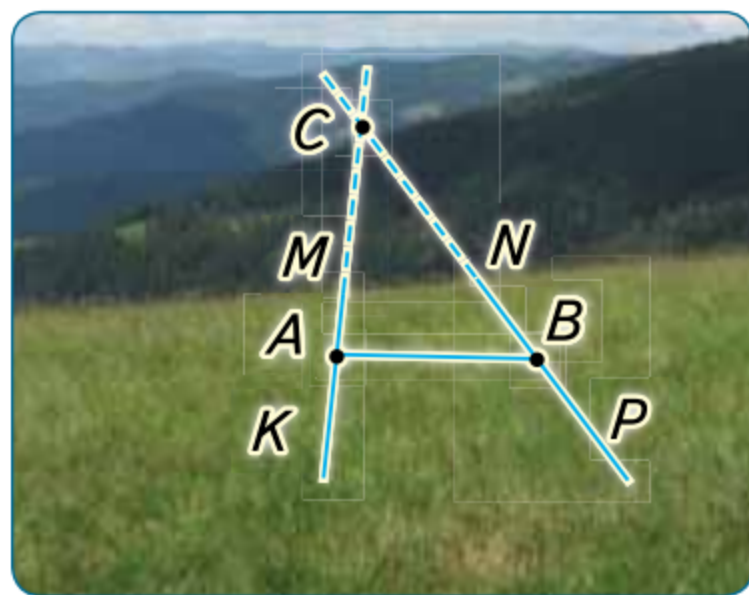
604. На горі розміщена башта заввишки 60 м (мал. 175). Деякий предмет на підшві горі видно з вершини B башти під кутом 65° до горизонту, а з її основи C — під кутом 35° до горизонту. Знайдіть висоту гори.



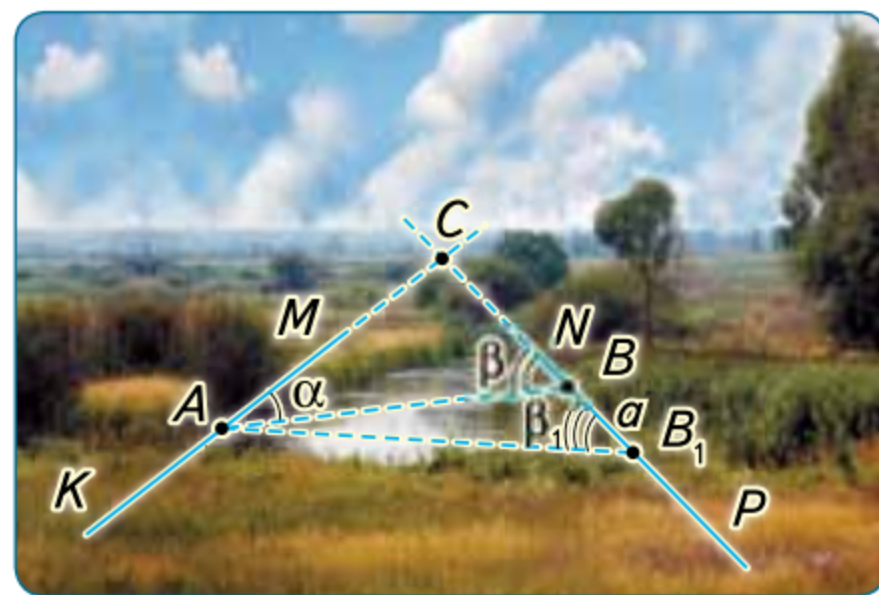
Мал. 175

605. На малюнку 176 зображено дві прямі дороги KM і PN , які перетинаються десь за лісом у недоступній точці C . Потрібно знайти відстань від деякого пункту A на дорозі KM до точки C перетину доріг. Для цього на дорозі PN позначили пункт B так, щоб можна було виміряти відстань AB , і визначили кути BAM і ABN . Поясніть спосіб знаходження відстані AC . Знайдіть AC , якщо $AB = 800 \text{ м}$, $\angle BAM = 85^\circ$, $\angle ABN = 52^\circ$.

606. Трапилося так, що місцевість між дорогами заболочена й виміряти відстань AB , як у задачі 605, не можна (мал. 177). Але пункт A видно з двох місць B і B_1 на дорозі PN , а також можна підійти до пункту A . Тоді виміряли BB_1 , $\angle BAM$, $\angle ABN$ і $\angle AB_1N$. Поясніть, як знайти відстань AC . Знайдіть цю відстань, якщо: $BB_1 = a$, $\angle BAM = \alpha$, $\angle ABN = \beta$, $\angle AB_1N = \beta_1$.

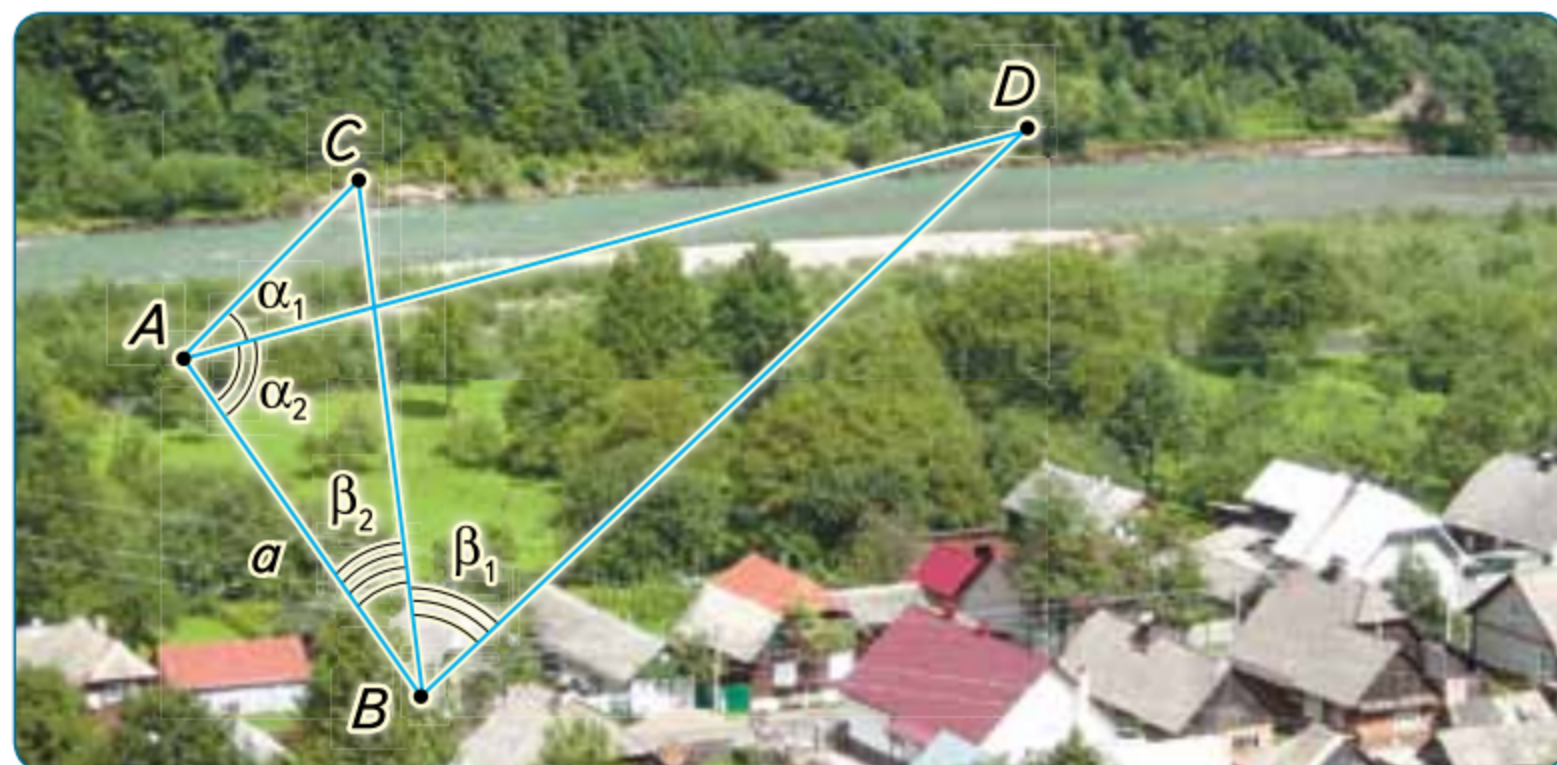


Мал. 176



Мал. 177

607. Потрібно обчислити відстань між недоступними пунктами C і D (мал. 178). Для цього на місцевості вибрали точки A і B так, щоб можна було виміряти відстань AB і щоб із цих точок було видно точки C і D . Потім виміряли $AB = a$, $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle BAD = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta_2$, $\angle CBD = \beta_1$. Поясніть, як знайти відстань CD . Обчисліть CD , якщо $a = 100$ м, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 70^\circ$, $\beta_1 = 54^\circ$, $\beta_2 = 28^\circ$.



Мал. 178

§ 9. ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

1. Формула площі трикутника за двома сторонами й кутом між ними

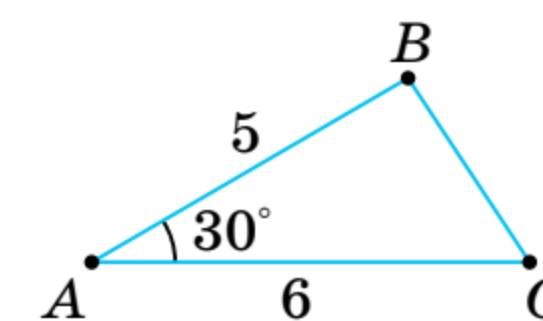
Ситуація. Учні й учениці 9-А класу знаходили площу трикутника ABC за даними на малюнку 179. Денис зазначив, що площу трикутника ABC можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2}ah_a$. Але для цього тре-

ба спочатку провести висоту BH (мал. 180) і знайти її довжину як катета трикутника ABH , що лежить проти кута 30° :

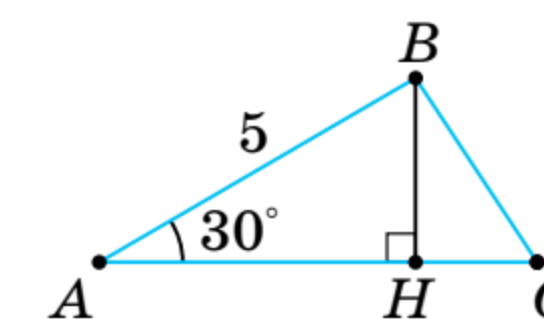
$$BH = \frac{1}{2}AB = 2,5, \text{ тоді } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,5 = 7,5.$$



qr.orioncentr.com.ua/MqQqg



Мал. 179



Мал. 180

Наталка помітила, що площу $\triangle ABC$ можна знайти інакше, якщо одразу помножити $\frac{1}{2}$ на сторону AC , сторону AB та синус кута між ними. Такий висновок вона отримала, виразивши висоту BH у трикутнику ABH через гіпотенузу AB і $\sin 30^\circ$:

$$BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 2,5, \text{ тоді } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 7,5.$$



Чи завжди можна знайти площу трикутника за двома сторонами і кутом між ними?

Так.



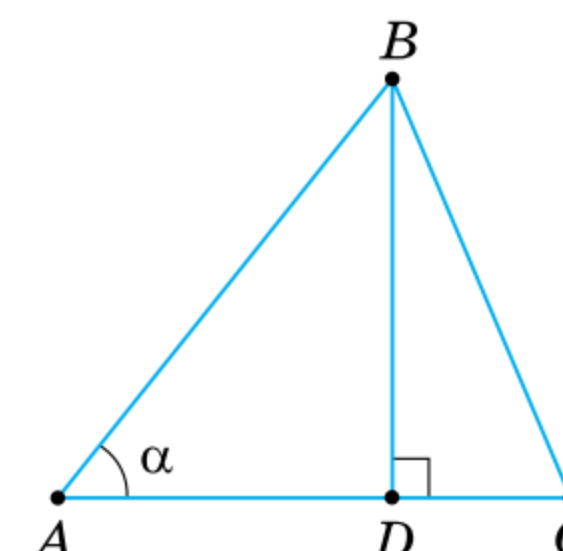
Запам'ятайте!

Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними:

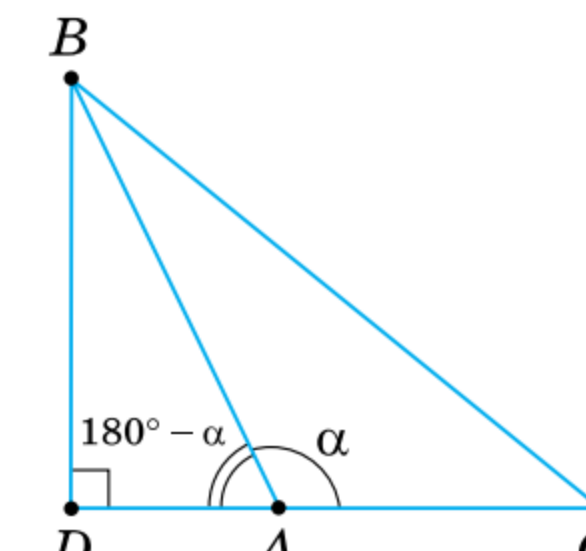
$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha.$$

Доведемо це.

У трикутнику ABC проведемо висоту BD (мал. 181, 182). Маємо: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Із прямокутного трикутника ABD : $BD = AB \sin \alpha$, якщо кут α — гострий (мал. 181); $BD = AB \sin (180^\circ - \alpha)$, якщо кут α — тупий (мал. 182). Оскільки $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то для будь-якого випадку $BD = AB \sin \alpha$. Підставивши у формулу $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ вираз BD , одержимо: $S = \frac{1}{2}AC \cdot AB \sin \alpha = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$.



Мал. 181



Мал. 182

2. Формула Герона

qr.orioncentr.com.ua/wOhvm



Чи можна знайти площу трикутника за його трьома сторонами?

Так.



Запам'ятайте!

Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — сторони трикутника; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

Справді, за теоремою косинусів, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$. Звідси $cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Із формули $S = \frac{1}{2}bc \sin\alpha$ знаходимо: $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$. Підставляючи знайдені вирази $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ у формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, одержимо: $\left(\frac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = 1$. Звідси $S^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}$. Застосувавши формулу різниці квадратів, маємо:

$$S^2 = \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{16} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2}.$$

Взявши до уваги, що $a+b+c = 2p$, $b+c-a = 2p-2a$, $a+b-c = 2p-2c$, $a+c-b = 2p-2b$, одержимо:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ або } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3. Формула площі трикутника за трьома сторонами й радіусом описаного кола

У 8 класі ви вивчили формулу для знаходження площі трикутника за його півпериметром і радіусом вписаного кола:

$$S = p \cdot r,$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника, r — радіус вписаного кола.



Чи можна знайти площу трикутника, знаючи радіус описаного кола?

Так, якщо знати ще й три його сторони.



Запам'ятайте!

Площа трикутника дорівнює частці від ділення добутку трьох його сторін на вчетвертий радіус описаного кола:

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола.

Справді, $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$. Звідси $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Тоді з формули $S = \frac{1}{2}bc \sin\alpha$, одержимо: $S = \frac{1}{2}bc \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Отже, площу трикутника обчислюють і за формулою: $S = \frac{abc}{4R}$.



Площу трикутника можна обчислити за формулами, наведеними в таблиці 21.

Таблиця 21

Назва формули площі трикутника	Формула площі трикутника	Особливості формули площі трикутника
За стороною і висотою, проведеною до неї	$S = \frac{1}{2}ah_a$	a — сторона трикутника, h_a — висота, проведена до цієї сторони
За двома сторонами і кутом між ними	$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$	b, c — сторони трикутника, α — кут між цими сторонами
За трьома сторонами (формула Герона)	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	a, b, c — сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника
За півпериметром і радіусом вписаного кола	$S = p \cdot r$	$p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника, r — радіус вписаного кола

Таблиця 21 (продовження)

Назва формули площі трикутника	Формула площі трикутника	Особливості формули площі трикутника
За трьома сторонами і радіусом описаного кола	$S = \frac{abc}{4R}$	a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола

Дізнайтеся більше

1. Герон Александрійський (приблизно I ст. до н. е.) — видатний давньогрецький учений. Найбільш важливою геометричною працею вченого була «Метрика» (вчення про вимірювання). У цій книзі серед правил вимірювання площ наведено так звану формулу Герона (нині встановлено, що цю формулу застосовував Архімед, який жив на кілька століть раніше Герона).

2. Застосування поняття площі дає можливість іноді значно спростити розв'язування деяких задач, в умовах яких це поняття навіть не вживається. Найчастіше це можна зробити так: спочатку площу деякої фігури виражаємо через дані й шукані величини двома різними способами, а потім прирівнюємо знайдені вирази. Одержуємо рівняння, з якого можна знайти шукану величину.

Задача Яка довжина бісектриси прямого кута трикутника з катетами a і b ?

Розв'язання Нехай ABC — даний прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $AC = b$ і CD — бісектриса прямого кута (мал. 183). Позначимо $CD = x$ і знайдемо площу трикутника ABC двома способами.

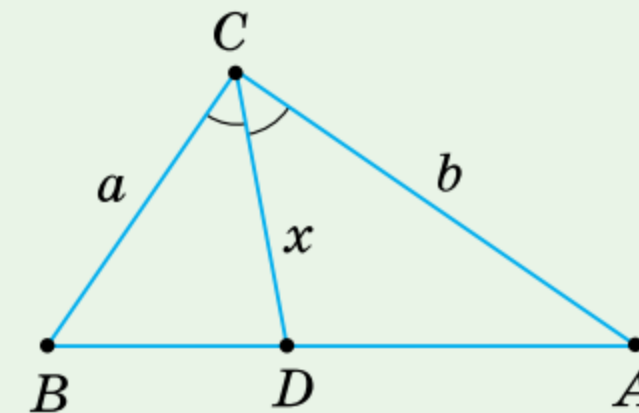
З одного боку: $S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$. (1)

З іншого боку:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}ax \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bx \cdot \sin 45^\circ = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b). \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), одержимо: $\frac{ab}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b)$.

$$\text{Звідси } x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$



Мал. 183

Пригадайте головне

1. Запишіть і поясніть формулу для обчислення площі трикутника за двома сторонами й кутом між ними.
2. Запишіть і поясніть формулу Герона.
3. Запишіть і поясніть формулу для обчислення площі трикутника за трьома сторонами й радіусом описаного кола.

Усне тренування

Обчисліть:

1) $\sin 30^\circ$; $\sin 45^\circ$; $\sin 60^\circ$; $\sin 120^\circ$; $\sin 135^\circ$; $\sin 150^\circ$.

2) $\sqrt{4 \cdot 9}$; $\sqrt{8 \cdot 9}$; $\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 25}$; $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 10}$.

Розв'яжіть задачі

608°. Чи є правильною рівність для обчислення площі трикутника, зображеного на малюнку 184:

1) $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \beta$; 3) $S = \frac{abc}{4r}$;

2) $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$; 4) $S = \frac{abc}{4R}$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; 6) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$?

609°. Обчисліть площу трикутника за даними на малюнку 185.

610°. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $a = 5\sqrt{3}$ см, $c = 4$ см, $\beta = 60^\circ$;

2) $c = 12$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 30^\circ$.

611°. Знайдіть площу трикутника, якщо

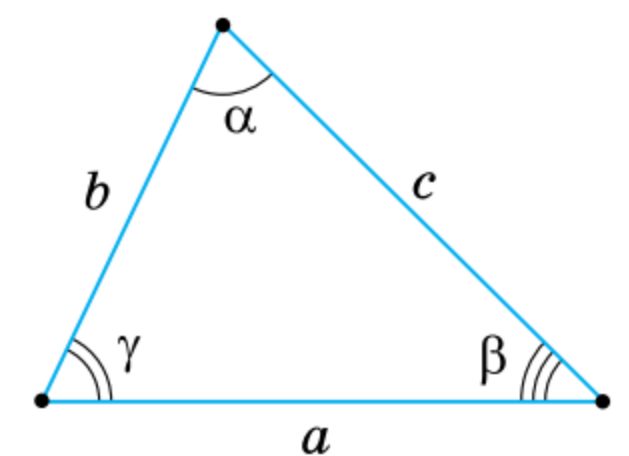
E $a = 7\sqrt{2}$ см, $b = 16$ см, $\gamma = 45^\circ$.

612°. Бічні сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють a , а кут між ними — α . Знайдіть площу трикутника, якщо:

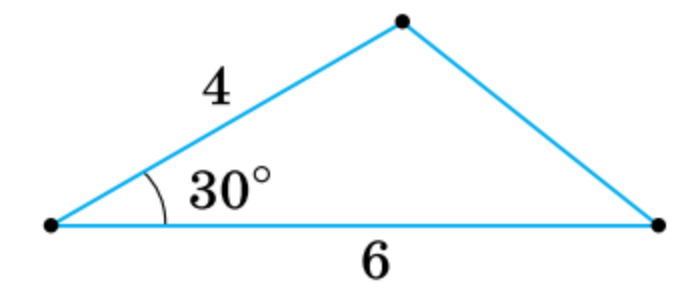
1) $a = 2$ см, $\alpha = 70^\circ$; 2) $a = 4$ см, $\alpha = 65^\circ$.

613°. Бічні сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 6 см, а кут між ними — 100° . Знайдіть площу трикутника.

614°. a, b — сторони трикутника, γ — кут між ними, S — площа трикутника. Накресліть у зошиті таблицю 22 і заповніть її.



Мал. 184



Мал. 185

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
площа трикутника	area of a triangle	Flächet des Dreiecks	l'aire d'un triangle

qr.orioncentr.com.ua/eUdjR



qr.orioncentr.com.ua/wfxeN

Таблиця 22

a	7	5	4	
b	10	8		9
γ	80		150	75
S		12	24	16

615°. Площа трикутника ABC дорівнює 60 см^2 . Знайдіть сторону AB , якщо:



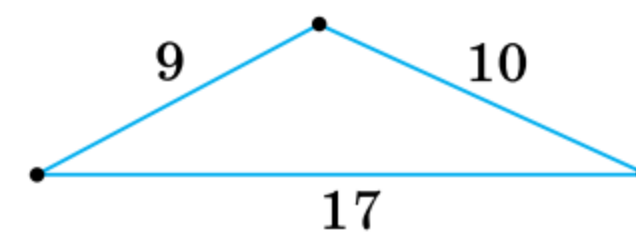
1) $AC = 15 \text{ см}$, $\angle A = 30^\circ$; 2) $BC = 10\sqrt{3} \text{ см}$, $\angle B = 60^\circ$.

616°. За даними на малюнку 186 знайдіть площу трикутника, дотримуючись плану:

1) обчисліть півпериметр p ;

2) знайдіть значення виразу

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Мал. 186



qr.orioncentr.com.ua/flGlw

617°. Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють:



1) 5 см , 5 см , 6 см ;

2) 12 см , 17 см , 25 см .

618°. Знайдіть площу трикутника зі сторонами 15 см , 26 см , 37 см .



619°. a, b, c — сторони трикутника, r — радіус вписаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $a = 13 \text{ см}$, $b = 14 \text{ см}$, $c = 15 \text{ см}$, $r = 4 \text{ см}$;

2) $a = 4 \text{ см}$, $b = 13 \text{ см}$, $c = 15 \text{ см}$, $r = 1,5 \text{ см}$.

620°. a, b, c — сторони трикутника, r — радіус вписаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо $a = 7 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$, $c = 20 \text{ см}$, $r = 2 \text{ см}$.

621°. a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $a = 26 \text{ см}$, $b = 24 \text{ см}$, $c = 10 \text{ см}$, $R = 13 \text{ см}$;

2) $a = 6 \text{ см}$, $b = 6 \text{ см}$, $c = 4\sqrt{5} \text{ см}$, $R = 4,5 \text{ см}$.

622°. a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо $a = 26 \text{ см}$, $b = 28 \text{ см}$, $c = 30 \text{ см}$, $R = 16,25 \text{ см}$.



623°. Доведіть, що радіуси описаного (R) і вписаного (r) кіл трикутника можна обчислити за формулами:

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ і } r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

624°. a, b, c — сторони трикутника, S — його площа, R, r — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 23 і заповніть її.

Таблиця 23

a	5 см	3 см	5 см	6 см	4 см
b	7 см	4 см	5 см	10 см	13 см
c	8 см	5 см	6 см	8 см	15 см
S	$10\sqrt{3} \text{ см}^2$				
R		2,5 см		5 см	
r			1,5 см		

625°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, сторони якого дорівнюють:

1) 10 см , 24 см , 26 см ; 2) 26 см , 28 см , 30 см .

626°. Знайдіть висоту трикутника, проведену до сторони a , якщо його сторони дорівнюють a, b і c .

627°. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють:

1) 13 см , 14 см , 15 см ; 2) 5 см , 5 см , 6 см ; 3) 7 см , 24 см , 25 см .

628°. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють 7 см , 15 см , 20 см .



629°. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см . Чи може його площа дорівнювати:

1) 19 см^2 ; 2) 35 см^2 ; 3) 24 см^2 ?

630°. Скориставшись формулою $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$, дослідіть, як змінюватиметься площа трикутника ABC зі збільшенням кута α від 0° до 180° (b і c — сталі). За якого значення α площа трикутника ABC буде найбільшою?

631°. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює добутку двох його суміжних сторін на синус кута між ними.

632°. Сторони паралелограма дорівнюють a і b , а один з кутів — α . Знайдіть площу паралелограма, якщо:



1) $a = 2 \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$, $\alpha = 70^\circ$; 2) $a = 5 \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$, $\alpha = 130^\circ$.

633°. Площа ромба дорівнює квадрату його сторони, помноженому на синус кута ромба. Доведіть.

634°. Обчисліть площу ромба за його стороною a та кутом α , якщо:

1) $a = 2 \text{ см}$, $\alpha = 20^\circ$; 2) $a = 6 \text{ см}$, $\alpha = 124^\circ$.

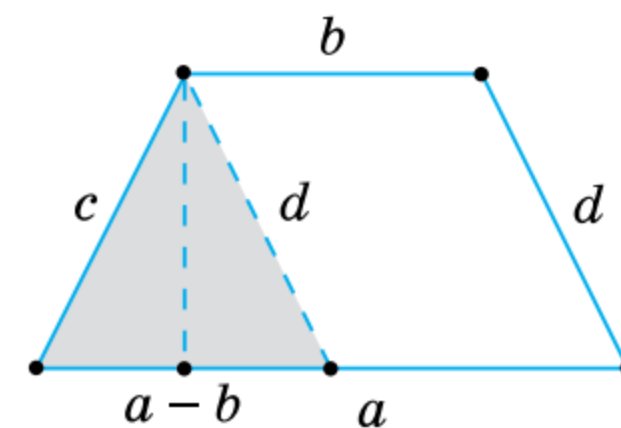
635°. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

- 636.** Знайдіть площу паралелограма за його діагоналями d_1 і d_2 й кутом α між ними:
 1) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 10$ см, $\alpha = 40^\circ$; 2) $d_1 = 8$ см, $d_2 = 12$ см, $\alpha = 59^\circ$.
- 637.** Доведіть, що площа чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.
- 638.** Обчисліть площу прямокутника за діагоналлю d та кутом α між діагоналями, якщо:
 1) $d = 12$ см, $\alpha = 30^\circ$; 2) $d = 10$ см, $\alpha = 25^\circ$.
- 639.** Обчисліть площу трикутника за стороною c і прилеглими до неї кутами α і β , якщо:
 1) $c = 6$ см, $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$; 2) $c = 8$ см, $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 54^\circ$.
- 640.** Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, якщо його основа та висота відповідно дорівнюють 20 см і 26 см.
- 641.** Коло описано навколо рівнобедреного трикутника, у якого основа й висота відповідно дорівнюють 16 см і 17 см. Знайдіть радіус цього кола.

- 642.** Дві сторони трикутника дорівнюють 17 см і 21 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 5 см. Знайдіть площу трикутника.
- 643.** Площа трикутника дорівнює 810 см^2 . Знайдіть сторони трикутника, якщо вони відносяться як 12 : 17 : 25.



- 644.** Основи трапеції дорівнюють 16 см і 44 см, бічні сторони — 15 см і 41 см. Скориставшись малюнком 187, знайдіть площу трапеції.



Мал. 187



- Щоб обчислити площу трапеції за її сторонами (мал. 187):**

- 1) проведіть через вершину меншої основи пряму, паралельну бічній стороні;
 - 2) знайдіть висоту утвореного трикутника за трьома його сторонами (висоту трапеції);
 - 3) знайдіть площу трапеції.
- 645.** Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють 25 см і 11 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.



- 646*.** Доведіть формули для обчислення площі трикутника:

$$1) S = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma; \quad 2) S = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha};$$

$$3) S = \sqrt{\frac{1}{2} R h_a h_b h_c}, \text{ де } R \text{ — радіус описаного кола.}$$

- 647*.** Бісектриса l прямого кута трикутника утворює з гіпотенузою кут α . Знайдіть площу трикутника.

- 648*.** Доведіть, що довжину бісектриси l кута α трикутника ABC можна обчислити за формулою: $l_\alpha = \frac{bc \sin \alpha}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}}$.

- 649*.** Знайдіть площу трикутника за медіаною m і кутами α і β , які утворює медіана з прилеглими сторонами.

- 650*.** Знайдіть площу трикутника за двома його висотами h_1 і h_2 та кутом α між ними.

- 651*.** Сторона трикутника дорівнює 30 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, — 12 см і 39 см. Знайдіть площу трикутника.

- 652*.** Знайдіть площу трикутника, якщо його медіани дорівнюють m_a , m_b , m_c .

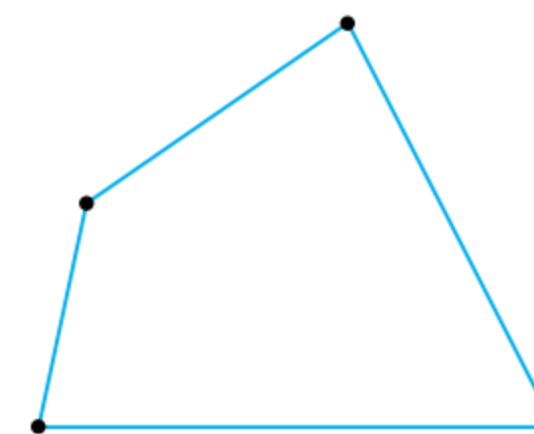
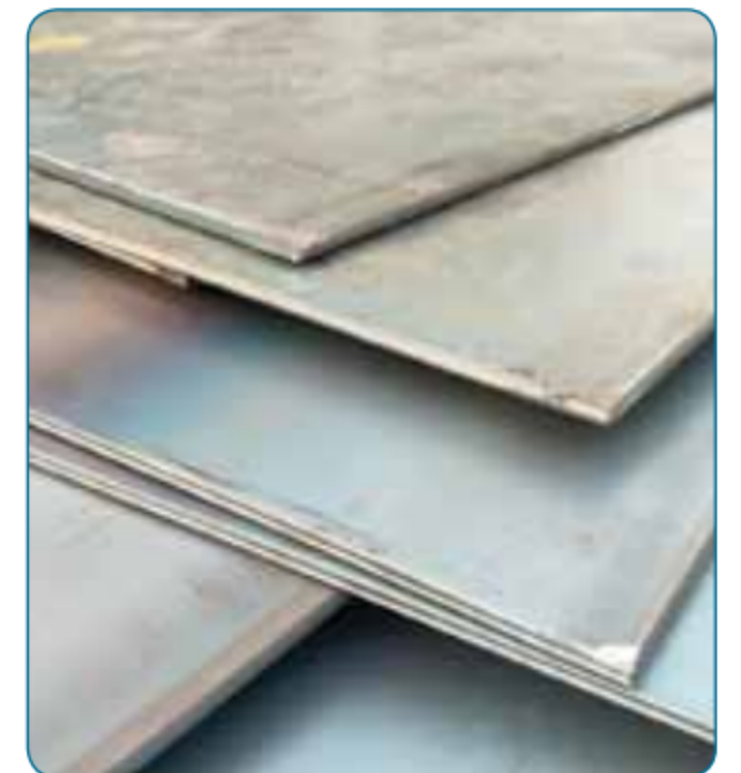
- 653*.** Знайдіть площу трикутника, якщо його висоти дорівнюють h_a , h_b , h_c .

Проявіть компетентність

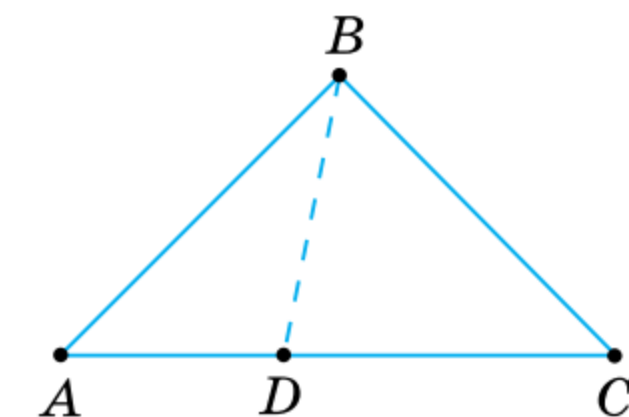
- 654.** На малюнку 188 зображено план ділянки в масштабі 1 : 1000. Скориставшись планом, знайдіть площу цієї ділянки.

- 655.** Маса 1 м^2 листового заліза становить 38 кг. Яку масу має трикутник, вирізаний із цього заліза, якщо його сторони дорівнюють 29 см, 35 см і 48 см?

- 656.** Від трикутної ділянки площею 5 га потрібно межею BD відділити ділянку площею 2 га (мал. 189). Як це зробити, якщо $AC = 1000$ м?



Мал. 188



Мал. 189

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте теорему синусів.
2. Як знайти сторону трикутника за радіусом описаного кола й кутом, що лежить проти цієї сторони?
3. Яка залежність між мірами кутів трикутника та довжинами його сторін?
4. Сформулюйте теорему косинусів.
5. Як визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний) за даними його сторонами?
6. Назвіть, які є види задач на розв'язування трикутників, та запишіть алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.
7. Запишіть і поясніть формули для обчислення площі трикутника: за трьома сторонами; за двома сторонами й кутом між ними.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1°. Знайдіть сторону b трикутника ABC , якщо: $c = 1$ см, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.
 А. $\sqrt{3}$ см. В. $\sqrt{2}$ см.
 Б. 2 см. Г. 1 см.
- 2°. Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють 10 см, 10 см, 12 см.
 А. 32 см^2 . В. 48 см^2 .
 Б. 60 см^2 . Г. 24 см^2 .
- 3°. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 2 см, а кут між бічними сторонами — 30° .
 А. 2 см^2 . В. 4 см^2 .
 Б. 6 см^2 . Г. 1 см^2 .
4. Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 2 см і 4 см, а один із кутів — 45° .
 А. $4\sqrt{2} \text{ см}^2$. В. $2\sqrt{2} \text{ см}^2$.
 Б. 8 см^2 . Г. $8\sqrt{2} \text{ см}^2$.
- 5*. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо його сторони дорівнюють 4 см, 7 см і 9 см.
 А. 10 см. В. $\frac{42\sqrt{5}}{5}$ см.
 Б. $6\sqrt{5}$ см. Г. $\frac{21\sqrt{5}}{10}$ см.



Розділ 4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

У розділі дізнаєтесь:

- що таке правильний n -кутник, які його властивості та як будувати деякі правильні n -кутники;
- як знайти радіуси вписаного й описаного кіл для правильного n -кутника за даною його стороною;
- про формули для обчислення довжини кола й дуги кола, площі круга, сектора та сегмента;
- як застосовувати вивчені властивості та формули до розв'язування геометричних задач на практиці

§ 10. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. РАДІУСИ ОПИСАНИХ І ВПИСАНИХ КІЛ

1. Що таке правильний многокутник

Ситуація. Відвідуючи пасіку, Богдан і Василь звернули увагу на те, що стільники мають форму шестикутників, у яких усі сторони рівні й усі кути рівні. Постало запитання: чому бджоли для будівництва стільників обирають саме такі шестикутники, а не інші фігури з рівними сторонами, наприклад рівносторонні трикутники, квадрати. Вирішили провести дослідження — порівняти площі цих фігур за однакового їх периметра, наприклад, якщо $P = 12$ см. Тоді рівносторонній трикутник має сторону 4 см, квадрат — 3 см, шестикутник — 2 см. Одержали: $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} \approx 6,9 \text{ (см}^2\text{)}$, $S_4 = a^2 = 9 \text{ (см}^2\text{)}$, $S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \approx 10,2 \text{ (см}^2\text{)}$ (для шестикутника цей факт буде пояснено пізніше). З'ясували, що найбільшу площу серед цих фігур має шестикутник з рівними сторонами, тобто за однакової витрати матеріалів на «стілки» одержимо найбільшу площу. Богдан і Василь зробили важливий висновок: бджоли інстинктивно будують стільники у формі шестикутників з рівними сторонами, тому що це найвигідніша форма. Вона дозволяє з мінімальними витратами воску (на сторони) створити максимальний простір (площу) для меду та личинок.



qr.orioncentr.com.ua/ni9fN



Чи правильний висновок зробили Богдан і Василь?

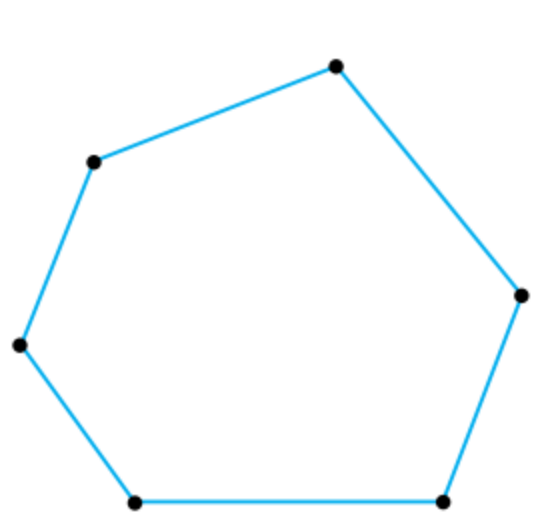
Так.



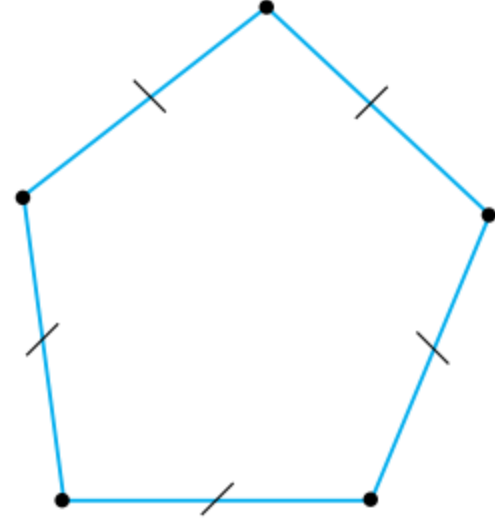
На малюнках 190–193 ви бачите многокутники. У чому їх відмінність?

У многокутнику на малюнку 190 кути та сторони не рівні. На малюнку 191 зображено многокутник з рівними сторонами, але не рівними

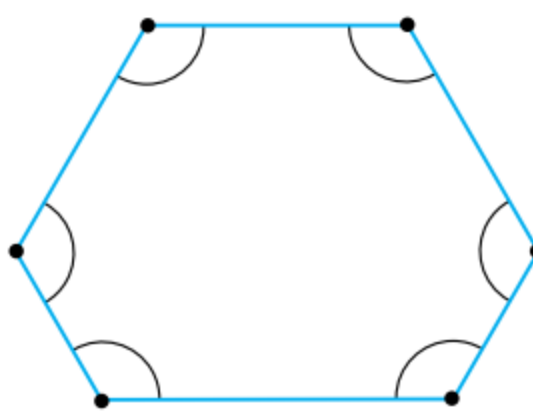
кутами. А в многокутнику на малюнку 192 — навпаки: усі кути рівні, а сторони — ні. Лише многокутник на малюнку 193 має всі сторони рівні й усі кути рівні. Це — *правильний многокутник*.



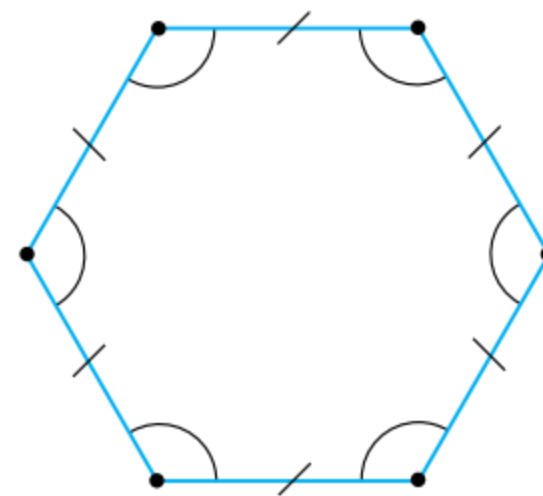
Мал. 190



Мал. 191



Мал. 192



Мал. 193

Запам'ятайте!

Многокутник називається правильним, якщо в нього всі сторони рівні й усі кути рівні.

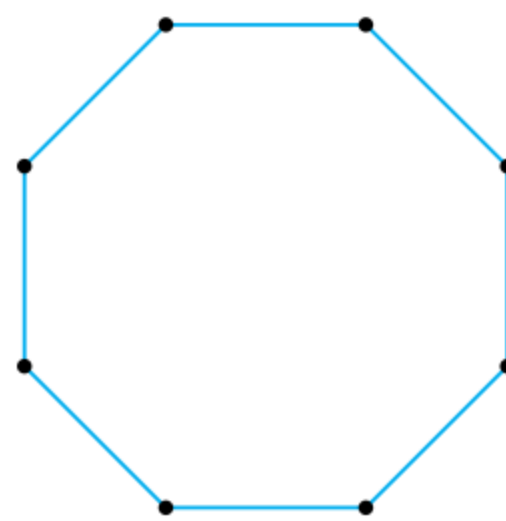
Квадрат і рівносторонній трикутник — приклади правильних многокутників. Многокутник, зображений на малюнку 193, — правильний шестикутник, а на малюнку 194 — правильний восьмикутник.

2. Властивості кутів правильного многокутника

У правильному n -кутнику, як і в довільному n -кутнику, сума всіх кутів дорівнює $180^\circ(n - 2)$.

Задача 1 Знайдіть кут правильного десятикутника.

Розв'язання Сума кутів правильного десятикутника дорівнює:
 $180^\circ(n - 2) = 180^\circ(10 - 2) = 1440^\circ$.
 Усіх кутів є 10. Тому кожний кут дорівнює: $1440^\circ : 10 = 144^\circ$.



Мал. 194



Які градусні міри кутів шестикутника в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

Поміркуймо.



Шестикутник у бджолиних стільниках є правильним, тому всі його кути рівні, а їх сума становить $180^\circ(n - 2) = 180^\circ(6 - 2) = 720^\circ$. Тоді кожний кут правильного шестикутника дорівнює $720^\circ : 6 = 120^\circ$.



Щоб знайти кут правильного n -кутника, скористайтесь формулою:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}.$$

3. Правильний многокутник і коло

Ви знаєте, що правильний трикутник і чотирикутник (квадрат) є вписаними в коло й описаними навколо кола.



Чи справджується це твердження для будь-якого правильного многокутника?

Відповідь на це запитання дає теорема.



Запам'ятайте!

Теорема (властивість правильного многокутника)

Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло й у нього можна вписати коло.

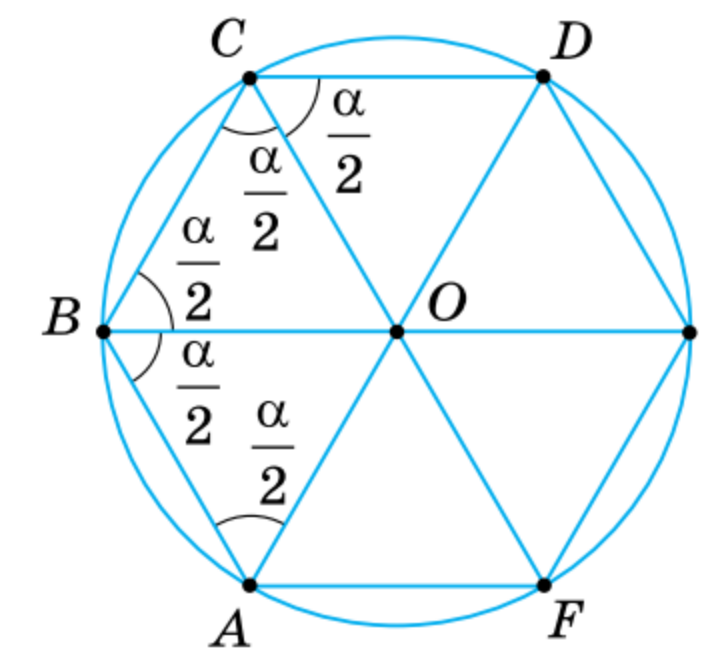
Дано: многокутник $ABCD... F$; $AB = BC = CD = ... = FA$, $\angle A = \angle B = \angle C = ... = \angle F$.

Довести: 1) многокутник $ABCD... F$ є вписаним у коло; 2) многокутник $ABCD... F$ є описаним навколо кола.

Доведення. 1. Нехай бісектриси кутів A і B правильного многокутника $ABCD... F$ перетинаються в точці O (мал. 195). Доведемо, що $OA = OB = OC = ... = OF$, тобто що ці відрізки є радіусами кола, описаного навколо даного многокутника.

Оскільки $\angle A = \angle B$, то і $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$,

де α — кут многокутника.



Мал. 195

Тоді $\triangle AOB$ — рівнобедрений і $OA = OB$.

Сполучимо точку O відрізками з рештою вершин многокутника.

У трикутниках AOB і BOC сторона OB — спільна, $AB = BC$ за умовою, $\angle OBA = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$, оскільки OB — бісектриса кута B . Отже, $\triangle AOB = \triangle BOC$, звідси $OB = OC$.

Так само в трикутниках BOC і COD сторона OC — спільна, $BC = CD$ за умовою, $\angle OCB = \angle OCD = \frac{\alpha}{2}$ (за доведеним, $\triangle BOC$ — рівнобедрений і $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\alpha}{2}$, тоді й $\angle OCD = \frac{\alpha}{2}$).

Отже, $\triangle BOC = \triangle COD$, звідси $OC = OD$.

Таким чином, $OA = OB = OC = OD$.

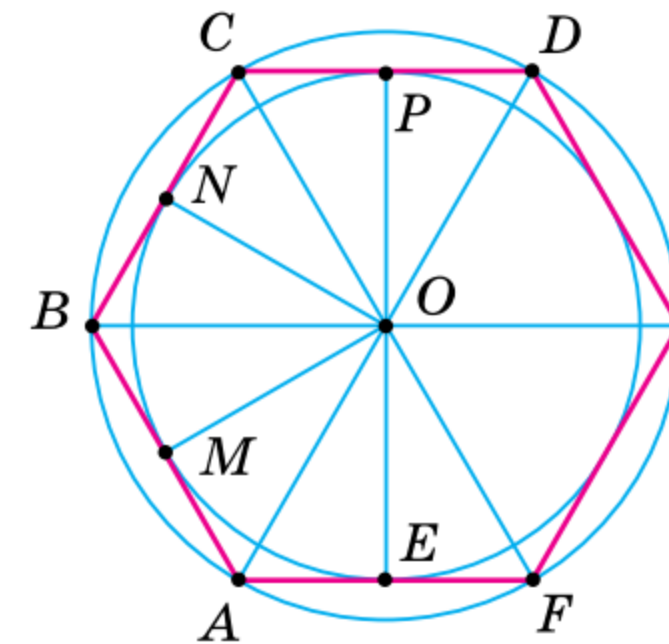
Продовжуючи порівняння сусідніх трикутників, одержимо:

$$OA = OB = OC = OD = \dots = OF.$$

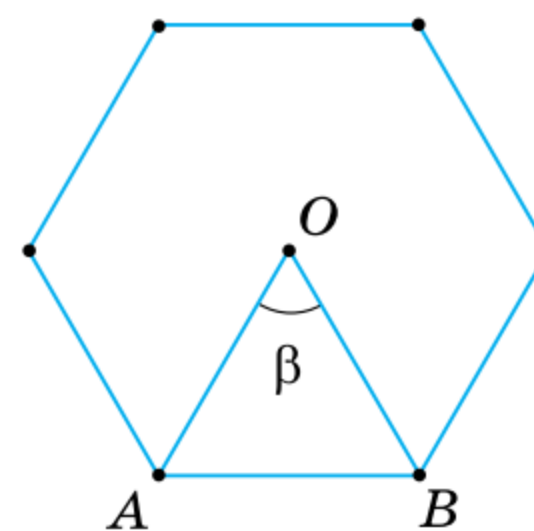
Отже, усі вершини даного многокутника лежать на колі з центром O .

2. Доведемо, що $OM = ON = OP = \dots = OE$ (мал. 196).

Ми довели, що $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \dots = \triangle FOA$. Тому висоти цих трикутників, проведені з вершини O , також рівні: $OM = ON = OP = \dots = OE$. Звідси випливає, що коло із центром O і радіусом OM проходить через точки $M, N, P, \dots, E$ й дотикається до сторін многокутника $ABCD \dots F$ у цих точках, тобто це коло — вписане в даний правильний многокутник.



Мал. 196



Мал. 197



У правильному многокутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються.

Спільний центр цих кіл називають *центром правильного многокутника*.

Кут, утворений двома радіусами, проведеними в сусідні вершини правильного многокутника, називають його *центральною кут* (мал. 197).



Як знайти центральний кут правильного n -кутника?

Скористатися формулою: $\beta = \frac{360^\circ}{n}$.



4. Радіуси описаних і вписаних кіл

qr.orioncentr.com.ua/tEXg8



Як знайти R і r для правильного n -кутника зі стороною a ?

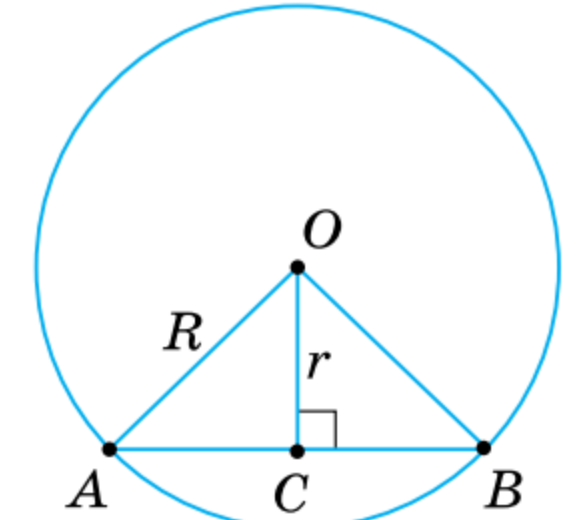
Нехай сторона правильного n -кутника $AB = a$, $OA = R$, $OC = r$ (мал. 198). У рівнобедреному трикутнику AOB висота OC є його медіаною й бісектрисою, тому

$$AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2},$$

$$\angle BOC = \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Із прямокутного трикутника AOC знаходимо:

$$R = \frac{AC}{\sin \angle AOC} = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \text{ і } r = \frac{AC}{\operatorname{tg} \angle AOC} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$



Мал. 198

У правильному трикутнику $n = 3$, $\angle AOC = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, тоді:

$$R = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

У правильному чотирикутнику (квадраті) $n = 4$, $\angle AOC = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$, тоді: $R = \frac{a}{2 \sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{a}{2}$.

У правильному шестикутнику $n = 6$, $\angle AOC = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$, тоді:

$$R = \frac{a}{2 \sin 30^\circ} = a, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Формули для R і r правильних n -кутників подано в таблиці 24.

Таблиця 24

R, r	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Задача 2 Виразіть сторону a_n правильного n -кутника через радіус R описаного навколо нього кола й радіус r вписаного кола. Знайдіть a_n , якщо $n = 3, 4, 6$.

Розв'язання Із формули $R = \frac{a_n}{2\sin \frac{180^\circ}{n}}$ знаходимо:

$$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Підставивши в цю формулу замість n числа 3, 4, 6, одержимо формули, що виражають через радіуси описаних кіл сторони правильного трикутника, чотирикутника й шестикутника: $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_6 = R$.

Із формули $r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$ знаходимо: $a_n = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

Зокрема, $a_3 = 2r\sqrt{3}$, $a_4 = 2r$, $a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

 За однією з величин — a_n , r чи R — можна обчислити дві інші.

5. Побудова правильних многокутників



Як побудувати правильний n -кутник?

Використати описане навколо нього коло.



Задача 3 Побудуйте правильний шестикутник.

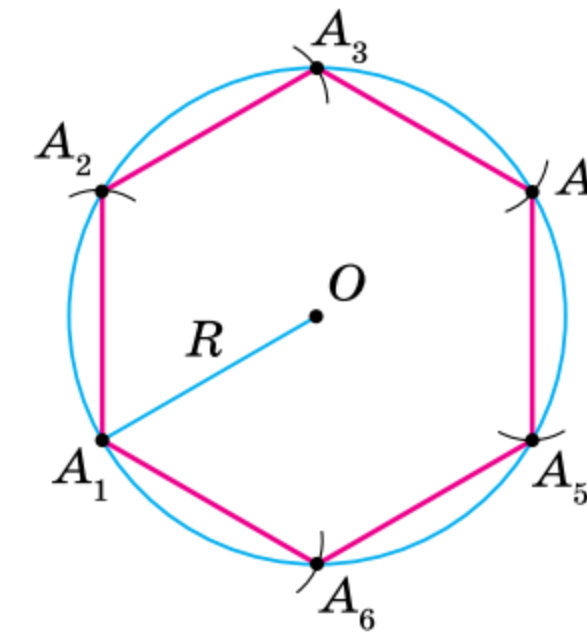
Розв'язання Сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу R описаного навколо нього кола. Проводимо коло радіусом R і позначаємо на ньому довільну точку A_1 (мал. 199). Потім, не змінюючи розхилу циркуля, будемо на колі точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, щоб виконувалася рівність $\cup A_1A_2 = \cup A_2A_3 = \cup A_3A_4 = \cup A_4A_5 = \cup A_5A_6$. Послідовно сполучивши відрізками побудовані точки, одержимо правильний шестикутник.

Задача 4 Побудуйте правильний трикутник.

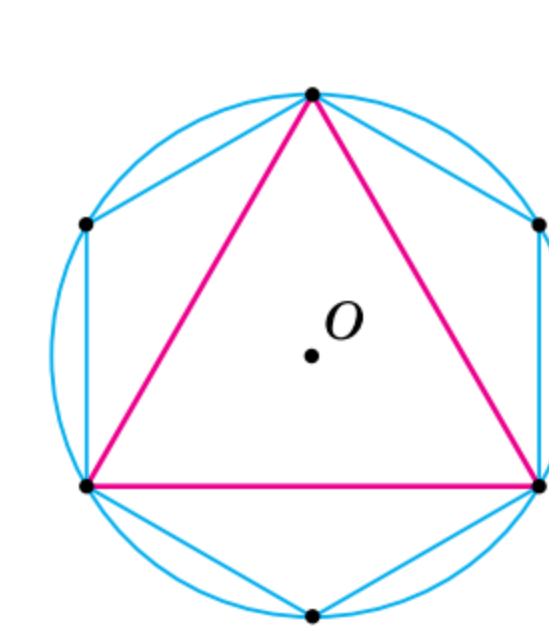
Розв'язання Будемо спочатку правильний шестикутник (задача 3), а потім сполучаємо відрізками його вершини через одну (мал. 200).

Задача 5 Побудуйте правильний чотирикутник.

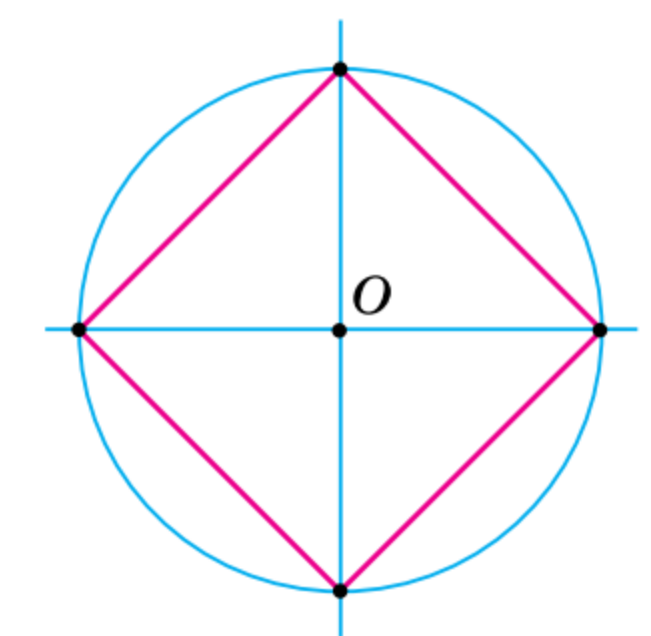
Розв'язання Будемо коло й через його центр проводимо дві перпендикулярні прямі (мал. 201). Вони перетнуть коло в чотирьох точках — вершинах квадрата.



Мал. 199



Мал. 200



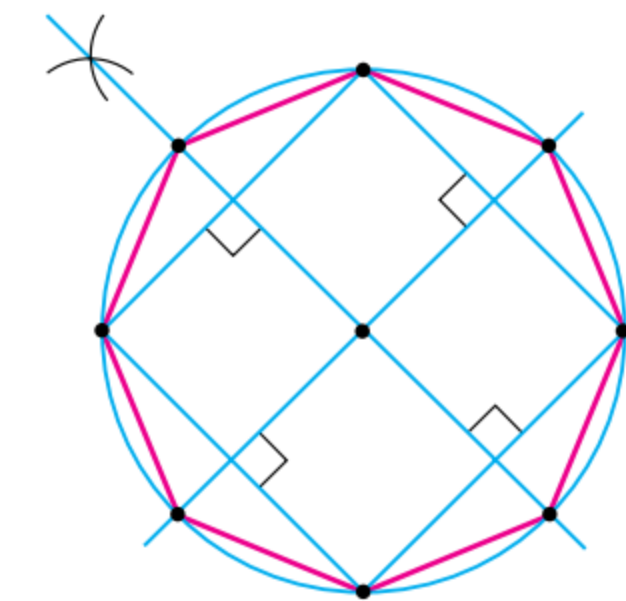
Мал. 201



Щоб побудувати правильний n -кутник, поділіть коло на n рівних частин і послідовно сполучіть точки поділу.

Якщо ви побудували правильний n -кутник, то легко побудуєте і правильний $2n$ -кутник.

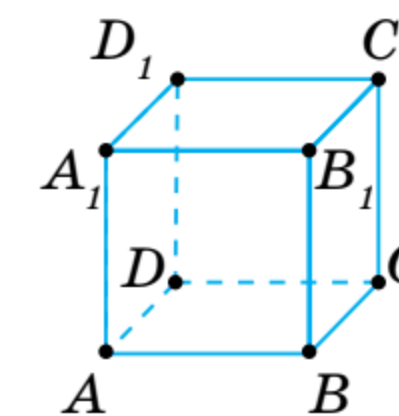
Наприклад, побудуємо правильний 8-кутник. Будемо правильний чотирикутник (задача 5). Проводимо до його сторін серединні перпендикуляри (мал. 202). Точки перетину серединних перпендикулярів з колом разом з вершинами чотирикутника й будуть вершинами правильного 8-кутника. Цим самим способом можна побудувати правильний 16-кутник, правильний 32-кутник і т. д.



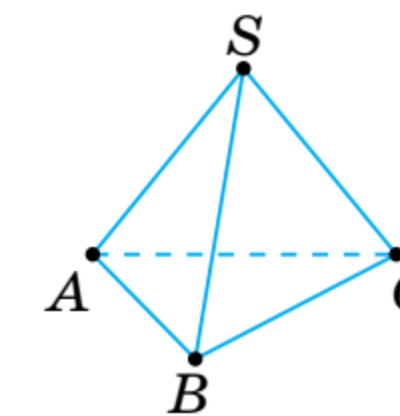
Мал. 202

6. Правильні многокутники в паралелепіпеді та піраміді

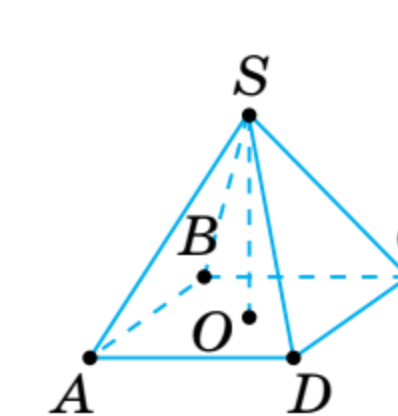
Правильні многокутники можуть бути гранями прямокутного паралелепіпеда й піраміди. Якщо у прямокутному паралелепіпеді всі ребра рівні, то він є кубом (мал. 203). Грані куба — правильні чотирикутники (квадрати). Піраміда називається правильною, якщо її основа — правильний многокутник (наприклад, рівносторонній трикутник (мал. 204), квадрат (мал. 205)), а бічні ребра — рівні. Якщо сполучимо відрізками кінці двох непаралельних діагоналей протилежних граней куба, то отримаємо правильну трикутну піраміду, усі ребра якої рівні (мал. 206).



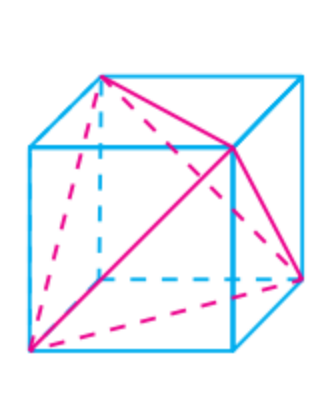
Мал. 203



Мал. 204



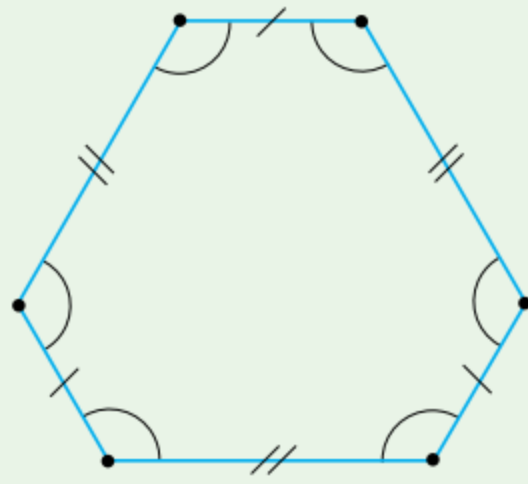
Мал. 205



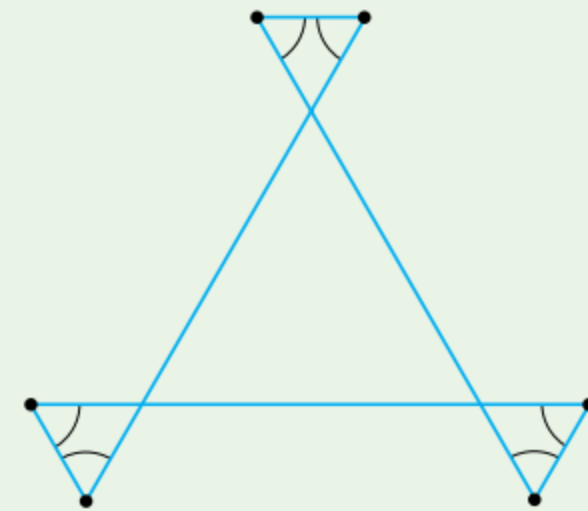
Мал. 206

Дізнайтеся більше

Окремим видом многокутників є *напівправильні многокутники*. Многокутник, у якого всі кути рівні, а сторони рівні через одну, називають напівправильним рівнокутним многокутником. Найпростіший приклад — прямокутник. На малюнках 207, 208 зображено напівправильні рівнокутні шестикутники — опуклий і зірчастий.

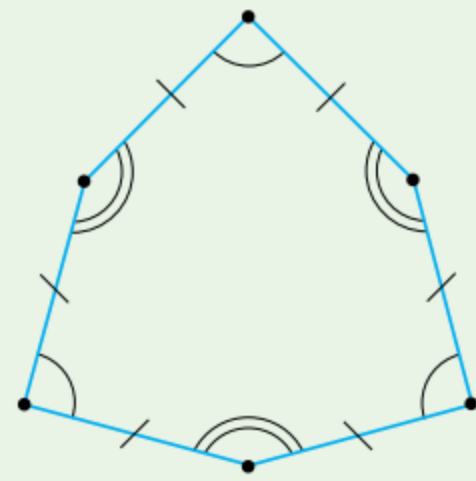


Мал. 207

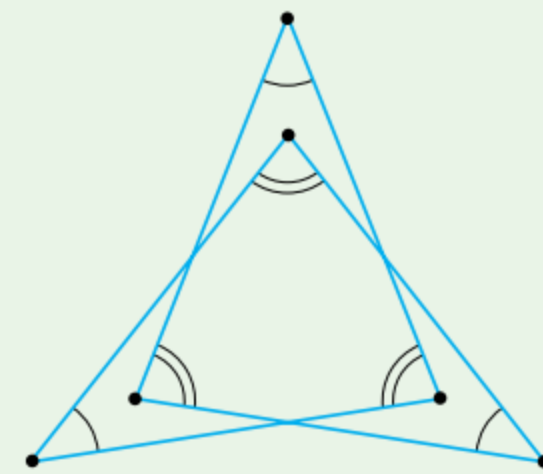


Мал. 208

Якщо у многокутнику всі сторони рівні, а кути рівні через один, то його називають напівправильним рівностороннім многокутником. На малюнках 209, 210 зображено опуклий і зірчастий напівправильні рівносторонні шестикутники.



Мал. 209



Мал. 210

Загальний спосіб побудови напівправильних рівносторонніх многокутників: 1) будуємо два концентричні кола; 2) через їх центр O проводимо $2n$ променів, які ділять кожне коло на $2n$ рівних частин; 3) послідовно нумеруємо ці промені; 4) відмічаємо точки перетину «непарних» променів з першим колом, а «парних» променів — з другим; 5) послідовно сполучаємо ці точки.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
правильний многокутник	regular polygon	regelmäßiges Polygon / (Vieleck)	polygone régulier

qr.orioncentr.com.ua/rzVXH

Пригадайте головне

1. Що таке правильний многокутник, його центр і центральний кут?
2. Як знайти кут; центральний кут правильного n -кутника?
3. За якими формулами знаходять радіуси вписаного й описаного кіл для правильного трикутника, чотирикутника, шестикутника?
4. Як побудувати правильний шестикутник; трикутник; чотирикутник?

Усне тренування

Обчисліть:

1) $10^2 + 5^2 - 25$;

$6^2 + 8^2 + 10$;

$25^2 - 5^2 - 600$;

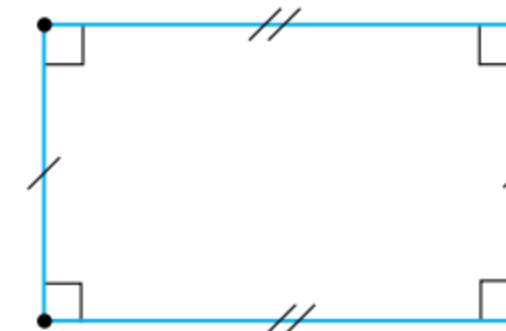
2) $20^2 + 8^2 - 100$;

$11^2 - 10^2 + 50$;

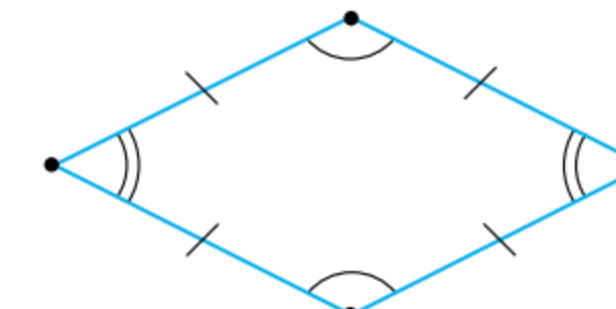
$10^2 + 20^2 - 20$.

Розв'яжіть задачі

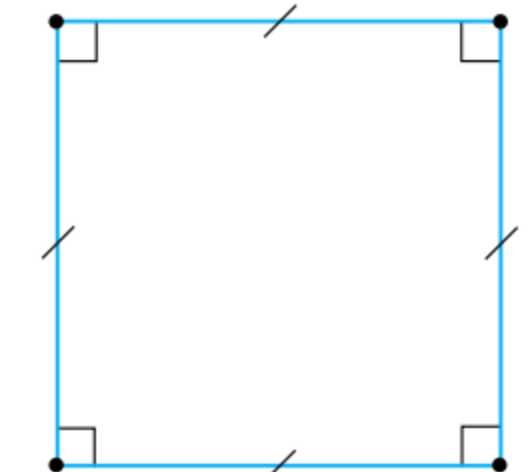
- 657'. Який із чотирикутників, зображених на малюнках 211–213, — правильний? Відповідь поясніть.



Мал. 211



Мал. 212



Мал. 213

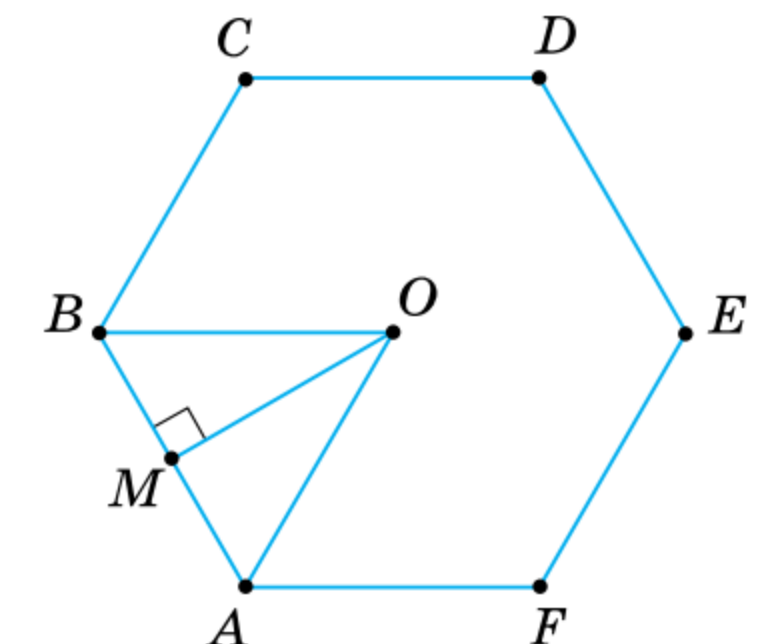
- 658'. Які з тверджень є правильними:

- 1) многокутник є правильним, якщо всі його сторони — рівні;
- 2) будь-який чотирикутник з рівними кутами є правильним;
- 3) трикутник є правильним, якщо всі його кути — рівні;
- 4) будь-який рівносторонній трикутник є правильним?

Відповідь поясніть.

- 659'. На малюнку 214 зображено правильний шестикутник із центром O . Чи правильно, що:

- 1) радіус описаного кола — це відрізок: а) OA ; б) OM ; в) OB ;
- 2) радіус вписаного кола — це відрізок: а) OA ; б) OM ; в) OB ;
- 3) центральний кут шестикутника — це кут: а) MOA ; б) BOM ; в) AOB ?



Мал. 214

660°. Чи правильно, що кут правильного n -кутника дорівнює:

1) $\frac{180^\circ n}{n-2}$; 2) $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$; 3) $180^\circ(n-2)$?

661°. Чи правильно, що центральний кут правильного n -кутника дорівнює:

1) $\frac{180^\circ}{n}$; 2) $180^\circ n$; 3) $\frac{360^\circ}{n}$?

662°. Чи правильно записано формули для знаходження радіусів описаних і вписаних кіл через сторону правильного n -кутника:

1) $R = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$, $r = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$; 2) $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$, $r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$?

663°. Чи правильно записано формули для знаходження радіусів описаних і вписаних кіл через сторону a :

1) правильного трикутника:

а) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

2) правильного чотирикутника:

а) $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$; б) $R = \frac{a}{2}$, $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

3) правильного шестикутника:

а) $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r = a$; б) $R = a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$?

664°. Знайдіть периметр правильного n -кутника зі стороною 4 см, якщо:

1) $n = 5$; 2) $n = 8$; 3) $n = 10$.

665°. Знайдіть периметр правильного n -кутника зі стороною 5 см, якщо $n = 16$.

666°. Знайдіть суму кутів правильного n -кутника, якщо:

1) $n = 5$; 2) $n = 8$; 3) $n = 10$.

667°. Знайдіть суму кутів правильного n -кутника, якщо $n = 16$.

668°. Обчисліть кут правильного n -кутника, якщо: 1) $n = 5$; 2) $n = 12$.

669°. Обчисліть кут правильного 18-кутника.



670°. Знайдіть кількість сторін правильного n -кутника, якщо його кут дорівнює:

1) 135° ; 2) 150° ; 3) 140° .

671°. Скільки сторін має правильний n -кутник, якщо його кут дорівнює:

1) 144° ; 2) 120° ?



qr.orioncentr.com.ua/6uHVY

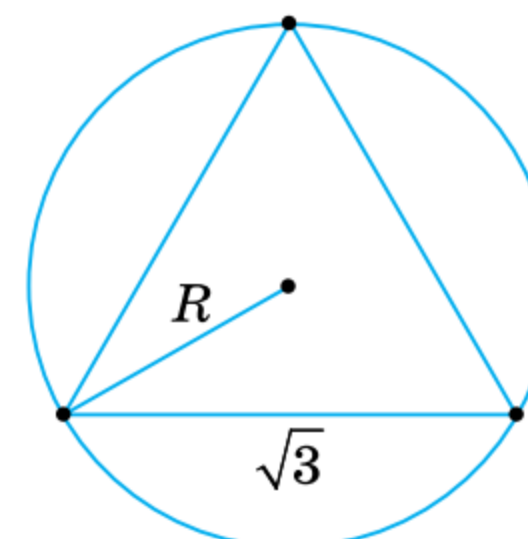
672°. Знайдіть центральний кут правильного n -кутника, якщо:

1) $n = 20$; 2) $n = 24$; 3) $n = 9$.

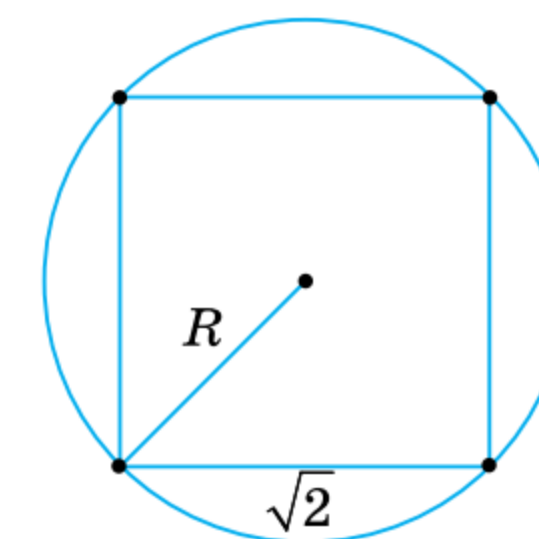
673°. Знайдіть центральний кут правильного 10-кутника.



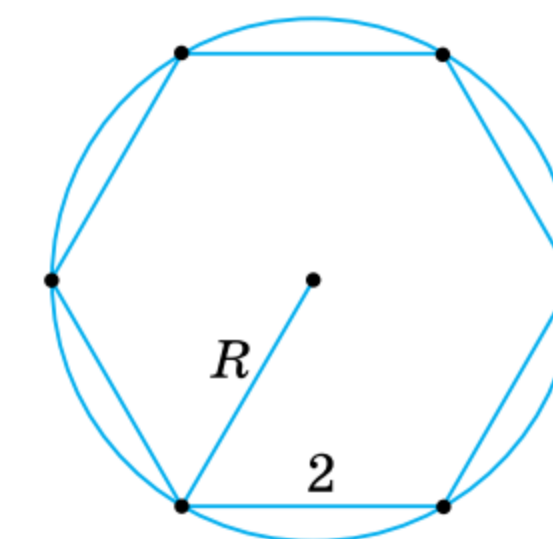
674°. На малюнках 215, 216 зображено правильні многокутники, вписані в коло. За даними на малюнках знайдіть радіус кола.



Мал. 215



Мал. 216



Мал. 217

675°. На малюнку 217 зображено правильний многокутник, вписаний в коло. За даними на малюнку знайдіть радіус кола.

676°. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює: 1) $4\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $6\sqrt{3}$ см.

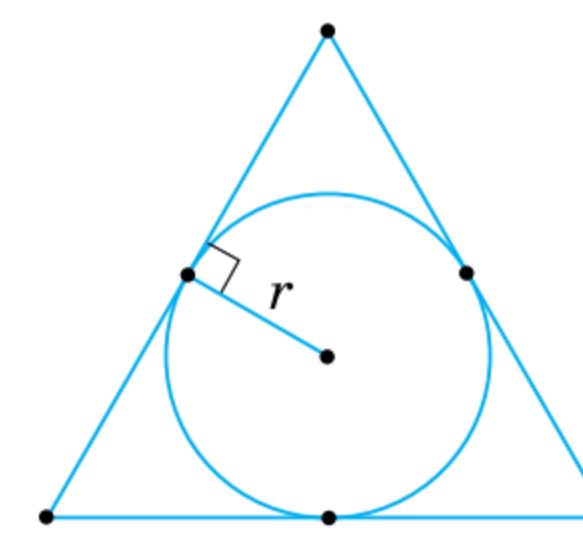
677°. Знайдіть сторону правильного чотирикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

678°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює: 1) 8 см; 2) 16 см; 3) d .

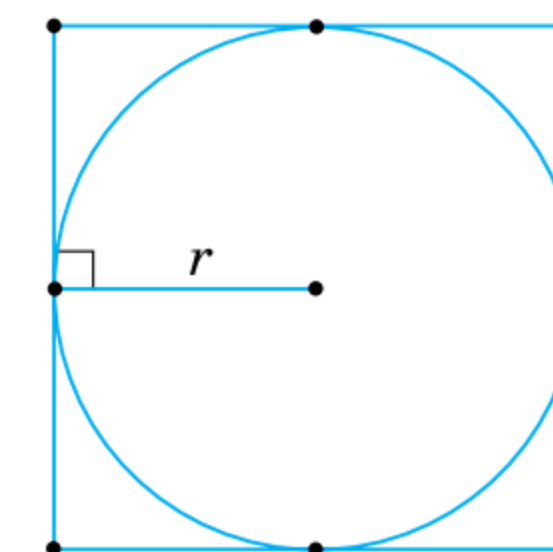
679°. Знайдіть периметр квадрата, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює:

1) $\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{2}$ см.

680°. На малюнках 218, 219 зображено правильні многокутники, описані навколо кола. За даними на малюнках знайдіть радіус кола.

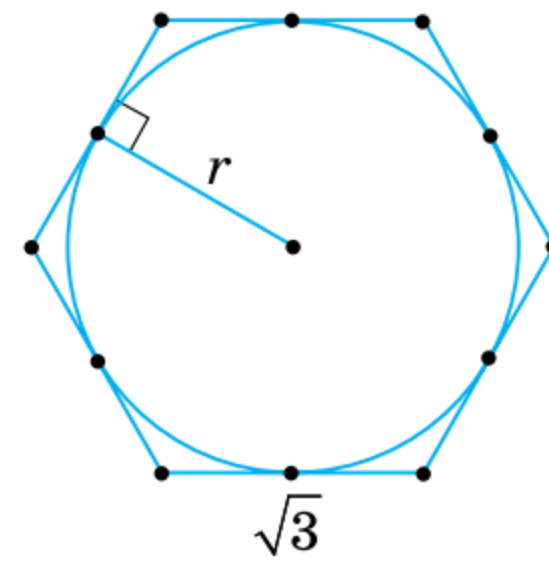


Мал. 218



Мал. 219

681°. На малюнку 220 зображено правильний шестикутник, описаний навколо кола. За даними на малюнку знайдіть радіус кола.



Мал. 220

682°. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює:

- 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) 8 см; 3) $3\sqrt{3}$ см.

683°. Знайдіть сторону правильного чотирикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює:



- 1) 5 см; 2) 6 см.

684°. Знайдіть радіус кола, вписаного в правильний трикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює:

- 1) 10 см; 2) 12 см; 3) 16 см.

685°. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, якщо периметр квадрата дорівнює:



- 1) 12 см; 2) 16 см; 3) P .

686°. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, дорівнює діаметру вписаного в нього кола.

687°. a — сторона правильного трикутника, P — його периметр, R і r — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 25 і заповніть її.



qr.orioncentr.com.ua/ooMnr

Таблиця 25

a	$2\sqrt{3}$ см			
R		$4\sqrt{3}$ см		
r			$6\sqrt{3}$ см	
P				$9\sqrt{3}$ см

688°. Знайдіть периметр правильного шестикутника, якщо радіус описаного кола дорівнює:



- 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 7 см.

689°. a — сторона правильного чотирикутника, P — його периметр, R і r — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошит таблицю 26 і заповніть її.

Таблиця 26

a	6 см			
R		$8\sqrt{2}$ см		
r			10 см	
P				16 см

690°. У квадрат вписано коло, радіус якого дорівнює 4 см. Обчисліть:

- 1) сторону квадрата;
2) радіус кола, описаного навколо квадрата.

691°. Обчисліть радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює:

- 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{3}$ см; 3) $10\sqrt{3}$ см.

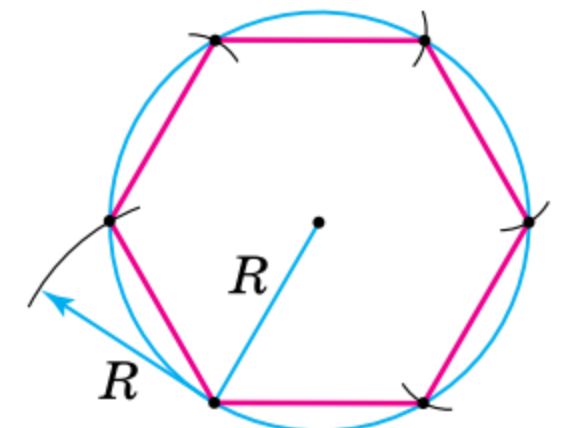
692°. Знайдіть сторону правильного шестикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює:

- 1) 3 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) 1 см.

693°. На малюнку 221 показано побудову правильного шестикутника. Поясніть побудову.

694°. Побудуйте правильний трикутник, дотримуючись плану:

- 1) циркулем накресліть коло;
2) не змінюючи розхилу циркуля, поділіть коло на шість рівних частин;
3) сполучіть відрізками точки поділу через одну.



Мал. 221

695°. Виконайте такі побудови:

- 1) циркулем накресліть коло із центром O ;
2) через точку O проведіть довільну пряму й позначте точки її перетину з колом буквами A і B ;
3) через точку O проведіть пряму, перпендикулярну до прямої AB ; точки перетину цієї прямої з колом позначте буквами C і D ;
4) послідовно сполучіть відрізками точки A, B, C і D .
Як називається побудований многокутник?

696°. Побудуйте правильний шестикутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

697°. Впишіть у коло правильний:

- 1) шестикутник;
2) трикутник;
3) чотирикутник.

698°. Опишіть навколо кола правильний:

1) шестикутник; 2) трикутник; 3) чотирикутник.

699°. Впишіть у коло квадрат, якщо радіус кола дорівнює:

1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см.

700°. Діагональ куба дорівнює d . Знайдіть його сторону.

701°. Діагональ грані куба дорівнює m . Знайдіть діагональ куба.

702°. У піраміді кожне ребро дорівнює a . Знайдіть довжину кола, описаного навколо її грані.

703°. У піраміді кожне ребро дорівнює a . Знайдіть площу круга, вписаного в її грань.

704. Центральний кут правильного многокутника та його кут у сумі становлять 180° . Доведіть.

705. Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?



706. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо:

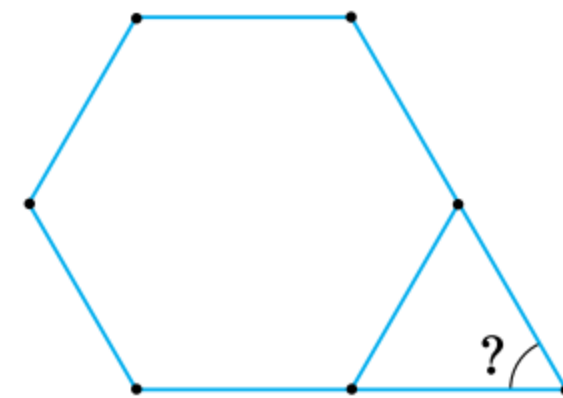
1) радіус вписаного кола вдвічі менший від сторони многокутника;
2) радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного кола?

707. 1. У коло вписано многокутник, усі сторони якого рівні. Чи рівні його кути? Відповідь поясніть.

2. Коло вписано у многокутник, усі кути якого рівні. Чи рівні його сторони? Відповідь поясніть.

708. Два рівні кола перетинаються так, що центр одного кола лежить на іншому колі. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, вершинами якого є точки перетину та центри даних кіл? Відповідь поясніть.

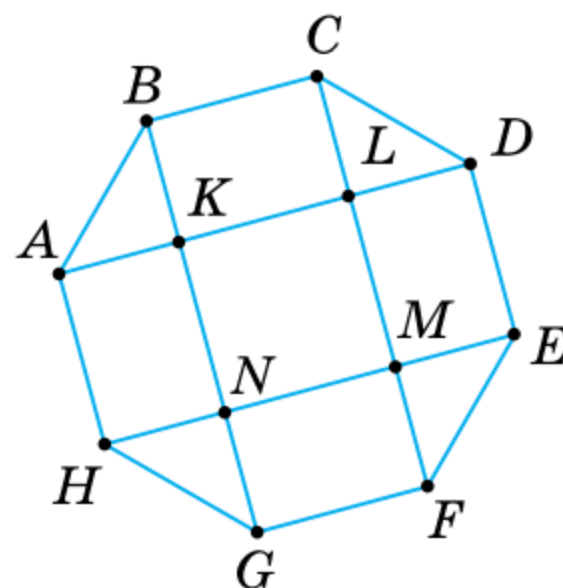
709. Знайдіть кут між двома несусідніми сторонами правильного шестикутника (мал. 222).



Мал. 222

710. Дано правильний п'ятикутник. Доведіть:

1) усі його діагоналі — рівні;
2) кожна діагональ паралельна одній з його сторін;
3) на кожній з діагоналей, що перетинаються, є відрізок, що дорівнює стороні п'ятикутника.



Мал. 223

711. $ABCDEFGH$ — правильний восьмикутник (мал. 223). Доведіть, що точки K, L, M, N — вершини квадрата.

712. $ABCDEFGMN$ — правильний восьмикутник. Доведіть, що точки A, C, E і M є вершинами квадрата.

713. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо різниця між радіусами кіл, описаного навколо правильного трикутника і вписаного в нього, дорівнює:

1) $\sqrt{3}$ см; 2) m .

714. Знайдіть радіуси кіл, вписаного в правильний трикутник й описаного навколо нього, якщо їхня різниця дорівнює:



1) 4 см; 2) n .

715. Знайдіть радіуси кіл, вписаного у квадрат й описаного навколо нього, якщо їхній добуток дорівнює:

1) $4\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$.

716. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо правильного шестикутника і вписаного в нього, якщо їхня різниця дорівнює:

1) 3 см; 2) 5 см; 3) m .

717. У коло вписано правильний трикутник і квадрат. Знайдіть сторону квадрата, якщо периметр трикутника дорівнює:

1) 9 см; 2) 27 см; 3) P .

718. Знайдіть сторону правильного шестикутника, вписаного в коло, якщо сторона правильного трикутника, описаного навколо цього кола, дорівнює:

1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) a .

719. Знайдіть сторону квадрата, описаного навколо кола, якщо сторона правильного шестикутника, вписаного в це коло, дорівнює:

1) 15 см; 2) 17 см; 3) a .

720. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо кола, якщо сторона правильного трикутника, вписаного в це коло, дорівнює:

1) 21 см; 2) 18 см; 3) a .

721. Навколо кола описано квадрат і правильний шестикутник. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр шестикутника дорівнює:

1) $12\sqrt{3}$ см; 2) 36 см; 3) P .

722. Для правильного шестикутника знайдіть сторону, радіуси описаного і вписаного кіл, якщо його більша діагональ дорівнює:

1) 6 см; 2) 8 см; 3) d .

723. Знайдіть сторону правильного шестикутника та радіус вписаного кола, якщо його менша діагональ дорівнює:

1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $12\sqrt{3}$ см; 3) d .

724. Знайдіть діагоналі правильного шестикутника, якщо його сторона дорівнює:

1) 2 см; 2) 8 см; 3) a .

725. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, для одного кола є стороною правильного вписаного трикутника, а для іншого — стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо хорда дорівнює:

1) 9 см; 2) $3\sqrt{3}$ см; 3) a .

726. Сторона якого правильного вписаного в коло n -кутника є хордою, перпендикулярною до радіуса в його середині? Відповідь поясніть.

727. У якому правильному многокутнику радіус вписаного кола вдвічі менший від сторони?

728. На сторонах правильного трикутника поза ним побудовано квадрати. Чи є вершини квадратів вершинами правильного шестикутника? Відповідь поясніть.

729. Побудуйте правильний шестикутник, якщо його більша діагональ дорівнює:

1) 8 см; 2) 10 см; 3) 12 см.

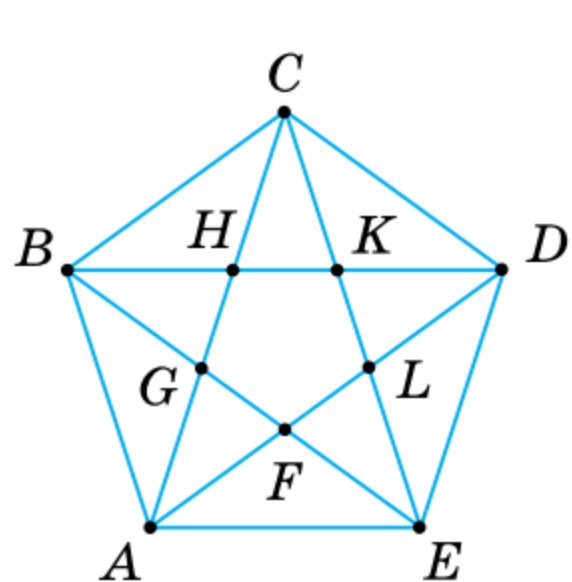
730. Побудуйте правильний чотирикутник, якщо його сторона дорівнює:

1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $3\sqrt{2}$ см.

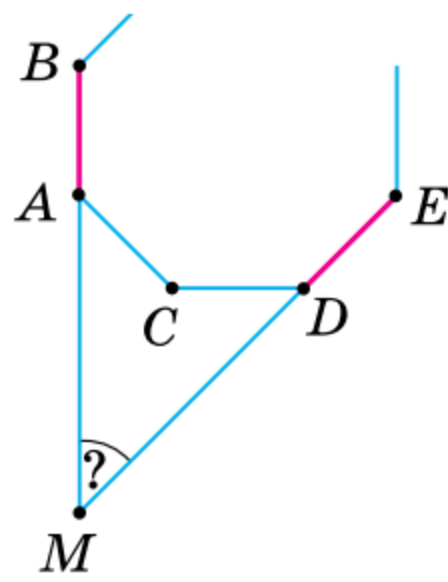
731*. П'ятикутник $ABCDE$ — правильний (мал. 224). Доведіть, що п'ятикутник $FGHKL$ — теж правильний.

732*. Доведіть, що середини сторін правильного n -кутника є вершинами іншого правильного n -кутника.

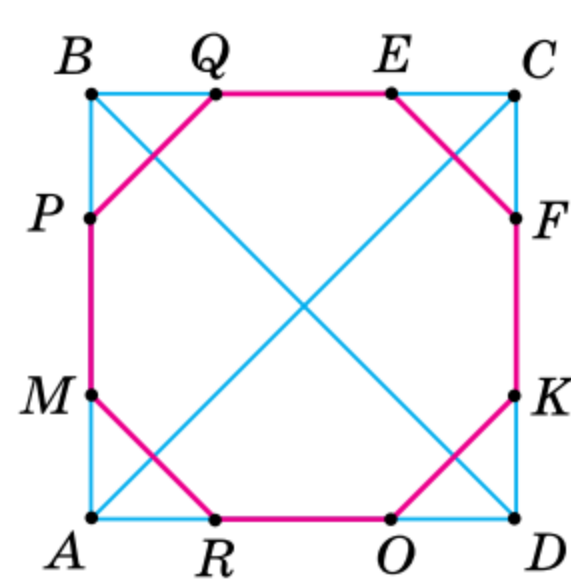
733*. Обчисліть кут між сторонами AB і DE правильного дев'ятикутника (мал. 225).



Мал. 224



Мал. 225



Мал. 226

734*. Від кожної вершини квадрата зі стороною a на його сторонах відкладено відрізки, що дорівнюють половині його діагоналі

(мал. 226). Здобуті 8 точок послідовно сполучено відрізками. Доведіть, що утворений восьмикутник — правильний.

735*. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки всередині правильного n -кутника до його сторін не залежить від вибору точки.

736*. Два рівні кола перетинаються так, що центр одного кола лежить на іншому колі. Через одну точку їх перетину проведено спільну січну. Дві інші точки перетину січної з колами сполучено відрізками з другою точкою перетину кіл. Якого виду трикутник утворився при цьому?

737*. За яких значень n сторона правильного n -кутника:

1) більша за радіус описаного кола;
2) дорівнює радіусу описаного кола;
3) менша від радіуса описаного кола?

738*. Три рівні кола, що попарно дотикаються одне до одного, зовні дотикаються до кола радіусом R . Знайдіть радіуси цих кіл, якщо:

1) $R = 2$ см; 2) $R = 4$ см.

739*. У правильному восьмикутнику зі стороною a сполучено середини чотирьох сторін, узятих через одну, так, що утворився квадрат. Знайдіть сторону цього квадрата.

740*. У правильному 12-кутнику зі стороною a сполучено середини шести сторін, узятих через одну, так, що утворився правильний шестикутник. Знайдіть його сторону.

741*. Доведіть, що:

$$1) a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}; \quad 2) r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

де a_8 і r_8 — відповідно сторона правильного 8-кутника й радіус вписаного в нього кола; R — радіус описаного кола.

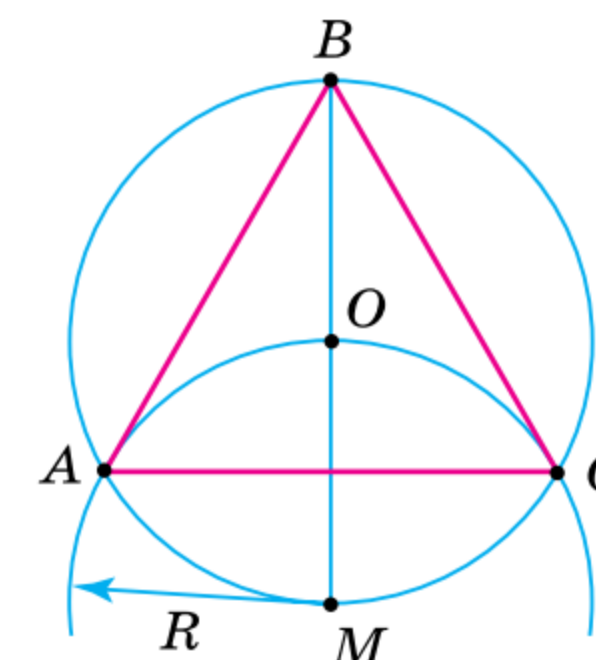
742*. Доведіть, що:

$$1) a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}; \quad 2) r_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

де a_{12} і r_{12} — відповідно сторона правильного 12-кутника й радіус вписаного в нього кола; R — радіус описаного кола.

743*. Побудуйте трикутник так, як показано на малюнку 227. Доведіть, що $\triangle ABC$ — правильний.

744*. Побудуйте правильний восьмикутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.



Мал. 227

745*. Побудуйте правильний 12-кутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

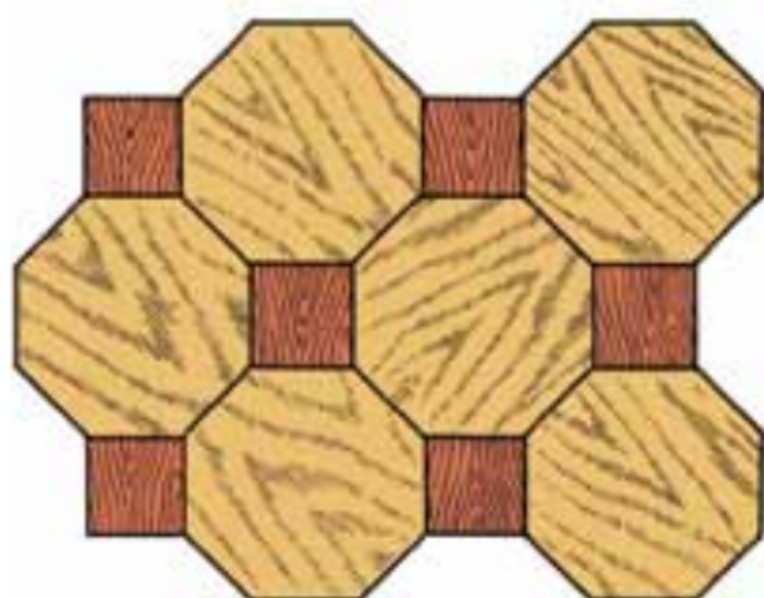
Проявіть компетентність

746. Доведіть, що підлогу можна покрити плитками, що мають форму:

- 1) правильних трикутників;
- 2) правильних чотирикутників;
- 3) правильних шестикутників.

Запропонуйте схему такого покриття.

747. Підлогу покрили плитками, що мають форму правильних чотирикутників і восьмикутників (мал. 228). Поясніть, чому можливе таке покриття.



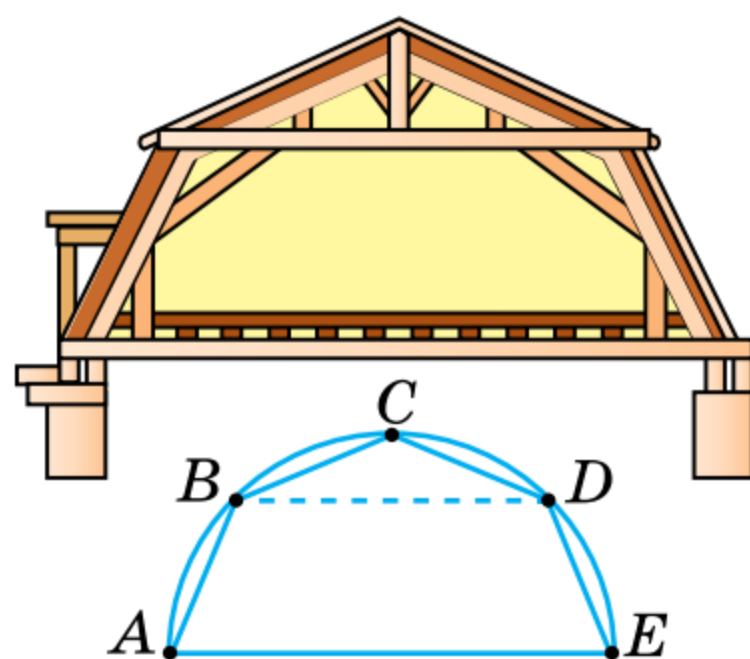
Мал. 228

748. Знайдіть розмір отвору h ключа для правильної шестигранної гайки, якщо ширина грані гайки $a = 2,5$ см (мал. 229). Величина зазору між гранями гайки та ключа дорівнює $0,5$ мм.

749. Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному перерізі половину правильного восьмикутника (мал. 230). Знайдіть ширину перекриття BD , сторону восьмикутника та висоту мансардної кімнати $ABCDE$, якщо $AE = 6$ м.



Мал. 229



Мал. 230

§ 11. ДОВЖИНА КОЛА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

1. Довжина кола

Ситуація. Учнівство 9-А класу бере участь у шкільному проекті з озеленення території. Планується облаштувати посеред подвір'я круглу клумбу радіусом $1,5$ м. Потрібно порахувати, скільки рулонів бордюної стрічки знадобиться, щоб обвести клумбу по колу, якщо в одному рулоні міститься 2 м стрічки.



qr.orioncentr.com.ua/lbeAu



Як визначити кількість рулонів?

Спочатку треба знайти довжину кола клумби.



У 6 класі за допомогою вимірювання ви встановили формулу для обчислення довжини кола $C = 2\pi R$, де R — радіус кола, $\pi \approx 3,14$.

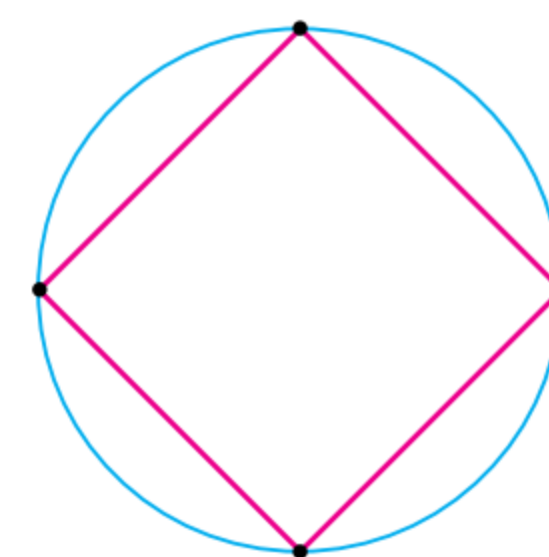


Як вивести цю формулу більш строго?

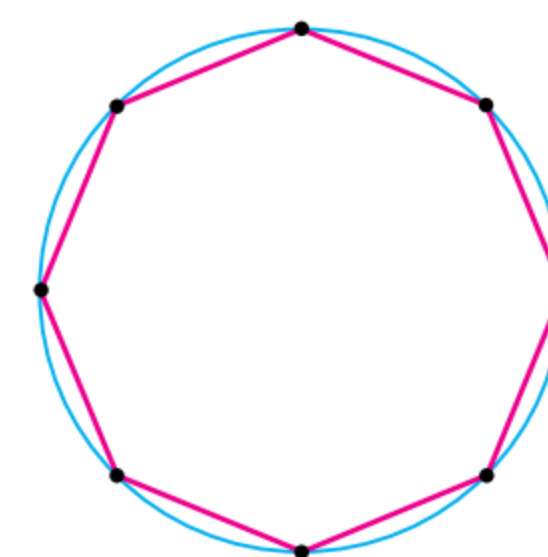
Поміркуємо.



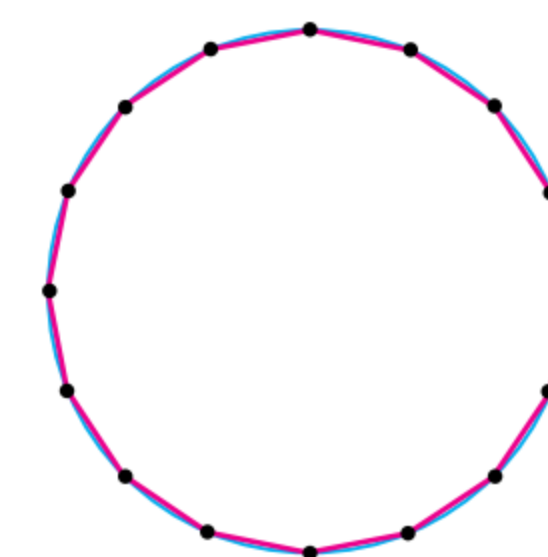
Подивіться на малюнки 231–233. Зрозуміло, що за умови необмеженого збільшення кількості сторін n вписаного в коло правильного n -кутника його периметр P_n необмежено наближається до довжини кола C . Якщо n дуже велике, то довжина кола дуже мало відрізняється від периметра P_n .



Мал. 231



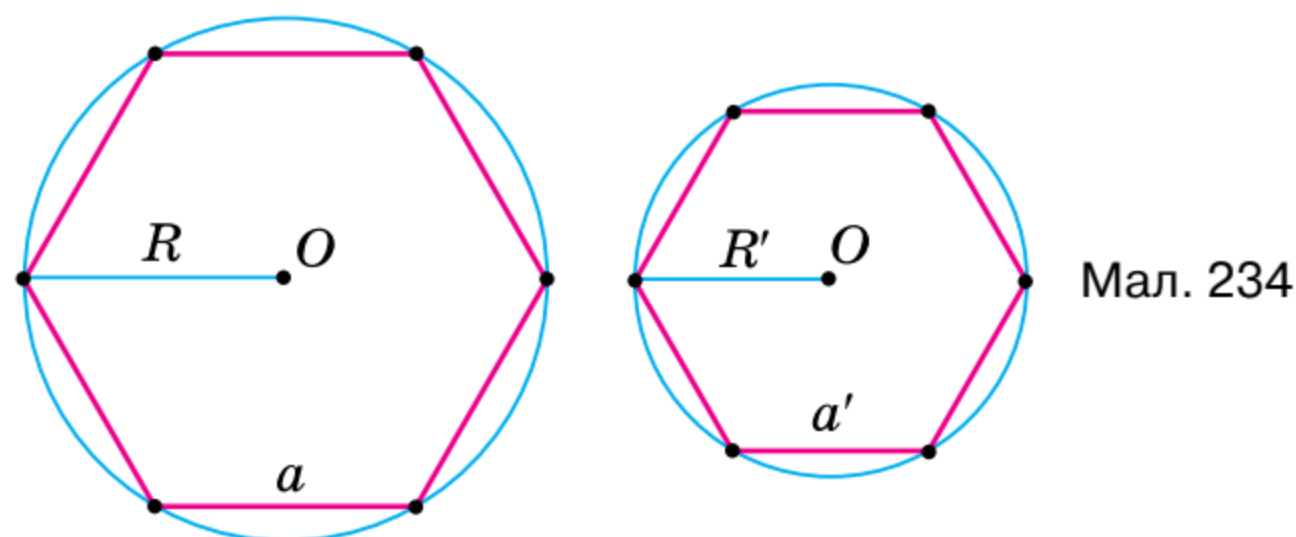
Мал. 232



Мал. 233

Виведемо формулу для обчислення довжини кола. Візьмемо два довільні кола (мал. 234). Нехай C і C' — довжини цих кіл, а R і R' — їхні радіуси. У кожне із цих кіл впишемо правильні n -кутники з однаковим числом сторін. Позначимо через a_n і a'_n їхні сторони, а через P_n і P'_n — їхні периметри. Виразимо периметри цих n -кутників через радіуси R і R' кіл.

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \quad \text{і} \quad P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$



Мал. 234

Поділивши ці рівності почленно, одержимо: $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}$. Якщо число сторін n необмежено збільшувати, то периметри P_n і P'_n прямуватимуть до довжин кіл C і C' , а відношення периметрів — до відношення довжин кіл $\frac{C}{C'}$. Отже, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ або $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Ми довели важливу властивість довжини кола.



Відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.



Це відношення позначають грецькою буквою π (читають «пі»): $\frac{C}{2R} = \pi$.

Число π — ірраціональне. Його наближене значення: $\pi \approx 3,14$.

Запам'ятайте!

Формула довжини кола:

$$C = 2\pi R.$$



Радіус R або діаметр D кола, довжина якого C , можна знайти з формули $C = 2\pi R$: $R = \frac{C}{2\pi}$ або $D = \frac{C}{\pi}$.



Як визначити кількість рулонів стрічки в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

Поміркуємо.



Знайдемо довжину кола (тобто довжину бордюра навколо клумби):

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 = 9,42 \text{ (м)}.$$

Визначимо, скільки рулонів стрічки знадобиться, щоб обвести клумбу по колу:

$$n = \frac{C}{2} = \frac{9,42}{2} = 4,71 \text{ (шт)}.$$

Отже, знадобиться 5 рулонів стрічки, оскільки не можна купити частину рулону.

2. Довжина дуги кола

qr.orioncentr.com.ua/5QNxd



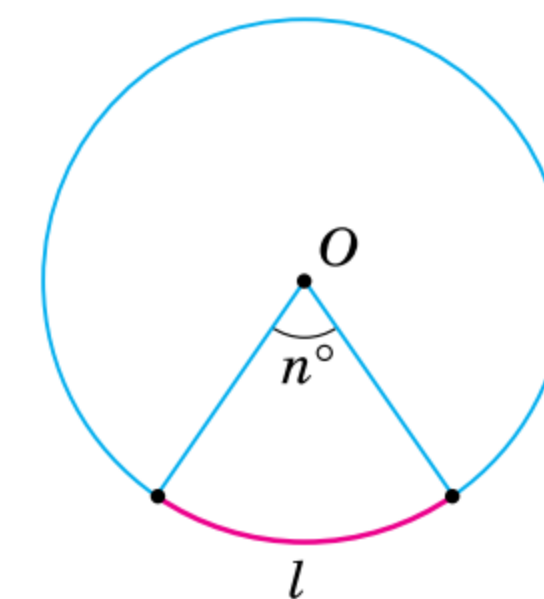
Як знайти довжину дуги кола?

Поміркуємо.



Спочатку знайдемо довжину дуги, градусна міра якої дорівнює 180° . Це півколо, тому його довжина вдвічі менша від довжини кола й дорівнює πR .

Знайдемо довжину l дуги кола, яка відповідає центральному куту n° (мал. 235). Розгорнутому куту відповідає довжина півкола πR . Отже, куту в 1° відповідає дуга завдовжки $\frac{\pi R}{180^\circ}$. Тоді куту в n° відповідає дуга, в n разів більша: $\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n$.



Мал. 235

Запам'ятайте!

Формула довжини l дуги кола градусної міри n° :

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}.$$

Задача Довжина дуги кола дорівнює 4π см, а її градусна міра — 120° . Знайдіть радіус кола.

Розв'язання З формули $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ знаходимо:

$$R = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi n^\circ} = \frac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi \cdot 120^\circ} = 6 \text{ (см)}.$$



Чи зміниться радіус кола, якщо за одиницю вимірювання дуги кола візьмемо 1 мм?

Ні.



Довжина радіуса не зміниться, але буде виражена інакше: $R = 60$ мм.



Пам'ятайте, що за формулою $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ також знаходимо:

1) радіус R кола за довжиною його дуги l та її градусною мірою n° :

$$R = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi n^\circ};$$

2) градусну міру n° дуги за її довжиною l та радіусом R кола:

$$n^\circ = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi R}.$$

Дізнайтеся більше

1. Позначення буквою π відношення довжини кола до діаметра в 1706 р. увів англійський математик **Вільям Джонс** (1616–1703). Воно походить від грецького слова *περίφερεia* — периферія, що означає «коло». **Леонард Ейлер** (1707–1783), застосувавши методи вищої математики, знайшов для π наближення з 153 правильними знаками.

Знайти наближення π намагалися ще в глибоку давнину. Вавилоняни (близько 2000 р. до н. е.) відкрили, що радіус шість разів уміщується в колі, звідси було зроблено припущення, що довжина кола дорівнює $6R$.

У III ст. до н. е. видатний давньогрецький учений Архімед виявив, що значення π дуже близьке до значення звичайного дробу $\frac{22}{7}$, тобто $3\frac{1}{7}$. Це число відрізняється від точного значення π менш ніж на 0,002.

Простий спосіб запам'ятати число π з точністю до шести значущих цифр після коми: 1) випишіть парами перші три натуральні непарні числа: 113355; 2) розділіть список навпіл та поділіть друге число на перше: $\frac{355}{113} = 3,141592\dots$

2. У 7 класі ви дізналися, що кути вимірюють не лише в градусах, а й у радіанах. Що таке радіанна міра кута?

Радіанною мірою кута називається відношення довжини відповідної дуги кола до його радіуса. З формули для довжини дуги кола випливає, що $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$,

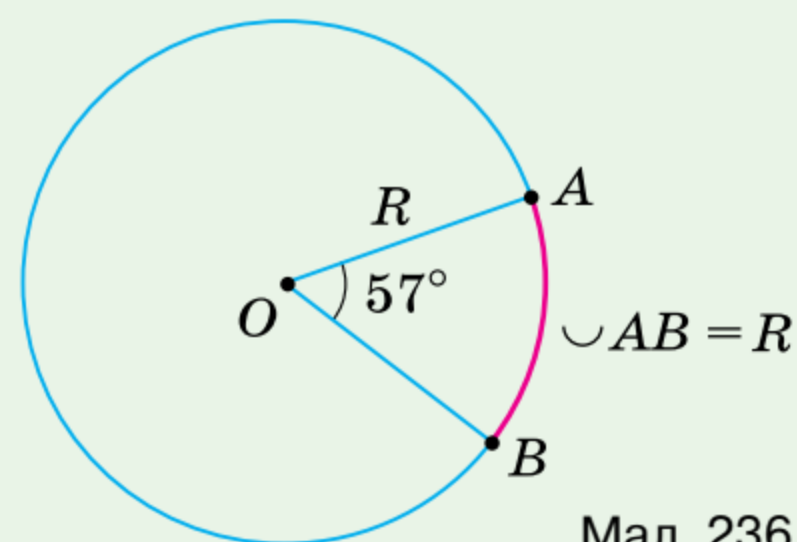
тобто радіанну міру кута одержуємо з його градусної міри множенням на $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Зокрема, радіанна міра кута 180° дорівнює π , радіанна міра прямого кута — $\frac{\pi}{2}$.

Одиницею радіанної міри кутів є *радіан*. Кут в один радіан — це кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу (мал. 236). Градусна міра кута в один радіан дорівнює $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

Оскільки дріб $\frac{\pi n^\circ}{180^\circ}$ є радіанною мірою дуги, то формулу довжини дуги можна записати ще й так: $l = \alpha R$, де α — радіанна міра дуги.

Отже, **довжина дуги кола дорівнює добутку її радіанної міри на радіус кола.**



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
довжина кола	circumfe- rence (of a circle)	Umfang des Kreises	longueur du cercle

qr.orioncentr.com.ua/UIBIY

Пригадайте головне

1. Поясніть, чому відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.
2. Запишіть і поясніть формулу для знаходження довжини кола; довжини дуги кола.
3. Яке наближене значення числа π ?

Усне тренування

Обчисліть:

- | | | |
|-------------------------|----------------------|-----------------------|
| 1) $10^2 + 6^2 - 10$; | $12^2 + 5^2 + 1$; | $30^2 - 10^2 - 400$; |
| 2) $20^2 + 8^2 + 100$; | $25^2 - 5^2 + 100$; | $9^2 + 10^2 - 20$. |

Розв'яжіть задачі

750'. Чи є правильною рівність:

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) $\frac{2R}{C} = \pi$; | 2) $\frac{C}{R} = \pi$; | 3) $\frac{C}{2R} = \pi$? |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|

751'. Чи правильно записано формулу для знаходження довжини C кола радіусом R :

- | | | |
|------------------|---------------|-------------------|
| 1) $C = \pi R$; | 2) $C = 2R$; | 3) $C = 2\pi R$? |
|------------------|---------------|-------------------|

752'. Чи правильно записано формулу для знаходження довжини l дуги кола радіусом R , що відповідає куту n° :

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1) $l = \frac{R}{180^\circ}$; | 2) $l = \frac{Rn^\circ}{180^\circ}$; | 3) $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$? |
|--------------------------------|---------------------------------------|--|

753'. Накресліть коло. Виміряйте його радіус і знайдіть довжину кола.

754'. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| 1) 5 см; | 2) 10 см; | 3) 12 см. |
|----------|-----------|-----------|

755'. Знайдіть довжину кола, якщо його діаметр дорівнює:

- | | |
|-------------------|----------|
| E 1) 4 см; | 3) 8 см. |
| 2) 6 см; | |

756'. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:

- | | | |
|---------------|----------------|---------------|
| 1) 4π см; | 2) 14π см; | 3) 2π см. |
|---------------|----------------|---------------|

- 757°.** R — радіус кола, D — його діаметр, C — довжина кола. Накресліть у зошиті таблицю 27 і заповніть її.

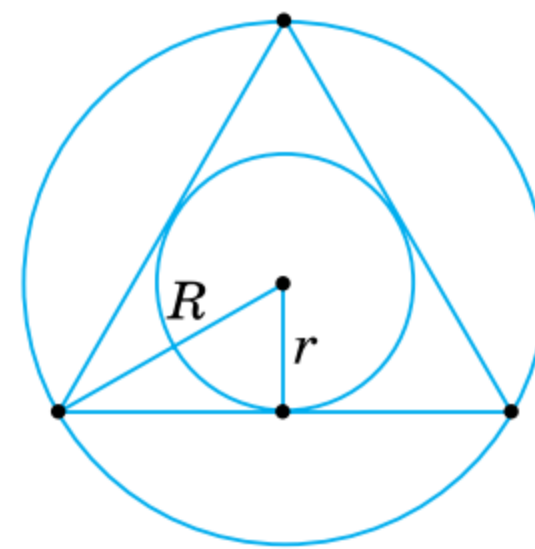
qr.orioncentr.com.ua/AxGhe

Таблиця 27

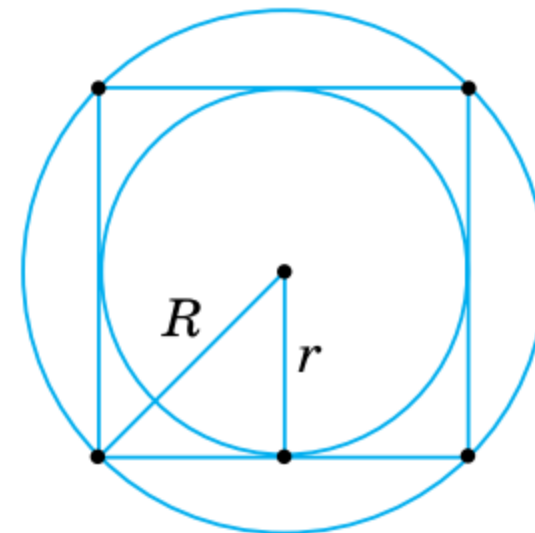
R	2,5 см				11 см
D		20 см		9,6 см	
C			18,4π см		



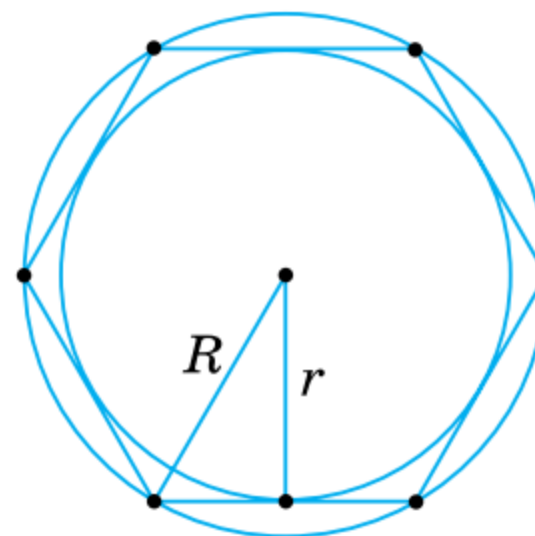
- 758°.** Побудуйте коло, довжина якого дорівнює:
1) 6π см; 2) 18π см; 3) 20π см.
- 759°.** Як зміниться довжина кола, якщо його радіус:
1) збільшити на 5 см;
2) зменшити на 3 см;
3) збільшити у 2 рази?
- 760°.** Сторона правильного трикутника дорівнює $6\sqrt{3}$ см (мал. 237). Знайдіть довжину кола:
1) вписаного в цей трикутник;
2) описаного навколо нього.
- 761°.** Сторона квадрата дорівнює 8 см (мал. 238). Знайдіть довжину кола:
1) вписаного в цей квадрат;
2) описаного навколо нього.
- 762°.** Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 5 см і 12 см; 2) 7 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.
- 763°.** Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо його сторона і кут дорівнюють:
1) 6 см і 30° ;
2) 4 см і 45° ;
3) 8 см і 60° .
- 764°.** Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см (мал. 239). Знайдіть довжину кола:
1) вписаного в цей шестикутник;
2) описаного навколо нього.
- 765°.** Знайдіть довжину дуги кола радіусом 6 см, яка відповідає центральному куту:
1) 30° ; 2) 60° ; 3) 120° .



Мал. 237



Мал. 238



Мал. 239

- 766°.** Знайдіть довжину дуги кола радіусом 4 см, яка відповідає центральному куту:
1) 90° ; 2) 45° ; 3) 135° .

- 767°.** Дугі кола завдовжки l відповідає центральний кут n° . Знайдіть радіус кола, якщо:
1) $l = 3$ см, $n^\circ = 15^\circ$; 2) $l = 12\pi$ см, $n^\circ = 20^\circ$; 3) $l = 6$ см, $n^\circ = 18^\circ$.

- 768°.** R — радіус кола, l — довжина дуги, що відповідає центральному куту n° . Накресліть у зошиті таблицю 28 і заповніть її.

qr.orioncentr.com.ua/ekNwx

Таблиця 28

R	15 см		12 см
n	45°	40°	
l		20π см	2π см



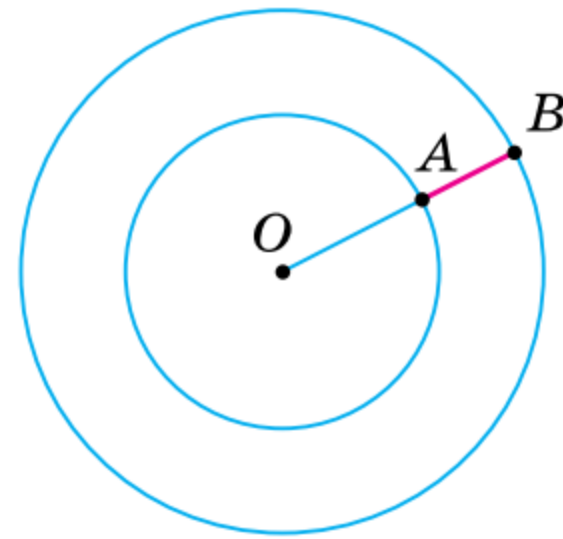
- 769°.** Довжина дуги кола радіусом R дорівнює l . Знайдіть градусну міру центрального кута, якому відповідає ця дуга, якщо:
1) $l = 4\pi$ см, $R = 9$ см; 2) $l = 6\pi$ см, $R = 10$ см; 3) $l = 8\pi$ см, $R = 18$ см.
- 770°.** Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону на відрізки завдовжки b і c , рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $b = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $b = 5$ см, $c = 8$ см.
- 771°.** Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо його діагоналі дорівнюють: 1) 18 см і 24 см; 2) 12 см і 16 см.
- 772°.** У рівнобічну трапецію з основами a і b та бічною стороною c вписано коло. Знайдіть довжину кола, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 18$ см; 2) $a = 32$ см, $b = 18$ см.
- 773°.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b , а діагональ — d . Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $d = 20$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $d = 13$ см.
- 774°.** Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо:
1) довжина кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 8π см;
2) довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 14π см.
- 775°.** Знайдіть сторону правильного шестикутника, якщо:
1) довжина кола, вписаного в цей шестикутник, дорівнює $6\sqrt{3}\pi$ см;
2) довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 2π см.
- 776°.** Як побудувати коло, довжина якого дорівнює:
1) сумі довжин двох даних кіл;
2) різниці довжин двох даних кіл?

777. Знайдіть довжину кола, якщо вона більша за діаметр: 1) на 10 см; 2) на m .

778. Довжини двох кіл, що мають спільний центр, дорівнюють C і C_1 . Знайдіть ширину AB кільця (мал. 240), якщо:

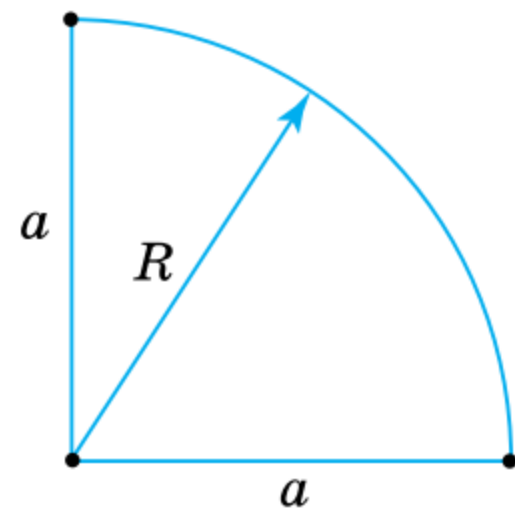
1) $C = 10\pi$ см, $C_1 = 4\pi$ см;

2) $C = 16\pi$ см, $C_1 = 6\pi$ см.

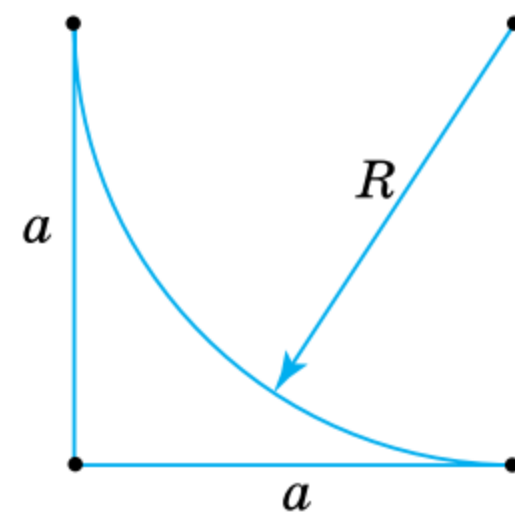


Мал. 240

779. Порівняйте периметри фігур, зображених на малюнках 241 і 242.



Мал. 241



Мал. 242

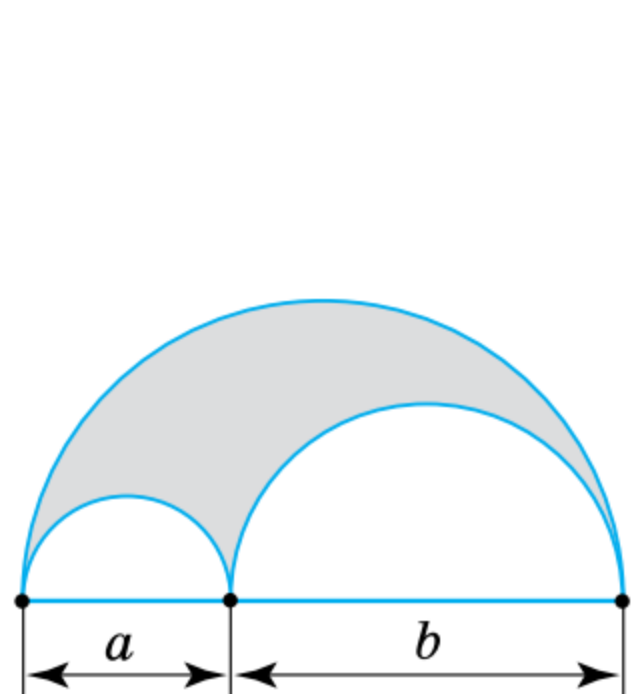
780. За даною довжиною дуги l знайдіть хорду, що сполучає її кінці, якщо дуга містить: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

781. Знайдіть довжину дуги, якщо хорда, що її стягує, дорівнює a , а дуга містить:

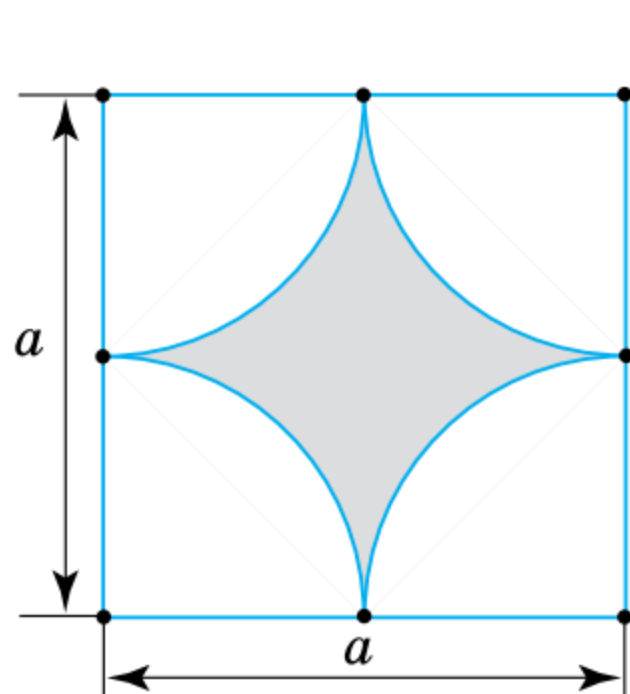


1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

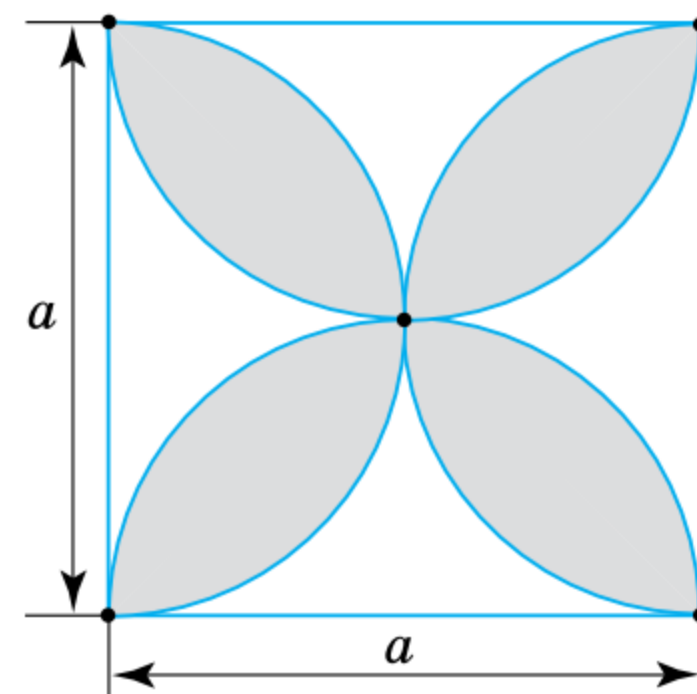
782. За даними на малюнках 243–245 знайдіть периметри зафарбованих фігур.



Мал. 243



Мал. 244



Мал. 245

783*. Три кола попарно дотикаються зовні. Знайдіть довжину кола, яке проходить через точки дотику, якщо радіуси трьох кіл дорівнюють: 1) 9 см, 16 см, 20 см; 2) 1 см, 2 см, 3 см.

784*. У колі по один бік від центра проведено дві паралельні хорди завдовжки a і b . Відстань між хордами дорівнює c . Знайдіть довжину кола, якщо:

1) $a = 40$ см, $b = 48$ см, $c = 8$ см; 2) $a = 120$ см, $b = 32$ см, $c = 38$ см.

785*. Діаметр $2R$ кола поділено на n рівних частин і на кожній із цих частин, як на діаметрі, побудовано коло. Чому дорівнює сума довжин цих кіл?

786*. Дуга в 60° довша за хорду, що стягує її, на 14 см. Знайдіть довжину хорди.

787*. Дуга радіусом 4 см, що відповідає центральному куту в 120° , дорівнює довжині деякого кола. Знайдіть радіус цього кола.

788*. В одному з двох кіл, що перетинаються, дуга, яку стягує їхня спільна хорда, дорівнює 45° , а в іншому — 60° . Яке коло має більшу довжину?

789*. Спільна хорда двох кіл стягує дуги в 60° і 120° . Знайдіть відношення довжин цих кіл.

Проявіть компетентність

790. Скільки стовпчиків потрібно для будівництва паркана навколо майданчика, що має форму круга, якщо відстань між стовпчиками (за дугою кола) має дорівнювати приблизно півтора метра, а діаметр майданчика — 60 м?

791. Щоб знайти товщину дерева (діаметр), можна виміряти його обхват (довжину кола). Знайдіть товщину дерева, обхват якого дорівнює: 1) 2 м; 2) 2,5 м.

792. На котушці є 80 витків дроту. Знайдіть довжину дроту, якщо діаметр котушки дорівнює 0,5 м.

793. Вантаж піднімають за допомогою блока, який зображено на малюнку 246. На яку висоту підніметься вантаж за 9 обертів блока, якщо його діаметр дорівнює 20 см?

794. Як знайти відстань до води в колодязі, якщо можна виміряти діаметр вала, на який намотується ланцюг для відра?

795. Знайдіть довжину земного екватора, якщо радіус земної кулі дорівнює 6381 км.



Мал. 246

§ 12. ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

1. Площа круга

Ситуація. Максим, Андрій і Наталка вирішили замовити піцу. На сайті піцерії є дві пропозиції за однаковою ціною: велика піца діаметром 30 см або дві малі піци діаметром 20 см кожна. Хлопці стверджують, що одну велику піцу замовити вигідніше. А Наталка з ними не погоджується.



qr.orioncentr.com.ua/I652M



Як визначити, яку пропозицію вигідніше вибрати?

Знайти площі кругів великої і двох малих піц.



Ви вже знаєте, що кругом називають частину площини, обмежену колом (мал. 247).

Виведемо формулу для обчислення площі круга. Впишемо в круг радіусом R правильний многокутник $ABCD...F$ (мал. 248) й обчислимо його площу. Радіуси, проведені у вершини многокутника, розбивають його на n трикутників, кожний з яких дорівнює трикутнику AOF .

Тому $S_{ABCD...F} = n \cdot S_{\triangle AOF}$.

Проведемо висоту OK трикутника AOF .

Оскільки $S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2} AF \cdot OK$, то $S_{ABCD...F} = \frac{1}{2} (n AF \cdot OK) = \frac{P \cdot OK}{2}$, де P — периметр n -кутника.

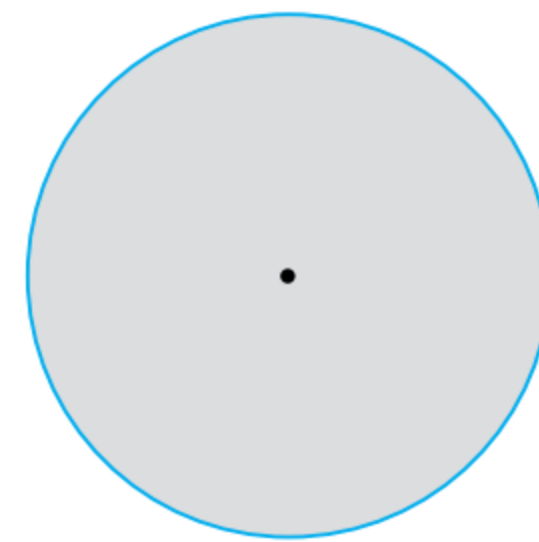
За досить великого n периметр P як заведено мало відрізняється від довжини кола $C = 2\pi R$, висота OK — від радіуса R кола, а площа многокутника $S_{ABCD...F}$ як заведено мало відрізняється від площі S круга. Тоді площа круга дорівнює:

$$S = \frac{CR}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2.$$

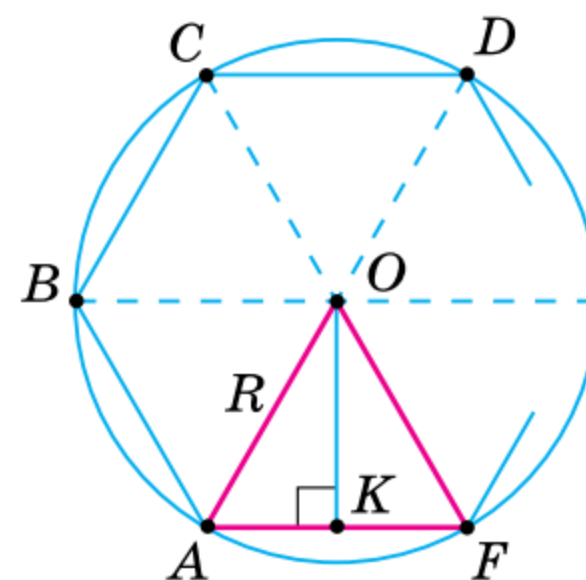
Запам'ятайте!

Формула площі круга радіусом R :

$$S = \pi R^2.$$



Мал. 247



Мал. 248



Яку пропозицію вибрати в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

Поміркуємо.



Площа великої піци $S = \pi \cdot 15^2 \approx 706,5$ (см²), загальна площа двох малих піц $S = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 628$ (см²). Отже, одна велика піца має більшу площу, ніж дві малі, тому вигідніше замовити велику.

Задача Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює 25π см².

Розв'язання З формули $S = \pi R^2$ одержимо: $R^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{25\pi}{\pi} = 25$ (см²). Звідси $R = \sqrt{25} = 5$ (см).



Чи зміниться радіус круга, якщо за одиницю вимірювання площі круга візьмемо 1 мм?

Ні.



Справді, довжина радіуса не зміниться, але буде виражена інакше: $R = 50$ мм.



Радіус R або діаметр D круга, площа якого дорівнює S , можна знайти з формули $S = \pi R^2$:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ або } D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

2. Площа кругового сектора та сегмента

qr.orioncentr.com.ua/QxxNy



Для яких частин круга зазвичай знаходять площу?

Для кругового сектора і сегмента.



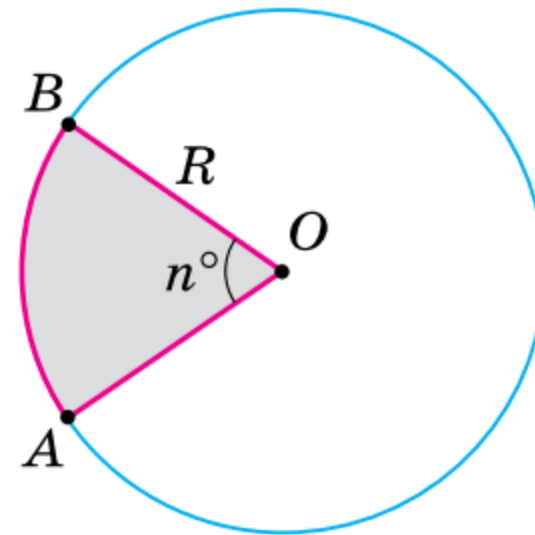
Запам'ятайте!

Круговим сектором називається частина круга, обмежена двома радіусами й дугою.

На малюнку 249 сектор AOB зафарбовано. Дугу, що обмежує сектор, називають *дугою сектора*.

Нехай сектор AOB круга радіусом R має центральний кут n° . Тоді площа сектора із центральним кутом в 1° дорівнює $\frac{\pi R^2}{360^\circ}$, а площу сектора із центральним кутом n° визначають за формулою:

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}.$$



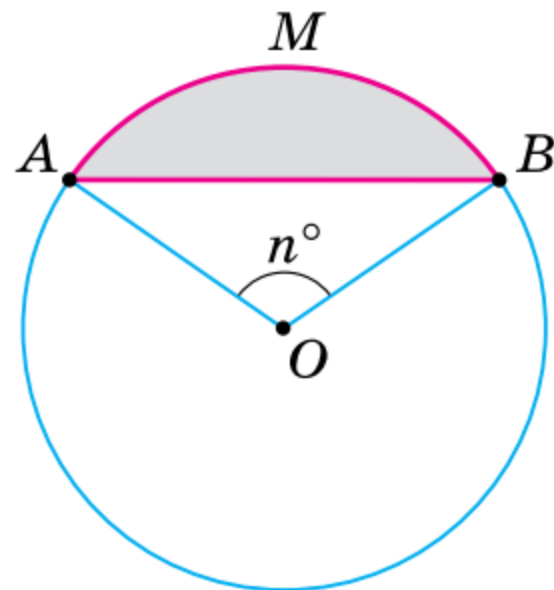
Мал. 249

Запам'ятайте!

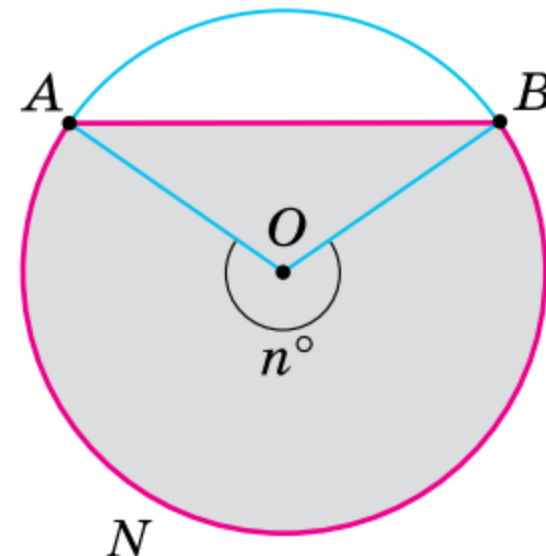
Круговим сегментом називають частину круга, обмежену хордою й дугою.

На малюнку 250 сегмент AMB зафарбовано.

Розглянемо сегмент круга, дуга якого містить n° . Якщо $n^\circ < 180$ (мал. 250), то площа сегмента дорівнює різниці площ сектора AOB і $\triangle AOB$, а якщо $n^\circ > 180^\circ$ — то їхній сумі (мал. 251).



Мал. 250



Мал. 251

Отже, площу кругового сегмента визначають за формулою:

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} \pm S_{\triangle AOB}.$$



Яка формула площі сегмента з дугою 180° ?

Поміркуймо.



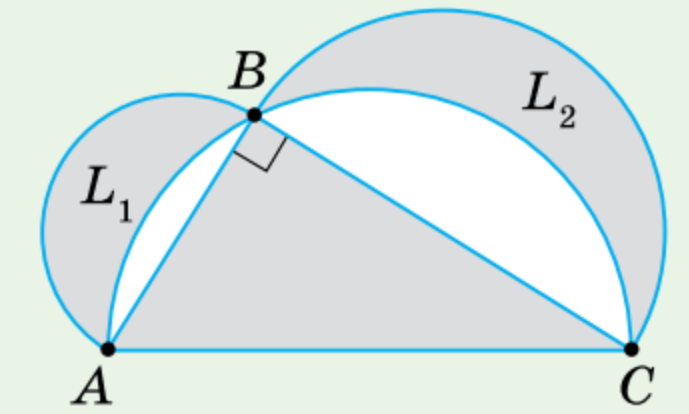
Такий сегмент — це півкруг, тому його площа дорівнює:

$$S = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Дізнайтеся більше

1. Стародавні греки намагалися побудувати циркулем і лінійкою квадрат, рівновеликий даному кругу, і в такий спосіб точно обчислити площу круга. Задача дістала назву — *квадратура круга*.

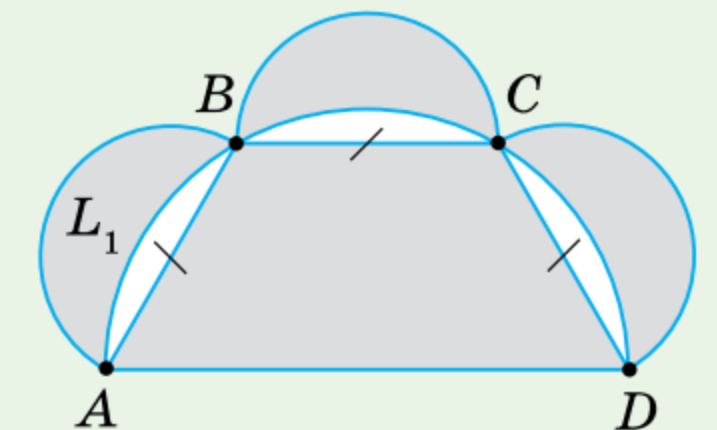
Один із підходів до розв'язування цієї задачі обрав Гіппократ з острова Хіос (південна частина Егейського моря), який жив у V ст. до н. е. Задачу про квадратуру круга вчений намагався розв'язати, відшукуючи квадратуру серпків — фігур, обмежених дугами двох кіл. Найпростіші серпки Гіппократа L_1 і L_2 (мал. 252) можна отримати, якщо в півколо вписати прямокутний трикутник ABC і на його катетах як на діаметрах побудувати півкола. Учений довів, що площа двох серпків дорівнює площі трикутника: $S_{L_1} + S_{L_2} = S_{\triangle ABC}$.



Мал. 252

Наступна задача, на думку Гіппократа, була найближчою до розв'язання проблеми квадратури круга. У півколо вписано рівнобічну трапецію $ABCD$ — половину правильного шестикутника — і на її трьох рівних сторонах побудовано півкола (мал. 253). Тоді сума площ утворених трьох однакових серпків рівновелика площі трапеції:

$$S_{L_1} + S_{L_2} + S_{L_3} = S_{ABCD}.$$



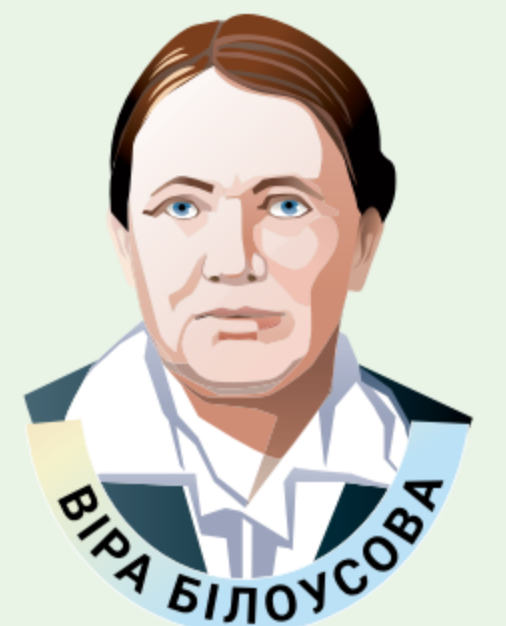
Мал. 253

Це вперше в історії математики за допомогою циркуля та лінійки вдалося перетворити фігуру, обмежену кривими лініями, на рівновелику їй прямолінійну фігуру. Учений сподівався, що те саме можна зробити з кругом. Але сподівання були марними. Неможливість розв'язати задачу про квадратуру круга була доведена наприкінці XIX ст. німецьким математиком Карлом Ліндеманом (1852–1939).

Внесок Гіппократа був гідно поцінований — і сьогодні вживається термін «Гіппократові серпки». Вираз «квадратура круга» в повсякденному житті означає, що дану задачу, проблему розв'язати не можна.

2. Слово «сектор» походить від латинського *sector* — той, що відсікає. Слово «сегмент» теж латинського походження й означає відрізок.

3. Білоусова Віра Петрівна (1906–1986) — кандидатка фізико-математичних наук, професорка, відома фахівчиня в галузі геометрії та навчання геометрії. Життя і творчість Віри Петрівни нерозривно пов'язані з Київським державним університетом. Після закінчення механіко-математичного факультету (1932) і аспірантури на кафедрі геометрії вона захистила кандидатську дисертацію (1941), працювала доцентом (з 1944), професором (з 1970) кафедри геометрії. Учениця професора Б. Я. Букреєва. Має численні нагороди. Підручник «Аналітична геометрія» В. П. Білоусової, І. Г. Ільїна, О. П. Сергунової та В. П. Котлової перевидавався декілька разів і тривалий час залишався базовим навчальним посібником для студентів механіко-математичних, математичних та фізико-математичних факультетів університетів України.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
площа круга	area of a circle	Fläche des Kreises	aire du cercle

qr.orioncentr.com.ua/71tln

Пригадайте головне

1. Запишіть і поясніть формулу для знаходження площі круга.
2. Що таке сектор; сегмент?
3. Запишіть і поясніть формулу для знаходження площі кругового сектора.
4. Поясніть, як знайти площу кругового сегмента.

Усне тренування

Обчисліть:

1) $(25 : 0,5 + 9 : 0,1 - 30) \cdot 0,01$; 2) $100 : (0,5 \cdot 80 + 6 : 0,1) - 1$.

Розв'яжіть задачі

- 796°.** Чи правильно записано формулу для знаходження площі S круга радіусом R :
- 1) $S = \pi$; 2) $S = \pi R$; 3) $S = \pi R^2$?
- 797°.** Чи правильно записано формулу для знаходження площі S кругового сектора радіусом R , що відповідає куту n° :
- 1) $S = \frac{\pi R^2}{180^\circ}$; 2) $S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{180^\circ}$; 3) $S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$?
- 798°.** Накресліть коло та виміряйте його радіус. Обчисліть площу круга, обмеженого цим колом.
- 799°.** Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:
- 1) 4 см; 2) 6 см; 3) 9 см.
- 800°.** Знайдіть площу круга, якщо його діаметр дорівнює:
- E** 1) 10 см; 2) 12 см; 3) 16 см.
- 801°.** Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює:
- E** 1) $25\pi \text{ см}^2$; 2) $9\pi \text{ см}^2$; 3) $36\pi \text{ см}^2$.
- 802°.** Накресліть круг, площа якого дорівнює:
- 1) $4\pi \text{ см}^2$; 2) $16\pi \text{ см}^2$; 3) $49\pi \text{ см}^2$.



qr.orioncentr.com.ua/VZWid

803°. S — площа круга, R і C — радіус і довжина його кола. Накресліть у зошиті таблицю 29 і заповніть її.

Таблиця 29

R	10 см				3 см				9,42 см
C		$20\pi \text{ см}$		$2\pi \text{ см}$		$12\pi \text{ см}$		$15,7\pi \text{ см}$	
S			$25\pi \text{ см}^2$				$9\pi \text{ см}^2$		

- 804°.** Знайдіть довжину кола, якщо площа круга дорівнює:
- E** 1) $4\pi \text{ см}^2$; 2) $\pi \text{ см}^2$; 3) $81\pi \text{ см}^2$.
- 805°.** Як зміниться площа круга, якщо його радіус:
- 1) збільшити у 3 рази; 2) зменшити у 2 рази; 3) збільшити в 4 рази?
- 806°.** Знайдіть радіус круга, якщо його площа та довжина кола мають одне й те саме числове значення.
- 807°.** Знайдіть площу круга, якщо довжина його кола дорівнює:
- E** 1) $\pi \text{ см}$; 2) $6\pi \text{ см}$; 3) $8\pi \text{ см}$.
- 808°.** Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3} \text{ см}$. Знайдіть площу круга: 1) вписаного в цей трикутник; 2) описаного навколо нього.
- 809°.** Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат й описаного навколо нього, якщо сторона квадрата дорівнює:
- E** 1) 10 см; 2) 14 см; 3) 18 см.
- 810°.** Знайдіть площу круга, якщо сторони вписаного в нього прямокутника дорівнюють:
- 1) 6 см і 8 см; 2) 10 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.
- 811°.** Сторона правильного шестикутника дорівнює 12 см. Знайдіть площу круга: 1) вписаного в цей шестикутник; 2) описаного навколо нього.
- 812°.** Знайдіть площу сектора круга радіусом 6 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює:
- E** 1) 10° ; 2) 20° ; 3) 100° .
- 813°.** Знайдіть площу сектора круга радіусом 18 см, якщо дуга сектора дорівнює: 1) $2\pi \text{ см}$; 2) $5\pi \text{ см}$; 3) $8\pi \text{ см}$.
- 814°.** Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус кола дорівнює R , а дуга містить: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 120° ; 4) 270° ; 5) 320° .
- 815°.** Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус кола дорівнює R , а дуга містить: 1) 90° ; 2) 60° .



qr.orioncentr.com.ua/wauLT

816. Доведіть, що площу круга можна обчислювати за формулами:

$$1) S = \frac{\pi D^2}{4}; \quad 2) S = \frac{C}{2} R; \quad 3) S = \frac{C^2}{4\pi}.$$

817. Доведіть, що довжину кола можна обчислювати за формулою: $C = 2\sqrt{\pi S}$, де S — площа круга.

818. Що більше — площа круга, побудованого на відрізку a як на діаметрі, чи площа півкруга, побудованого на відрізку $2a$ як на діаметрі?

819. У скільки разів площа півкруга радіусом R більша за суму площ двох півкругів з радіусами $\frac{R}{2}$?

820. У правильний трикутник вписано коло, і навколо цього трикутника описано коло. Яка залежність між площами кругів, обмежених указаними колами?

821. Знайдіть діаметр круга, якщо його площа дорівнює:

- 1) сумі площ двох кругів з радіусами 3 см і 4 см;
- 2) різниці площ двох кругів з радіусами 10 см і 8 см.

822. Знайдіть площі кругів, описаного навколо правильного трикутника і вписаного в нього, якщо площа трикутника дорівнює:

- 1) $12\sqrt{3}$ см²; 2) $3\sqrt{3}$ см².

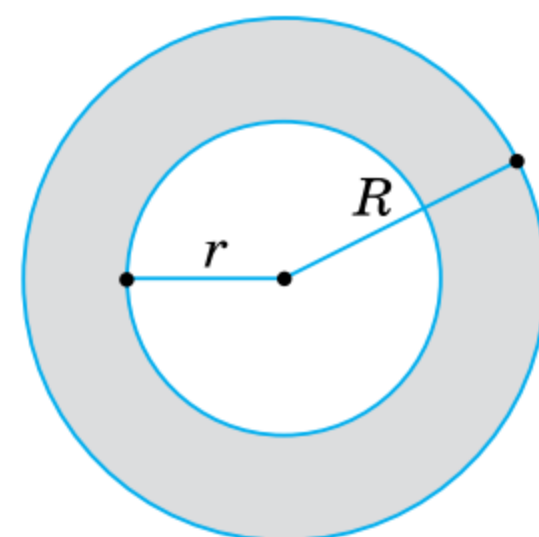
823. Знайдіть площі кругів, описаного навколо квадрата і вписаного в нього, якщо площа квадрата дорівнює:

- 1) 16 см²; 2) 36 см².

824. Знайдіть відношення площ вписаного й описаного кругів:

- 1) для правильного трикутника; 2) для квадрата;
- 3) для правильного шестикутника.

825. Радіуси двох кіл зі спільним центром дорівнюють R і r (мал. 254). Виведіть формулу для обчислення площі кільця, обмеженого цими колами.



Мал. 254

826. Знайдіть площу кільця, обмеженого двома колами зі спільним центром, якщо радіуси кіл дорівнюють:

- 1) 2 см і 8 см; 2) 4,6 см і 5,4 см.

827. Всередині даного круга проведено коло, яке ділить його площу навпіл. Знайдіть радіус цього кола.

828. Площа сектора круга радіусом R дорівнює S . Знайдіть центральний кут сектора, якщо:

- 1) $R = 3$ см, $S = 4\pi$ см²; 2) $R = 10$ см, $S = 20\pi$ см².

829. Площа сектора дорівнює S , а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює n° . Знайдіть радіус круга, якщо:

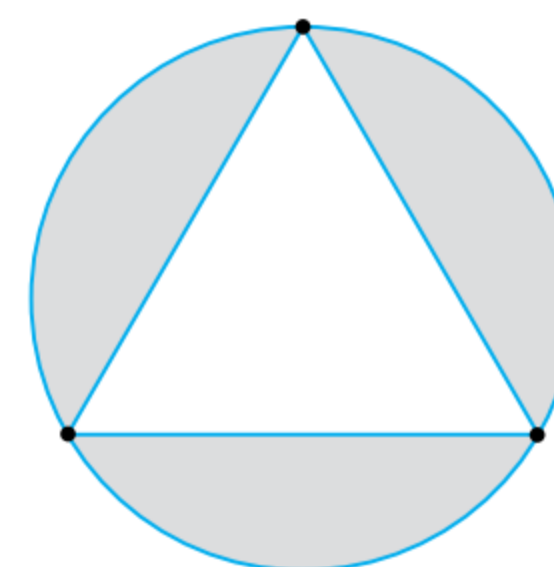


- 1) $S = 25$ см², $n^\circ = 18^\circ$;
- 2) $S = 14$ см², $n^\circ = 45^\circ$.

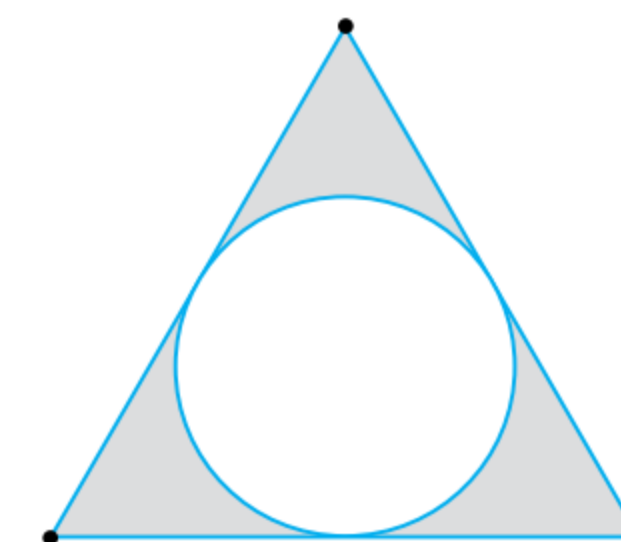
830. Доведіть, що площу сектора можна обчислювати за формулою:

$$S = \frac{lR}{2}, \text{ де } l \text{ — дуга сектора; } R \text{ — радіус круга.}$$

831. На малюнках 255 і 256 зображено вписаний у коло й описаний навколо кола правильний трикутник. Знайдіть площі зафарбованих частин фігур, якщо радіус кола дорівнює R .

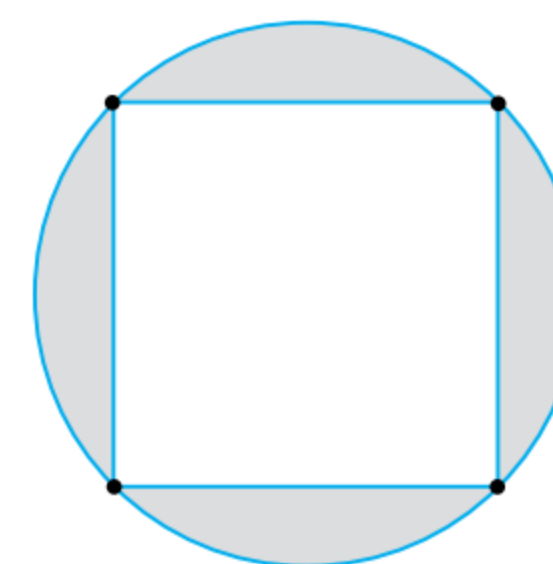


Мал. 255

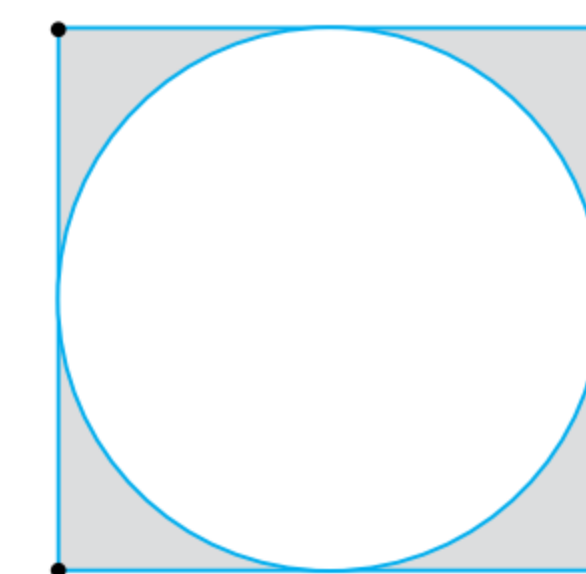


Мал. 256

832. На малюнках 257 і 258 зображено вписаний у коло й описаний навколо кола правильний чотирикутник. Знайдіть площі зафарбованих частин фігур, якщо радіус кола дорівнює R .



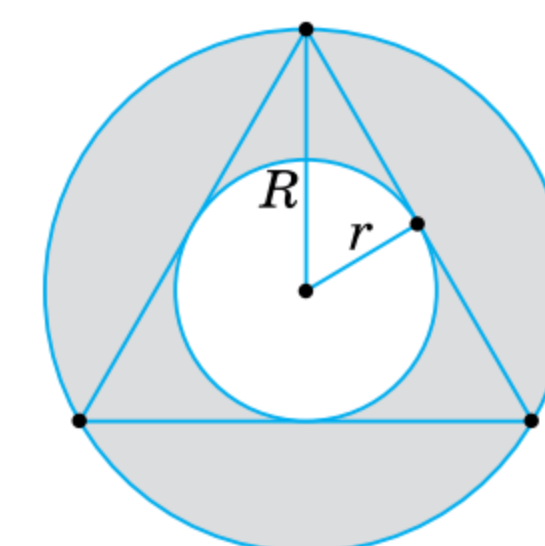
Мал. 257



Мал. 258

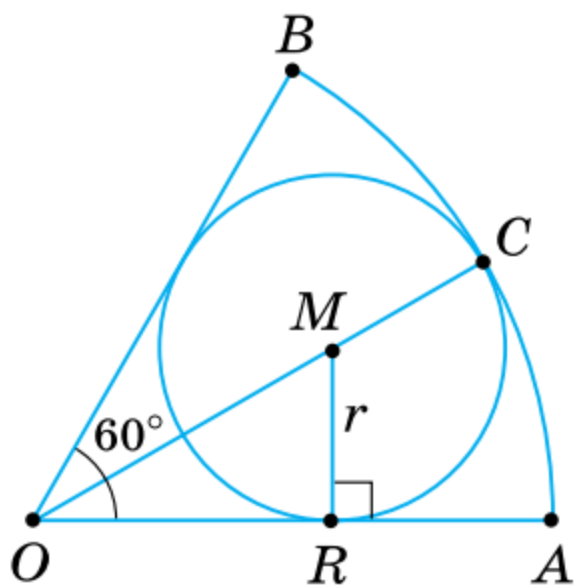
833*. Навколо круга, площа якого дорівнює S , описано ромб із кутом 30° . Знайдіть площу цього ромба.

834*. 1. Навколо правильного трикутника з площею Q описано коло, і в цей самий трикутник вписано коло (мал. 259). Знайдіть площу кільця, обмеженого цими колами.
2. Узагальніть задачу для правильного n -кутника і розв'яжіть її.

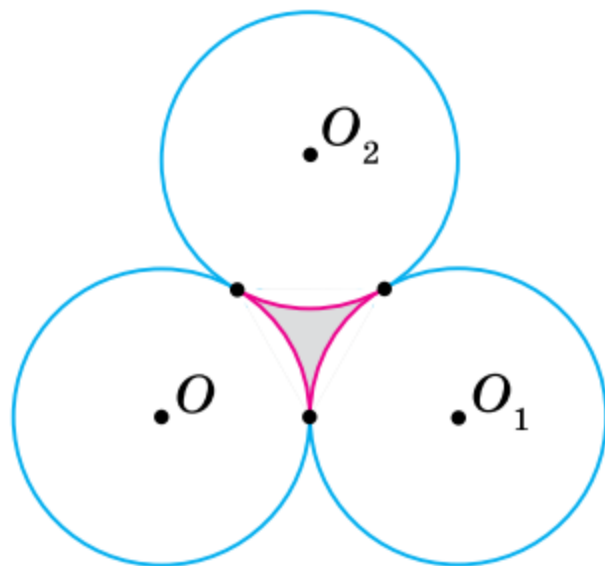


Мал. 259

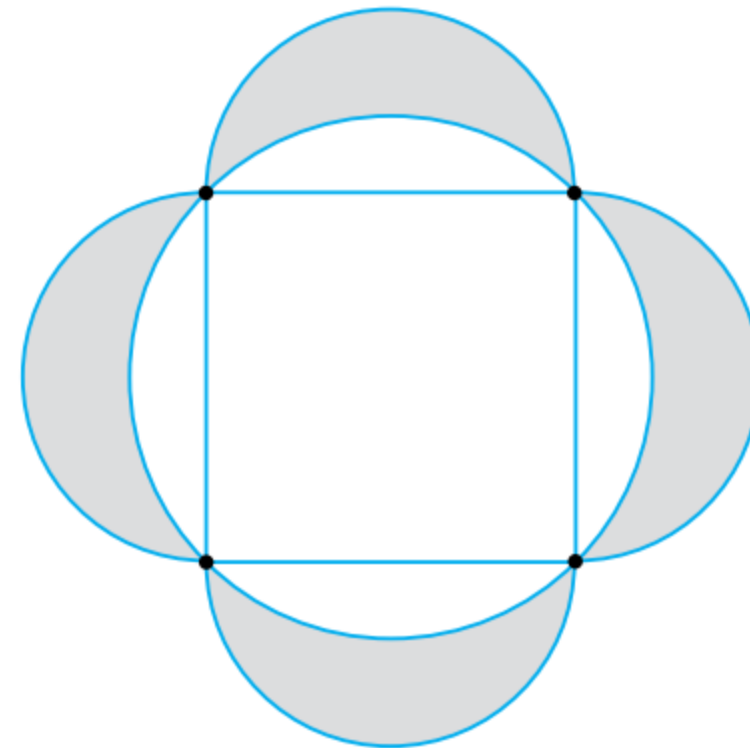
- 835*.** У кільці, утвореному двома колами зі спільним центром, хорда більшого кола, що дотикається до меншого кола, дорівнює m . Знайдіть площу кільця.
- 836*.** Дуга сегмента містить 120° , а її довжина дорівнює l . Знайдіть площу круга, вписаного в цей сегмент.
- 837*.** У круговий сектор із центральним кутом 60° вписано коло радіусом r (мал. 260). Знайдіть відношення площі сектора до площі круга, обмеженого цим колом.



Мал. 260



Мал. 261



Мал. 262

- 838*.** Три кола радіусом R попарно дотикаються зовні (мал. 261). Обчисліть площу «криволінійного трикутника», обмеженого дугами цих кіл.
- 839*.** На кожній стороні квадрата завдовжки a зовні нього побудовано півколо, і навколо квадрата описано коло (мал. 262). Знайдіть суму площ зафарбованих серпків.

Проявіть компетентність

- 840.** Дві водопровідні труби з діаметрами 6 см і 8 см потрібно замінити однією трубою з такою самою пропускною здатністю. Знайдіть діаметр цієї труби.

- 841.** Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, якщо його обхват (довжина кола) дорівнює:
1) 90 см; 2) 1,5 м.

- 842.** Якої товщини шар потрібно зняти з круглого мідного дроту, що має площу перерізу 314 мм^2 , щоб дріт проходив крізь отвір діаметром 18,5 мм?



- 843.** Поперечним перерізом заготовки є круг з діаметром 30 мм. Після обробки заготовки її поперечним перерізом стає квадрат зі стороною 20 мм. Який відсоток становлять відходи металу?
- 844.** Навколо круглої клумби є доріжка, що прилягає до клумби. Довжина зовнішнього кола доріжки дорівнює 25 м, а її ширина — 0,5 м. Який об'єм піску потрібно використати, щоб посипати ним доріжку, якщо на 1 м^2 доріжки витрачають $0,8 \text{ дм}^3$ піску?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- Поясніть, як описати коло навколо правильного многокутника та як вписати в нього коло.
- Виведіть формули для радіусів вписаного й описаного кіл правильного n -кутника.
- Поясніть, як побудувати правильний шестикутник, трикутник і чотирикутник.
- Поясніть, чому відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.
- За якою формулою обчислюють довжину кола; довжину дуги кола?
- Запишіть і поясніть формулу для обчислення площі круга; кругового сектора.
- Поясніть, як знайти площу кругового сегмента.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- Знайдіть кут правильного n -кутника, якщо $n = 6$.
А. 100. Б. 110° . В. 120° . Г. 90.
- Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює 20π см.
А. 5 см. Б. 15 см. В. 20 см. Г. 10 см.
- Знайдіть довжину кола, якщо площа круга дорівнює $16\pi \text{ см}^2$.
А. 6π см. В. 10π см.
Б. 12π см. Г. 8π см.
- Знайдіть довжину дуги кола радіусом 9 см, що відповідає центральному куту 20° .
А. 4π см. Б. 2π см. В. π см. Г. 6 см.
- Знайдіть радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см.
А. 8 см. В. 24 см.
Б. 10 см. Г. 12 см.



Розділ 5. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке переміщення та які його властивості;
- про симетрію відносно точки та прямої, поворот, паралельне перенесення та про їх застосування в природі, техніці, архітектурі;
- що таке перетворення подібності та які його властивості;
- як застосовувати вивчені означення та властивості на практиці й у розв'язуванні задач

§ 13. ПЕРЕМІЩЕННЯ. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

1. Що таке переміщення

Ситуація. Учні 9-А класу готуються до ярмарку. Вони хочуть створити красивий рекламний плакат із візерунком. Дизайнер надіслав їм один базовий елемент візерунка, а також схему всього плаката. Але елемент надісланий лише один, а на плакаті його потрібно відтворити кілька разів, щоб отримати потрібний візерунок. Малювання окремо кожного елемента займе багато часу й може призвести до неточностей.



qr.orioncentr.com.ua/Dx2WT



Як швидко й точно завершити декорування плаката?

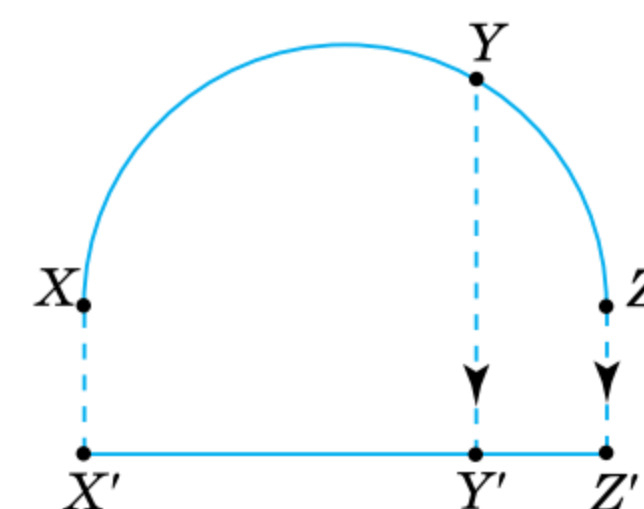
За допомогою переміщення базового елемента візерунка.

Подивіться на малюнок 263. Кожну точку півкола змістили так, що одержали відрізок. Говорять, що півколо відобразили на відрізок. Можна також сказати, що відрізок утворився з півкола в результаті геометричного перетворення. Далі коротко будемо говорити: перетворення. Зрозуміло, що дане перетворення не зберігає відстань між точками цих фігур: $X'Y' \neq XY$.

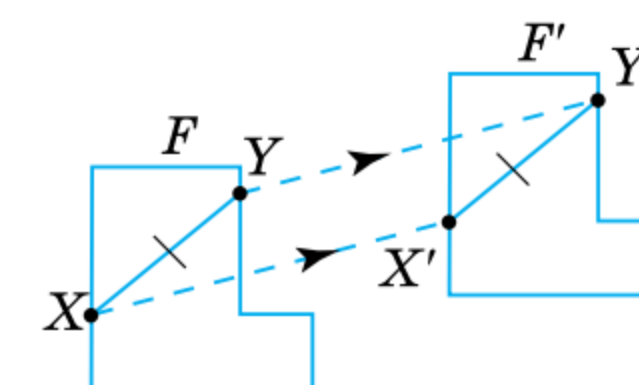
Перетворення, подане на малюнку 264, за якого фігура F відображається у фігуру F' , є особливим. Воно зберігає відстань між відповідними точками фігур. Будь-які дві точки X і Y фігури F переходять у точки X' і Y' фігури F' так, що $X'Y' = XY$. Таке перетворення є переміщенням.

Запам'ятайте!

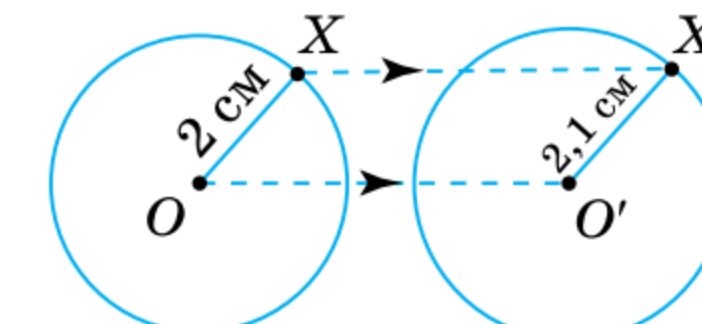
Геометричне перетворення називається *переміщенням*, якщо воно зберігає відстань між точками.



Мал. 263



Мал. 264



Мал. 265



На малюнку 265 деяке перетворення переводить дане коло в коло іншого радіуса. Чи є це перетворення переміщенням?

Ні, бо воно не зберігає відстань між відповідними точками: $OX \neq O'X'$.



2. Властивості переміщення



Які властивості має переміщення?

Їх подано в таблиці 30.



Таблиця 30

Переміщення	Властивості
	1. Точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій. 2. Зберігається порядок взаємного розміщення точок на прямій. 3. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 4. Відрізок переходить у рівний йому відрізок: $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$. 5. Кут переходить у рівний йому кут: $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$.



Чи переводить переміщення будь-яку фігуру в рівну їй фігуру?

Так.



Тому поняття «рівні фігури» можна визначити за допомогою поняття «переміщення».

Запам'ятайте!

Дві фігури називаються *рівними*, якщо вони переводяться переміщенням одна в одну.



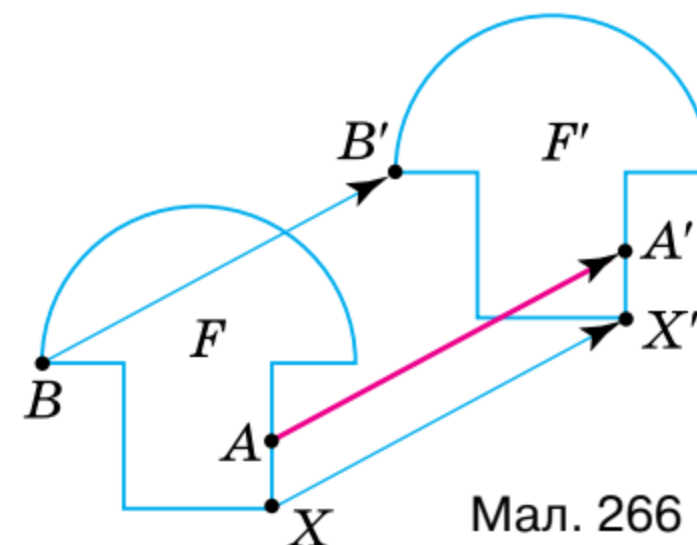
Чому за допомогою переміщення можна швидко завершити декорування плаката в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

Тому, що переміщення переводить будь-яку фігуру в рівну їй фігуру.



3. Паралельне перенесення

Подивіться на малюнок 266. Кожну точку фігури F змістили в одному й тому самому напрямку (уздовж паралельних прямих XX' , AA' , BB' ...) на одну й ту саму відстань ($XX' = AA' = BB'$...). Одержали фігуру F' . Говорять, що фігура F перейшла у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на вектор $\overline{XX'}$.



Мал. 266

Запам'ятайте!

Перетворення, за якого всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямку й на одну й ту саму відстань, називають *паралельним перенесенням*.



Чи є паралельне перенесення переміщенням?

Відповідь дає теорема.



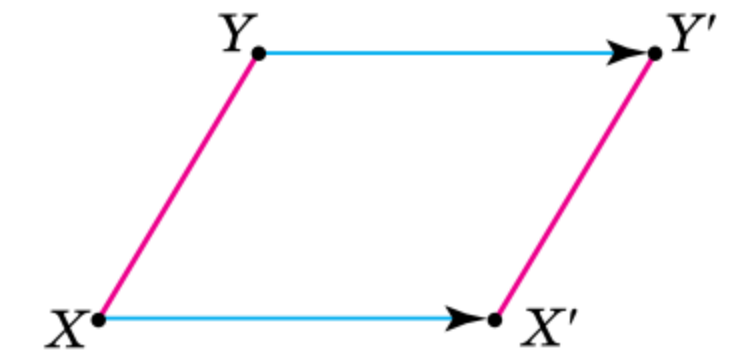
Запам'ятайте!

Теорема (властивість паралельного перенесення)
Паралельне перенесення є переміщенням.

Дано: перетворення, що є паралельним перенесенням.

Довести: дане перетворення є переміщенням.

Доведення. Нехай X і Y — дві довільні точки фігури F (мал. 267). Паралельне перенесення переводить їх у точки X' і Y' фігури F' . Доведемо, що $X'Y' = XY$. За означенням паралельного перенесення, $XX' = YY'$ і $XX' \parallel YY'$. Тоді чотирикутник $XY'X'$ — паралелограм (за ознакою). У паралелограмі протилежні сторони рівні, отже, $X'Y' = XY$. (Випадок, коли рівні відрізки XX' і YY' лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.)



Мал. 267

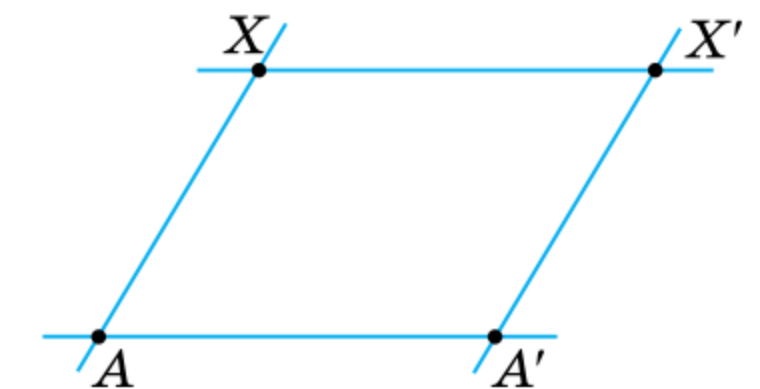
НАСЛІДОК 1. Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.

НАСЛІДОК 2. При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.

Справді, паралельність прямих впливає з паралельності відрізків XY і $X'Y'$ (мал. 267). Якщо ж пряма паралельна вектору паралельного перенесення, то кожна точка прямої переходить у точку цієї самої прямої, а сама пряма переходить сама в себе.



Щоб побудувати точку X' , у яку переходить точка X при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AA'}$, скористайтесь наслідком 2 і проведіть паралельні прямі так, як показано на малюнку 268.



Мал. 268



Чи існує паралельне перенесення, за якого одна сторона трикутника переходить в іншу його сторону?

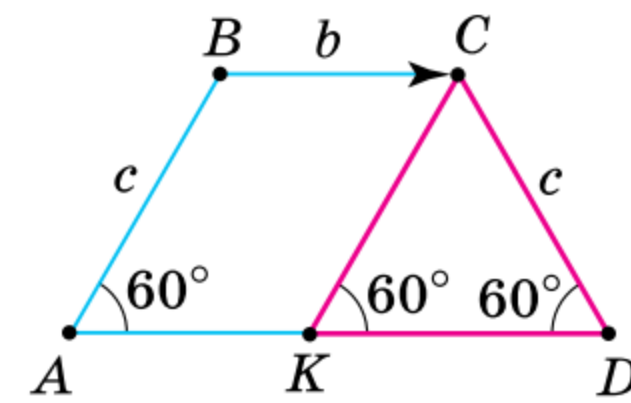
Не існує.



Справді, при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму, а в трикутнику сторони не можуть бути паралельними.

Задача У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60° . Доведіть, що бічна сторона трапеції дорівнює різниці її основ.

Розв'язання Нехай a, b — основи, c — бічна сторона рівнобічної трапеції (мал. 269). Доведемо, що $c = a - b$. Виконаємо паралельне перенесення так, щоб точка B бічної сторони AB перейшла в точку C . Тоді точка A перейде в точку K . Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно переводить кут у рівний йому кут. Отже, $\angle DKC = \angle KAB = 60^\circ$. Тоді $\triangle KCD$ — рівносторонній і $KD = c$.



Мал. 269

З іншого боку, $KD = AD - AK = AD - BC = a - b$. Маємо: $c = a - b$.



Де застосовують паралельне перенесення на практиці?

Наприклад, у мистецтві.

Паралельне перенесення малюнків (вони однакові й періодично повторюються) є на вишивках, шпалерах, тканинах, паркетній підлозі, орнаментах. На малюнках 270–272 подано орнаменти на старовинній грецькій вазі (мал. 270), вітражі в соборі Паризької Богоматері (Франція, Середньовіччя) (мал. 271), на стіні палацу Дарія в Сузах (Давня Персія) (мал. 272).



Мал. 270



Мал. 271



Мал. 272

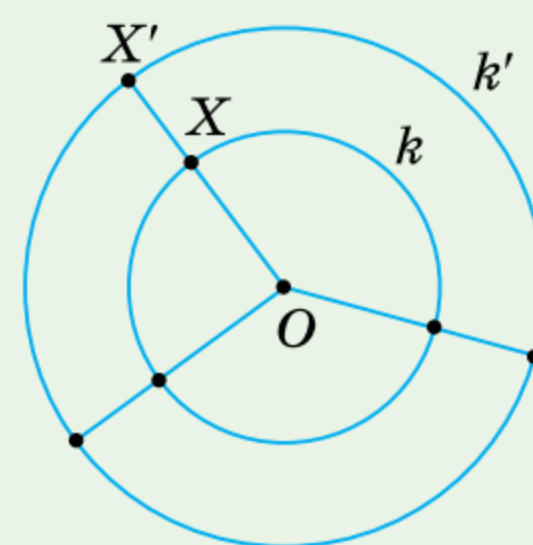
Дізнайтеся більше

1. Давайте поміркуємо над поняттям «відображення фігур».

Нехай k і k' — два кола зі спільним центром O (мал. 273). Вважатимемо, що кожній точці X першого кола відповідає точка X' другого, яка лежить на промені OX . При цьому кожна точка другого кола поставлена у відповідність деякій точці першого кола. Крім того, різним точкам першого кола відповідають різні точки другого кола. Ми одержали відображення кола k на коло k' .

Відображенням фігури F на F' називають таку відповідність, за якої:

1) кожній точці фігури F відповідає певна точка фігури F' ;



Мал. 273

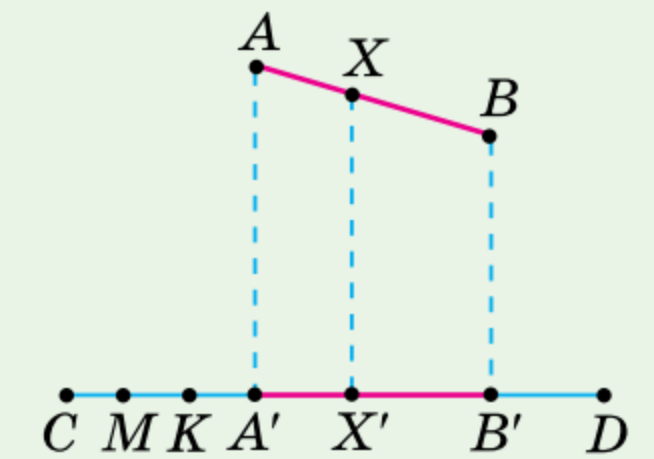
2) кожна точка фігури F' поставлена у відповідність деякій точці фігури F ;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F' .

Чи кожна відповідність між точками фігур буде відображенням цих фігур? Ні.

На малюнку 274 зображено відрізки AB і CD .

Кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність основу X' перпендикуляра, проведеного з точки X до відрізка CD . Поясніть, чому задана відповідність не буде відображенням відрізка AB на відрізок CD .



Мал. 274

2. Значний внесок у розвиток шкільної геометрії зробив відомий український математик **Семенович Олександр Федорович** (1920–2009), який пройшов шлях від учителя математики сільської школи до професора, завідувача кафедри геометрії та методики викладання математики Черкаського педінституту. Наукові інтереси О. Ф. Семеновича формувалися під впливом видатних педагогів та педагогинь А. М. Фішер, С. О. Яновської, А. М. Колмогорова. У 1949 р. О. Ф. Семенович захистив дисертацію на тему «Про числення точок», і його подальша наукова діяльність була пов'язана з геометрією та її викладанням. Творчий доробок ученого становить понад 150 праць, серед яких книги з проєктивної геометрії та основ геометрії, навчальні й методичні посібники для вчителів та учнівства. Він один з авторів шкільних підручників з геометрії 60–70-х років XX ст.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
переміщення	displacement	Verschiebung, f	translation

qr.orioncentr.com.ua/DASLe

Пригадайте головне

1. Яке перетворення називається переміщенням?
2. У які фігури переходять під час переміщення прямі, промені, відрізки й кути?
3. Які дві фігури називаються рівними?
4. Яке перетворення називають паралельним перенесенням?
5. Поясніть, чому при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.
6. Назвіть властивості паралельного перенесення.

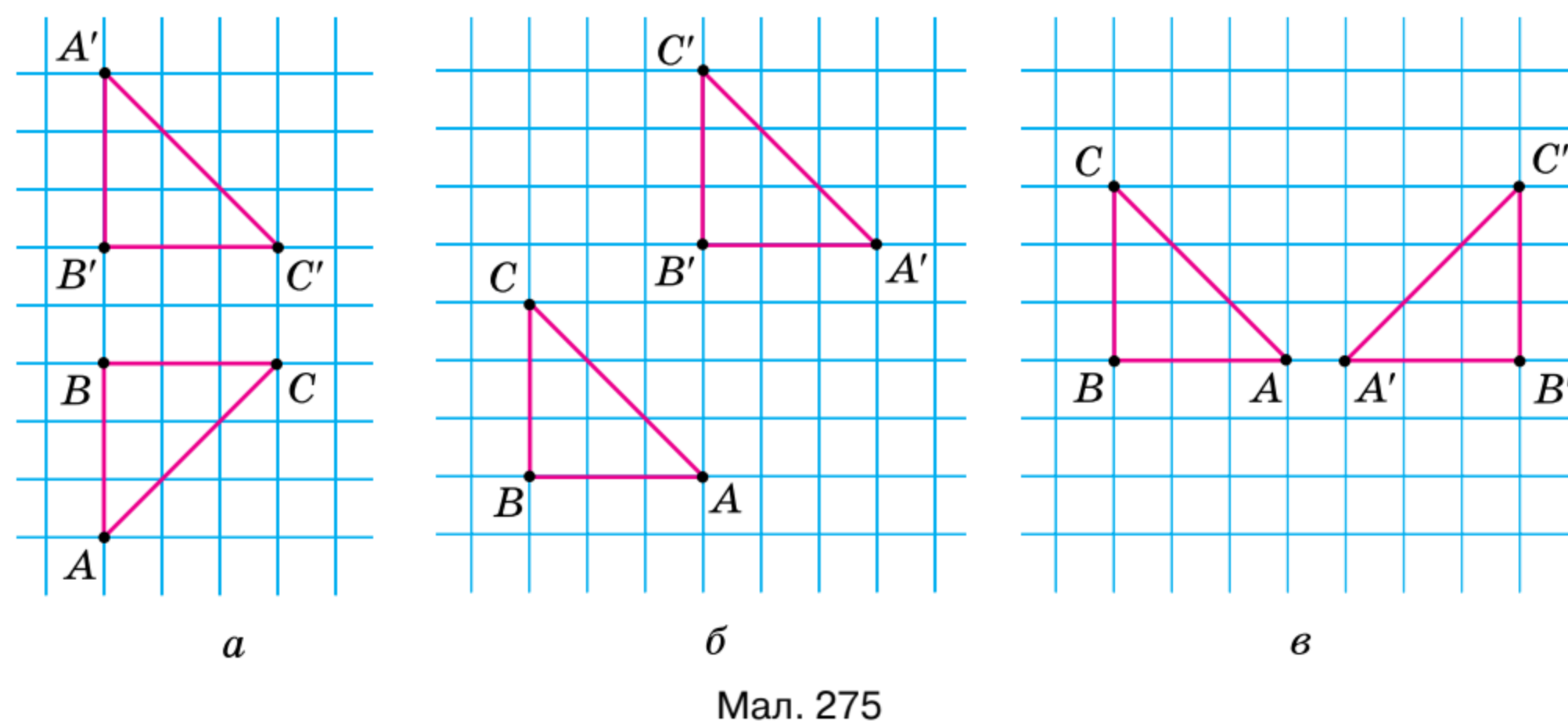
Усне тренування

Обчисліть:

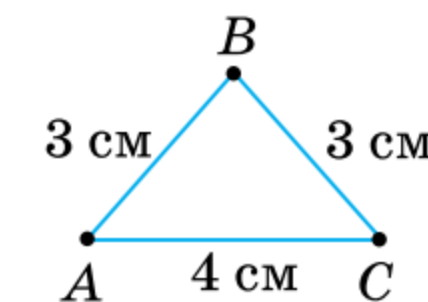
- 1) $30 + 42 - 20$; $52 + 120 + 41$; $58 + 242 - 600$;
 2) $92 + 108 - 200$; $111 + 301 + 50$; $188 + 212 + 59$.

Розв'яжіть задачі

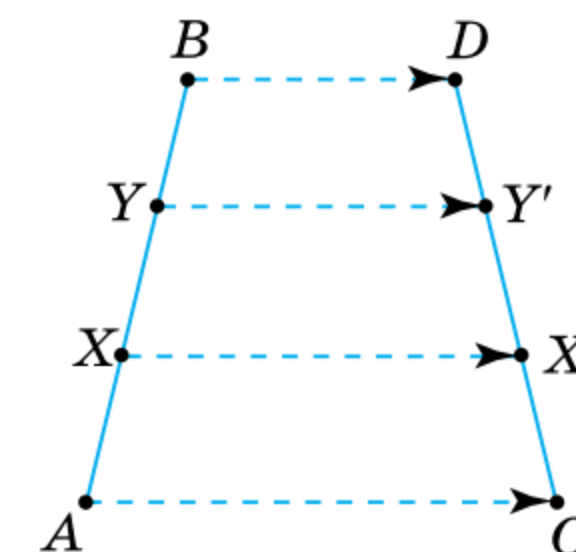
- 845'.** Чи правильно, що переміщення:
 1) не зберігає відстані між точками;
 2) зберігає відстані між точками?
- 846'.** Чи правильно, що при переміщенні точки, що лежать на одній прямій, переходять у точки:
 1) що не лежать на одній прямій;
 2) що лежать на одній прямій?
- 847'.** Чи правильно, що при переміщенні порядок точок на прямій:
 1) не зберігається;
 2) зберігається?
- 848'.** Чи правильно, що при переміщенні пряма переходить у:
 1) відрізок;
 2) промінь;
 3) пряму;
 4) кут?
- 849'.** Чи правильно, що фігури, які суміщаються при переміщенні, є:
 1) нерівними;
 2) рівними?
- 850'.** На якому з малюнків 275, *a* – *в*, зображено паралельне перенесення, що переводить трикутник *ABC* в трикутник *A'B'C'*?



- 851'.** Перетворення переводить трикутник *ABC* у трикутник *A'B'C'* (мал. 276). Чи є це перетворення переміщенням? Відповідь поясніть.



Мал. 276



Мал. 277

- 852'.** На малюнку 277 переміщення переводить відрізок *AB* у відрізок *CD*.
 1. У які точки переходять точки *X* і *Y* при цьому переміщенні?
 2. У які фігури переходять відрізки *AX* і *XY*?
 3. Чи рівні відрізки *AX* і *CX'*, *XY* і *X'Y'*, *BY* і *DY'*?
 Відповідь поясніть.

qr.orioncentr.com.ua/hlQuT


- 853'.** Чи існує переміщення, яке переводить відрізок *AB* у відрізок *CD*, якщо:



- 1) $AB = 4$ см, $CD = 6$ см; 2) $AB = 5$ см, $CD = 5$ см?

- 854'.** Переміщення переводить фігуру *F* у фігуру *F'*. Чи рівні фігури *F* і *F'*?

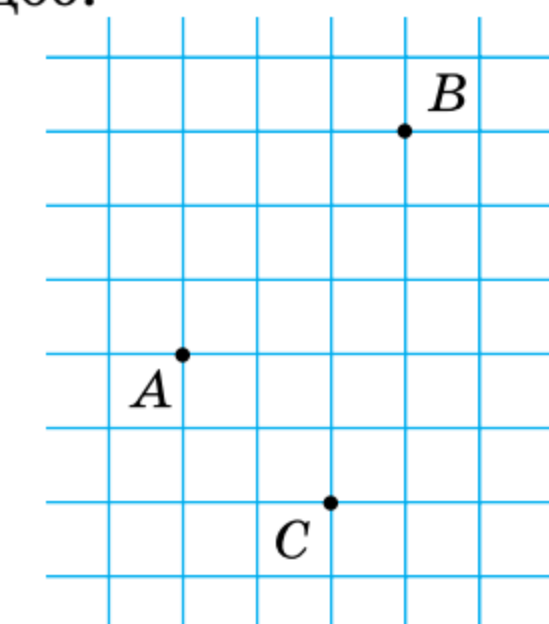
- 855'.** Переміщення переводить відрізок *AB* у відрізок *A'B'*. Який із записів правильний:

- 1) $AB > A'B'$; 2) $AB = A'B'$; 3) $AB < A'B'$?

- 856'.** Дано відрізок *AB* і точку *M*, що не лежить на прямій *AB*. Виконайте паралельне перенесення відрізка *AB* так, щоб:

- 1) точка *A* перейшла в точку *M*;
 2) точка *B* перейшла в точку *M*;
 3) середина відрізка *AB* перейшла в точку *M*.

- 857'.** При паралельному перенесенні точка *A* переходить у точку *B* (мал. 278). За клітинками побудуйте точку *D*, у яку переходить точка *C* при цьому паралельному перенесенні.



Мал. 278

- 858'.** Чи може пряма при паралельному перенесенні перейти сама в себе?

859°. Чи існує паралельне перенесення, за якого:



qr.orioncentr.com.ua/co4Yu



- 1) одна зі сторін прямокутника переходить в іншу його сторону;
- 2) одна сторона трикутника переходить в іншу його сторону?

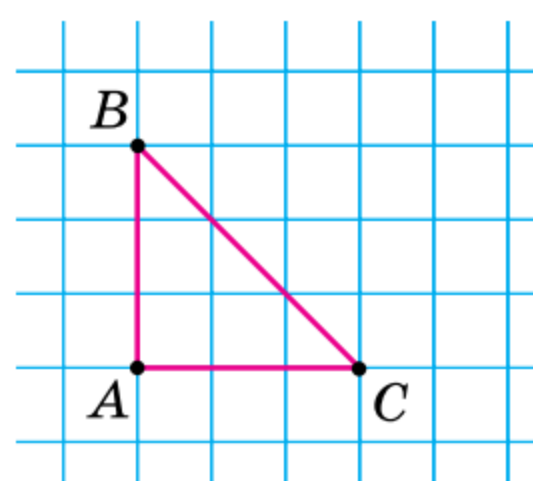
860°. Накресліть прямокутник $ABCD$. Виконайте паралельне перенесення цього прямокутника так, щоб:

- 1) точка A перешла в точку C ;
- 2) точка D перешла в точку A ;
- 3) точка A перешла в точку B .

861°. За клітинками побудуйте фігуру, у яку переходить трикутник ABC (мал. 279) при паралельному перенесенні, що переводить:



- 1) точку A в точку C ;
- 2) точку C в точку B .



Мал. 279

862°. Відрізки AB і CD — рівні. У якому випадку існує паралельне перенесення, що переводить один із цих відрізків у інший?

863°. Позначте точки A , B і C . Побудуйте точку, у яку переходить точка A при паралельному перенесенні, що переводить:

- 1) точку B в точку C ;
- 2) точку C в точку B .

Розгляньте два випадки:

- а) точка C лежить на прямій AB ;
б) точка C не лежить на прямій AB .

864°. Виконайте паралельне перенесення даного кола так, щоб його центр O перейшов у дану точку O_1 .

865. Чи існує переміщення, що переводить $\triangle ABC$ у $\triangle A'B'C'$, якщо:

- 1) $\angle A = 110^\circ$, $\angle B' = 120^\circ$;
- 2) $\angle C = 20^\circ$, $\angle A' = 60^\circ$;
- 3) $AC = 6$ см, $A'B' = B'C' = 3$ см?

866. Чи рівні два квадрати, якщо:



- 1) рівні їхні діагоналі;
- 2) рівні їхні периметри?

867. Чи рівні два прямокутники, якщо:

- 1) рівні їхні діагоналі;
- 2) рівні їхні периметри?

868. У крузі з центром O проведено діаметри AB і CD . Яка фігура рівна частині круга:

- 1) AOC ; 2) AOD ?

869. Дві частини, з яких складається фігура F , відповідно рівні двом частинам, з яких складається фігура F' . Чи рівні ці фігури? Виконайте малюнок.

870. Прямокутник поділено на дві частини, як показано на малюнку 280. Чи рівні ці частини?

871. Чи можна поділити різносторонній трикутник на дві рівні частини? Для яких трикутників такий поділ можливий?

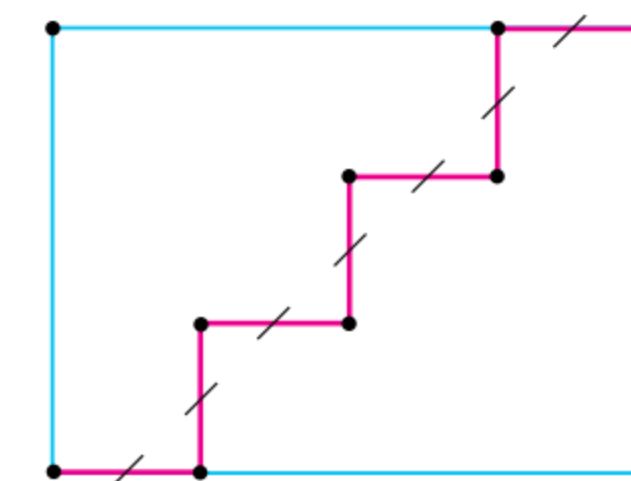
872. Доведіть, що переміщення переводить:
1) трикутник у рівний йому трикутник;
2) паралелограм у рівний йому паралелограм.

873. За даними на малюнку 281 доведіть, що паралелограми $ABCD$ і $A'B'C'D'$ — рівні.

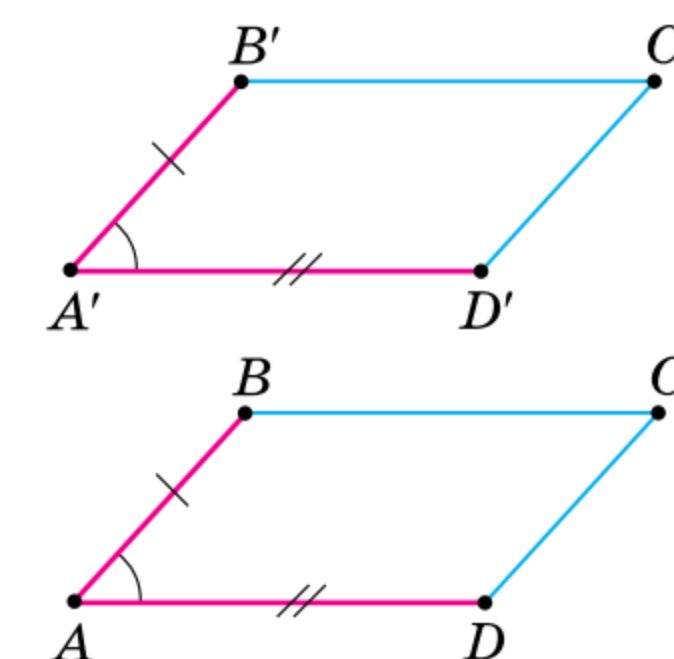
874. Чи рівні два паралелограми, якщо в них рівні:

- 1) дві діагоналі та кут між ними;
- 2) сторона і дві діагоналі;
- 3) периметри;
- 4) дві сусідні сторони й зовнішній кут?

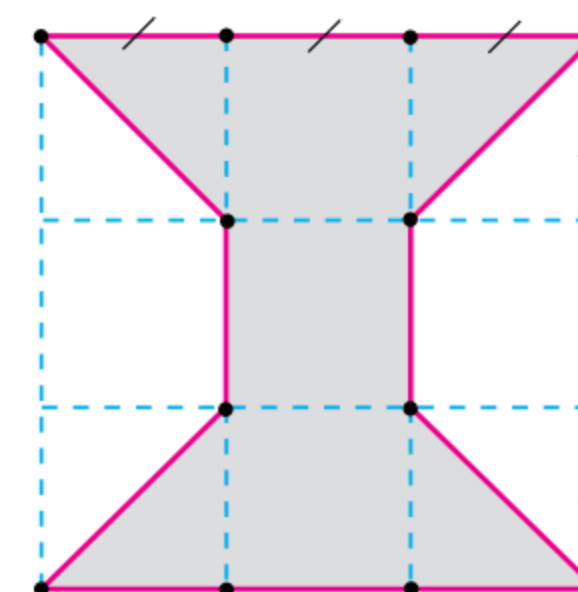
875. Побудуйте фігури, які рівні фігурам, зображеним на малюнках 282 і 283 (для побудови можна скористатися лінійкою, циркулем, косинцем або калькою). Обчисліть площі цих фігур, зробивши найменшу кількість вимірювань.



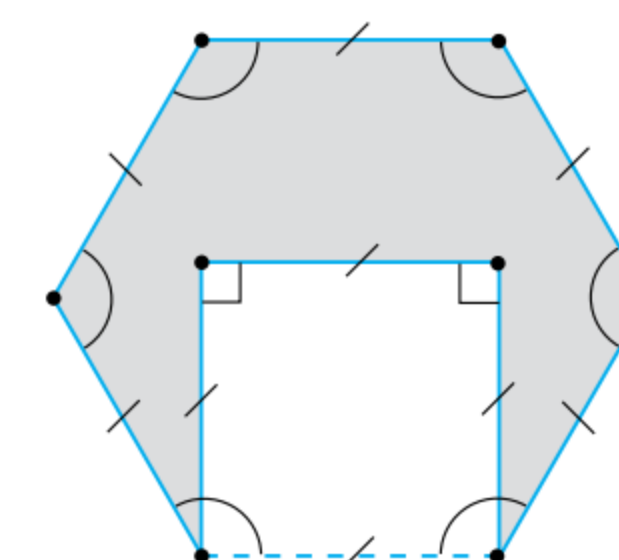
Мал. 280



Мал. 281



Мал. 282



Мал. 283

876. За яких умов відрізок AB можна перевести у відрізок CD за допомогою паралельного перенесення?

877. Дано паралельні прямі a і b . Скільки існує паралельних перенесень, що переводять одну із цих прямих в іншу? Відповідь поясніть.

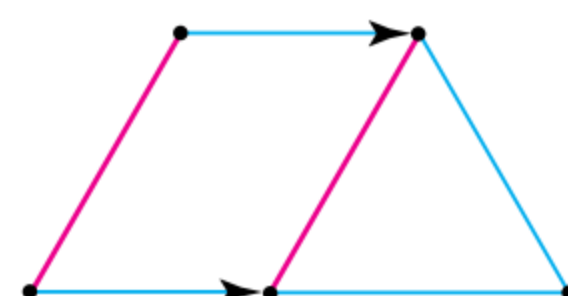
878. При паралельному перенесенні відрізка AB точка A переходить у точку B , а точка B — у точку B' . Доведіть, що точка B — середина відрізка AB' .

879. Виконайте паралельне перенесення квадрата $ABCD$ зі стороною 4 см так, щоб точка A перейшла в точку O перетину діагоналей. Знайдіть площу спільної частини даного й утвореного квадратів.

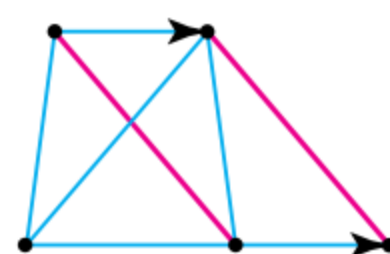
880. Доведіть, що різниця основ трапеції більша за різницю бічних сторін і менша від їх суми.



Якщо в умові задачі дано трапецію, то корисно паралельно перенести бічну сторону або діагональ так, як показано на малюнках 284 і 285, а потім скористатися властивостями утвореного трикутника.



Мал. 284



Мал. 285

881. Доведіть, що в рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

882. Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція — рівнобічна. Доведіть.

883. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 6 см, бічна сторона — 2 см, а кут між ними — 60° . Знайдіть меншу основу трапеції.

884*. Доведіть, що ромби рівні, якщо вони мають рівні діагоналі.

885*. Доведіть, що переміщення переводить многокутник у многокутник з відповідно рівними сторонами й кутами.

886*. Доведіть, що переміщення переводить паралельні прямі в паралельні прямі.

887*. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60° . Доведіть, що більша основа трапеції дорівнює сумі меншої основи й бічної сторони.

888*. Доведіть, що сума діагоналей трапеції більша за суму її основ.

889*. Якщо в трикутнику дві медіани рівні, то він рівнобедрений. Доведіть.

Проявіть компетентність

890. Опишіть ситуацію математичною мовою:

- 1) машина виїхала з гаража й зупинилася;
- 2) викрійку сорочки поклали на тканину;
- 3) чайник переставили з однієї конфорки плити на іншу;
- 4) шафу пересунули від однієї стіни кімнати до іншої;
- 5) книжки поставили на полицю.

891. Виокремте базовий елемент орнаменту та опишіть математичною мовою принцип побудови такого орнаменту:

- 1) на малюнку 286; 2) на малюнку 287; 3) на малюнку 288.



Мал. 286

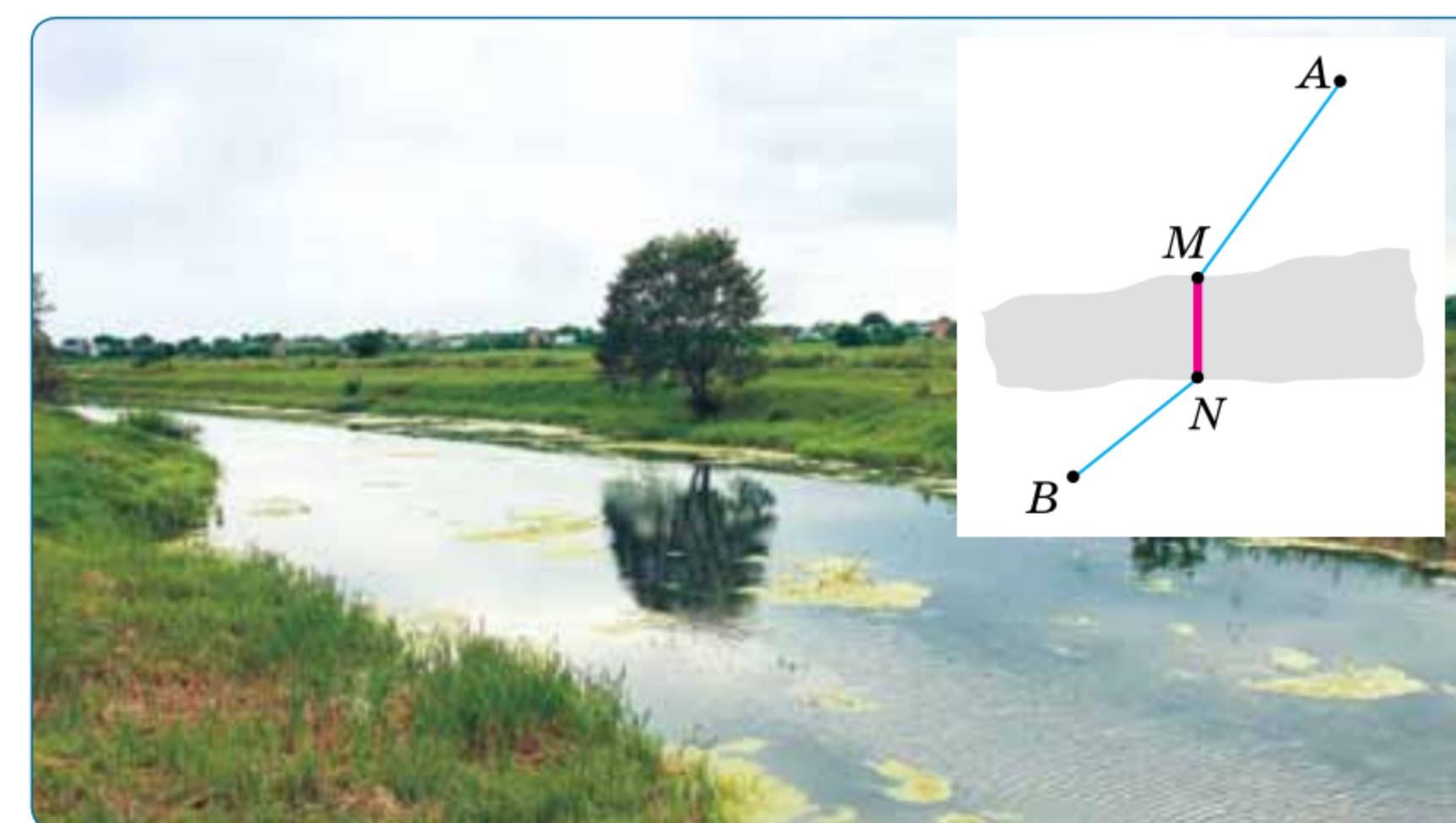


Мал. 287



Мал. 288

892. Села A і B розташовані на різних берегах річки (мал. 289). У якому місці потрібно побудувати міст, щоб шлях між селами був найкоротшим?



Мал. 289

§ 14. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ПРЯМОЇ

1. Симетрія відносно точки

Ситуація. Юля виготовляє круглу в'язану серветку в подарунок бабусі. За її задумом, у центрі серветки має бути квітка, а навколо — парами пришиті намистинки, щоб узор мав гармонійний вигляд.



Як визначити місце для другої намистинки, якщо першу вже пришило?

Застосувати симетрію відносно точки — центра серветки.



Запам'ятайте!

Дві точки X і X' площини називають *симетричними відносно точки O* , якщо точка O є серединою відрізка XX' (мал. 290).



Мал. 290



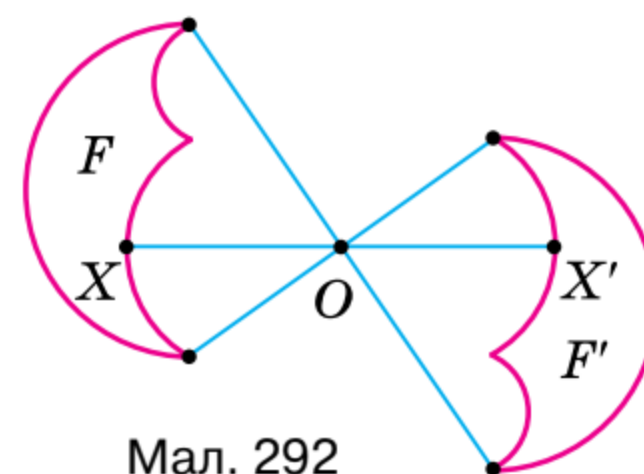
Мал. 291



Щоб побудувати точку X' , симетричну точці X відносно точки O проведіть промінь XO , відкладіть на ньому з іншого боку від точки O відрізок $OX' = OX$ (мал. 291).

Перетворення, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' , симетричну відносно даної точки O , називають *симетрією відносно точки O* . При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно точки O* (мал. 292). Симетрію із центром O називають також *центральною симетрією*.

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то таку фігуру називають *центрально-симетричною*, а точку O — її *центром симетрії*.



Мал. 292



Чи є квадрат центрально-симетричною фігурою?

Так.

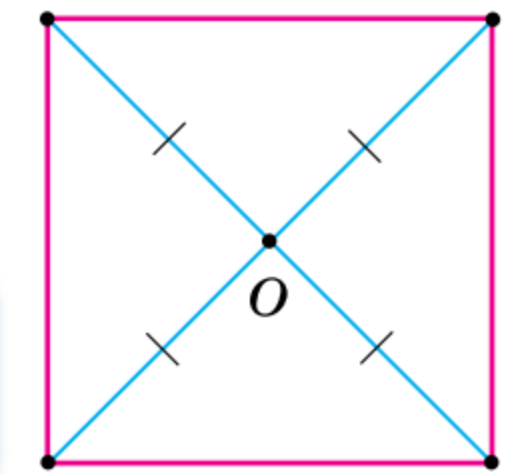


qr.orioncentr.com.ua/C8bPc

Центром його симетрії є точка перетину діагоналей (мал. 293).

Запам'ятайте!

Теорема (властивість симетрії відносно точки)
Симетрія відносно точки є переміщенням.



Мал. 293

Дано: перетворення, яке є симетрією відносно точки.

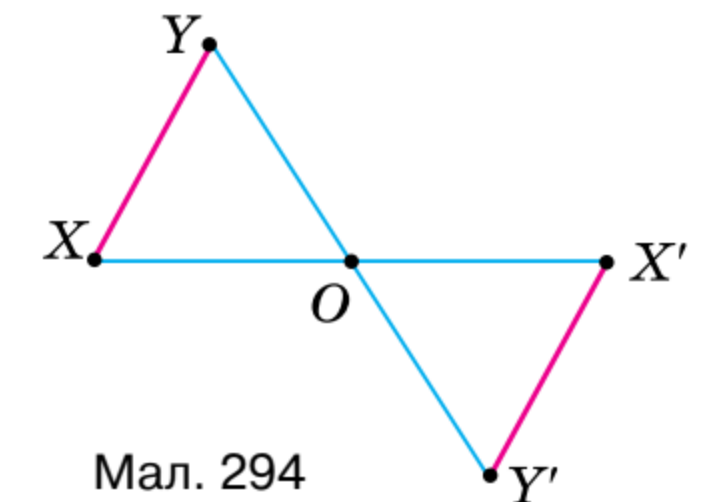
Довести: дане перетворення є переміщенням.

Доведення. Нехай симетрія відносно точки O переводить довільні точки X і Y фігури F у точки X' і Y' фігури F' (мал. 294).

$\triangle XOY = \triangle X'OY'$ — за двома сторонами та кутом між ними. У них $OX' = OX$, $OY' = OY$ за означенням симетрії відносно точки, $\angle XOY = \angle X'OY'$ як вертикальні.

З рівності трикутників випливає:

$$X'Y' = XY.$$



Мал. 294

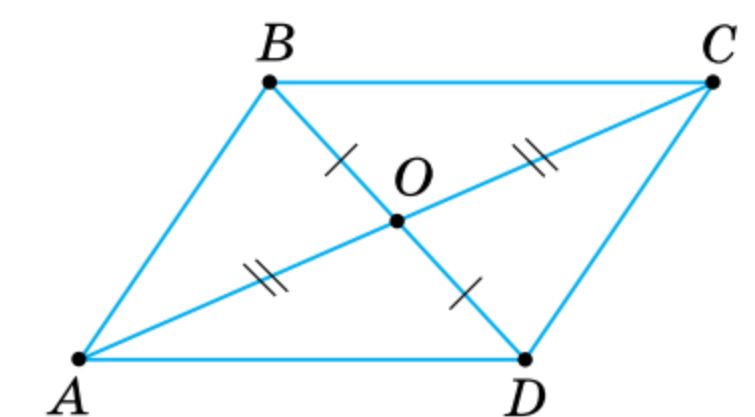
Це означає, що симетрія відносно точки є переміщенням.

(Випадок, коли точки X , Y , O лежать на одній прямій, розгляньте самостійно).

НАСЛІДОК. Симетрія відносно точки має всі властивості переміщення.

Задача 1 Доведіть, що паралелограм є центрально-симетричною фігурою відносно точки перетину його діагоналей.

Розв'язання Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ (мал. 295). Оскільки діагоналі AC і BD точкою O діляться навпіл, то точки A і C , B і D симетричні відносно точки O . Тоді сторони AB і CD , BC і DA також симетричні відносно точки O . Тому симетрія відносно точки перетину діагоналей паралелограма переводить його в себе.



Мал. 295

Фігури, що мають центр симетрії, часто трапляються в довідці. Наприклад, пропелер літака (мал. 296), орнамент (мал. 297), квітка (мал. 298), сніжинка (мал. 299).



Мал. 296



Мал. 297



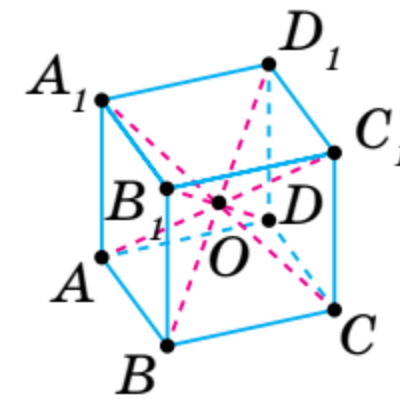
Мал. 298



Мал. 299

2. Симетрія в прямокутному паралелепіпеді

Усі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда перетинаються в одній точці O й діляться цією точкою навпіл (мал. 300). Точка O — центр симетрії паралелепіпеда. Тому $AO = OC_1$, $BO = OD_1$, $CO = OA_1$, $DO = OB_1$. (Цю властивість пізніше доведемо для будь-якого паралелепіпеда.)

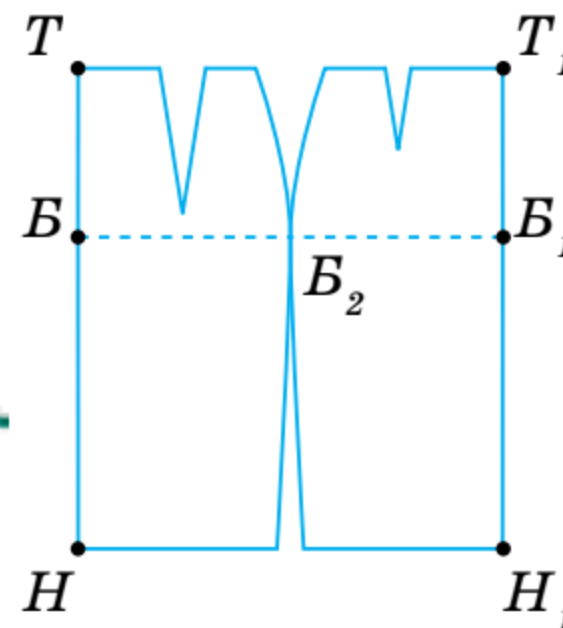


Мал. 300

3. Симетрія відносно прямої

Ситуація. Учениця, ознайомившись на уроках технологій з методикою конструювання швейних виробів, вирішила пошити пряму спідницю. Для цього вона виготовила викрійки для передньої та задньої частини спідниці. Щоб розкроїти передню частину виробу, вона склала тканину навпіл і приклала до лінії згину відповідну викрійку. Так само діяла під час розкрою задньої частини виробу. У результаті отримала симетричні відносно лінії згину тканини деталі спідниці.

qr.orioncentr.com.ua/T98e6



Що було основою конструювання прямої спідниці?

Симетрія відносно прямої.

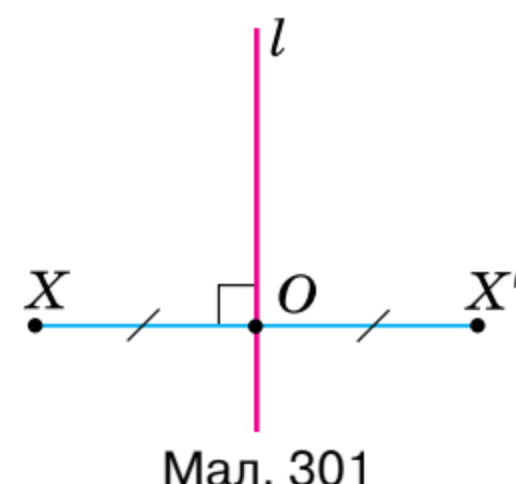
Запам'ятайте!

Дві точки X і X' площини називають **симетричними відносно прямої l** , якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину (мал. 301).

Якщо точка X лежить на прямій l , то симетричною їй точкою є сама точка X .



Щоб побудувати точку X' , симетричну точці X відносно прямої l , проведіть з точки X перпендикуляр XO до прямої l і на його продовженні з іншого боку від прямої l відкладіть відрізок $OX' = OX$ (мал. 301).

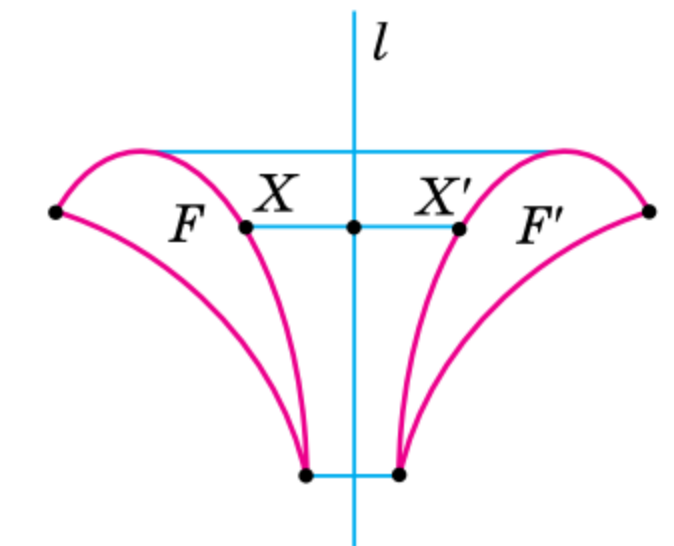


Мал. 301

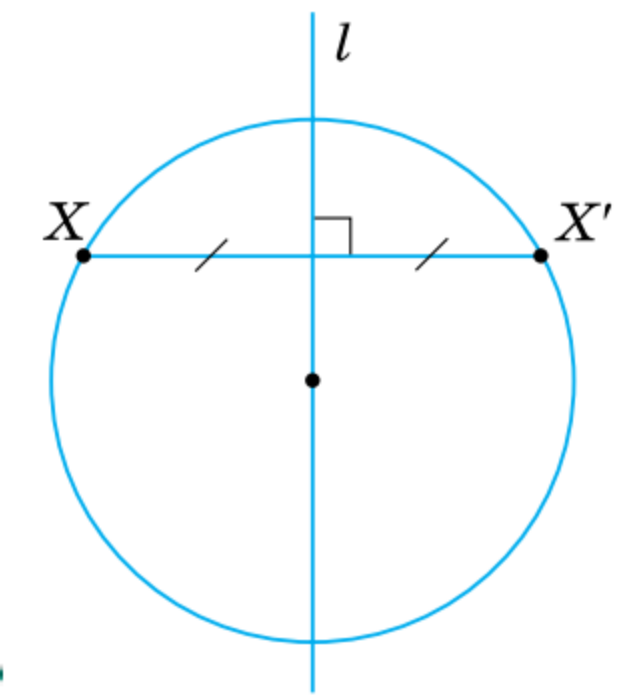
Перетворення, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' , симетричну відносно даної прямої l , називають **симетрією відносно прямої l** . При цьому фігури F і F' називають **симетричними відносно прямої l** (мал. 302). Пряму l називають **віссю симетрії**. Симетрію відносно прямої l називають також **осьовою симетрією**.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то цю фігуру називають **симетричною відносно прямої l** (або **осесиметричною**), а пряму l — **віссю симетрії** фігури.

Наприклад, пряма, що проходить через центр кола, є віссю симетрії цього кола (мал. 303).



Мал. 302



Мал. 303



Чи є діагоналі квадрата осями його симетрії?

Так.



Справді, такий висновок випливає з того, що діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл.

Запам'ятайте!

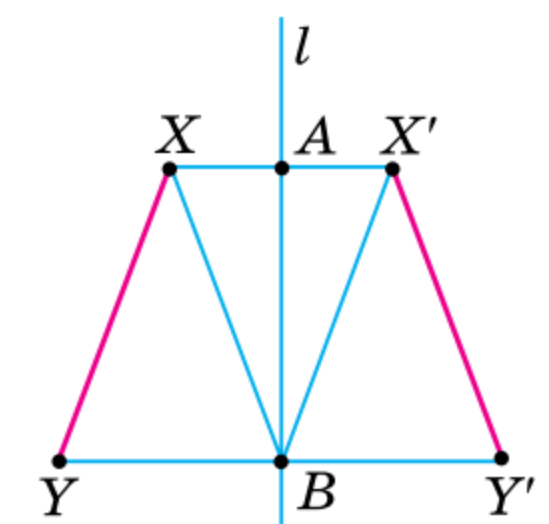
Теорема (властивість симетрії відносно прямої)
Симетрія відносно прямої є переміщенням.

Дано: перетворення, яке є симетрією відносно прямої.

Довести: дане перетворення є переміщенням.

Доведення. Нехай симетрія відносно прямої l переводить довільні точки X, Y фігури F у точки X', Y' фігури F' . Розглянемо загальний випадок, коли точки X, Y не лежать на прямій, перпендикулярній до прямої l (мал. 304). Доведемо, що $X'Y' = XY$.

Нехай пряма l перетинає відрізки XX' і YY' відповідно в точках A і B . $\triangle ABX' = \triangle ABX$ як прямокутні з рівними катетами. У них $\angle X'AB = \angle XAB = 90^\circ$, $AX' = AX$ за означенням осьової симетрії, сторона AB — спільна. Звідси випливає: $BX' = BX$ і $\angle ABX' = \angle ABX$.



Мал. 304

$\triangle X'Y'B = \triangle XYB$ за двома сторонами й кутом між ними. У них $BX' = BX$ за доведеним, $BY' = BY$ за означенням осьової симетрії, $\angle X'BY' = \angle XBY$ ($\angle XBY = 90^\circ - \angle ABX$, $\angle X'BY' = 90^\circ - \angle ABX'$). З рівності трикутників випливає: $X'Y' = XY$.

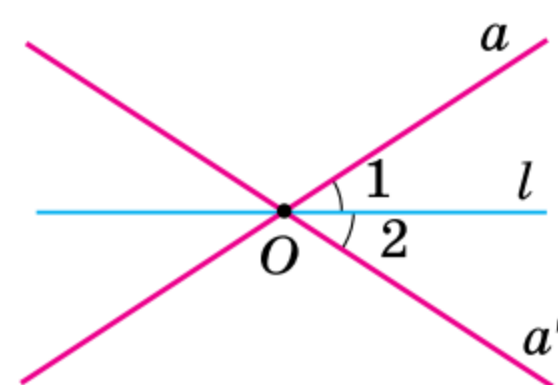
(Випадки, коли точки X і Y лежать на прямій l або на прямій, перпендикулярній до l , розгляньте самостійно.)

НАСЛІДОК. Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення.

Задача 2 Доведіть, що прямі a і a' , симетричні відносно осі симетрії l , або перетинаються в точці, яка лежить на осі симетрії, й утворюють з віссю симетрії рівні кути, або паралельні їй.

Розв'язання Можливі два випадки.

1. Пряма a перетинає вісь l у деякій точці O (мал. 305). Оскільки при осьовій симетрії точка O переходить у себе, то вона лежить і на симетричній прямій a' . Таким чином, симетричні прямі a і a' перетинаються в точці, яка лежить на осі l . Кути 1 і 2, утворені цими прямими з віссю l , симетричні відносно прямої l і тому є рівними.



Мал. 305

2. Пряма a паралельна осі симетрії l . Пряма a' , симетрична прямій a , не може перетинати вісь l , оскільки тоді пряма a також перетинала б вісь l (випадок 1). Отже, $a' \parallel l$.

Фігури, що мають вісь симетрії, часто трапляються в техніці (мал. 306), архітектурі (мал. 307, 308), природі (мал. 309), побуті (мал. 310).



Мал. 306



Мал. 307



Мал. 308



Мал. 309



Мал. 310

Дізнайтеся більше

1. Слово «симетрія» грецького походження й у перекладі означає сумірність, правильне відношення, однаковість у розміщенні частин.

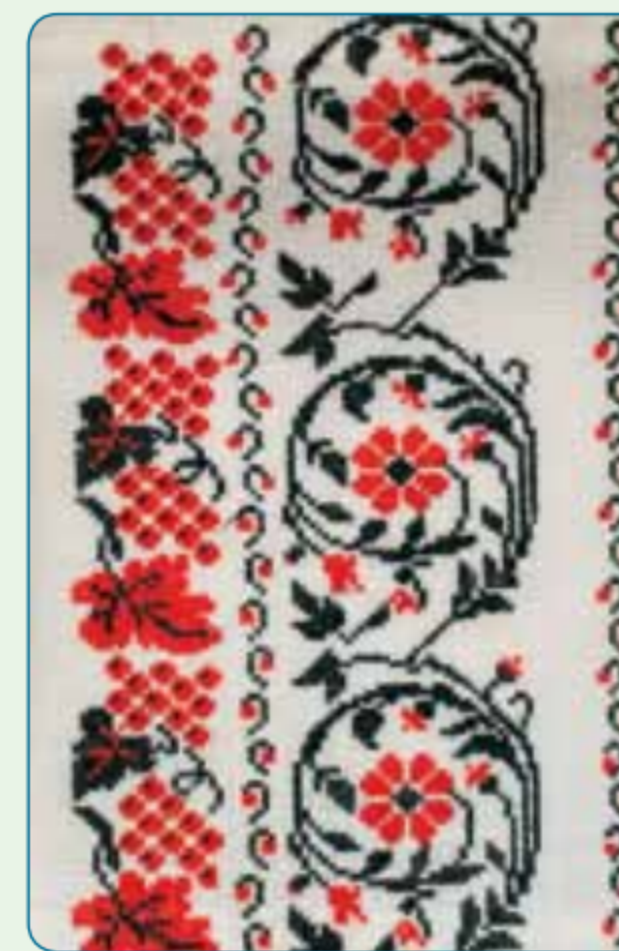
2. Симетрію широко застосовують у художніх композиціях, зокрема у вишивках. Історія української вишивки своїм корінням сягає у глибину віків. Вишивкою, за свідченням давньогрецького вченого Геродота, був прикрашений одяг скіфів. Українські майстрині оздоблювали вишитими орнаментами не лише одяг, а й предмети побуту — рушники, скатертини, наволочки, серветки тощо.

При цьому в різних регіонах України вишивки мали свій колорит і техніку виконання (мал. 311).

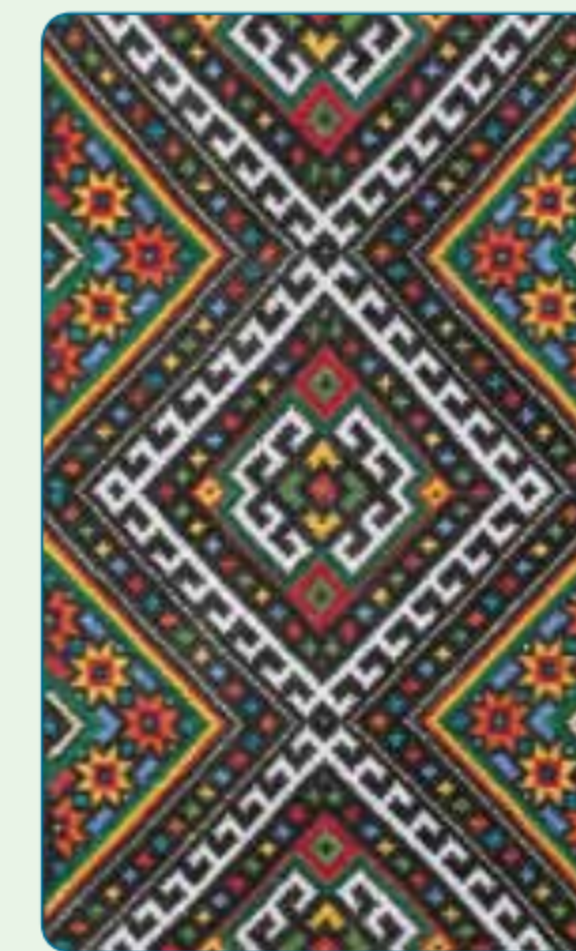


Мал. 311

Наприклад, на Харківщині й Луганщині різнокольорові вишивки виконували грубою ниткою, через що узори справляли враження рельєфних (мал. 312). А для гуцульських вишивок характерним є густе заливання тла, коли велика кількість дрібних елементів заповнює площину орнаменту, а візерунок окреслюється тонкими просвітками (мал. 313).



Мал. 312



Мал. 313

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
симетрія	symmetry	Symmetrie, f	symétrie

qr.orioncentr.com.ua/pNWtV

Пригадайте головне

1. Які дві точки називають симетричними відносно даної точки?
2. Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки?
3. Яку фігуру називають центрально-симетричною?
4. Назвіть властивості симетрії відносно точки.
5. Які дві точки називають симетричними відносно даної прямої?
6. Яке перетворення називають симетрією відносно даної прямої?
7. Яку фігуру називають симетричною відносно даної прямої?
8. Назвіть властивості симетрії відносно прямої.

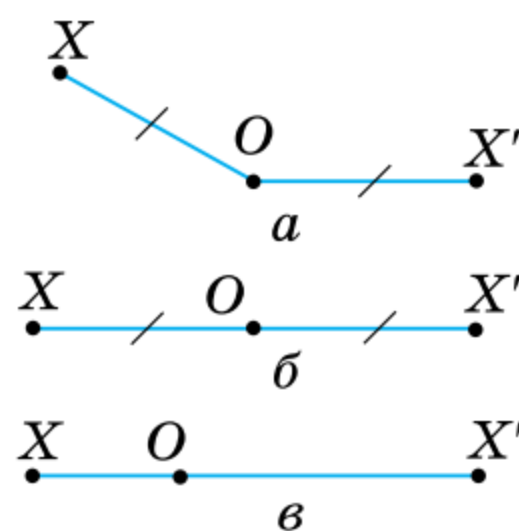
Усне тренування

Обчисліть:

- | | | |
|-----------------------|--------------------|---------------------|
| 1) $10 + 42 - 30$; | $52 + 100 + 48$; | $68 + 132 - 200$; |
| 2) $82 + 118 - 100$; | $11 + 389 + 100$; | $180 + 220 - 300$. |

Розв'яжіть задачі

- 893'.** Чи правильно, що кінці відрізка симетричні відносно точки, що:
1) не є серединою цього відрізка; 2) є серединою цього відрізка?
- 894'.** Чи правильно, що симетрія відносно точки:
1) не є переміщенням; 2) є переміщенням?
- 895'.** Чи правильно, що кінці відрізка симетричні відносно прямої, яка:
1) не проходить через середину цього відрізка, але перпендикулярна до нього;
2) проходить через середину цього відрізка, але не перпендикулярна до нього;
3) проходить через середину цього відрізка й перпендикулярна до нього?
- 896'.** Чи правильно, що симетрія відносно прямої:
1) не є переміщенням;
2) є переміщенням?
- 897°.** Які з точок X і X' , зображених на малюнку 314, $a - в$, симетричні відносно точки O ? Відповідь поясніть.
- 898°.** Позначте точки A і O . Побудуйте точку B , симетричну точці A відносно точки O .
- 899°.** Накресліть відрізок AB й позначте точку M , яка не лежить на відрізку AB . Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки M .



Мал. 314

- 900°.** Позначте точки A і B . За допомогою лінійки побудуйте точку, відносно якої симетричні точки A і B .



- 901°.** Дано трикутник ABC . Побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно:

- 1) вершини C ;
- 2) середини O сторони BC ;
- 3) точки K , що лежить поза трикутником.



- 902°.** Знайдіть координати точки A' , яка симетрична точці $A(3; 5)$ відносно точки:

- 1) $O(0; 0)$;
- 2) $C(3; 0)$;
- 3) $D(-1; -1)$.


qr.orioncentr.com.ua/1dQFC

- 903°.** На координатній площині побудуйте відрізок $A'B'$, симетричний відрізку AB , де $A(2; 2)$, $B(6; 6)$, відносно:

- 1) початку координат;
- 2) точки $M(4; 0)$;
- 3) кінця A відрізка AB .

Запишіть координати точок A' і B' .

- 904°.** Побудуйте фігуру, симетричну даному правильному трикутнику ABC відносно:

- 1) вершини A ;
- 2) точки M , що є серединою сторони BC ;
- 3) точки O , що є точкою перетину медіан трикутника.

- 905°.** Побудуйте фігуру, симетричну даному колу із центром O відносно:



- 1) точки A , що лежить на колі;
- 2) точки B , що лежить поза колом;
- 3) точки C , що лежить усередині кола.

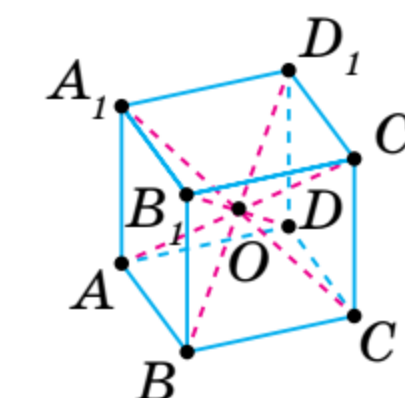
- 906°.** Назвіть у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 315):

- 1) вершини, симетричні вершинам A, B, B_1, A_1 відносно центра його симетрії;
- 2) ребра, симетричні ребрам AD і AB відносно центра його симетрії.

- 907°.** Назвіть у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 315):

- 1) вершини, симетричні вершинам D, C, D_1, C_1 відносно центра його симетрії;
- 2) ребра, симетричні ребрам BB_1 і CC_1 відносно центра його симетрії.

- 908°.** Які з точок X і X' , зображених на малюнках 316, $a - в$, симетричні відносно прямої l ? Відповідь поясніть.



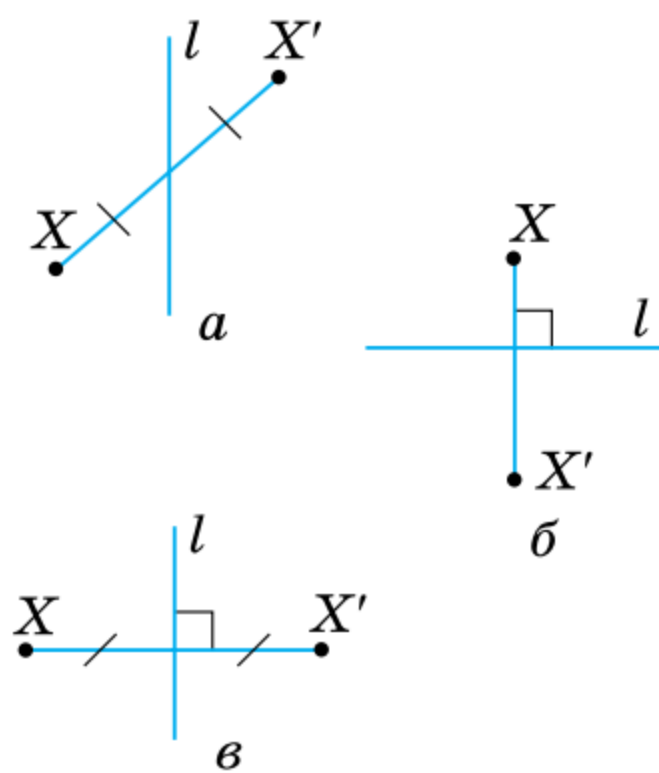
Мал. 315

909°. Проведіть пряму a й позначте точку M , що не лежить на прямій a .

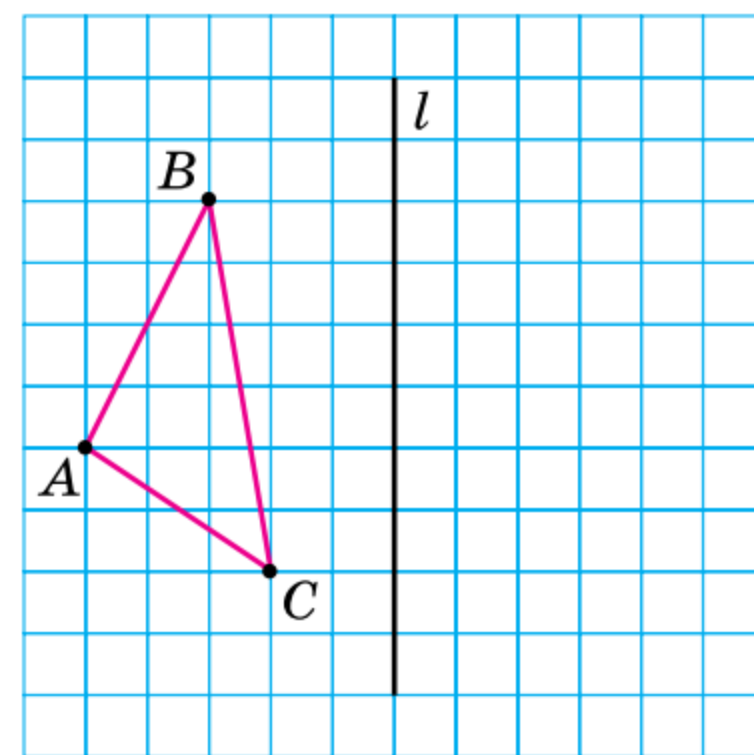


Побудуйте точку N , симетричну точці M відносно прямої a .

910°. За клітинками побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно прямої l (мал. 317).



Мал. 316



Мал. 317

911°. Позначте точки M і N . За допомогою лінійки та косинця побудуйте пряму l , відносно якої симетричні ці точки.

912°. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l , яка:

- 1) не перетинає трикутник;
- 2) перетинає трикутник;
- 3) містить сторону AC трикутника.

913°. Дано точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Побудуйте точку, симетричну:

- 1) точці C відносно прямої AB ;
- 2) точці B відносно прямої AC ;
- 3) точці A відносно прямої BC .

914°. Побудуйте фігуру, симетричну:



- 1) чотирикутнику відносно однієї з його сторін;
- 2) прямокутнику відносно однієї з його діагоналей;
- 3) трапеції відносно її середньої лінії.

915°. Побудуйте фігуру, симетричну даному колу відносно прямої, яка:

- 1) не перетинає коло;
- 2) дотикається до кола;
- 3) перетинає коло.

916°. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-4; 5)$ відносно:



- 1) осі OX ;
- 2) осі OY .

917°. Знайдіть координати кінців відрізка $A'B'$, симетричного відрізку AB відносно осі OX , якщо:



- 1) $A(2; 1)$, $B(4; 1)$;
- 2) $A(-3; -3)$, $B(3; 3)$;
- 3) $A(3; 2)$; $B(6; 4)$.

qr.orioncentr.com.ua/OVoY7



918. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно точки O , якщо:

- 1) точка O лежить на відрізку;
- 2) точка O не лежить на відрізку, але лежить на прямій, яка містить відрізок.

919. Дано точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. При симетрії відносно деякої точки точка B переходить у точку C . Побудуйте точку, у яку при цій симетрії переходить точка A .



920. Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка не проходить через цю точку, переходить у паралельну їй пряму.

921. Вершина B трикутника ABC при симетрії відносно середини сторони AC переходить у точку D . Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

922. Знайдіть координати вершини трикутника $A'B'C'$, який симетричний трикутнику ABC відносно початку координат, якщо:



- 1) $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(7; 3)$;
- 2) $A(4; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-2; 6)$.

923. Чи має центр симетрії:

- 1) відрізок;
- 2) промінь;
- 3) коло?

924. Дано точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Доповніть їх четвертою точкою D так, щоб чотирикутник $ABCD$ мав центр симетрії.

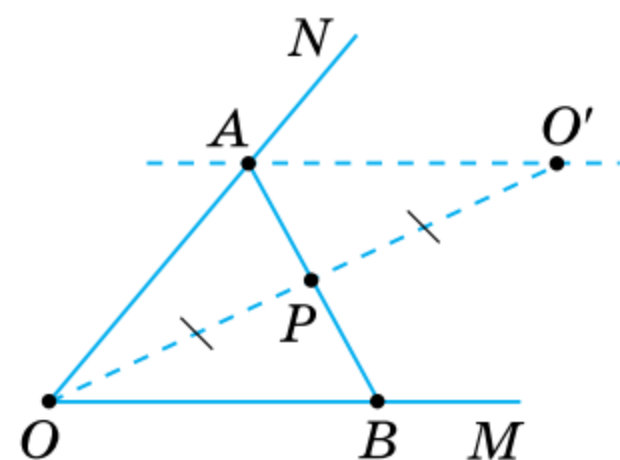
925. Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, — паралелограм.

926. Доведіть, що фігура, яка складається з двох паралельних прямих, є центрально-симетричною. Знайдіть геометричне місце центрів симетрії цих прямих.

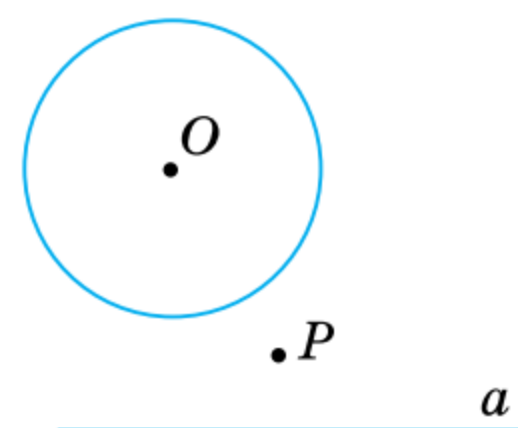
927. Дано довільний трикутник ABC й довільну точку A' . Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно деякої прямої так, щоб точка A перейшла в точку A' .

928. Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.

- 929.** Доведіть, що пряма, яка містить висоту рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є віссю симетрії трикутника.
- 930.** Точки перетину двох кіл симетричні відносно прямої, що проходить через їхні центри. Доведіть.
- 931.** Доведіть, що діагоналі ромба є його осями симетрії.
- 932.** Якщо трикутник має вісь симетрії, то він рівнобедрений. Доведіть.
- 933.** Доведіть, що коли трапеція має вісь симетрії, то вона рівнобічна.
- 934.** Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.
- 935.** Скільки осей симетрії може мати чотирикутник? Наведіть приклади.
- 936.** Вершина B рівнобедреного трикутника ABC при симетрії відносно прямої, що містить основу AC , переходить у точку D . Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.
- 937*.** Дано точки A і O . Скориставшись тільки циркулем, побудуйте точку A' , симетричну точці A відносно точки O .
- 938*.** Дано кут MON і довільну точку P , яка лежить у внутрішній області кута. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута й серединою в даній точці P . За малюнком 318 складіть план побудови.



Мал. 318



Мал. 319

- 939*.** Побудуйте відрізок так, щоб його середина була в даній точці P , а кінці — на даній прямій a й на даному колі (мал. 319).
- 940*.** Скориставшись тільки циркулем, побудуйте точку, симетричну даній точці відносно даної прямої.
- 941*.** Доведіть, що коли трикутник має дві осі симетрії, то він має й третю вісь симетрії.
- 942*.** Дано пряму l і точки A і B з одного боку від неї. На прямій l знайдіть таку точку N , щоб сума відстаней $AN + BN$ була найменшою.
- 943*.** Дано гострий кут ABC й точку M усередині його. На сторонах кута знайдіть такі точки X і Y , щоб трикутник MXY мав найменший периметр.

Проявіть компетентність

- 944.** Базовий елемент орнаменту містить два елементи. Опишіть математичною мовою принцип побудови такого орнаменту:
- 1) на малюнку 320;
 - 2) на малюнку 321.

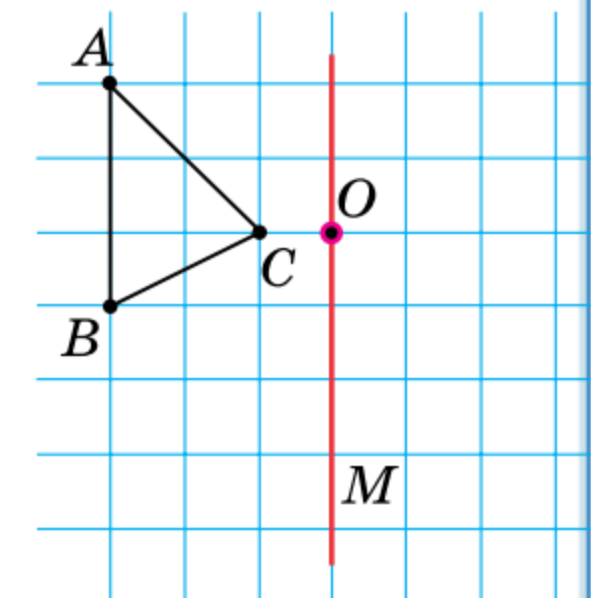


Мал. 320



Мал. 321

- 945.** Дано частину базового елемента орнаменту (мал. 322).
1. На основі цієї частини побудуйте повний базовий елемент орнаменту, використавши симетрію відносно:
 - а) точки O ;
 - б) прямої OM .
 2. Побудуйте орнамент із трьох базових елементів.



Мал. 322

- 946.** З одного боку від газопроводу розташовані міста A і B . У якому місці газопроводу слід побудувати газову підстанцію, щоб при розподілі газу для міст A і B витратити найменшу кількість труб?



§ 15. ПОВОРОТ

Ситуація. Дарина вишивала рушник з традиційним орнаментом. Вона вишила одну деталь квітки — пелюстку. Потрібно було рівномірно розмістити ще 5 таких пелюсток навколо центра квітки. Якщо квітка має 6 пелюсток, то $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Це означає, що кожна наступна пелюстка повернута на 60° відносно попередньої. Дарина виконала розмітку пелюсток за допомогою кальки. Поклала кальку на вишиту пелюстку та обвела її. Потім знайшла центр квітки, повернула кальку на 60° навколо центра та обвела другу пелюстку. Далі повернула ще на 60° — обвела третю і т. д.



qr.orioncentr.com.ua/2ZbWU



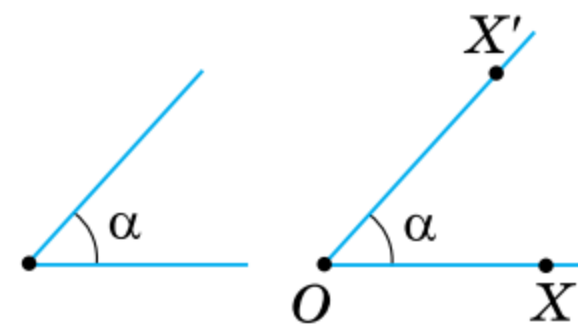
Як Дарина визначила розташування пелюсток квітки?

Застосувала поворот.

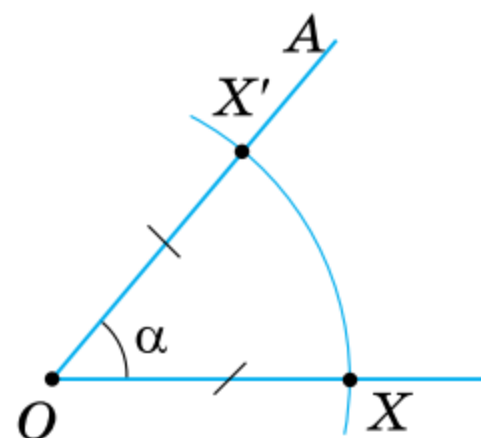
Нехай дано кут α і точку O (мал. 323). Візьмемо довільну, відмінну від O , точку X . Точці X поставимо у відповідність таку точку X' , що:

- 1) кут між променями OX і OX' дорівнює α ;
- 2) відстані OX і OX' — рівні.

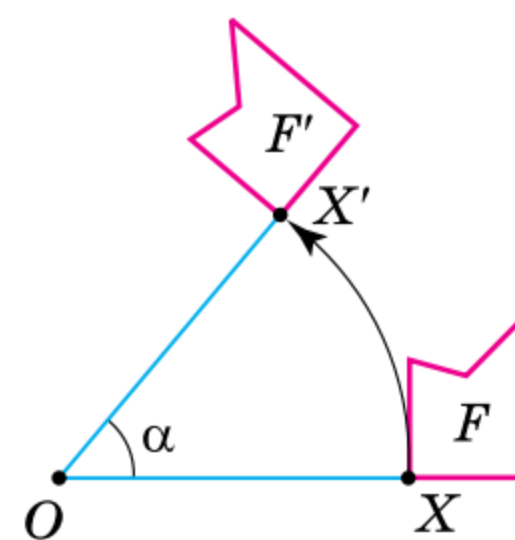
Такий перехід точки X у точку X' називають *поворотом навколо точки O на кут α проти годинникової стрілки*. Сама точка O внаслідок повороту переходить у себе. Точку O називають *центром повороту*, кут між променями OX і OX' — *кутом повороту* проти годинникової стрілки (мал. 323).



Мал. 323



Мал. 324



Мал. 325

✓ Якщо центр O і кут α повороту задано, то точку X' , у яку переходить точка X унаслідок повороту проти годинникової стрілки, будемо так (мал. 324):

- проводимо промінь OX ;
- від променя OX відкладаємо кут XOA , що дорівнює куту α ;
- на промені OA знаходимо точку X' , таку, що $OX' = OX$.

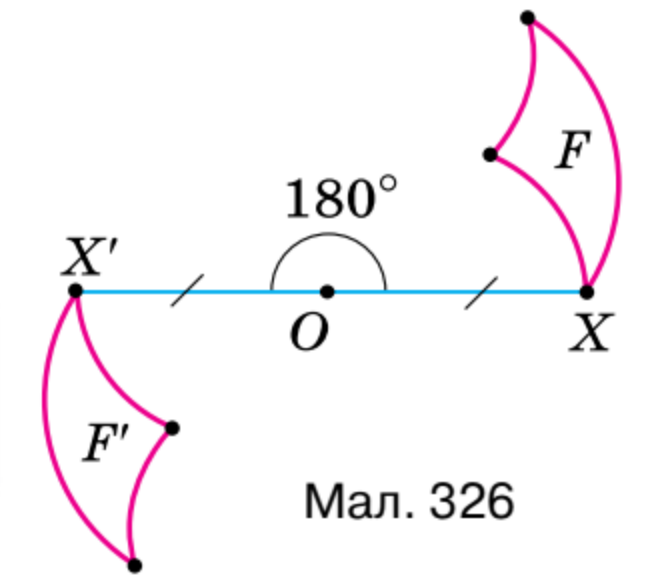
Якщо на площині дано деяку фігуру F , то для кожної її точки X можна знайти точку X' , у яку перейде точка X унаслідок повороту навколо точки O на кут α (мал. 325). У результаті одержимо фігуру F' , у яку перейшла фігура F при заданому повороті. При цьому точка O переходить у себе.



Поворот на кут 180° навколо точки O є симетрією відносно точки O (мал. 326).

Запам'ятайте!

Теорема (властивість повороту)
Поворот є переміщенням.

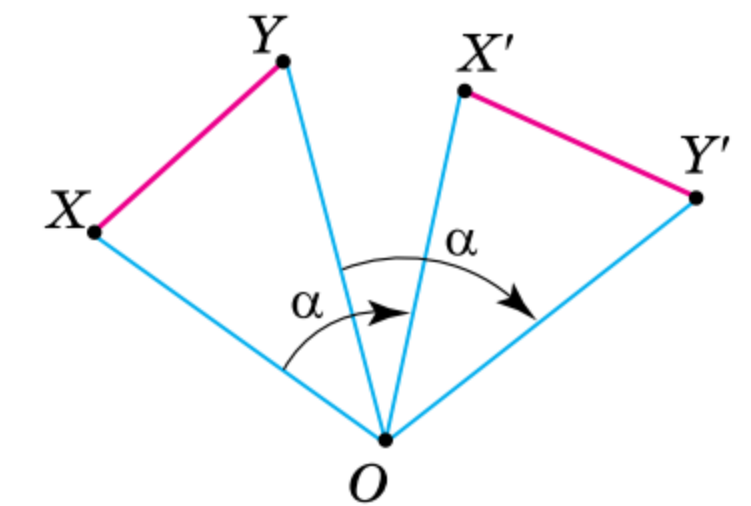


Мал. 326

Дано: перетворення, що є поворотом.

Довести: дане перетворення є переміщенням.

Доведення. Нехай поворот навколо точки O на кут α переводить точки X, Y фігури F у точки X', Y' фігури F' (мал. 327). Доведемо, що $X'Y' = XY$. Розглянемо загальний випадок, коли точки O, X, Y не лежать на одній прямій.



Мал. 327

$\triangle OX'Y' = \triangle OXY$ за двома сторонами й кутом між ними.

У них $OX' = OX, OY' = OY$ за означенням повороту і $\angle X'OY' = \angle XOY$ (кожний із цих кутів дорівнює різниці кута α й кута YOX').

З рівності трикутників випливає $X'Y' = XY$.

Випадок, коли точки O, X, Y лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.

НАСЛІДОК. Поворот має всі властивості переміщення.



Чому вдалося правильно розташувати пелюстки квітки в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

Скористалися властивостями повороту.



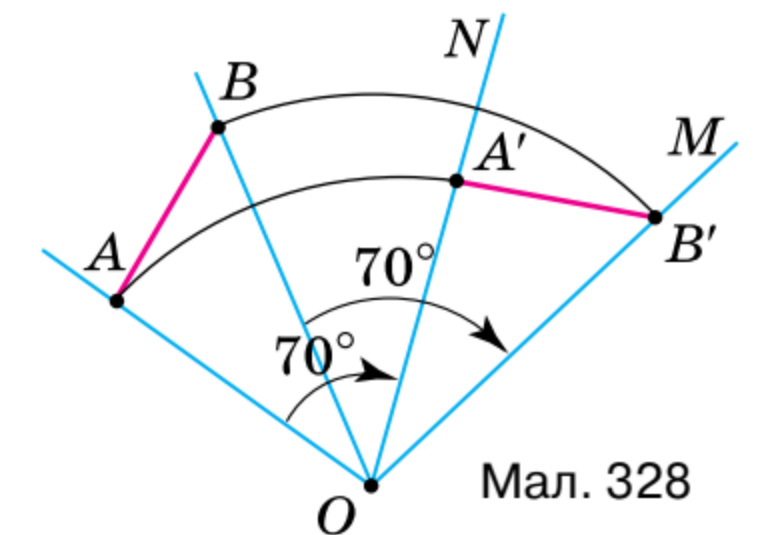
Задача

Побудуйте відрізок, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 70° за годинниковою стрілкою.

Розв'язання

Проведемо промені OA і OB (мал. 328). Відкладемо за годинниковою стрілкою $\angle AON = 70^\circ$ і $\angle BOM = 70^\circ$. На промені ON відкладемо відрізок $OA' = OA$, а на промені OM — відрізок $OB' = OB$. Сполучимо точки A' і B' .

Відрізок $A'B'$ — шуканий.



Мал. 328



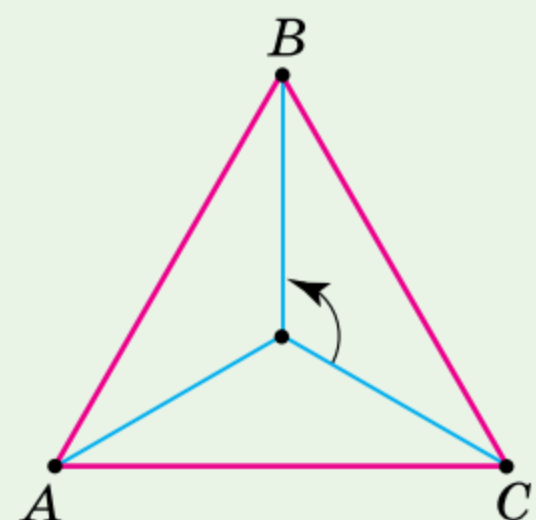
У яку фігуру перейде при повороті на деякий кут відрізок, кінець якого збігається із центром повороту?



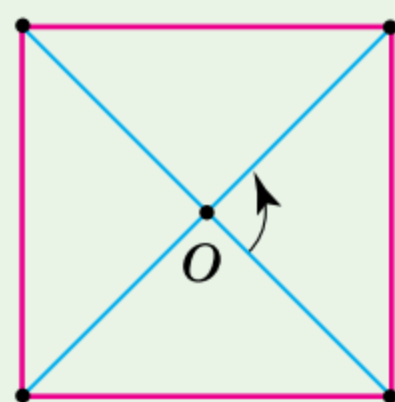
У відрізок, рівний даному.

Дізнайтеся більше

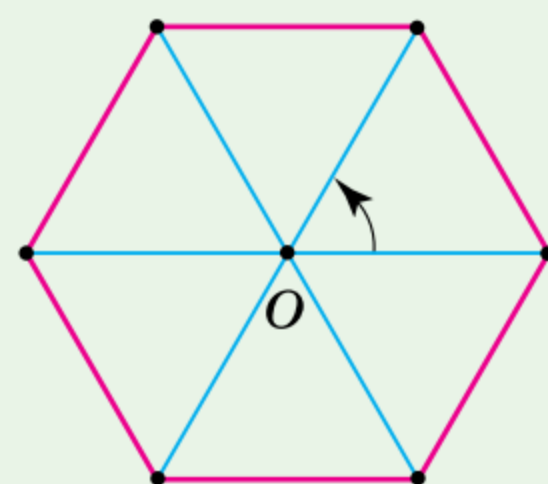
Розглянемо фігури, зображені на малюнках 329–331. Кожна з цих фігур внаслідок повороту навколо точки O на деякий кут переходить у себе. Правильний трикутник (мал. 329) переходить у себе при повороті на кут 120° ($120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$) навколо його центра O .



Мал. 329



Мал. 330



Мал. 331

Справді, $OA = OB = OC$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$, тому трикутник ABC переходить у себе при даному повороті.

Аналогічно можна показати, що квадрат переходить у себе при повороті на кут $\frac{360^\circ}{4}$ навколо його центра (мал. 330), правильний шестикутник — при повороті на кут $\frac{360^\circ}{6}$ навколо його центра (мал. 331). Зрозуміло, що будь-який правильний n -кутник з n вершинами переходить у себе внаслідок повороту навколо свого центра на кут $\frac{360^\circ}{n}$. Якщо фігура F внаслідок повороту навколо

деякої точки O на кут $\frac{360^\circ}{n}$ (n — натуральне число) переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має симетрію обертання порядку n . Отже, рівносторонній трикутник, квадрат, правильний шестикутник, правильний n -кутник мають симетрію обертання порядку 3, 4, 6, n відповідно.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
поворот	rotation	Drehung, f	rotation

qr.orioncentr.com.ua/JDux9

Пригадайте головне

1. Що таке поворот?
2. Що таке центр повороту; кут повороту?
3. Доведіть, що поворот є переміщенням.
4. Сформулюйте властивості повороту.

Усне тренування

Обчисліть:

- 1) $\sqrt{81} + \sqrt{16}$; $\sqrt{144} - \sqrt{121}$; $\sqrt{196} - \sqrt{49}$; $\sqrt{64} + \sqrt{100}$;
- 2) $9^2 + 4^2$; $12^2 - 11^2$; $14^2 - 7^2$; $8^2 - 10^2$.

Розв'яжіть задачі

947'. На якому з малюнків 332, $a - \alpha$, точка A перейшла в точку A' унаслідок повороту навколо точки O на кут α ?

948'. За допомогою транспортира побудуйте $\angle MON = 60^\circ$. На стороні OM кута позначте точку X . На стороні ON знайдіть точку X' , у яку перейде точка X внаслідок повороту навколо точки O на кут 60° .

949'. За клітинками побудуйте відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки (мал. 333).

950'. Дано точки O і A . Побудуйте точку A' , у яку переходить точка A при повороті навколо точки O :

- 1) на кут 50° за годинниковою стрілкою;
- 2) на кут 120° проти годинникової стрілки;
- 3) на кут 180° за годинниковою стрілкою.

951'. Дано відрізок AB і точку O , що лежить на прямій AB . Виконайте поворот відрізка AB навколо точки O :

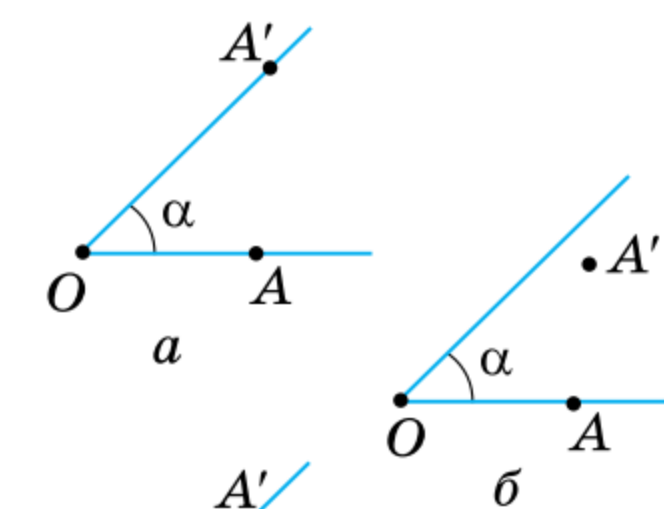
- 1) на кут 80° проти годинникової стрілки;
- 2) на кут 140° за годинниковою стрілкою;
- 3) на кут 90° за годинниковою стрілкою.

952'. Розв'яжіть задачу 951 за умови, що точка O не лежить на прямій AB .

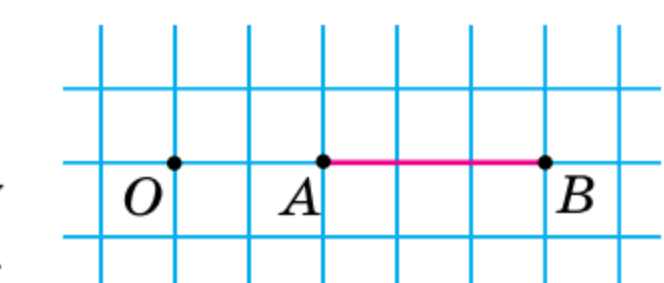


953'. Накресліть відрізок AB . Виконайте поворот відрізка AB :

- 1) навколо точки A на кут 150° за годинниковою стрілкою;



Мал. 332



Мал. 333

- 2) навколо точки B на кут 60° проти годинникової стрілки;
 3) навколо середини відрізка на кут 40° за годинниковою стрілкою.

954°. У яку фігуру перейде при повороті на деякий кут:

qr.orioncentr.com.ua/j7Mtl



- 1) пряма, що проходить через центр повороту;
 2) коло, центр якого збігається із центром повороту;
 3) кут з вершиною в центрі повороту?



955°. У трикутнику AOB $AO = OB$. Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник AOB при повороті навколо точки O :



- 1) на кут AOB за годинниковою стрілкою;
 2) на кут AOB проти годинникової стрілки;
 3) на кут 120° за годинниковою стрілкою.

956°. Побудуйте кут, у який переходить прямий кут MON при повороті навколо вершини O на кут 45° :

- 1) за годинниковою стрілкою;
 2) проти годинникової стрілки.

957. Накресліть пряму a та позначте точку M , яка не лежить на прямій. Побудуйте пряму, у яку переходить пряма a при повороті навколо точки M :

- 1) на кут 90° за годинниковою стрілкою;
 2) на кут 45° проти годинникової стрілки.

958. Виконайте поворот даного кола навколо точки A на кут 90° , якщо:



- 1) точка A лежить поза колом; 2) точка A лежить на колі.

959. Позначте точки X і X' . Побудуйте геометричне місце центрів поворотів, за яких точка X переходить у точку X' .

960. Дано два рівні кола. Знайдіть геометричне місце центрів поворотів, за яких одне коло переходить в інше.

961. Побудуйте фігуру, у яку переходить трикутник ABC при повороті на кут 90° за годинниковою стрілкою навколо:



- 1) вершини C ;
 2) середини сторони AC ;
 3) точки O , що лежить поза трикутником.

962. Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте квадрат, у який переходить квадрат $ABCD$ при повороті за годинниковою стрілкою:

- 1) навколо вершини D на кут 135° ;
 2) навколо центра квадрата на кут 45° .

963. Доведіть, що квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на кут 90° переходить у себе.

964. Доведіть, що рівносторонній трикутник при повороті навколо точки перетину його висот на кут 120° переходить у себе.

965. Через центр правильного трикутника проведено дві прямі, кут між якими дорівнює 60° . Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться між сторонами трикутника, рівні між собою.

966. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки прямих, які містяться всередині квадрата, — рівні.

967*. Дано два кола. Поворотом на кут 45° одне коло переводиться в інше. Побудуйте центр цього повороту.

968*. Дано два рівні відрізки AB і $A'B'$. Побудуйте центр повороту O , за якого точка A переходить у точку A' , а точка B — у точку B' . Чи завжди можна знайти центр такого повороту?

969*. Нехай на сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано квадрати $ABPQ$ і $BCMN$. Квадрат $ABPQ$ і трикутник ABC розміщені з різних боків відносно прямої AB , а квадрат $BCMN$ і трикутник ABC — з одного боку відносно прямої BC . Доведіть, що відрізки PN і AC — рівні й перпендикулярні.

970*. При повороті навколо точки A на кут 60° кінець B відрізка BC переходить у кінець C , а кінець C — у точку D . Доведіть, що точки A , B , C і D — вершини ромба.

971*. Виконайте поворот рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом завдовжки 1 см навколо вершини прямого кута на 45° . Знайдіть площу спільної частини даного трикутника і трикутника, який одержали при повороті.

Проявіть компетентність

972. Опишіть ситуацію математичною мовою:

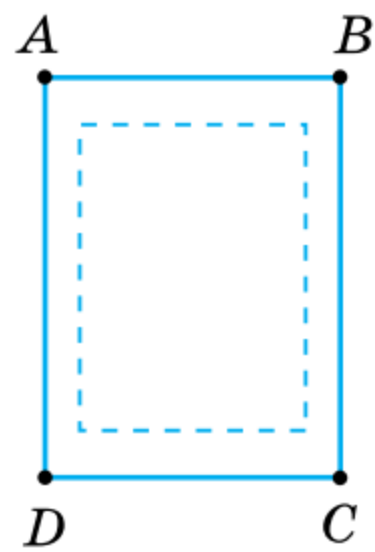
- 1) подивившись на годинник, Андрій побачив, що пройшло:
 а) чверть години; б) пів години;
 2) розкрили складаний ніж;
 3) шматок мотузки склали вдвічі.

973. Стрілки годинника показують 12 год. Який час показуватиме годинник, якщо хвилинка стрілка здійснить поворот:

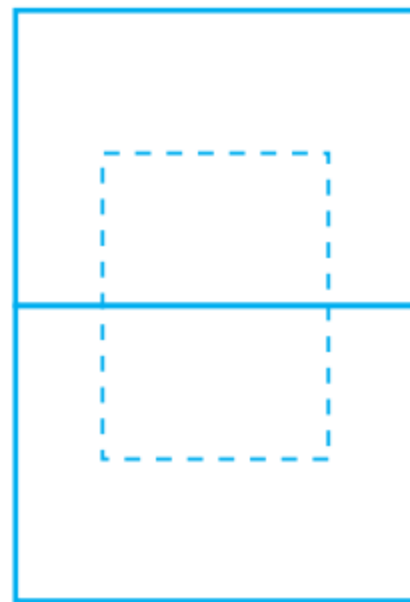
- 1) на 60° ;
 2) на 120° ;
 3) на 150° ?



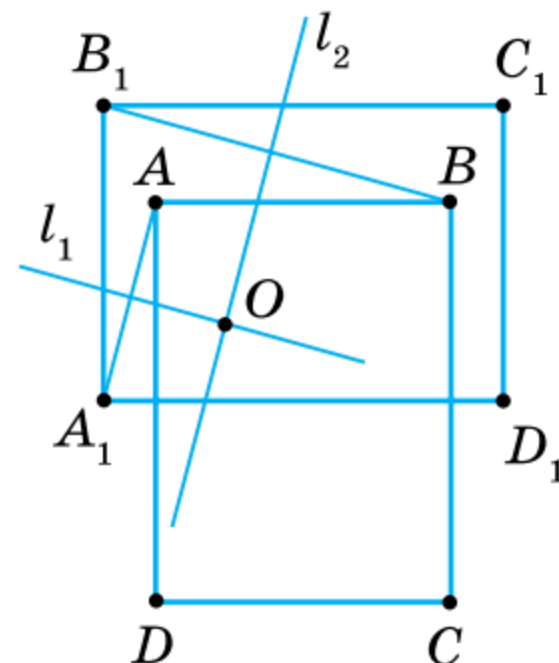
974. Потрібно виготовити розкладний столик так, щоб у закритому стані його кришка (стілниця) була розміщена, як показано на малюнку 334, у відкритому — як на малюнку 335. У якому місці потрібно помістити шип, поворотом навколо якого кришка столу переходила б із положення, зображеного на малюнку 334, у положення, зображене на малюнку 335? Під час розв'язування скористайтеся малюнком 336.



Мал. 334



Мал. 335



Мал. 336

§ 16. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

1. Що таке перетворення подібності

Ситуація. Учні 9-А класу вирішили прикрасити стіну шкільного коридору великим плакатом з емблемою школи. Є лише ескіз емблеми розміром 5 см × 5 см, а потрібно зробити зображення розміром 1 м × 1 м. Постала проблема: як збільшити малюнок, щоб емблема на ньому була подібна емблемі на ескізі. Якщо це зробити «на око», то форма може спотворитися. Вирішили, за аналогією з подібністю трикутників, знайти відношення між відповідними елементами малюнка на плакаті та ескізі. Ескіз емблеми має сторону 5 см, а її зображення на плакаті — 1 м = 100 см, тоді коефіцієнт подібності $k = \frac{100}{5} = 20$. Звідси, якщо на ескізі букви мали висоту 1 см, то на малюнку їх висота має дорівнювати $1 \times 20 = 20$ (см); якщо проміжок між елементами ескізу становить 0,5 см, то на малюнку він буде дорівнювати $0,5 \times 20 = 10$ (см) і т. д. У такий спосіб вони створили малюнок на плакаті, подібний ескізу емблеми школи.



qr.orioncentr.com.ua/Dp8o8



Як учні й учениці створили емблему на малюнку, що зберегла форму емблеми на ескізі?

Скористалися подібністю фігур.



Запам'ятайте!

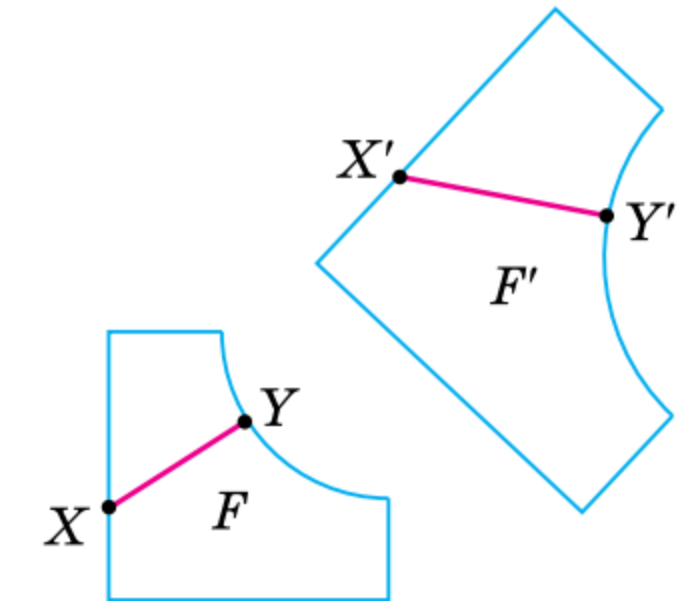
Перетворення, що переводить фігуру F у фігуру F' , за якого відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називають *перетворенням подібності*, або *подібністю* (мал. 337).

Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X' і Y' фігури F' , то $X'Y' = k \cdot XY$, де $k > 0$. Число k називають *коефіцієнтом подібності*.



У чому особливість перетворення в ситуації, розглянутій на початку параграфа?

Розміри зображення змінилися, але форма залишилася тією самою.



Мал. 337

2. Властивості перетворення подібності



Чи існує зв'язок між перетворенням подібності й переміщенням?

Так.



Справді, переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$.



Переміщення є окремим випадком перетворення подібності.

Запам'ятайте!

Теорема (властивість перетворення подібності)

При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Дано: перетворення, що є перетворенням подібності.

Довести: 1) точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій; 2) зберігається порядок взаємного розміщення точок на прямій.

Доведення. Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій і точка B лежить між точками A і C (мал. 338). Тоді $AC = AB + BC$. Деяке перетворення подібності переводить точки A , B і C в точки A' , B' і C' . За означенням перетворення подібності маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = \\ = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

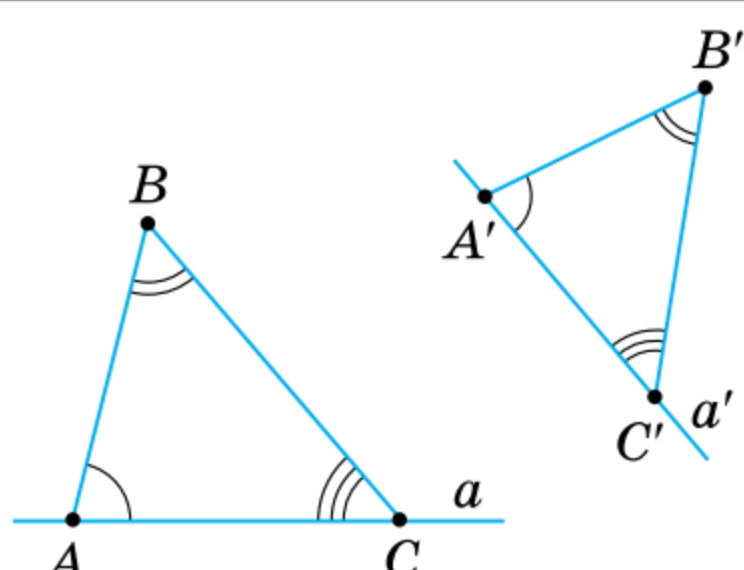
З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A' , B' і C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C' .

НАСЛІДОК. Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

 Прийmemo без доведення ще таку властивість: перетворення подібності переводить кут у рівний йому кут.

Властивості перетворення подібності подано в таблиці 31.

Таблиця 31

Перетворення подібності	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у відрізок (AB в $A'B'$, BC в $B'C'$, AC в $A'C'$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$).

3. Подібні фігури

Запам'ятайте!

Дві фігури називаються *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.



Якщо фігура F подібна фігурі F' , то записують $F \sim F'$ або (коли треба вказати коефіцієнт подібності) $F \stackrel{k}{\sim} F'$.

Подібні фігури добре відомі з практики. Наприклад, подібними є внутрішній і зовнішній бордюри клумби (мал. 339); скановані копії документа, які

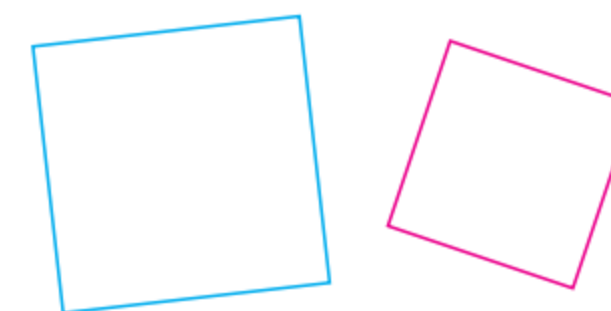


Мал. 339

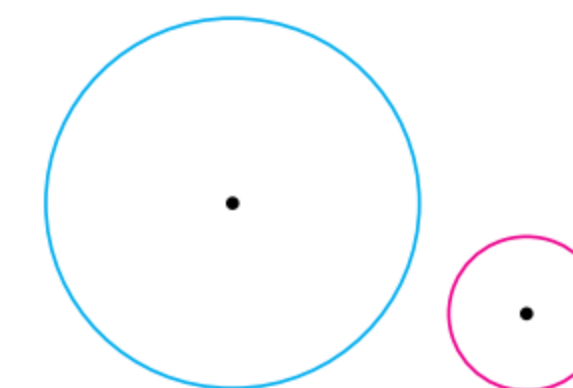
qr.orioncentr.com.ua/pxYaL



зберегли в різних, але пропорційних форматах; дві однакові географічні карти різного масштабу; те саме фото, яке роздивляємось на смартфоні й на планшеті тощо. Прикладами подібних геометричних фігур можуть бути будь-які два квадрати (мал. 340), два кола (мал. 341).



Мал. 340



Мал. 341

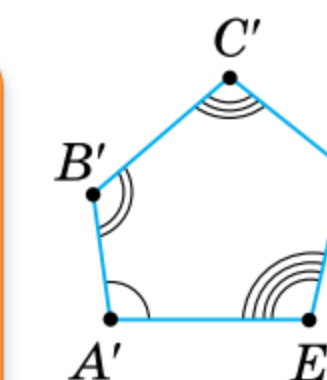
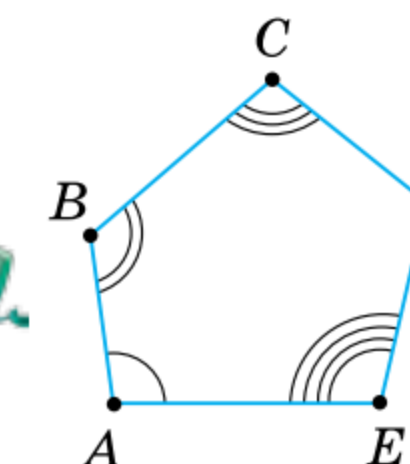
Із властивостей перетворення подібності випливає, що в подібних фігурах відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні. Зокрема, в подібних многокутниках $ABC...E$ і $A'B'C'...E'$ (мал. 342):

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \dots, \angle E = \angle E' \text{ і } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots = \frac{EA}{E'A'}.$$



Як пов'язані площі подібних фігур?

Відповідь дає теорема.



Мал. 342

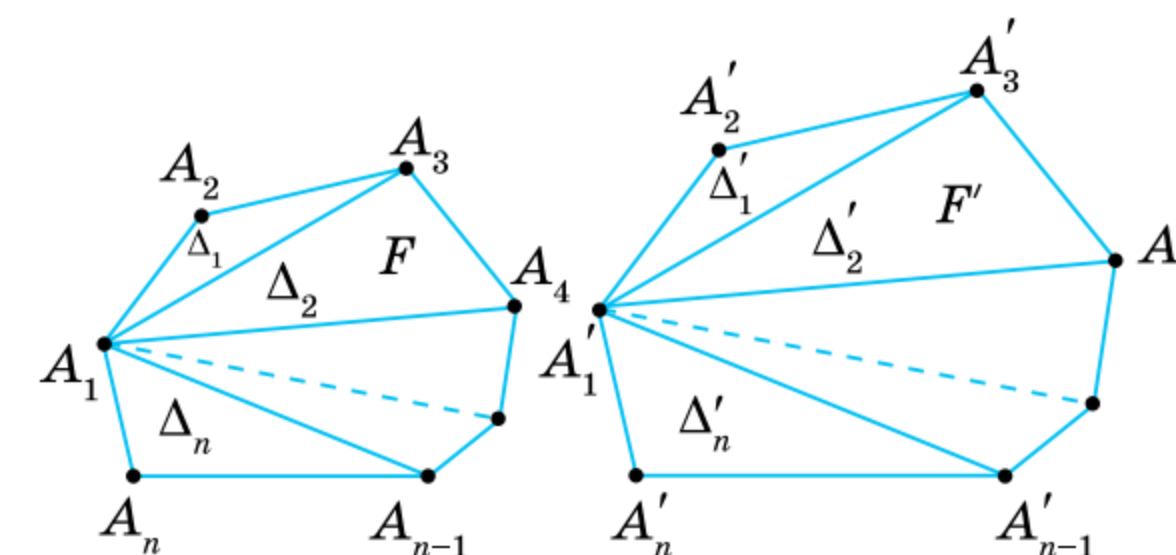
Запам'ятайте!

Теорема

(про відношення площ подібних многокутників)

Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Дано: F і F' — подібні многокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 343).



Мал. 343

Довести: $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2.$

Доведення. Розіб'ємо многокутник F на трикутники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ (мал. 343). Оскільки многокутники F і F' подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник F у многокутник F' , а трикутники розбиття многокутника F — у трикутники $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ відповідного розбиття многокутника F' . Площа многокутника F дорівнює сумі площ трикутників $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, а площа многокутника F' дорівнює сумі площ трикутників $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$. Якщо коефіцієнт подібності дорівнює k , то сторони й висоти трикутників многокутника F' у k разів більші за відповідні сторони й висоти трикутників многокутника F .

Звідси випливає: $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}, S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}, \dots, S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$.

Додавши ці рівності почленно, одержимо:

$$S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \dots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \dots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F.$$

Отже, $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Цей факт справджується для будь-яких фігур.

-  Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур F і F' .
-  Площі подібних фігур відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних елементів.

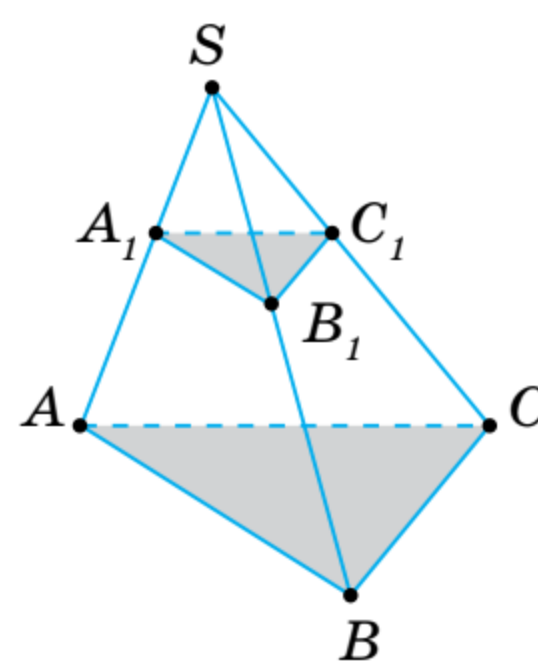
4. Подібність у піраміді

Якщо у гранях трикутної піраміди $SABC$ проведемо відрізки A_1B_1, A_1C_1 і B_1C_1 , паралельні відповідним сторонам основи (мал. 344), то отримаємо пари подібних трикутників:

$$\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1, \Delta SAC \sim \Delta SA_1C_1, \Delta SBC \sim \Delta SB_1C_1.$$

Обґрунтуйте цей факт, спираючись на першу ознаку подібності трикутників.

Крім того, отриманий у перерізі трикутник $A_1B_1C_1$ є подібним трикутнику основи ABC , а також отримана піраміда $SA_1B_1C_1$ подібна даній піраміді $SABC$ (ці властивості доведемо пізніше).

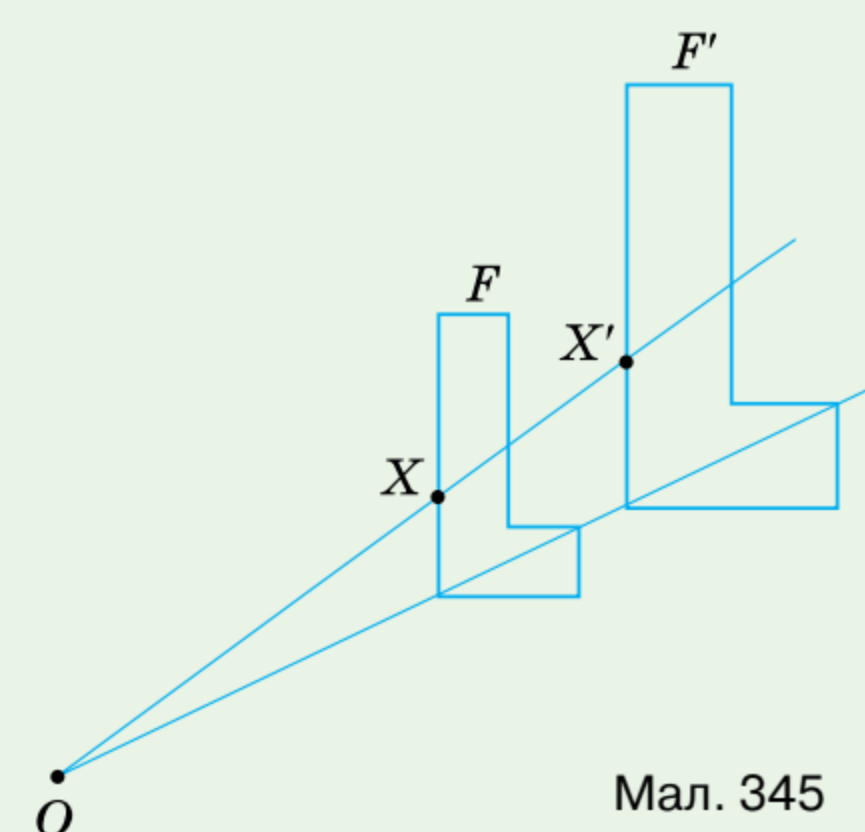


Мал. 344

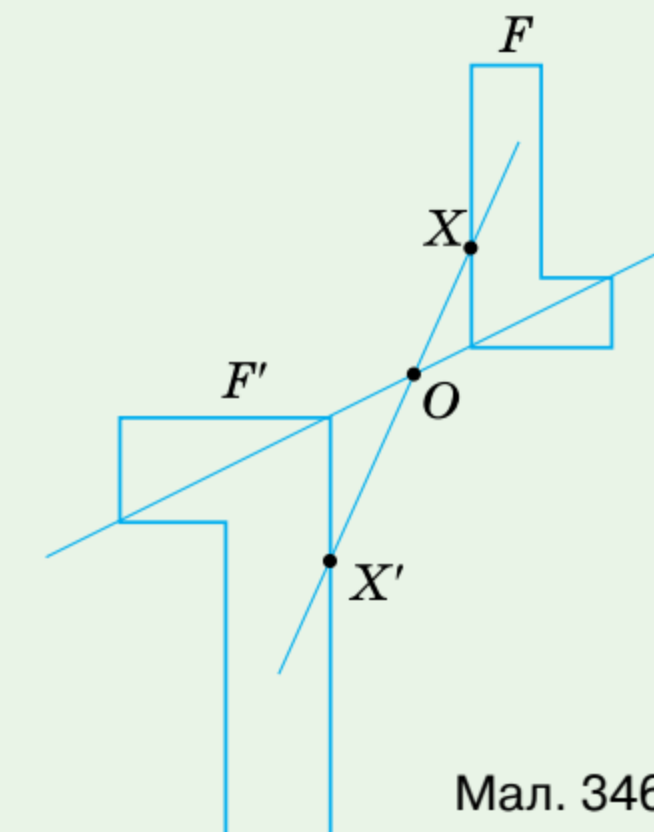
Дізнайтеся більше

Розглянемо особливий спосіб побудови подібних фігур (мал. 345, 346). Нехай F — дана фігура. Позначимо довільну точку O . Через кожну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX' , що дорівнює $k \cdot OX$. Одержимо шукану фігуру F' .

На малюнку 345 точки X і X' лежать на одному промені OX , а на малюнку 346 — на доповняльних променях OX і OX' . Щоб розрізнити ці випадки, вважають, що в першому випадку $k > 0$, а в другому — $k < 0$. Фігури F і F' називають *гомотетичними*.



Мал. 345

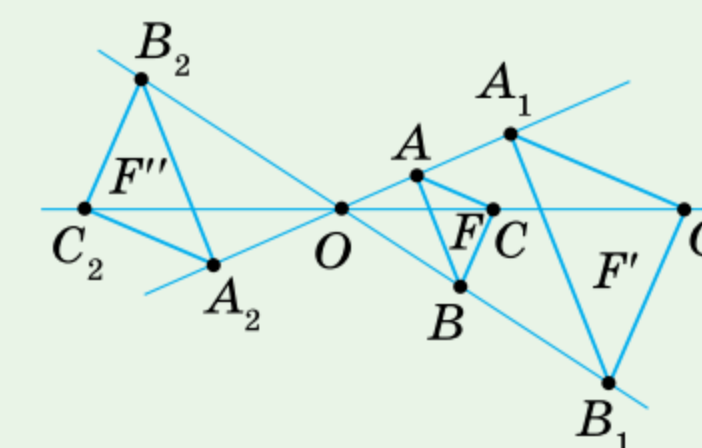


Мал. 346

Перетворення називається *гомотетією*, якщо воно переводить кожну точку X фігури F у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k| OX$, де k — будь-яке число, відмінне від нуля, O — фіксована точка, $X' \in OX$.

Число k називають *коефіцієнтом гомотетії*, точку O — *центром гомотетії*.

На малюнку 347 трикутник ABC при гомотетії з центром O та коефіцієнтом $k = 3$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, а при гомотетії з коефіцієнтом $k = -2$ й тим самим центром — у трикутник $A_2B_2C_2$.



Мал. 347

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
перетворення подібності	similarity transformation	Ähnlichkeitstransformation, f	transformation de similitude

qr.orioncentr.com.ua/6G4aw

Пригадайте головне

1. Що таке перетворення подібності?
2. Доведіть, що при перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, які також лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. У які фігури переходять прямі, промені, відрізки, кути під час перетворення подібності?
4. Які дві фігури називаються подібними? Наведіть приклади подібних фігур.
5. Сформулюйте теорему про відношення площ подібних багатокутників.

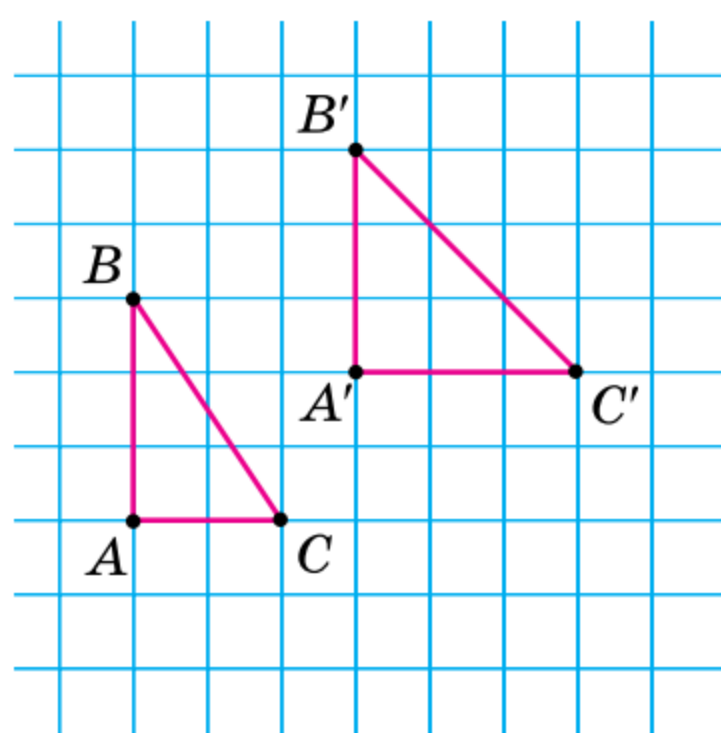
Усне тренування

Обчисліть:

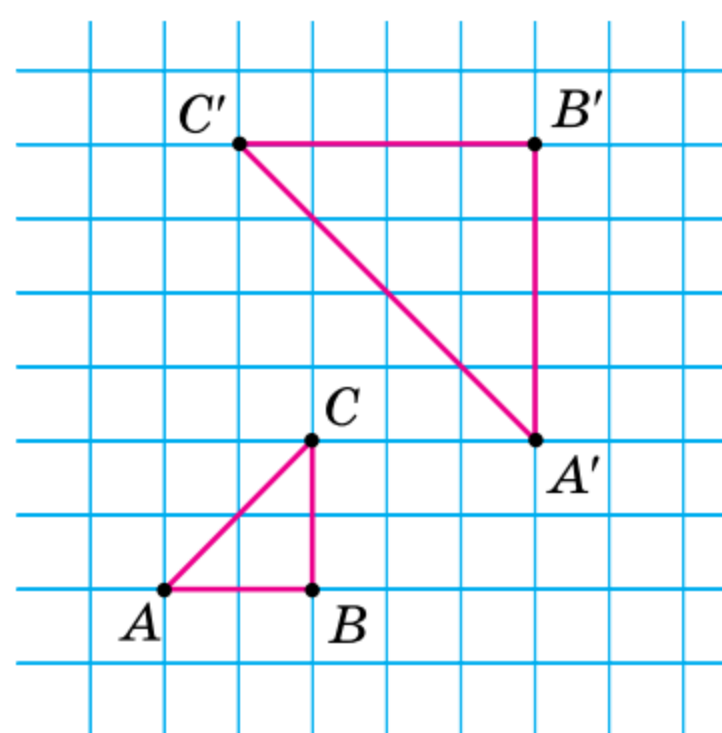
- 1) $5^2 + 4^2 - 10$; $2^3 + 4^2 - 4$; $8^2 + 12^2 - 8$;
- 2) $3^3 + 3^2 - 50$; $9^2 + 3^2 + 10$; $10^2 + 5^2 - 125$.

Розв'яжіть задачі

- 975'. На якому з малюнків 348, $a - б$, зображено перетворення подібності, що переводить трикутник ABC в трикутник $A'B'C'$?



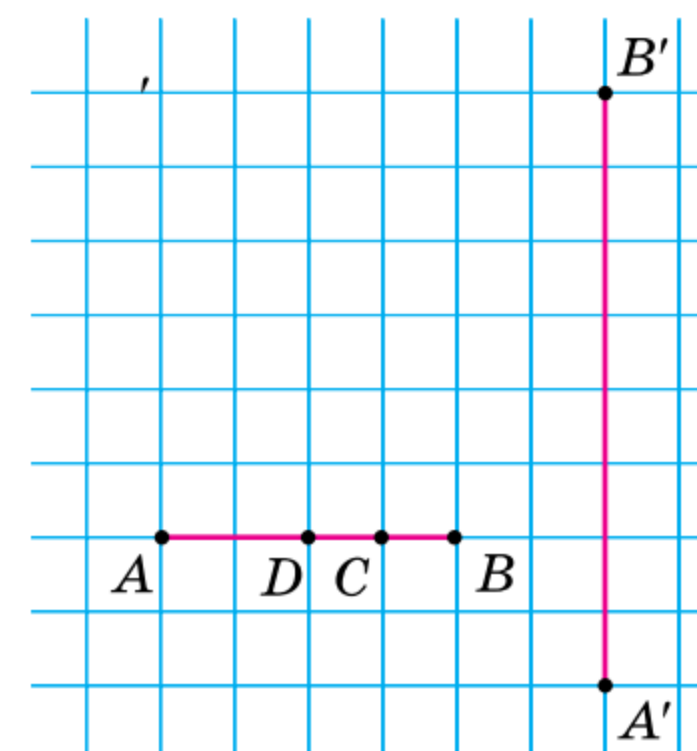
а



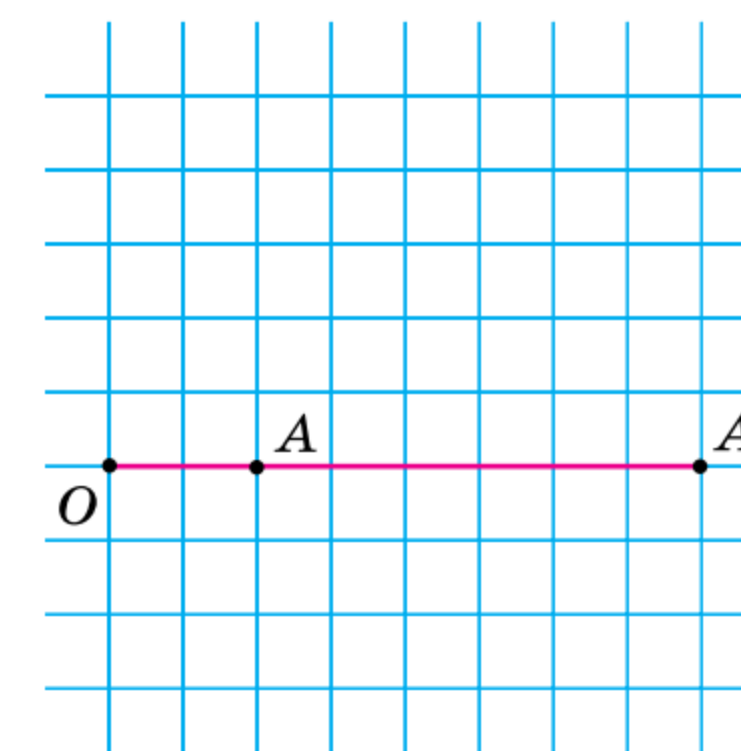
б

Мал. 348

- 976'. Чи достатньо лише рівності відповідних кутів двох багатокутників або лише пропорційності відповідних сторін, щоб ці багатокутники були подібними?
- 977'. За якої умови дві подібні фігури — рівні?
- 978'. На малюнку 349 перетворення подібності переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$. За клітинками побудуйте точки, у які переходять точки C і D відрізка AB при цьому перетворенні.
- 979'. На малюнку 350 перетворення подібності переводить відрізок OA у відрізок OA' . Скориставшись клітинками, знайдіть коефіцієнт подібності.



Мал. 349



Мал. 350

- 980'. Побудуйте дві подібні, але не рівні фігури.

- 981'. Чи будуть подібними:

- 1) два будь-які квадрати;
- 2) два будь-які прямокутники;
- 3) два будь-які кола?

- 982'. Чи будуть подібними:

- E**
 - 1) два будь-які трикутники;
 - 2) два будь-які правильні трикутники;
 - 3) дві будь-які трапеції?

- 983'. Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одному з яких кут між бічними сторонами дорівнює α , а в іншому — кут при основі дорівнює β , якщо:

- 1) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 31^\circ$;
- 2) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 45^\circ$?

- 984'. Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одному з яких кут між бічними сторонами дорівнює 60° , а в іншому — кут при основі дорівнює 59° ?

- 985'. Чи подібні два ромби, якщо:

- 1) кут одного ромба дорівнює 45° , а кут іншого — 135° ;
- 2) у кожного з них сторона дорівнює меншій діагоналі?

- 986'. Сторони одного прямокутника дорівнюють 12 см і 8 см, а сторони іншого прямокутника — 6 см і 9 см. Чи подібні ці прямокутники? Відповідь поясніть.

- 987'. Сторони одного чотирикутника дорівнюють 16 см, 24 см, 32 см і 40 см. Менша сторона подібного йому чотирикутника дорівнює 14 см. Знайдіть сторони другого чотирикутника.

- 988'. Карти одного району виготовлено в масштабах $1 : 25\,000$ і $1 : 100\,000$. Який коефіцієнт подібності цих карт?


qr.orioncentr.com.ua/L7MDz

- 989°.** Чому дорівнює відношення площ двох подібних багатокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює:
1) 0,5; 2) 2; 3) 5?



qr.orioncentr.com.ua/4nNGj

- 990°.** Площі двох подібних багатокутників дорівнюють 16 см^2 і 32 см^2 . Знайдіть коефіцієнт подібності цих багатокутників.

- 991°.** Знайдіть відношення площ двох квадратів, якщо їхні сторони відносяться як:
1) 1 : 4; 2) 2 : 5; 3) $m : n$.

- 992°.** Як відносяться сторони двох квадратів, якщо їхні площі відносяться як:
1) 4 : 9; 2) 1 : 16; 3) $m : n$?

- 993°.** Площі двох квадратів відносяться як 1 : 4. Знайдіть периметр другого квадрата, якщо периметр першого дорівнює:
1) 8 см; 2) 12 см; 3) 16 см.

- 994°.** Відповідні сторони двох подібних багатокутників дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть площу більшого багатокутника, якщо площа меншого дорівнює:
1) 14 см^2 ; 2) 25 см^2 ; 3) 30 см^2 .

- 995°.** У піраміді $SABC$ у грані SAB проведено відрізок $A_1B_1 \parallel AB$. Сторони утвореного трикутника SA_1B_1 дорівнюють 7 см, 9 см, 12 см. Знайдіть сторони трикутника SAB , якщо його найменша сторона дорівнює: 1) 14 см; 2) 21 см.

- 996°.** У грані SBC піраміди $SABC$ проведено відрізок $B_1C_1 \parallel BC$. Чи можуть сторони трикутників SB_1C_1 і SBC дорівнювати:
1) 4 см, 5 см, 6 см і 8 см, 10 см, 11 см;
2) 7 см, 3 см, 5 см і 14 см, 6 см, 10 см?
Відповідь поясніть.

- 997.** Чи подібні трикутники ABC і AMN , якщо MN — середня лінія трикутника ABC ? Відповідь поясніть.

- 998.** У трикутниках ABC і KLM : $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:
1) $c = 5 \text{ см}$, $n = 3$;
2) $c = 6 \text{ см}$, $n = \frac{3}{4}$.

- 999.** У трикутниках KLM і ABC : $\angle K = \angle A$, $\angle B = \angle L$, $KL = m$, $LM = m + 2$, $KM = m - 2$, $AB = nm$. Знайдіть сторони трикутників, якщо $m = 8 \text{ см}$, $n = 2$.

- 1000.** Середня лінія трапеції ділить її на дві частини. Чи подібні ці частини між собою? Чи подібна якась із цих частин даній трапеції?

- 1001.** Кожну діагональ прямокутника поділено на три рівні частини й точки поділу послідовно сполучено відрізками. Чи подібний даному прямокутнику утворений чотирикутник?

- 1002.** У чотирикутнику $ABCD$ на відрізках AB , AC і AD позначено відповідні їм середини — K , L , M . Чи подібні чотирикутники $ABCD$ і $AKLM$?

- 1003.** Різниця периметрів двох квадратів дорівнює c , а різниця їхніх площ — d . Знайдіть площі квадратів, якщо:
1) $c = 16 \text{ см}$, $d = 56 \text{ см}^2$;
2) $c = 12 \text{ см}$, $d = 105 \text{ см}^2$.

- 1004.** Ширина прямокутної рамки дорівнює c , а її площа — S . Знайдіть периметри зовнішнього та внутрішнього контуру рамки, якщо:
1) $c = 2 \text{ см}$, $S = 96 \text{ см}^2$;
2) $c = 3 \text{ см}$, $S = 564 \text{ см}^2$.

- 1005.** Висота паралелограма, проведена до більшої сторони, утворює з меншою стороною кут 30° . Знайдіть площу подібного йому паралелограма, у якого сторони дорівнюють:
1) 10 мм і 15 мм; 2) 20 мм і 25 мм.

- 1006.** Паралелограм має гострий кут 30° . Знайдіть площу подібного йому паралелограма, у якого сторони дорівнюють:
1) 15 см і 10 см;
2) 25 см і 20 см.

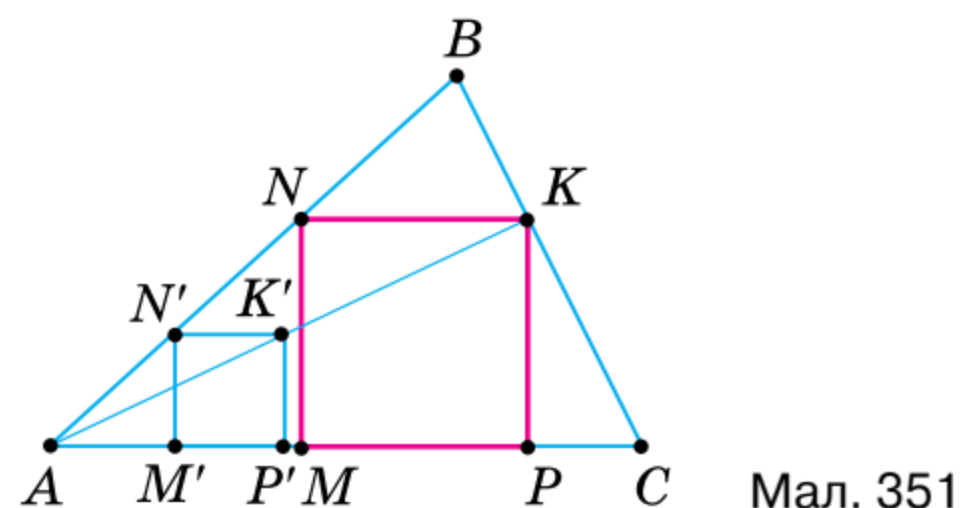
- 1007.** У рівнобедреному трикутнику, вписаному в коло, одна зі сторін лежить на діаметрі. Навколо цього кола описано рівнобедрений трикутник, подібний вписаному. Чи можна стверджувати, що площа вписаного трикутника вдвічі менша від площі описаного трикутника?

- 1008.** У скільки разів площа квадрата, вписаного в коло, менша від площі квадрата, описаного навколо цього кола?

- 1009*.** Пряма ділить трапецію на дві подібні трапеції. Порівняйте довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трапеції, з довжиною її середньої лінії.

- 1010*.** Пряма, паралельна основам трапеції, ділить її на дві подібні трапеції. У якому відношенні ця пряма ділить бічні сторони трапеції, якщо її основи відносяться як:
1) 1 : 4;
2) 2 : 3?

1011*. Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні, а дві інші вершини — на двох інших сторонах трикутника. За малюнком 351 складіть план побудови.

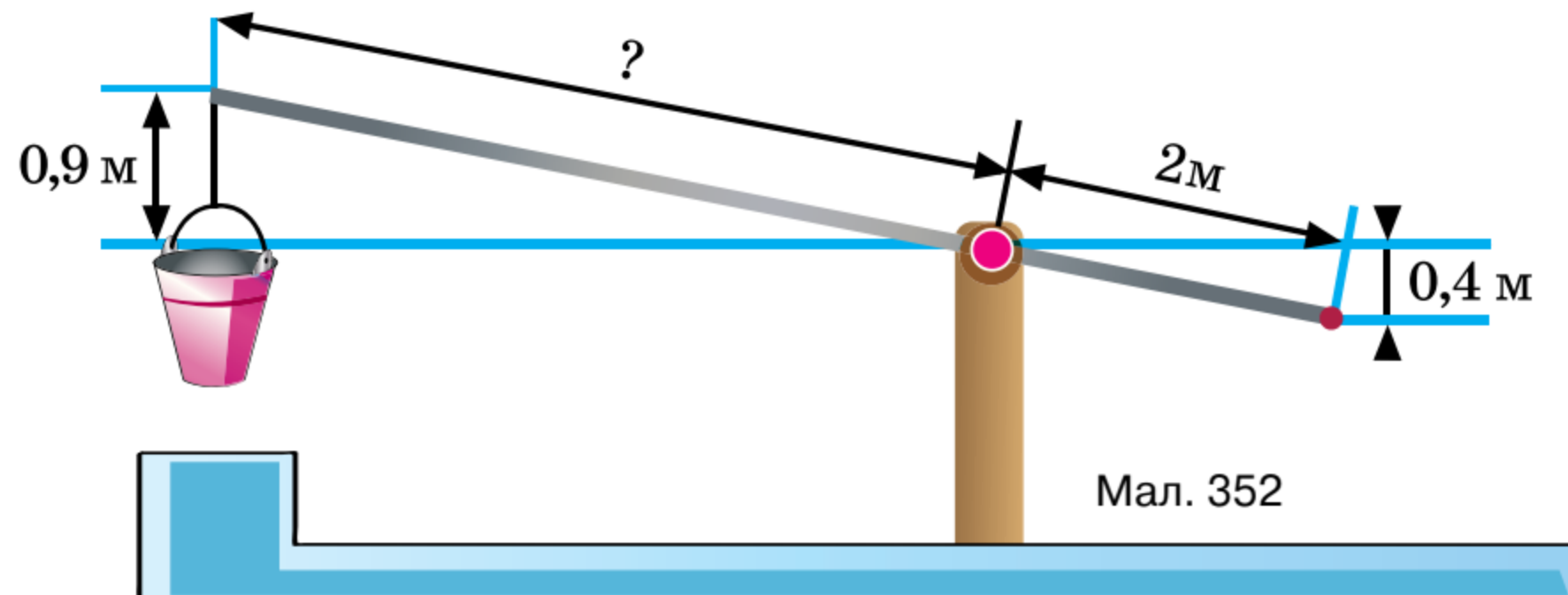


Мал. 351

1012*. У трикутник ABC впишіть ромб із даним гострим кутом α так, щоб одна з його сторін лежала на основі AC трикутника, а дві його вершини — на бічних сторонах AB і BC трикутника.

Проявіть компетентність

1013. Коротке плече «журавля» колодязя має довжину 2 м. Коли кінець короткого плеча опустився на 0,4 м, кінець довгого піднявся на 0,9 м (мал. 352). Яка довжина довгого плеча?



Мал. 352

1014. На відстані 21 м одна від одної ростуть дві сосни. Висота першої сосни становить 39 м, а висота другої — 11 м. Знайдіть відстань між їхніми верхівками. Відповідь подайте в метрах.

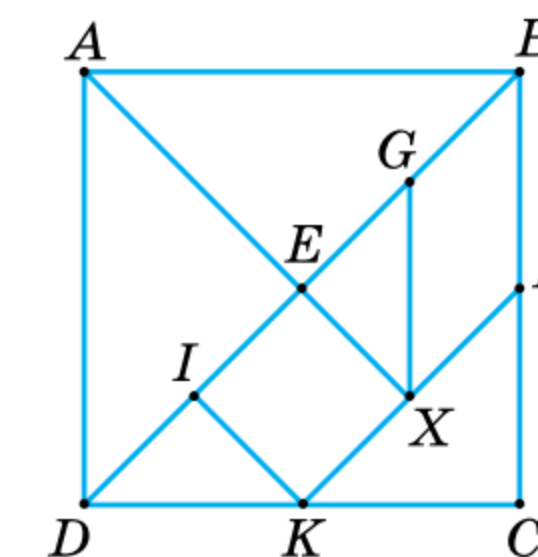
1015. У давньому Китаї зародилася гра (за легендою, її придумав китаєць Тан) — з певних геометричних фігур (танграмів), склали різні силуети. Танграми вирізали з чорного картону або випилювали з дерева, тому силуети виходили правдоподібними (мал. 353, 354). На малюнку 355 ви бачите квадрат $ABCD$, у якому проведено відрізки — лінії розрізу квадрата для одержання танграмів. Точки K, M, L, G, I — середини відповідних відрізків.



Мал. 353



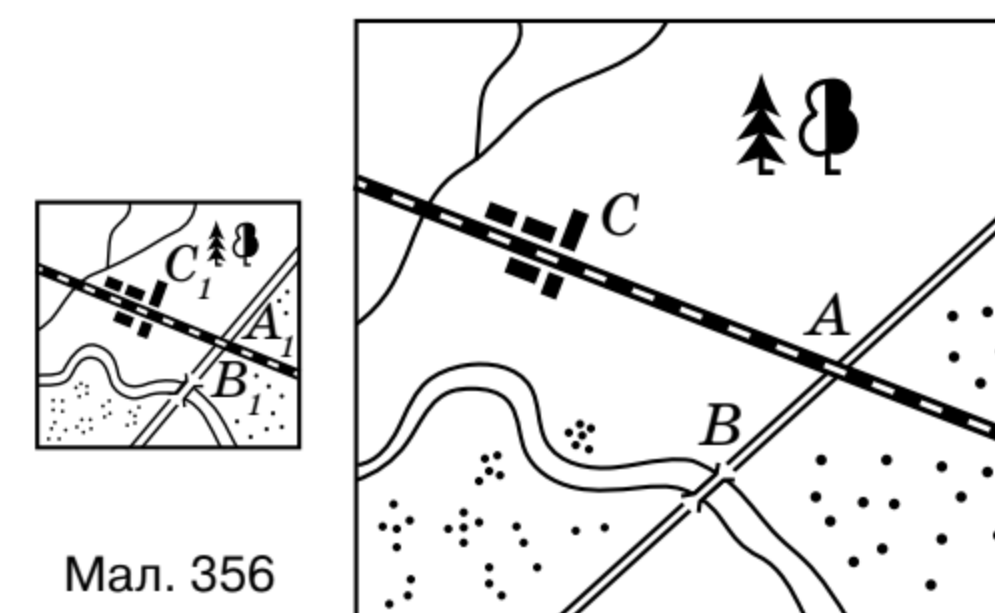
Мал. 354



Мал. 355

- Форму яких геометричних фігур мають танграми:
 - на малюнку 353; б) на малюнку 354?
 Відповідь обґрунтуйте.
- Чи є серед танграмів подібні фігури:
 - на малюнку 353; б) на малюнку 354?
 Відповідь обґрунтуйте.
- Чи є серед танграмів подібні фігури з коефіцієнтом 1:
 - на малюнку 353; б) на малюнку 354?
 Відповідь обґрунтуйте.
- Якщо серед танграмів є подібні фігури, то який коефіцієнт їх подібності:
 - на малюнку 353; б) на малюнку 354?
 Відповідь обґрунтуйте.
- Скільки рівних і скільки подібних танграмів використали для складання:
 - силуету на малюнку 353;
 - силуету на малюнку 354;
 - силуетів на обох малюнках разом?
- Придумайте інший силует, який можна скласти із танграмів.

1016. План земельної ділянки (мал. 356) в масштабі 1 : 200 виконано на аркуші 407×288 мм. Чи поміститься на аркуші 288×203 мм цей план у масштабі 1 : 300?



Мал. 356

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 5

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке геометричне перетворення називається переміщенням?
2. Назвіть властивості переміщення.
3. Які дві фігури називаються рівними?
4. Яке перетворення називають паралельним перенесенням?
5. Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки; симетрією відносно даної прямої?
6. Яку фігуру називають центрально-симетричною; симетричною відносно даної прямої?
7. Що таке поворот?
8. Які дві фігури називаються подібними?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1°. O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Назвіть точку, симетричну точці A відносно точки O .
А. C . Б. D . В. A . Г. B .
- 2°. $ABCD$ — ромб. Назвіть точку, симетричну точці B відносно прямої AC .
А. B . Б. D . В. A . Г. C .
- 3°. Дано коло із центром O й діаметром AB . У яку фігуру перейде радіус OA при повороті кола навколо точки O на кут AOB за годинниковою стрілкою?
А. Прямую AB . В. Радіус OB .
Б. Діаметр AB . Г. Радіус OA .
4. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$ із центром O . У яку фігуру перейде діагональ AD при повороті шестикутника навколо точки O на кут AOB проти годинникової стрілки?
А. Діагональ FC . В. Діагональ BF .
Б. Діагональ AE . Г. Діагональ BE .
- 5*. Квадрат $ABCD$ із площею 16 см^2 паралельно перенесено на вектор $2\overrightarrow{AB}$, а потім утворений прямокутник AB_1C_1D , де B_1C_1 — образ сторони BC при паралельному перенесенні, повернуто навколо точки A на кут 90° проти годинникової стрілки (B_2, C_2 і D_2 — образи точок B_1, C_1 і D при повороті). Чому дорівнює сума периметрів прямокутників AB_1C_1D і $AB_2C_2D_2$?
А. 12 см. Б. 24 см. В. 32 см. Г. 64 см.



Розділ 6. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У розділі дізнаєтесь:

- що вивчає стереометрія;
- які фігури вважають основними у просторі;
- про взаємне розміщення у просторі двох прямих, прямої і площини, двох площин;
- як знайти відстань від точки до площини;
- що таке многогранник та які властивості мають пряма призма і піраміда;
- про тіла обертання та властивості циліндра, конуса й кулі;
- як застосувати вивчені означення і властивості на практиці та в розв'язуванні задач

§ 17. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ У ПРОСТОРІ ПРЯМИХ, ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

1. Що вивчають у стереометрії

Ситуація. Урок геометрії в 9-А класі Оксана Миколаївна розпочала такими словами: «Ви знаєте, що в геометрії вивчають фігури на площині та у просторі. Починаючи з 7 класу, ви вивчали *планіметрію*, де дізналися про властивості фігур на площині. Тепер ви ознайомитеся з початковими відомостями зі *стереометрії* — розділу геометрії, у якому вивчають властивості фігур у просторі». Учителка запропонувала учнівству пригадати основні фігури й основні відношення на площині та за аналогією схарактеризувати їх для простору. Учні хутко взяли за роботу, здійснили пошук у мережі «Інтернет» і систематизували дані в таблиці (табл. 32).



qr.orioncentr.com.ua/y4oxl

Таблиця 32

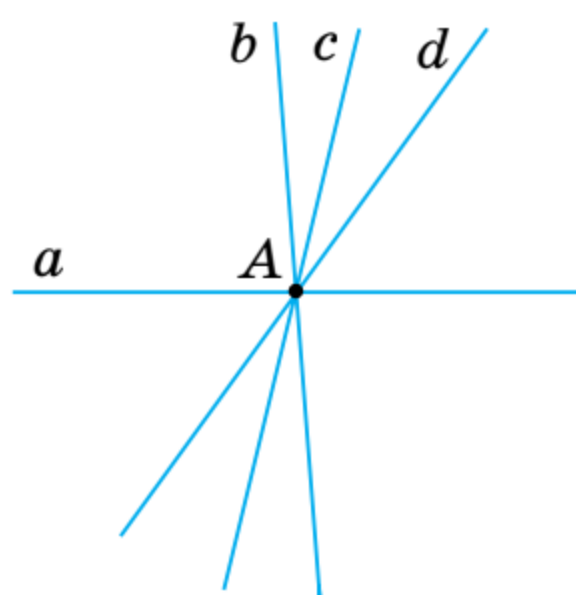
	На площині	У просторі
Основні фігури	точка і пряма	точка, пряма і площина
Позначення	A AB або a	A , AB або a , ABC або α (альфа)
Зображення		

Таблиця 32 (продовження)

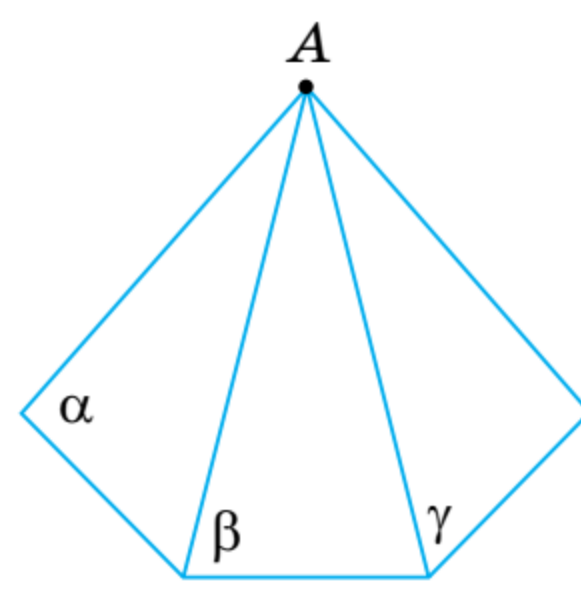
	На площині	У просторі
Основне з відношень	належати або лежати на	належати або лежати у
Зображення		
Позначення	$A \in a, C \notin a$	$A \in \alpha, B \notin \alpha$

Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма і позначають малими грецькими буквами α , β (бета), γ (гама)....

Через одну точку в просторі можна провести безліч прямих (мал. 357) і безліч площин (мал. 358).



Мал. 357



Мал. 358

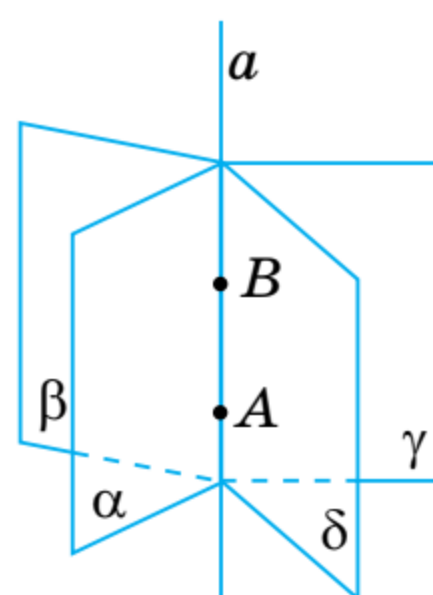


Скільки прямих можна провести через дві точки у просторі? А скільки площин?

Поміркуймо.

Через будь-які дві точки у просторі можна провести єдину пряму. Площина такої властивості не має. Подивіться на малюнок 359. Через точки A і B проходить єдина пряма a . Ця пряма є лінією перетину площин α , β , γ і δ .

Через будь-яку пряму у просторі можна провести безліч площин, а значить, через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин.



Мал. 359

Відомо, що штативи багатьох інструментів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги. Завдяки цьому інструмент завжди стійкий. Стіл або табуретка не завжди стоять стійко. Ці спостереження приводять до такої властивості площини.

Запам'ятайте!

Властивість площини

Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину.

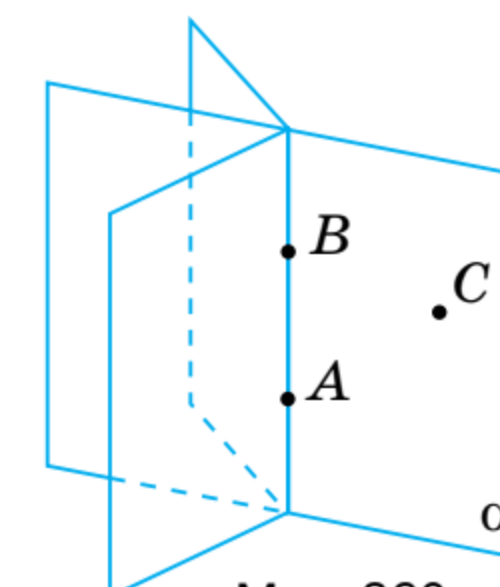


Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками.

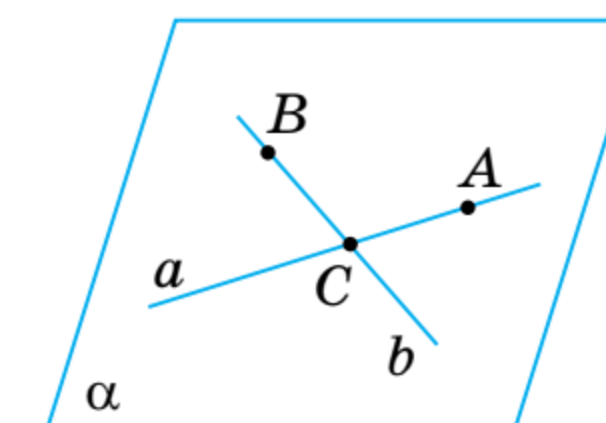
Наприклад, на малюнку 360 площина ABC — це площина α .

Задача 1 Чи можна провести площину через дві прямі, що перетинаються?

Розв'язання Нехай прямі a і b перетинаються в точці C і $A \in a$, $B \in b$. За побудовою, точки A , B і C не лежать на одній прямій. Тому, за властивістю площини, через ці три точки проходить єдина площина α . У площині α лежать обидві прямі a і b . Отже, через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину.



Мал. 360



Мал. 361

2. Взаємне розміщення двох прямих у просторі



Як можуть розміщуватися у просторі дві прямі?

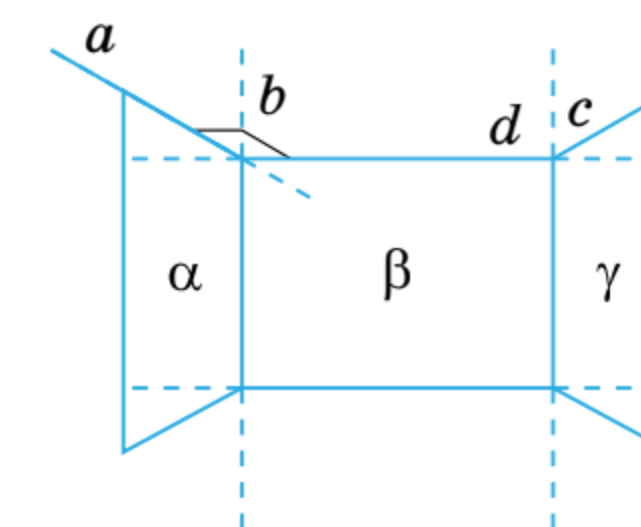
Поміркуймо.

Подивіться на малюнок 362. Ви бачите, що прямі a і b перетинаються. Прямі a і c та b і c не можуть перетнутися, скільки б їх не продовжували.



У просторі можливі два випадки, коли дві прямі не перетинаються:

- прямі b і c не перетинаються і **лежать в одній площині** β — вони **паралельні**;
- прямі a і c не перетинаються і **не лежать в одній площині** — вони **мимобіжні**.



Мал. 362

Запам'ятайте!

Дві прямі, що не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними*.

3. Взаємне розміщення прямої і площини

Як можуть розміщуватися у просторі пряма і площина?

Поміркуємо за малюнком 362.



Можливі такі випадки розміщення прямої і площини (мал. 362):

1) пряма лежить у площині, наприклад:

$$a \subset \alpha, b \subset \alpha, b \subset \beta, c \subset \beta, c \subset \gamma; d \subset \beta;$$

2) пряма не лежить у площині, наприклад:

$$a \not\subset \beta, a \not\subset \gamma, b \not\subset \gamma, c \not\subset \alpha, d \not\subset \alpha, d \not\subset \gamma.$$



Якщо пряма не лежить у площині, то вона може *перетинати* площину або *не перетинати* її.

Наприклад, на малюнку 362 пряма d перетинає площину α , а пряма c не перетинає цю площину.

Запам'ятайте!

Пряму і площину, що не перетинаються, називають *паралельними*.

4. Перпендикуляр до площини

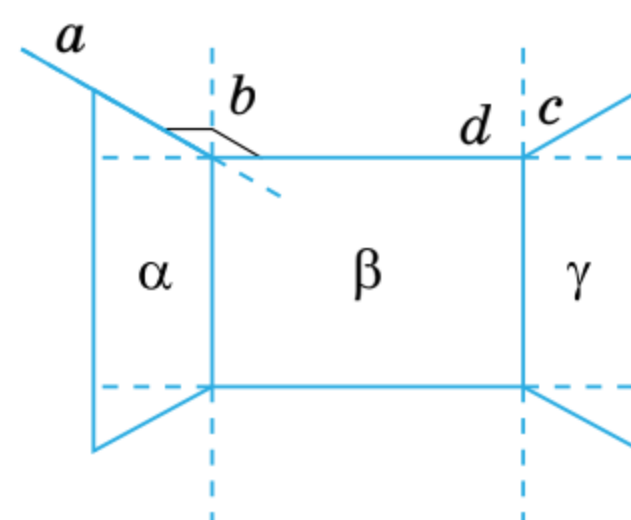
Подивіться на малюнок 363.

Пряма a перпендикулярна до прямих b і d , які лежать у площині β . Це означає, що пряма a *перпендикулярна* і до площини β .



Щоб установити, чи перпендикулярна пряма до площини:

- 1) проведіть у площині дві прямі через точку перетину даної прямої з площиною;
- 2) з'ясуйте, чи перпендикулярна дана пряма до кожної з побудованих прямих.



Мал. 363

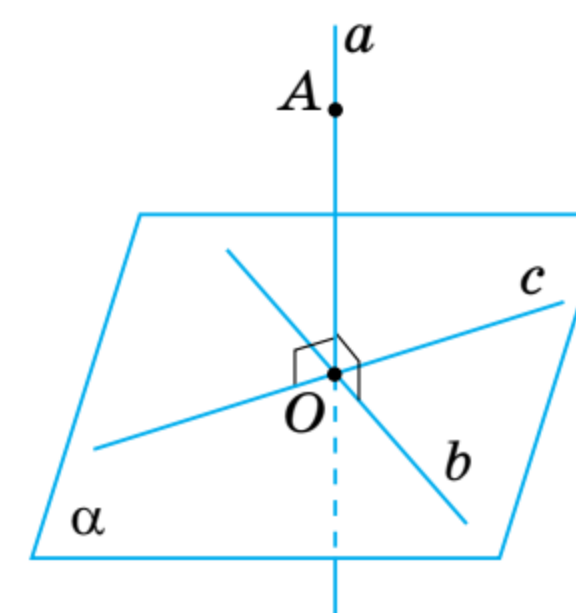
qr.orioncentr.com.ua/SDXnq

**Запам'ятайте!**

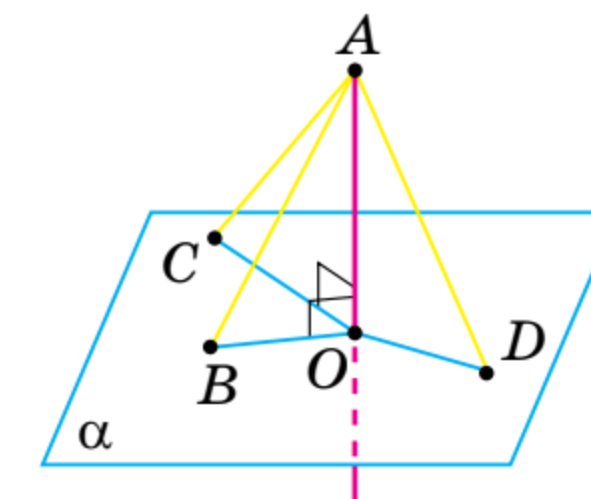
Перпендикуляром, проведеним з точки до площини, називається відрізок прямої, перпендикулярної до площини, який з'єднує дану точку з точкою перетину перпендикулярної прямої і площини.

Ця точка називається *основою перпендикуляра*.

На малюнку 364 через точку A проведено пряму a перпендикулярно до прямих b і c , що лежать у площині α і перетинаються в точці O . Тому відрізок AO — перпендикуляр до площини α , точка O — основа перпендикуляра. Перпендикуляр AO є найменшим з усіх відрізків, що сполучають точку A з точками площини α (мал. 365).



Мал. 364



Мал. 365



За довжиною перпендикуляра визначають *відстань від точки до площини*.

На малюнку 364 довжина перпендикуляра AO дорівнює відстані від точки A до площини α .

Відрізки AB , AC і AD (мал. 365) є *похилими* до площини α , а відрізки OB , OC і OD — *проекціями* цих *похилих* на площину α .



Через перпендикуляр AO і похилу AB проходить єдина площина AOB .

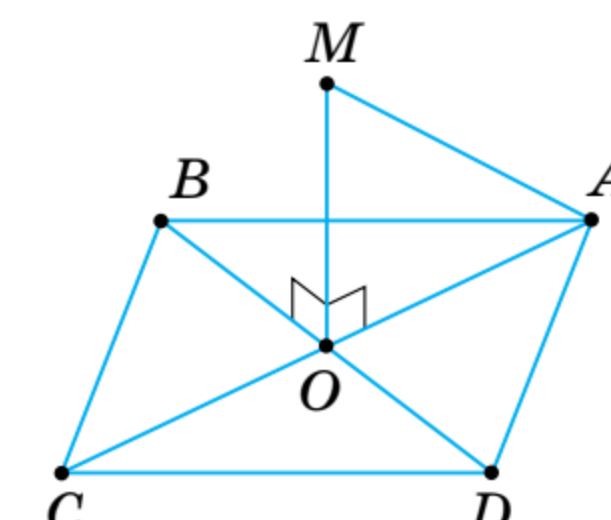
Тому у просторі перпендикуляр і похилі до площини мають такі самі властивості, як перпендикуляр і похилі до прямої у планіметрії.

Задача 2

Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$ (мал. 366). Його діагоналі AC і BD перетинаються в точці O . Пряма MO перпендикулярна до кожної з діагоналей квадрата. $MA = 10$ см, $AO = 6$ см. Яка відстань від точки M до площини квадрата?

Розв'язання

За умовою, $MO \perp AC$ і $MO \perp BD$, тому пряма MO перпендикулярна до площини



Мал. 366

ABC , а MO — перпендикуляр, довжина якого — шукана відстань. Через перпендикуляр MO і похилу MA проходить площина MOA . У цій площині лежить $\triangle MOA$, у якому: $\angle MOA = 90^\circ$, $MA = 10$ см, $AO = 6$ см. За теоремою Піфагора, $MA^2 = MO^2 + AO^2$. Звідси маємо:

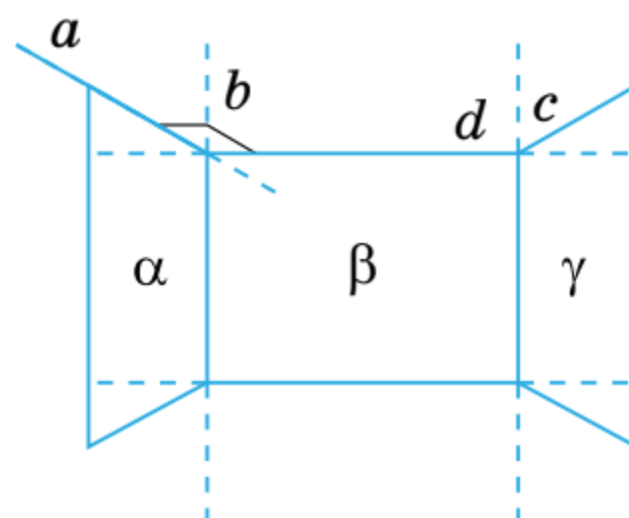
$$MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}.$$

5. Взаємне розміщення площин



Як можуть розміщуватися у просторі дві площини?

Поміркуємо.



Мал. 367

На малюнку 367 ви бачите, що площини α і β *перетинаються*. Лінією їх перетину є пряма b . Площини α і γ не перетинаються. Такі площини називають *паралельними*. Площини α і β перетинаються під прямим кутом. Це — *перпендикулярні* площини.

Випадки взаємного розміщення двох прямих, прямої і площини, двох площин наведено в таблиці 33.

Таблиця 33

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві прямі a і b	перетинаються	перпендикулярні	$a \perp b$
		не перпендикулярні	$a \cap b$
	не перетинаються	паралельні	$a \parallel b$
		мимобіжні	$a \cdot b$
Пряма a і площина α	пряма лежить у площині		$a \subset \alpha$
	пряма перетинає площину	пряма перпендикулярна до площини	$a \perp \alpha$
		пряма не перпендикулярна до площини	$a \cap \alpha$
	пряма не перетинає площину	пряма паралельна площині	$a \parallel \alpha$
Дві площини α і β	перетинаються	перпендикулярні	$\alpha \perp \beta$
		не перпендикулярні	$\alpha \cap \beta$
	не перетинаються	паралельні	$\alpha \parallel \beta$

Дізнайтеся більше

1. Символ « $\cdot$ » для позначення мимобіжних прямих має сучасне походження. Його запозичено з нарисної геометрії. Цей символ відображає розміщення двох прямих, які не визначають жодної площини. Справді, якщо риску уявити горизонтальною прямою, а точку — прямою, яка перпендикулярна до площини аркуша, то стає очевидним, що через такі дві прямі не можна провести площину.

2. У вас могло виникнути запитання: Чому на малюнку 365 перпендикуляр AO зображено довшим відрізком, ніж похилу AC , адже, за властивістю перпендикуляра, $AC > AO$?

У стереометрії зображення просторових фігур виконують за особливими правилами. При цьому деякі властивості фігур зберігаються, а деякі — ні (табл. 34).

Таблиця 34

Властивості фігур, що ЗБЕРІГАЮТЬСЯ під час побудови їхніх зображень	Властивості фігур, що НЕ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ під час побудови їхніх зображень
1) належність фігури до свого класу фігур (точку зображують точкою, пряму — прямою, відрізок — відрізком, трикутник — трикутником тощо);	1) довжина відрізка ;
2) належність точок прямій ;	2) міра кута (зокрема, прямий кут зображують довільним кутом);
3) порядок розміщення точок на прямій (внутрішню точку відрізка зображують внутрішньою точкою відрізка-зображення);	3) перпендикулярність прямих ;
4) паралельність прямих ;	4) рівність (пропорційність) кутів ;
5) рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій	5) рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються

Спираючись на дані таблиці, спробуйте самостійно дати відповідь на поставлене запитання.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
стереометрія	stereometry	Stereometrie, f	stéréométrie

qr.orioncentr.com.ua/Siy1c

Пригадайте головне

1. Що вивчають у стереометрії?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?
3. Сформулюйте властивість площини.
4. Наведіть приклади паралельних прямих; мимобіжних прямих.
5. Як можуть взаємно розміщуватися пряма і площина?
6. Що називають перпендикуляром до площини? Наведіть приклад перпендикуляра і похилої до площини.
7. Як можуть взаємно розміщуватися дві площини?

Усне тренування

1. Запишіть у міліметрах: 5 см, 5 дм, 5 м, 5 км.
2. Запишіть у сантиметрах: 10 мм, 10 дм, 10 м, 10 км.

Розв'яжіть задачі

- 1017'.** Прочитайте та поясніть запис:
1) $A \in a, C \notin a$; 2) $A \in \alpha, B \notin \alpha$; 3) $AB \subset \alpha, BC \not\subset \alpha$.
- 1018'.** Чи правильно, що через дві точки у просторі: 1) можна провести єдину площину; 2) можна провести безліч площин; 3) не можна провести жодної площини?
- 1019'.** Чи правильно, що через пряму у просторі: 1) можна провести єдину площину; 2) можна провести безліч площин; 3) не можна провести жодної площини?
- 1020'.** Чи правильно, що через три точки у просторі: 1) можна провести єдину площину; 2) можна провести безліч площин; 3) не можна провести жодної площини?
- 1021'.** Чи правильно, що у просторі дві прямі, що не перетинаються, можуть бути: 1) тільки паралельними; 2) тільки мимобіжними; 3) або паралельними, або мимобіжними?
- 1022'.** Чи правильно, що мимобіжні прямі можуть бути паралельними?
- 1023'.** Чи можуть пряма і площина бути:
1) паралельними;
2) мимобіжними?
- 1024'.** Чи правильно, що перпендикуляр — це: 1) площина; 2) промінь; 3) відрізок?
- 1025'.** Чи правильно, що найкоротша відстань від точки до площини — це: 1) довжина похилої; 2) довжина перпендикуляра?
- 1026'.** Прочитайте та поясніть запис: 1) $\alpha \perp \beta$; 2) $\alpha \cap \beta$; 3) $\alpha \parallel \beta$.

1027°. Проведіть площину α . Позначте точки A і C , які лежать у площині α , і точку B , яка не лежить у цій площині. Проведіть прямі AC , AB , BC . Які із цих прямих перетинають площину α ?

1028°. Проведіть площину α і позначте на ній точки A , B і C . Проведіть прямі AB , BC і AC .

1029°. На малюнку 368 зображено площину α і прямі AB , AC , BD і CD .



1. Які з точок A , B , C і D лежать у площині α ?
2. Які з прямих лежать у площині α ?
3. Чи перетинаються прямі AC і BD , AB і AC , AB і CD ?

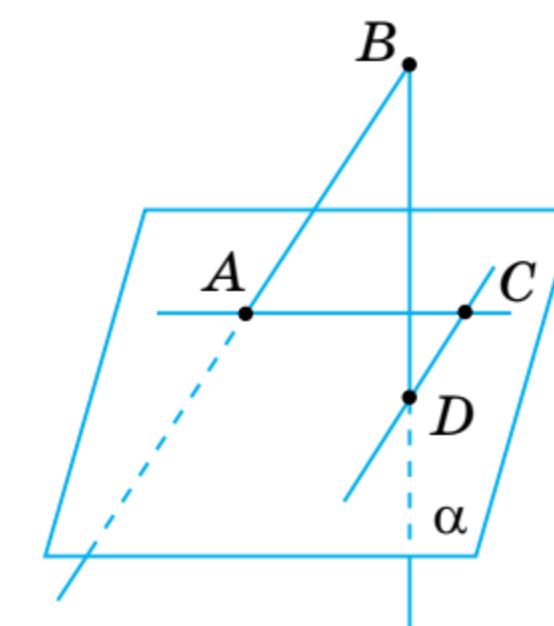
qr.orioncentr.com.ua/c9iz3



1030°. Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?

1031°. Скільки площин можна провести через три точки, які: 1) лежать на одній прямій; 2) не лежать на одній прямій?

1032°. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести у просторі через точку, яка: 1) лежить на даній прямій; 2) не лежить на даній прямій?

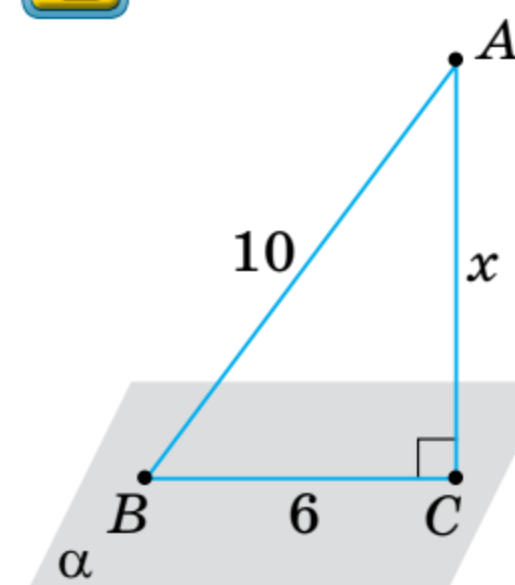


Мал. 368

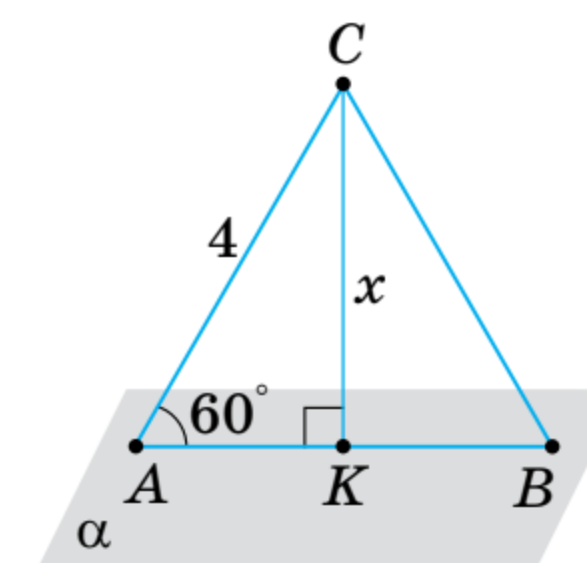
1033°. Скільки рівних похилих можна провести з даної точки до площини?

1034°. На малюнках 369 і 370 усі позначені точки лежать у площині ABC . Знайдіть довжину відрізка x .

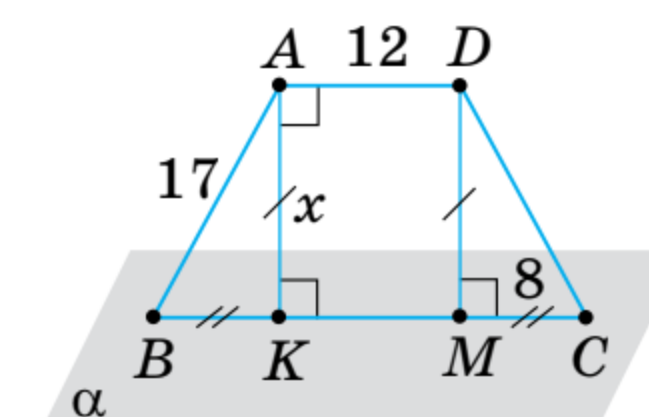
1035°. На малюнку 371 усі позначені точки лежать у площині ABC . Знайдіть довжину відрізка x .



Мал. 369



Мал. 370



Мал. 371

1036°. З точки A до площини проведено перпендикуляр AC і похилу AB . Заповніть таблицю 35.



qr.orioncentr.com.ua/QFH7e

Таблиця 35

AC		2 см	6 см	12 см	
AB	5 см		10 см		25 см
BC	4 см	$2\sqrt{3}$ см		12 см	24 см

1037°. З точки M до площини проведено перпендикуляр MN і похилу MK . Знайдіть довжину проекції похилої, якщо:



- 1) $MN = 12$ см, $MK = 13$ см;
- 2) $MN = 9$ см, $MK = 15$ см.

1038°. Зобразіть площини α і β , що перетинаються. Позначте точки, що лежать:

- 1) тільки у площині α ;
- 2) тільки у площині β ;
- 3) у площинах α і β .

1039°. Побудуйте площини $\alpha \parallel \beta$. Позначте точки, що лежать: 1) тільки у площині α ; 2) тільки у площині β . Чи існує точка, що лежить і в площині α , і в площині β ?



1040. Чи завжди можна провести площину через чотири довільні точки простору?

1041. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести єдину площину. Доведіть.

1042. Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного трикутника? Відповідь поясніть.

1043. Відрізки AB і CD перетинаються. Чи лежать в одній площині прямі AC , BD , BC і AD ? Відповідь поясніть.

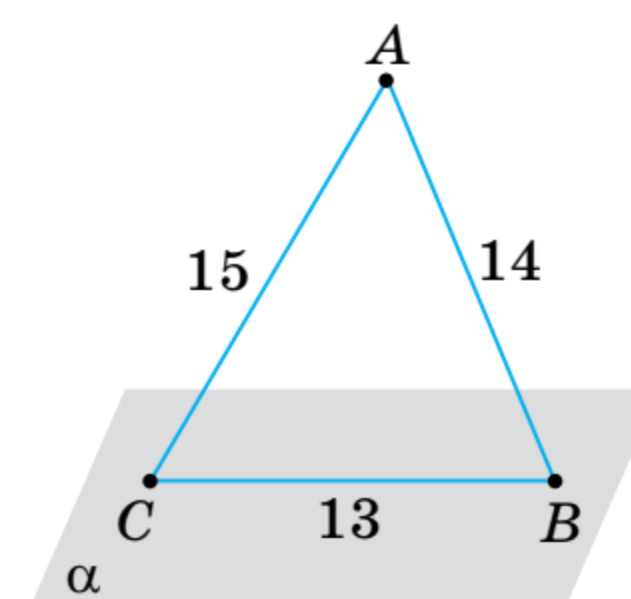
1044. Прямі a і b перетинаються в точці A . Чи лежать в одній площині всі прямі, які перетинають дві дані прямі і не проходять через дану точку? Відповідь поясніть.

1045. Чи може пряма a бути паралельною кожній з мимобіжних прямих b і c ? Відповідь поясніть.

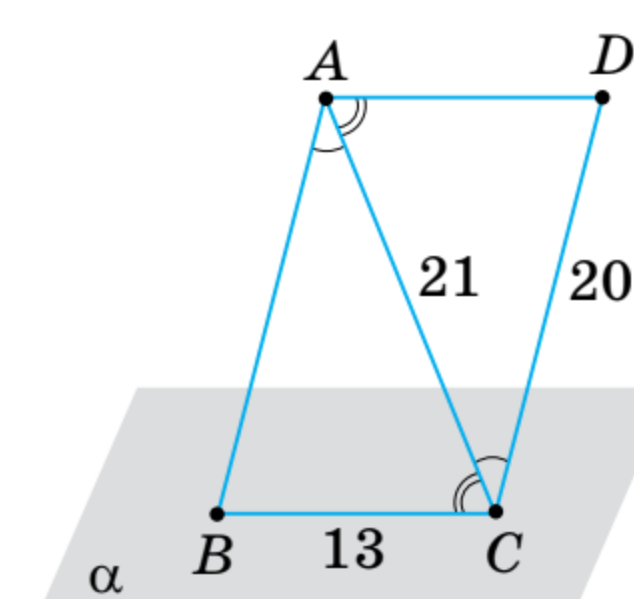
1046. Прямі c і d перетинають паралельні прямі a і b . Чи можуть прямі c і d бути мимобіжними? Відповідь поясніть.

1047. На малюнках 372 і 373 площина ABC перпендикулярна до площини α і перетинає її по прямою BC . Знайдіть відстань від точки A до площини α .

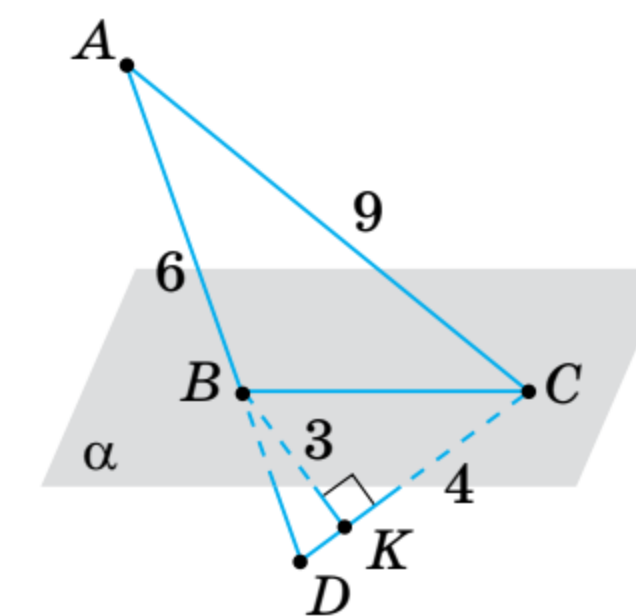
1048. На малюнку 374 площина ABC перпендикулярна до площини α і перетинає її по прямою BC . Знайдіть відстань від точки A до площини α .



Мал. 372



Мал. 373



Мал. 374

1049. OM — перпендикуляр до площини кола з центром O . Знайдіть діаметр кола, якщо довжина перпендикуляра — 12 см, а відстань від точки M до точок кола дорівнює: 1) 13 см; 2) 15 см.

1050. З деякої точки до даної площини проведено перпендикуляр і похилу. Кут між ними дорівнює φ , а довжина перпендикуляра — d . Знайдіть похилу та її проекцію, якщо: 1) $d = 4$ см, $\varphi = 45^\circ$; 2) $d = 8$ см, $\varphi = 30^\circ$.

1051. З точки M до площини проведено рівні похилі MA , MB , MC і MD . Чи може чотирикутник $ABCD$ бути: 1) квадратом; 2) паралелограмом; 3) прямокутником? Відповідь поясніть.



1052. Площини α і β перетинаються по прямою c . Пряма a лежить у площині α , пряма b — у площині β . Ці прямі перетинаються в точці A . Чи лежить точка A на прямою c ? Відповідь поясніть.

1053. Площини α і β не перетинаються. Чи можуть в них лежати мимобіжні прямі?

1054*. Доведіть, що всі паралельні прямі, що перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

1055*. Прямі a і b перетинаються. Як розміщена пряма a відносно прямою c , якщо прямі c і b : 1) паралельні; 2) перетинаються?

1056*. Прямі a і b мимобіжні. Пряма c перетинає пряму a і пряму b . Чи перетинає прямі a і b пряма d , яка паралельна прямою c ? Відповідь поясніть.

1057*. Прямі a і b мимобіжні. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c , якщо прямі c і b :
1) паралельні;
2) перетинаються?

1058*. Відрізок не перетинає площину. Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини дорівнює півсумі відстаней від його кінців до площини.

- 1059*.** Три площини мають спільну точку. Чи правильно, що ці площини мають спільну пряму? Скільки прямих можна отримати при попарному перетині цих площин?
- 1060*.** Три площини попарно перетинаються по прямих a , b і c . Доведіть, що коли ці площини мають спільну точку A , то прямі a , b і c перетинаються в точці A .
- 1061*.** Площина γ перетинає площини α і β по прямих a і b . Доведіть, що коли прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин α і β .
- 1062*.** Дано промені зі спільним початком. Ніякі три з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести так, щоб у кожній площині лежало по два з даних променів, якщо всього променів: 1) три; 2) чотири; 3) n ?

Проявіть компетентність

- 1063.** Чому мотоцикл із коляскою — стійкий, а для закріплення мотоцикла без коляски потрібна додаткова опора?
- 1064.** Щоб перевірити, чи лежать кінці ніжок стола в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він це робить? Чи є достатньою така перевірка?

§ 18. МНОГОГРАННИКИ

1. Що таке многогранник

Ситуація. Учні 9-А класу виконували навчальний проект на тему «Просторові форми в стародавній архітектурі». Ігор зосередив свою увагу на піраміді Хеопса (мал. 375), а Марина — на Парфеноні в Афінах (мал. 376). Досліджуючи форму цих споруд, Ігор і Марина виявили в них спільне й відмінне, пригадали особливості просторових фігур, які вивчали раніше, — піраміди (мал. 377), прямокутного паралелепіпеда (мал. 378) і куба (мал. 379) — та зробили висновок, що всі такі просторові фігури можна зарахувати до одного класу геометричних фігур.

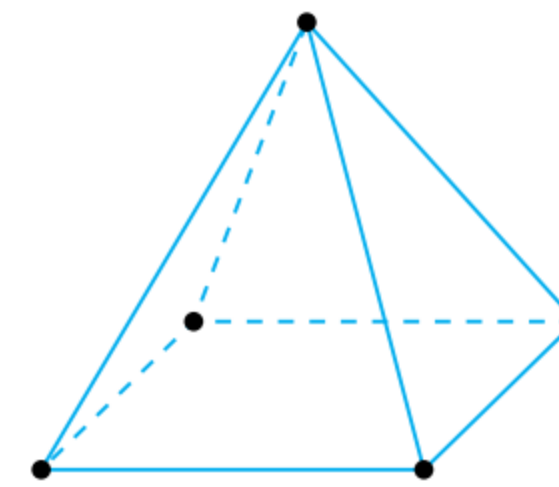
qr.orioncentr.com.ua/eYIKk



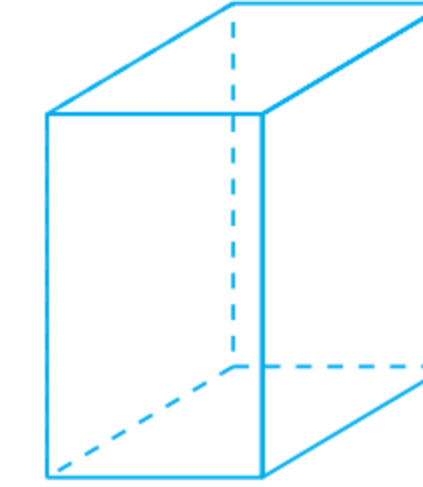
Мал. 375



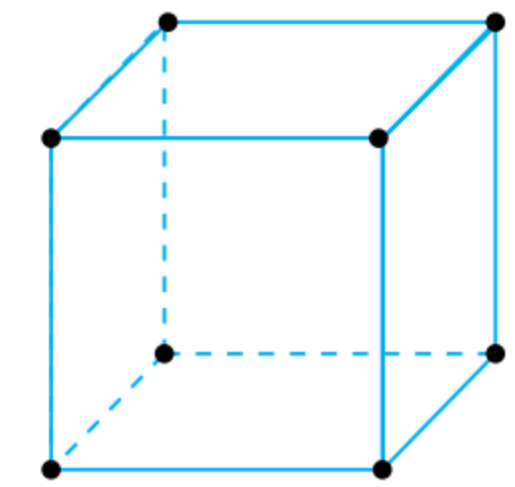
Мал. 376



Мал. 377



Мал. 378



Мал. 379



Чи правильний висновок зробили Ігор і Марина?

Так.



Усі розглянуті фігури (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда), але й не тільки вони, належать до особливого класу просторових фігур — *многогранників*.



Що є спільного в усіх многогранників?

Поміркуймо.



Поверхня многогранника складається з плоских багатокутників, які називаються його *гранями*. Звідси й походить назва «многогранник».

Будь-які дві *сусідні грані* многогранника мають спільний відрізок — *ребро* многогранника, а принаймні три попарно сусідні його грані сходяться в одній точці — *вершині* многогранника.

У старшій школі ви дізнаєтесь про види многогранників та їхні властивості. Зараз ви познайомитеся з двома різновидами многогранників — *прямою призмою* (мал. 378) і *пірамідою* (мал. 377).



Що відрізняє призми і піраміди?

Поміркуймо.



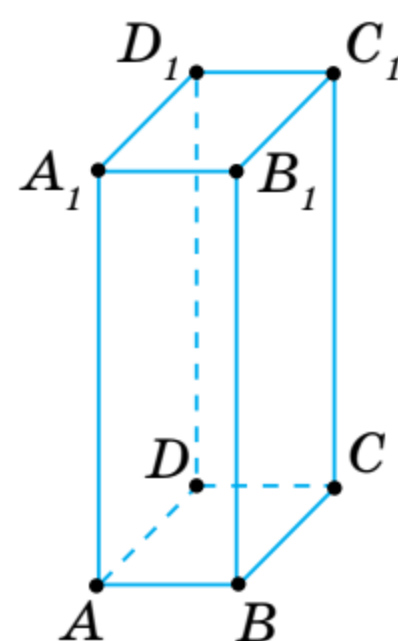
Будь-яка **призма** має **дві основи**, які є рівними багатокутниками, що лежать у паралельних площинах, а **піраміда** — **одну основу**.

Бічними гранями прямої призми є прямокутники, а піраміди — трикутники.

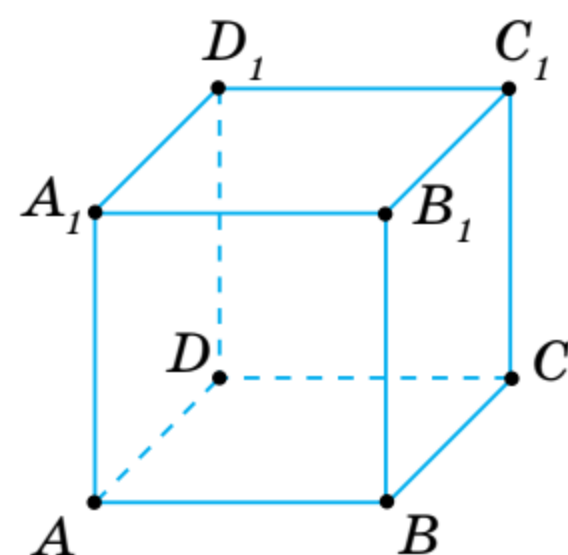
Бічні ребра прямої призми рівні й паралельні, а піраміди — мають спільну точку, що є *вершиною піраміди*.

Наприклад, основами прямої призми $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ на малюнку 382 є шестикутники $ABCDEF$ і $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, а її бічними граня-

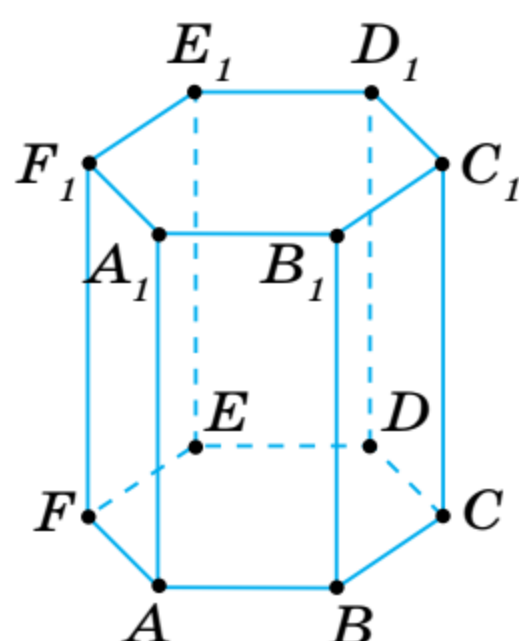
ми — прямокутники ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DEE_1D_1 , EFF_1E_1 , FAA_1F_1 . Основою піраміди $SABCD$ на малюнку 383 є чотирикутник $ABCD$, а її бічними гранями — трикутники SAB , SBC , SCD , SDA . Вершиною піраміди є точка S .



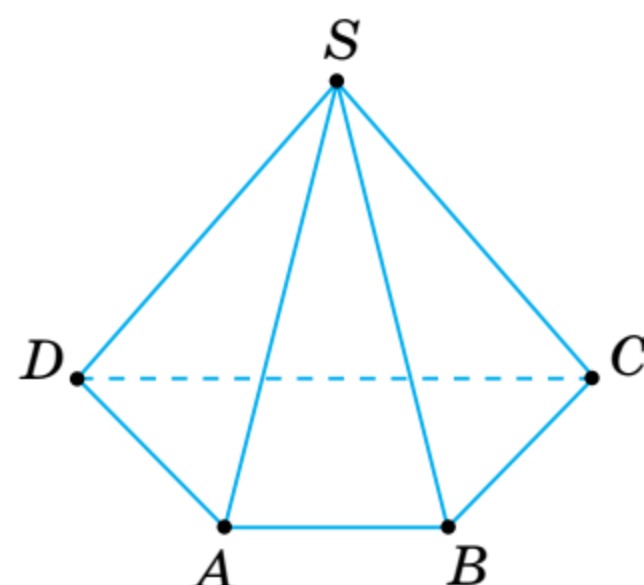
Мал. 380



Мал. 381



Мал. 382



Мал. 383

Залежно від того, який багатокутник є основою, призму (піраміду) називають *трикутною*, *чотирикутною* чи *n-кутною*. Прямокутний паралелепіпед (мал. 380) і куб (мал. 381) є різновидами прямої чотирикутної призми. На малюнку 382 ви бачите шестигрунту пряму призму, а на малюнку 383 — чотирикутну піраміду.

2. Площа поверхні призми і піраміди



Що є спорідненим для призми й піраміди?

Їхні поверхні складаються з багатокутників.



Бічну поверхню призми (піраміди) утворюють багатокутники її бічних граней, а повну поверхню — усі її грані.

Запам'ятайте!

Площею бічної поверхні призми (піраміди) називається сума площ її бічних граней.

Площею повної поверхні призми (піраміди) називається сума площ усіх її граней.



Площу бічної поверхні і площу повної поверхні відповідно позначають: $S_{\text{бп}}$ і $S_{\text{пш}}$.



Наведені означення підказують спосіб знаходження площ бічної та повної поверхонь призми (піраміди).

Задача Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, основа якої — правильний трикутник зі стороною 6 см, а бічні ребра мають довжину по 5 см.

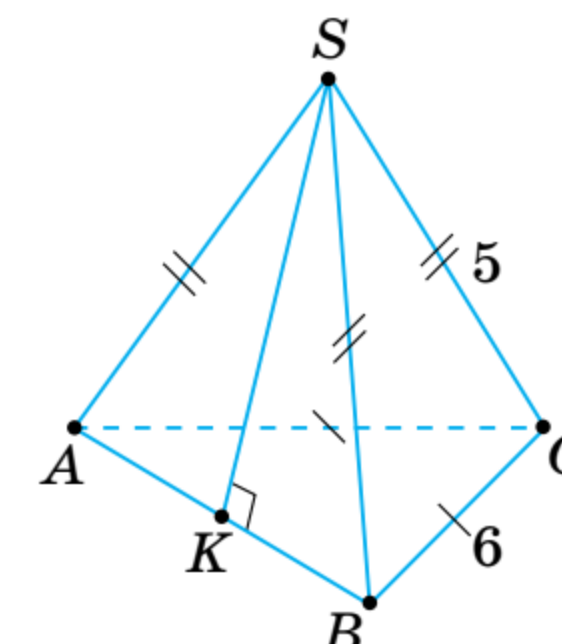
Розв'язання Нехай $SABC$ (мал. 384) — дана піраміда, у якій $AB = BC = AC = 6$ см, $SA = SB = SC = 5$ см. Бічні грані піраміди є рівними рівнобедреними трикутниками, тому $S_{\triangle SAB} = S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SAC}$. Проведемо висоту SK бічної грані SAB . Трикутник SKB — прямокутний ($\angle K = 90^\circ$), тому $SK = 4$ см.

$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Тоді } S_{\text{бп}} = 3 \cdot S_{\triangle SAB} = 3 \cdot 12 = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

В основі піраміди лежить правильний трикутник ABC зі стороною 6 см, тому $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$. Отже, дістанемо:

$$S_{\text{пш}} = S_{\text{бп}} + S_{\triangle ABC} = 36 + 9\sqrt{3} = 9(4 + \sqrt{3}) \text{ (см}^2\text{)}.$$



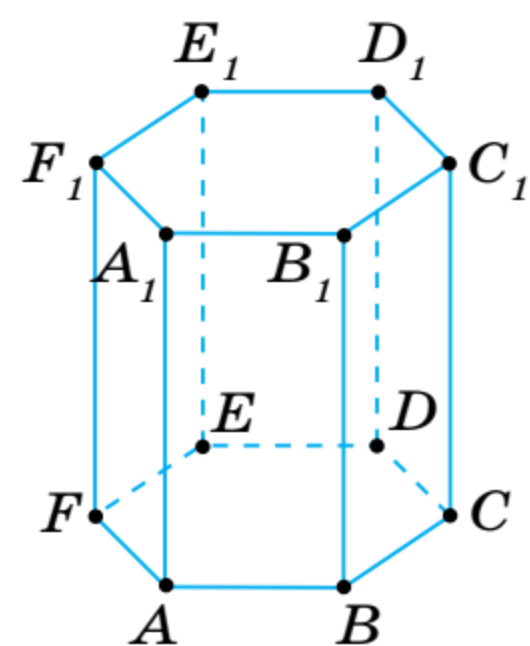
Мал. 384

3. Висота призми і піраміди

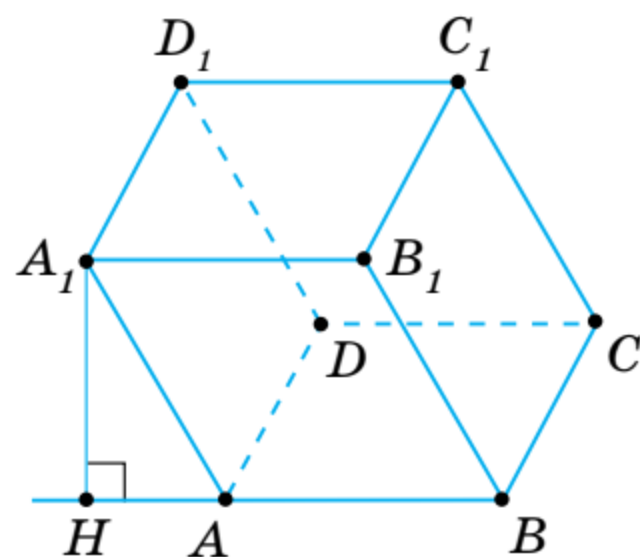
Запам'ятайте!

Висотою призми називається перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї з основ призми до площини її іншої основи.

У прямій призмі (мал. 385) кожне бічне ребро перпендикулярне до її основ. Звідси й назва — «пряма призма». Бічне ребро прямої призми можна вважати її висотою. На малюнку 386 ви бачите приклад похилої призми. Її бічне ребро не дорівнює висоті цієї призми.



Мал. 385



Мал. 386

Запам'ятайте!

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини її основи.

Бічні ребра піраміди не перпендикулярні до її основи, якщо це спеціально не зазначено. Тому висоту піраміди показують окремо. На малюнку 387 ви бачите трикутну піраміду $SABC$, у якій проведено висоту SH .

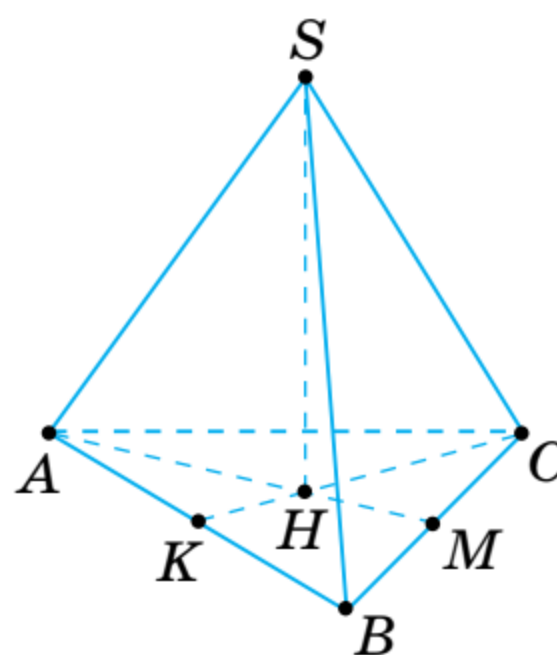
4. Об'єм призми і піраміди

Кожний многогранник як геометричне тіло має особливу властивість — він займає частину простору. Якщо міру цієї частини простору виразити деяким числом, то отримаємо нову характеристику тіла — геометричну величину «об'єм».

Об'єми різних тіл можна порівнювати — одне тіло може займати більшу частину простору, ніж інше, або таку саму частину простору, або меншу частину простору.

Якщо прийняти якесь тіло за мірку, а його об'єм — за одиницю вимірювання об'ємів, то об'єм будь-якого тіла можна виразити додатним числом. У геометрії за мірку беруть куб, ребро якого має довжину, що дорівнює одиниці довжини. Об'єм такого куба приймають за одиницю вимірювання об'єму.

З курсу математики 5 класу ви знаєте формули об'єму прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b і c : $V = abc$, і куба з ребром a : $V = a^3$.



Мал. 387

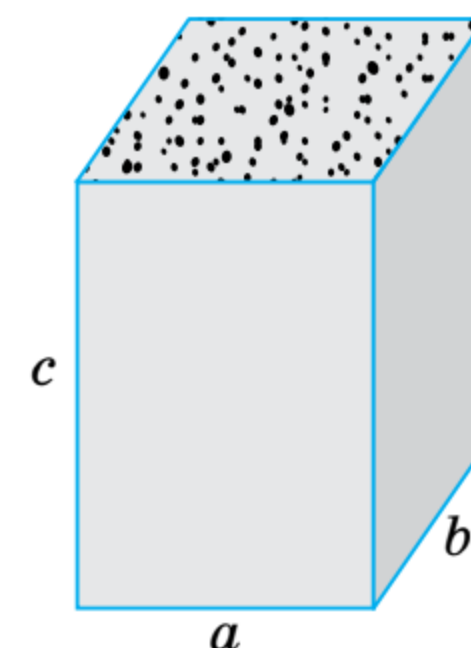


Як знайти об'єм прямої призми і піраміди?

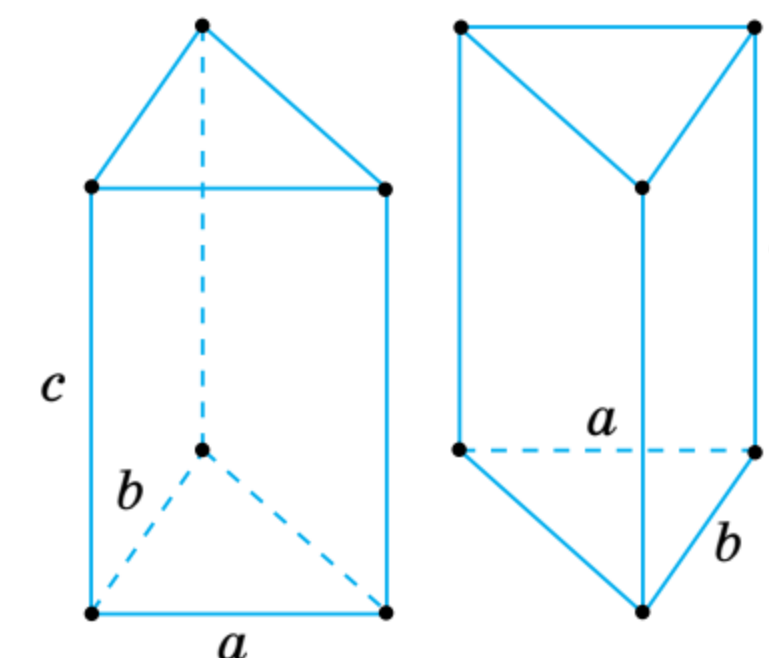
Проведемо дослід.



Використаємо три посудини. Одна з них має форму прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b і c (мал. 388). Дві інші — форму прямої трикутної призми з висотою c і прямокутним трикутником з катетами a і b в основі (мал. 389). Насиплемо пісок у паралелепіпед, а потім пересиплемо його в обидві призми. Бачимо, що об'єм кожної з таких трикутних призм становить половину об'єму прямокутного паралелепіпеда. Одержали, що для обчислення об'єму даної трикутної призми можна скористатися формулою: $V = \frac{1}{2}abc$.



Мал. 388



Мал. 389

Помітимо, що у формулі $V = abc$ добуток ab — це площа основи паралелепіпеда, c — його висота; у формулі $V = \frac{1}{2}abc$ добуток $\frac{1}{2}ab$ — це площа основи трикутної призми, c — її висота. Якщо площу основи позначити $S_{\text{осн}}$, а висоту — H , то обидві формули можна записати так: $V = S_{\text{осн}} \cdot H$.

Запам'ятайте!

Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Продовжимо експеримент. Візьмемо посудину, що має форму чотирикутної піраміди, у якій основа — прямокутник зі сторонами a і b , а висота дорівнює c . Пересипавши пісок із піраміди в призму з такою самою основою і висотою, дістанемо, що об'єм піраміди становить третину об'єму призми.

Запам'ятайте!

Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Зі строгим доведенням формул об'єму ви ознайомитесь у старшій школі.

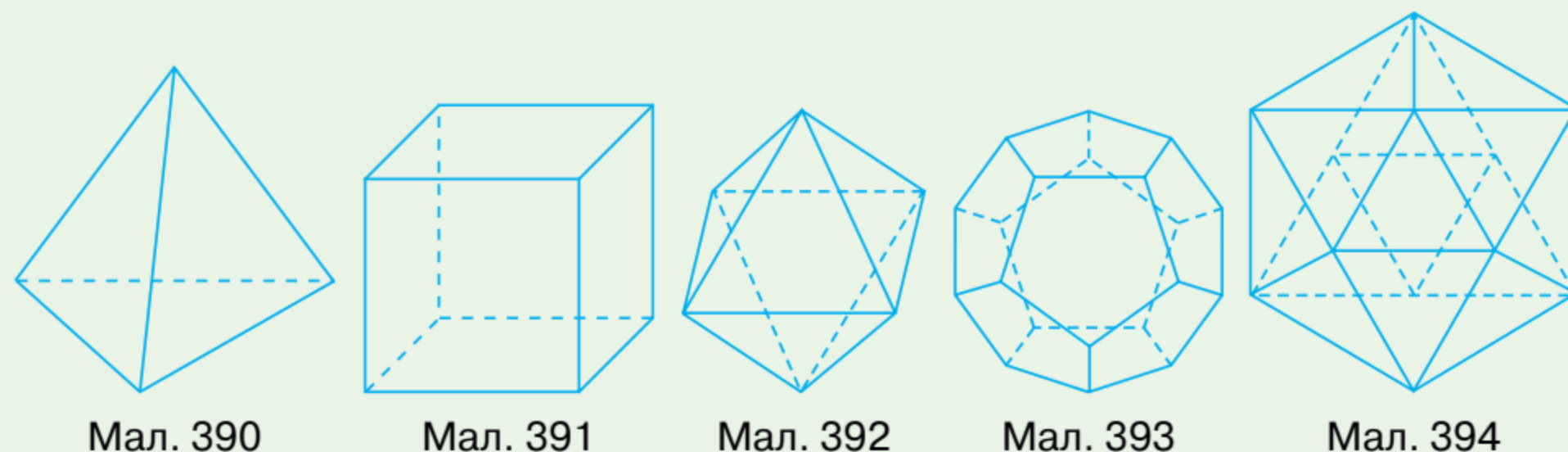
Дізнайтеся більше

1. З давніх часів особливими вважають п'ять многогранників: *тетраедр* (мал. 390), *гексаедр* (мал. 391), *октаедр* (мал. 392), *додекаедр* (мал. 393) та *ікосаедр* (мал. 394). Усі вони є *правильними многогранниками*. У такому многограннику всі грані є рівними правильними многокутниками і в кожній його вершині сходиться однакова кількість граней. У тетраедрі, октаедрі та ікосаедрі гранями є правильні трикутники, у гексаедрі (кубі) — квадрати, у додекаедрі — п'ятикутники. У кожній вершині тетраедра, гексаедра і додекаедра сходиться по три грані, в октаедра — по чотири, а в ікосаедра — по п'ять граней.

Свої назви правильні многогранники дістали від сполучення двох слів. Перше з них відповідає кількості граней многогранника, а слово *hedra* означає «опора» (зараз говоримо «грань»). Отже, тетраедр — чотиригранник, гексаедр — шестигранник, октаедр — восьмигранник, додекаедр — дванадцятигранник, ікосаедр — двадцятигранник.

Чотири перші види правильних многогранників було відкрито у VI ст. до н. е. науковою школою Піфагора. Три століття потому Евклід у своїх «Началах» показав, що правильних опуклих многогранників існує лише п'ять видів.

Видатний мислитель античності Платон (428–348 р. до н. е.) — засновник філософської школи «Академія» — вважав правильні многогранники досконалими тілами. Він пов'язував їх з природними стихіями, використовував у своїх філософських роздумах, але не займався безпосередньо їх дослідженням. Із тих часів правильні многогранники мають назву Платонові тіла.



2. Символ V для позначення об'єму тіла походить від латинської назви *volumen*, що означає «об'єм». Символ S для позначення площі фігури походить від латинської назви *superficies*, що означає «поверхня».

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
многогран- ник	polyhedron	Polyeder, n	polyèdre

qr.orioncentr.com.ua/B9uiH

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
2. Що є основами прямої призми? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
3. Що є основою піраміди? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
4. Яку призму називають трикутною, чотирикутною, n -кутною? А піраміду?
5. Поясніть, що таке бічна поверхня призми; піраміди. Що таке повна поверхня?
6. Як знайти площу бічної поверхні прямої призми; піраміди? Площу повної поверхні?
7. Сформулюйте означення висоти прямої призми; піраміди.
8. Запишіть формулу об'єму прямої призми; піраміди.

Усне тренування

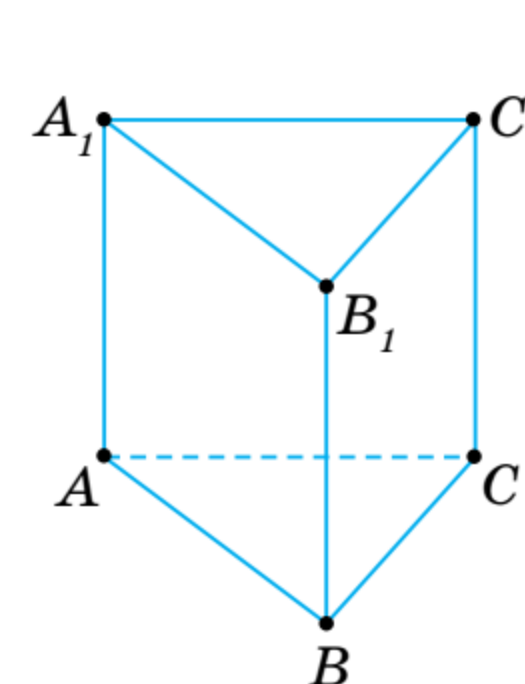
Обчисліть:

$$\begin{aligned} 1) (3 + 4) : 10; & \quad (3 + 4) : 5; & \quad (3^2 + 4^2) : 10^2; & \quad (3^2 + 4^2) : 5^2; \\ 2) (2^1 + 2^2) \cdot 2^3; & \quad (2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot 2^4; & \quad (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot 2^5. \end{aligned}$$

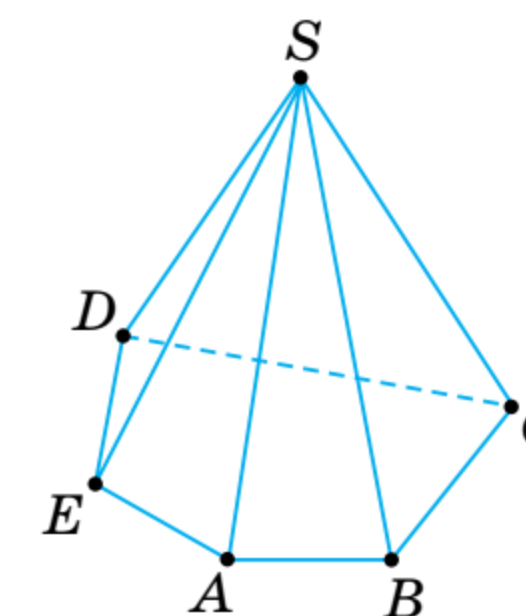
Розв'яжіть задачі

1065'. За малюнками 395–397 з'ясуйте:

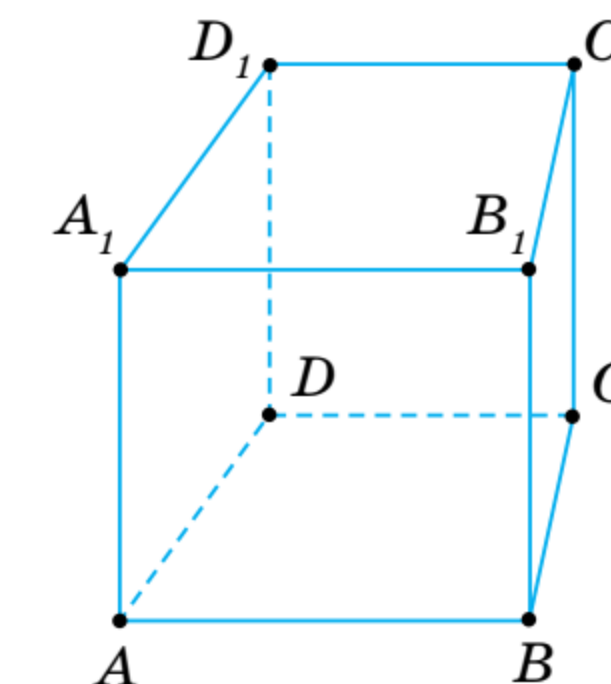
- 1) як називається даний многогранник;
- 2) скільки в ньому основ і бічних граней;
- 3) який многокутник лежить у його основі;
- 4) які многокутники є його бічними гранями.



Мал. 395



Мал. 396



Мал. 397

1066'. Назвіть вершини і ребра многогранника (мал. 395–397). Скільки його граней сходиться у вершині: 1) A ; 2) B ; 3) C ?

1067'. Чи правильно, що:

- 1) площею бічної поверхні прямої призми є многокутник;
- 2) площею повної поверхні піраміди є площа многокутника?

1068'. Сумі площ яких граней многогранника (мал. 395–397) дорівнює площа його бічної поверхні? А повної поверхні? Зробіть відповідний запис.

1069°. Чи можна вважати висотою даного многогранника (мал. 395–397) якесь його ребро?

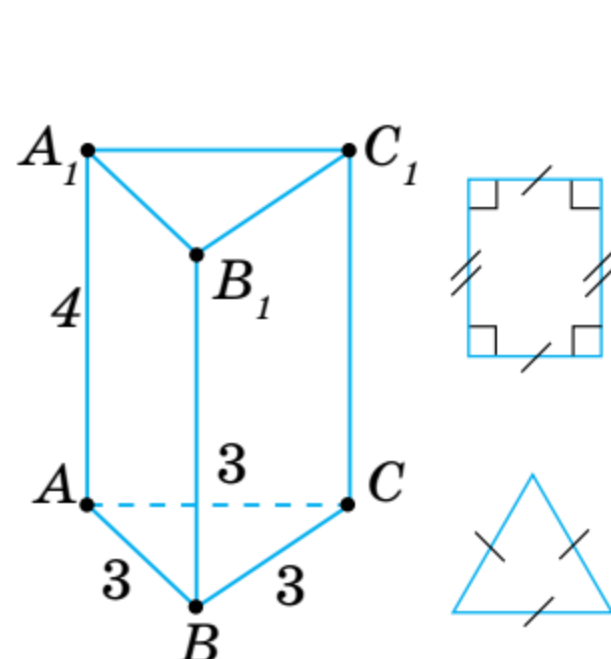
1070°. Чи правильно, що:

- 1) об'єм прямої призми дорівнює добутку площі його основ;
- 2) об'єм прямої призми дорівнює добутку площі його основи на бічне ребро;
- 3) об'єм піраміди дорівнює добутку площі його основи на висоту;
- 4) об'єм піраміди дорівнює добутку третини площі його основи на висоту?

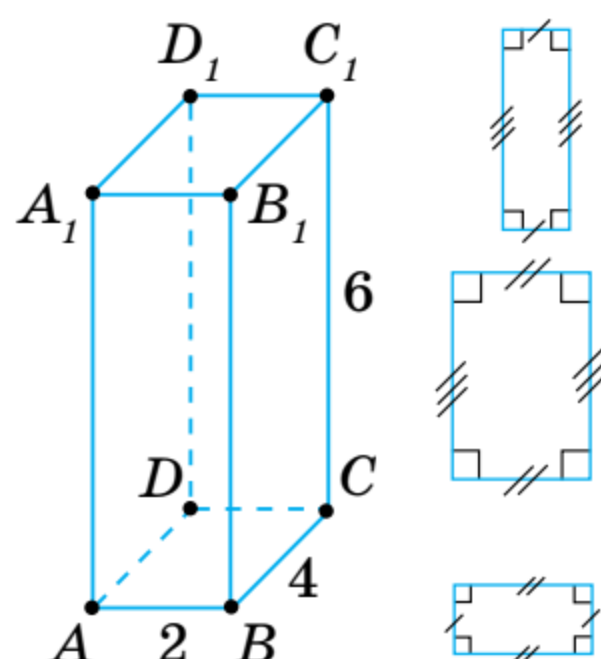
1071°. Побудуйте пряму призму: 1) трикутну; 2) чотирикутну; 6) шестикутну.

1072°. За даними на малюнках 398–400 знайдіть площі бічної і повної поверхонь прямої призми.

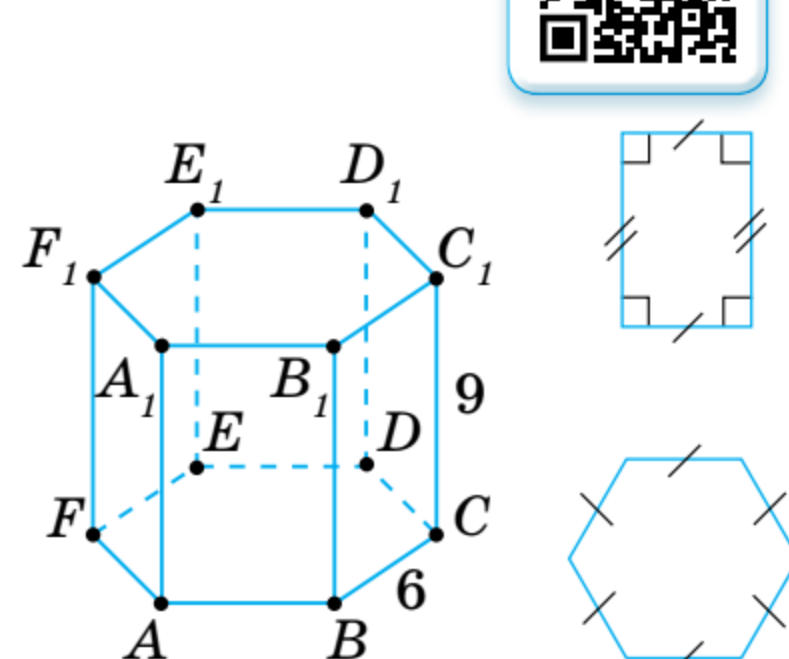
qr.orioncentr.com.ua/i9T8i



Мал. 398



Мал. 399



Мал. 400

1073°. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см, а бічне ребро дорівнює: 1) 5 см; 2) 10 см; 3) 2 см. Знайдіть площі її бічної і повної поверхонь.

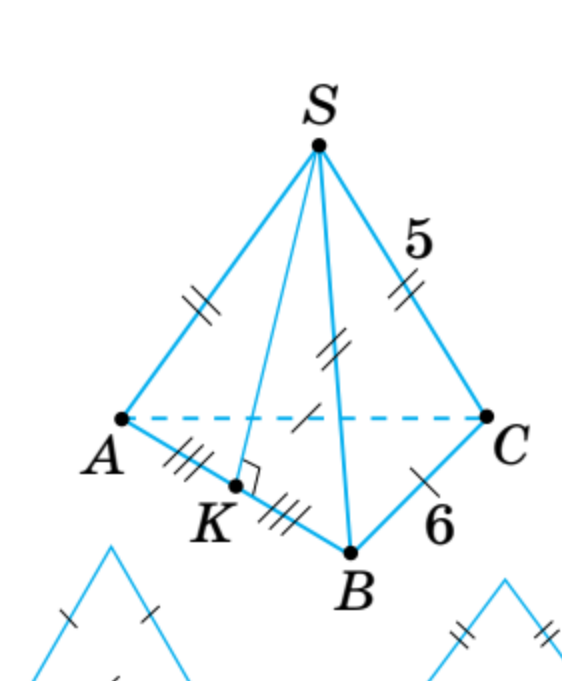
1074°. Бічна поверхня куба дорівнює: 1) 16 см²; 2) 8 см²; 3) 4 см². Яку довжину має його ребро?

1075°. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь куба з ребром: 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 4 см?

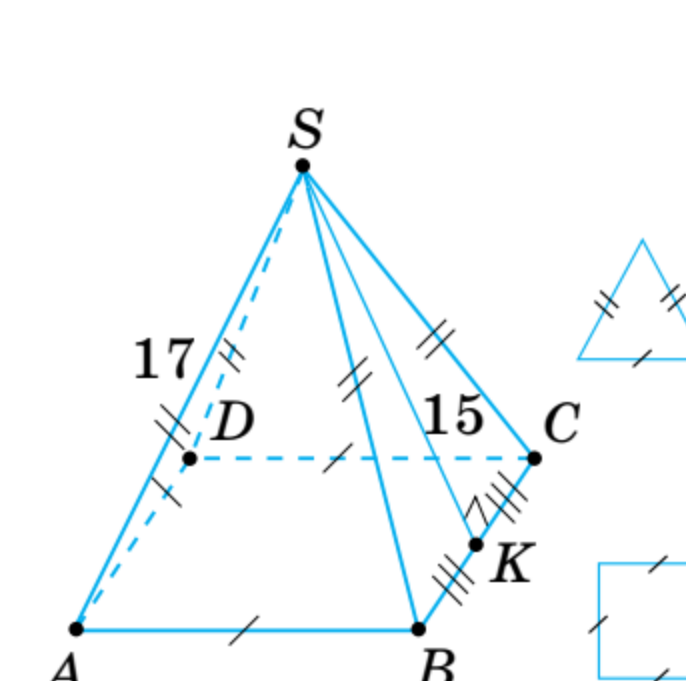
1076°. Основа чотирикутної прямої призми — ромб з діагоналями 6 см і 8 см, а його бічні грані — рівні прямокутники, площі яких дорівнюють площі основи призми. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь призми?

1077°. Площа основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 240 см². Знайдіть площу його бічних граней, якщо площа однієї з них становить 0,5 площі основи, а площа іншої — 0,25 площі основи. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь паралелепіпеда?

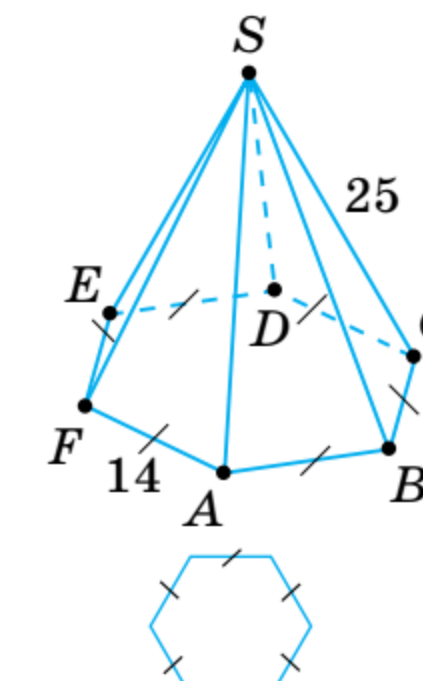
1078°. За даними на малюнках 401–403 знайдіть площі бічної і повної поверхонь піраміди.



Мал. 401



Мал. 402



Мал. 403

1079°. Основа піраміди — квадрат зі стороною a , а її бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники з площею S . Знайдіть площі бічної і повної поверхонь піраміди, якщо: 1) $a = 3$ см, $S = 12$ см²; 2) $a = 4$ см, $S = 20$ см²; 3) $a = 6$ см, $S = 24$ см².

1080°. Основа прямої призми — правильний n -кутник зі стороною a . Висота призми дорівнює H . Знайдіть площі бічної і повної поверхонь призми та її об'єм. Заповніть таблицю 36.



qr.orioncentr.com.ua/KtY8i

Таблиця 36

n	3	3	4	4	6	6
a	5 см	10 см	9 см	3 см	2 см	2 см
H	8 см	8 см	27 см	9 см	4 см	6 см
$S_{\text{бп}}$						
$S_{\text{пп}}$						
V						

1081°. Основа прямої призми — правильний чотирикутник зі стороною 5 см, а її висота вдвічі більша за сторону основи. Знайдіть об'єм призми.

1082°. Основа піраміди — правильний n -кутник зі стороною 15 см. Висота піраміди дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

1083°. Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною 3 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм піраміди.

- 1084.** Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати:
1) пряма призма; 2) піраміда?
- 1085.** Як зміниться площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо одне з його ребер:
1) збільшити у 3 рази; 3) збільшити на 50 %;
2) зменшити в 4 рази; 4) зменшити на 75 %?
- 1086.** Як зміниться площа повної поверхні куба, якщо його ребро:
E 1) збільшити у 3 рази; 3) збільшити на 50 %;
2) зменшити в 4 рази; 4) зменшити на 75 %?
- 1087.** У прямій трикутній призмі сторони основи a і b утворюють кут α , а бічне ребро дорівнює c . Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм призми, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 30^\circ$;
2) $a = b = 10$ см, $c = 12$ см, $\alpha = 60^\circ$.
- 1088.** Знайдіть відношення об'ємів куба і прямокутного паралелепіпеда, якщо у них:
E 1) основи рівні, а висоти відносяться як 1 : 5;
2) висоти рівні, а сторони основ відносяться як 1 : 1 : 2.
- 1089.** Усі грані трикутної піраміди є правильними трикутниками зі стороною a . Висота піраміди дорівнює H . Знайдіть площі бічної і повної поверхонь піраміди та її об'єм. Заповніть таблицю 37.

Таблиця 37

a	5 см	10 см	9 см	3 см
H	$5\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$10\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$9\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$3\sqrt{\frac{2}{3}}$ см
$S_{\text{бп}}$				
$S_{\text{пп}}$				
V				

- 1090.** Усі ребра чотирикутної піраміди мають довжину a . Її висоту можна обчислити за формулою: $H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Чому дорівнюють площі її бічної і повної поверхонь та об'єм, якщо:
1) $a = 2$ см; 2) $a = 5$ см?
- 1091*.** Різниця периметра грані одного куба і периметра грані іншого куба дорівнює c , а різниця їхніх площ — d . Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм даних кубів, якщо:
1) $c = 16$ см, $d = 56$ см²; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см².

- 1092*.** Прямокутник зі сторонами 4 см і 17 см пряма a розбиває на два подібні прямокутники, площі яких відносяться як 1 : 3. На кожному з прямокутників як на основі побудовано пряму призму з висотою 10 см. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм побудованих призм.
- 1093*.** На сторонах рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a побудовано квадрати. Їхні вершини з'єднано відрізками так, що утворився опуклий шестикутник. Він є основою прямої призми з висотою H . Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм цієї призми.
- 1094*.** Квадрат зі стороною a і прямокутник зі сторонами b і c мають рівні периметри. Вони є основами двох пірамід з рівними висотами. Знайдіть об'єм кожної піраміди, якщо:
1) $a = 8$ см, $b = 12$ см;
2) $a = 8$ см, $c = 10$ см.
Який із двох многогранників має більший об'єм?
- 1095*.** Квадрат зі стороною a і прямокутник зі сторонами b і c мають рівні площі. Вони є основами двох пірамід з рівними висотами. Знайдіть об'єм кожної піраміди, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см;
2) $a = 6$ см, $c = 2$ см.
Який із двох многогранників має менший об'єм?

Проявіть компетентність

- 1096.** Один кубічний метр червоної цегли має масу 1650 кг. Яка маса 5 м³; 10 м³ такої цегли? Відшукайте відомості про розміри такої цегли та визначте кількість цеглин, що вміщується в 1 м³; 5 м³; 10 м³.
- 1097.** Маса кубічного метра буряків дорівнює 650 кг. Вантажівка має кузов розмірами $3 \times 2 \times 1$ м. Визначте масу буряків, вивезених нею з поля за: 1) два рейси; 2) чотири рейси; 3) 10 рейсів.

§ 19. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

1. Що таке тіло обертання

Ситуація. На уроці геометрії в 9-А класі Юрій Петрович поставив учнівству запитання: «Чи будь-яке геометричне тіло можна утворити обертанням плоскої фігури навколо деякої прямої?» Ольга, не вагаючись, відповіла: «Так». Але Дмитро заперечив: «Хіба можна в такий спосіб утворити многогранник?».


qr.orioncentr.com.ua/3pu1c

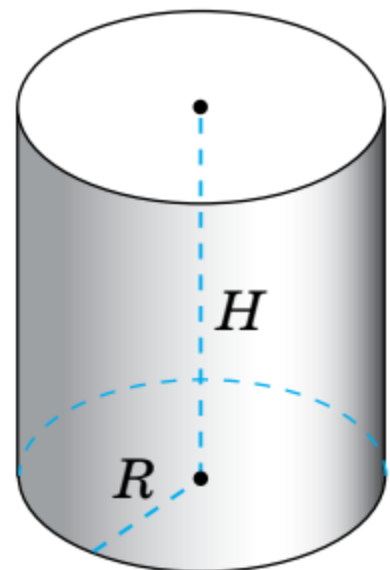


Хто має рацію — Ольга чи Дмитро?

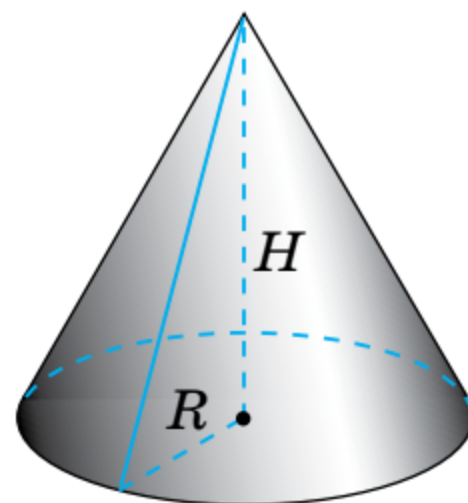
Дмитро.



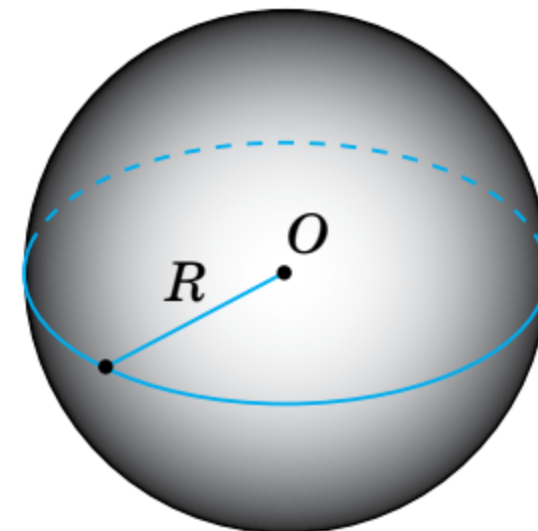
Справді, не всі геометричні тіла можна утворити обертанням плоскої фігури навколо прямої. Зокрема, відомі вам многогранники так утворити не можна. Але в такий спосіб можна утворити циліндр (мал. 404), конус (мал. 405), кулю (мал. 406) та ін. Звідси їхня назва — «тіла обертання».



Мал. 404



Мал. 405

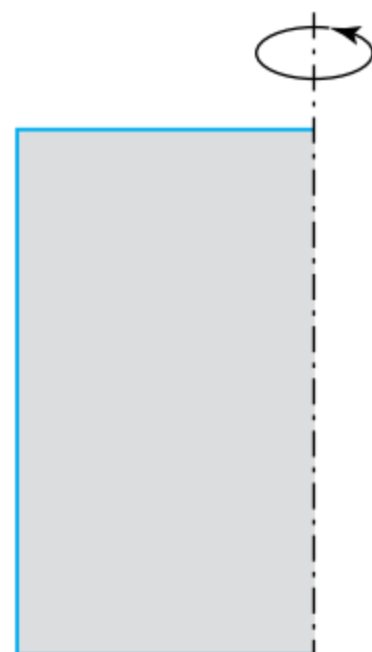


Мал. 406

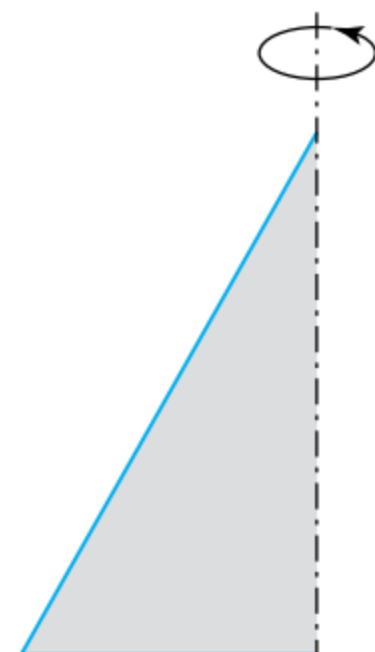
Якщо обертати прямокутник навколо однієї з його сторін (мал. 407), то одержимо прямий круговий *циліндр*. Цю сторону прямокутника вважають *віссю циліндра*, а протилежну їй сторону — *твірною циліндра*. Твірна циліндра перпендикулярна до його основ, тому її можна вважати *висотою циліндра*. Циліндр має дві *основи* — рівні круги радіусом R , що лежать у паралельних площинах.

Якщо обертати прямокутний трикутник навколо його катета (мал. 408), то одержимо прямий круговий *конус*. Цей катет вважають *віссю конуса*, а гіпотенузу трикутника — *твірною конуса*. Основою конуса є круг радіусом R . Твірна конуса не перпендикулярна до його основи, тому не може бути його висотою. *Висота конуса* визначається за його віссю.

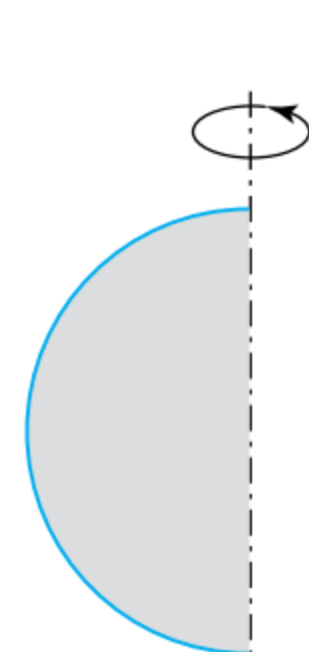
Якщо обертати півкруг навколо його діаметра, то одержимо *кулю* (мал. 409). Цей діаметр вважають *віссю кулі*. Для кулі твірну і висоту не виділяють.



Мал. 407



Мал. 408



Мал. 409

2. Площа поверхні циліндра і конуса



Бічну поверхню циліндра (конуса) утворює його твірна під час обертання.

Повну поверхню **циліндра** утворюють його бічна поверхня і **два круги основ**.

Повну поверхню **конуса** утворюють його бічна поверхня і **круг основи**.

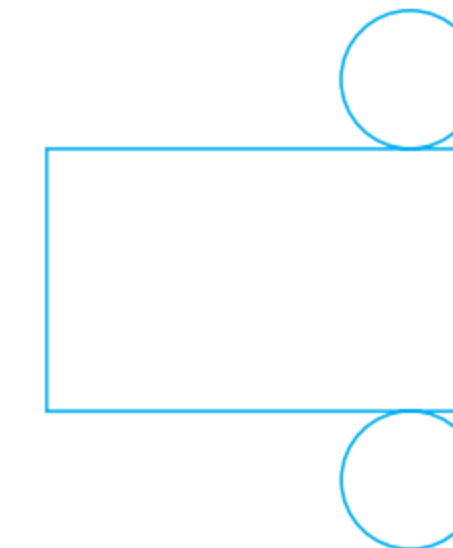


Як знайти площу поверхні циліндра і конуса?

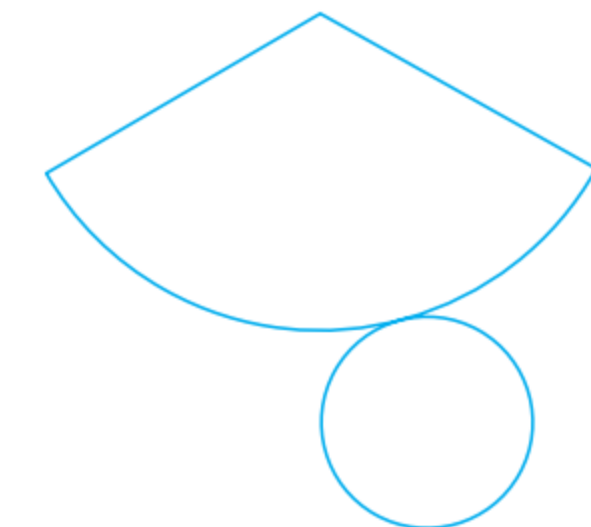
Проведемо дослід.



Дослід. Візьмемо паперові макети циліндра й конуса. Розріжемо кожний із них уздовж твірної. Макет циліндра розріжемо ще й уздовж двох кіл основ, а макет конуса — уздовж кола його основи. Розгорнемо макети й розмістимо їх на площині. Одержали відповідно *розгортку циліндра* (мал. 410) і *розгортку конуса* (мал. 411). Проаналізуємо розгортки, а результати запишемо в таблиці 38.



Мал. 410



Мал. 411

Таблиця 38

	Циліндр	Конус
Розгортка		
Бічна поверхня	прямокутник зі сторонами $2\pi R$ і H	сектор круга радіусом l , довжина дуги сектора $2\pi R$

Таблиця 38 (продовження)

	Циліндр	Конус
Як знайти площу бічної поверхні	за формулою площі прямокутника	як частину площі круга, з пропорції: $\frac{\text{Довжина дуги}}{\text{Довжина кола}} = \frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{круга}}}$
Площа бічної поверхні	$S_{\text{бп}} = 2\pi RH$	$S_{\text{бп}} = \pi Rl$
Площа повної поверхні	$S_{\text{пп}} = 2\pi RH + 2 \cdot \pi R^2$	$S_{\text{пп}} = \pi Rl + \pi R^2$

Запам'ятайте!

Формули площі бічної поверхні тіл обертання

ЦИЛІНДР

$$S_{\text{бп}} = 2\pi RH$$

КОНУС

$$S_{\text{бп}} = \pi Rl$$



Площа повної поверхні циліндра (конуса) дорівнює сумі площ його бічної поверхні та двох основ (основи).

3. Площа сфери

Запам'ятайте!

Поверхню кулі називають *сферою*.

Сфера має з кулею той самий центр O і радіус R (мал. 412). Круг із центром O і радіусом R називають *великим кругом кулі*, а відповідне коло — *великим колом сфери*.

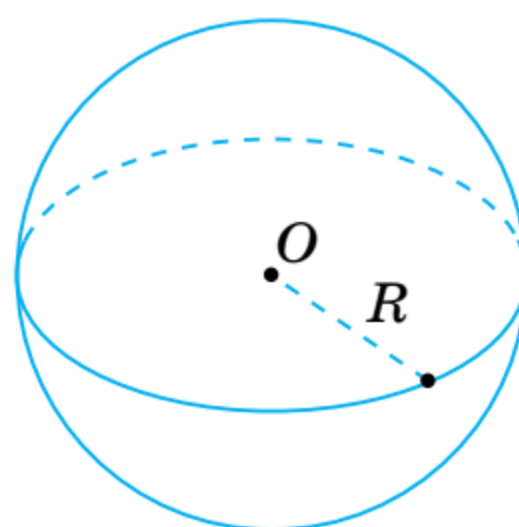


Сферу не можна розрізати й розгорнути так, щоб вона без вигинань усіма точками розмістилася на площині.

Отже, для знаходження формули площі сфери потрібний інший підхід, ніж для циліндра й конуса. З ним ви ознайомитеся у старших класах. А зараз скористаємося лише висновком.



Площа сфери в чотири рази більша за площу великого круга відповідної кулі (мал. 413).



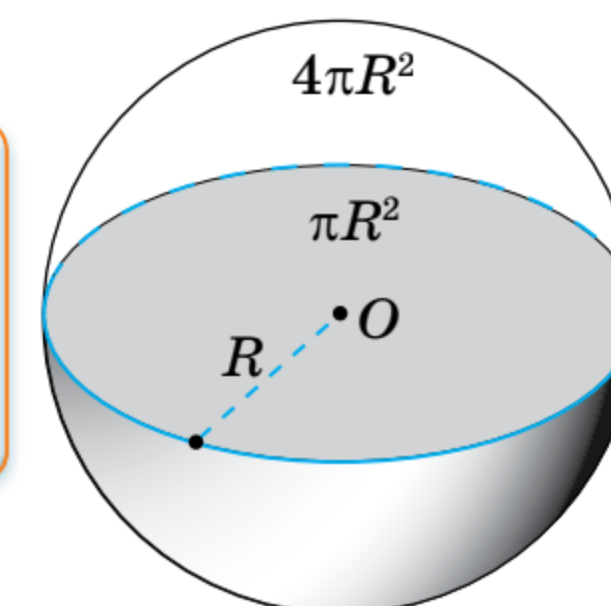
Мал. 412

Запам'ятайте!

Формули площі великого круга кулі та сфери

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$$



Мал. 413

4. Об'єм циліндра, конуса, кулі



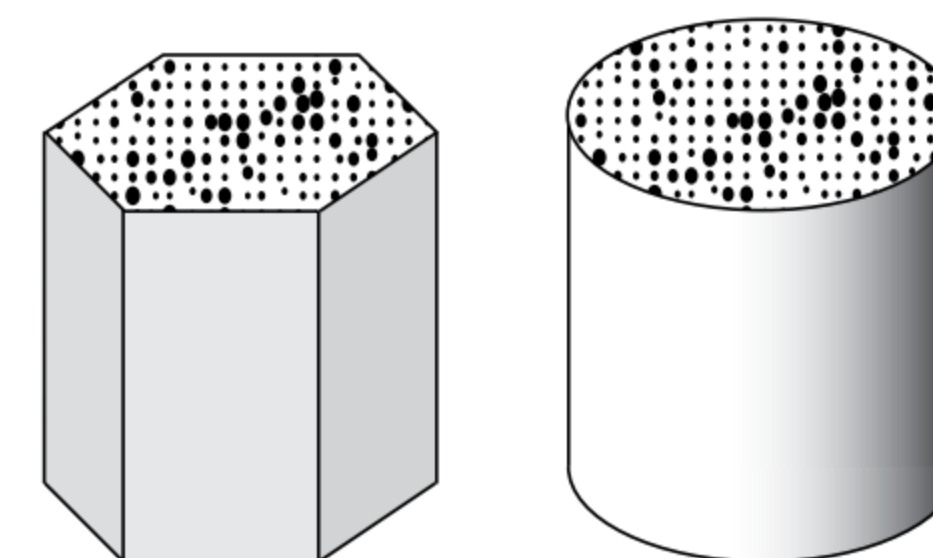
Як знайти об'єм тіл обертання?



Проведемо дослід.

Дослід 1. Об'єм циліндра будемо порівнювати з об'ємом прямої n -кутної призми (мал. 414), у якої висота дорівнює висоті циліндра H , а основа — правильний n -кутник, вписаний у коло радіусом R . При подальшому подвоєнні сторін n -кутника його контур все більше наближатиметься до кола. Отже, периметр многокутника все більше наближатиметься до довжини кола, площа многокутника — до площі круга основи циліндра, а об'єм призми майже не відрізнятиметься від об'єму циліндра. Тому для обчислення об'єму циліндра можна скористатися формулою: $V = S_{\text{осн}} \cdot H$. Остаточно маємо:

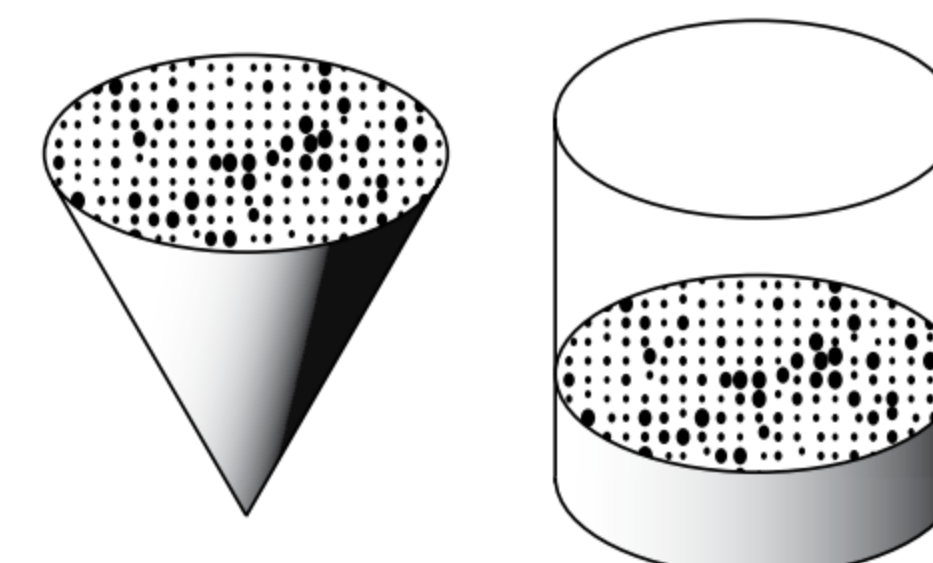
$$V = \pi R^2 H.$$



Мал. 414

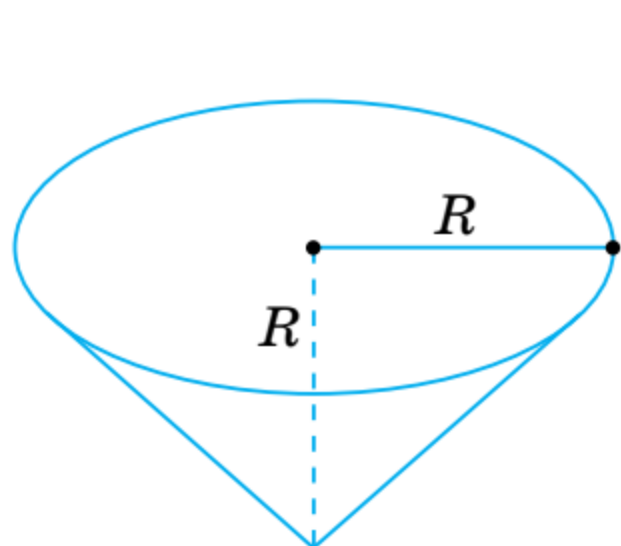
Дослід 2. Об'єм конуса будемо порівнювати з об'ємом циліндра, що має з конусом таку саму висоту H і радіус основи R (мал. 415). У результаті пересипання піску із конуса в циліндр одержимо, що об'єм конуса становить *третину* об'єму циліндра. Отже, формулу об'єму конуса можна подати у вигляді: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$. Остаточ-

точно маємо: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.



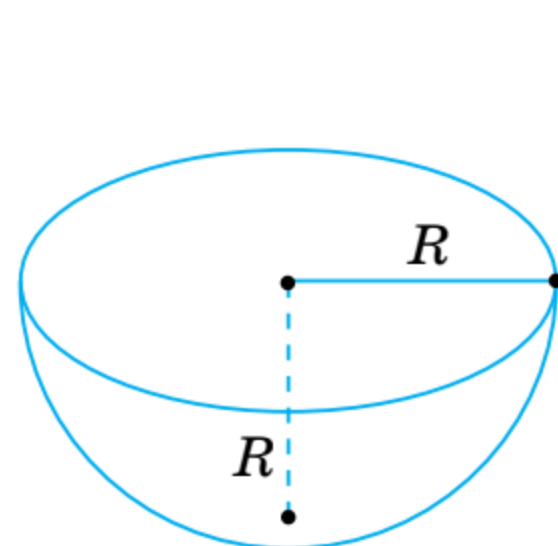
Мал. 415

Дослід 3. Формулу об'єму кулі радіусом R одержимо з формули об'єму відповідної півкулі. А її, своєю чергою, одержимо, порівнюючи півкулю з конусом, який має радіус основи R і висоту R . У результаті пересипання піску з конуса (мал. 416) в півкулю (мал. 417) одержимо, що об'єм півкулі дорівнює подвоєному об'єму конуса. Отже, **об'єм кулі** (мал. 418) **дорівнює об'єму чотирьох конусів** і обчислюється за формулою: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



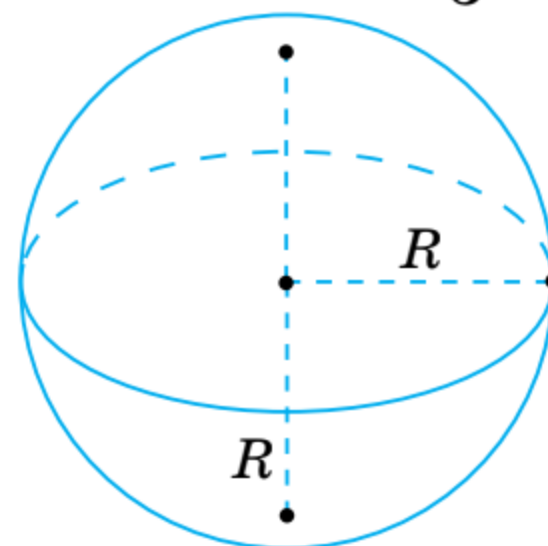
$$V = \frac{1}{3}\pi R^3$$

Мал. 416



$$V = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Мал. 417



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Мал. 418

Запам'ятайте!

Формули об'єму тіл обертання

ЦИЛІНДР
 $V = \pi R^2 H$

КОНУС
 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

КУЛЯ
 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Дізнайтеся більше

Одним із найвідоміших українських геометрів є академік **Олексій Васильович Погорелов** (1919–2002). Він народився в Корочі Белгородської обл., але більшу частину свого життя провів в Україні. Навчався у Харківському університеті, а потім і викладав у ньому; працював в Інституті математики та інших установах України. Йому належить розв'язання багатьох проблем сучасної геометрії. Зокрема, у 1959 р. він повністю розв'язав проблему нескінченно малих вигинань загальних опуклих поверхонь. А це має не лише теоретичне, а й велике практичне значення, бо і обшивка літака, і корпус корабля під час руху зазнають певних вигинань. За низку робіт О. В. Погорелов здобув Міжнародну премію імені Лобачевського та інші почесні премії й нагороди. Більшості українських громадян він відомий як автор шкільних підручників з геометрії, за якими вивчали цей предмет у школі упродовж кількох десятиліть.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
циліндр	cylinder	Zylinder, n	cylindre
конус	cone	Kegel, m	cône
куля	ball	Kugel, f	sphère

qr.orioncentr.com.ua/n643c

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке тіло обертання.
2. Обертанням якої плоскої фігури утворюється циліндр? Конус? Куля?
3. Що таке твірна, вісь, основа, висота циліндра? Конуса?
4. Виведіть формулу площі бічної поверхні циліндра; конуса.
5. Поясніть, як знайти площу повної поверхні циліндра; конуса.
6. Як обчислити площу сфери?
7. Запишіть формулу об'єму циліндра; конуса; кулі.

Усне тренування

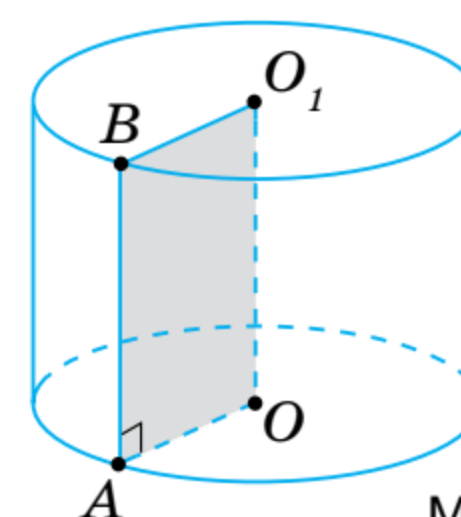
Обчисліть:

- 1) $5,86 \cdot 10 + 1,4$; $0,128 \cdot 100 - 2,8$; $8,62 \cdot 1000 - 120$;
- 2) $3,14 \cdot 1000 - 140$; $0,79 \cdot 100 + 11$; $5,71 \cdot 10 + 2,9$.

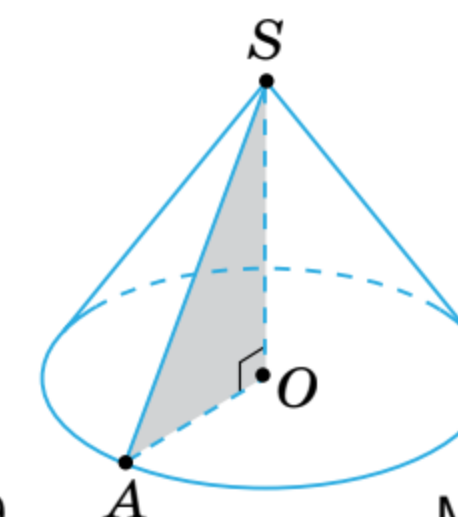
Розв'яжіть задачі

1098'. За малюнками 419–421 з'ясуйте:

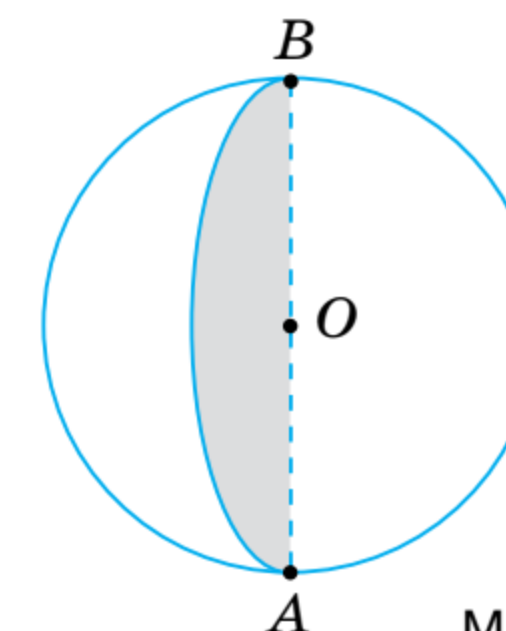
- 1) як називається дане тіло обертання;
- 2) обертанням якої фігури воно утворене;
- 3) що є віссю і твірною даного тіла;
- 4) якщо в нього є основа, то яка це фігура;
- 5) чи можна вважати твірну даного тіла його висотою;
- 6) чи можна розгорнути поверхню даного тіла на площину.



Мал. 419



Мал. 420



Мал. 421

1099°. Чи правильно, що сфера є поверхнею:

- 1) циліндра;
- 2) конуса;
- 3) кулі?

1100°. У яку плоску фігуру розгортається бічна поверхня:

- 1) циліндра;
- 2) конуса?

1101°. Чи можна сферу розгорнути на площину?

1102°. Чи одержимо циліндр обертанням:

- 1) квадрата навколо його діагоналі;
- 2) паралелограма навколо його сторони;
- 3) прямокутної трапеції навколо її бічної сторони?

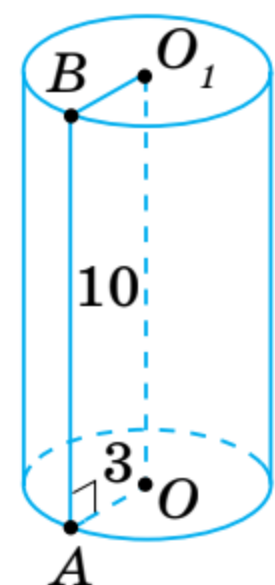
1103°. За даними на малюнках 419, 420 складіть вираз для обчислення:

- 1) площі бічної поверхні тіла обертання;
- 2) площі повної поверхні тіла обертання;
- 3) об'єму тіла обертання.

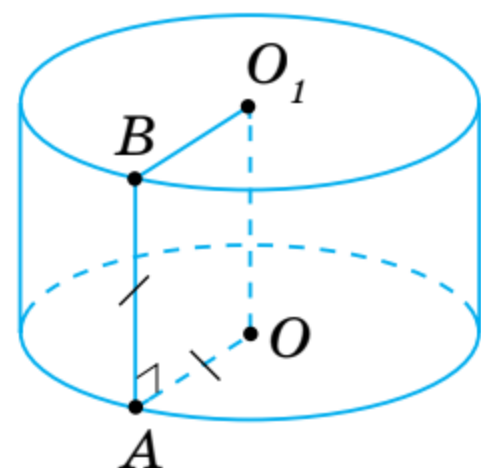
1104°. За даними на малюнках 422–424 знайдіть площу бічної поверхні, площу повної поверхні та об'єм циліндра з віссю OO_1 , якщо $AO = 3$ см.



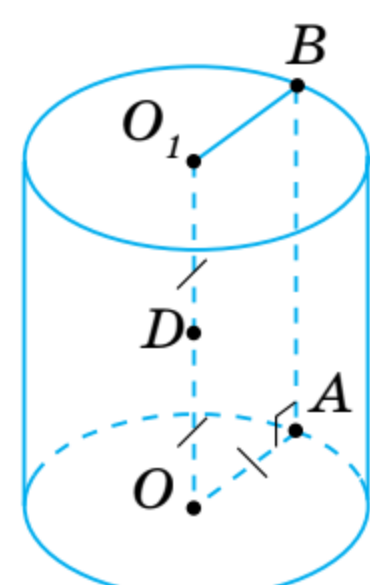
qr.orioncentr.com.ua/wlrCv



Мал. 422



Мал. 423



Мал. 424

1105°. Накресліть розгортку циліндра з радіусом основи R і висотою h , якщо:

- 1) $R = 1$ см, $h = 3$ см;
- 2) $R = 2$ см, $h = 4$ см;
- 3) $R = 3$ см, $h = 5$ см.

Чому дорівнює площа його бічної поверхні? Площа повної поверхні? Який у нього об'єм?

1106°. Чому дорівнюють площа бічної поверхні, площа повної поверхні та об'єм циліндра з твірною 10 см і площею основи:

- 1) 4π см²; 2) $12,56$ см²; 3) 25π см²?

1107°. Чи одержимо конус обертанням: 1) прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи; 2) рівнобедреного трикутника навколо його бічної сторони; 3) правильного трикутника навколо його сторони?

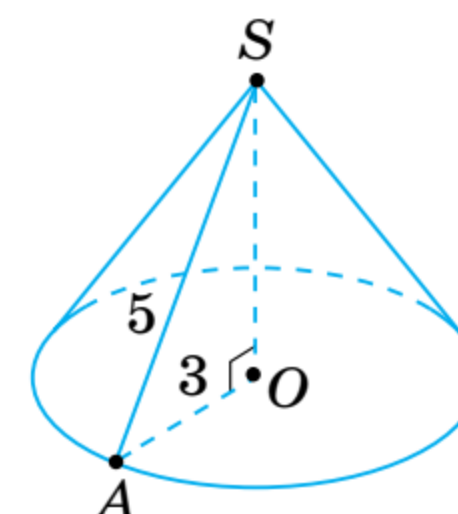
1108°. За даними на малюнках 425 і 426 знайдіть площі бічної і повної поверхонь конуса з віссю SO .



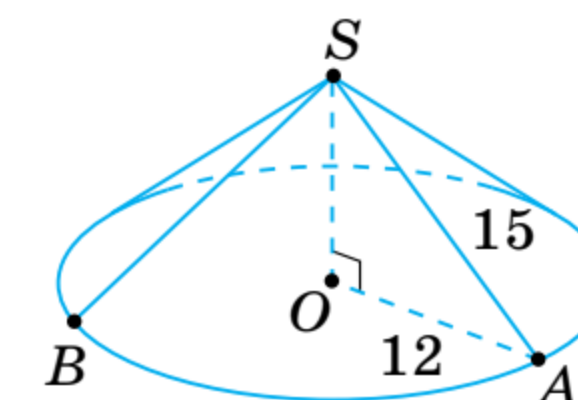
1109°. За даними на малюнку 427 знайдіть площі бічної і повної поверхонь конуса з віссю SO .



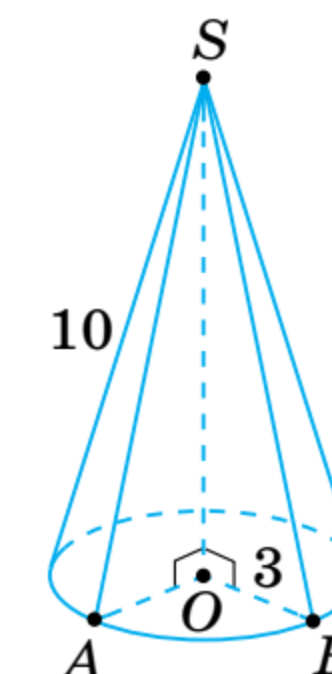
qr.orioncentr.com.ua/Trpxq



Мал. 425



Мал. 426



Мал. 427

1110°. Чому дорівнюють площа бічної поверхні, площа повної поверхні та об'єм конуса з радіусом основи R і висотою h , якщо:

- 1) $R = 2$ см, $h = 5$ см;
- 2) $R = 3$ см, $h = 4$ см;
- 3) $R = 1$ см, $h = 6$ см?

1111°. Знайдіть твірну конуса з висотою h і діаметром основи D , якщо:



- 1) $h = 4$ см, $D = 6$ см;
- 2) $h = 12$ см, $D = 10$ см;
- 3) $h = 8$ см, $D = 12$ см.

Яка у цього конуса площа бічної поверхні? Площа повної поверхні? Який у нього об'єм?

1112°. За даними на малюнку 421 складіть вираз для обчислення:



- 1) площі сфери; 2) об'єму кулі.

1113°. Знайдіть об'єм кулі та площу її сфери з радіусом:



- 1) 2 см; 2) 3 дм; 3) 4 см.

1114°. Знайдіть об'єм кулі та площу її сфери з радіусом 5 дм.



qr.orioncentr.com.ua/AfNPA

- 1115°.** Куля радіусом R має об'єм V , а її сфера — площу $S_{\text{сф}}$. Заповніть таблицю 39.

Таблиця 39

R	9 см					8 см
$S_{\text{сф}}$		$64\pi \text{ см}^2$			$49\pi \text{ см}^2$	
V			$288\pi \text{ см}^3$	$36\pi \text{ см}^3$		

- 1116.** Як зміняться площа бічної поверхні, площа повної поверхні та об'єм циліндра, якщо:
- 1) його висота збільшиться в n разів, а радіус кола основи не зміниться;
 - 2) радіус кола основи збільшиться в n разів, а твірна не зміниться.
- 1117.** Прямокутник зі сторонами a і b обертається навколо меншої сторони. Чому дорівнюють площа бічної поверхні, площа повної поверхні та об'єм утвореного циліндра, якщо:
- 1) $a + b = 16 \text{ см}$, $a - b = 4 \text{ см}$;
 - 2) $a + b = 32 \text{ см}$, $b - a = 8 \text{ см}$?
- 1118.** Знайдіть твірну циліндра з площею основи 81π , якщо площа його бічної поверхні дорівнює: 1) 162π ; 2) 126π . Чому дорівнюють площа повної поверхні та об'єм цього циліндра?
- 1119.** З'ясуйте, чи є правильним твердження: «Із двох конусів більшу площу бічної поверхні має той, у якому: 1) висота більша; 2) радіус основи більший; 3) висота більша, а радіус основи дорівнює радіусу основи іншого конуса».
- 1120.** Прямокутний трикутник з катетами a і b обертається навколо більшого катета. Чому дорівнюють площа бічної поверхні, площа повної поверхні та об'єм утвореного конуса, якщо:
- 1) $a + b = 31 \text{ см}$, $a - b = 17 \text{ см}$;
 - 2) $a + b = 28 \text{ см}$, $b - a = 4 \text{ см}$?
- 1121.** Знайдіть висоту конуса з площею основи 144π , якщо площа його бічної поверхні дорівнює: 1) 156π ; 2) 180π . Чому дорівнюють площа повної поверхні та об'єм цього конуса?
- 1122.** Знайдіть відношення площ двох сфер з радіусами:
- 1) 200 мм і 300 мм; 2) 0,7 дм і 1,4 дм.
- 1123.** Чому дорівнює відношення об'ємів двох куль з радіусами r_1 і r_2 , якщо:
- 1) $r_1 + r_2 = 17 \text{ см}$, $r_1 - r_2 = 7 \text{ см}$;
 - 2) $r_1 + r_2 = 11 \text{ см}$, $r_2 - r_1 = 5 \text{ см}$?

- 1124*.** Виразіть площу бічної поверхні, площу повної поверхні та об'єм циліндра: 1) через його висоту h і довжину кола основи C ; 2) через його висоту h і площу основи S .

- 1125*.** Два циліндри утворюються обертанням прямокутника зі сторонами 3 і 5 навколо кожної з двох суміжних сторін, а третій циліндр — обертанням квадрата навколо своєї сторони. Периметр квадрата дорівнює периметру даного прямокутника. У трьох даних циліндрів порівняйте: 1) площу бічної поверхні; 2) площу повної поверхні; 3) об'єм.

- 1126*.** Виразіть площу бічної поверхні, площу повної поверхні та об'єм конуса: 1) через його висоту h і довжину кола основи C ; 2) через його твірну l і площу основи S .

- 1127*.** Виразіть: 1) об'єм кулі V через площу її поверхні S ; 2) площу сфери S через об'єм кулі V ; 3) об'єм кулі V через довжину C її великого кола; 4) довжину C великого кола кулі через площу її поверхні S .

- 1128*.** Різниця довжин великих кіл двох куль дорівнює c , а різниця їхніх площ — d . Знайдіть площі сфер та об'єми даних куль, якщо: 1) $c = 4\pi \text{ см}$, $d = 16\pi \text{ см}^2$; 2) $c = 10\pi \text{ см}$, $d = 45\pi \text{ см}^2$.

Проявіть компетентність

- 1129.** Із циліндричної колоди треба виготовити брус, що має форму прямокутного паралелепіпеда з найбільшою площею поперечного перерізу. Який при цьому буде відсоток відходів?
- 1130.** Як далеко бачить пілот з висоти: 1) 2 км; 2) 10 км? (Діаметр земної кулі приблизно дорівнює 12,7 тис. км.)
- 1131.** Діаметр планети Меркурій приблизно дорівнює 5 тис. км, Венери — 12,4 тис. км, Землі — 12,7 тис. км, Марса — 6,8 тис. км. Яка площа поверхні цих планет?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 6

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Назвіть основні фігури у просторі. Яку властивість має площина?
2. Опишіть взаємне розміщення у просторі двох прямих; прямої і площини; двох площин.
3. Що називається перпендикуляром, проведеним із точки до площини? Що таке похила до площини?
4. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
5. Як знайти площі бічної і повної поверхонь прямої призми; піраміди?
6. Чому циліндр, конус і кулю вважають тілами обертання?
7. Як знайти площі бічної і повної поверхонь циліндра; конуса?
8. За якою формулою можна обчислити об'єм прямої призми; піраміди; циліндра; конуса?
9. Що таке сфера? Як обчислити її площу?
10. Яку формулу використовують для обчислення об'єму кулі?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1°. Основа прямої призми — квадрат зі стороною 2 см. Висота призми дорівнює 6 см. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?
 А. 12 см^2 . В. 48 см^2 .
 Б. 24 см^2 . Г. 72 см^2 .
- 2°. Який об'єм має трикутна піраміда, у якої площа основи дорівнює 6 см^2 , а висота — 4 см?
 А. 2 см^3 . В. 10 см^3 .
 Б. 8 см^3 . Г. 24 см^3 .
- 3°. Чому дорівнює площа сфери і об'єм кулі радіусом 3 см?
 А. $9\pi \text{ см}^2$, $27\pi \text{ см}^3$. В. $9\pi \text{ см}^2$, $36\pi \text{ см}^3$.
 Б. $12\pi \text{ см}^2$, $4\pi \text{ см}^3$. Г. $36\pi \text{ см}^2$, $36\pi \text{ см}^3$.
4. Циліндр і конус мають рівні основи радіусом 3 см і рівні висоти завдовжки 4 см. На скільки сантиметрів квадратних площа бічної поверхні циліндра більша за площу поверхні конуса?
 А. $9\pi \text{ см}^2$. В. $27\pi \text{ см}^2$.
 Б. $12\pi \text{ см}^2$. Г. $36\pi \text{ см}^2$.
- 5*. Точки A і B лежать у площині α на відстані 6 см одна від одної. Точка C не лежить у площині α і $CA \perp \alpha$. Відстань між точками C і B на 2 см більша за відстань від точки C до площини α . На якій відстані від площини α розміщена точка C ?
 А. 20 см. Б. 16 см. В. 10 см. Г. 8 см.



ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

Розв'яжіть задачі

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

qr.orioncentr.com.ua/yh8Tq



1132. Вершини трикутника ABC містяться в точках $A(2; 1)$, $B(1; 3)$ і $C(5; 2)$. Знайдіть координати вершин рівного йому трикутника KLM , якщо відповідні вершини даних трикутників симетричні відносно:
 - 1) осі абсцис;
 - 2) осі ординат;
 - 3) початку координат.
1133. За якого значення x довжина відрізка AB дорівнює 4, якщо $A(2; 3)$, $B(0; x)$?
1134. Точка M ділить сторону AC трикутника ABC у відношенні 1 : 3. Знайдіть довжину відрізка BM , якщо вершини трикутника мають координати $A(1; 5)$, $B(2; -2)$ і $C(5; 5)$. Скільки розв'язків має задача?
1135. Знайдіть площу трикутника з вершинами в точках $(4; 2)$, $(7; -2)$ і $(1; 0)$.
1136. Коло радіусом 3 см дотикається до осей координат. Яка відстань від центра цього кола до точки, що симетрична центру відносно:
 - 1) осі абсцис;
 - 2) осі ординат;
 - 3) початку координат?
1137. Пряму задано рівнянням $y = 2x + 3$. Яке рівняння має пряма, симетрична даній відносно:
 - 1) осі абсцис;
 - 2) осі ординат;
 - 3) початку координат?
1138. Дві вершини трикутника ABC містяться в точках $(0; -2)$ і $(2; 0)$, а третя — лежить на прямій $y = -x$. Визначте координати точки C , якщо площа трикутника ABC дорівнює 8.
1139. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника з вершинами в точках $(1; 0)$, $(2; 3)$ і $(3; 2)$.
1140. Два кола дотикаються зовні. Доведіть, що відрізок їхньої спільної зовнішньої дотичної є середнім пропорційним між діаметрами кіл.

- 1141. (Задача Леонардо Пізанського, XIII ст.).** Дві башти на рівнині стоять на відстані 60 ліктів одна від одної. Висота першої башти становить 50 ліктів, а висота другої — 40. Між баштами розміщена криниця, яка однаково віддалена від вершин обох башт. Як далеко розташована криниця від основи кожної башти?

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

qr.orioncentr.com.ua/MWaFz



- 1142.** За якого значення x вектори $\vec{a}(3x^2; 2)$ і $\vec{b}(1; x)$ перпендикулярні?
- 1143.** Чи є колінеарними вектори:
1) $\vec{a}(1; 3)$ і $\vec{b}(-6; -18)$; 2) $\vec{a}(1; -1)$ і $\vec{b}(0; 3)$?
- 1144.** Виразіть вектори сторін паралелограма $ABCD$ через вектори його діагоналей $\vec{AC} = \vec{a}$ і $\vec{BD} = \vec{b}$.
- 1145.** У паралелограмі $ABCD$ точка K — середина відрізка BC , точка O — точка перетину діагоналей. Виразіть вектори $\vec{BD}$, $\vec{CO}$, $\vec{KD}$ через вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AD}$.
- 1146.** Одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60° . Доведіть, що вектор $2\vec{b} - \vec{a}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.
- 1147.** Знайдіть кут між медіанами AP і BM трикутника ABC , у якому вершини мають координати: $A(0; -4)$, $C(0; 6)$, $B(2; -2)$.
- 1148.** Доведіть, що для катетів a і b та гіпотенузи c прямокутного трикутника справджується нерівність: $a + b \leq \sqrt{2}c$.
- 1149.** Сторону AB квадрата $ABCD$ точки M і P ділять на три рівні частини. Прямі DP і CM перетинаються в точці O . Знайдіть косинус $\angle COD$.
- 1150.** У чотирикутнику $ABCD$ середини сторін AB і CD з'єднує відрізок $MN = \frac{BC + AD}{2}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — трапеція.
- 1151.** Знайдіть геометричне місце кінців одиничних векторів, початки яких лежать на колі радіусом 1 і які колінеарні з даним вектором.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

qr.orioncentr.com.ua/uJZ32



- 1152.** У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c , а гострий кут — α . Знайдіть:
1) бісектрису прямого кута;
2) відрізки, на які бісектриса кута ділить гіпотенузу.
- 1153.** У рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі дорівнює l , а кут при вершині — α . Знайдіть бічну сторону трикутника.

- 1154.** Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює d й утворює з більшою основою кут α . Знайдіть більшу бічну сторону трапеції, якщо її гострий кут дорівнює β .

- 1155.** AD — бісектриса трикутника ABC , $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть: 1) CD ; 2) AD .

- 1156.** Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними — 60° . Знайдіть медіану, проведену до третьої сторони трикутника.

- 1157.** Основи трапеції дорівнюють 2 см і 5 см. Одна з бічних сторін дорівнює 3 см й утворює з більшою основою кут 60° . Знайдіть діагоналі трапеції.

- 1158.** У паралелограмі сторона дорівнює a , діагональ — d , а кут між ними — α . Знайдіть площу паралелограма, якщо:

- 1) $a = 3\sqrt{3}$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 60^\circ$;
2) $a = 2$ см, $d = 8$ см, $\alpha = 30^\circ$.

- 1159.** У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a , бічна сторона — b . Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо трикутника і вписаного в нього, якщо:

- 1) $a = 16$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 5$ см.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

qr.orioncentr.com.ua/mNwdn



- 1160.** Знайдіть кут, центральний кут і зовнішній кут правильного дванадцятикутника.
- 1161.** Скільки сторін має правильний многокутник, якщо:
1) його зовнішній кут дорівнює 24° ;
2) його кут дорівнює 135° ?
- 1162.** Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо правильного шестикутника і вписаного в нього, якщо:
1) різниця їхніх радіусів дорівнює 6 см;
2) сума їхніх радіусів дорівнює 8 см.
- 1163.** Побудуйте правильний шестикутник, якщо:
1) його більша діагональ дорівнює 8 см;
2) його менша діагональ дорівнює 6 см.
- 1164.** Виразіть сторону a правильного вписаного многокутника через радіус R кола і сторону b правильного описаного многокутника з тією самою кількістю сторін.
- 1165.** Периметр правильного трикутника дорівнює P . Знайдіть довжину кола, описаного навколо цього трикутника, якщо:
1) $P = 5\sqrt{3}$ см; 2) $P = 12$ см.

- 1166.** Знайдіть довжину кола, якщо довжина його дуги, що містить 45° , дорівнює 10 см.
- 1167.** Навколо кола, довжина якого дорівнює C , описано ромб із гострим кутом α . Знайдіть площу ромба.
- 1168.** Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює:
1) сумі площ двох кругів радіусами m і n ;
2) різниці площ двох кругів радіусами m і n .
- 1169.** Знайдіть площу круга, якщо площа його сектора дорівнює 20 см^2 , а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 72° .

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ
qr.orioncentr.com.ua/tKmsQ


- 1170.** Переміщення переводить трикутник ABC в трикутник $A'B'C'$. Знайдіть:
1) периметр трикутника $A'B'C'$, якщо $AB = 6 \text{ см}$, $BC = 9 \text{ см}$, $AC = 10 \text{ см}$;
2) кути трикутника $A'B'C'$, якщо $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 20^\circ$.
- 1171.** Вершина B прямокутного трикутника ABC при симетрії відносно середини гіпотенузи AC переходить у точку D . Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.
- 1172.** Проведіть пряму a й позначте точку A , що не лежить на цій прямій. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте точку A' , симетричну точці A відносно прямої a .
- 1173.** Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.
- 1174.** Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник ABC при повороті на 150° за годинниковою стрілкою навколо:
1) вершини A ;
2) точки O , що лежить поза трикутником.
- 1175.** При паралельному перенесенні відрізка AB точка A переходить у точку B , а точка B — у точку B' . Знайдіть довжину відрізка AB' , якщо $AB = m$.
- 1176.** Доведіть, що сума основ трапеції менша від суми її діагоналей.
- 1177.** Знайдіть середню лінію трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), якщо $AE = 10 \text{ см}$ (E — точка перетину продовження бічних сторін трапеції), $AD = 4 \text{ см}$, $AB = 10 \text{ см}$.
- 1178.** Сторони чотирикутника дорівнюють 5 см, 7 см, 9 см і 11 см. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 128 см.

- 1179.** Площі двох квадратів відносяться як 1 : 9. Знайдіть сторону більшого квадрата, якщо периметр меншого дорівнює m .

**ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ
ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ**
qr.orioncentr.com.ua/Ubtnd


- 1180.** Скільки пар паралельних ребер у прямій призмі, основа якої:
1) трикутник;
2) чотирикутник;
3) n -кутник?
- 1181.** Скільки пар ребер куба лежать на мимобіжних прямих? А трикутної піраміди?
- 1182.** Будинок має форму прямокутного паралелепіпеда з довжиною 120 м і об'ємом $369\,600 \text{ м}^3$. Знайдіть висоту будинку над землею, якщо він заглиблений у землю на 15 м, а довжина будинку більша за його ширину в $1\frac{5}{7}$ раза.
- 1183.** Маса кубічного метра картоплі становить 670 кг. Картоплю засипано в рівчак, який має форму прямої призми, що лежить на бічній грані. Його поперечний переріз має вигляд рівнобічної трапеції з основами 3 м і 4 м і висотою 1 м. Скільки рейсів треба зробити тритонній вантажівці, щоб перевезти цю картоплю?
- 1184.** Як зміниться об'єм піраміди, в основі якої лежить правильний n -кутник, якщо площу її основи збільшити у 3 рази?
- 1185.** Циліндричне відро має внутрішній діаметр 25 см і висоту 40 см. Скільки літрів води воно вміщує?
- 1186.** Купа піску має форму конуса, довжина кола основи якого становить 31,4 м, а твірна — 5,8 м. Скільки п'ятитонних вантажівок знадобиться для його перевезення? (Маса 1 м^3 піску дорівнює 1,6 т.)
- 1187.** Площа поверхні Місяця приблизно дорівнює 38 млн км^2 , що становить 0,075 площі поверхні Землі. Знайдіть відношення радіусів Місяця і Землі.
- 1188.** Один з найбільших глобусів Землі діаметром 12,7 м був виготовлений у 1889 р. для Паризької всесвітньої виставки. У якому масштабі цей глобус зображав Землю? Яка довжина екватора і меридіана на цьому глобусі?
- 1189.** Приблизно 70,8 % поверхні Землі покрито морською водою. Решту поверхні займають континенти й острови. Яка їх загальна площа, якщо вважати нашу планету ідеальною кулею з діаметром 12 742 км?



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. МЕТОД КООРДИНАТ

Ви вже знаєте, що властивості геометричних фігур можна досліджувати засобами алгебри. Метод, який при цьому застосовують, називають *методом координат*. У § 3 методом координат ви розв'язували такі дві задачі: 1) знаючи геометричні властивості фігури, знаходили її рівняння; 2) знаючи рівняння фігури, характеризували її властивості. На практиці нерідко виникає потреба розв'язати обидві задачі разом — спочатку за деякими властивостями фігури скласти її рівняння, а потім, дослідивши одержане рівняння, встановити нові властивості даної фігури.

Задача 1 Знайдіть довжини сторін рівнобедреного трикутника, вписаного в коло радіусом 5 см, якщо центр цього кола віддалений від основи трикутника на 3 см.

Розв'язання Нехай ABC — даний рівнобедрений трикутник з основою AC (мал. 428), точка O — центр описаного кола. Уведемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок лежав у центрі кола, вісь OY містила висоту, проведену до основи AC трикутника, а вісь OX проходила паралельно цій основі (мал. 429).

Тоді дане коло задає рівняння $x^2 + y^2 = 25$, а вершини трикутника мають координати:

$$A(-x_0; -3), B(0; 5), C(x_0; -3), \text{ де } x_0 > 0.$$

Точка C лежить на даному колі, тому її координати задовольняють його рівняння: $x_0^2 + y^2 = 25$. Звідси одержуємо: $x_0 = 4$, $A(-4; -3)$, $C(4; -3)$.

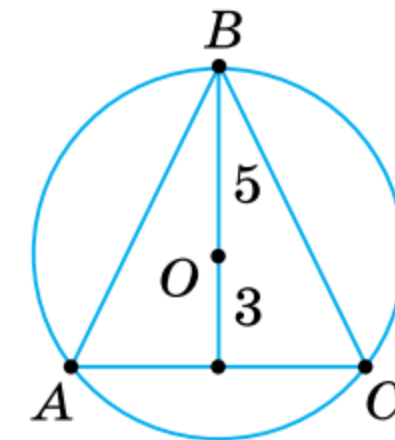
За координатами вершин трикутника знайдемо довжини його сторін:

$$AB = BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5} \text{ (см)}, AC = 8 \text{ см.}$$

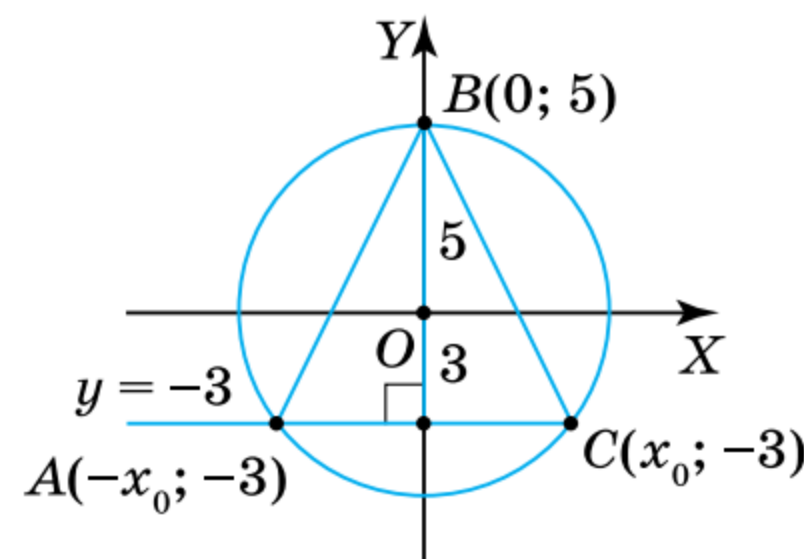


Щоб застосувати метод координат:

- 1) накресліть задану фігуру та введіть прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат й осей абсцис і ординат відносно даної фігури);
- 2) визначте координати точок даної фігури;
- 3) скористайтеся відомими формулами.



Мал. 428



Мал. 429

Застосування методу координат дозволяє спростити доведення властивостей фігури. Розглянемо приклад.

Задача 2 Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

Розв'язання Нехай ABC — даний прямокутний трикутник із прямим кутом C (мал. 430). Позначимо довжини його катетів малими літерами a і b , а середину гіпотенузи — M . Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок містився у вершині C трикутника, а його катети лежали на осях координат (мал. 431). Тоді вершини трикутника матимуть координати: $C(0; 0)$, $B(a; 0)$, $A(0; b)$. Точка M є серединою гіпотенузи AB , тому вона має координати: $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Знайдемо довжини відрізків MC , MA і MB :

$$MC = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MA = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MB = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}.$$

З одержаних рівностей випливає, що $MC = MA = MB$. Отже, точка M — рівновіддалена від вершин трикутника ABC .



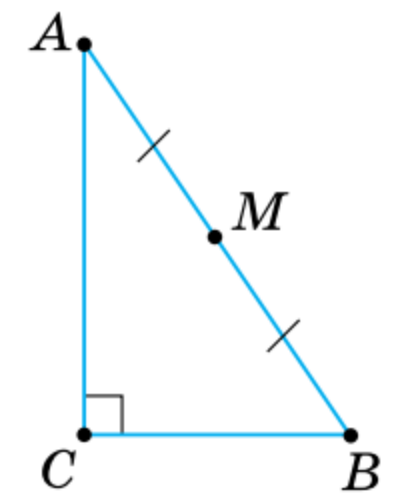
Чи можна в розглянутій задачі одержати простіші вирази для довжин відрізків?

Так, якщо довжини катетів трикутника ABC позначити відповідно $2a$ і $2b$ (мал. 432).

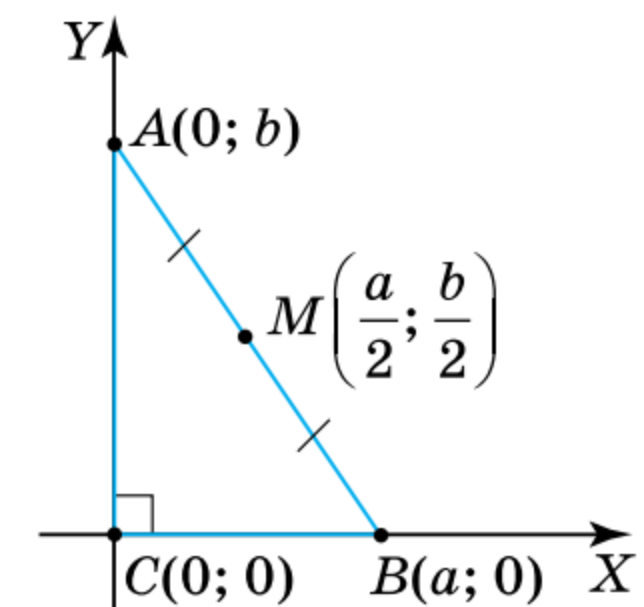


Якщо в розв'язуванні задачі потрібно використати координати середин відрізків, то можна застосувати прийом подвоєння числових значень довжин відрізків.

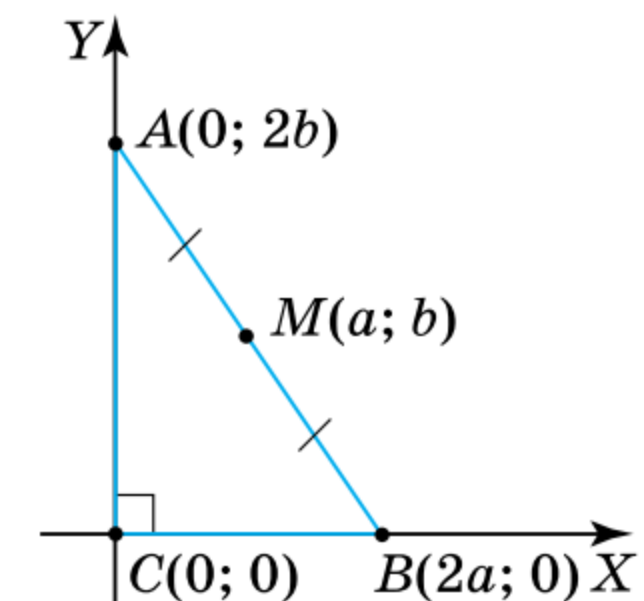
Знаючи координати вершин трикутника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$, можна знайти його площу. Розглянемо формули, які для цього використовують.



Мал. 430



Мал. 431



Мал. 432

У прямокутній декартовій системі координат:

$$S = \left| \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) \right|.$$

У косокутній системі координат з рівнозначними шкалами й кутом φ між осями:

$$S = \left| \frac{\sin \varphi}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) \right|.$$

КОРОТКИЙ ЕКСКУРС В ІСТОРІЮ

Виникнення координат і системи координат має давню історію й пов'язане з астрономією та географією. Необхідність системи координат була зумовлена потребою визначати положення світил на небі й точок на поверхні Землі під час складання календаря, зіркових та географічних карт. На стіні однієї з похоронних камер Стародавнього Єгипту зображені сліди застосування ідеї прямокутних координат у вигляді квадратної сітки (палетки). Давньогрецького вченого Гіппарха (бл. 190–126 рр. до н. е.) вважають основоположником математичної картографії. Учений запропонував оперезати на мапі земну кулю паралелями й меридіанами та ввести географічні координати — широту і довготу, позначивши їх числами.

Розв'яжіть задачі

1190'. Чи правильно, що методом координат досліджують властивості геометричних фігур засобами алгебри?

1191'. Чи правильно, що методом координат розв'язують такі задачі:

- 1) знаючи геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння;
- 2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості;
- 3) спочатку за деякими властивостями фігури складають її рівняння, а потім, дослідивши одержане рівняння, встановлюють нові властивості даної фігури?

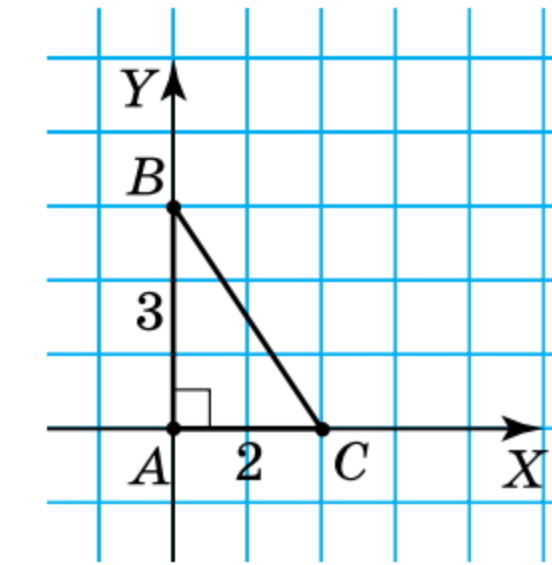
1192'. Чи правильно вказано порядок кроків для застосування методу координат:

- 1) а) визначити координати точок даної фігури;
- б) накреслити задану фігуру;
- в) увести прямокутну декартову систему координат (початок координат та осі абсцис і ординат) відносно даної фігури;
- г) скористатися відомими формулами;
- 2) а) накреслити задану фігуру;
- б) увести прямокутну декартову систему координат (початок координат та осі абсцис і ординат) відносно даної фігури;

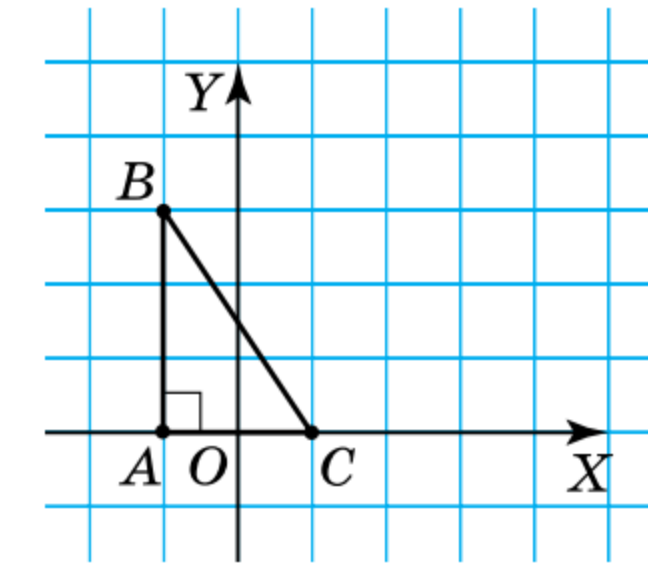
в) визначити координати точок даної фігури;

г) скористатися відомими формулами?

1193°. Відносно прямокутного трикутника ABC з катетами 2 і 3 введено систему координат так, як показано на малюнках 433 і 434. Які координати мають вершини трикутника?



Мал. 433



Мал. 434

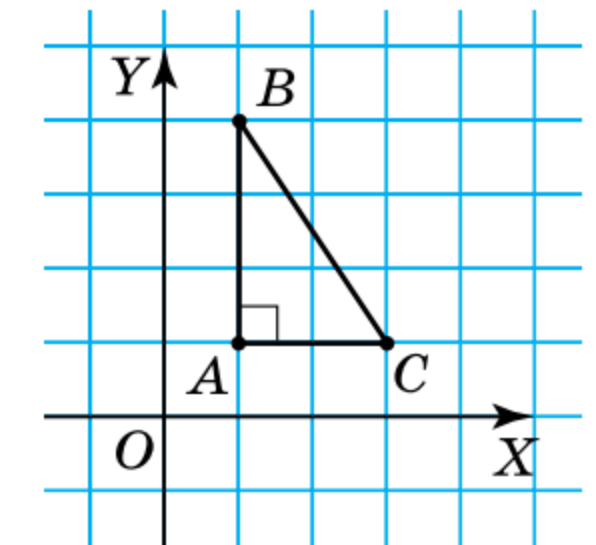
1194°. Які координати мають вершини трикутника ABC з катетами 2 і 3 на малюнку 435?

1195°. Чи правильно визначено координати вершин рівнобедреного трикутника ABC у введеній відносно нього системі координат:

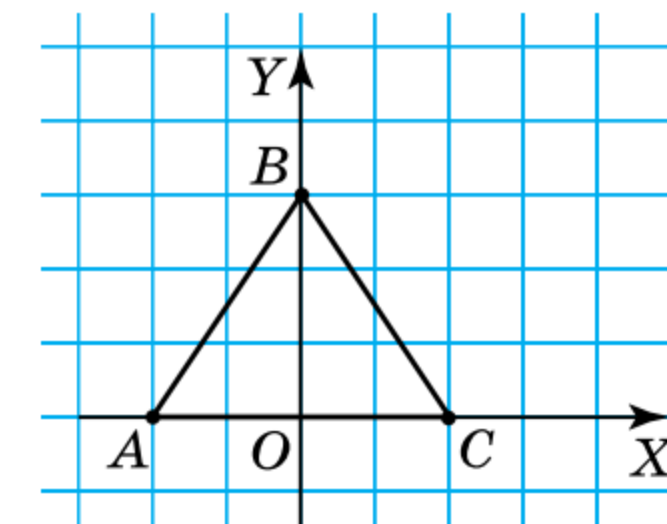
1) $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 436);

2) $A(-2; -1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 437)?

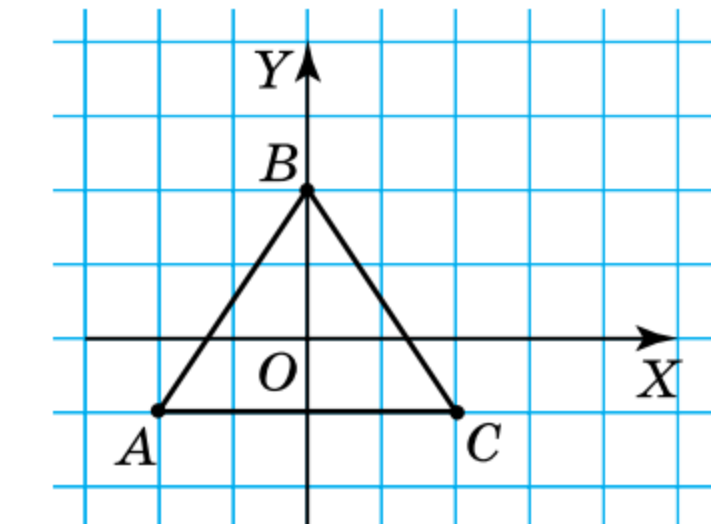
Відповідь поясніть.



Мал. 435



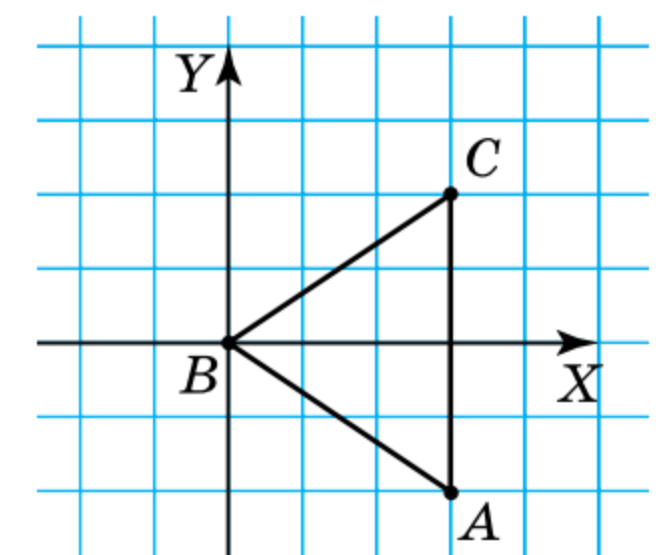
Мал. 436



Мал. 437

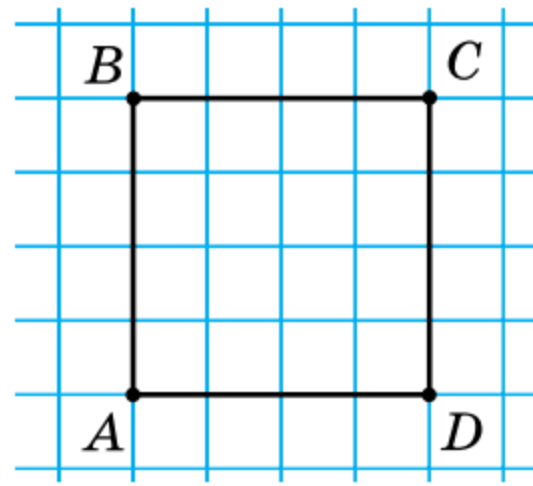
1196°. Чи правильно визначено координати вершин рівнобедреного трикутника ABC у введеній відносно нього системі координат (мал. 438): $A(-2; 3)$, $B(0; 0)$, $C(2; 3)$? Відповідь поясніть.

1197°. На малюнках 439 і 440 зображено чотирикутник $ABCD$. Уведіть систему координат так, щоб у ній вершини чотирикутника мали координати:

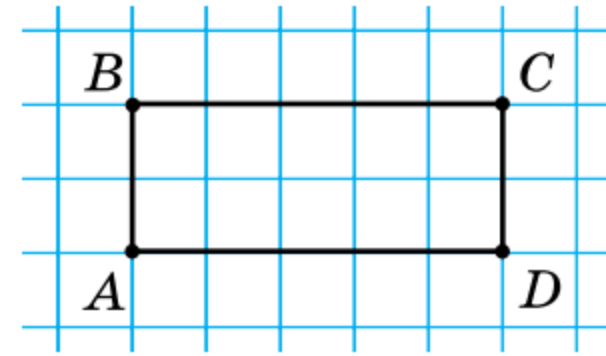


Мал. 438

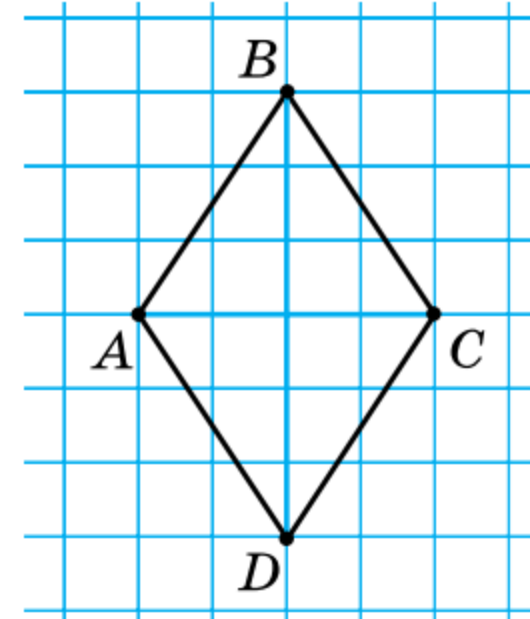
- 1) $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 0)$ (мал. 439);
 2) $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(3; 2)$, $D(3; 0)$ (мал. 440).



Мал. 439



Мал. 440



Мал. 441

- 1198°.** На малюнку 441 зображено чотирикутник $ABCD$. Уведіть систему координат так, щоб у ній вершини чотирикутника мали координати: $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$, $D(-3; 0)$.

- 1199°.** У трикутнику ABC : $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Уведіть прямокутну декартову систему координат так, як указано в таблиці 40, та заповніть її.

Таблиця 40

Початок координат	Довжина одиничного відрізка	Додатна піввісь координат		Координати вершин $\triangle ABC$		
		OX	OY			
		містить катет		A	B	C
точка A	1 см	AB	AC			
точка A	0,5 см	AB	AC			
точка A	2 см	AC	AB			

- 1200°.** Діагоналі квадрата $ABCD$ зі стороною 2 см перетинаються в точці M . Введіть прямокутну декартову систему координат з одиничним відрізком 1 см так, щоб початок координат лежав у вказаній точці, а на додатних півосях OX і OY лежали вказані відрізки:

1) A , AB , AD ;

2) B , BC , AB .

Визначте координати вершин квадрата.

- 1201°.** Діагоналі квадрата $ABCD$ зі стороною 3 см перетинаються в точці P . Введіть прямокутну декартову систему координат з одиничним відрізком 1 см так, щоб початок координат лежав у точці P , а на додатних півосях OX і OY лежали відрізки CP і PD відповідно. Визначте координати вершин квадрата.

- 1202°.** У прямокутному трикутнику ABC з катетами AB і BC знайдіть довжини медіан, якщо:

1) $AB = 3$, $BC = 4$; 2) $AB = 5$, $BC = 12$.

- 1203°.** У прямокутному трикутнику ABC з катетами $AB = 7$ і $BC = 24$ знайдіть довжини медіан.

- 1204°.** У рівнобедреному трикутнику ABC до основи AB проведено висоту CH . Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони, якщо:

1) $AB = 12$, $CH = 4$; 2) $AB = 4$, $CH = 6$.

- 1205°.** У рівнобедреному трикутнику ABC до основи $BC = \frac{16}{3}$ проведено висоту $AH = 6$. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони.

- 1206°.** Знайдіть відстань між серединами протилежних сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:

1) $AC = 6$, $BD = 8$; 2) $AC = 10$, $BD = 24$.

- 1207°.** Діагоналі ромба дорівнюють 14 і 48. Знайдіть відстань між серединами його протилежних сторін.

- 1208.** Визначте координати вершин правильного шестикутника, якщо одна з координатних осей паралельна його стороні, а початок координат міститься:

1) у точці перетину діагоналей шестикутника;

2) у вершині шестикутника.

- 1209.** Якою залежністю пов'язані відповідні координати вершин двох квадратів, що мають спільну вершину в початку координат й одну спільну сторону?

- 1210.** Чи існують подібні трикутники з відповідно пропорційними координатами?

- 1211.** У прямокутному трикутнику ABC на гіпотенузі AB взято точку M так, що $AM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка CM , якщо $AC = 15$ см, $BC = 20$ см.

- 1212.** Точка M є серединою відрізка AB . Доведіть, що для будь-якої точки T площини справджується рівність: $TA^2 + TB^2 = 2TM^2 + 0,5AB^2$.

- 1213.** Відстань між точками A і B дорівнює 4. Знайдіть геометричне місце точок M площини, для яких:

1) $MA^2 + MB^2 = 24$; 2) $MA^2 - MB^2 = 4$.

- 1214.** Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів його сусідніх сторін.

- 1215.** Якщо чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, то для будь-якої точки M площини справджується рівність: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Доведіть.
- 1216.** Точка M лежить усередині квадрата $ABCD$, й відомо, що:
1) $MA = 7$, $MB = 13$, $MC = 17$; 2) $MA = 1$, $MB = \sqrt{5}$, $MC = 3$.
Знайдіть довжину сторони й діагоналі квадрата.
- 1217.** Центр кола радіусом R лежить у вершині прямого кута прямокутного трикутника з катетами a і b . Чи перетинає коло гіпотенузу даного трикутника, якщо:
1) $a = 5$, $b = 12$, $R = 4$; 2) $a = 20$, $b = 15$, $R = 12$?
- 1218*.** Доведіть, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює сумі половини квадрата третьої сторони трикутника та подвоєного квадрата медіани, проведеної до цієї сторони.
- 1219*.** Доведіть, що сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей.
- 1220*.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ.
- 1221*.** Точка A лежить на відстані 6 см від центра O кола радіусом 2 см. На прямій OA знайдіть таку точку M , щоб довжина дотичної, проведеної із цієї точки до кола, дорівнювала відстані між точками M і A .
- 1222*.** Доведіть, що сума квадратів відстаней від усіх вершин квадрата до прямої, що проходить через точку перетину його діагоналей, не залежить від вибору прямої.
- 1223*.** Квадрат описано навколо кола радіусом R . Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершин квадрата дорівнює $12R^2$.
- 1224*.** Навколо правильного трикутника зі стороною a описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершин трикутника дорівнює $2a^2$.
- 1225*.** Знайдіть геометричне місце точок, модуль різниці квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B дорівнює a^2 , де a — заданий відрізок.
- 1226*.** Якщо координати вершин трикутника є парними числами, то число, що виражає його площу, є натуральним числом. Доведіть.
- 1227*.** Якщо координати двох сусідніх вершин квадрата є цілими числами, то координати двох інших його вершин також є цілими числами. Доведіть.

Проявіть компетентність

- 1228.** Якщо середини двох сторін трикутника та їхня спільна вершина лежать у вузлах сітки, то середина третьої сторони також лежить у вузлі сітки. Доведіть.
- 1229.** Якщо дві сусідні вершини квадрата лежать у вузлах сітки, то дві інші його вершини також лежать у вузлах сітки. Доведіть.
- 1230.** Поясніть, як побудувати вершини квадрата у вузлах сітки, не будуючи його сторін. Розгляньте випадки, коли діагоналі квадрата:
1) лежать на лініях сітки;
2) не лежать на лініях сітки.

2. ВЕКТОРНИЙ МЕТОД

Дії додавання векторів і множення вектора на число дозволяють будь-який вектор на площині розкласти за будь-якими двома неколінеарними векторами. Таку впорядковану пару неколінеарних векторів називають *базисом площини*.

Наприклад, у трикутнику ABC (мал. 442) базис можна утворити з векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$. Тоді для вектора, заданого медіаною AM , одержимо розклад:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Якщо базис утворити з векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AM}$, то за цим базисом можна розкласти вектор $\overrightarrow{AB}$. Для цього спочатку розкладемо за базисом вектор $\overrightarrow{CM}$, потім вектор $\overrightarrow{CB}$, а після цього — вектор $\overrightarrow{AB}$. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM},$$

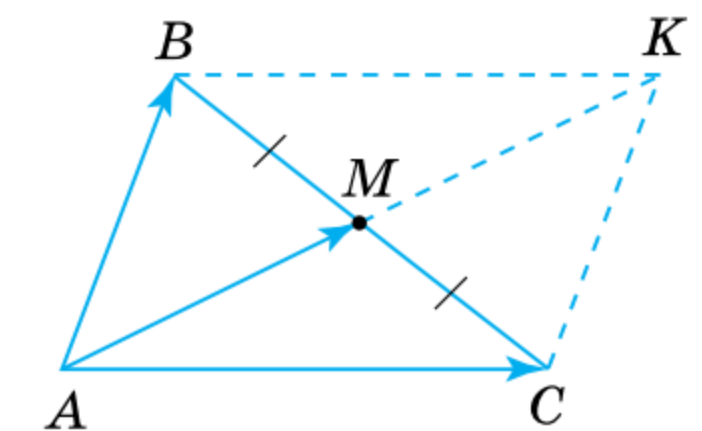
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AM}.$$

Зрозуміло, що розклад вектора $\overrightarrow{AB}$ за базисом $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AM}$ можна одержати й по-іншому. Поміркуйте над цим самостійно.

Векторний метод можна застосовувати для доведення тверджень.

Задача 1 Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна третій стороні й дорівнює її половині.

Розв'язання Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (мал. 443). Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.



Мал. 442

1. Уведемо вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$. Тоді мовою векторів вимогу задачі можна записати так:
 $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$.

2. Уведемо базис $\overline{BC}$ і $\overline{BA}$ та розкладемо за ним вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{BC} - \overline{BA} \quad (\text{з } \triangle ABC), \\ \overline{MN} &= \overline{BN} - \overline{BM} \quad (\text{з } \triangle MBN).\end{aligned}$$

Оскільки точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC , то $\overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$, $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BA}$.

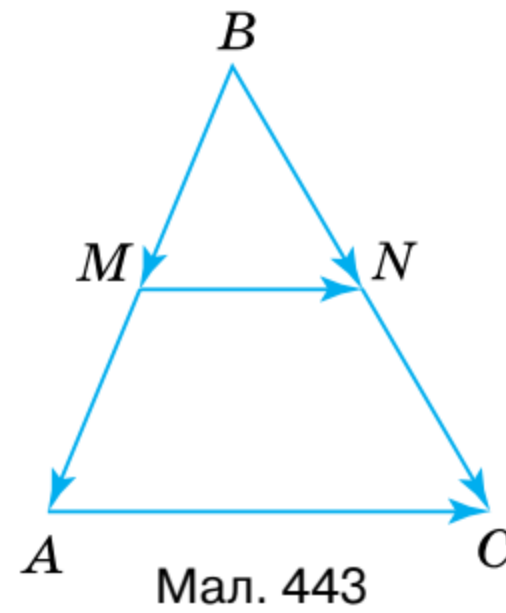
Підставивши одержані векторні рівності в розклад вектора $\overline{MN}$, маємо:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} - \frac{1}{2} \overline{BA} = \frac{1}{2} (\overline{BC} - \overline{BA}). \text{ Отже, } \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

3. З останньої векторної рівності випливає:

1) вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$ — колінеарні, тобто відрізки MN і AC паралельні;

$$2) |\overline{MN}| = \frac{1}{2} |\overline{AC}|, \text{ тобто } MN = \frac{1}{2} AC.$$



Мал. 443

 1. Щоб застосувати векторний метод до розв'язування задач, треба виконати три кроки:

- 1) сформулювати задачу мовою векторів, для чого спочатку ввести базис і допоміжні вектори, а потім скласти векторну рівність;
- 2) перетворити векторну рівність, скориставшись законами дій над векторами й відомими векторними рівностями;
- 3) описати знайдений результат мовою геометрії.

2. Встановивши колінеарність векторів та пропорційність їхніх довжин, можна довести, що:

- 1) прямі або відрізки паралельні;
- 2) деяка точка є серединою відрізка або ділить його в певному відношенні;
- 3) три точки лежать на одній прямій.

3. Скориставшись скалярним добутком векторів, можна знайти:

- 1) довжину відрізка (як квадратний корінь зі скалярного квадрата відповідного вектора);
- 2) градусну міру кута (за формулою косинуса кута та тригонометричними таблицями).

Задача 2 Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — даний паралелограм (мал. 444). Введемо базис $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$, а також вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$. Тоді мовою векторів вимогу задачі можна записати так:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2.$$

Розкладемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ за базисом $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ та знайдемо їхні скалярні квадрати. Тоді одержимо:

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{AB} + \overline{AD}, \\ \overline{AC}^2 &= (\overline{AB} + \overline{AD})^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2, \\ \overline{BD} &= \overline{AB} - \overline{AD}, \\ \overline{BD}^2 &= (\overline{AB} - \overline{AD})^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2.\end{aligned}$$

Додавши почленно рівності, що містять скалярні квадрати шуканих векторів, одержимо:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2.$$

Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, то з останньої рівності маємо:

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2.$$

КОРОТКИЙ ЕКСКУРС В ІСТОРІЮ

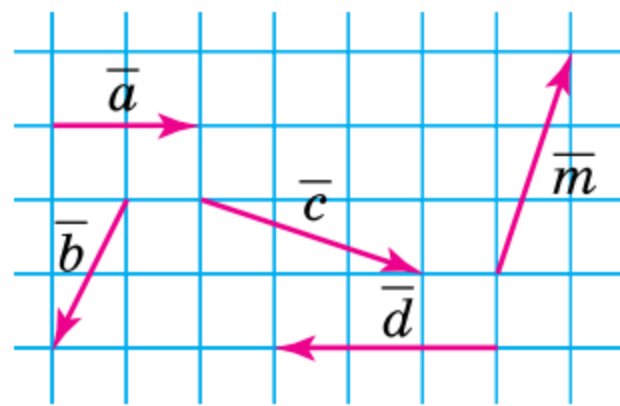
У 1918 р. побачила світ книга «Простір, час, матерія» видатного німецького математика **Германа Вейля** (1885–1955). Учений запропонував покласти в основу геометрії лише два поняття — «точка» і «вектор» — та чотири операції над ними. Ці операції задаються так: 1) будь-якій парі точок A і B ставиться у відповідність деякий вектор $\overline{AB}$; 2) будь-яким векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ставиться у відповідність деякий вектор $\overline{a} + \overline{b}$ — сума векторів; 3) будь-якому вектору $\overline{a}$ і дійсному числу k ставиться у відповідність деякий вектор $k\overline{a}$ — добуток вектора на число; 4) будь-яким векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ставиться у відповідність деяке число $\overline{ab}$ — скалярний добуток векторів. Відомі вам властивості дій над векторами прийняті як



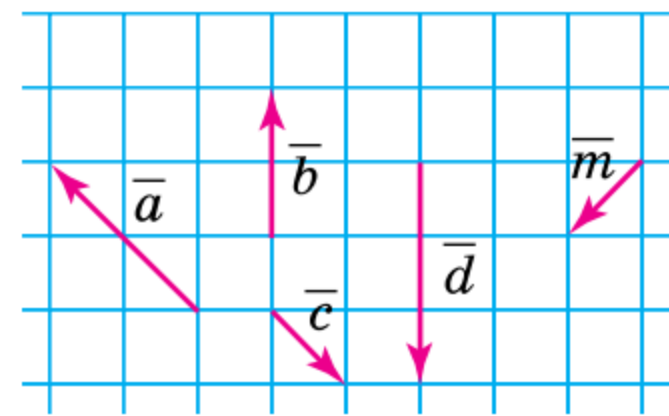
аксіоми. Але як теореми доводяться твердження, котрі ви вивчали як аксіоми в шкільному курсі геометрії. Наприклад, аксіома про те, що через дві точки можна провести пряму і тільки одну. Побудована автором теорія широко застосовується в сучасній фізиці, кристалографії, хімії, економіці та інших науках. За роботи з геометрії та спеціального розділу алгебри — теорії груп — Г. Вейль у 1927 р. здобув Міжнародну премію імені Лобачевського.

Розв'яжіть задачі

1231°. Назвіть пари векторів (мал. 445, 446), які можна обрати за базис площини.



Мал. 445



Мал. 446

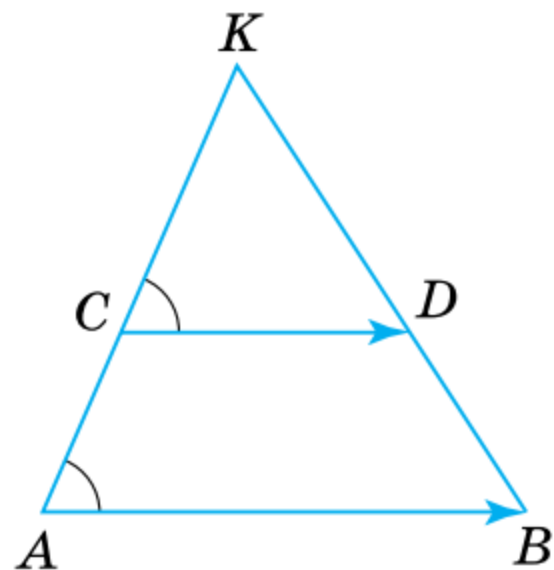
1232°. Чи утворюють базис вектори, які:

- 1) колінеарні;
- 2) рівні;
- 3) неколінеарні?

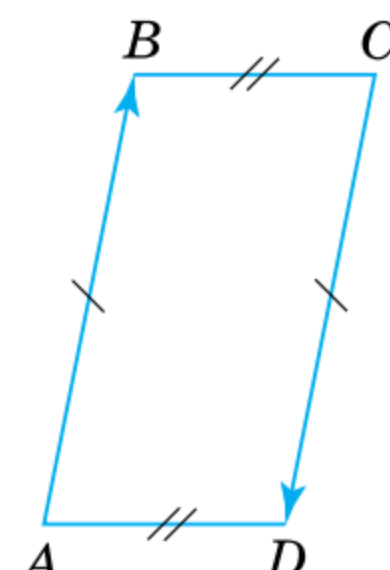
1233°. Яка з умов свідчить про паралельність прямих AB і MP :

- 1) $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$;
- 2) $\overline{AB} \cdot \overline{MP} = 0$;
- 3) $\overline{AB} = \overline{MP}$;
- 4) $\overline{AB} = \lambda \overline{MP}$;
- 5) $\overline{AM} = \overline{BP}$?

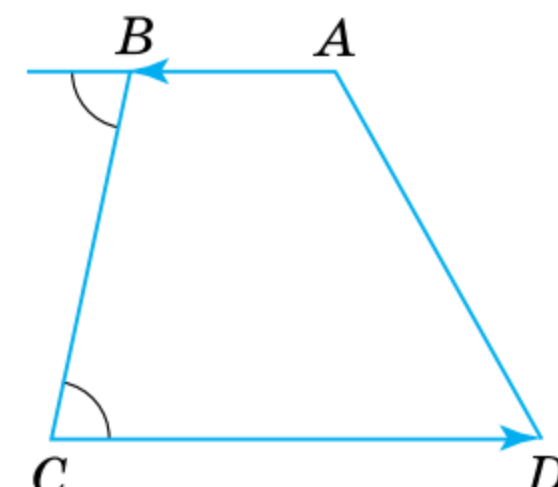
1234°. Чому вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ на малюнках 447–449 не можна вважати базисом площини?



Мал. 447



Мал. 448



Мал. 449

1235°. Чи правильно, що точки A , B і C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\overline{AB} = k\overline{BC}$? Відповідь обґрунтуйте.

1236°. Сформулюйте мовою векторів твердження:

- 1) прямі AB і MP — паралельні;
- 2) прямі AB і MP — перпендикулярні;
- 3) точки A , B і C лежать на одній прямій;
- 4) відрізки AB і MP — рівні;
- 5) точка M — середина відрізка AB ;
- 6) AM — медіана трикутника ABC ;
- 7) MN — середня лінія трикутника ABC , що паралельна стороні AC ;
- 8) з медіан трикутника можна скласти трикутник;
- 9) $ABCD$ — паралелограм;
- 10) $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC .

1237°. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в серединах сторін трапеції — паралелограм.

1238°. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в серединах сторін довільного чотирикутника — паралелограм.

1239°. Доведіть, що діагоналі квадрата перпендикулярні.

1240°. Доведіть, що діагоналі прямокутника рівні.

1241°. Доведіть теорему Піфагора.

1242°. Трикутник ABC переходить у трикутник $AB'C'$ при перетворенні подібності з коефіцієнтом $k = 3$. Доведіть, що $BC \parallel B'C'$.

1243. Доведіть, що вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні.

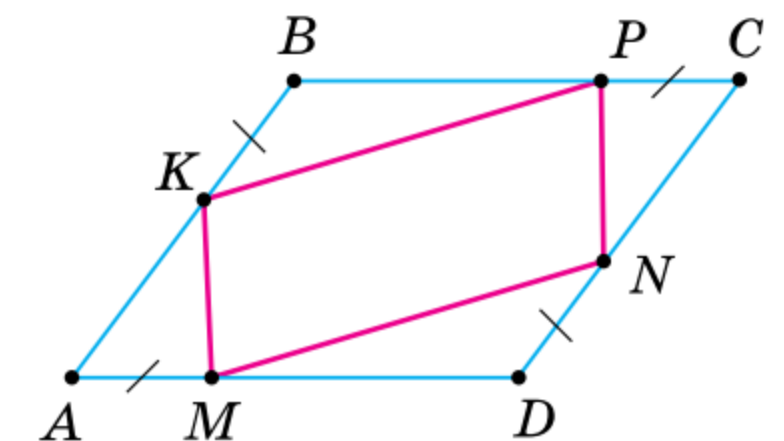
1244. Координати суми двох векторів дорівнюють сумам відповідних координат даних векторів. Доведіть.

1245. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони AD , а N — середина сторони BC . Доведіть, що $BNDM$ — паралелограм.

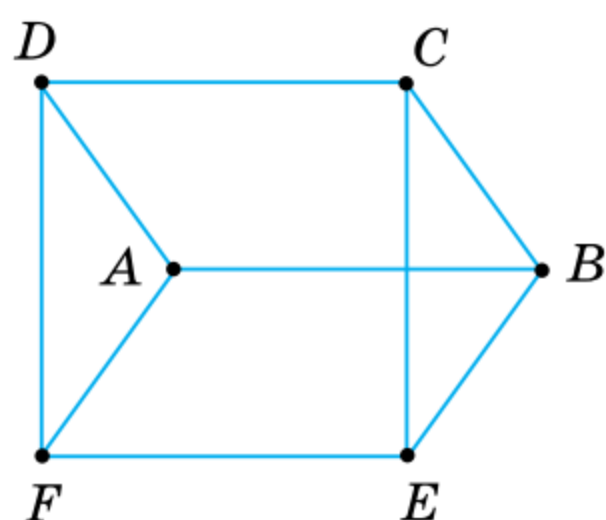
1246. На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено, як показано на малюнку 450, рівні відрізки AM , DN , CP , BK . Доведіть, що $MNPК$ — паралелограм.

1247. Поза паралелограмом $ABCD$ з гострим кутом A побудовано рівносторонні трикутники ABE і CDF . Доведіть, що $AECF$ — паралелограм.

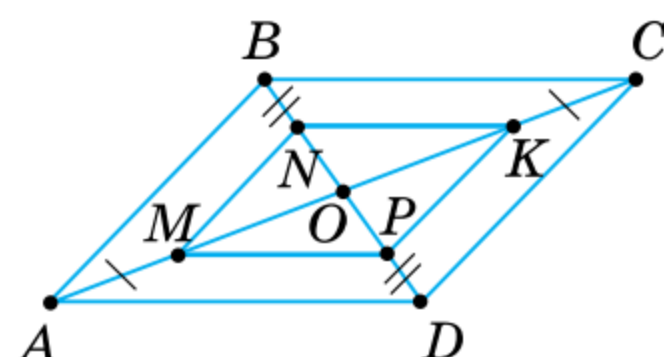
1248. $ABCD$ і $ABEF$ — паралелограми (мал. 451). Доведіть, що $DF = CE$ і $DF \parallel CE$.



Мал. 450



Мал. 451



Мал. 452

- 1249.** $ABCD$ — паралелограм (мал. 452), $AM = KC$, $BN = PD$. Доведіть, що $MP = NK$ і $MP \parallel NK$.
- 1250.** Медіану AO трикутника ABC продовжено на відрізок $OD = AO$. Точку D сполучено з вершинами B і C трикутника. Доведіть, що $CD = AB$ і $CD \parallel AB$.
- 1251.** Доведіть, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.
- 1252.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх півсумі.
- 1253.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.
- 1254.** Доведіть тотожність $(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2)$. З'ясуйте її геометричний зміст.
- 1255*.** Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні між собою.
- 1256*.** Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ділить кожную медіану у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини трикутника.
- 1257*.** Доведіть, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.
- 1258*.** Знайдіть залежність між сторонами трикутника ABC , якщо його медіани AA_1 і BB_1 перпендикулярні.
- 1259*.** Правильний трикутник ABC зі стороною a вписано в коло. Точка M — деяка точка кола. Доведіть, що сума $MA^2 + MB^2 + MC^2$ не залежить від вибору точки M .
- 1260*.** Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC , R — радіус описаного навколо нього кола.

1261*. Точки A, B, C, D, N, M — середини сторін опуклого шестикутника $KFPHLG$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого паралельні й рівні відрізкам AB, CD, MN .

1262*. На стороні AD і діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки B, M і N лежать на одній прямій.

1263*. Доведіть нерівність $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} \leq \sqrt{12}$ за умови, що $a + b = 1$.

1264*. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{x}$.

Проявіть компетентність

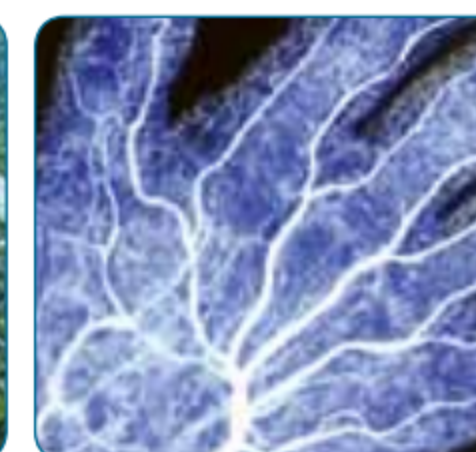
- 1265.** Тіло, маса якого дорівнює m , сповзає під дією сили тяжіння з похилої площини. Знайдіть модуль складової сили тяжіння, яка напрямлена вздовж похилої площини, якщо кут нахилу площини дорівнює β .
- 1266.** Малюк тягне санки із силою 10 Н на відстань 20 м . Кут між напрямом сили і напрямом переміщення дорівнює 45° . Яку роботу виконує малюк, перетягуючи санки.
- 1267.** Троє учнів, намагаючись зрушити з місця вантаж, тягнуть його кожний у свою сторону з однаковою силою 100 Н . Які кути між напрямками їхніх сил, якщо вантаж не зрушив з місця? Як треба змінити ці напрями, щоб зрушити з місця вантаж?
- 1268.** Населені пункти A і B розташовані на різних берегах річки, які можна вважати паралельними. У якому місці слід будувати міст MN через річку, щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим?

3. ФРАКТАЛИ

У природі є об'єкти, для яких характерний особливий вид подібності — самоподібність. Самоподібні структури називають **фракталами**. Детальніше з ними можна ознайомитися, перейшовши за посиланням.



qr.orioncentr.com.ua/3RFpY





ПРОЕКТИ

ПРОЕКТ 1

«Застосування алгоритмів розв'язування трикутників на практиці»

Актуальність проекту. Трикутники трапляються всюди: у будівництві, архітектурі, навігації, інженерії, комп'ютерній графіці. Для розв'язування практичних задач часто потрібно знаходити невідомі сторони чи кути трикутника, використовуючи певні алгоритми. Дослідження цих алгоритмів і прикладів їх застосування допомагає зрозуміти зв'язок між геометрією та реальним життям.

1. Мета проекту

Дослідити та продемонструвати можливості застосування алгоритмів розв'язування трикутників у практичних ситуаціях, пов'язаних з вимірюванням відстаней та кутів у навколишньому середовищі.

2. Завдання проекту

1. Повторити та систематизувати знання про види трикутників, теорему синусів, теорему косинусів, формули площі трикутників.
2. Скласти алгоритми розв'язування трикутників за різними вихідними даними (за трьома сторонами, за двома сторонами й кутом між ними, за стороною і прилеглими до неї кутами, за двома сторонами і кутом, прилеглим до однієї з них).
3. Обрати об'єкти для вимірювань (наприклад, на шкільному подвір'ї, у парку, біля річки), провести необхідні вимірювання довжин сторін та кутів, оцінити похибку вимірювань та виконати необхідні обчислення за складеними алгоритмами.
4. Проаналізувати отримані результати, зробити висновки про їх ефективність та точність.
5. Підготувати презентацію про результати дослідження.

3. Обладнання та матеріали

1. Рулетка (завдовжки 20–50 м) або мірна стрічка.
2. Прилади для вимірювання кутів (теодоліт, смартфон з відповідними додатками, компас для вимірювання горизонтальних кутів як різниці між двома азимутами, гірський компас, яким можна виміряти кут підйому, або самостійно виготовлений простий вимірювач горизонтальних кутів та кутів підйому на основі транспортира, аркуша картону та нитки з тягарцем).
3. Калькулятор (для обчислень значень тригонометричних функцій).
4. Олівець, блокнот (для записів).
5. Смартфон (для фіксації етапів роботи).

4. Приклади практичних завдань для дослідження

Завдання 1. Визначення висоти об'єкта, основа якого доступна (наприклад, висоти шкільної будівлі або дерева).

Завдання 2. Визначення висоти об'єкта, основа якого недоступна.

Мета завдань: визначити висоту об'єкта, не вимірюючи її безпосередньо.

Завдання 3. Визначення відстані до недоступного пункту.

Мета завдання: визначити відстань до недоступного пункту (наприклад, до пункту на протилежному березі річки).

Завдання 4. Визначення відстані між двома недоступними об'єктами (якщо безпосереднє вимірювання неможливе).

Мета завдання: знайти відстань між двома об'єктами, до яких неможливо підійти (наприклад, між двома деревами на різних берегах річки).

5. Етапи роботи над проектом

Етапи	Зміст роботи
1. Підготовчий	Повторення теоретичного матеріалу. Складання алгоритмів розв'язування трикутників у вигляді схем-пам'яток. Вибір приладів для вимірювання відстаней та кутів (у разі потреби — виготовлення простого вимірювача кутів). Вибір об'єктів для дослідження та складання плану роботи.
2. Практичний	Проведення вимірювань на місцевості. Фіксація результатів (записи, фотографії, ескізи). Виконання обчислень за отриманими даними.
3. Аналітичний	Обробка даних, аналіз похибок. Підготовка презентації. Формулювання висновків.
4. Звітний	Захист проекту перед класом. Обговорення результатів.

6. Критерії оцінювання проекту

- Глибина та якість теоретичної підготовки.
- Креативність та складність обраних практичних завдань.
- Точність та акуратність проведених вимірювань і обчислень.
- Аналіз отриманих результатів та похибок.
- Логічність виступу на захисті.
- Робота в команді.

За виконання проекту учень / учениця може отримати 1–12 балів.

ПРОЕКТ 2

«Коло і круг як засоби розв’язування задач практичного змісту»

Актуальність проекту. Коло і круг — це не лише абстрактні геометричні поняття, а й важливі інструменти для розв’язування реальних проблем. Унікальні властивості цих фігур — рівновіддаленість точок кола від його центра, максимальна площа при заданому периметрі, симетрія — роблять їх незамінними в архітектурі, будівництві, техніці та навіть у мистецтві. Тому властивості кола і круга є засобами розв’язування широкого кола практичних задач.

1. Мета проекту

Дослідити та продемонструвати, як властивості кола і круга можуть бути використані як ефективний засіб розв’язування прикладних задач з різних сфер діяльності.

2. Завдання проекту

1. Систематизувати знання про основні елементи кола і круга, властивості та формули, пов’язані з колом і кругом.
2. Дібрати, скласти та класифікувати практичні задачі, де коло і круг є засобами для знаходження шуканих величин (довжини, висоти, площі, об’єму тощо).
3. Провести необхідні вимірювання, розрахунки, обчислення, що ілюструють процес розв’язування задач.
4. З’ясувати, які саме властивості кола і круга роблять їх найбільш ефективним засобом у кожній конкретній задачі.
5. Зробити висновки про ефективність використання цих фігур у практичній діяльності.
6. Підготувати презентацію про результати дослідження.

3. Обладнання та матеріали

1. Лінійка, рулетка, циркуль, транспортир (для перевірки рівності кутів у колі).
2. Зошит (для запису вимірювань та розрахунків).
3. Калькулятор (для обчислень).
4. Комп’ютер або смартфон (для фіксації результатів).
5. Об’єкти круглої форми (тарілка, кришка, колесо, клумба тощо).

4. Приклади групування практичних завдань за сферами діяльності, де використовуються коло і круг

1. **Будівництво та архітектура** (розрахунок матеріалів для круглих басейнів, фонтанів, довжини паркану для круглих ділянок).
2. **Транспорт** (розрахунок довжини шляху за кількістю обертів колеса, визначення діаметра колеса за пройденою відстанню).

3. **Дизайн та виробництво** (розрахунок вартості матеріалу для круглих виробів, визначення площі фарбування круглих поверхонь).

4. **Географія та астрономія** (розрахунок довжини паралелей та меридіанів, визначення відстаней між містами за колом великого круга).

5. **Побут та життєдіяльність** (визначення розмірів круглого столу для певної кількості людей, розмірів круглих дзеркал, розрахунок площі скатертин круглої форми, кількості матеріалу для виробів круглої форми).

5. Етапи роботи над проектом

Етапи	Зміст роботи
1. Підготовчий	Складання плану роботи, розподіл обов’язків (у разі групового проекту). Вибір об’єктів для дослідження з групуванням практичних завдань за сферами діяльності (пункт 4 проекту). Знайомство з літературою, інтернет-ресурсами.
2. Дослідницький	<i>Теоретичний блок.</i> Огляд властивостей кола і круга, які роблять їх корисними на практиці. <i>Практичний блок.</i> Пошук та групування задач практичного змісту, де коло і круг є засобами їх розв’язування. Розподіл серед учнів класу груп практичних завдань. Проведення, за потреби, вимірювань на місцевості. Фіксація результатів (записи, фотографії, ескізи). Виконання обчислень за отриманими даними.
3. Аналітичний	Обробка отриманих даних, аналіз результатів розв’язування задач. Обговорення можливих похибок вимірювань та обчислень. Підготовка презентації. Формулювання висновків.
4. Звітно-презентаційний	Захист проекту перед класом. Обговорення результатів.

6. Критерії оцінювання проекту

Глибина та якість теоретичної підготовки.
Різноманітність та практична значущість дібраних задач.
Точність та коректність розрахунків та обґрунтованість висновків.
Логіка та переконливість виступу на захисті.
Робота в команді.

За виконання проекту учень / учениця може отримати 1–12 балів.

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ СИНУСІВ І КОСИНУСІВ

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°
α	$\cos \beta$	$\sin \beta$	β

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ТАНГЕНСІВ

α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	53°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	589	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801



ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

РОЗДІЛ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО У 8 КЛАСІ

Чотирикутники

1. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 2. 1) 36° , 72° , 108° , 144° ; 2) 40° , 60° , 120° , 140° . 3. 135° , 45° , 135° , 45° . 4. *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралельності прямих. 5. 1) Ні; 2) так. 6. *Вказівка*: доведіть, що всі кути даного паралелограма — прямі. 7. 30° , 150° , 30° , 150° . 8. *Вказівка*: скористайтесь тим, що діагоналі ромба перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл. 9. *Вказівка*: обчисліть кути ромба. 10. 1) 28 см; 2) 56 см. 11. 1) 2 см; 2) 38 мм. 12. 1) 540° ; 2) 1260° . 13. 1) 2 см^2 ; 2) $4,5 \text{ см}^2$. 14. 15 см. 15. 1) 96 см^2 ; 2) $2,4 \text{ дм}^2$. 16. 0,25. 17. 1) 39 см^2 ; 2) 34 см^2 . 18. 1) 4 см; 2) 5 см. 19. 45° . 20. *Вказівка*: треба провісити пряму, яка перпендикулярна до середньої лінії трапеції і проходить через її середину.

Подібність трикутників

21. 1) 3 см; 2) 3,75 см. 22. Так. 23. *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 24. 12 см, 36 см. 25. 30 см, 45 см. 26. 27 см. 27. 1) 4 см; 2) 2 см. 28. 4,8 см. 29. 1) 18 см, 24 см, 36 см; 2) 6 см, 6 см, 9 см. 30. 22,5 см, 37,5 см.

Розв'язування прямокутних трикутників

31. 1) 5 см; 2) 8 м. 32. 12 см. 33. 1) 1,5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. 34. 1) 5 см; 2) 5 см; 3) 24 см. 35. 1) 10 см; 2) 25 см. 36. 1) 2; 2) $\sqrt{2}-1$. 37. 1) 2 см; 2) 4 см. 38. 2° . 39. $\approx 26^\circ 36'$. 40. 90° .

РОЗДІЛ 2. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

§ 1. Декартові координати на площині

41. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. 42. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. 43. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 44. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 45. Мал. 14: $A(3; 1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; 2)$, $D(-2; -1)$, $E(2; -2)$; Мал. 15: $A(3; -1)$, $B(2; -3)$, $C(-1; -2)$, $D(-2; 1)$, $E(2; 2)$. 46. Мал. 16: $A(-3; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(1; 2)$, $D(2; -1)$, $E(-2; -2)$. 50. Точка A — II чв., точка B — IV чв., точка C — I чв., точка D — III чв., точка E — II чв. 51. Точка F — I чв., точка K — IV чв., точка L — III чв. 52. 1) 5; 2) 17; 3) $\sqrt{145}$. 53. $5\sqrt{5}$. 54. 1) $d = \sqrt{26}$, $R = \frac{\sqrt{26}}{2}$; 2) $R = 5$, $d = 10$. 55. $R = 2,5$, $d = 5$. 56. 1) $AB = 2$, $BC = 3\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$; 2) $AB = 25$, $BC = 11$, $AC = 30$. 57. $KL = 2\sqrt{2}$, $LM = 4$, $KM = 2\sqrt{2}$. 58. $A(1; 1)$, $B(5; 1)$, $M(3; 1)$ (мал. 17); $A(2; 3)$, $B(2; -1)$, $M(2; 1)$ (мал. 18). 59. $A(-1; -1)$, $B(3; 1)$, $M(1; 0)$ (мал. 19). 60. 1) (1; 0); 2) (3,5; 2,5). 61. (8; 12). 62. 1) (5; 7); 2) (-3; -4). 63. (12; 13). 64. 1) $B(-5; -6)$; 2) $O(0; 0)$; 3) $A(-15; 19)$;

4) $O(3,5; -1)$; 5) $B(-11; -7)$; 6) $A(-3; 4)$. 65. 1) (1,5; 4,5), (4,5; 1,5), (0; 0), $BM = 6\sqrt{2}$; 2) (2,5; -1,5), (1; -1), (0,5; -2,5), $BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 66. (0,5; 1,5), (0,5; -1,5), (2; 0), $OM = 3$. 67. 1) (-0,5; 0,5); 2) (-2; 10). 68. (1,5; -0,5). 69. 1) (-2; -1); 2) (2; 1). 70. (2; -1). 71. 1) (3; 1) і (2; -1) або (-1; 3) і (-2; 1). 72. 1) $AB = BC = 3\sqrt{10}$; 2) $AB = AC = \sqrt{10}$. 73. $MP = MT = \sqrt{13}$. 74. *Вказівка*: скористайтесь теоремою Піфагора. 75. *Вказівка*: скористайтесь теоремою Піфагора. 76. 1) 2; 2) -3 або 3. 77. 4. 78. 1) (4; 0) і (0; 4); 2) (0; 0). 79. 1) 10, 10, 12; 2) $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 6. 80. 1) Може, в точках D і M ; 2) може, в точці D . 81. 1) 50 кв. од.; 2) 18 кв. од. 82. 1) 34 кв. од.; 2) 84,5 кв. од. 83. 1) $P(-4,5; 0)$, $Q(-4; -2)$, $T(-3,5; -4)$; 2) $P(3; 0,5)$, $Q(5; -2)$, $T(7; -4,5)$. 84. 1) 3,5; 5; $\frac{\sqrt{37}}{2}$; 2) 25, 17, $\sqrt{82}$. 85. *Вказівка*: скористайтесь властивістю діагоналей паралелограма. 86. 1) $O(-1,5; -0,5)$, $D(-6; -2)$; 2) $O(-2; 10)$, $C(-2; 16)$. 87. 1) $D(10; 1)$; 2) $D(2; -1)$. 88. 1) (9; 5); 2) (2; -3). 89. 1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 90. 1) (3,5; 1); 2) (-1,5; 2,5). 91. 1) 135° ; 2) 45° . 92. *Вказівка*: скористайтесь формулами координат середини відрізка. 93. 1) Ні; 2) так. 94. *Вказівка*: скористайтесь властивістю паралелограма. 95. Так. 96. 1) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 1 клітинка, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 1 клітинка та 2 клітинки; 2) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 2 клітинки, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 2 клітинки та 4 клітинки. 97. На $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ м. 98. Не завжди. 99. Не завжди.

§ 2. Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° .

Основні тотожності

101. 1) Ні, так, так; 2) так, ні, так. 102. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 103. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 104. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 105. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. 106. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так; 6) ні. 107. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. 108. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. 109. 2) $\angle BOA = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle DOA = \gamma$; 3) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$, $\sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \gamma = -1$. 110. 2) $\angle KOA = \alpha$, $\angle LOA = \beta$; 3) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$. 111. 2) а) 0, 1, 0; б) 0, 0. 112. 2) а) 1, 0, -1. 114. «+», «+», «+». 115. «+», «-», «-». 117. 1) Тупим; 2) гострим; 3) тупим. 118. 1) Гострим; 2) тупим. 119. 1) 1; 2) 5; 3) 6. 120. 0. 121. 1) 0; 2) 1; 3) 0. 122. 1) 0; 2) -1 або 1. 123. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) -1; 6) -1; 7) -1; 8) -1. 124. 1) 1; 2) -1. 125. 1) 2; 2) $2\cos^2 \alpha$; 3) $2\sin^2 \alpha$; 4) $-2\sin^2 \alpha$; 5) $\cos^2 \alpha$; 6) $\sin^2 \alpha$; 7) $-\cos^2 \alpha$; 8) $-\sin^2 \alpha$; 9) $-\operatorname{tg}^2 \alpha$; 10) $-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$. 126. 1) 0; 2) $2\sin^2 \alpha$; 3) $-\cos^2 \alpha$; 4) $-\sin^2 \alpha$. 127. 1) $\sin \alpha$; 2) $-\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\sin \alpha$; 5) 0; 6) $2\cos \alpha$. 128. 1) $-\cos \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) 0.

129. $\sin 70^\circ$, $\sin 55^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\sin 137^\circ$, $\sin 89^\circ$, $\sin 88^\circ$, $\sin 87^\circ$. 130. $\sin 89^\circ$, $\sin 88^\circ$, $\sin 87^\circ$. 131. $-\cos 75^\circ$, $-\cos 60^\circ$, $-\cos 58^\circ$, $-\cos 35^\circ$, $-\cos 20^\circ$. 132. $-\cos 87^\circ$, $-\cos 86^\circ$, $-\cos 86^\circ$. 133. 1) $\sin \alpha$; 2) $-\sin \alpha$; 3) $2\sin \alpha$. 134. 0. 135. 1) Синус ні, косинус так; 2) так; 3) ні. 136. 1) Так; 2) так; 3) так. 137. *Вказівка*: розгляньте різновиди трикутників за їхніми кутами. 138. *Вказівка*: скористайтесь властивістю сторін і кутів трикутника. 139. 1) «+»; 2) «+». 140. «+». 141. 1) Гострий; 2) тупий. 142. Тупий. 143. 1) $1 \leq \sin \alpha + 1 \leq 2$; 2) $-0,5 \leq \cos \alpha + 0,5 \leq 1,5$. 144. $0,2 \leq \sin \alpha + 0,2 \leq 1,2$. 145. 1) «-»; 2) «-»; 3) «+». 146. 1) «-»; 2) «-». 147. «+». 148. 1) -3; 2) 32. 149. 16. 150. 1) 0; 2) не існує; 3) -0,75. 153. Якщо $\alpha = 90^\circ$. 154. 1) $\cos^2 \alpha$; 2) $\sin^2 \alpha$; 3) $\sin^3 \alpha$; 4) $\sin^2 \alpha$. 155. 1) 1; 2) $\sin^2 \alpha$. 158. 1) Ні; 2) так. 159. Так. 160. 1) 2; 2) 10; 3) 5. 161. 1) $\cos \alpha = 0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$; 2) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$; 3) $\cos \alpha = 0,6$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. 162. 1) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$; 2) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$; 3) $\sin \alpha = 0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$. 163. 1) $\sin \alpha = 0,6$, $\cos \alpha = 0,8$; 2) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$; 3) $\sin \alpha = \frac{11}{61}$, $\cos \alpha = \frac{60}{61}$. 164. 1) 3; 2) 2; 3) 1. 165. 1) $\frac{2\sin \alpha}{1+\sin \alpha}$; 2) $2\sin \alpha$; 3) $\cos \alpha + \sin \alpha$. 166. 1. 169. *Вказівка*: розгляньте гострий і тупий кути. 170. Так. Наприклад: 1) 45° ; 2) 135° . 171. *Вказівка*: використайте рівність прямокутних трикутників. 172. *Вказівка*: скористайтесь одиничним півколом та властивостями синуса і косинуса того самого кута. 173. $AC = \cos \alpha$, $BC = \sin \alpha$, $AD = \cos^2 \alpha$, $BD = \sin^2 \alpha$, $CD = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. 174. 1) $\cos \alpha - \sin \alpha$; 2) 1; 3) $0,5 \cos^2 \alpha$; 4) 2. 175. 1) 2; 2) 3; 3) -1. 176. 1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{3}{7}$. 177. $\frac{m^2-1}{2}$. 178. 1) 1; 2) 0; 3) 0. 180. 120° . 181. $\approx 4,8$ км.

§ 3. Поняття рівняння фігури. Рівняння кола і прямої

182. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 183. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 184. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. 185. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 186. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 187. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 188. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 189. $C(0; 0)$, $R = 2$ (мал. 44); $C(1; 0)$, $R = 2$ (мал. 45). 190. $C(1; 2)$, $R = 2$ (мал. 46). 193. 1) $C(2; 1)$, $R = 4$; 2) $C(1; 3)$, $R = \sqrt{3}$; 3) $C(0; 3)$, $R = \sqrt{2}$; 4) $C(-1; 0)$, $R = 7$. 194. 1) $C(-3; 4)$, $R = \sqrt{5}$; 2) $C(-4; 1)$, $R = 5$. 195. 1) Ні; 2) точка A — так, точки B , C , D — ні; 3) ні. 196. Точка T — так, точка O — ні. 197. 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$. 198. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$. 199. 1) $x^2 + (y+1)^2 = 25$; 2) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 3) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 4) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 32$; 5) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 32$. 200. 1) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 18$; 2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 18$. 201. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 18$. 202. 1) Гострий; 2) тупий; 3) тупий; 4) гострий. 203. 1) Тупий; 2) гострий. 204. 1) У I і III координатних чвертях; 2) у II і IV координатних чвертях; 3) у II і IV координатних чвертях; 4) у I і III координатних чвертях. 205. 1) У II і IV координатних чвертях; 2) у I і III координатних чвертях. 206. 1) $k = 1$; 2) $k = -2$; 3) $k = -\sqrt{3}$; 4) $k = \sqrt{2}$. 207. 1) $k = 3$; 2) $k = -3$. 208. 1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3) $y = x$. 209. $y = -x$. 210. 1) Наприклад, $A(3; 0)$ або $A(-3; 0)$; 2) наприклад, $B(0; 2)$ або $B(0; -2)$; 3) наприклад, $C(1; 1)$ або $C(-1; -1)$. 211. 1) Наприклад, $A(-3; 3)$ або $A(3; -3)$. 212. 1) На мал. 47,

$b = -1$, $k = 3$; 2) на мал. 48, $b = 1$, $k = -2$. 213. $b = -2$, $k = 1$. 214. 1) $y = 2$, $x = -1$; 2) $y = -2$, $x = -1$; 3) $y = 2$, $x = 4$; 4) $y = 2$, $x = -4$; 5) $y = -2$, $x = 4$. 215. 1) $P = 12$, $S = 9$; 2) $P = 32$, $S = 64$. 216. $P = 38$, $S = 78$. 217. Мал. 50: $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, пряма AB задається рівнянням 2); мал. 51: $A(-1; 2)$, $B(2; -2)$, пряма AB задається рівнянням 1). 218. $A(-2; -1)$, $B(2; 3)$, так. 219. 1) Наприклад, $(4; 1)$ і $(2; 3)$; 2) наприклад, $(0; 3)$ і $(-2; 2)$. 220. Наприклад, $(-1; 2)$ і $(3; -4)$. 221. 1) $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{-1-2}$ або $x + y - 1 = 0$; 2) $\frac{x+3}{2+3} = \frac{y-1}{-2-1}$ або $3x + 5y + 4 = 0$. 222. $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+4}{-1+4}$ або $3x - y - 10 = 0$. 223. 1) $AB: 3x + 2y = 0$, $BC: 3x + 4y - 6 = 0$, $AC: y + 3 = 0$; 2) $AB: 2x + y = 0$, $BC: 4x - 3y + 10 = 0$, $AC: 3x - y - 5 = 0$; 224. $MP: 2x + y + 1 = 0$, $PT: 3x - y - 6 = 0$, $MT: x + y - 2 = 0$. 225. 1) Ні; 2) так. 226. Ні. 227. 1) Точка A — так, точки B , C — ні; 2) точка B — так, точки A , C — ні. 228. 1) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$; 2) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$. 229. *Вказівка*: покажіть, що точки з абсцисою -5 (або ординатою 5) не можуть належати даному колу. 230. 1) Пряма й коло перетинаються; 2) пряма дотикається до кола. 231. 1) $B(-6; 2)$; 2) $B(-2; -2)$. 232. 1) $x^2 + (y-1)^2 = 8$ або $x^2 + (y-5)^2 = 8$; 2) $x^2 + y^2 = 13$ або $x^2 + (y-6)^2 = 13$. 233. *Вказівка*: покажіть, що діаметр даного кола більший за хорду AB . 234. 1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; 2) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$. 235. 1) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ або $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$; 2) $(x-2,5)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$ або $(x+2,5)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$. 236. 1) $x^2 + (y-3)^2 = 9$ або $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 9$; 2) $x^2 + (y-3)^2 = 9$, або $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 36$, або $(x-3)^2 + (y-9)^2 = 36$, або $(x-12)^2 + (y-15)^2 = 225$. 237. 1) $y = x$; 2) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. 238. $y = \sqrt{3}x$. 239. *Вказівка*: скористайтесь властивістю кутового коефіцієнта прямої. 240. *Вказівка*: скористайтесь властивістю кутового коефіцієнта прямої. 241. 1) $y = 5x + 5$; 2) $y = -x + 5$. 242. $y = 3x + 2$. 243. 1) $y = x + 3$; 2) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 1$. 244. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$. 245. 1) $y = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 4y = 0$; 2) $3x - y = 0$, $2x + y - 10 = 0$, $4x - 3y = 0$. 246. 1) $y - 2 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ або $y - 2 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x + y - 5 = 0$; 2) $y + 3 = 0$, $\sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} - 9 = 0$, $\sqrt{3}x - 3y - 6\sqrt{3} + 9 = 0$ або $y + 3 = 0$, $\sqrt{3}x + 3y + 3\sqrt{3} + 6 = 0$, $\sqrt{3}x - 3y - 6\sqrt{3} - 9 = 0$. 247. $y = x - a$, $y = x + a$, $y = -x - a$, $y = -x + a$. 248. 1) 45° і 45° ; 2) 135° і 45° . 249. 1) 0,65; 2) 2,5. 250. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$. 251. 1) $D(-6; -1)$; 2) $D(9; 6)$. 252. 1) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$; 2) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$. 253. 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$; 2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. 255. 1) $\sqrt{18+12\sqrt{2}}$, $\sqrt{18-12\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt{6}$, $2\sqrt{21}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50-2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50-2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$. 256. 1) $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$; 2) $(x-4)^2 + (y-1,5)^2 = 18,25$. 257. 1) $(2\sqrt{3}; -2)$, $(-2\sqrt{3}; -2)$; 2) $(2; 2\sqrt{3})$, $(2; -2\sqrt{3})$. 258. 1) $R = \sqrt{82}$, $C(-4; 5)$; 2) $R = \sqrt{34}$, $C(5; -3)$; 3) $R = 2\sqrt{6}$, $C(2; -2)$; 4) $R = 2$, $C(4; 0)$. 259. *Вказівка*: скористайтесь властивістю кутового коефіцієнта прямої. 260. *Вказівка*: див. задачу 259. 261. $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_1 - d_1}{d_2 - c_2}$. 262. 1) пряма $2a_1x + 2a_2y - (a_1^2 + a_2^2) = 0$; 2) пряма

$(2b_1 - 2a_1)x + (2b_2 - 2a_2)y + (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) = 0$. 263. 1) $y = R$, $y = -R$; 2) $x = R$, $x = -R$. 264. $yy_0 + xx_0 = R^2$. 265. 1) $\frac{b}{\sqrt{k^2 + 1}}$; 2) $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 266. 1) $\frac{|y_0 - b - kx_0|}{\sqrt{k^2 + 1}}$; 2) $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 267. 20. 268. Якщо уявити, що дані об'єкти містяться у вершинах трикутника, то ліхтар потрібно розмістити в центрі кола, описаного навколо цього трикутника. 270. 2) 2 км.

§ 4. Поняття вектора. Дії над векторами

271. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 272. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 273. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 274. 1) Ні; 2) так. 275. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 376. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 377. 1) Ні; 2) так. 378. 1) Так; 2) ні. 379. 1) Так; 2) ні. 380. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 381. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 382. 1) Ні; 2) так. 383. 1) Так; 2) так. 285. 1) $\overline{DA}$, $\overline{AO}$, $\overline{DO}$, $\overline{DC}$, $\overline{OC}$, $\overline{OB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$; 2) $\overline{DA}$, $\overline{DO}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$. 288. 1) $|\overline{AB}| = 5$ см; 2) $|\overline{AB}| = 3$ мм; 3) $|\overline{AB}| = 0,027$ дм. 289. $|\overline{CD}| = 3$ см. 290. Одиничними є вектори: 1) $\vec{c}$ і $\vec{n}$; 2) $\vec{a}$; 3) $\vec{d}$. 291. Так. Це вектори $\vec{n}$ і $\vec{k}$. 293. 1) $\vec{l}$ і $\vec{b}$; $\vec{c}$, $\vec{m}$ і $\vec{k}$; 2) $\vec{l}$ і $\vec{b}$; $\vec{c}$ і $\vec{m}$; 3) $\vec{c}$ і $\vec{k}$; $\vec{m}$ і $\vec{k}$; 4) $\vec{l}$ і $\vec{b}$; $\vec{c}$ і $\vec{m}$; 5) таких не зображено. 294. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 297. Ні. Ні. Так. 298. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні. 399. 1) Ні; 2) ні. 300. Ні. 301. $|\overline{CD}| = |\overline{BA}| = |\overline{BC}| = |\overline{DA}| = 4$, $|\overline{MB}| = |\overline{AM}| = 2$. 302. $|\overline{AO}| = 3$, $|\overline{AD}| = |\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$, $|\overline{BO}| = 3$. 303. $\overline{AC}$ (мал. 86); $\overline{AC}$ (мал. 87). 304. $\overline{AC}$ (мал. 88). 305. 1) Ні; 2) ні; 3) ні. 306. 1) $\overline{AN}$; 2) $\overline{AC}$; 3) $\overline{BN}$. 336. 1) $\overline{PM}$; 2) $\overline{AB}$. 309. 1) $\overline{AC}$; 2) $\vec{0}$; 3) $\vec{0}$. 311. 1) $\overline{AC}$; 2) $\vec{0}$; 3) $\vec{0}$. 312. 1) $\overline{KA}$; 2) $\overline{BL}$; 3) $\vec{0}$. 313. 1) $\overline{KM}$; 2) $\overline{LB}$. 316. а) $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{BA}$; б) $\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$; в) $\overline{CA} = \overline{BA} - \overline{BC}$. 317. а) $\overline{NL} = \overline{NM} + \overline{NK}$; б) $\overline{MK} = \overline{NK} - \overline{NM}$; в) $\overline{KM} = \overline{NM} - \overline{NK}$. 320. 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) 2. 323. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 1. 324. Мал. 100: 1) $k = -4$, 2) $k = -\frac{1}{4}$; мал. 101: 1) $k = \frac{1}{2}$, 2) $k = 2$; мал. 102: 1) $k = -2$, 2) $k = -\frac{1}{2}$; мал. 103: 1) $k = \frac{1}{5}$, 2) $k = 5$. 328. 1) Протилежні; 2) протилежно напрямлені; 3) протилежно напрямлені. 329. 1) Протилежні; 2) протилежно напрямлені. 330. 1) 12; 2) 4. 332. 12. 333. 6. 334. 1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$; 2) $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{MA}$. 336. Задача має два розв'язки. 337. 1) 2 см; 2) 4 см; 3) $2\sqrt{3}$ см; 4) 2 см. 338. 12 пар. 340. Вказівка: розгляньте два випадки: точки A , B і C лежать на одній прямій, точки A , B і C не лежать на одній прямій. 341. 1) Ні; 2) так. 342. 1) $=$; 2) $>$, якщо кут A — тупий; $<$, якщо кут A — гострий. 343. 1) 2; 2) 0. 344. 1) $\overline{AC}$; 2) $4\overline{CD}$. 345. 1) 0; 2) $2a$; 3) a . 346. -1 . 347. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними. 348. 1) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. 350. Чотири розв'язки. 354. 1) Площину. 356. Вказівка: скористайтеся задачею 355. 357. Вказівка: скористайтеся задачею 356. 358. Вказівка: скористайтеся задачею 356. 359. Вказівка: скористайтеся задачею 356. 361. 1) Вказівка: $\overline{CA} = 2\overline{DB}$; 2) Вказівка: точка D — точка перетину медіан трикутника ABC . 366. Вказівка: точка M лежить на прямій AB

тоді і тільки тоді, коли $\overline{BM}$ і $\overline{BA}$ — колінеарні. 368. Паралельна — з північного сходу на південний захід або з південного заходу на північний схід.

§ 5. Координати вектора. Скалярний добуток векторів

371. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 372. 1) Ні; 2) так. 373. 1) Ні; 2) так. 374. 1) Ні; 2) так. 375. 1) Ні; 2) так. 377. 1) Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює добутку їх модулів і косинуса кута між ними. 378. 1) Ні; 2) так. 379. 1) Скалярний квадрат вектора $\vec{a}$ дорівнює квадрату його довжини. 380. 1) Так; 2) ні; 3) так. 381. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 382. Мал. 119: $O(0; 0)$, $A(2; 3)$; мал. 120: $B(1; 1)$, $C(3; 4)$. 383. $H(3; 3)$, $T(-1; 1)$. 384. 1) $\overline{OA}(2; 3)$; 2) $\overline{BC}(2; 3)$. 385. 1) $\overline{HT}(-4; -2)$. 386. 1) $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$; 2) $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$; 3) $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. 387. 1) $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$; 2) $\sqrt{t_1^2 + t_2^2}$. 388. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 389. 1) Ні; 2) так. 390. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. 391. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{h}$, $\vec{p}$, $\vec{t}$. 392. 1) Так; 2) так. 393. 1) $\overline{AB}(3; 0)$; 2) $\overline{AB}(5; -6)$; 3) $\overline{AB}(2; -10)$. 395. 1) $\overline{AB}(1; -4)$; 2) $\overline{AB}(5; 5)$. 396. 1) $\sqrt{2}$; 2) 5; 3) 13. 397. 1) $\sqrt{104}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{5}$. 398. 10. 399. 1) Так; 2) так. 400. Вказівка: обчисліть довжину вектора. 401. 1) $(4; 6)$ і $(-2; -2)$; 2) $(-1; -3)$ і $(-5; 5)$; 3) $(0; 0)$ і $(-12; -4)$. 402. 1) $(6; 4)$ і $(-2; -2)$; 2) $(-3; -1)$ і $(5; -5)$. 403. 1) $(2; -2)$. 404. Ні. 405. 1) $(5; 20)$; 2) $(-3; -12)$; 3) $(0, 5; 2)$; 4) $(-1; -4)$. 406. 1) $(2; -1)$; 2) $(-8; 4)$. 407. 1) $(-6; 6)$; 2) $(-1, 5; 6)$; 3) $(-1; 2, 5)$. 408. 1) 5; 2) 15. 409. $6\sqrt{5}$. 410. Мал. 124: 60° ; мал. 125: 90° . 411. 120° . 412. 1) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 3) 18; 4) -18 ; 5) 30; 6) -6 ; 7) -30 ; 8) 6. 413. 1) $\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{3}$. 414. 1) 4; 2) 9; 3) 25. 415. 1) 16; 2) 49. 416. 1) 45° ; 2) 180° . 417. 30° . 418. 1) $4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$. 419. 4. 420. 1) $\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 3; 4) $2\sqrt{3}$. 421. 1) $\sqrt{3}$; 2) 2. 422. 1) -3 ; 2) -22 ; 3) -4 ; 4) -1 . 423. 1) -3 ; 2) -22 . 424. Вказівка: знайдіть скалярний добуток векторів. 425. 1) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — взаємно перпендикулярні; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 0; 3) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 0. 426. 1) Вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — взаємно перпендикулярні; 2) скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ дорівнює 0; 3) скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ дорівнює 0. 427. 1) 90° ; 2) 60° ; 3) 90° ; 4) 180° . 428. 1) 90° ; 2) 60° . 429. $\approx 63^\circ$. 430. 90° . 431. 1) $\overline{AD}$ і $\overline{DA}$; 2) $\overline{AD}$ і $\overline{DA}$. 432. $\lambda = 2$. 433. 1) $(9; 8)$; 2) $(4; -13)$. 434. 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda = 2\sqrt{2}$. 435. 1) $\lambda = \pm 4\sqrt{2}$; $\lambda = \pm 2$. 437. 1) $(3; 4)$, $(2; -1)$, $(8; -5)$; 2) $(2; -8)$, $(-14; -33)$, $(-4; -19)$. 438. $\sqrt{34}$, $\sqrt{10}$. 439. $\overline{AM}(-8; 3)$. 440. Так. 442. 1) Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — гострий; 2) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — тупий; 3) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є співнаправленими; 3) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є протилежно напрямленими. 443. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 1; 6) -1 . 444. 1) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{19}$; 2) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{3}$. 445. 1) $\sqrt{129}$, 7; 2) 13, 13. 446. 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 5$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. 447. Вказівка: доведіть, що діагоналі AC і BD рівні та взаємно перпендикулярні. 448. Вказівка: покажіть, що вектори $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$ — колінеарні та що вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ — неколіне-

арні. 451. 5. 452. 1) $B(1; 2)$, $C(3; 1)$, $\overline{CA}(-2; -5)$. 453. $\overline{b}(\pm 8; \pm 6)$. 454. 1) $\overline{d}(-\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$. 456. 1) $\approx 77^\circ$. 457. 1) -60 ; 2) -19 . 458. 60° . 459. 1) Прямим; 2) 0° ; 3) не тупим; 4) не гострим. 460. Вказівка: скористайтесь означенням скалярного добутку. 461. 1) $\approx 53^\circ$; 2) 45° . 462. 45° . 463. $\approx 41^\circ$. 464. $-1,5$. 465. $\overline{F}(-3; 12)$. 467. 66.

РОЗДІЛ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

§ 6. Теорема синусів

469. 3). 470. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 471. 1) Ні; 2) так. 472. 1) Так; 2) ні. 473. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 474. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. 476. 2) 12 см. 477. 1) $6\sqrt{2}$ см; 2) 57° . 478. 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{6}$ см. 479. ≈ 6 см. 480. 1) $\approx 26^\circ$; 2) $\approx 18^\circ$; 481. $\approx 28^\circ$. 482. 1) 3 см; 2) $\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. 483. $2\sqrt{3}$ см. 484. 1) 8 см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) $8\sqrt{3}$ см. 485. 2 см. 486. BC — найбільша, AC — найменша. 487. 1) AB — найбільша, AC — найменша; 2) AB — найбільша, AC — найменша; 3) BC — найбільша, AB — найменша. 488. 1) $AC < BC$; 2) $AC > BC$; 3) $AC < BC$. 489. $\angle B$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. 490. 1) $\angle B$ — найбільший, $\angle A$ — найменший; 2) кути рівні; 3) $\angle A$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. 491. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 492. $a \approx 7,1$ см, $c \approx 9,7$ см. 493. $a \approx 2$ см, $c \approx 1,5$ см. 494. 8 см. 495. 45° або 135° . 496. $1:\sqrt{3}:2$. 497. $b \approx 5,2$ см, $c \approx 7$ см. 498. $b \approx 8,2$ см, $c \approx 3\sqrt{6}$ см. 499. $\frac{\alpha \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$, $\frac{\alpha \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$. 500. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 501. 1) $\angle B \approx 136^\circ$, $\angle C \approx 14^\circ$; 2) $\angle B \approx 103^\circ$, $\angle C \approx 32^\circ$. 502. 1) Основа; 2) основа; 3) бічна сторона. 503. 1) $3\sqrt{2}$ см; 2) 4,8 см. 504. 6 см, $\approx 3,1$ см, $\approx 4,4$ см. 505. 1) $5(\sqrt{2} + 1)$, $5(\sqrt{2} + 2)$. 506. $4(\sqrt{2} - 1)$, $4(2 - \sqrt{2})$. 507. Вказівка: продовжте медіану BM за точку M на відрізок $MD = BM$. Розгляньте $\triangle BCD$. 508. $BC > AC$. 509. 1) 16,9 см; 2) 6,25 см. 510. $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. 511. Вказівка: застосуйте наслідок 2 з теореми синусів до $\triangle ABD$ або $\triangle BCD$. 512. 1) $\approx 49^\circ$ або $\approx 131^\circ$; 2) $\approx 109^\circ$ або $\approx 27^\circ$. Вказівка: розгляньте два випадки. 513. 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) 4 см. 514. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. 515. $\approx 27,8$ см. 516. $\frac{(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}$. 517. $a_c = \frac{ac}{a+b}$, $b_c = \frac{bc}{a+b}$. 518. Вказівка: нехай BD — медіана $\triangle ABC$. Застосуйте теорему синусів до $\triangle ABD$ і $\triangle BDC$. 519. Вказівка: доведіть, що медіана CC_1 проходить через точку O , яка ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1. Застосуйте теорему синусів спочатку до $\triangle BCC_1$ і $\triangle ACC_1$, а потім — до трикутників BOC і B_1OC . 520. Вказівка: застосуйте теорему синусів до $\triangle AKC$ і $\triangle BKD$. 521. Вказівка: побудуйте допоміжний трикутник, сторонами якого є бічні сторони трапеції і різниця її основ. 522. Вказівка: побудуйте допоміжний трикутник, сторонами якого є діагоналі трапеції і сума її основ. 523. $8\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$. 524. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ см.

525. Вказівка: застосуйте наслідок 1 з теореми синусів до $\triangle ABD$ і $\triangle DBC$. 526. Вказівка: позначте кут між діагоналями через α . Виразіть кожную сторону чотирикутника через радіус описаного кола і кут, протилежний стороні. Потім скористайтесь властивістю сторін описаного чотирикутника. 527. $\approx 101,3$ м.

§ 7. Теорема косинусів

528. 3). 529. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 530. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 531. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 532. $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. 533. 5,6. 534. 1) $b^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{2}$; 2) $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{2}$; 3) $b^2 = a^2 + c^2$; 4) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$; 5) $c^2 = a^2 + b^2 + ab$; 6) $c^2 = a^2 + b^2$; 7) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}$; 8) $a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{3}$; 9) $a^2 = b^2 + c^2$. 535. 1) $\sqrt{13}$ см; 2) $\sqrt{37}$ см; 3) 5 см; 4) $\approx 7,2$ см; 5) ≈ 23 см; 6) ≈ 17 см. 536. 1) ≈ 3 см; 2) $\approx 5,6$ см; 3) $\approx 4,5$ см. 537. 1) $\approx 14,8$ см; 2) 7 см. 538. ≈ 17 см. 539. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. 540. $\alpha \approx 105^\circ$. 541. $\alpha \approx 29^\circ$. 542. 1) $\cos A = 0,65$, $\cos B = \frac{83}{160}$, $\cos C = \frac{5}{16}$; 2) $\cos A = \frac{13}{14}$, $\cos B = 0,5$, $\cos C = -\frac{1}{7}$; 3) $\cos A = \frac{23}{28}$, $\cos B = \frac{29}{56}$, $\cos C = \frac{1}{16}$. 543. 1) $\angle A \approx 36^\circ$, $\angle B \approx 117^\circ$, $\angle C \approx 26^\circ$; 2) $\angle A \approx 47^\circ$, $\angle B \approx 27^\circ$, $\angle C \approx 104^\circ$. 544. $\approx 44^\circ$, $\approx 57^\circ$, $\approx 79^\circ$. 545. 1) $\alpha < 90^\circ$; 2) $\alpha = 90^\circ$; 3) $\alpha > 90^\circ$. 546. 1) Тупокутний; 2) гострокутний; 3) прямокутний. 547. Вказівка: скористайтесь теоремою косинусів. 548. 1) 13 см; 2) $\approx 6,1$ см. 549. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$. 550. 1) $\approx 8,7$ см і 14 см; 2) $\approx 7,5$ см і $\approx 14,7$ см; 3) $\approx 14,3$ см і $\approx 8,2$ см. 551. $\approx 6,08$ см або $\approx 1,54$ см. 552. 1) $\approx 5,7$ см або $\approx 10,8$ см; 2) $\approx 7,2$ см і ≈ 13 см. 553. Якщо кут α збільшується від 0° до 90° , то значення $\cos \alpha$ зменшуються, залишаючись додатними. Тоді довжина сторони a збільшується. При подальшому збільшенні кута α від 90° до 180° значення $\cos \alpha$ зменшуються від 0 до -1 . Тому довжина сторони a продовжує збільшуватися. 554. 1) Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то $2b \cos \alpha > 0$. Оскільки $b > 0$, $c > 0$, то $\cos \alpha > 0$, а отже, A — гострий кут. 555. 1) 90° 2) $\approx 117^\circ$; 3) $\approx 94^\circ$. 556. Вказівка: нехай $ABCD$ — паралелограм. За теоремою косинусів знайдіть AC^2 і BD^2 . 557. 15 см і 25 см. 558. 5 см, 10 см. 559. 6 см, 7 см. 560. $\approx 9,8$ см і $\approx 12,2$ см. 561. Вказівка: продовжте медіану $AM = m_a$ за точку M на відрізок $MD = AM$ та обґрунтуйте, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. 562. 6,5 см. 563. 27 см. 564. ≈ 13 см. 565. $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. 566. Вказівка: за теоремою косинусів із трикутників $BOМ$ і $АОМ$ знайдіть BM^2 і AM^2 . Одержані рівності почленно додайте. 567. Вказівка: скористайтесь теоремою косинусів. 568. $\alpha \approx 45^\circ$. 569. ≈ 339 м.

§ 8. Знаходження невідомих елементів трикутника

571. $x = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ (мал. 160); $x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ (мал. 161); $\cos x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ (мал. 162). 572. $c \approx 1,6$, $\alpha \approx 112^\circ$, $\beta \approx 39^\circ$ (мал. 163) $\alpha = 105^\circ$, $a \approx 2,1$, $b \approx 2,9$ (мал. 164). 573. 1) $b \approx 4,1$, $\alpha \approx 49^\circ$, $\gamma \approx 101^\circ$; 2) $a \approx 4,6$, $\beta \approx 49^\circ$, $\gamma \approx 71^\circ$; 3) $c \approx 9,6$, $\alpha \approx 30^\circ$, $\beta \approx 45^\circ$. 574. 1) $c \approx 2,1$, $\alpha \approx 93^\circ$, $\beta \approx 42^\circ$; 2) $a \approx 6,1$, $\beta = 25^\circ$, $\gamma \approx 35^\circ$. 575. 1) $b \approx 2,1$, $c \approx 2,9$, $\alpha = 105^\circ$; 2) $a \approx 1,5$, $b \approx 1,8$, $\gamma = 75^\circ$; 3) $a \approx 4,5$, $c \approx 12,3$, $\beta = 50^\circ$. 576. 1) $b \approx 3,6$, $c \approx 5,3$, $\alpha = 102^\circ$; 2) $a \approx 4,7$, $b \approx 8,5$, $\gamma = 30^\circ$. 577. 1) $\alpha \approx 30^\circ$, $\beta \approx 94^\circ$, $\gamma \approx 56^\circ$; 2) $\alpha \approx 36^\circ$, $\beta \approx 26^\circ$, $\gamma \approx 118^\circ$; 3) $\alpha \approx 34^\circ$, $\beta \approx 102^\circ$, $\gamma \approx 44^\circ$.

578. 1) $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 47^\circ$, $\gamma \approx 104^\circ$; 2) $\alpha \approx 47^\circ$, $\beta \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 58^\circ$. 579. 1) $b \approx 4,8$, $d_1 \approx 4,3$, $\approx 45^\circ$, $\approx 135^\circ$; 2) $b \approx 8,4$, $d_1 \approx 6,9$, $\approx 55^\circ$, $\approx 125^\circ$; 3) $b \approx 2,8$, $d_1 \approx 6,4$, $\approx 74^\circ$, $\approx 106^\circ$. 580. 1) $c \approx 17,8$, $\beta \approx 32^\circ$, $\gamma \approx 108^\circ$; 2) $b \approx 55$, $\alpha \approx 103^\circ$, $\gamma \approx 32^\circ$; 3) $a \approx 7,8$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$. 581. 1) $b \approx 46$, $\beta \approx 130^\circ$, $\gamma \approx 20^\circ$; 2) $c \approx 21,7$, $\beta \approx 36^\circ$, $\gamma \approx 79^\circ$. 582. 1) $\alpha \approx 31$, $\beta \approx 24^\circ$, $\gamma \approx 125^\circ$; 2) $\alpha = 115^\circ$, $b \approx 1,9$, $c \approx 1,7$; 3) $b \approx 2,8$, $\alpha \approx 27^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$; 4) $\alpha \approx 148^\circ$, $\beta \approx 12^\circ$, $a \approx 12,4$. 583. 1) $a \approx 6,9$, $b \approx 1,9$, $c \approx 7,8$, $\angle C = 113^\circ$; 2) $a \approx 2$, $b \approx 3$, $c \approx 4$, $\angle C = 104^\circ$. 584. $a \approx 4,5$, $b \approx 5,6$, $c \approx 7,5$, $\angle A = 34^\circ$. 585. 1) $b \approx 24$, $\angle A \approx 39^\circ$, $\angle B \approx 94^\circ$, $\angle C \approx 49^\circ$; 2) $c = 14$, $\angle A \approx 53^\circ$, $\angle B \approx 68^\circ$, $\angle C \approx 59^\circ$. 586. 1) $\approx 3,9$ см, $\approx 8,6$ см; 2) $\approx 3,7$ см, $\approx 6,7$ см. 587. 1) $\approx 4,8$ см, $\approx 4,02$ см, $\approx 6,2$ см; 2) $\approx 3,8$ см, $\approx 4,7$ см, $\approx 3,6$ см. 588. 13 см, 14 см, 15 см. 589. a , $a(1+\sqrt{2})$, $a\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$. 590. 6,4 см, якщо $\angle C$ — гострий; 11,7 см, якщо $\angle C$ — тупий. 591. $\approx 57,4$ см, $\approx 67,7$ см, $\approx 70,5$ см. 592. $2R\sin\alpha$, $2R\sin\beta$, $2R\sin(\alpha+\beta)$. 593. 9 см; 24 см; $\approx 23^\circ$, $\approx 97^\circ$. 594. $\angle A \approx 56^\circ$, $\angle B \approx 124^\circ$, $\angle C \approx 139^\circ$, $\angle D \approx 41^\circ$. 595. $\frac{25\sqrt{39}}{39}$ см. 596. $\frac{2\sqrt{3(a^2+b^2+ab)}}{3}$. 597. $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. 598. $\approx 39,7$ см, $\approx 42,4$ см. Вказівка: з вершини меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть за теоремою синусів бічні сторони утвореного трикутника. 599. $S = \frac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. Вказівка: з вершини меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні. За теоремою синусів знайдіть сторону утвореного трикутника. 600. $\frac{a\sin\alpha\sin\alpha_1}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha_1+\beta_1)}$. 602. $\approx 51^\circ$. 604. ≈ 29 м. 605. $\approx 924,3$ м. 606. $AC = \frac{a\sin\beta\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\beta_1)}$. 607. ≈ 162 м.

§ 9. Формули площі трикутника

608. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. 609. 6 кв. од. 610. 1) 15 см²; 2) 24 см². 611. 56 см². 612. 1) $\approx 1,9$ см²; 2) $\approx 7,3$ см². 613. $\approx 17,7$ см². 614. 1) $S \approx 34,5$ см²; 2) $\gamma \approx 37^\circ$; 3) $b = 24$ см; 4) $a \approx 3,7$ см. 615. 1) 16 см; 2) 8 см. 616. 36 кв. од. 617. 1) 12 см²; 2) 90 см². 618. 156 см². 619. 1) 84 см²; 2) 24 см². 620. 42 см². 621. 1) 120 см²; 2) $8\sqrt{5}$ см². 622. 336 см². 624. 1) $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ см, $r = \sqrt{3}$ см; 2) $S = 6$ см², $r = 1$ см; 3) $S = 12$ см², $R = 3,125$ см; 4) $S = 24$ см², $r = 2$ см; 5) $R = 8,125$ см, $r = 1,5$ см. 625. 1) 13 см; 2) 16,25 см. 626. $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 627. 1) $\approx 12,9$ см, 12 см, 11,2 см; 2) 4,8 см, 4,8 см, 4 см; 3) 7 см, 24 см, 6,72 см. 628. 12 см, 5,6 см, 4,2 см. 629. 1) Так; 2) ні; 3) так. 630. Якщо кут α збільшується від 0° до 90° , то площа трикутника збільшується. При подальшому збільшенні кута α від 90° до 180° площа трикутника зменшується. Площа трикутника є найбільшою, якщо $\alpha = 90^\circ$. 631. Вказівка: врахуйте, що діагональ паралелограма розбиває його на два трикутники з рівними площами. 632. 1) $\approx 5,6$ см²; 2) $\approx 11,5$ см². 634. 1) $\approx 1,4$ см²; 2) $\approx 29,8$ см². 635. Вказівка: врахуйте, що діагоналі паралелограма розбивають його на чотири трикутники з рівними площами.

636. 1) $\approx 19,3$ см²; 2) $\approx 41,1$ см². 637. Вказівка: нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Тоді площа цього чотирикутника дорівнює сумі площ трикутників ABO , BCO , CDO , ADO . 638. 1) 36 см²; 2) $\approx 21,1$ см². 639. 1) $\approx 19,1$ см²; 2) $\approx 26,8$ см². 640. $\approx 14,9$ см. 641. $\approx 16,03$ см. 642. 84 см². 643. 36 см, 51 см, 75 см. 644. 270 см². 645. 12 см. 646. Вказівка: 1) скористайтеся рівностями $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$; 2) підставте у формулу (1) значення $R = \frac{a}{\sin\alpha}$. 647. $\frac{l^2\sin\alpha}{2\sin(\alpha-45^\circ)\sin(\alpha+45^\circ)}$. 648. Вказівка: нехай $AD = l$ — бісектриса $\triangle ABC$. Знайдіть за формулою $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ площі трикутників ABC , ACD , ABD та скористайтеся рівністю $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD}$. 649. $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 650. $S = \frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. 651. 288 см². 652. $S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$. Вказівка: продовжте одну з медіан трикутника на відрізок, що дорівнює $\frac{1}{3}$ медіани. 653. $S = 1: \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}$. Вказівка: виразіть сторони трикутника з рівності $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ і скористайтеся формулою Герона. 655. $\approx 1,9$ кг. 656. $AD = 400$ м.

РОЗДІЛ 4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

§ 10. Правильні многокутники

657. На мал. 213. 658. 3) і 4). 659. 1) OA і OB ; 2) OM ; 3) $\angle AOB$. 660. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 661. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 662. 1) Ні; 2) так. 663. 1) а) Так; б) ні; 1) а) так; б) ні; 1) а) ні; б) так. 664. 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 40 см. 665. 80 см. 666. 1) 540° ; 2) 900° ; 3) 1440° . 667. 2520° . 668. 1) 108° ; 2) 150° . 669. 160° . 670. 1) 8; 2) 12; 3) 9. 671. 1) 10; 2) 6. 672. 1) 18° ; 2) 15° ; 2) 40° . 673. 36° . 674. 1 (мал. 215); 1 (мал. 216). 675. 2. 676. 1) 12 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) 18 см. 677. 6 см. 678. 1) 4 см; 2) 8 см; 3) $\frac{d}{2}$. 679. 1) 8 см; 2) 16 см; 3) 48 см. 680. 1 (мал. 218); 2 (мал. 219). 681. 1,5. 682. 1) 12 см; 2) $16\sqrt{3}$ см; 3) 18 см. 683. 1) 2,5 см; 2) 3 см. 684. 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 8 см. 685. 1) 1,5 см; 2) 2 см; 3) $\frac{P}{8}$. 686. Вказівка: порівняйте формули $a_3 = R\sqrt{3}$ і $a_3 = 2r\sqrt{3}$. 687. 1) $R = 2$ см, $r = 1$ см, $P = 6\sqrt{3}$ см; 2) $a = 12$ см, $r = 2\sqrt{3}$ см, $P = 36$ см; 3) $a = 36$ см, $R = 12\sqrt{3}$ см, $P = 108$ см; 4) $a = 3\sqrt{3}$ см, $R = 3$ см, $r = 1,5$ см. 688. 1) 24 см; 2) 30 см; 3) 42 см. 689. 1) $R = 3\sqrt{2}$ см, $r = 3$ см, $P = 24$ см; 2) $a = 16$ см, $r = 8$ см, $P = 64$ см; 3) $a = 20$ см, $R = 10\sqrt{2}$ см, $P = 80$ см; 4) $a = 4$ см, $R = 2\sqrt{2}$ см, $r = 2$ см. 690. 1) 8 см; 2) $4\sqrt{2}$ см. 691. 1) 1,5 см; 2) 9 см; 3) 15 см. 692. 1) 2 см; 2) 8 см; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. 693. 1) На колі радіусом R позначаємо

довільну точку; 2) із даної точки на колі відмічаємо послідовно 5 точок розхилом циркуля, що дорівнює R ; 3) з'єднуємо точки й отримуємо шестикутник.

696. Вказівка: врахуйте, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу кола, описаного навколо нього. **699. Вказівка:** спочатку накресліть коло даного радіуса. Через його центр проведіть перпендикулярні прямі.

700. $\frac{d\sqrt{3}}{3}$ см. **701.** $\frac{m\sqrt{6}}{2}$. **702.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}\pi$. **703.** $\frac{a^2}{12}\pi$. **704. Вказівка:** знайдіть суму

$180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ і $\frac{360^\circ}{n}$. **705.** 120° . **706.** 1) 4; 2) 3. **707.** 1) Так; 2) так. **708.** Ні.

709. 60° . **710. Вказівка:** 1) спочатку доведіть рівність трикутників; 2) доведіть, що утворені чотирикутники є рівнобічними трапеціями; 3) знайдіть відповідні кути трикутника і скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника.

711. Вказівка: спочатку знайдіть зовнішній кут. **712. Вказівка:** спочатку доведіть рівність трикутників. **713.** 1) 6 см; 2) $2m\sqrt{3}$. **714.** 1) 4 см, 8 см; 2) n , $2n$.

715. 1) 2 см, $2\sqrt{2}$ см; 2) 1 см, $\sqrt{2}$ см. **716.** 1) $6(2+\sqrt{3})$, $3(3+2\sqrt{3})$; 2) $10(2+\sqrt{3})$,

$5(3+2\sqrt{3})$; 3) $2m(2+\sqrt{3})$, $m(3+2\sqrt{3})$. **717.** 1) $\sqrt{6}$ см; 2) $3\sqrt{6}$ см; 3) $\frac{P\sqrt{6}}{9}$.

718. 1) 5 см; 2) 1 см; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **719.** 1) 30 см; 2) 34 см; 3) $2a$. **720.** 1) 14 см; 2) 12 см;

3) $\frac{2a}{3}$. **721.** 1) 24 см; 2) $24\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{2P\sqrt{3}}{3}$. **722.** 1) $a = 3$ см, $R = 3$ см, $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см;

2) $a = 4$ см, $R = 4$ см, $r = 2\sqrt{3}$ см; 3) $a = \frac{d}{2}$, $R = \frac{d}{2}$, $r = \frac{d\sqrt{3}}{4}$. **723.** 1) 10 см, $5\sqrt{3}$ см;

2) 12 см, $6\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{d\sqrt{3}}{3}$, $\frac{d}{2}$. **724.** 1) 4 см, $2\sqrt{3}$ см; 2) 16 см, $8\sqrt{3}$ см; 3) $a\sqrt{3}$, $2a$.

725. Вказівка: розгляньте два випадки. 1) $6\sqrt{3}$ см або $3\sqrt{3}$ см; 2) 6 см або 3 см;

3) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ або $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **726.** Правильного трикутника. **727.** У правильному чотири-

кутнику. **728.** Ні. **729. Вказівка:** спочатку знайдіть радіус описаного кола.

730. Вказівка: спочатку знайдіть діагоналі. **731. Вказівка:** доведіть рівність утворених трикутників. **732. Вказівка:** доведіть, що в утвореному n -кутнику

всі сторони рівні й усі кути рівні. **733.** 60° . **734. Вказівка:** переконайтеся, що всі кути восьмикутника дорівнюють по 135° , а кожна сторона дорівнює $a(\sqrt{2}-1)$.

735. Вказівка: сполучіть дану точку з вершинами n -кутника і знайдіть площу n -кутника як суму площ утворених трикутників. **736. Вказівка:** доведіть, що кожний кут утвореного трикутника дорівнює 60° . **737.** 1) Якщо $n < 6$; 2) якщо

$n = 6$; 3) якщо $n > 6$. **738.** 1) $2(3+2\sqrt{3})$; 2) $4(3+2\sqrt{3})$. **739.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$.

740. $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. **741. Вказівка:** поділіть восьмикутник на 8 рівних трикутників і

розгляньте один із них. 1) Скористайтесь теоремою косинусів; 2) скористайтесь теоремою Піфагора. **742. Вказівка:** скористайтесь вказівкою до попередньої задачі. **743. Вказівка:** спочатку доведіть, що сторона правильного вписаного трикутника ділить перпендикулярний до неї діаметр у відношенні 3 : 1.

744. Вказівка: спочатку побудуйте допоміжний рівнобедрений трикутник AOB з основою AB , у якого OC — висота, $D \in OC$, $AD = OD$ і $DC = AB$. OA — радіус кола, описаного навколо восьмикутника. **745. Вказівка:** скористайтесь вказівкою до попередньої задачі. **746. Вказівка:** покажіть, що сума кутів многокутників, які мають спільну вершину, дорівнює 360° . **747. Вказівка:** скористайтесь вказівкою до попередньої задачі. **748.** $\approx 4,4$ см. **749.** 4,2 м, 2,3 м, 2,1 м.

§ 11. Довжина кола. Довжина дуги кола

750. 1) Ні; 2) ні 3) так. **751.** 1) Ні; 2) ні 3) так. **752.** 1) Ні; 2) ні 3) так.

754. 1) 10π см; 2) 20π см; 3) 24π см. **755.** 1) 4π см; 2) 6π см; 3) 8π см. **756.** 1) 2 см;

2) 7 см; 3) 1 см. **757.** 1) $D = 5$ см, $C = 5\pi$ см; 2) $R = 10$ см, $C = 20\pi$ см; 3) $R = 9,2$ см,

$D = 18,4$ см; 4) $R = 4,8$ см, $C = 9,6\pi$ см; 5) $D = 22$ см, $C = 22\pi$ см. **758. Вказівка:** спочатку знайдіть радіус кола. **759.** 1) Збільшиться на 10π ; 2) зменшиться на 6π ;

3) збільшиться у 2 рази. **760.** 1) 6π см; 2) 12π см. **761.** 1) 8π см; 2) $8\sqrt{2}\pi$ см.

762. 1) 13π см; 2) 25π см; 3) 20π см. **763.** 1) 3π см; 2) $2\sqrt{2}\pi$ см; 3) $4\sqrt{3}\pi$ см.

764. 1) $10\sqrt{3}\pi$ см; 2) 20π см. **765.** 1) π см; 2) 2π см; 3) 4π см. **766.** 1) 2π см; 2) π см;

3) 3π см. **767.** 1) $\frac{36}{\pi}$ см; 2) 108 см; 3) $\frac{60}{\pi}$ см. **768.** 1) $\frac{15\pi}{4}$ см; 2) 90 см; 3) 30° .

769. 1) 80° ; 2) 108° ; 3) 80° . **770.** 1) 8π см; 2) 12π см. **771.** 1) $14,4\pi$ см; 2) $9,6\pi$ см.

772. 1) 6π см; 2) 24π см. **773.** 1) $1,25\sqrt{73}\pi$ см; 2) $2,6\sqrt{41}\pi$ см. **774.** $8\sqrt{3}$ см;

2) $7\sqrt{3}$ см. **775.** 1) 6 см; 2) 1 см. **776. Вказівка:** спочатку знайдіть радіус кола.

777. 1) $\approx 14,7$ см; 2) $\approx 1,5m$. **778.** 1) 3 см; 2) 5 см. **779.** Периметри рівні. **780.** 1) $\frac{3l}{\pi}$;

2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$. **781.** 1) $\frac{a\pi}{3}$; 2) $\frac{a\pi\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2a\pi\sqrt{3}}{9}$. **782.** $2\pi(a+b)$ (мал. 243); $a\pi$

(мал. 244); 3) $2a\pi$ (мал. 245). **783.** 1) 16π см; 2) 2π см. **784.** 1) 50π см; 2) 130π см.

785. Довжині даного кола. **786.** ≈ 300 см. **787.** $1\frac{1}{3}$ см. **788.** Перше коло.

789. $1:\sqrt{3}$. **790.** 126. **791.** 1) ≈ 40004 км; 2) ≈ 80 см. **792.** ≈ 126 м. **793.** $\approx 5,7$ м.

794. Вказівка: спочатку треба поміряти, скільки разів намотується ланцюг для відра на вал. **795.** $\approx 40\,076$ км.

§ 12. Площа круга та його частин

796. 1) Ні; 2) ні 3) так. **797.** 1) Ні; 2) ні 3) так. **799.** 1) 16π см²; 2) 36π см²;

3) 81π см². **800.** 1) 25π см²; 2) 36π см²; 3) 64π см². **801.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 6 см.

802. Вказівка: спочатку знайдіть радіус круга. 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 7 см.

803. 1) $C = 20\pi$ см, $S = 100\pi$ см²; 2) $R = 10$ см, $S = 100\pi$ см²; 3) $R = 5$ см, $C = 10\pi$ см;

4) $R = 1$ см, $S = \pi$ см²; 5) $C = 6\pi$ см, $S = 9\pi$ см²; 6) $R = 6$ см, $S = 36\pi$ см²; 7) $R = 3$ см,

$C = 6\pi$ см. **804.** 1) 4π см; 2) 2π см; 3) 18π см. **805.** 1) Збільшиться в 9 разів; 2) змен-

шиться в 4 рази; 3) збільшиться в 16 разів. **806.** 2. **807.** 1) $\frac{\pi}{4}$ см²; 2) 9π см²;

3) 16π см². **808.** 1) 4π см; 2) 16π см. **809.** 1) 25π см², 50π см²; 2) 49π см², 98π см²;

3) 81π см², 162π см². **810.** 1) 25π см²; 2) 169π см²; 3) 100π см². **811.** 1) 108π см²;

2) 144π см². **812.** 1) π см²; 2) 2π см²; 3) 10π см². **813.** 1) 18π см²; 2) 45π см²;

3) 72π см². **814.** 1) $\frac{R^2}{12}(\pi-3)$; 2) $\frac{R^2}{8}(\pi-2\sqrt{2})$; 3) $\frac{R^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$. **815.** 1) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$;

- 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. **816.** Вказівка: застосуйте формули $D = 2R$ і $C = 2\pi R$. **817.** Вказівка: застосуйте формулу $S = \pi R^2$. **818.** Площа півкруга більша. **819.** У 2 рази. **820.** Площа описаного круга в чотири рази більша за площу вписаного круга. **821.** 1) 10 см; 2) 12 см. **822.** 1) 16π см², 4π см²; 2) 4π см², π см². **823.** 1) 8π см², 4π см²; 2) 18π см², 9π см². **824.** 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **825.** $S = \pi(R^2 - r^2)$. **826.** 1) 60π см²; 2) 8π см². **827.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **828.** 1) 160° ; 2) 72° . **829.** 1) $\approx 7,12$ см; 2) $\approx 3,37$ см. **831.** $R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ (мал. 255); $R^2(3\sqrt{3} - \pi)$ (мал. 256) **832.** $R^2(\pi - 2)$ (мал. 257); $R^2(4 - \pi)$ (мал. 258) **833.** $\frac{8S}{\pi}$. **834.** $\frac{Q\pi\sqrt{3}}{3}$. **835.** $\frac{m^2\pi}{4}$. **836.** $\frac{9l^2}{64\pi}$. **837.** 3 : 2. **838.** $S = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)R^2$. **839.** a^2 . **840.** 10 см. **841.** 1) $\approx 644,6$ см²; 2) $\approx 1790,5$ см². **842.** 0,75 мм. **843.** 43,4 %. **844.** $\approx 9,4$ дм³.

РОЗДІЛ 5. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

§ 13. Переміщення. Паралельне перенесення

- 845.** 1) Ні; 2) так. **846.** 1) Ні; 2) так. **847.** 1) Ні; 2) так. **848.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. **849.** 1) Ні; 2) так. **850.** Мал. 275, б. **851.** Перетворення не є переміщенням, оскільки воно не зберігає відстані між точками. **852.** 1) У точки X' і Y' ; 2) у відрізки CX' і $X'Y'$; 3) так. **853.** 1) Не існує; 2) існує. **854.** Так. **855.** 2) $AB = A'B'$. **858.** Так. **859.** 1) Так; 2) ні. **862.** Якщо $AB \parallel CD$ або AB і CD лежать на одній прямій. **865.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **866.** 1) Так; 2) так. **867.** 1) Не обов'язково. **868.** 1) BOD ; 2) BOC . **869.** Не обов'язково. **870.** Так. **871.** Ні. Це можливо для рівнобедрених трикутників. **873.** Вказівка: скористайтесь наслідком з теореми про властивість переміщення. **874.** 1) Так; 2) так; 3) не завжди; 4) так. **875.** 5 кв. од. (мал. 282); $2(3\sqrt{3} - 2)$ кв. од. (мал. 283). **876.** $AB \parallel CD$ і $AB = CD$ або $AB = CD$ і відрізки AB , CD лежать на одній прямій. **877.** Безліч. **879.** 4 см². **880.** Вказівка: виконайте паралельне перенесення бічної сторони AB трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) так, щоб точка B перейшла в точку C . Розгляньте утворений трикутник. **881.** Вказівка: виконайте паралельне перенесення бічної сторони трапеції так, як показано на малюнку 284. **882.** Вказівка: виконайте паралельне перенесення діагоналі трапеції так, як показано на малюнку 285. **883.** 4 см. Вказівка: скористайтесь малюнком 284. **884.** Вказівка: скористайтесь наслідком з теореми про властивість переміщення та задачею в тексті параграфа. **886.** Вказівка: припустіть, що паралельні прямі a і b при переміщенні переходять у прямі a' і b' , які перетинаються. Оскільки переміщення зберігає належність точок прямій, то прямі a і b також перетиналися б. **887.** Вказівка: скористайтесь малюнком 284. **888.** Вказівка: скористайтесь малюнком 285. **889.** Вказівка: нехай у трикутнику ABC AM і BN — рівні медіани. Паралельно перенесіть відрізок BN так, що точка N перейшла в точку M . $\triangle AMB'$ — рівнобедрений. Розгляньте трикутники ANB і BMA . **892.** Вказівка: нехай $AMNB$ — деякий шлях між селами A і B (мал. 289). Побудуйте точку A' , у яку переходить точка A при паралельно-

му перенесенні, що переводить точку M в точку N . Знайдіть точку K перетину прямої $A'B$ з берегом річки, який є ближчим до села B . Проведіть з точки K перпендикуляр до іншого берега річки.

§ 14. Симетрія відносно точки і прямої

- 893.** 1) Ні; 2) так. **894.** 1) Ні; 2) так. **895.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **896.** 1) Ні; 2) так. **897.** На мал. 314, б. **900.** Вказівка: виміряйте побудований відрізок та визначте розміщення його середини. **901.** Вказівка: побудуйте точки, симетричні вершинам трикутника. **902.** 1) $A'(-3; -5)$; 2) $A'(3; -5)$; 3) $A'(-5; -7)$. **903.** 1) $A'(-2; -2)$, $B'(-6; -6)$; 2) $A'(6; -2)$, $B'(2; -6)$; 3) $A'(2; 2)$, $B'(-2; -2)$. **906.** 1) C_1 , D_1 , D , C ; 2) B_1C_1 , D_1C_1 . **907.** 1) B_1 , A_1 , B , A ; 2) DD_1 , AA_1 . **908.** На мал. 316, в. **911.** Вказівка: побудуйте серединний перпендикуляр до відрізка MN . **915.** 1) Вказівка: побудуйте дві точки, симетричні центру кола та деякій точці кола. **916.** 1) $A'(-4; -5)$; 2) $A'(4; 5)$. **917.** 1) $A'(2; -1)$, $B'(4; -1)$; 2) $A'(-3; 3)$, $B'(3; -3)$; 3) $A'(3; -2)$, $B'(6; -4)$. **919.** Вказівка: спочатку знайдіть точку, відносно якої точки A і B симетричні. **920.** Вказівка: скористайтесь теоремою про властивість симетрії відносно точки. **921.** Вказівка: скористайтесь ознакою: якщо діагоналі чотирикутника діляться точкою їх перетину навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. **922.** 1) $A'(-1; -2)$, $C'(-7; -3)$, $B'(-4; -6)$. **923.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **925.** Вказівка: якщо чотирикутник $ABCD$ має центр симетрії, то вершини A , B , C , D переходять відповідно у вершини C , D , A , B . Отже, його сторони AB і BC переходять відповідно у сторони CD і DA . Тому $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. **926.** Пряма, рівновіддалена від даних прямих. **927.** Вказівка: спочатку побудуйте пряму l , відносно якої симетричні точки A і A' , а потім точки B' і C' , симетричні B і C відносно прямої l . **928.** Вказівка: проведіть пряму, перпендикулярну до бісектриси кута. **930.** Вказівка: скористайтесь тим, що лінія центрів є віссю симетрії кожного з даних кіл. **931.** Вказівка: скористайтесь властивостями діагоналей ромба. **935.** Трапеція — одну; прямокутник — дві, ромб — дві; квадрат — чотири. **937.** Вказівка: побудуйте коло із центром O і радіусом OA . Відкладіть від точки A три хорди, які дорівнюють OA . Дістанете точку A' . **939.** Вказівка: побудуйте пряму, симетричну прямій a відносно точки P . **940.** Вказівка: позначте на даній прямій дві довільні точки M і N . Тоді точка A' , симетрична точці A відносно даної прямої, є точкою перетину кіл із центрами M і N й радіусами MA і NA . **941.** Вказівка: скориставшись властивостями осової симетрії, обґрунтуйте рівність сторін трикутника. **942.** Вказівка: побудуйте точку B_1 , симетричну точці B відносно прямої l . Точка перетину прямих AB_1 і l — шукана точка N . **943.** Вказівка: побудуйте точки M_1 і M_2 , симетричні точці M відносно сторін деякого кута. Проведіть пряму M_1M_2 й позначте точки перетину цієї прямої зі сторонами кута через X і Y . $\triangle MXY$ — шуканий. **946.** Вказівка: скористайтесь розв'язанням задачі 942.

§ 15. Поворот

- 947.** На малюнку 332, в. **948.** Вказівка: відкладіть відрізок $ON = OM$. **954.** 1) У пряму; 3) у кут, рівний даному. **957.** Вказівка: виконайте поворот двох будь-яких точок прямої навколо точки M на даний кут. **958.** Вказівка: виконайте поворот центра кола та деякої точки кола навколо точки A на даний кут. **959.** Геометричне місце центрів поворотів — серединний перпендикуляр до відрізка XX' . **960.** Геометричне місце центрів поворотів — серединний перпен-

дикуляр до відрізка, що сполучає центри даних кіл. **964. Вказівка:** покажіть, що відрізки, які сполучають точку перетину висот із вершинами трикутника, мають рівні довжини, а кути між ними становлять по 120° . **965. Вказівка:** виконайте поворот трикутника навколо центра на кут 120° . **966. Вказівка:** виконайте поворот квадрата навколо центра на кут 90° . **967. Вказівка:** на серединному перпендикулярі до відрізка, який сполучає центри даних кіл, побудуйте точки, з яких цей відрізок видно під кутом 45° . **968.** Центр повороту — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків AA' і BB' . Центра повороту не існує, якщо $AA' \parallel BB'$ і $AA' \neq BB'$, або $AA' = BB'$, а середини відрізків AA' і BB' не збігаються. **969. Вказівка:** виконайте поворот трикутника навколо вершини

B на кут 90° . **971.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **973.** 1) 10 хвилин на 13-ту; 2) 20 хвилин на 13-ту.

974. Вказівка: знайдіть центр повороту, за якого прямокутник $ABCD$ займе положення прямокутника $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 336). Для цього знайдіть точку O перетину серединних перпендикулярів l_1 і l_2 до відрізків AA_1 , BB_1 . При повороті навколо точки O на кут 90° прямокутник $ABCD$ займе положення $A_1B_1C_1D_1$.

§ 16. Перетворення подібності

975. На малюнку 348, б. **976.** Ні. **977.** $k = 1$. **979.** $k = 4$. **981.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **982.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **983.** 1) Ні; 2) так. **984.** Ні. **985.** 1) Так; 2) так.

986. Так, бо $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$. **987.** 14 см, 21 см, 28 см, 35 см. **988.** 1 : 4. **989.** 1) 0,25; 2) 4;

3) 25. **990.** $\sqrt{2}$. **991.** 1) 1 : 16; 2) 4 : 25; 3) $m^2 : n^2$. **992.** 1) 2 : 3; 2) 1 : 4; 3) $\sqrt{m} : \sqrt{n}$.

993. 1) 16 см; 2) 24 см; 3) 32 см. **994.** 1) 56 см²; 2) 100 см²; 3) 120 см². **995.** 1) 18 см,

24 см; 2) 27 см, 36 см. **996.** 1) Ні; 2) так. **997.** Так, якщо $MN \parallel AB$, $k = 0,5$. В інших двох випадках — ні. **999.** 8 см, 10 см, 6 см; 16 см, 20 см, 12 см. **1000.** 1) Ні; 2) ні.

1001. Так. **1002.** Так, $k = 0,5$. **1003.** 1) 81 см², 25 см²; 2) 361 см², 256 см².

1004. 1) 56 см, 40 см; 2) 200 см, 176 см. **1005.** 1) $75\sqrt{3}$ мм²; 2) $250\sqrt{3}$ мм².

1006. 1) 75 см²; 2) 250 см². **1007.** Ні. **1008.** У 2 рази. **1009.** Середня лінія має більшу довжину. **Вказівка:** нехай $ABCD$ — дана трапеція з основами BC і AD , точки N і M лежать відповідно на сторонах AB і CD . Трапеції $NBCM$ та $ANMD$ подібні.

Тоді $\frac{BC}{NM} = \frac{NM}{AD}$, звідси $NM = \sqrt{BC \cdot AD}$. Середня лінія трапеції дорівнює

$\frac{1}{2}(BC + AD)$. Тоді $\sqrt{BC \cdot AD} < \frac{1}{2}(BC + AD)$. **1010.** 1) 1 : 2; 2) $\sqrt{6} : 3$. **1012. Вказів-**

ка: побудуйте деякий ромб із кутом α , вершини якого лежать на сторонах AB і AC . Такий ромб подібний шуканому. **1013.** 4,5 м. **1014.** 35 м. **1016.** Ні.

РОЗДІЛ 6. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

§ 17. Взаємне розміщення у просторі прямих, площин, прямої та площини

1019. 1) Ні; 2) так; 3) ні. **1029.** 1) A, B і D ; 2) AC і CD ; 3) ні, так, ні. **1030.** Ні.

1032. 1) Безліч; 2) одну. **1035.** 15. **1036.** 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 8 см; 4) $12\sqrt{2}$ см;

5) 7 см. **1037.** 1) 5 см; 2) 12 см. **1039.** Не існує. **1051.** 1) Так; 2) ні; 3) так.

§ 18. Многогранники

1070. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **1073.** 1) 94 см²; 2) 164 см²; 3) 52 см².

1074. 1) 2 см²; 2) $\sqrt{2}$ см²; 3) 1 см². **1075.** 1) 16 см², 24 см²; 2) 100 см², 150 см²; 3) 64 см², 96 см². **1076.** 96 см², 144 см². **1077.** 360 см², 840 см². **1079.** 1) 48 см²,

57 см²; 2) 80 см², 96 см²; 3) 96 см², 132 см². **1080.** 1) 120 см², $\frac{240+25\sqrt{3}}{2}$ см²,

$50\sqrt{3}$ см³; 2) 240 см², $240+50\sqrt{3}$ см², $200\sqrt{3}$ см³; 3) 972 см², 1134 см², 2187 см³;

4) 108 см², 126 см², 81 см³; 5) $6\sqrt{3}$ см², $48+12\sqrt{3}$ см², $24\sqrt{3}$ см³; 6) 72 см²,

$72+12\sqrt{3}$ см², $36\sqrt{3}$ см³. **1081.** 250 см³. **1082.** 1) $375\sqrt{3}$ см³; 2) 1500 см³;

3) $2250\sqrt{3}$ см³. **1083.** $9\sqrt{3}$ см³. **1084.** 1) 5 граней, 9 ребер, 6 вершин; 2) 4 грані,

6 ребер, 4 вершини. **1086.** 1) Збільшиться у 9 разів; 2) зменшиться у 16 разів;

3) збільшиться у 2,25 раза; 4) зменшиться у 16 разів. **1087.** 1) 140 см²,

188 см², 120 см³; 2) 480 см², $480+200\sqrt{3}$ см², $600\sqrt{3}$ см³. **1088.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$.

1089. 1) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см², $25\sqrt{3}$ см², $\frac{125\sqrt{2}}{4}$ см³; 2) $75\sqrt{3}$ см², $100\sqrt{3}$ см², $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ см³;

3) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ см², $81\sqrt{3}$ см², $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ см³; 4) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см², $9\sqrt{3}$ см², $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ см³.

1090. 1) $4\sqrt{3}$ см², $4\sqrt{3}+4$ см², $\frac{4\sqrt{3}}{2}$ см³; 2) $25\sqrt{3}$ см², $25\sqrt{3}+25$ см², $\frac{125\sqrt{3}}{6}$ см³.

1091. 1) 324 см², 486 см², 729 см³, 100 см², 150 см², 125 см³; 2) 1444 см², 2166 см²,

6859 см³, 1024 см², 1536 см², 4096 см³. **1092.** 100 см², 108 см², 40 см³; 400 см²,

528 см², 640 см³. **1093.** $2aH(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})$, $2aH(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})+12a^2$, $6a^2H$.

1094. Більший об'єм має многогранник, основою якого є квадрат. **1095.** Много-

гранники мають однакові об'єми. **1097.** 1) 7800 кг; 2) 15 600 кг; 3) 39 т.

§ 19. Тіла обертання

1099. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **1100.** 1) Прямокутник; 2) сектор. **1101.** Ні.

1102. 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **1106.** 1) 40π см², 48π см², 40π см³; 2) 32π см², $37,12\pi$ см²,

$25,6\pi$ см³; 3) 100π см², 110π см², 250π см³. **1107.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні.

1110. 1) $2\pi\sqrt{29}$ см², $2\pi(\sqrt{29}+2)$ см², $\frac{20\pi}{3}$ см³; 2) 15π см², 24π см², 12π см³;

3) $\pi\sqrt{37}$ см², $\pi(\sqrt{37}+1)$ см², 2π см³. **1111.** 1) 5 см, 15π см², 24π см², 12π см³;

2) 13 см, 65π см², 90π см², 100π см³; 3) 10 см, 60π см², 96π см², 96π см³.

1115. 1) 324π см², 108π см³; 2) 4 см, $\frac{256\pi}{3}$ см³; 3) 6 см, 144π см²; 4) 3 см, 36π см²;

5) $\frac{7}{2}$ см, $\frac{343\pi}{6}$ см³; 6) 256π см², $\frac{2048\pi}{3}$ см³. **1113.** 1) 16π см², $\frac{32\pi}{3}$ см³; 2) 36π см²,

36π см³; 3) 64π см², $\frac{256\pi}{3}$ см³. **1114.** 100π см², $\frac{500\pi}{3}$ см³. **1116.** 1) Збільшиться в

n разів, збільшиться в n разів; 2) збільшиться в n разів, збільшиться в n^2 разів.

1117. 1) 120π см², 320π см², 600π см³; 2) 480π см², 1280π см², 4800π см³.

1118. 1) 9 см, 324π см², 729π см³; 2) 7 см, 288π см², 567π см³. **1119.** 1) Ні; 2) ні;

3) ні. **1120.** 1) 175π см², 244π см², 392π см³; 2) 240π см², 384π см², 768π см³.

1121. 1) 5 см, 300π см², 720π см³; 2) 9 см, 324π см², 432π см³. **1122.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{1}{4}$.

1123. 1) $\frac{1728}{125}$; 2) $\frac{27}{512}$. **1124.** 1) Ch , $Ch + \frac{C^2}{2\pi}$, $\frac{C^2h}{4\pi}$; 2) $2h\sqrt{S\pi}$, $2h\sqrt{S\pi} + 2S$,

SH . **1125.** Найбільшу площу бічної поверхні має циліндр, який утворили обер-
танням квадрата навколо його сторони, найбільші площу повної поверхні і
об'єм має циліндр, який утворили обертанням прямокутника навколо сторони

3 см. **1126.** 1) $\frac{C}{2}\sqrt{h^2 + \frac{C^2}{4\pi^2}}$, $\frac{C}{2}\sqrt{h^2 + \frac{C^2}{4\pi^2} + \frac{C^2}{4\pi}}$, $\frac{C^2h}{12}$; 2) $l\sqrt{\pi S}$, $l\sqrt{\pi S} + S$, $\frac{S}{3}\sqrt{l^2 - \frac{S}{\pi}}$.

1127. 1) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$; 2) $\sqrt[3]{9\pi V^2}$; 3) $\frac{C^3}{6\pi^2}$; 4) $\sqrt{\pi S}$. **1128.** 1) 100π см², 36π см²,

$\frac{500\pi}{3}$ см³, 36π см³; 2) 196π см², 16π см², $\frac{1372\pi}{3}$ см³, $\frac{32\pi}{3}$ см³. **1129.** $\approx 36,3\%$.

1130. 1) $\approx 159,38$ км; 2) $\approx 356,51$ км. **1131.** $\approx 78,5$ тис. км², $\approx 482,81$ тис. км²,
 $\approx 506,45$ тис. км², $\approx 145,19$ тис. км².

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

Метод координат на площині

1132. 1) $K(2; -1)$, $L(1; -3)$, $M(5; -2)$; 2) $K(-2; 1)$, $L(-1; 3)$, $M(-5; 2)$;
3) $K(-2; -1)$, $L(-1; -3)$, $M(-5; -2)$. **1133.** $3 - 2\sqrt{3}$, $3 + 2\sqrt{3}$. **1134.** 7 або $\sqrt{53}$.

Вказівка: розгляньте два випадки. **1135.** 9 кв. од. **1136.** 1) 6 см; 2) 6 см;

3) $6\sqrt{2}$ см. **1137.** 1) $y = -2x - 3$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 2x - 3$. **1138.** $C(5; -5)$.

1139. $\left(2; \frac{5}{3}\right)$. **1141.** 22,5 ліктя і 37,5 ліктя.

Вектори на площині

1142. $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$. **1143.** 1) Так; 2) ні. **1144.** $\overline{AB} = \frac{\overline{a}}{2} - \frac{\overline{b}}{2}$, $\overline{BC} = \frac{\overline{a}}{2} + \frac{\overline{b}}{2}$.

1145. $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{CO} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2}$. **1146.** *Вказівка:* знайдіть скалярний

добуток векторів $\overline{a}$ і $2\overline{b} - \overline{a}$. **1147.** $\approx 43^\circ$. **1149.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **1151.** Коло радіусом 1.

Розв'язування трикутників

1152. 1) $\frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + 45^\circ)}$; 2) $\frac{\sqrt{2} c \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$; $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$. **1153.** $\frac{l \sin\left(45^\circ + \frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha}$.

1154. $\frac{d \sin \alpha}{\sin \beta}$. **1155.** 1) $\frac{b \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$; 2) $\frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$. **1156.** $\sqrt{19}$ см. **1157.** $\sqrt{19}$ см,

$\sqrt{19}$ см. **1158.** 1) 45 см²; 2) 8 см². **1159.** 1) $\frac{25}{3}$ см, $\frac{8}{3}$ см; 2) 3,125 см, 1,5 см.

Правильні многокутники

1160. 150° , 30° , 30° . **1161.** 1) 15; 2) 8. **1162.** 1) $12(2 + \sqrt{3})$ см, $6\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ см;
2) $16(2 - \sqrt{3})$ см, $8\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ см. **1163.** *Вказівка:* знайдіть радіус описаного

кола. **1164.** $a = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}$. **1165.** 1) $\frac{10\pi}{3}$ см; 2) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ см. **1166.** 80π см. **1167.** $\frac{C^2}{\pi^2 \sin \alpha}$.

1168. 1) $2\sqrt{m^2 + n^2}$; 2) $2mn\sqrt{\pi}$. **1169.** 100 см².

Геометричні перетворення

1170. 1) 25 см; 2) $\angle A' = 30^\circ$, $\angle B' = 50^\circ$, $\angle C' = 20^\circ$. **1171.** *Вказівка:* доведіть,
що діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину навпіл і вони рівні.
1175. 2 см. **1176.** *Вказівка:* нехай $ABCD$ — трапеція ($AB \parallel CD$). Паралельно пе-
ренесіть одну з її діагоналей, наприклад BD , так, щоб вершина B перейшла у
вершину C . **1177.** 6 см або 4 см. **1178.** 20 см, 28 см, 36 см і 44 см. **1179.** $0,75m$.

Початкові відомості зі стереометрії

1180. 2) 3. **1182.** 29 м. **1184.** Збільшиться у 3 рази. **1185.** 6,25 п л. **1186.** 25.
1187. Приблизно 10 : 37. **1189.** ≈ 149 млн км².

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. Метод координат

1190. Так. **1191.** 1) Так; 2) так; 3) так. **1192.** 1) Ні; 2) так. **1193.** $A(0; 0)$,
 $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 433); $A(-1; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(1; 0)$ (мал. 434). **1194.** $A(1; 1)$,
 $B(1; 4)$, $C(3; 1)$. **1195.** Так (мал. 436); ні (мал. 437). **1196.** Ні. **1199.** 1) $A(0; 0)$,
 $B(6; 0)$, $C(0; 8)$; 2) $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; 4)$; 3) $A(0; 0)$, $B(12; 0)$, $C(0; 16)$.
1200. 1) $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 2)$; $D(0; 2)$; 2) $A(0; 2)$, $B(0; 0)$, $C(2; 0)$; $D(2; 2)$;

3) $A(-\sqrt{2}; 0)$, $B(0; -\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2}; 0)$, $D(0; \sqrt{2})$. **1201.** $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\left(0; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,

$\left(0; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. **1202.** 1) $\sqrt{13}$, 2,5, $\frac{\sqrt{73}}{2}$; 2) $\sqrt{61}$, 6,5, $\frac{\sqrt{601}}{2}$. **1203.** $\sqrt{193}$, 12,5, $\frac{\sqrt{2353}}{2}$.

1204. 1) $\sqrt{85}$, 2) $3\sqrt{2}$. **1205.** 5. **1206.** 1) 5; 2) 13. **1207.** 25. **1208.** 1) $(-a; 0)$,

$\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $(a; 0)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ або $(0; -a)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$,

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $(0; a)$, $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$; 2) *Вказівка:* розгляньте 12 випадків.

1209. У даних квадратів дві вершини спільні. Якщо вони лежать на осі OY , то
абсциси двох інших відповідних вершин квадратів є протилежними числами.
Якщо ці спільні вершини лежать на осі OX , то ординати двох інших відповід-
них вершин квадратів є протилежними числами. **1210.** Так. Наприклад, три-
кутник з вершинами в точках $(1; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$ або $(2; 2)$, $(4; 2)$, $(2; 4)$. *Вказівка:*
щоб довести існування фігури, достатньо навести один приклад. **1211.** 13 см.
1212. *Вказівка:* введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб

один з кінців відрізка AB лежав у початку координат. **1213.** 1) Коло із центром $(2; 0)$ і радіусом $2\sqrt{2}$; 2) пряма, що перпендикулярна до відрізка AB й ділить його у відношенні $5 : 2$, рахуючи від точки A . **1214. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб вершина прямокутника містилась у початку координат. **1215. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб вершина A містилась у початку координат. **1216.** 1) $a = 12\sqrt{2}$, $d = 24$; 2) $a = 2\sqrt{2}$, $d = 4$. **1217.** 1) Ні; 2) дотикається. **1218. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб сторона трикутника, до якої проводимо медіану, лежала на осі абсцис, а основа медіани — у початку координат. **1219. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з вершин паралелограма містилась у початку координат. **1220. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з вершин трапеції містилась у початку координат. **1221.** Точка M розміщується на відстані $3\frac{1}{3}$ від центра кола. **1225.** Пряма $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$, де b — відстань між точками A і B .

Вказівка: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб точка A містилась у початку координат, а точка B лежала на осі абсцис. **1226. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з вершин містилась у початку координат, а одна зі сторін лежала на додатній півосі OX . **1228. Вказівка:** введіть прямокутну декартову систему координат і визначте координати середини третьої сторони трикутника.

2. Векторний метод

1231. Наприклад, на малюнку 455: $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{b}$ і $\vec{d}$, $\vec{d}$ і $\vec{m}$, $\vec{c}$ і $\vec{m}$ та ін. **1232.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **1233.** 1), 4). **1235.** Так. **1236.** 1) $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$; 2) $\overline{AB} \cdot \overline{MP} = 0$; 5) $\overline{AM} = \overline{MB}$.

1239. Вказівка: нехай $ABCD$ — квадрат. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$. Знайдіть скалярний добуток цих векторів. **1240. Вказівка:** нехай $ABCD$ — прямокутник. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$. Знайдіть скалярний квадрат цих векторів. **1241. Вказівка:** нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle B = 90^\circ$). $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Піднесіть рівність до квадрата. **1244. Вказівка:** введіть базис; розкладіть вектори за базисом; скористайтесь тим, що рівні вектори мають рівні координати. **1247. Вказівка:** покажіть, що пари векторів $\overline{AE}$ і $\overline{FC}$, $\overline{AF}$ і $\overline{EC}$ — колінеарні. **1248. Вказівка:** покажіть, що $\overline{DF} = \overline{CE}$. **1249. Вказівка:** покажіть, що $\overline{MP} = \overline{NK}$. **1254.** Сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей. **1259. Вказівка:** Нехай O — центр описаного кола. Введіть вектори $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$, $\overline{OC} = \vec{c}$, $\overline{OM} = \vec{m}$ і покажіть, що їх довжини дорівнюють радіусу кола R . Скористайтесь тим, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. **1260. Вказівка:** скористайтесь фактом: для того щоб точка M була точкою перетину медіан трикутника ABC , необхідно й достатньо, щоб $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$. **1263. Вказівка:** знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(\sqrt{4a+1}; \sqrt{4b+1})$ і $\vec{c}(1; 1)$. **1264.** x — будь-яке число, $y = 0$. **1266.** $100\sqrt{2}$. **1267.** 120° .



ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Вектор 51	— кутовий прямої 37
— одиничний 52	конус 230
вектора довжина 52	координати вектора 71
— модуль 52	— точки 9
вектори колінеарні 52	куля 230
— протилежні 52	кута косинус 21
— протилежно напрямлені 52	— синус 21
— рівні 52	— тангенс 21
— співнаправлені 52	кут між векторами 73
величина векторна 50	— повороту 188
— скалярна 50	Многогранник 219
відрізок напрямлений 50	многогранника вершини 219
вісь симетрії 179	— грані 219
властивість довжини кола 146	— ребра 219
— паралельного перенесення 167	многокутник правильний 128
— переміщення 165	многокутника центр 130
— перетворення подібності 195	— центральний кут 130
— повороту 189	множення векторів скалярне 73
— кутів правильного многокутника 128	Нуль-вектор 52
— симетрії відносно точки 177	Об'єм 222
— — — прямої 179	Паралельне перенесення 166
Добуток вектора на число 56	переміщення 164
— векторів скалярний 74	перетворення подібності 195
Коефіцієнт подібності 195	піраміда 219

площина координатна 9	— синусів 88
поворот навколо точки 188	— про відношення площ подібних многокутників 197
подібність 195	— — відстань між двома точками із заданими координатами 9
правило паралелограма 54	— — властивість правильного многокутника 129
— трикутника 54	— — координати середини відрізка 11
призма 219	— — рівняння кола 35
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом 38	тіло обертання 230
— — загальне 39	точки, симетричні відносно даної точки 176
— —, що проходить через дві точки 39	— — — прямої 178
— фігури 35	Фігура центрально-симетрична 176
різниця векторів 55	фігури подібні 196
розв'язати трикутник 106	— рівні 166
Сегмент круговий 156	—, симетричні відносно точки 176
сектор круговий 155	— — — прямої 179
сектора дуга 155	формула Герона 118
симетрія відносно точки 176	— довжини дуги кола 147
— — прямої 179	— — кола 146
— осьова 179	— площі круга 154
— центральна 176	— — сектора 156
система координат прямокутна декартова 8	формули площі трикутника 117, 119
скалярний квадрат вектора 74	Центр повороту 188
сума векторів 54	— симетрії 176
сфера 232	циліндр 230
Теорема косинусів 98	
— Піфагора узагальнена 100	



ЗМІСТ

Дорогі учні й учениці	3
РОЗДІЛ 1. Узагальнення та систематизація вивченого у 8 класі	5
Чотирикутники	5
Подібність трикутників	6
Розв'язування прямокутних трикутників	7
РОЗДІЛ 2. Координати і вектори на площині	8
§ 1. Декартові координати на площині	8
§ 2. Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° . Основні тотожності	20
§ 3. Поняття рівняння фігури. Рівняння кола і прямої	34
§ 4. Поняття вектора. Дії над векторами	50
§ 5. Координати вектора. Скалярний добуток векторів	70
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 2.	86
РОЗДІЛ 3. Розв'язування трикутників	88
§ 6. Теорема синусів	88
§ 7. Теорема косинусів	98
§ 8. Знаходження невідомих елементів трикутників	106
§ 9. Формули площі трикутника	116
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 3.	126
РОЗДІЛ 4. Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга	127
§ 10. Правильні многокутники. Радіуси описаних і вписаних кіл	127
§ 11. Довжина кола. Довжина дуги кола	145
§ 12. Площа круга та його частин.	154
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 4.	163
РОЗДІЛ 5. Геометричні перетворення	164
§ 13. Переміщення. Паралельне перенесення	164
§ 14. Симетрія відносно точки і прямої	176
§ 15. Поворот	188
§ 16. Перетворення подібності.	194
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 5.	206
РОЗДІЛ 6. Початкові відомості зі стереометрії	207
§ 17. Взаємне розміщення у просторі прямих, площин, прямої та площини	207
§ 18. Многогранники	218
§ 19. Тіла обертання.	229
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 6.	240
Повторення вивченого	241
Для тих, хто хоче знати більше	246
Проекти	260
Додатки	264
Відповіді та вказівки	266
Предметний покажчик	285

Навчальне видання

**БУРДА Михайло Іванович
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна**

ГЕОМЕТРІЯ

**Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Головна редакторка *І. В. Красуцька*

Редакторка *І. В. Луценко*

Головна художниця *І. П. Медведовська*

Художня редакторка *К. В. Берсенєва*

Технічний редактор *Е. А. Авраменко*

Коректорка *Ю. О. Твердохліб*

Малюнки *О. В. Луценко*

Комп'ютерна графіка *О. І. Дядика*

Презентації та інтерактивні вправи *Л. М. Шабанової*

В оформленні підручника використано фото з вільних джерел мережі «Інтернет»,
фотобанку *Shutterstock*

Бренди та ресурси зображуються лише з освітньою метою
та не є закликом до їх купівлі / відвідування

Формат 70×100 ¹/₁₆. Ум. друк. арк. 23,4 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 19,06 + 0,55 форзац.

ТОВ «Український освітянський видавничий центр «Оріон»

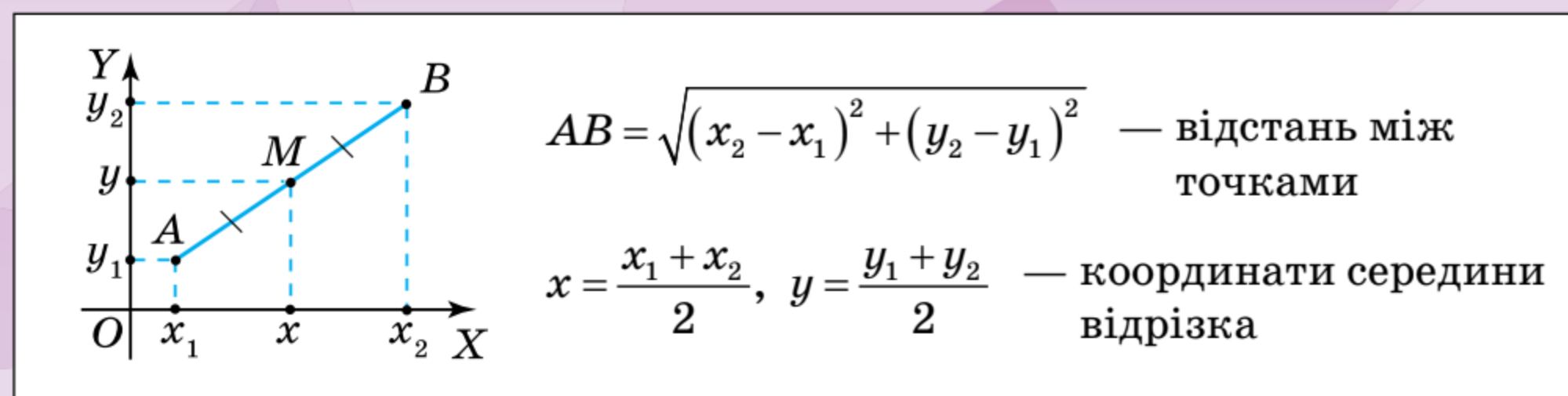
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»

Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.

Адреса видавництва: 03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелева, 2

Віддруковано

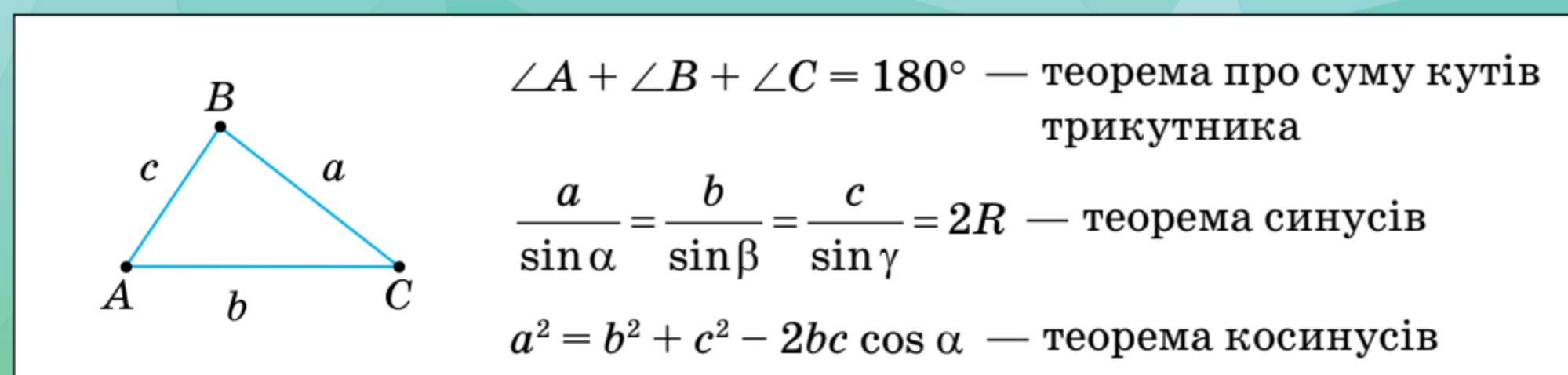
МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ



РІВНЯННЯ ФІГУРИ

Рівняння кола	Рівняння прямої	
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $C(x_0; y_0)$ — центр кола, R — радіус кола	з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$ $k = \tan \alpha$, b — відрізок на осі OY	що проходить через дві точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
загальне: $ax + by + c = 0$		

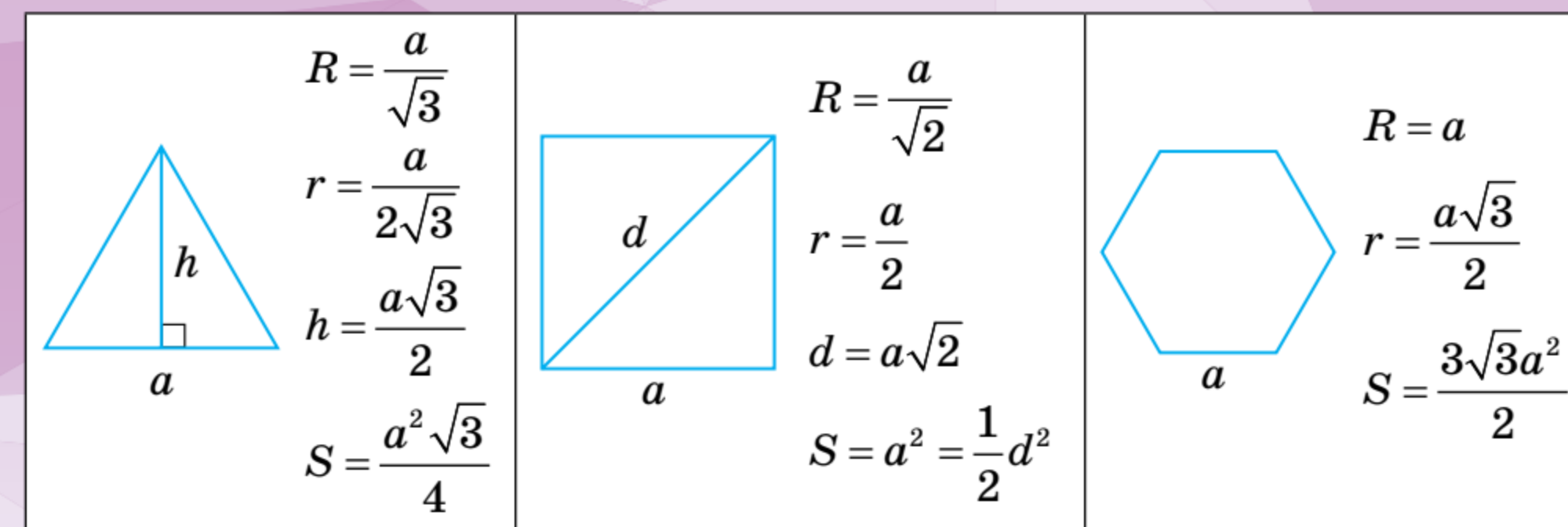
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ



ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

$S = \frac{ah_a}{2}$, де h_a — висота, проведена до сторони a	$S = pr$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$, r — радіус вписаного кола	$S = \frac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола	$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, де α — кут між сторонами b і c
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$			

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ



ДОВЖИНА КОЛА Й ДУГИ КОЛА

Довжина кола	Довжина дуги кола
$C = 2\pi R$ або $C = \pi D$, де D — діаметр кола	$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$

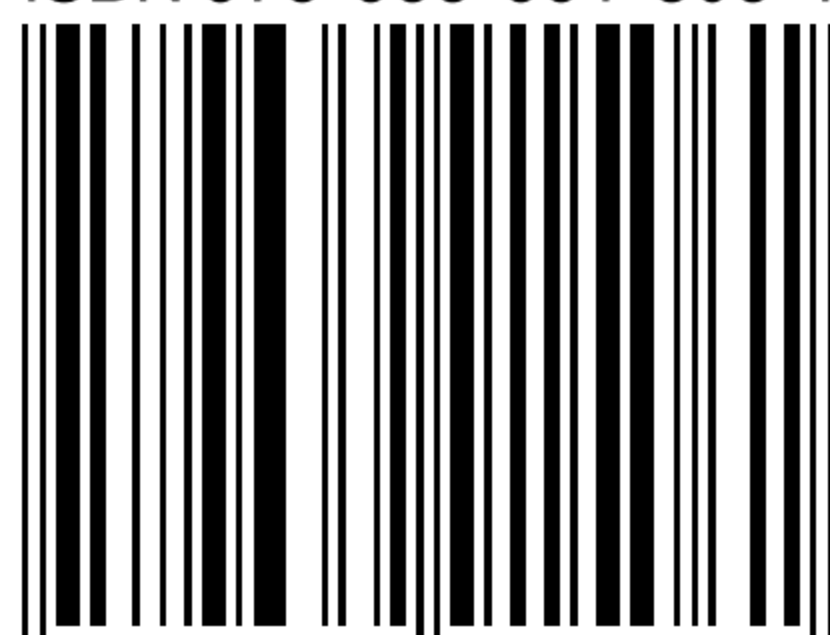
ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

Площа круга	Площа сектора	Площа сегмента
$S = \pi R^2$ або $S = \frac{\pi D^2}{4}$, де D — діаметр кола	$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$	$S = S_{\text{сектора}} - S_{\Delta AOB}$

МНОГОГРАННИКИ Й ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Об'ємні фігури й тіла	Пряма призма	Правильна піраміда	Циліндр	Конус	Куля, сфера
	$V = S_{\text{осн}} \cdot H$ $S_6 = P_{\text{осн}} \cdot H$	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$ $S_6 = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot m$	$V = \pi R^2 H$ $S_6 = 2\pi R H$	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ $S_6 = \pi R L$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $S = 4\pi R^2$

ISBN 978-966-991-506-1



9 789669 915061