ОСВІТА
ВИДАВНИЧИЙ ДІМ

Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

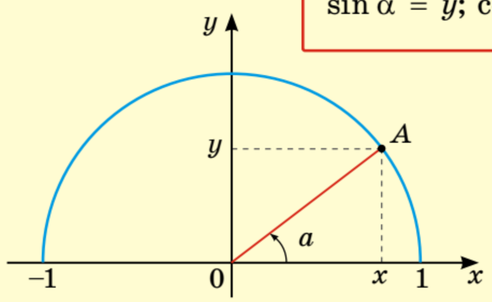
ГЕОМЕТРІЯ

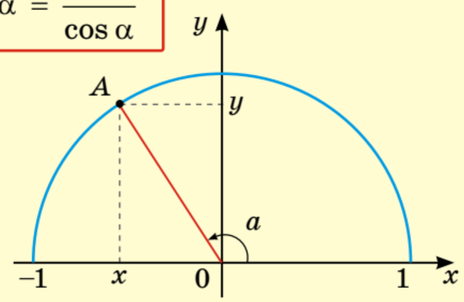


9 КЛАС

Тригонометричні функції

$$\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$





Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

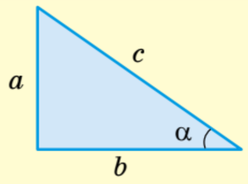
Тригонометричні тотожності

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;\ \cos(180° - \alpha) = \cos\alpha;$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha;\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

прямокутного



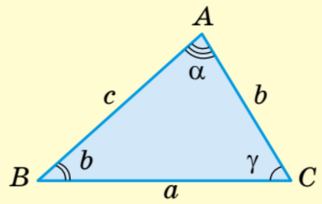
$a^2 + b^2 = c^2$

$a = c\sin\alpha$

$b = c\cos\alpha$

$a = b\operatorname{tg}\alpha$

довільного



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$ — теорема косинусів,

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ — теорема синусів.

Декартові координати на площині

Формула відстані між двома точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координати середини відрізка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Загальне рівняння прямої

$ax + by = c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$

Рівняння кола

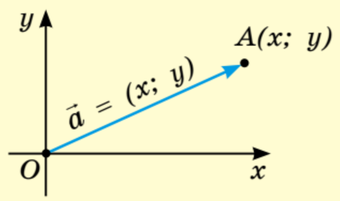
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$,

де $M(a;\ b)$ — центр кола,

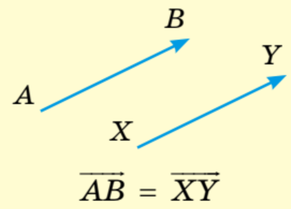
R — радіус кола

Вектори і дії над ними

Координати вектора



Рівні вектори

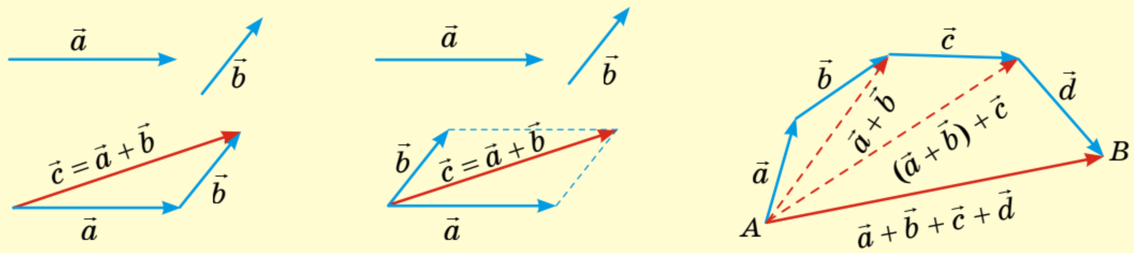


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$

Модуль вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Додавання векторів



Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$ і $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$,

$k\vec{a} = (kx_1;\ ky_1)$, де k — деяке число, $\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1x_2 + y_1y_2)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, або $\vec{a} = k\vec{b}$ — умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$,

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ або $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{0}$ — умова їх перпендикулярності ($\vec{a} \neq \vec{0}; \vec{b} \neq \vec{0}$).

Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

Геометрія

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
Видавничий дім «Освіта»
2026

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 № 110*)

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

До підручника розроблено інтерактивний електронний додаток. Щоб ознайомитись із матеріалами додатка, перейдіть за посиланням *https://profile.gioschool.com/ua/auth*

Для експерта 1	Для експерта 2
Логін: test150033@gioschool.com Пароль: Qwerty1234	Логін: test152296@gioschool.com Пароль: Qwerty1234

ДОРОГІ ДЕВ'ЯТИКЛАСНИКИ ТА ДЕВ'ЯТИКЛАСНИЦІ!

Ви продовжуєте свою захопливу подорож дивовижним світом геометрії. Важко знайти професію, де б не знадобилися геометричні знання. Вони необхідні архітекторам та інженерам, художникам і конструкторам, мореплавцям, астрономам і навіть кондитерам. Яку б галузь ви не обрали в майбутньому, вміння логічно та просторово мислити, а також аналізувати допоможе вам досягти високих результатів.

Значення геометрії для розвитку людства та особистості підкреслювали видатні мислителі:

Геометрія є пізнання всього існуючого.

Платон

Серед рівних розумом — за однакових інших умов — переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

Цього року ви завершуєте вивчення планіметрії, що стане вашим міцним фундаментом для вивчення стереометрії у старшій школі, опанування інших наук та успішного життя в сучасному суспільстві.

Саме тепер ви починаєте розуміти не лише «як», а й «навіщо»: геометричні ідеї та методи стають вашою інструментальною базою для дослідження навколишнього світу. Проте пам'ятайте: **головним архітектором ваших знань є ви самі**. Успіх у сучасному світі неможливий без самостійності та відповідальності за власне навчання.

Кілька порад для ефективного старту:

- підготуйте підручники, креслярське приладдя та зошити так, щоб усе було під рукою;
- навіть невеликий обсяг завдань, що виконуються систематично, дає результат;
- вимикайте гаджети, що відволікають, аби ваш розум працював на повну потужність.

Бажаємо вам натхнення, творчої уяви та великих успіхів у навчанні!

РОЗДІЛ 1

Метод координат на площині

Координатний метод у геометрії виявився настільки корисним і зручним, що започаткував створення окремої великої частини математики — аналітичної геометрії. Її вивчають у всіх вищих і середніх технічних закладах і на математичних факультетах університетів. За допомогою аналітичної геометрії вдалося перекинути міст між алгеброю і геометрією.

У цьому розділі ти ознайомишся з декартовими координатами та методом координат, які дають змогу розв'язувати алгебраїчні задачі за допомогою геометрії, а геометричні — за допомогою алгебри. Ти зможеш складати рівняння різних ліній і досліджувати їх властивості.

§ 1 Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°
Sines, Cosines and Tangents of Angles from 0° to 180°

§ 2 Тригонометричні тотожності
Trigonometric Identities

§ 3 Декартові координати
Cartesian Coordinates

§ 4 Відстань між точками
Distance Between the Points

§ 5 Рівняння кола
Circle Equation

§ 6 Рівняння прямої
Line Equation

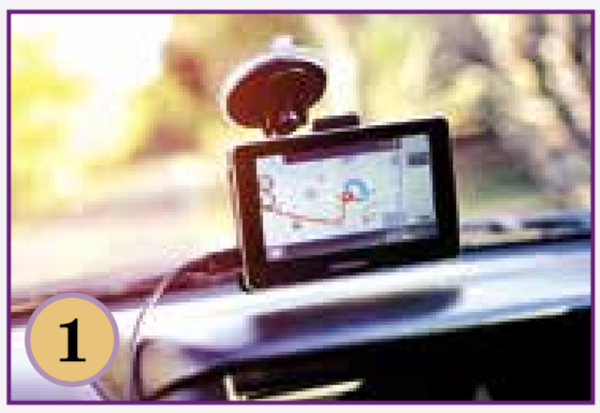
НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЄКТ «Цікаві криві»
EDUCATIONAL PROJECT «Interesting Curves»



Для чого вивчати координати та метод координат?

Зручність координатного методу і простота алгоритмів, за допомогою яких описуються точки кривих алгебраїчними рівняннями, спричинили їх швидке поширення й активне застосування у багатьох галузях науки та людської життєдіяльності. Географічні координати використовують у географії, картографії, геодезії, будівництві, військовій справі. За допомогою навігаційних приймачів визначають координати місцезнаходження під час руху в автомобілі[1], кораблі, літаку[2].

Безпілотні літальні апарати, або дрони[3], використовують для військової справи, масштабного будівництва, сільського господарства, спостереження за лісами та водоймами, відеозйомки.


1


2


3

Жодна з областей сучасної науки не обходиться без графічного подання інформації. Невидима система координат міститься на екрані комп'ютера[4].

Вихідні сигнали миші можна розглядати як дві незалежні величини й перетворювати їх у координати положення на двовимірній площині. У графічному режимі значення x (нумерацію стовпчиків) відраховують від лівого краю екрана вправо, а значення y (нумерацію рядків) — від верхнього краю екрана вниз.

Координати застосовують у багатьох іграх (морський бій, шашки, шахи[5]).

Спеціальні системи координат використовують в медичних дослідженнях, наприклад, у комп'ютерній томографії.

Координати використовують в алгебрі, фізиці, хімії, біології та інших науках і шкільних предметах.

Ефективно використовують у промисловості координатні верстати[6] та столи і верстати з програмним управлінням, 3D-принтери.


4


5


6

Вивчивши матеріал розділу, ти дізнаєшся про зв'язки алгебри, геометрії та тригонометрії, розширеш свої знання з тригонометрії, зможеш застосувати вивчений матеріал до розв'язування цікавих практичних задач.

А де ще використовують координати? Наведи свої приклади.

§1 СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС КУТА ВІД 0° ДО 180°

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- одиничне коло — unit circle
- косинус кута — cosine of the angle
- синус кута — sine of the angle
- тангенс кута — tangent of the angle

У фізиці та механіці тригонометричні функції використовують для дослідження періодичних процесів та обертальних рухів. А оскільки колесо (мал. 1.1) чи вал турбіни (мал. 1.2) може повернутися на будь-який великий кут в одному або протилежному напрямах, то розглядають тригонометричні функції кута α, де α може дорівнювати, наприклад, 500°, 700°, −600° тощо (детальніше про це в 10 класі).

У геометрії для розв'язування трикутників досить розглядати тригонометричні функції кутів від 0° до 180°.



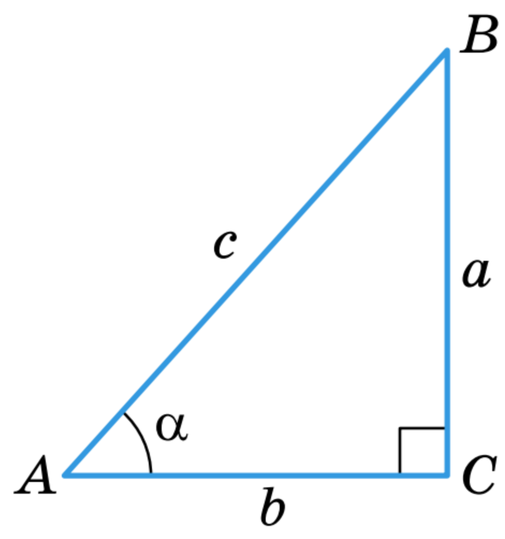
Мал. 1.1



Мал. 1.2

Нагадаємо, що таке синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Якщо в прямокутному $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (мал. 1.3), то

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$



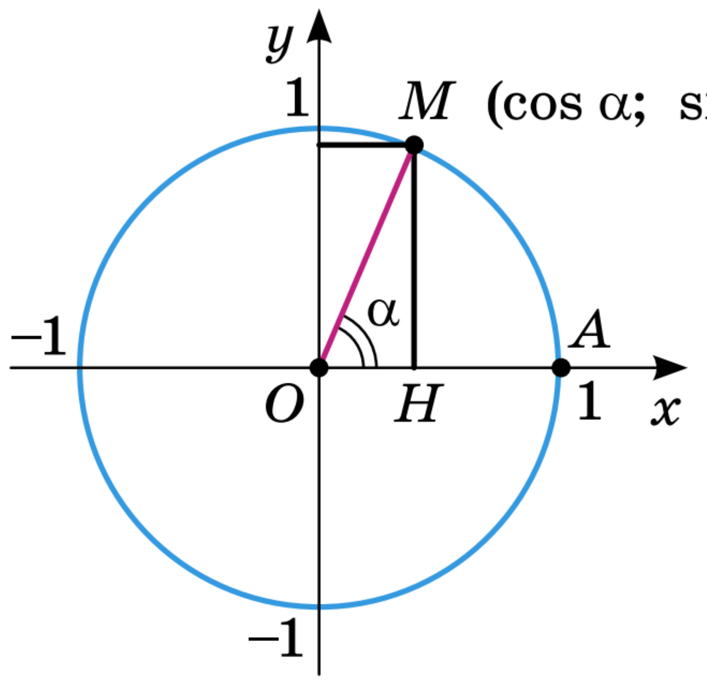
Мал. 1.3

Користуючись цими формулами, можна розв'язувати прямокутні трикутники.

А от щоб розв'язувати довільні трикутники, потрібно використовувати тригонометричні функції не тільки гострих, а й тупих кутів.

Пояснимо, що означають вирази $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, де α — такий кут, що $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Накреслимо на координатній площині коло радіуса $r = 1$ із центром у початку координат (мал. 1.4). Це — *одиничне коло*. Позначимо точку перетину додатної півосі O_x з одиничним колом буквою A і домовимося відкладати кути від променя OA проти руху годинникової стрілки. Кути та їх міри позначатимемо грецькими літерами α (альфа), β (бета) і γ (гамма) тощо.



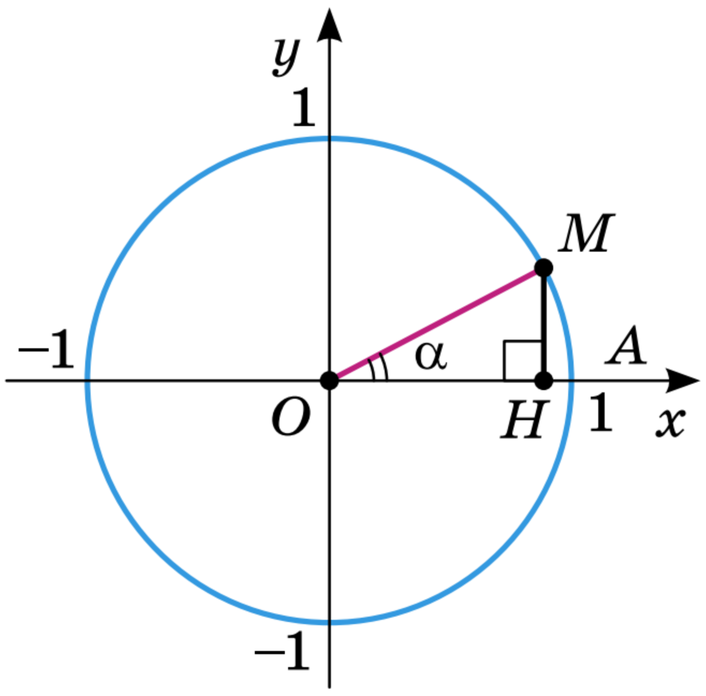
Мал. 1.4

Якщо M — така точка одиничного кола, що $\angle AOM = \alpha$, то абсцису точки M називають *косинусом кута* α, а ординату — *синусом кута* α. На малюнку 1.4 $OH = \cos\alpha$, $MH = \sin\alpha$. Дійсно, з прямокутного трикутника OHM, враховуючи, що $OM = 1$, маємо: $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OH}{1} = OH$ і $\sin\alpha = \dfrac{MH}{OM} = \dfrac{MH}{1} = MH$.

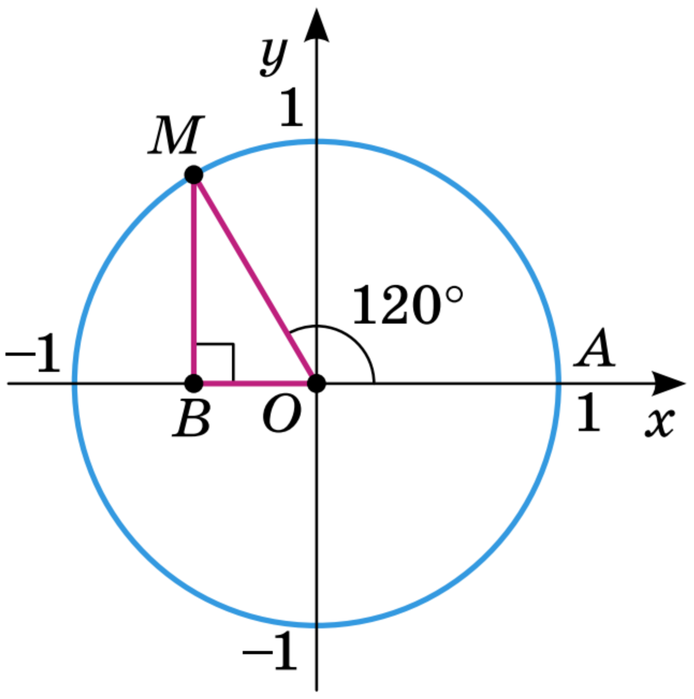
Якщо координати точки $A(1; 0)$, то, користуючись означенням косинуса і синуса, можемо записати, що $\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$. Аналогічно, $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$.

Якщо $\alpha = 30°$ (мал. 1.5), то ордината точки M дорівнює $\dfrac{1}{2}$, бо катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Тому якщо $OM = 1$, то $MH = \dfrac{1}{2}$. Таким чином, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$. За теоремою Піфагора

$$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Отже, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Мал. 1.5



Мал. 1.6

Якщо $\alpha = 120°$ (мал. 1.6), тобто $\angle AOM = 120°$, то $\angle MOB = 60°$, а $\angle OMB = 30°$. Тоді, за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, $OB = 0{,}5OM = 0{,}5$. Оскільки точка M лежить у другій чверті, то її абсциса — від'ємне число. У даному випадку вона дорівнює $-0{,}5$, а тому $\cos 120° = -0{,}5$.

За теоремою Піфагора $MB = \sqrt{MO^2 - BO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ордината точки M дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а тому $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Зрозуміло, що $\operatorname{tg}\alpha$ має зміст тільки при таких значеннях α, при яких $\cos\alpha \neq 0$, бо на нуль ділити не можна. Оскільки для кутів від $0°$ до $180°$ $\cos\alpha = 0$, якщо $\alpha = 90°$, то у даному випадку $\operatorname{tg}\alpha$ визначений лише для кутів $\alpha \neq 90°$.

Розглянемо, як обчислювати тангенси кутів від $0°$ до $180°$.

Наприклад, $\operatorname{tg}30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{tg}120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Зміна $\sin\alpha$ при зміні α

http://yakistosviti.com.ua/userfiles/file/gif-file/sinus_kosinus_tangens.gif

Точні значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ для деяких кутів α наведено в таблиці 1.1.

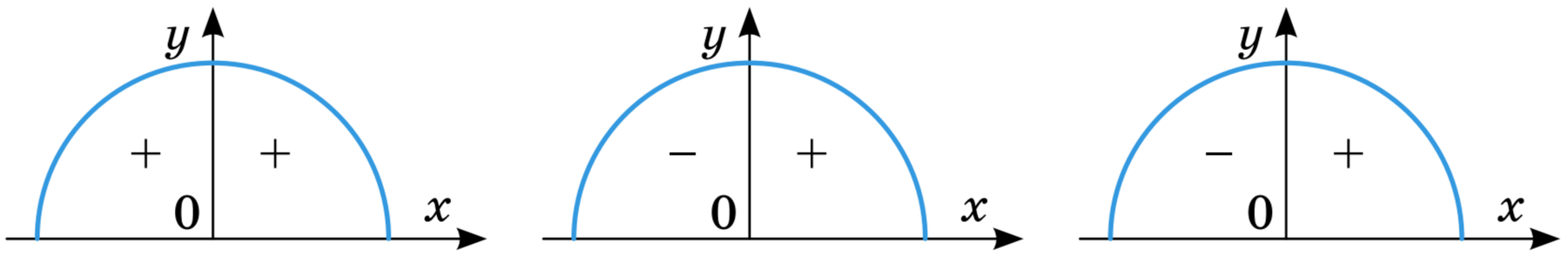
Таблиця 1.1

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Функції $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ називають *тригонометричними функціями кута* α. Сформульовані у 8 класі означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника не суперечать новим.

Зверни увагу!

Синус, косинус і тангенс гострого кута набуває лише додатних значень, а косинус і тангенс тупого кута — від'ємних (мал. 1.7).



Знаки синусів *а* Знаки косинусів *б* Знаки тангенсів *в*

Мал. 1.7

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Крім синуса, косинуса і тангенса кута α, розглядають ще котангенс кута α.

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса, тобто $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Оскільки $\sin\alpha = 0$, якщо $\alpha = 0^\circ$ і $\alpha = 180^\circ$, то для цих кутів котангенс не визначений. Якщо кут α — гострий ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), то $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. Якщо кут α — тупий ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), то $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 90^\circ$, то $\operatorname{ctg}90^\circ = \dfrac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \dfrac{0}{1} = 0$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

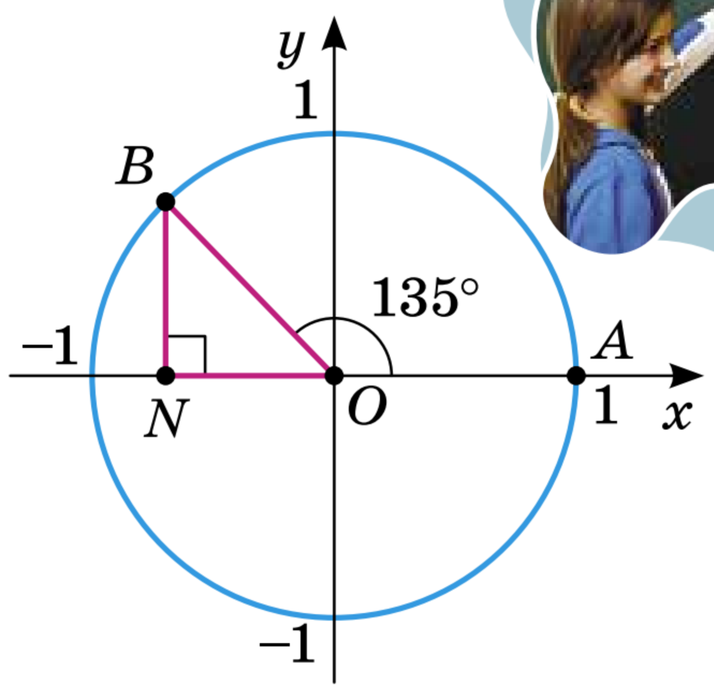
1. Що називають одиничним колом?
2. Що називають: а) синусом кута; б) косинусом кута; в) тангенсом кута?
3. Які знаки мають тригонометричні функції гострого кута? Тупого кута?
4. Сформулюй означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Користуючись одиничним колом, знайди $\sin 135^\circ$ і $\cos 135^\circ$.

- На малюнку 1.8 зображено одиничне коло (коло радіуса $r = 1$ із центром у початку координат). Якщо на цьому малюнку $\angle AOB = 135^\circ$ і $\angle ONB = 90^\circ$, то $\angle NOB = 45^\circ$ і $\angle NBO = 45^\circ$. Тоді $\triangle ONB$ — рівнобедрений і $NO = NB$. За теоремою Піфагора:



Мал. 1.8

$OB^2 = NO^2 + NB^2$, або $1 = 2NO^2$, звідси $NO^2 = \frac{1}{2}$, а $NO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

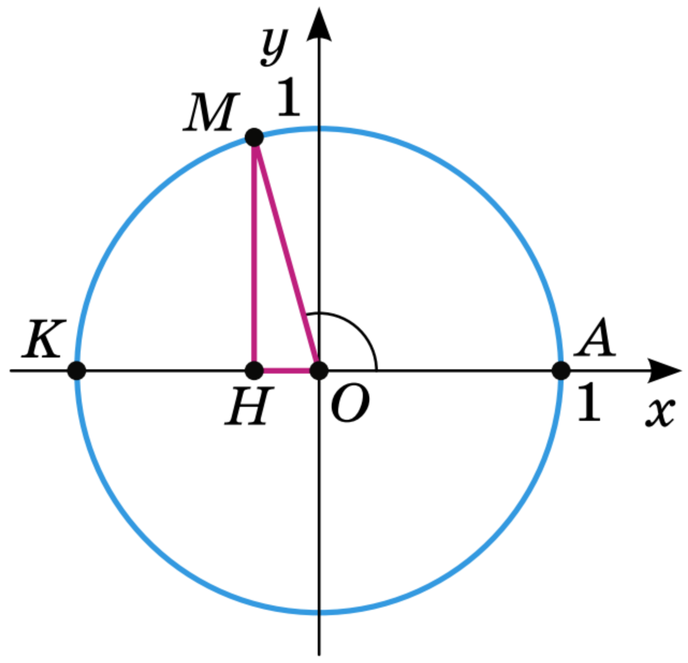
Оскільки $NO = OB$, то точка B має координати $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Отже, $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Побудуй кут, косинус якого дорівнює $-0{,}25$.

- Побудуємо в системі координат одиничне коло (мал. 1.9). Поділимо радіус OK на чотири рівні частини.

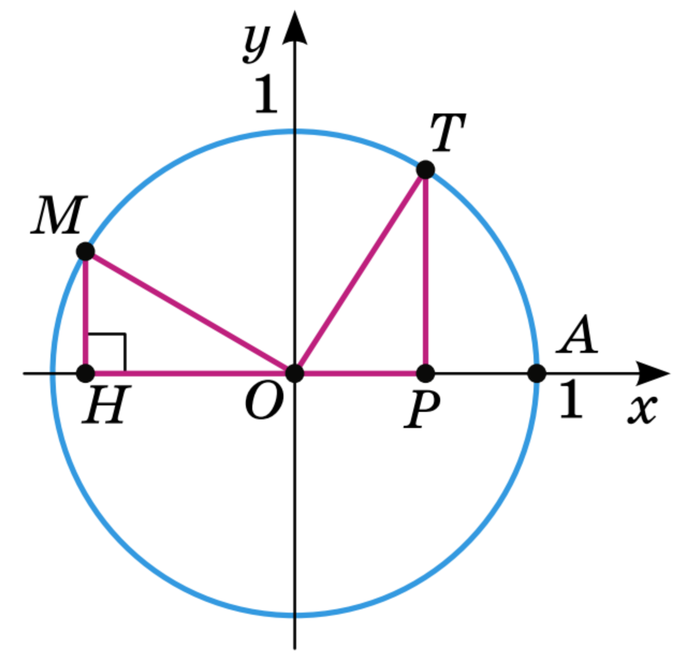
  Тоді $OH = \frac{1}{4}OK = 0{,}25$. Проведемо $HM \perp OK$. Точка M належить одиничному колу і лежить у другій чверті, тому її абсциса дорівнює $-0{,}25$. Отже, $\cos \angle AOM = -0{,}25$ і $\angle AOM$ — той, що потрібно було побудувати.



Мал. 1.9

3. Доведи, що $\sin 150° = \cos 60°$.

- Нехай $\angle MOA = 150°$, а $\angle TOA = 60°$ (мал. 1.10). Тоді $\angle MOH = 30°$, а $\angle HMO = 60°$. За гіпотенузою і гострим кутом $\triangle MOH = \triangle OTP$, а тому $PO = MH$. Оскільки $PO = \cos 60°$, а $MH = \sin 150°$, то $\sin 150° = \cos 60°$. Що і треба було довести.



Мал. 1.10

4. Відомо, що $\alpha < \beta$. Порівняй $\sin\alpha$ і $\sin\beta$, $\cos\alpha$ і $\cos\beta$.

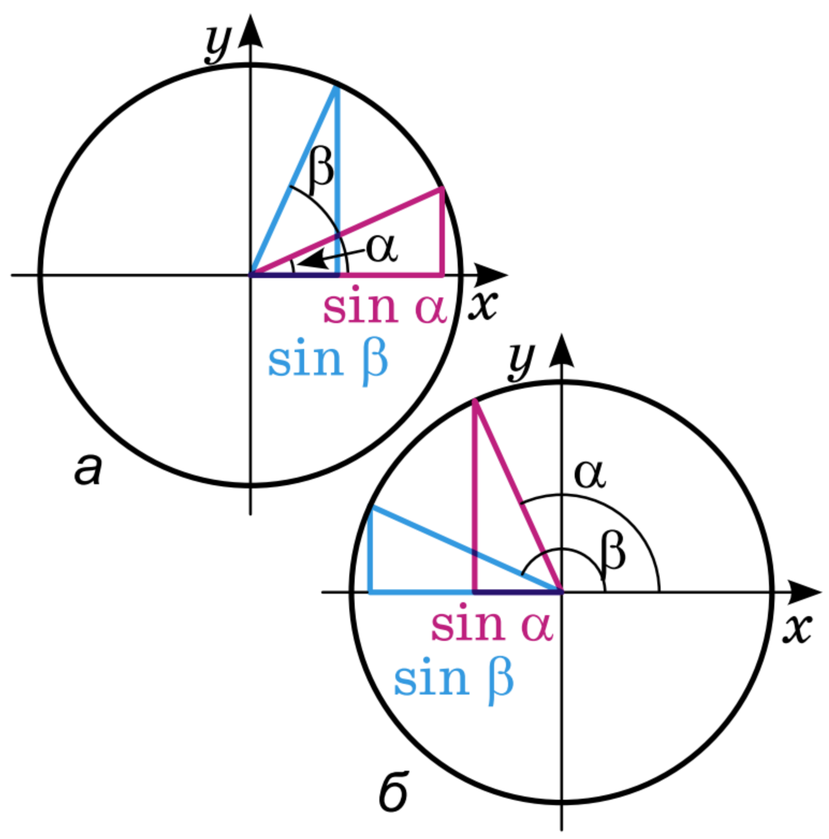
- З малюнка 1.11, *а* видно, що $\sin\alpha < \sin\beta$, якщо кути α і β гострі. Якщо ж кути α і β тупі, то $\sin\alpha > \sin\beta$ (мал. 1.11, *б*). Для кутів α і β таких, що $0° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180°$, завжди $\cos\alpha > \cos\beta$.

5. ***Відкрита задача.*** Установи вид трикутника ABC, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\sin B = \ldots$

- Доповнимо умову кількома різними способами, наприклад:

  1) $\sin B = 0$, 2) $\sin B = 1$, 3) $\sin B = \frac{1}{2}$,

  4) $\sin B = a$, де $0 < a < \frac{1}{2}$.



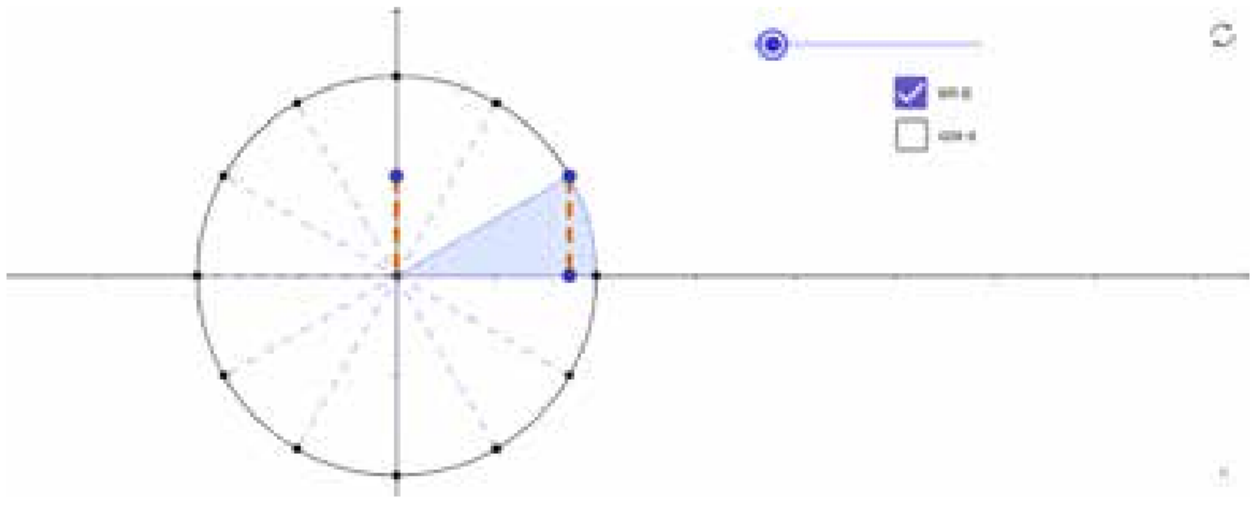
Мал. 1.11

З'ясуємо вид трикутника для кожного з цих випадків.
1) Якщо $\sin B = 0$, то $\angle B = 0°$ або $\angle B = 180°$. Трикутника з такими кутами не існує.
2) Якщо $\sin B = 1$, то $\angle B = 90°$. Маємо: $\angle A = 30$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$. Отже, $\triangle ABC$ — прямокутний, але не рівнобедрений.
3) Якщо $\sin B = \frac{1}{2}$, то $\angle B = 30°$ або $\angle B = 150°$. Розглянемо кожен з цих 2 випадків. У першому випадку маємо: $\angle A = 30°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 120°$. Отже, $\triangle ABC$ — тупокутний і рівнобедрений. У другому випадку маємо: $\angle A = 30°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 0°$. Трикутника з такими кутами не існує.
4) Якщо $\sin B = a$, де $0 < a < \frac{1}{2}$, то $0° < \angle B < 30°$ або $150° < \angle B < 180°$. У першому випадку маємо: $\angle A + \angle B < 60°$, а тому $\angle C > 120°$. Отже, $\triangle ABC$ тупокутний, але не рівнобедрений. У другому випадку: $\angle A + \angle B > 180°$. Трикутника з такими кутами не існує.
Інші випадки розглянь самостійно.

ВИКОНАЄМО УСНО



1. Чи може абсциса або ордината точки одиничного кола дорівнювати 2?
2. Яке з тверджень хибне?
А $\sin\alpha = 1$ **Б** $\cos\alpha = -1{,}2$ **В** $\sin\alpha = 0{,}9$ **Г** $\cos\alpha = 1$
3. Чи може синус кута, меншого від 180°, бути числом від'ємним? А косинус?
4. Чому дорівнює: а) $\sin 30°$; $\sin 90°$; б) $\cos 45°$; $\cos 60°$; в) $\operatorname{tg} 30°$; $\operatorname{tg} 90°$?
5. Тангенс якого кута дорівнює 1? А якого −1?
6. Знайди $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо: а) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.
7. Яким є кут α, якщо $\cos\alpha = -0{,}3$?
А гострий **Б** прямий **В** тупий **Г** не можна встановити
8. Визнач кут α, якщо $\sin\alpha = 0{,}5$.
А 30° **Б** 60° **В** 150° **Г** 30° або 150°
9. Використовуючи розробку Ярослави Мартиненко в *GeoGebra* *https://www.geogebra.org/m/tJh2bCh7*, обери тригонометричну функцію та прокоментуй зміни на малюнку 1.12 під час пересування повзунка.



Мал. 1.12

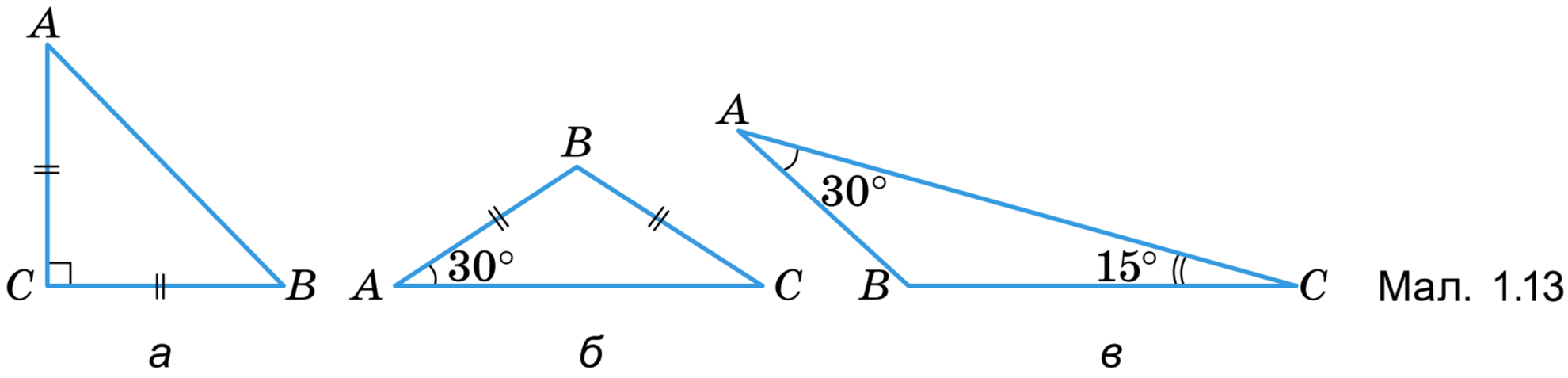
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



10. Дано три точки: $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$. Знайди синус і косинус кута AOB.

11. Знайди синус і косинус кута AOK, якщо $A(1; 0)$, $O(0; 0)$, $K(0; 1)$.

12. Користуючись малюнком 1.13, знайдіть синус, косинус і тангенс кута B трикутника ABC.



Мал. 1.13

13. Обчисли значення виразу: а) $\sin 45° - \cos 60° \cdot \cos 90° + \cos 135°$;
б) $\sin 30° \cdot \cos 150° - \sin^2 135° \cdot \operatorname{tg} 120°$.

14. Обчисли значення виразу:
а) $\sin 30° \cdot \cos 60° - \cos^2 120° + \sin 135° \cdot \cos 90°$;
б) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg}^2 135° + \cos 150°$.

15. Запиши кути у три колонки: *I* — гострі кути; *II* — тупі кути; *III* — вид кута не можна встановити.

$\sin A = 0{,}6$; $\cos B = -0{,}8$; $\sin C = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} D = -2$;

$\cos E = \frac{1}{4}$; $\cos L = \frac{11}{12}$; $\operatorname{tg} R = \frac{12}{11}$; $\sin O = \frac{7}{15}$.

Визнач знак добутку (16, 17).

16. а) $\sin 127° \cdot \cos 27° \cdot \cos 99°$; б) $\cos 29° \cdot \sin 108° \cdot \operatorname{tg} 118°$;
в) $\cos 30° \cdot \sin 15° \cdot \cos 125° \cdot \operatorname{tg} 35°$;
г) $\sin 137° \cdot \cos 150° \cdot \operatorname{tg} 22° \cdot \cos 35°$.

17. а) $\cos 48° \cdot \cos 96° \cdot \sin 144°$; б) $\sin 46° \cdot \cos 146° \cdot \operatorname{tg} 88°$;
в) $\operatorname{tg} 143° \cdot \sin 165° \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \cos 126°$;
г) $\cos 32° \cdot \sin 132° \cdot \cos 135° \cdot \operatorname{tg} 92°$.

18. ЗНО Укажи правильну нерівність, якщо $a = \sin 120°$, $b = \cos 120°$.
А $0 < b < a$ **Б** $a < 0 < b$ **В** $a < b < 0$ **Г** $0 < a < b$ **Д** $b < 0 < a$

19. ЗНО Розташуй у порядку зростання числа $a = \operatorname{tg} 36°$, $b = \operatorname{tg} 93°$, $c = \operatorname{tg} 180°$.
А b; c; a **Б** c; b; a **В** a; b; c **Г** c; a; b **Д** b; a; c

20. Знайди кути $\triangle ABC$, якщо $\sin A = 0{,}5$, а $\cos B = -0{,}5$.

21. Знайди кути $\triangle ABC$, якщо $\operatorname{tg} A = -1$, а $\sin C = \frac{1}{2}$.

22. Знайди кути ромба $ABCD$, якщо $\cos D = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. Установи відповідність між значеннями виразів (1–4) та значеннями виразів (А–Д).

1 $\sin 90°$	**А** $\cos 60°$
2 $\cos 30°$	**Б** $\sin 120°$
3 $\sin 150°$	**В** $\cos 90°$
4 $\cos 45°$	**Г** $\cos 0°$
	Д $\sin 135°$

Знайди, користуючись калькулятором (24, 25).

24. $\sin 3°$; $\sin 56{,}7°$; $\cos 64{,}25°$; $\operatorname{tg} 15°$.

25. $\sin 4{,}8°$; $\cos 25°$; $\cos 45{,}8°$; $\operatorname{tg} 81{,}1°$.

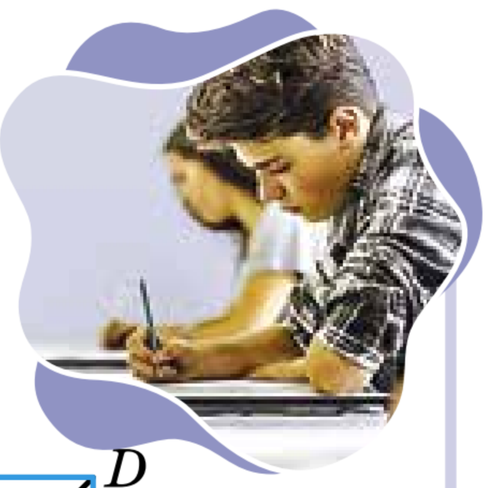
26. Користуючись калькулятором або таблицями, знайдіть кут, якщо відомо: а) його косинус дорівнює: 0,325; 0,78; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) його тангенс дорівнює: 0,726; 2,605; $\frac{1}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

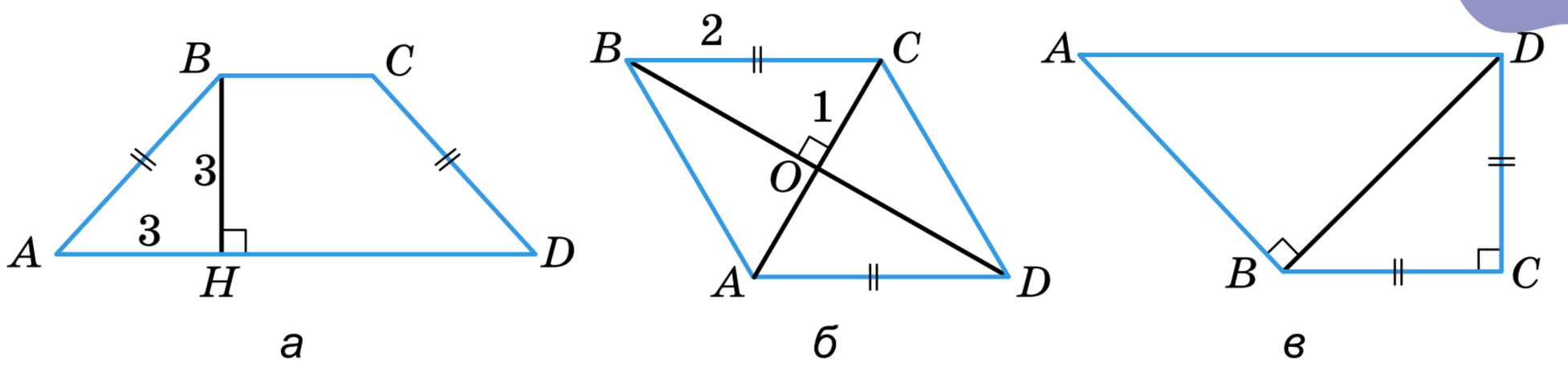
27. Знайди гострий кут, синус якого дорівнює:

а) 0,26; б) $\frac{3}{7}$; в) 0,685; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



28. Користуючись малюнком 1.14, знайди синус, косинус, тангенс кутів A, B, C і D чотирикутника $ABCD$, якщо $BC \parallel AD$.



Мал. 1.14

29. Знайди синус, косинус і тангенс кутів ромба, периметр якого дорівнює 16 см, а площа 8 см^2.

30. Косинус одного з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайди кути трикутника.

31. Синус одного з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 0,5. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

32. Знайди бічні сторони прямокутної трапеції, якщо косинус одного з її кутів дорівнює $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, а різниця основ дорівнює a.

33. Знайди, користуючись одиничним колом: $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\sin 120°$, $\cos 120°$.

34. Using a unit circle, find: $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\sin 150°$, $\cos 150°$.

35. Доведи, що $\sin 45° = \cos 45°$.

Замість * постав знаки > або < (36, 37).

36. а) $\cos 5° * \cos 7°$; б) $\sin 82° * \sin 79°$; в) $\operatorname{tg} 29° * \operatorname{tg} 132°$.

37. а) $\cos 113° * \cos 115°$; б) $\sin 178° * \sin 108°$; в) $\operatorname{tg} 97° * \operatorname{tg} 17°$.

38. Побудуй кут, косинус якого дорівнює: а) $\frac{3}{4}$; б) $-0{,}5$. Знайди синус і тангенс цього кута.

39. Побудуйте кут, синус якого дорівнює 0,75. Скільки розв'язків має задача?

40. Що більше: а) $\sin 10°$ чи $\cos 10°$; б) $\cos 45°$ чи $\sin 45°$?

Який із кутів більший — α чи β, якщо (41, 42):

41. а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$;

б) $\sin\alpha = 0{,}75$, $\sin\beta = 0{,}93$ (кути α і β — гострі).

42. $\sin\alpha = 0{,}75$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$ (кути α і β — тупі).

43. Побудуй кут, синус якого вдвічі більший за косинус.

44. Побудуй кут, косинус якого в три рази більший за синус.

45. Синус кута у 5 разів менший за його косинус. Знайди тангенс цього кута.

46. **Гра.** Один із гравців / одна із гравчинь задає значення $\cos B$, де B — кут трикутника ABC, а другий / друга установлює вид трикутника ABC. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

47. Порівняй: а) $\sin 72°$ і $\sin 106°$; б) $-0{,}5$ і $\cos 127°$.

48. H — точка перетину висот $\triangle ABC$. Знайди $\cos\angle AHC$, якщо $\sin\angle ABC = 0{,}5$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



49. Накресли на міліметровому папері півколо радіуса 100 мм і поділи його транспортиром на 18 рівних частин. Користуючись цим малюнком:

а) покажи, що у разі збільшення кута від 0° до 90° його синус збільшуватиметься від 0 до 1, а зі збільшенням кута від 90° до 180° його синус зменшуватиметься від 1 до 0;

б) покажи, що у разі збільшення кута від 0° до 90° його косинус зменшуватиметься від 1 до 0, а зі збільшенням кута від 90° до 180° його косинус зменшуватиметься від 0 до –1;

в) склади таблицю наближених значень синуса і косинуса для кутів 0°, 10°, 20°, 30°, ..., 180°.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



50. Знайди катети прямокутного трикутника, якщо вони пропорційні числам 2 і 3, а гіпотенуза дорівнює $4\sqrt{13}$ см.

51. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см. Знайди його периметр.

52. У колі проведено два взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Знайди радіус кола, якщо $AC = m$.

§2 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

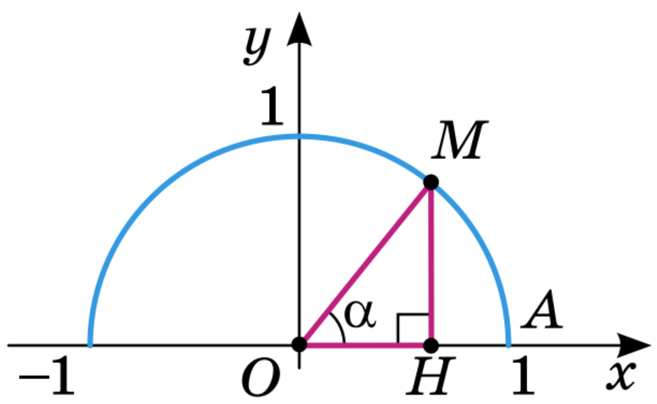
основна тригонометрична тотожність — Pythagorean identity

Розглянемо найважливіші формули, що пов'язують синус, косинус і тангенс одного й того самого кута α.

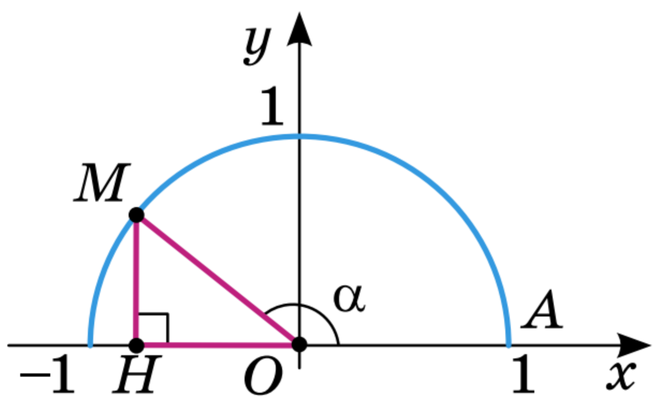
Нехай α — гострий кут. На одиничному колі позначимо точку M таку, що $\angle MOA = \alpha$ (мал. 2.1). Тоді $MH = \sin\alpha$, $OH = \cos\alpha$, $OM = 1$.

За теоремою Піфагора $MH^2 + OH^2 = OM^2$, або

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (*)$$



Мал. 2.1



Мал. 2.2

Якщо кут α тупий (мал. 2.2), то з прямокутного трикутника OMH ($OM = 1$, $MH = \sin\alpha$, $OH = -\cos\alpha$) за теоремою Піфагора маємо: $MH^2 + HO^2 = OM^2$, або $\sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2 = 1$, звідки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Рівність (*) правильна і в цьому випадку.

Якщо $\alpha = 0°$, то $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$; якщо $\alpha = 90°$, то $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$; якщо $\alpha = 180°$, то $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

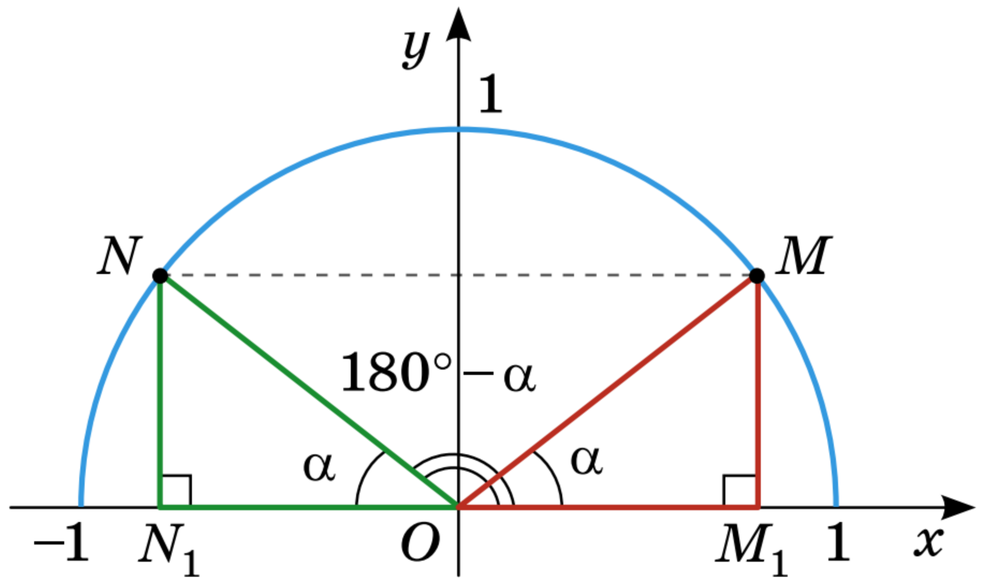
У кожному з цих випадків рівність (*) правильна.

Отже, для кожного α, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Це — основна *тригонометрична тотожність*. Вона пов'язує синус і косинус одного кута і дає змогу виражати одну з цих тригонометричних функцій через іншу: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

У другій формулі перед коренем ставлять знак «−», якщо кут α тупий. Кутів, більших від розгорнутого, ми не розглядаємо.

Звернімо увагу на точки N і M одиничного кола, які відповідають кутам $180° - \alpha$ і α (мал. 2.3). Їх ординати NN_1 і MM_1 рівні, а абсциси ON_1 і OM_1 відрізняються тільки знаками (бо $\triangle NN_1O = \triangle MM_1O$ за гіпотенузою і гострим кутом).



Мал. 2.3

Отже, завжди $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

За цими формулами синус і косинус тупого кута $180° - \alpha$ можна виразити через синус і косинус гострого кута α. Наприклад:

$\sin 147° = \sin(180° - 33°) = \sin 33°$,

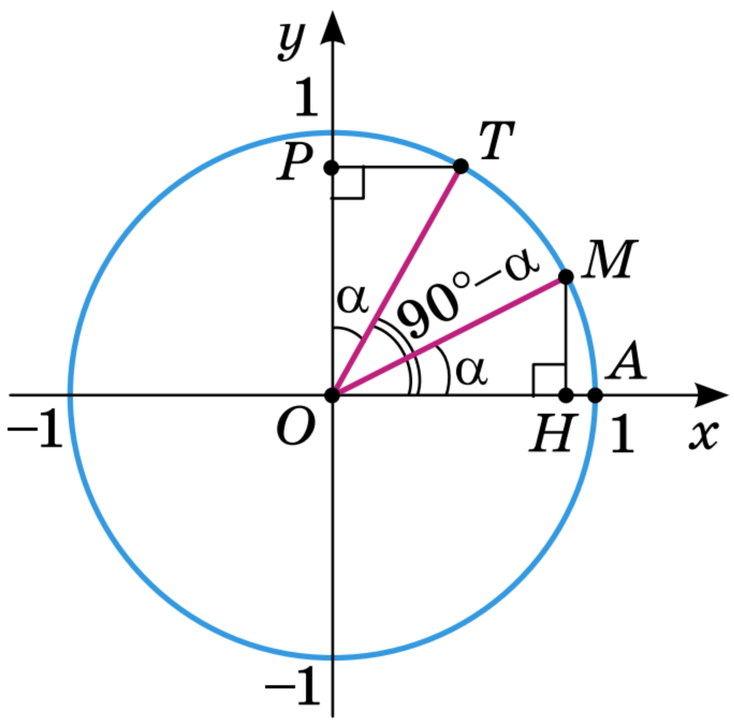
$\cos 105° = \cos(180° - 75°) = -\cos 75°$.

Доведемо ще формули

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$,

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Нехай $\angle MOA = \alpha$, $\angle TOA = 90° - \alpha$ (мал. 2.4). Тоді $\angle POT = \alpha$. За гіпотенузою і гострим кутом $\triangle MOH = \triangle TOP$. Звідси $PT = MH$, $OP = OH$.



Мал. 2.4

Оскільки $PT = \cos(90° - \alpha)$, $MH = \sin\alpha$, то $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Оскільки $OP = \sin(90° - \alpha)$, $OH = \cos\alpha$, то $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Доведені дві формули дають змогу виразити синус і косинус будь-якого гострого кута, більшого за 45°, через косинус і синус кута, меншого від 45°. Отже, значення синусів кутів від 0° до 45° є водночас значеннями косинусів кутів від 90° до 45°.

Приклад. $\sin 10° = \cos 80° = 0{,}174$; $\cos 50° = \sin 40° = 0{,}643$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Оскільки $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ і $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, то $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \dfrac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. Оскільки $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ і $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, то $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \dfrac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$. Аналогічно можна довести, що $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Усі ці рівності правильні за умови, якщо знаменники відмінні від нуля, тобто якщо тангенси і котангенси існують.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Розв'язування трикутників. Урок 1).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй основну тригонометричну тотожність.
2. Якими мають бути праві частини тотожностей:
   а) $\sin(90^\circ - \alpha) = \ldots$; б) $\cos(90^\circ - \alpha) = \ldots$?
3. Доведи, що $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
4. Доведи рівність $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Знаючи, що $\cos\alpha = 0{,}6$, знайди $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.

• Відомо, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Оскільки синус кожного кута α, якщо $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$, є число додатне, то $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Якщо $\cos\alpha = 0{,}6$, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8,$$

а $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$.

Отже, $\sin\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 1\dfrac{1}{3}$.

2. Обчисли $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$.

• $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

3. Доведи, що коли $\alpha \neq 0^\circ$, то $\sin\alpha : \cos(90^\circ - \alpha) = 1$.

• $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Тому $\sin\alpha : \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha : \sin\alpha = 1$.

4. Обчисли значення виразу $\sin 77^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 167^\circ \cdot \cos 77^\circ$.

• $\sin 77^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 167^\circ \cdot \cos 77^\circ =$
$= \sin(90^\circ - 13^\circ) \cdot \cos 13^\circ + \sin(180^\circ - 13^\circ) \cdot \cos(90^\circ - 13^\circ) =$
$= \cos 13^\circ \cdot \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cdot \sin 13^\circ = \cos^2 13^\circ + \sin^2 13^\circ = 1$.

ВИКОНАЄМО УСНО



53. Яка з рівностей правильна?
А $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ **Б** $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
В $\sin(90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$ **Г** $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

54. Чому дорівнює значення виразу $\sin^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ$?
А 73 **Б** 1 **В** –1 **Г** не можна встановити

55. Знаючи, що $\cos\alpha = 0{,}7$, знайди: а) $\sin(90^\circ - \alpha)$; б) $\cos(180^\circ - \alpha)$.

56. Спрости: а) $\sin(180^\circ - 35^\circ)$; б) $\cos(180^\circ - 43^\circ)$; в) $\operatorname{tg}(180^\circ - 20^\circ)$;
г) $\sin(90^\circ - 23^\circ)$; ґ) $\cos(90^\circ - 27^\circ)$; д) $\operatorname{tg}(90^\circ - 14^\circ)$.

57. Закінчи перетворення:

а) $\sin 140° = \sin(180° - 40°) = \ldots$; б) $\cos 126° = \cos(180° - 54°) = \ldots$;

в) $\sin 85° = \sin(90° - 5°) = \ldots$; г) $\cos 62° = \cos(90° - 28°) = \ldots$.

58. Яке з тверджень правильне? Чому?

А $\sin 136° = \sin(180° - 44°) = \sin 44°$

Б $\cos 147° = \cos(180° - 33°) = \cos 33°$

В $\sin 75° = \sin(90° - 15°) = -\cos 15°$

Г $\cos 153° = \cos(180° - 27°) = -\sin 27°$

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



59. Знайди синус і тангенс кута α, якщо:

а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = 0{,}8$; в) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

60. Знайди косинус і тангенс гострого кута α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; в) $\sin\alpha = 0{,}2$.

61. Знайди косинус і тангенс тупого кута α, якщо:

а) $\sin\alpha = 0{,}5$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; в) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$.

62. ЗНО Обчисли $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$ і $90° < \alpha < 180°$.

63. Установіть відповідність між значеннями синуса кута α (1–4) та відповідними значеннями косинуса цього кута (А–Д).

1 0,5 (кут α — гострий)	**А** $-0{,}8$
2 0,6 (кут α — тупий)	**Б** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
3 $\frac{4}{5}$ (кут α — гострий)	**В** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4 $\frac{1}{3}$ (кут α — тупий)	**Г** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
	Д 0,6

64. Знаючи значення синуса, косинуса і тангенса кута 30°, знайди $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$.

65. Given the sine, cosine, and tangent of angle 60°, find $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$.

66. Запиши через тригонометричні функції гострого кута:

а) $\sin 117°$; б) $\cos 142°$; в) $\operatorname{tg} 118°$; г) $\sin 136°$.

67. **Гра.** Один із учасників / одна з учасниць задає градусну міру тупого кута, а другий / друга — записує синус цього кута через тригонометричні функції кута, меншого від 45°.

68. Запиши через тригонометричні функції кута, меншого від 45°:
а) cos 150°; б) sin 145°; в) tg 87°; г) cos 95°.

69. З наведених рівностей випиши тільки правильні.
а) sin 150° = sin 50°; б) sin 129° = −sin 51°; в) tg 118° = −tg 62°;
г) tg 117° = tg 63°; ґ) cos 87° = sin 3°; д) cos 113° = cos 67°;
е) cos 126°= −cos 54°; є) cos 149° = −sin 31°; ж) tg 29° = −tg 151°.

70. Косинус гострого кута паралелограма дорівнює 0,25. Чому дорівнює косинус його тупого кута? А синус?

71. Косинус тупого кута ромба дорівнює −0,7. Чому дорівнює косинус його гострого кута? А синус?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



72. Обчисли:
а) $\sin 29° \cdot \cos 61° - \cos 29° \cdot \cos 151°$;
б) $1 - \sin 37° \cdot \sin 143° - \cos^2 37°$;
в) $\operatorname{tg} 43° \cdot \cos 137° \cdot \cos 47° - \cos 43° \cdot \sin 47°$.

73. ЗНО Обчисли значення виразу $4\sin^2\alpha$, якщо $4\cos^2\alpha = 1$.

А 0 **Б** $\frac{1}{4}$ **В** $\frac{3}{4}$ **Г** 3 **Д** 4

Користуючись калькулятором, знайди міри тупих кутів α, β і γ, якщо відомо (74, 75):

74. а) $\sin\alpha = 0{,}156$; $\cos\beta = 0{,}998$; $\operatorname{tg}\gamma = -2{,}050$;
б) $\cos\alpha = -0{,}921$; $\sin\beta = 0{,}309$; $\operatorname{tg}\beta = -1{,}306$.

75. $\sin\gamma = 0{,}719$; $\cos\gamma = -0{,}777$; $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}111$.

76. Доведи, що $\sin 135° = \sin 45° = \cos 45°$.

77. Доведи, що $\cos 140° = -\cos 40° = -\sin 50°$.

Знайди значення виразу (78, 79).

78. а) $\frac{\sin 72°}{\sin 108°}$; б) $\frac{\cos 165°}{\cos 15°}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 27°}{\operatorname{tg} 153°}$; г) $\frac{\sin 36°}{\cos 54°}$.

79. а) $\frac{\sin 138°}{\sin 42°}$; б) $\frac{\cos 21°}{\cos 159°}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 116°}{\operatorname{tg} 64°}$; г) $\frac{\cos 78°}{\sin 12°}$.

80. Доведи тотожності.
а) $\sin^2\alpha - \cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha) - 1 = 0$;
б) $1 + \operatorname{tg}(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha) \cdot \sin\alpha = \cos^2(180° - \alpha)$.

81. Установи відповідність між значеннями виразів (1–4) та значеннями виразів (А–Д).

1 sin 10°	**А** sin 44°
2 cos 46°	**Б** sin 57°
3 sin 123°	**В** cos 134°
4 cos 45°	**Г** cos 80°
	Д sin 45

82. Спрости вирази.

а) $\sin^2\alpha + \sin^2(90° - \alpha) + \operatorname{tg}^2(180° - \alpha)$;

б) $(1 - \cos^2(90° - \alpha))\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2(90° - \alpha)$.

83. Замість * поставте знаки $>$, $<$ або $=$.

а) $\sin 12° * \cos 80°$; б) $\operatorname{tg} 36° * \operatorname{tg} 112°$;

в) $\cos 54° * \sin 36°$; г) $\cos 36° * \sin 31°$.

84. Доведи: а) синуси будь-яких двох кутів паралелограма або рівнобічної трапеції рівні; б) сума косинусів усіх кутів паралелограма або трапеції дорівнює нулю.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



85. Накресли довільний паралелограм $ABCD$. Виміряй за допомогою транспортира його кути і знайди їх синуси, косинуси і тангенси. Отримані дані занеси у таблицю. Який висновок можна зробити?

	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\angle A$				
$\angle B$				
$\angle C$				
$\angle D$				

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



86. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо тангенс одного з них дорівнює -1.

87. Спортсменка біжить у південному напрямі 4 км, а потім повертає на північ і біжить ще 3 км. Знайди: а) на якій відстані опинилася спортсменка від початкової точки; б) на який кут змістилася спортсменка по відношенню до руху у південному напрямі?

88. Знайди знак добутку.

а) $\sin 146° \cdot \cos 108° \cdot \cos 67° \cdot \operatorname{tg} 145°$;

б) $\operatorname{tg} 78° \cdot \sin 92° \cdot \sin 167° \cdot \operatorname{tg} 178° \cdot \cos 83°$.

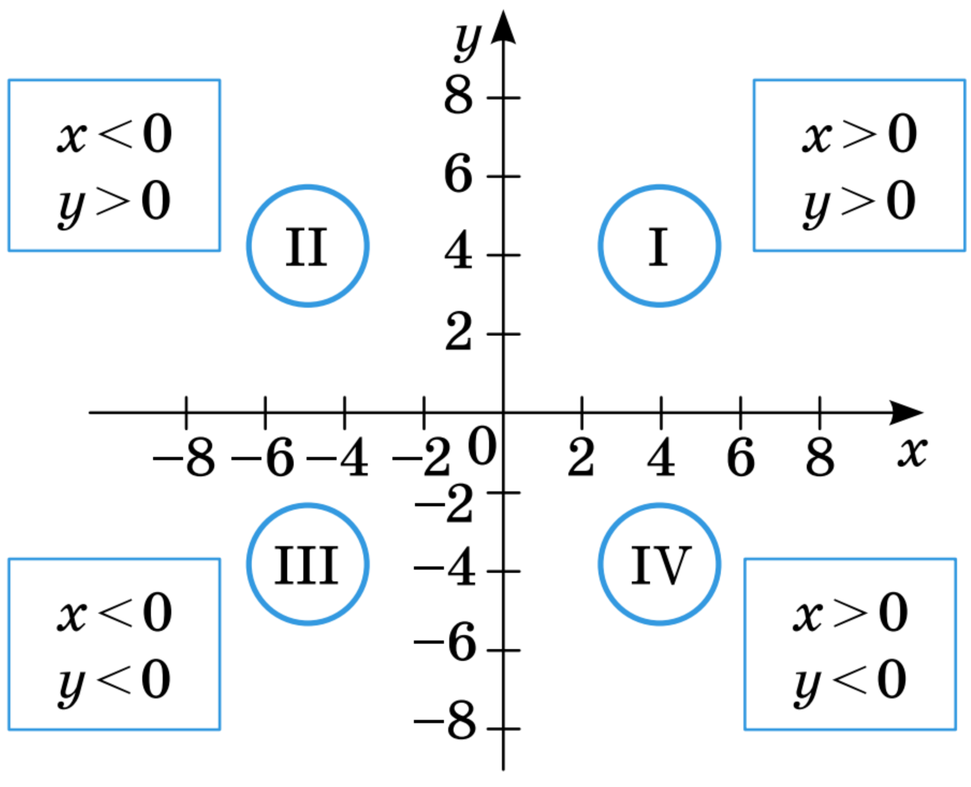
§ 3 ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- прямокутна система координат — rectangular coordinate system
- початок координат — origin
- координатна площина — coordinate plane
- координати середини відрізка — coordinates of the midpoint

Пряму, на якій вибрано напрям, початок відліку та одиничний відрізок, називають *координатною прямою*. Кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число.

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються у їх спільному початку відліку й одиничні відрізки яких рівні, називають *прямокутною системою координат*. Спільний початок відліку — точка, у якій перетинаються осі координат, називають *початком координат*. Горизонтальну вісь — вісь Ox — називають *віссю абсцис*, а вертикальну вісь — вісь Oy — *віссю ординат*.

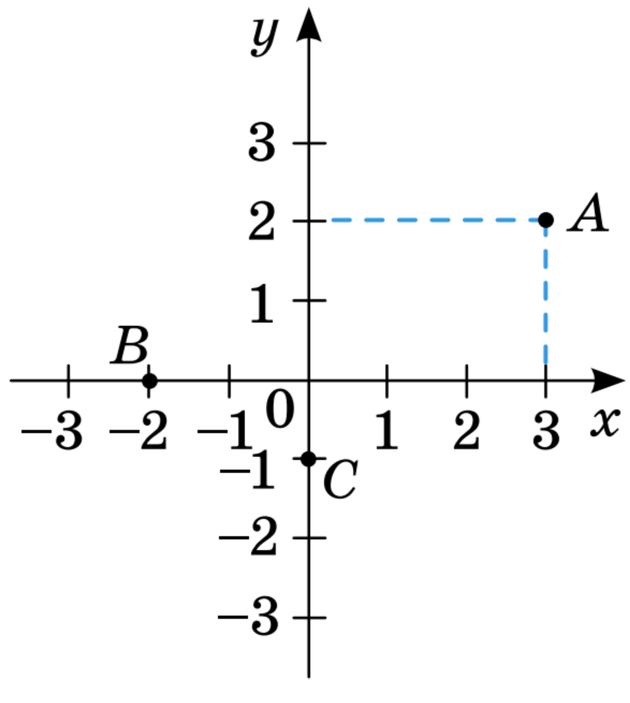


Мал. 3.1

Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною*.

Осі координат розбивають координатну площину на чотири чверті, у кожній із яких зберігаються знаки обох координат (мал. 3.1).

Положення точки на координатній площині задається двома числами — її координатами. Наприклад, точка A має абсцису 3 і ординату 2 (мал. 3.2). Записують так: $A(3;\ 2)$. Точка O — початок відліку — має координати 0 і 0. Точки, які лежать на осі OX, мають ординати, що дорівнюють нулю ($y = 0$); точки, які лежать на осі OY, мають абсциси, що дорівнюють нулю ($x = 0$). На малюнку 3.2 це точки $B(-2;\ 0)$ і $C(0;\ -1)$.



Мал. 3.2

Запис $X(m;\ n)$ означає: точка X має координати m (абсциса) і n (ордината).

Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара дійсних чисел, а кожній парі

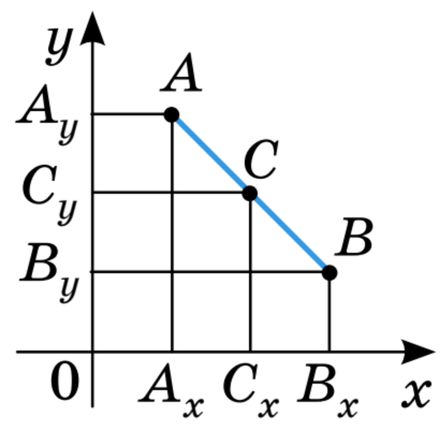
дійсних чисел — єдина точка координатної площини. Завдяки взаємно однозначній відповідності між парами дійсних чисел і точками координатної площини залежність між точками координатної площини можна виражати алгебраїчними співвідношеннями між їх координатами. Це дає можливість розв'язувати геометричні задачі координатним методом. Але для цього треба знати властивості координат.

Теорема 1. Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Тобто якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — кінці відрізка AB, а точка $C(x; y)$ — його середина, то: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, тобто $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Доведення.

Нехай точки A і B розміщені, як показано на малюнку 3.3. Проведемо через них прямі, паралельні осям координат. При цьому утворяться трапеції ABB_yA_y і ABB_xA_x, у яких $AA_y = x_1$, $BB_y = x_2$, $AA_x = y_1$, $BB_x = y_2$.



Мал. 3.3

Оскільки C — середина відрізка AB, то CC_y і CC_x — середні лінії цих трапецій. За теоремою про середню лінію трапеції: $CC_y = \frac{AA_y + BB_y}{2}$; $CC_x = \frac{AA_x + BB_x}{2}$,

або $CC_y = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $CC_x = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Маємо: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Ми розглянули випадок, коли відрізок AB не паралельний жодній осі координат і не перетинає їх. Після розгляду інших можливих випадків (зроби це самостійно) приходимо до загального висновку: якщо точка $C(x; y)$ — середина відрізка з кінцями $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Приклад. Серединою відрізка з кінцями $A(-3; 5)$ і $B(3; 7)$ є точка $C(0; 6)$, оскільки $\frac{-3 + 3}{2} = 0$ і $\frac{5 + 7}{2} = 6$.

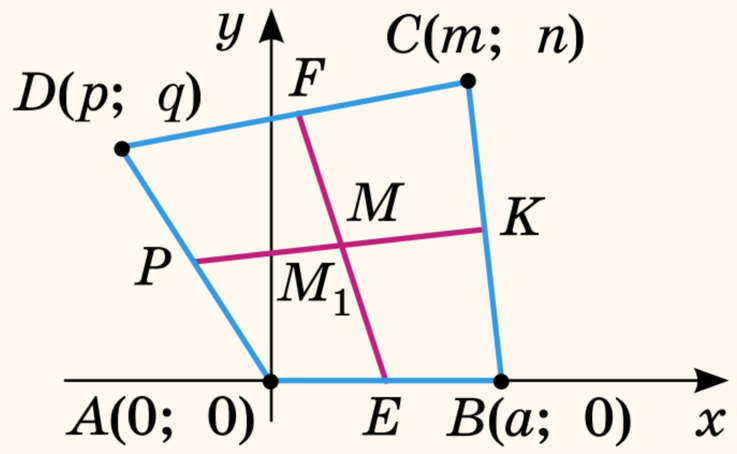
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Розв'язуючи задачу координатним методом, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям — рівняння, обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. Зіставивши початкові й інші координати точок і рівняння, знаходять відповідь.

Задача. Доведи, що середини відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, співпадають.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, E, K, F, P — середини його сторін, M і M_1 — середини відрізків EF і KP (мал. 3.4). Доведемо, що точки M і M_1 збігаються.



Мал. 3.4

Введемо систему координат так, щоб її початком була точка A, а сторона AB лежала на осі x. Позначимо координати вершин даного чотирикутника: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(m; n)$, $D(p; q)$.

Виразимо через них координати середин відрізків AB, CD, BC, AD, KP, EF:

$E\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, $F\left(\frac{m+p}{2}; \frac{n+q}{2}\right)$, $K\left(\frac{a+m}{2}; \frac{n}{2}\right)$, $P\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right)$, $M\left(\frac{a+m+p}{4}; \frac{n+q}{4}\right)$,

$M_1\left(\frac{a+m+p}{4}; \frac{n+q}{4}\right)$.

Відповідні координати точок M і M_1 рівні. Отже, ці точки суміщаються.

Щоб розв'язувати складніші задачі, використовують загальну теорему.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Координати на площині. Урок 1).



Теорема 2. Якщо точка $C(x_C; y_C)$ ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = \lambda$, то $x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$ і $y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$.

Доведи її самостійно.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають: а) системою координат; б) початком координат; в) координатною площиною?
2. Як називають координатні осі?
3. Що називають координатами точки?
4. Сформулюй і доведи теорему про координати середини відрізка.

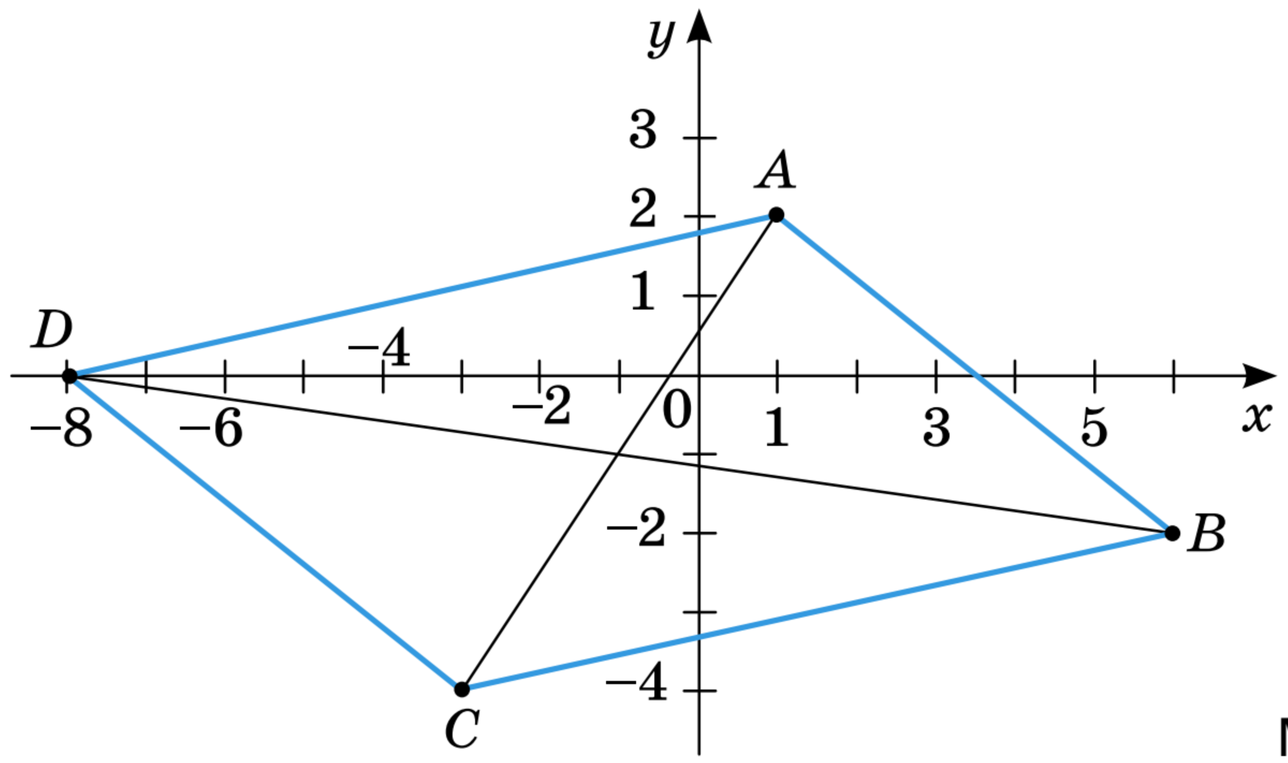
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Точка C — середина відрізка AB. Знайди координати точки B, якщо $A(2; -7)$, $C(4; 1)$.

• Оскільки C — середина відрізка AB, то $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ і $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$. Тоді $4 = \frac{2 + x_B}{2}$; $2 + x_B = 8$; $x_B = 6$.

Аналогічно $1 = \frac{-7 + y_B}{2}$; $-7 + y_B = 2$; $y_B = 9$. Отже, $B(6; 9)$.

2. Доведи, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(1; 2)$, $B(6; -2)$, $C(-3; -4)$, $D(-8; 0)$ (мал. 3.5).



Мал. 3.5

- Чотирикутник, у якого діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, — паралелограм. Доведемо, що для даного чотирикутника ця ознака виконується. Нехай M — середина діагоналі AC, тоді $x_M = \frac{1-3}{2} = -1$, $y_M = \frac{2-4}{2} = -1$. Отже, $M(-1; -1)$.

  Якщо K — середина діагоналі BD, то $x_K = \frac{6-8}{2} = -1$, $y_K = \frac{-2+0}{2} = -1$. Отже, $K(-1; -1)$.

  Точки M і K мають однакові координати. Це означає, що точки M і K суміщаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці з координатами $(-1; -1)$ і діляться в цій точці навпіл. Отже, $ABCD$ — паралелограм.

ВИКОНАЄМО УСНО



89. Провідміняй словосполучення: ордината точки, осі координат, вісь абсцис.

90. Яка з точок лежить на осі абсцис?

А (0; 2) **Б** (−3; 0) **В** (0; −4) **Г** (−1; 1)

91. Яка з точок лежить на осі ординат?

А (2; 2) **Б** (5; 0) **В** (0; −10) **Г** (−10; 0)

92. Дано точки: $A(2; -3)$, $B(4; 6)$, $C(-5; 7)$, $D(-1; -3)$. Які з відрізків AB, BC, CD, AD, AC, BD перетинають: а) вісь OX; б) вісь OY; в) кожну з осей? Які з цих відрізків паралельні осі OX?

93. Дано точки $A(4; 6)$ і $B(-2; 8)$. Знайди координати середини відрізка AB.

А (2; 14) **Б** (6; −2) **В** (1; 7) **Г** (3; −1)

94. Чи є точка:

а) $K(-3; 7)$ серединою відрізка AB, якщо $A(-9; 4)$, $B(3; 10)$;

б) $P(-6; 5)$ — серединою відрізка AK?

Знайди координати середини відрізка BK.

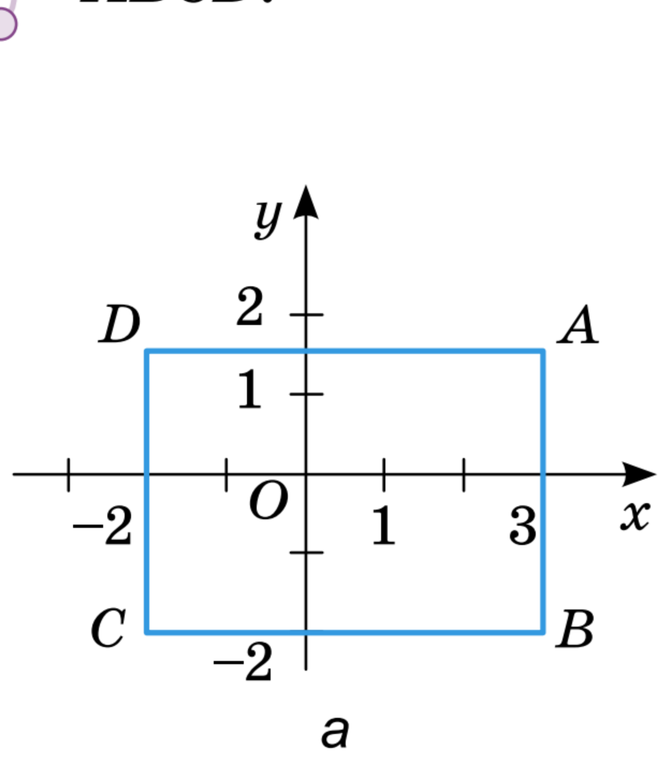
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



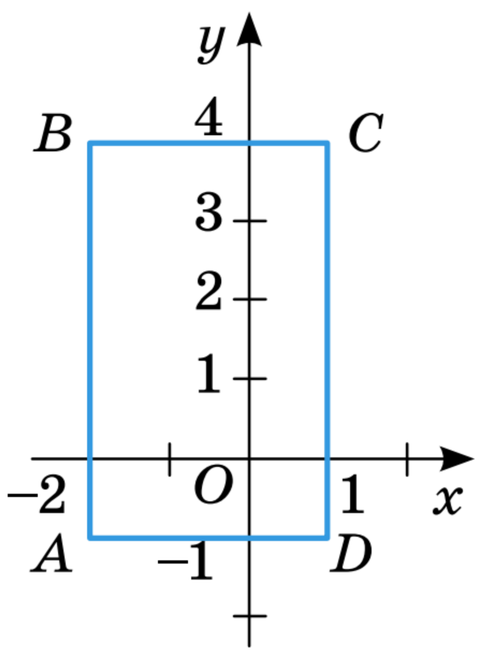
95. Познач на координатній площині точки: $A(4; 1)$, $B(-2; -3)$, $C(0; 3)$, $D(-1; 2)$, $E(4; 0)$.

96. Побудуй на координатній площині відрізок, кінцями якого є точки $A(3; -1)$ і $B(-2; 4)$. Знайди координати точок перетину відрізка AB з осями координат.

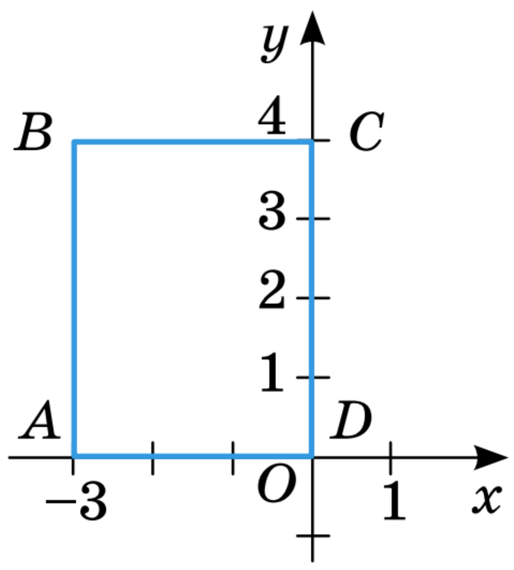
97. За малюнком 3.6 знайдіть координати вершин прямокутника $ABCD$.



а



б



в

Мал. 3.6

98. Побудуй прямокутник, три вершини якого містяться в точках $(2; 5)$, $(-1; 5)$, $(-1; -3)$. Знайди координати четвертої вершини.

99. Сторона квадрата дорівнює 5 одиниць. Одна з його вершин міститься в початку координат, а дві — на осях і мають невід'ємні координати. Знайди координати всіх вершин квадрата.

100. Точка перетину діагоналей ромба збігається з початком координат, а його діагоналі лежать на осях координат. Знайди координати вершин ромба, якщо довжини діагоналей 6 одиниць і 10 одиниць. Скільки розв'язків має задача?

101. Знайди координати середини відрізка AB, якщо $A(1; 3)$, $B(4; 5)$.

102. **Гра.** Один із учасників / одна з учасниць задає дві точки і їх координати, а другий / друга — знаходить координати середини відрізка, кінцями якого є задані точки. Потім учні / учениці міняються ролями.

103. Перенеси у зошит таблицю. У порожніх комірках укажи координати середин відповідних відрізків.

Зразок: середина відрізка XB — точка з координатами $(1; 4)$.

	$A(0; 4)$	$B(2; 6)$	$C(-2; 5)$
$X(0; 2)$		$(1; 4)$	
$Y(-4; 6)$			
$Z(-6; 12)$			

104. В житловому кварталі вирішили побудувати дитячий майданчик на однаковій відстані від двох будинків, які стоять по обидва боки великого парку. На плані координати першого будинку — (2; 5), другого — (10; 1). Знайди координати точки, у якій слід розмістити дитячий майданчик.

105. Створи в *https://scratch.mit.edu* чи *https://www.python.org* анімацію, де два об'єкти йдуть зі своїх точок до точки зустрічі, що рівновіддалена від їх початкового місцезнаходження.

106. BM — медіана $\triangle ABC$. Знайди координати точки M, якщо $A(-1; 15)$, $C(7; -9)$.

107. M — середина відрізка AB. Знайди координати точки B, якщо $A(1; 4)$, $M(2; -3)$.

108. $O(4; -1)$ — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайди координати точки: а) C, якщо $A(-2; 3)$; б) B, якщо $D(6; -4)$.

109. Відрізки AB і CD перетинаються в точці M, яка є серединою кожного з них. Знайди координати точок M і D, якщо $A(-2; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-1; -3)$.

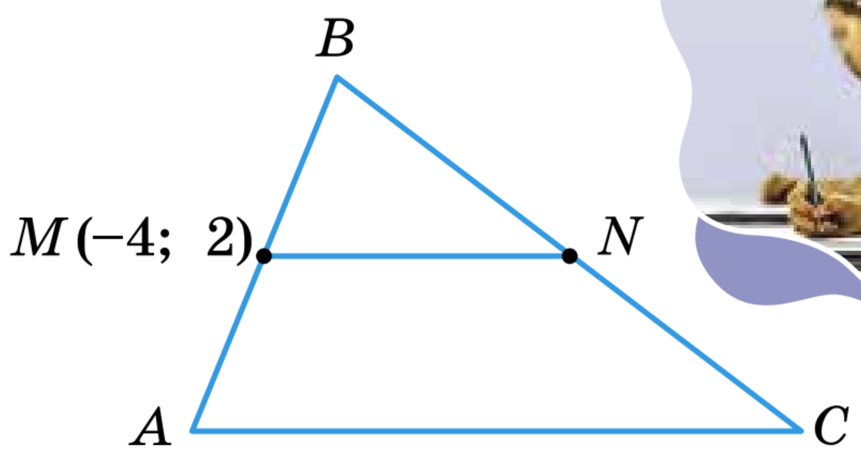
110. Дано точки $A(-1; 2)$, $B(2; 7)$, $C(4; 3)$. Знайди координати кінців середніх ліній $\triangle ABC$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



111. MN — середня лінія $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$ (мал. 3.7). Знайди координати точок A і B, якщо $C(2; 6)$, $M(-4; 2)$, $N(4; 0)$.

112. Точки K, P, T ділять відрізок AB на 4 рівні частини. Знайди координати точок K, P, T, якщо $A(2; 3)$ і $B(6; -4)$.



Мал. 3.7

113. Відрізок AB поділено на чотири рівні частини: $AM = MN = NK = KB$ (мал. 3.8). Установи відповідність між точками (1–3) та їх координатами (А–Д), якщо $A(9; -15)$, $N(-3; -1)$.



Мал. 3.8

1 M	**А** (–21; –8)
2 K	**Б** (–15; 13)
3 B	**В** (–9; 6)
	Г (–6; 7)
	Д (3; –8)

114. Дано точки $A(-3; 4)$, $B(a; 2)$, $C(5; b)$. При яких значеннях a і b: а) A — середина BC; б) B — середина AC; в) C — середина AB?

115. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 1 : 3$. Знайди координати точки M, якщо $A(-7; 9)$, $B(17; -21)$.

116. Point C divides segment KP in the ratio $KP : CP = 3 : 1$. Find the coordinates of point C, if $K(-1; 2)$, $P(-13; 10)$.

117. Доведи, що чотирикутник з вершинами $A(0; 3)$, $B(3; 4)$, $C(5; 2)$ і $D(2; 1)$ — паралелограм.

118. Дано точки $A(3; 7)$, $B(-1; 3)$, $C(-7; 4)$, $D(-3; 8)$. Доведи, що: а) $ABCD$ — паралелограм; б) чотирикутник, вершини якого є серединами сторін чотирикутника $ABCD$, — паралелограм.

119. Дано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(3; 5)$, $B(5; 1)$, $C(-1; 3)$. Знайди координати точки D.

120. Дано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $B(-4; 3)$, $C(2; -5)$, $D(2; -7)$. Знайди координати точки A.

121. Відрізок AB точками M і N поділено на три рівні частини. Знайди координати точок M і N, якщо $A(7; -2)$, $B(4; 4)$.

122. Знайди координати точки перетину медіан $\triangle ABC$ якщо $A(-1; 5)$, $B(3; 7)$, $C(1; -3)$.

123. M — точка перетину медіан $\triangle ABC$. Знайди координати точки C, якщо $A(0; 8)$, $B(1; -4)$, $M(-2; 2)$.

124. Дано три вершини паралелограма $P(1; 3)$, $H(3; 4)$, $E(4; 2)$. Знайди координати четвертої вершини. Скільки розв'язків має задача?

125. Точки $M(1; 2)$, $N(0; 4)$, $P(3; 5)$ є серединами сторін $\triangle ABC$. Знайди координати точок A, B, C.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



126. У географії для визначення місцерозташування того чи іншого пункту застосовують своєрідну систему координат. Географічні координати зазначаються в градусах і мінутах. У таблиці наведено географічні координати деяких міст України. Знайди на карті точку, координати якої збігаються з координатами середини відрізка, що сполучає міста: а) Луцьк і Харків; б) Львів і Одесу. Чи розташовані ці точки на території України? Які населені пункти розміщено поблизу знайдених точок?

Місто	Широта	Довгота
Київ	50°27′	30°30′
Луцьк	50°45′	25°15′
Харків	50°00′	36°13′
Львів	49°51′	24°02′
Одеса	46°28′	30°44′

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



127. Обчисли.

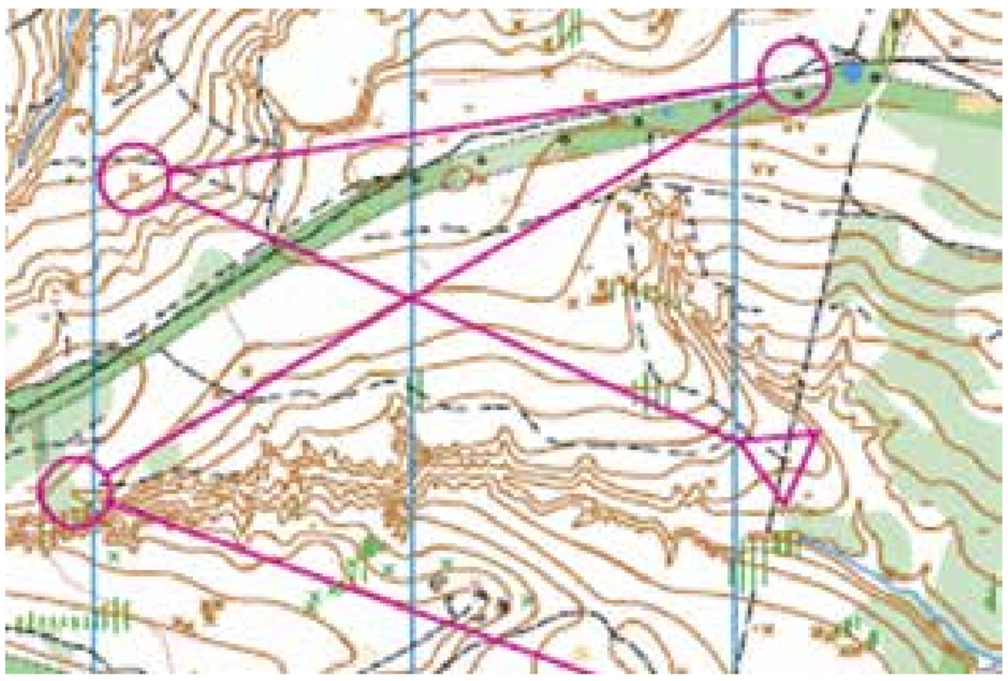
а) $\dfrac{\sin 35^\circ}{\sin 145^\circ} + \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$; б) $\dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} + \dfrac{\cos 12^\circ}{\sin 78^\circ}$.

128. Центральний кут дорівнює 30°. Знайди міру відповідного вписаного кута.

129. Знайди площу прямокутного трикутника, різниця катетів якого дорівнює 2 см, а гіпотенуза 10 см.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС









Орієнтування на місцевості

§ 4 ВІДСТАНЬ МІЖ ТОЧКАМИ

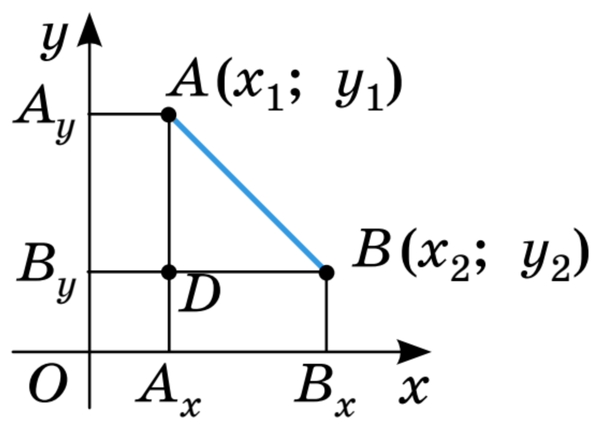
КЛЮЧОВІ СЛОВА

відстань між точками — distance between points

Якщо відомі координати двох точок координатної площини, можна визначити відстань між цими точками.

Теорема 3. Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їх відповідних координат. Тобто якщо відомі координати точок $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, то $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$ (мал. 4.1). Проведемо перпендикуляри AA_x, BB_x на вісь x і AA_y, BB_y на вісь y. В утвореному прямокутному трикутнику ABD (D — точка перетину прямих BB_y і AA_x) AB — гіпотенуза, а катети $AD = |y_2 - y_1|$ і $BD = |x_2 - x_1|$. За теоремою Піфагора:



Мал. 4.1

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \qquad (*)$$

Якщо $y_1 = y_2$ і $x_1 \neq x_2$, то $AB = |x_2 - x_1|$. Такий самий результат у цьому випадку дає і формула (*). Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 \neq y_2$, то $AB = |y_2 - y_1|$. Такий результат дає і формула (*). Нарешті, якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, тобто якщо точки A і B збігаються, формула (*) дає потрібний результат: $AB = 0$.

Отже, як би не були розміщені на координатній площині точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, завжди $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Цю рівність можна записати і так:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Приклад. Знайдемо відстань між точками $A(6;\ -1)$ і $B(2;\ -4)$.

$$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

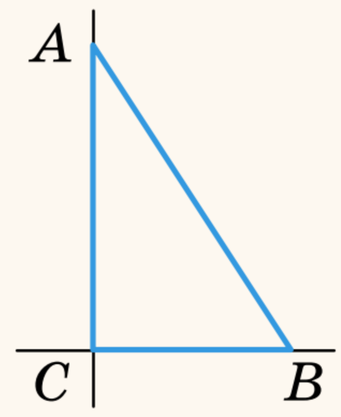
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



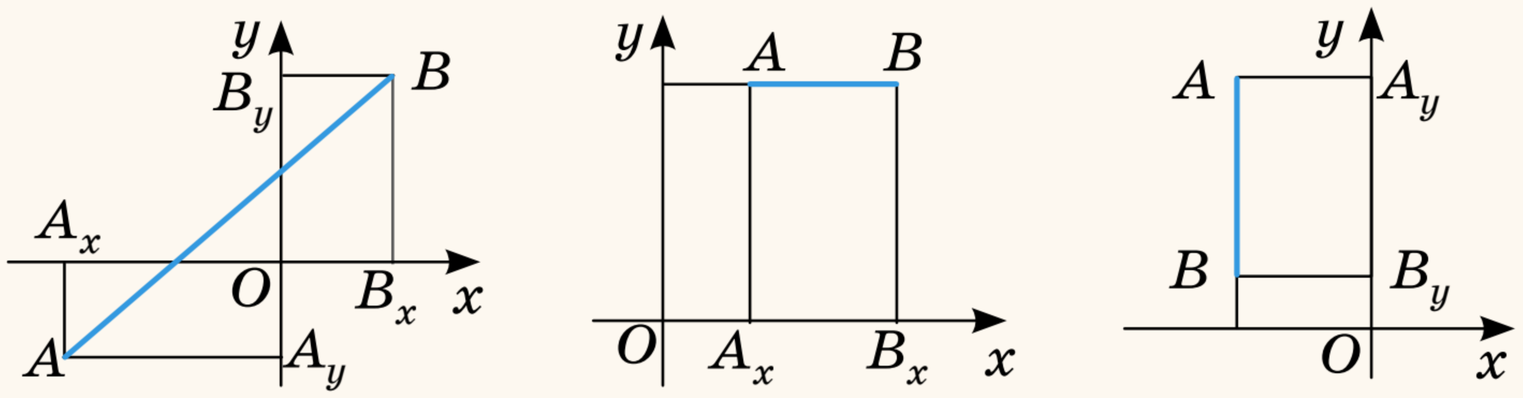
Зверни ще раз увагу на малюнок 4.1. A_xB_x — це проєкція відрізка AB на вісь x, A_yB_y — проєкція відрізка AB на вісь y. Як випливає з попередніх міркувань, $AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2$.

Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проєкцій на дві взаємно перпендикулярні прямі.

Це твердження — узагальнення теореми Піфагора. Адже катети кожного прямокутного трикутника є проєкціями його гіпотенузи на дві взаємно перпендикулярні прямі, яким належать його катети (мал. 4.2). Але сформульоване твердження правильне не тільки для прямих, яким належать катети трикутника, а для будь-яких взаємно перпендикулярних прямих і для довільного відрізка AB, зокрема й для таких, як на малюнку 4.3.



Мал. 4.2



а *б* *в*

Мал. 4.3

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Координати на площині. Урок 2).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй теорему про квадрат відстані між двома точками.
2. Доведи теорему про квадрат відстані між двома точками.
3. Як знайти довжину відрізка, якщо відомі координати його кінців?
4. Як знайти відстань від початку координат до деякої точки $A(x; y)$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Доведи, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений, і знайди довжину медіани, проведеної до основи, якщо $A(-5; 3)$, $B(2; 7)$, $C(3; -1)$.

- Знайдемо довжини сторін трикутника:

$$AB = \sqrt{(2+5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65};$$

$$AC = \sqrt{(3+5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5};$$

$$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}.$$

Отже, $AB = BC$. А це означає, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AC. Щоб знайти довжину медіани, проведеної до основи, знайдемо координати точки M — середини відрізка AC:

$x = \dfrac{-5+3}{2} = -1;\ y = \dfrac{3-1}{2} = 1$. Отже, $M(-1;\ 1)$.

Тоді $BM = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Таким чином, $\triangle ABC$ — рівнобедрений і його медіана $BM = 3\sqrt{5}$.

2. Чи правильно, що кожна з точок $A(m;\ n)$, $B(-m;\ n)$, $C(-m;\ -n)$, $K(n;\ m)$, $P(-n;\ m)$, $T(-n;\ -m)$ рівновіддалена від початку координат?

- Оскільки початок координат — точка $O(0;\ 0)$, то

$OA = \sqrt{(m-0)^2 + (n-0)^2} = \sqrt{m^2+n^2}$;

$OB = \sqrt{(-m-0)^2 + (n-0)^2} = \sqrt{m^2+n^2}$.

Аналогічно знаходимо, що кожна з відстаней OC, OK, OP, OT також дорівнює $\sqrt{m^2+n^2}$. Отже, точки A, B, C, K, P, T рівновіддалені від початку координат.

ВИКОНАЄМО УСНО



130. Знайди відстань від точки $M(-3;\ -5)$ до осі абсцис.

А -3 **Б** -5 **В** 3 **Г** 5

131. Знайди відстань від точки $P(-7;\ -2)$ до осі ординат.

А -7 **Б** 7 **В** -2 **Г** 2

132. Знайди відстань від початку координат до точок: $A(0;\ 3)$, $B(3;\ 4)$, $C(1;\ 1)$.

133. Знайдіть відстань між точками:

а) $A(4;\ 0)$ і $B(7;\ 0)$; б) $M(0;\ 3)$ і $N(0;\ 5)$; в) $P(3;\ 0)$ і $K(0;\ 4)$.

134. Знайди x, якщо:

а) точка $M(x;\ 4)$ рівновіддалена від осей координат;

б) точка $P(-2;\ x)$ віддалена на 5 одиниць від осі OX;

в) точка $K(x;\ -5)$ віддалена на 3 одиниці від осі OY.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



135. **Гра.** Один учень / одна учениця записує координати точки, а інший / інша знаходить відстань від початку координат до цієї точки. Потім учні / учениці міняються ролями.

136. Знайди відстані від початку координат до точок $A(2;\ 3)$, $B(-2;\ 6)$, $C(-3;\ 4)$, $D(-12;\ 5)$.

137. Знайди довжину відрізка AB, якщо $A(-4;\ 4)$ і $B(2;\ -4)$.

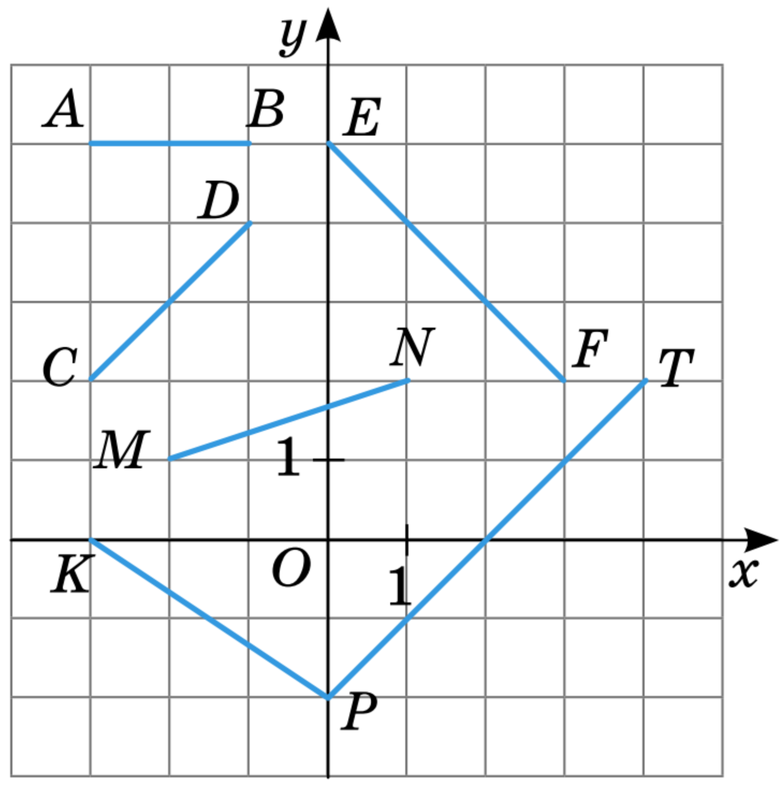
138. Знайди відстань між точками:

а) $K(0;\ 5)$ і $P(-2;\ 6)$; б) $A(-2;\ 6)$ і $B(4;\ -2)$; в) $X\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{1}{2}\right)$ і $Y\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{3}{4}\right)$.

139. Користуючись даними таблиці, знайдіть довжини відрізків XA, XB і т. д. Перенесіть таблицю у зошит і заповніть її.

	$A(2; 4)$	$B(-1; 3)$	$C(1; -5)$	$D(6; 7)$
$X(-2; 4)$				
$Y(0; 3)$				

140. Знайди довжини відрізків, зображених на малюнку 4.4, якщо $AB = 2$.



Мал. 4.4

141. Побудуй у *GeoGebra* відрізок AB, якщо $A(2; 3)$ та $B(7; 8)$. Обчисли його довжину за допомогою інструментів *https://www.geogebra.org*. Перевір відповідь власними обчисленнями.

142. Знайди периметр $\triangle ABC$, якщо $A(-2; 5)$, $B(7; 8)$, $C(2; -7)$.

143. Дано $\triangle ABC$ з вершинами $A(-2; 5)$, $B(6; 3)$, $C(4; -3)$. Знайди довжини середніх ліній трикутника.

144. Знайди довжину середньої лінії трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), якщо $A(-3; -1)$, $B(3; 7)$, $C(7; 3)$, $D(4; -1)$.

145. Знайди довжини діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(4; -3)$, $B(7; 10)$, $C(-8; 2)$, $D(-1; -5)$.

146. Знайди довжини медіан $\triangle ABC$, якщо: а) $A(-4; -2)$, $B(2; 6)$, $C(4; 2)$; б) $A(-5; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(-1; -1)$.

147. Find the lengths of the medians $\triangle MPK$, if $M(-5; 1)$, $P(-3; 5)$, $K(-1; -1)$.

148. Станок запрограмований так, що у кожній деталі він пробиває 7 тоненьких отворів. Центр деталі розміщують у початку координат, а отвори пробивають у точках з координатами: (1; 2), (2; –3), (3; 0), (0; 0), (–1; 2), (–2; –3), (–3; 0). Знайди найбільшу відстань між отворами у деталі.

149. Установіть відповідність між трикутниками, заданими координатами своїх вершин (1–3), та видом трикутників (А–Д).

1 $A(-1; 1)$, $B(2; -2)$, $C(6; 2)$	**А** різносторонній
2 $M(-5; 2)$, $N(3; 6)$, $K(4; -6)$	**Б** рівносторонній
3 $E(2; 0)$, $F(-6; 0)$, $K(-2; 4\sqrt{3})$	**В** рівнобедрений
	Г прямокутний
	Д рівнобедрений прямокутний

150. Доведи, що трикутник з вершинами $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(0; -3)$ — рівнобедрений прямокутний.

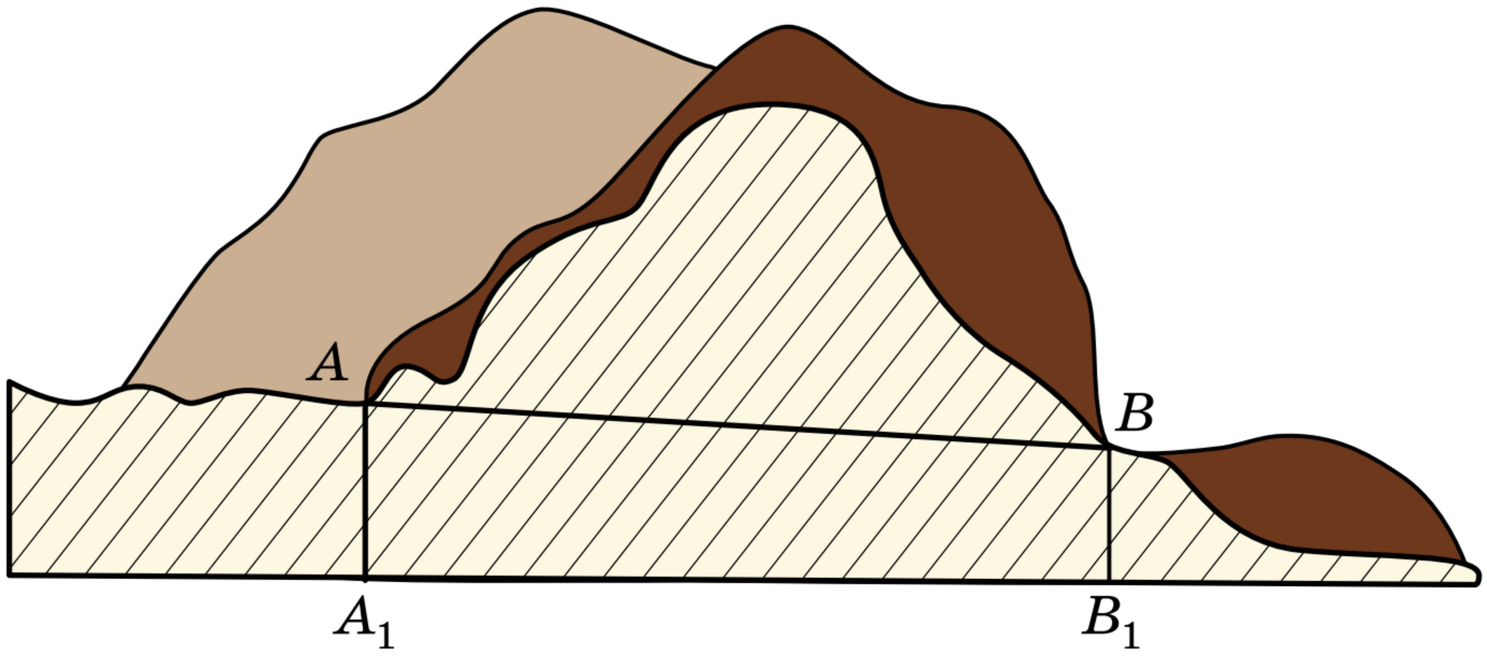
151. Компанія використовує дрони для доставки посилок. Дрон вилетів з пункту $A(3; 4)$ і має долетіти до пункту $B(11; 10)$. Яку відстань пролетить дрон, якщо довжина одиничного відрізка 1 км? Якщо дрон витрачає 1 % заряду на кожен кілометр, скільки відсотків заряду йому потрібно мати перед вильотом?



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



152. Гірська дорога проходить через тунель, довжина якого AB дорівнює $\sqrt{10}$ км (мал. 4.5). Найвища точка тунелю має координати $A(2; 4)$. Знайди ординату найнижчої точки тунелю, якщо її абсциса дорівнює 5 (координати точок подано у кілометрах). Чому дорівнює кут нахилу тунелю?



Мал. 4.5

153. Знайдіть x, якщо: а) $AB = 2$, $A(2; 1)$, $B(x; -1)$; б) $AB = 10$, $A(2x; 7)$, $B(x; 1)$.

154. При якому значенні a відстань між точками $A(-1; a)$ і $B(2a; -3)$ дорівнює 5?

155. ЗНО Точка C лежить на осі x прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки $A(-2; 4)$. Відрізок AC перетинає вісь y. Знайди координати точки C.

А (1; 0) **Б** (2; 1) **В** (−5; 0) **Г** (0; 0) **Д** (3; 4)

156. Знайди координати точки, рівновіддаленої від точок $A(-5; 1)$ і $B(3; -1)$, якщо вона лежить на: а) осі абсцис; б) осі ординат; в) прямій $y = x$.

157. Знайди координати точки, рівновіддаленої від точок $M(5; 2)$ і $N(-1; 4)$, якщо вона лежить на: а) осі абсцис; б) осі ординат; в) прямій $y = 2x$.

158. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-4; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(11; -3)$, $D(8; -7)$ — паралелограм. Знайди його периметр.

159. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-5; -2)$, $B(-3; 2)$, $C(3; -1)$, $D(1; -5)$ — прямокутник. Знайди його периметр, площу та радіус описаного кола.

160. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-5; -2)$, $B(-4; 5)$, $C(3; 6)$, $D(2; -1)$ — ромб. Знайди його периметр та довжини діагоналей.

161. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-2; 0)$, $B(-4; 6)$, $C(2; 8)$, $D(4; 2)$ — квадрат. Знайди його периметр, площу, радіус вписаного й описаного кіл.

162. Не виконуючи побудови, з'ясуй, чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $A(-6; -5)$, $B(2; 1)$, $C(6; 4)$.

163. Доведи, що точки $M(-2; -1)$, $N(2; 7)$, $K(-1; 1)$ лежать на одній прямій. Знайди відношення довжин відрізків MK і KN.

Чи подібні трикутники ABC і KBP, якщо (164, 165):

164. $A(-5; -3)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$, $K(-2; 3)$, $P(0; 4)$?

165. $A(3; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-5; -3)$, $K(2; 2)$, $P(-4; -1)$?

166. Знайдіть радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$, якщо $A(0; 6)$, $B(-6; 4)$, $C(-4; 2)$.

167. Знайди площу трикутника ABC, якщо $A(-5; 5)$, $B(2; 9)$, $C(1; 1)$.

168. ЗНО У прямокутній системі координат задано рівнобедрений $\triangle ABC$, у якому $AB = BC$. Вершина B лежить на прямій $y = 2x + 9$. Визнач площу трикутника ABC, якщо $A(-6; -8)$, $C(4; -8)$.

169. Знайди координати вершини B рівностороннього трикутника ABC, якщо $A(-3; 1)$ і $C(5; 1)$.

170. ЗНО У прямокутній системі координат на площині задано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Площа трапеції дорівнює 42. Визнач абсцису вершини D, якщо $A(-1; 3)$, $B(1; 6)$, $C(7; 6)$.

171. AL — бісектриса трикутника ABC. Знайди BL і CL, якщо $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$, $C(6; -11)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



172. Познач на координатній площині точки $A(3; 2)$ і $C(7; 4)$. Побудуй квадрат $ABCD$. Знайди периметр і площу квадрата, а також відстані від його центра і точок B, C до початку координат.

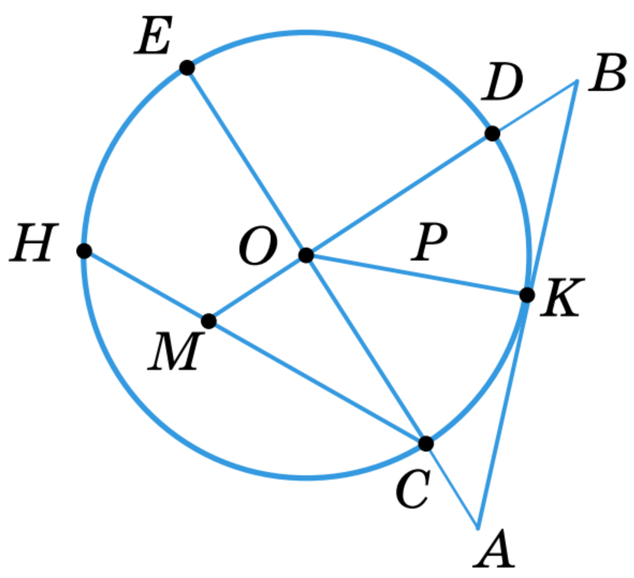
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



173. Знайди координати середин сторін трикутника ABC, якщо $A(-4;\ 1)$, $B(2;\ 5)$, $C(4;\ 5)$.

174. Знайди координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(11;\ -3)$, $C(8;\ 7)$, $D(-4;\ -2)$.

175. На малюнку 4.6 зображено коло та його елементи. Установи відповідність між елементами кола (1–4) та їх позначеннями на малюнку (А–Д).



Мал. 4.6

1 хорда	**А** CE
2 дотична	**Б** OM
3 діаметр	**В** CO
4 радіус	**Г** HC
	Д AB

§ 5 РІВНЯННЯ КОЛА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

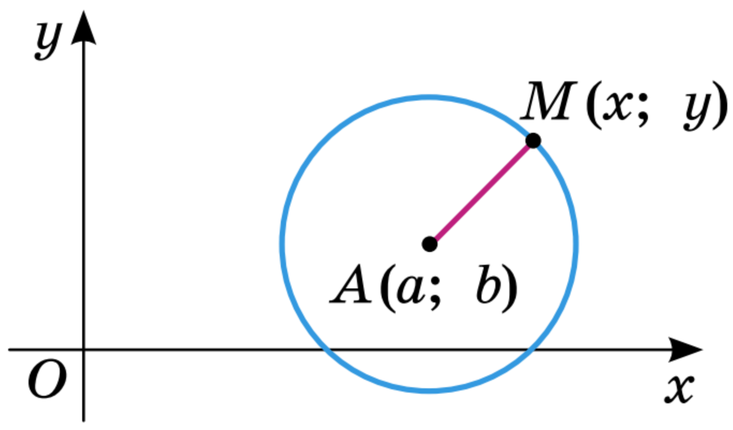
- рівняння фігури — equation of the figure
- рівняння кола — equation of the circle

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури, і тільки координати точок даної фігури.

Розглянемо рівняння двох фігур, які найчастіше зустрічаються в геометрії: кола і прямої (див. § 6).

Нехай дано коло радіуса r з центром у точці $A(a;\ b)$ (мал. 5.1). Якщо $M(x;\ y)$ — довільна точка цього кола, то $AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Але $AM = r$, тому

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \qquad (*)$$



Мал. 5.1

Із рівняння (*) випливає, що координати x і y кожної точки $M(x;\ y)$ даного кола задовольняють рівняння (*). Навпаки, будь-яка точка $M(x;\ y)$, координати якої задовольняють рівняння (*), лежить на даному колі, бо її відстань від точки A дорівнює r. Отже, рівняння (*) є рівнянням кола радіуса r з центром $A(a;\ b)$. Якщо центром кола є початок координат, тобто $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння такого кола радіуса r матиме вигляд:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



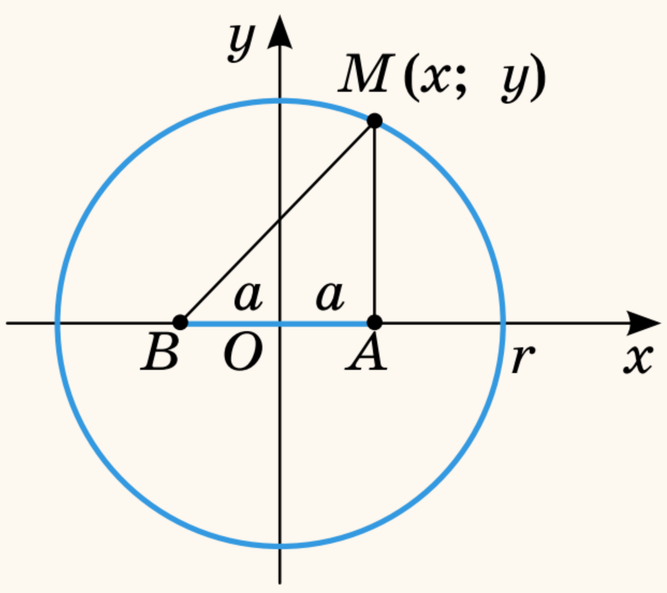
Знаючи рівняння кола, можна розв'язувати і такі геометричні задачі про кола, які іншими способами розв'язувати надто важко.

Задача. Дано відрізок AB завдовжки $2a$ і коло радіуса r із центром у середині AB. Доведи, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до точок A і B є сталою. Знайди цю суму.

Розв'язання. Розмістимо даний відрізок і коло на координатній площині, як показано на малюнку 5.2. Кінці відрізка мають такі координати: $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$.

Якщо $M(x; y)$ — довільна точка кола, то $x^2 + y^2 = r^2$, $MA^2 = (x - a)^2 + y^2$, $MB^2 = (x + a)^2 + y^2$. Тоді $MA^2 + MB^2 = (x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + a^2) = 2(r^2 + a^2)$.

За даних a і r вираз $2(r^2 + a^2)$ має стале значення.



Мал. 5.2

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення: а) рівняння фігури; б) кола.
2. Яке рівняння має коло з центром в точці $A(a; b)$ радіуса r?
3. Яке рівняння має коло радіуса r з центром у початку координат?

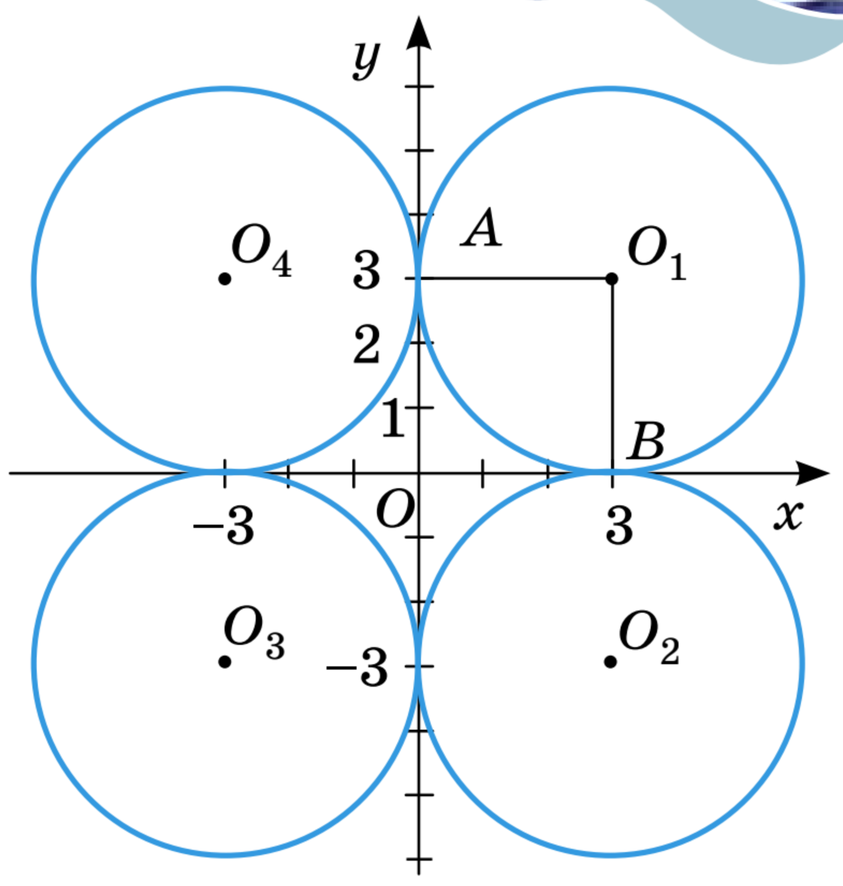
ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Запиши рівняння кола радіуса 3, яке дотикається до обох осей координат.

- На малюнку 5.3 видно, що таких кіл чотири. Оскільки OAO_1B — квадрат зі стороною 3, то $O_1(3; 3)$. Тому рівняння кола з центром у точці O_1 має вигляд: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

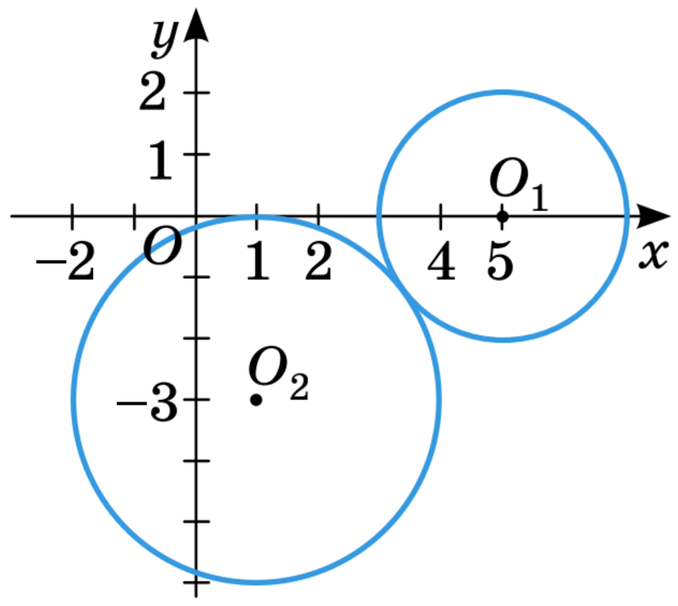
  Аналогічно можна записати рівняння інших кіл. Оскільки $O_2(3; -3)$, $O_3(-3; -3)$, $O_4(-3; 3)$, то рівняння відповідних кіл: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.



Мал. 5.3

2. При яких значеннях параметра a $(a \neq 0)$ мають зовнішній дотик кола, рівняння яких $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$ і $x^2 + y^2 - 2x + 6y = a^2 - 10$?

• Знайдемо координати центрів і радіуси даних кіл (мал. 5.4).
Перетворимо перше рівняння:
$(x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 = 0;$
$(x - 5)^2 + y^2 = 4.$
Для першого кола $O_1(5; 0)$, $R_1 = 2$.
Аналогічно для другого рівняння отримаємо:
$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = a^2 - 10;$
$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = a^2.$
Для другого кола $O_2(1; -3)$, $R_2 = |a|$.
Два кола мають зовнішній дотик, якщо відстань між центрами дорівнює сумі їх радіусів.



Мал. 5.4

Оскільки $O_1O_2 = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$, то кола дотикаються, якщо $2 + |a| = 5$, звідки $|a| = 3$, тобто $a = 3$ або $a = -3$.
Отже, дані кола дотикаються зовні при $a = 3$ або $a = -3$.

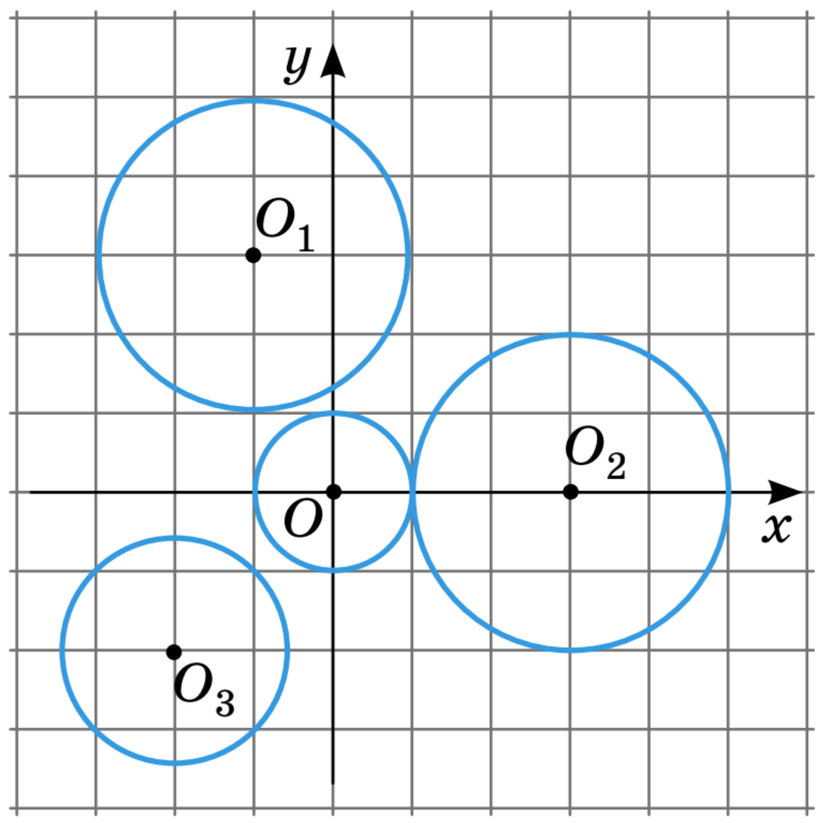
ВИКОНАЄМО УСНО

176. Укажи координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:
а) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$; б) $x^2 + (y + 1)^2 = 16$;
в) $x^2 + y^2 = 1$; г) $(x + 5)^2 + y^2 = 7$.

177. Знайди радіус кола $x^2 + (y - 2)^2 = 16$.
А 16 **Б** 8 **В** 4 **Г** 4 або −4

178. Яке з рівнянь не є рівнянням кола?
А $x^2 + y^2 = 25$
Б $5x^2 + 5(y - 1)^2 = 9$
В $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -4$
Г $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 7$

179. Якому з кіл, зображених на малюнку 5.5, відповідає рівняння кола:
а) $x^2 + y^2 = 1$;
б) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$;
в) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;
г) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$?



Мал. 5.5

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



180. Установи відповідність між місцем розташування центрів кіл (1–4) і відповідними рівняннями цих кіл (А–Д).

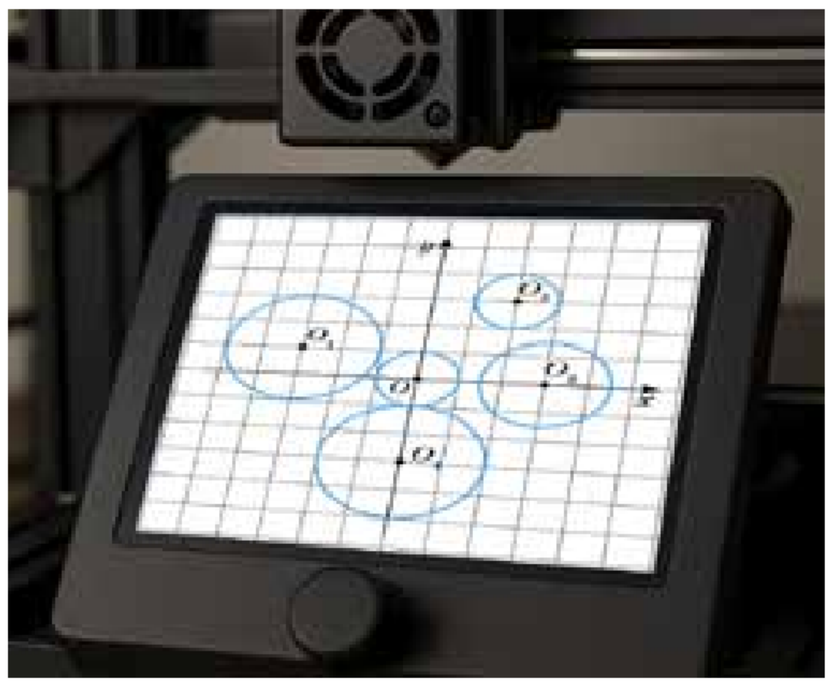
1 лежить у початку координат	**А** $(x-1)^2+(y+1)^2=1$
2 лежить на осі OX	**Б** $(x+1)^2+(y-3)^2=16$
3 лежить на осі OY	**В** $x^2+(y+5)^2=25$
4 рівновіддалений від осей координат і не лежить у початку координат	**Г** $x^2+y^2=5$
	Д $(x+3)^2+y^2=9$

Запиши рівняння кола з центром у точці $A(x;\ y)$ радіуса R, якщо (181, 182):

181. а) $A(-1;\ 2)$, $R=5$; б) $A(0;\ 0)$, $R=3$; в) $A(3;\ -1)$, $R=\sqrt{2}$.

182. а) $A(-3;\ -3)$, $R=6$; б) $A\ (1;\ 0)$, $R=\sqrt{17}$.

183. У програмному забезпеченні до 3D-принтера Оля бачить таке зображення на екрані (мал. 5.6). Визначте координати центра та радіуси кожного з кіл. Запишіть рівняння цих кіл.



Мал. 5.6

184. **Гра.** Один із учнів / одна з учениць задає центр кола, другий / друга — радіус, а третій / третя має намалювати це коло за допомогою *Desmos Calculator*. Потім учні / учениці міняються ролями.

185. ЗНО Точка $A(3;\ 1)$ належить колу з центром у точці $O(-2;\ 1)$. Знайди радіус цього кола.

А 10 **Б** 5 **В** 3 **Г** 2 **Д** 1

186. Склади рівняння кола діаметра AB, якщо:

а) $A(1;\ 3)$, $B(-5;\ -3)$; б) $A(-2;\ 4)$, $B(6;\ -2)$.

187. Write the equation of a circle with diameter KP, if

а) $K(5;\ -1)$, $P(-3;\ 5)$; б) $K(0;\ -3)$, $P(1;\ 4)$.

188. Запиши рівняння кола з центром у точці $A(-1;\ 4)$, яке:

а) дотикається до осі OX; б) дотикається до осі OY.

189. Запиши рівняння кола радіуса 5:

а) з центром на осі ординат, яке дотикається до осі абсцис;

б) з центром на осі абсцис, яке дотикається до осі ординат.

190. Запиши рівняння кола радіуса 4 з центром в точці $A(-2;\ 3)$. Чи належать цьому колу точки $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ 7)$, $F(-6;\ 3)$, $P(-4;\ 3)$, $T\left(-4;\ 3+2\sqrt{3}\right)$, $M\left(-2-2\sqrt{3};\ 1\right)$?

191. В одному з приміщень готелю планують встановити круглий басейн. Центр басейну на плані з сіткою програмного забезпечення має координати $O(4;\ 5)$. Мінімальна відстань від центра басейну до стін приміщення становить 6 метрів. Яке рівняння кола описує

межі басейну? Визнач, чи розташована точка $M(9;\ 9)$ всередині басейну.

192. Запиши рівняння кола з центром у точці $M(-1;\ 4)$, що проходить через точку $P(3;\ 1)$.

193. ЗНО Запиши рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;\ -4)$.

А $x^2 + y^2 = 5$ **Б** $(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = 25$ **В** $x^2 + y^2 = 25$
Г $x^2 + y^2 = 49$ **Д** $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 25$

194. Дано точки $A(1;\ -2)$ і $B(5;\ 4)$. Склади рівняння кола:
а) з центром у точці A, яке проходить через точку B;
б) з центром у точці B, яке проходить через точку A.

195. Запиши рівняння кола, що дотикається до координатних осей і проходить через точку $M(2;\ 0)$.

196. Запиши рівняння кола, що дотикається до координатних осей і проходить через точку $C(0;\ -3)$.

Запиши рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо (197, 198):

197. $A(3;\ 0)$, $B(0;\ 0)$, $C(0;\ -4)$.

198. $A(-2;\ -2)$, $B(-2;\ 1)$, $C(-6;\ -2)$.

199. Запиши рівняння кола, описаного навколо прямокутного $\triangle ABC$, якщо $A(3;\ 1)$, $B(3;\ 7)$, $C(-5;\ 1)$. Зроби малюнок.

200. Запиши рівняння кола, описаного навколо квадрата $ABCD$ і вписаного в нього, якщо $A(-5;\ 2)$, $B(-1;\ 6)$, $C(3;\ 2)$, $D(-1;\ -2)$. Зроби малюнок.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



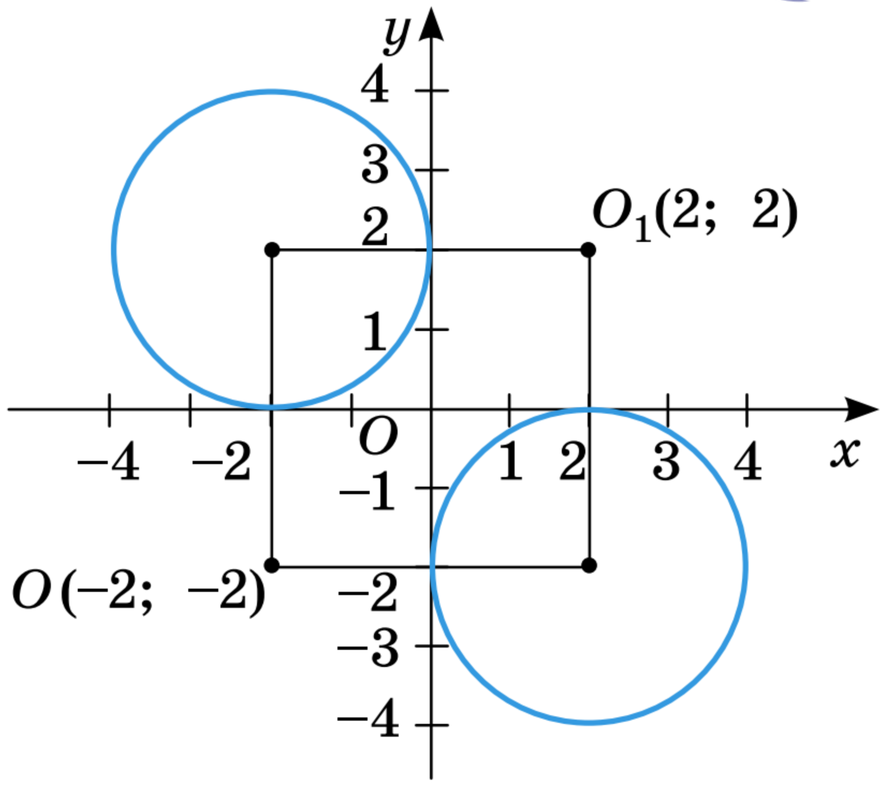
201. Запиши рівняння кола з центром на осі абсцис, що дотикається до прямих $x = -2$ і $x = 4$. Зроби малюнок.

202. Запиши рівняння кола з центром на осі ординат, що дотикається до прямих $y = -3$ і $y = 5$. Зроби малюнок.

203. Запиши рівняння кола з центром на осі абсцис, що проходить через точку $M(5;\ 2)$ і дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

204. ***Відкрита задача.*** Склади і розв'яжи задачу за малюнком 5.7.

205. Дано рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$. Доведіть, що AB — хорда кола, і знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди, якщо:



Мал. 5.7

а) $A(-4; 3)$, $B(-4; -3)$; б) $A(4; 3)$, $B(5; 0)$; в) $A(3; 4)$, $B(4; -3)$.

206. Доведи, що відрізок AB є діаметром кола $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 8$, якщо $A(3; -5)$, $B(-1; -1)$.

Знайди центр і радіус кола, заданого рівнянням (207, 208):

207. а) $x^2 + y^2 + 2x = 0$; б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$.

208. а) $x^2 + y^2 - 4y = 5$; б) $x^2 + y^2 - 10x + 2y = -6$.

Знайди відстань між центрами кіл, рівняння яких (209, 210):

209. $x^2 + y^2 + 6x = 1$ і $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 6$.

210. $x^2 + y^2 + 4x - 10y = -4$ і $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 7$.

Як розміщені кола (дотикаються, перетинаються, не мають спільних точок), задані рівняннями 211, 212)?

211. а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ і $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$;
б) $x^2 + y^2 + 6x = 0$ і $x^2 + y^2 - 8y = -12$.

212. а) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ і $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$;
б) $x^2 + y^2 - 4x - 8y = -12$ і $x^2 + y^2 - 10x - 2y = -24$.

213. ЗНО У прямокутній системі координат xy на площині задано рівнобедрений трикутник ACB, у якому $AC = BC$, $A(2; -5)$, $B(4; 3)$. Навколо цього трикутника описано коло, задане рівнянням $(x - 3)^2 + y^2 + 2y = 16$. Визнач площу трикутника ACB.

214. ЗНО Центр кола, заданого рівнянням $x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$, збігається з точкою перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$. Обчисліть площу цього паралелограма, якщо $A(-4; -3)$ і $B(0; 3)$.

Запиши рівняння кола, яке проходить через точки з координатами (215, 216):

215. а) $(4; -1)$, $(2; 7)$, $(-1; 2)$; б) $(5; 1)$, $(-1; -3)$, $(0; 2)$.

216. $(-6; -5)$, $(-2; 1)$, $(-1; -4)$.

217. Дано коло $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Знайди геометричне місце центрів кіл радіуса 1, які мають з колом:
а) зовнішній дотик; б) внутрішній дотик.

218. При яких значеннях параметра a кола $x^2 + y^2 + 8y + 15 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x - a^2 - 4a + 5 = 0$ мають:
а) зовнішній дотик; б) внутрішній дотик?

219. Залежно від значень параметра a досліди взаємне розміщення кіл $x^2 + y^2 - 2x = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x = a^2 - 4$.

220. AH — висота рівностороннього трикутника ABC, $A(1; -2)$, $H(4; 7)$. Запиши рівняння кола: а) описаного навколо трикутника ABC; б) вписаного у трикутник ABC.

221. Запиши рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $A(-3; -1)$, $B(0; 3)$, $C(3; -1)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



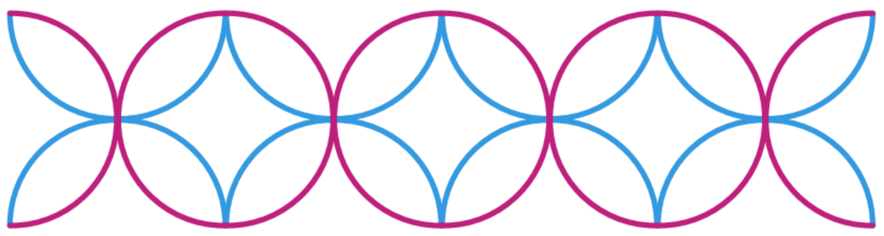
222. а) Зобрази прямокутник, вершини якого знаходяться в точках (0; –2), (0; 2), (6; 2), (6; –2), взявши за одиничний відрізок дві клітинки. Побудуй в цьому прямокутнику графіки поданих нижче рівнянь, і ти побачиш фрагмент решітки для огорожі.

$(x - a)^2 + y^2 = 1;\ a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ 0 \leqslant x \leqslant 6;\ -2 \leqslant y \leqslant 2;$

$(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 1;\ a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ 0 \leqslant x \leqslant 6;\ -2 \leqslant y \leqslant 2;$

$(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 1;\ a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ 0 \leqslant x \leqslant 6;\ -2 \leqslant y \leqslant 2.$

б) На малюнку 5.8 зображено орнамент, утворений перетином одиничних кіл. Запиши сукупність рівнянь, за допомогою яких можна одержати такий орнамент.



Мал. 5.8

в) Склади свій орнамент, утворений перетином кіл, у *https://www.desmos.com/calculator?lang=uk*.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

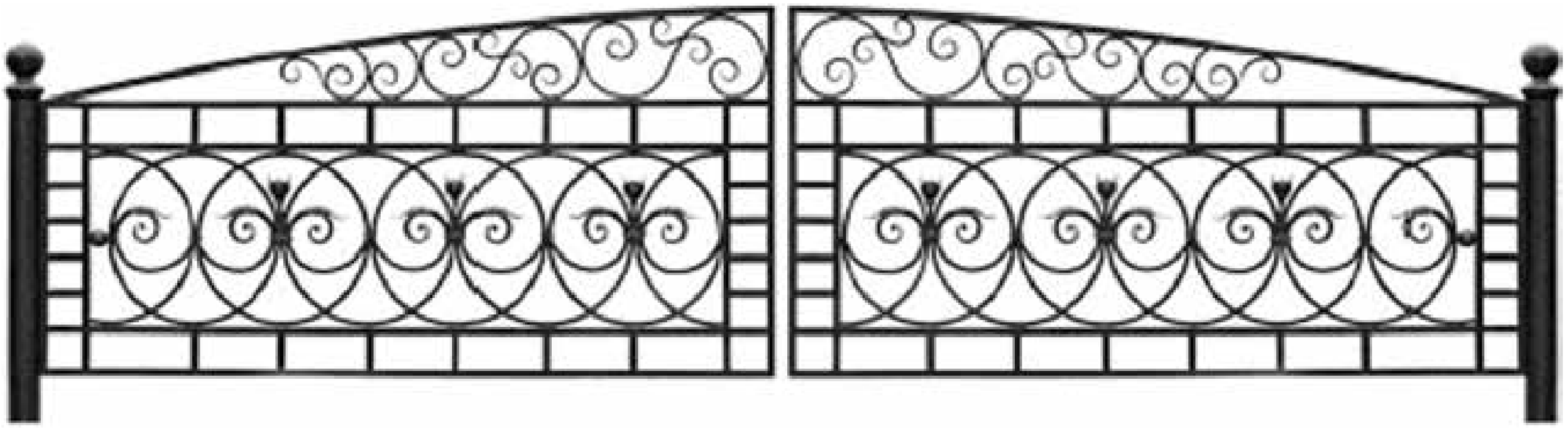


223. Знайди координати вершин квадрата периметра 16, якщо одна з його вершин (–1; 2), а сторони паралельні осям координат. Скільки розв'язків має задача?

224. Знайди синус, косинус і тангенс гострих кутів прямокутного трикутника з вершинами (4; –1), (2; 5), (6; 1).

225. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках (–3; –2), (–2; 5), (5; 6), (4; –1) — ромб. Знайди його площу та периметр.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Геометричні фігури у кованих виробах

§6 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

загальне рівняння прямої — general equation of a straight line

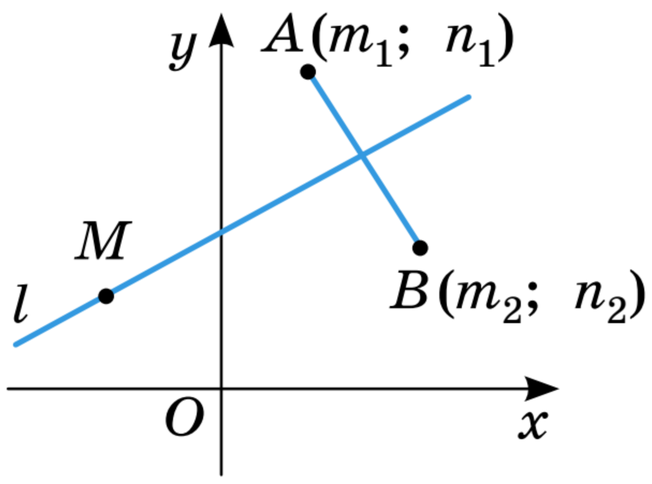
З курсу алгебри 7 класу ти вже знаєш, що графіком кожного рівняння першого степеня з двома змінними є пряма. Покажемо, що правильним є й обернене твердження: кожній прямій координатної площини відповідає лінійне рівняння з двома змінними.

Нехай на координатній площині дано пряму l (мал. 6.1). Позначимо дві точки $A(m_1;\ n_1)$ і $B(m_2;\ n_2)$ такі, що пряма l буде серединним перпендикуляром відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра кожна точка $M(x;\ y)$ прямої l рівновіддалена від точок A і B, тобто $AM = BM$. Тоді $(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2$, звідки

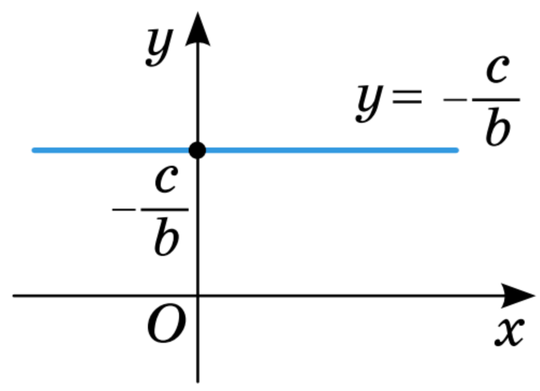
$$x^2 - 2xm_1 + m_1^2 + y^2 - 2yn_1 + n_1^2 - x^2 + 2xm_2 - m_2^2 - y^2 + 2yn_2 - n_2^2 = 0;$$

$$2xm_2 - 2xm_1 + 2yn_2 - 2yn_1 + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0;$$

$$x(2m_2 - 2m_1) + y(2n_2 - 2n_1) + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0.$$



Мал. 6.1



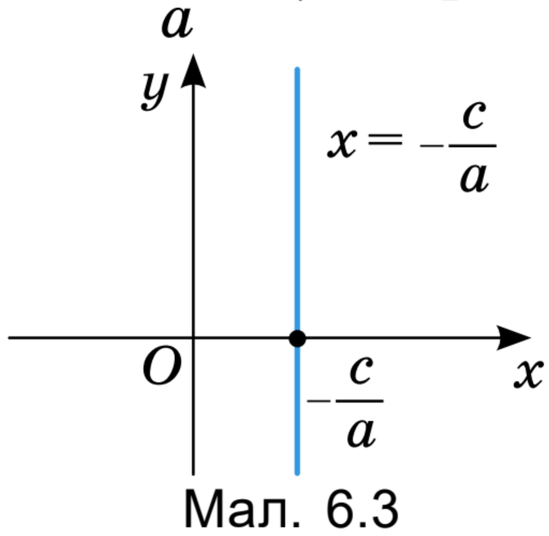
Мал. 6.2

Позначивши $2m_2 - 2m_1 = a$, $2n_2 - 2n_1 = b$, $m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = c$, отримаємо рівняння $ax + by + c = 0$, що і потрібно було довести.

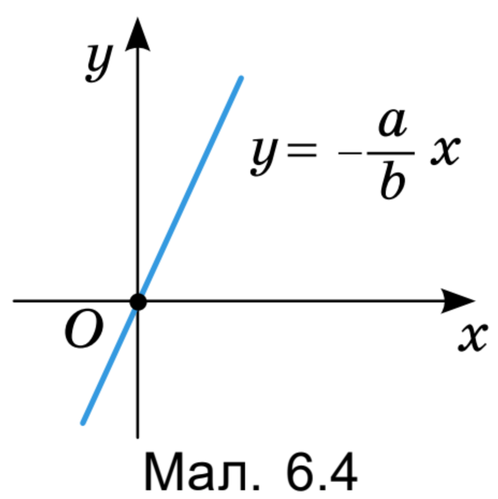
Варті уваги окремі випадки.

1. Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то рівняння прямої матиме вигляд $by + c = 0$, звідки $y = -\frac{c}{b}$. Це — рівняння прямої, паралельної осі OX (мал. 6.2).

2. Якщо $b = 0$, $a \neq 0$, то рівняння прямої матиме вигляд $ax + c = 0$, звідки $x = -\frac{c}{a}$. Це — рівняння прямої, паралельної осі OY (мал. 6.3).



Мал. 6.3



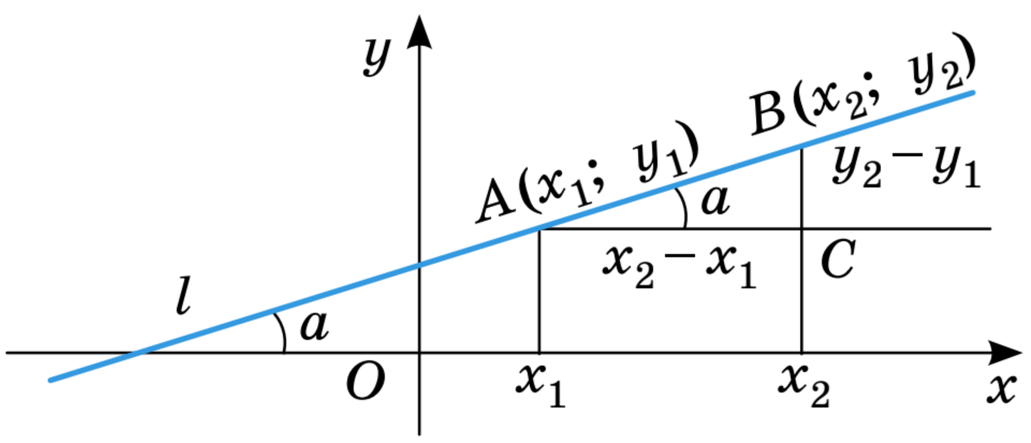
Мал. 6.4

3. Якщо $c = 0$, $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то рівняння прямої матиме вигляд $ax + by = 0$, звідки $y = -\frac{a}{b}x$. Це — рівняння прямої, яка проходить через початок координат (мал. 6.4).

Рівняння $ax + by + c = 0$ називають *загальним рівнянням прямої*.

Запишемо це рівняння в іншому вигляді. Якщо $b \neq 0$, то поділимо ліву і праву частини рівняння на b і отримаємо $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b}$ або $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$. Пригадай формулу лінійної функції та її графік.

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнта k. Візьмемо на прямій l дві довільні точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ (мал. 6.5). Тоді $y_1 = kx_1 + p$ і $y_2 = kx_2 + p$. Віднявши від другого рівняння перше, отримаємо $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, звідки при $x_1 \neq x_2$ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. З малюнка 6.5 видно, що $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX. Випадок, коли $90° \leqslant \alpha < 180°$, розглянь самостійно.



Мал. 6.5

Отже, у рівнянні прямої $y = kx + p$ коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX. Тому число k називають *кутовим коефіцієнтом*, а рівняння прямої, записане у вигляді $y = kx + p$, — *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Можна довести таке твердження.

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями $y = k_1x + p_1$ і $y = k_2x + p_2$, то:

1) $l_1 \parallel l_2$ тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$; $p_1 \neq p_2$;

2) $l_1 \perp l_2$ тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Наприклад, прямі $y = 2x + 3$ і $y = 2x$ — паралельні, бо $k_1 = k_2 = 2$, а прямі $y = 2x + 3$ і $y = -\frac{1}{2}x$ — перпендикулярні, бо $k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

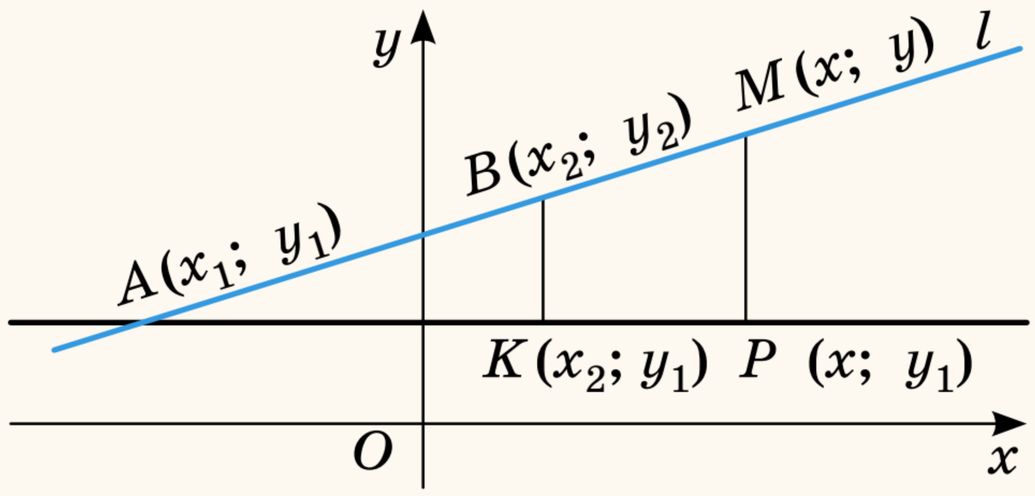
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



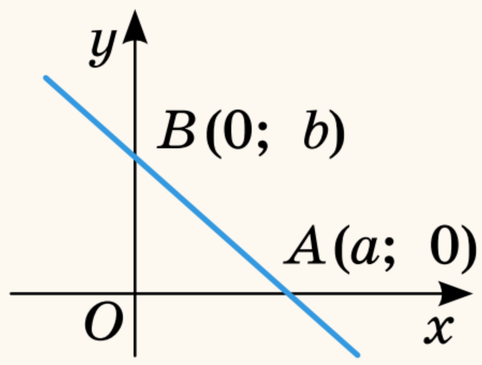
Крім загального рівняння прямої та рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, існують й інші види рівнянь прямих. Розглянемо деякі з них.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ (мал. 6.6). Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x;\ y)$. Прямокутні трикутники AKB і APM подібні, бо їх гострі кути при вершині A рівні. Тоді

$AP : AK = MP : BK$ або $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Отримали рівняння прямої l, яка проходить через точки A і B.



Мал. 6.6



Мал. 6.7

І навпаки, якщо координати x і y деякої точки $M(x; y)$ задовольняють це рівняння, то $AP : AK = MP : BK$, з чого випливає подібність трикутників APM і AKB. Тоді $\angle PAM = \angle KAB$, а це означає, що точка M лежить на прямій l.

Отже, рівняння $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ — це рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.

Якщо пряма l перетинає осі координат у точках $A(a; 0)$ і $B(0; b)$ (мал. 6.7), то, користуючись попереднім рівнянням, отримаємо: $\dfrac{x - a}{0 - a} = \dfrac{y - 0}{b - 0}$. Тоді $-\dfrac{x}{a} + 1 = \dfrac{y}{b}$ або $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Це рівняння прямої у відрізках на осях, бо числа a і b показують, які відрізки відтинає пряма l на осях координат.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Координати на площині. Урок 3).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яким є: а) загальне рівняння прямої;
   б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
2. Який геометричний зміст кутового коефіцієнта?
3. Сформулюй умову: а) паралельності;
   б) перпендикулярності двох прямих.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Напиши рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2; 1)$ і $B(4; -3)$.

• *Перший спосіб.*

Скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + p$. Оскільки пряма проходить через точки A і B, то координати даних точок задовольняють рівняння, тобто $1 = 2k + p$ і $-3 = 4k + p$.

Отримали систему рівнянь $\begin{cases} 2k + p = 1; \\ 4k + p = -3. \end{cases}$

Віднімемо перше рівняння від другого і отримаємо: $2k = -4$, звідки $k = -2$.

Тоді з першого рівняння: $p = 1 - 2k = 1 - 2(-2) = 5$. Отже, рівняння прямої матиме вигляд: $y = -2x + 5$.

Другий спосіб.

Оскільки $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, то в даному випадку $k = \dfrac{-3 - 1}{4 - 2} = \dfrac{-4}{2} = -2$. Тоді рівняння матиме вигляд: $y = -2x + p$. Підставимо у це рівняння координати точки $A(2; 1)$. Отримаємо:

$1 = -4 + p$, звідки $p = 5$. Тоді рівняння прямої матиме вигляд $y = -2x + 5$.

Третій спосіб.

Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. У нашому випадку $\dfrac{x - 2}{4 - 2} = \dfrac{y - 1}{-3 - 1}$, тобто $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 1}{-4}$ або $-4(x - 2) = 2(y - 1)$, звідки $-4x + 8 = 2y - 2$.

Спростивши рівняння, отримаємо: $y = -2x + 5$.

2. Запиши рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3; 5\sqrt{3})$ і утворює кут $60°$ з додатним напрямом осі OX.

- Запишемо рівняння даної прямої у вигляді $y = kx + p$. Оскільки $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, то рівняння прямої можна записати у вигляді $y = \sqrt{3}x + p$. Підставивши в це рівняння координати точки M, отримаємо: $5\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + p$, звідки $p = 2\sqrt{3}$. Отже, рівняння шуканої прямої $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

ВИКОНАЄМО УСНО



226. Яка з прямих не проходить через початок координат?

А $x + y = 0$ **Б** $2x + y = 3$ **В** $x - y = 0$ **Г** $y = -3x$

227. ЗНО Укажи рівняння прямої, що проходить через точку $O(0; 0)$.

А $y = -2x$ **Б** $y = x + 2$ **В** $y = x - 2$ **Г** $y = 2 - x$ **Д** $y = -2$

228. Яке рівняння має пряма, проведена паралельно осі OY через точку $M(5; -3)$?

А $x = 5$ **Б** $x = -3$ **В** $y = 5$ **Г** $y = -3$

229. Яке рівняння має пряма, проведена паралельно осі OX через точку $E(2; -7)$?

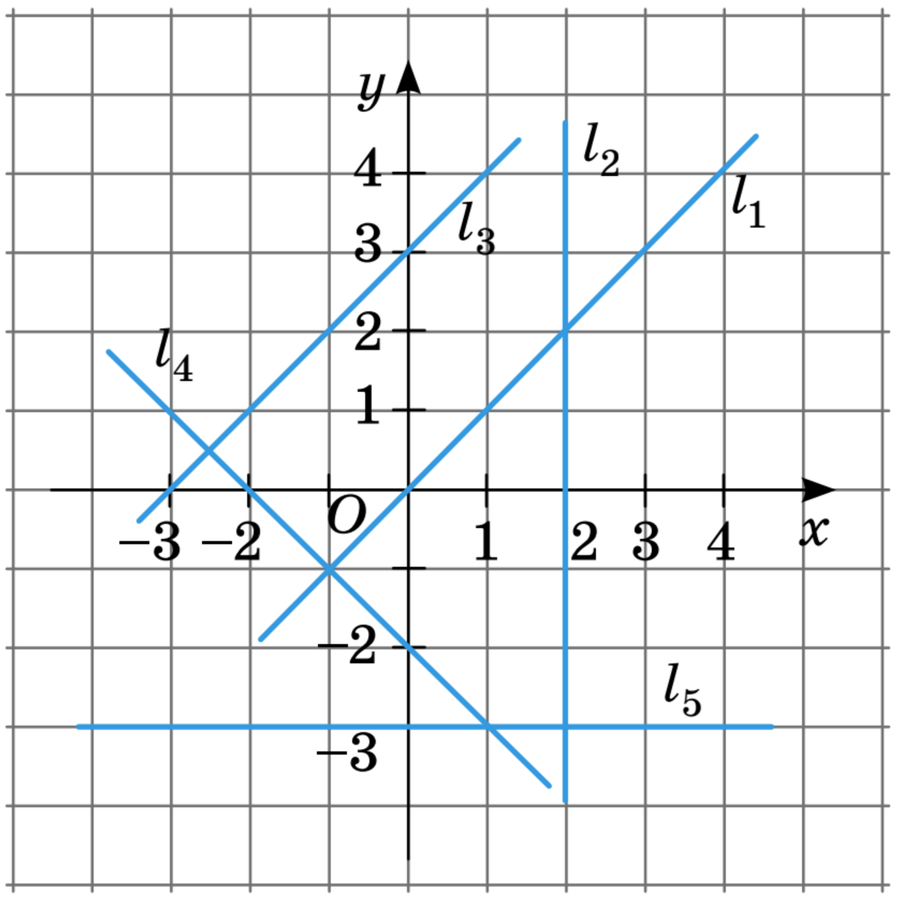
А $x = 2$ **Б** $x = -7$ **В** $y = 2$ **Г** $y = -7$

230. Знайди відстань від початку координат до прямої, заданої рівнянням:

а) $y - 2 = 0$; б) $x + 5 = 0$; в) $y = 2x$; г) $x + 3y = 0$.

231. Укажи рівняння прямих, які дотикаються до кола $x^2 + y^2 = 16$ і паралельні: а) осі OX; б) осі OY.

232. Якій із прямих, зображених на малюнку 6.8, відповідає рівняння:
а) $x = 2$; б) $y = x + 3$;
в) $y = -3$; г) $y = x$;
ґ) $y = -x - 2$?



Мал. 6.8

233. Назви кутові коефіцієнти прямих, заданих рівняннями:
а) $y = 3x$; б) $y = 2x + 5$;
в) $y = 8 - 4x$; г) $x - y = 0$;
ґ) $5x + y = 2$; д) $2x - 6y = 3$.

234. Яка з прямих не паралельна прямій $y = 3x - 5$?
А $y = 3x + 5$ **Б** $y - 3x = 7$
В $3y - x = 5$ **Г** $y = 3x$

235. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої, яка відтинає на осях рівні відрізки?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



236. Побудуй прямі та знайди координати точок їх перетину з осями координат.
а) $y = 2x + 3$; б) $x + y = 5$; в) $2x + 5y = 10$.

237. Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину прямої $2x + 3y = 6$ з осями координат.

Не виконуючи побудови, знайди координати точки перетину прямих (238, 239).

238. $4x + 5y + 10 = 0$ і $x + 4y - 3 = 0$.

239. $x + 2y - 6 = 0$ і $3x + 4y - 8 = 0$.

240. Побудуй прямі, що проходять через точку $M(2; -4)$ паралельно осям координат. Запиши їх рівняння.

241. ЗНО Укажи лінійну функцію, графік якої паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(-2; 3)$.
А $y = 3$ **Б** $y = -2$ **В** $x = -2$ **Г** $x = 3$ **Д** $y = -1{,}5x$

Запиши рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку (242, 243):

242. а) $A(3; 2)$; б) $K(-5; 5)$.

243. а) $M(-1; 3)$; б) $C(-4; -2)$.

Запиши рівняння прямої, що проходить через точки (244, 245):

244. а) $A(1; 3)$ і $B(5; 2)$; б) $C(-1; 2)$ і $D(0; 3)$.

245. а) $M(0; 4)$ і $N(5; 0)$; б) $E(3; -5)$ і $F(4; 1)$.

246. За даними таблиці запиши рівняння прямих AB, AC і т. д.

	$B(1; 3)$	$C(-2; 5)$	$D(2; -2)$	$E(-3; -4)$
$A(0; 0)$				
$M(-1; 4)$				

247. GPS-система фіксує рух електросамоката. Відомо, що він рухався по прямій з точки $A(2; 1)$ до точки $B(8; 4)$. Знайди рівняння прямої, по якій рухався електросамокат. Перевір, чи потрапляє точка $C(5; 2{,}5)$ на його маршрут.

248. Уяви, що ти розробляєш маршрут для дрона, що має летіти по прямій від точки A до точки B. Напиши в *https://www.python.org* код для побудови маршруту, а також перевірки, чи лежить певна точка C на цьому маршруті.

Який кут утворює пряма з додатним напрямом осі OX (249, 250)?

249. а) $x + y - 2 = 0$; б) $x - \sqrt{3}y = 3$.

250. а) $x - y = 4$; б) $3x + \sqrt{3}y - 1 = 0$.

251. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць записує рівняння прямої у загальному вигляді, а другий / друга визначає, який кут утворює пряма з додатним напрямом осі OX. Потім учні / учениці міняються ролями.

Запиши рівняння прямої, яка проходить через точку A і має кутовий коефіцієнт k, якщо (252, 253):

252. а) $A(2; -4)$, $k = 2$; б) $A(-1; -7)$, $k = -3$.

253. а) $A(3; -5)$, $k = 1$; б) $A(-6; 8)$, $k = -0{,}5$.

Запиши рівняння прямої, що проходить через точку $A(1; 4)$ і утворює з додатним напрямом осі OX кут (254, 255):

254. а) 45°; б) 120°.

255. а) 60°; б) 135°.

Запиши рівняння прямих, які проходять через точку $M(3; -2)$ паралельно прямій (256, 257):

256. а) $y = 2x + 5$; б) $x + 2y - 2 = 0$.

257. а) $y = -3x + 2$; б) $2x - 3y - 4 = 0$.

258. Відомо, що графік функції $y = ax + 2$ проходить через точку $A(-2; 6)$. Знайди значення параметра a. Побудуй цю пряму. Чи проходить ця пряма через точку $B(3; -4)$?

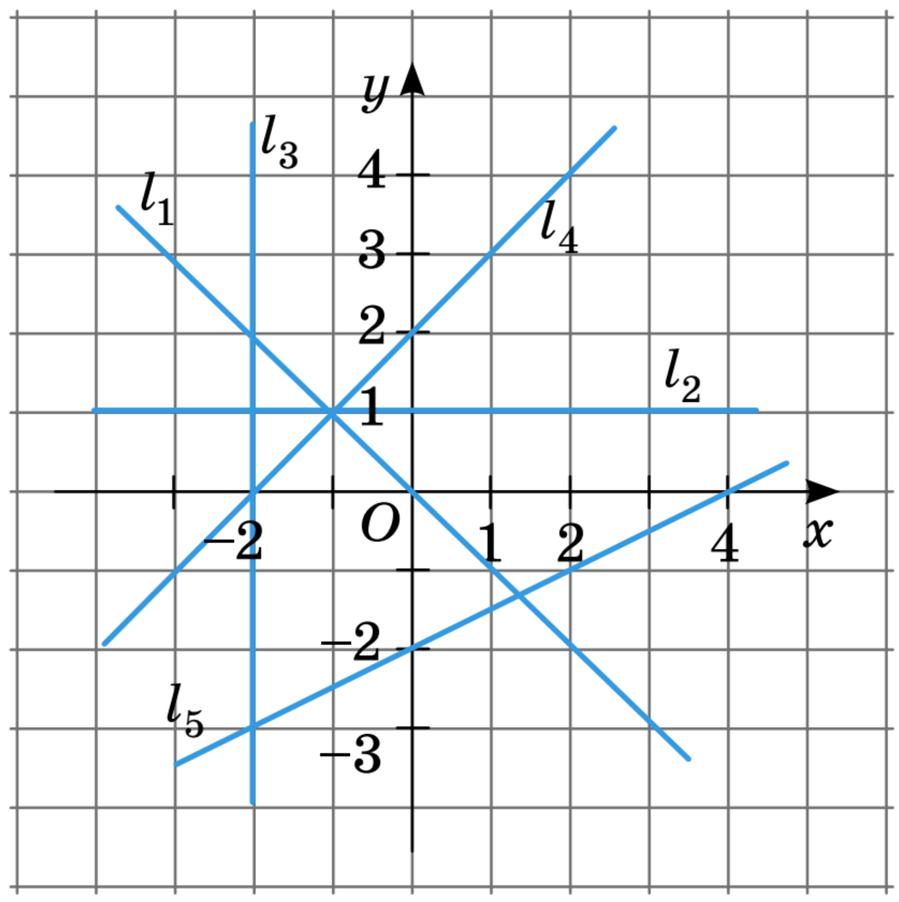
259. При якому значенні b пряма $y = -3x + b$ проходить через точку $M(-1; 4)$? Чи проходить ця пряма через точку $K(3; 10)$?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



260. Доведи, що відрізок з кінцями в точках $M(-3;\ 2)$ і $N(6;\ -4)$ проходить через початок координат.

261. Запишіть рівняння прямих на малюнку 6.9.



Мал. 6.9

262. Знайди площу трикутника, обмеженого осями координат та прямою AB, якщо $A(-3;\ 3)$, $B(3;\ 5)$.

263. Find the perimeter of the triangle bounded by the coordinate axes and line BC, if $B(-3;\ -8)$, $C(6;\ 4)$.

Склади рівняння прямих, яким належать медіани і висоти $\triangle MNK$, якщо (264, 265):

264. $M(-4;\ 2)$, $N(2;\ 6)$, $K(8;\ -4)$.

265. $M(-2;\ 1)$, $N(4;\ 3)$, $K(2;\ -1)$.

Склади рівняння прямої, яка проходить через центри кіл (266, 267):

266. $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ і $x^2+y^2-4x-18y+84=0$.

267. $x^2+y^2+4x-10y+20=0$ і $x^2+y^2-6x+20y+9=0$.

268. Точки $A(-2;\ 0)$ і $C(4;\ 0)$ — вершини рівностороннього $\triangle ABC$. Напиши рівняння прямих, яким належать сторони даного трикутника.

269. Склади рівняння прямих, яким належать сторони квадрата периметра $20\sqrt{2}$, якщо його діагоналі лежать на осях координат.

270. Склади рівняння прямих, яким належать сторони ромба з гострим кутом $60°$, якщо більша діагональ дорівнює 10 і лежить на осі OY, а менша — на осі OX.

271. Дано рівняння прямих, яким належать сторони трикутника: $2x - y + 4 = 0$, $y + x - 7 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$. Знайди координати його вершин.

272. Чи можуть сторони паралелограма лежати на прямих $x - y + 3 = 0$; $x + 6y - 25 = 0$; $x - y - 4 = 0$; $x + 6y - 3 = 0$? Якщо так, то знайди координати його вершин.

273. Установіть відповідність між прямими (1–4) та довжинами хорд (А–Д), які ці прямі відтинають на колі $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

1 $y = x - 3$	**А** $4\sqrt{5}$
2 $y = 3$	**Б** 8
3 $y = -2x$	**В** $7\sqrt{2}$
4 $x = 6$	**Г** 6
	Д $2\sqrt{17}$

Не виконуючи побудови, установи взаємне розміщення кола і прямої, заданих рівняннями (274, 275):

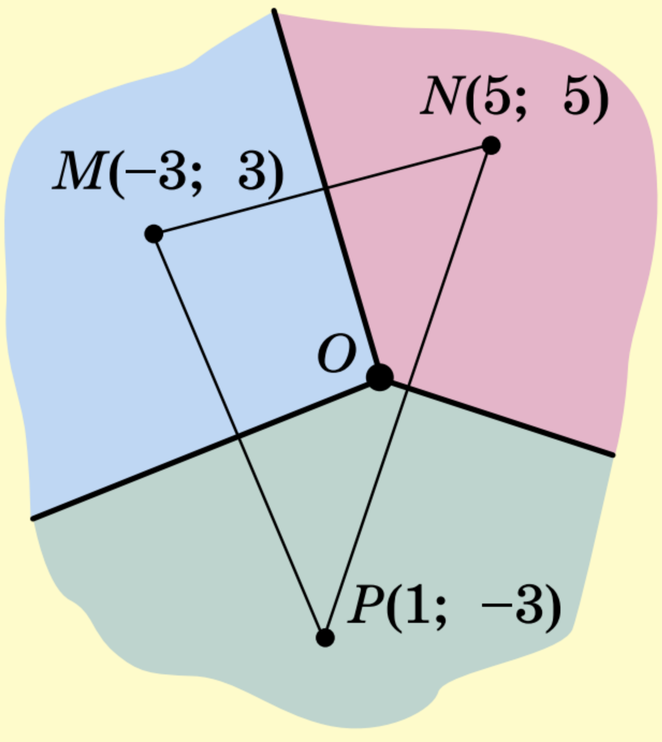
274. а) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + y - 15 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 23 = 0$; $x - y + 3 = 0$.

275. а) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 8$; $2x + y = 6$;
б) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$; $x - y + 2 = 0$.

276. Чому дорівнюють коефіцієнти a і b прямої $ax + by = 2$, якщо вона проходить через точки $M(-2; -2)$, $N(8; 3)$?

277. При яких значеннях параметра a пряма $y = x + 5$ і коло $x^2 + y^2 = a^2$ дотикаються?

278. На малюнку 6.10 зображено три антени M, N, P, їх координати та області обслуговування. У математиці розбиття скінченної кількості точок площини, при якому кожна область розбиття (клітинка) утворює множину точок, найближчих до одного з елементів множини, називають діаграмою Вороного. Ребра клітинок на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків MN, NP і MP. Запиши рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки O — вершини діаграми Вороного для областей обслуговування антен M, N, P.



Мал. 6.10



Вороний Георгій Феодосійович (1868–1908)

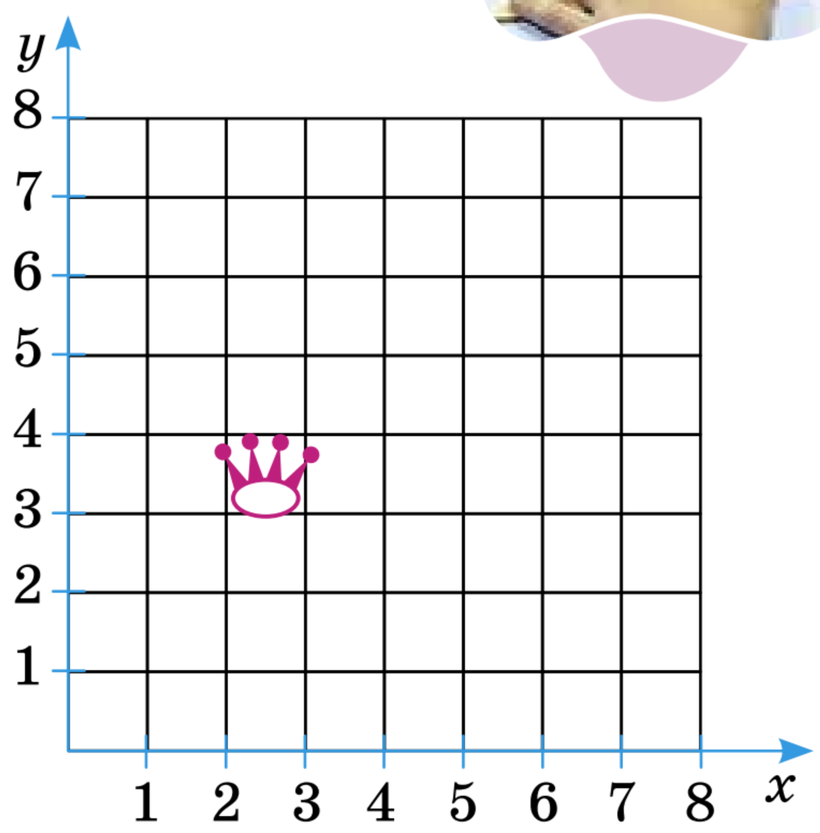
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



279. На малюнку 6.11 в прямокутній системі координат зображено шахову дошку, що містить 64 поля.

а) Яку найбільшу кількість полів дошки можна перетнути однією прямою? Скільки існує таких прямих? Запиши рівняння однієї такої прямої.

б) Запиши рівняння прямих, що задають кілька можливих ходів ферзя, зображеного на малюнку. Координати ферзя (2,5; 3,5).



Мал. 6.11

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



280. Побудуй коло $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

281. Установи вид $\triangle ABC$, якщо $A(-2; 3)$, $B(4; 6)$, $C(8; -2)$.

282. Знайди периметр і площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 5 см і 12 см, а кут між ними 90°.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





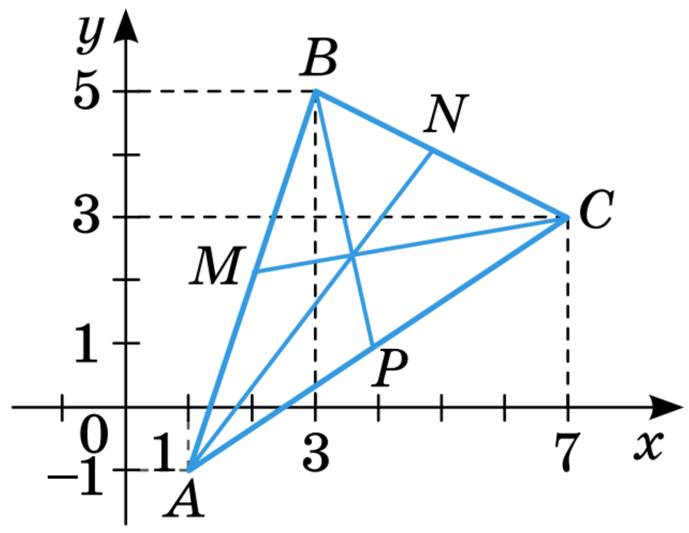
Паралельність в інтер'єрі

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

1 AN, BP, CM — медіани.

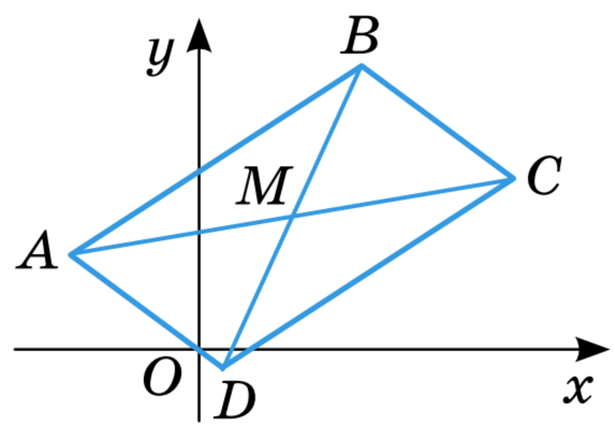
AN, BP, CM



Б

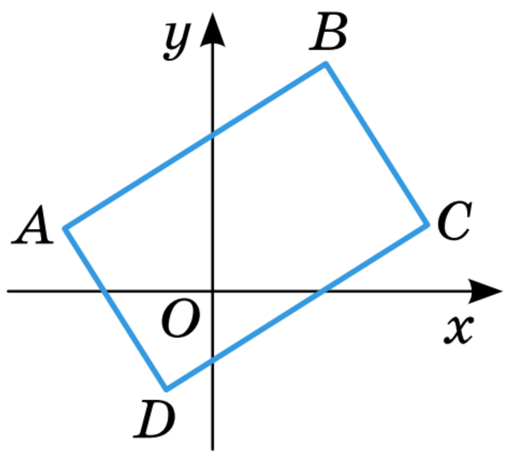
$ABCD$ — паралелограм, $A(-4;\ 3)$, $D(1;\ -1)$, $M(5;\ 4)$.

Координати точок B і C



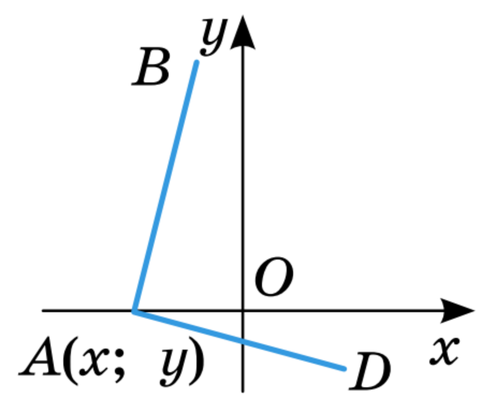
2 $A(-4;\ 3)$, $B(4;\ 7)$, $C(7;\ 1)$, $D(-1;\ -3)$.

Довести: $ABCD$ — прямокутник



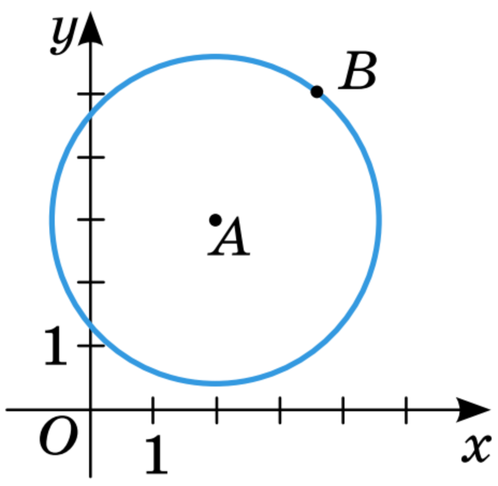
$B(-1;\ 6)$, $D(3;\ -2)$, $AB = AD$.

$A(x;\ y)$

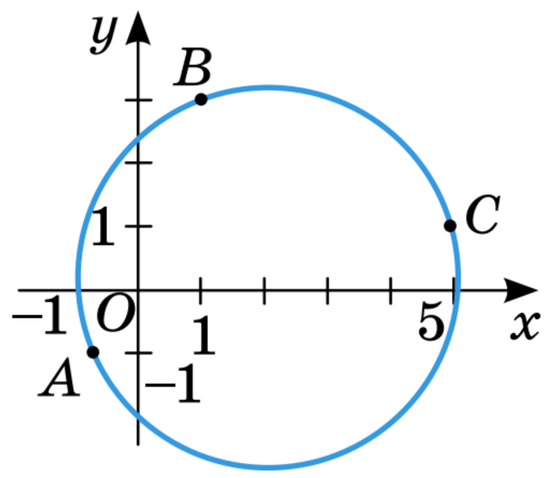


Запиши рівняння прямих і кіл

3 $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 5)$.

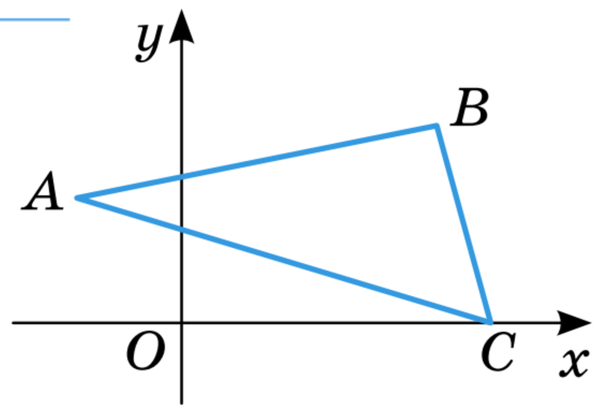


$A(-1;\ -1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ 1)$.

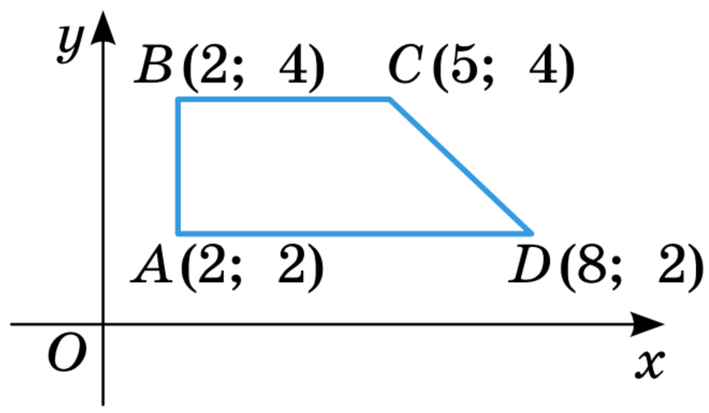


4 $A(-2;\ 2)$, $B(6;\ 4)$, $C(8;\ 0)$.

AB, BC, AC



AB, BC, CD, AD



САМОСТІЙНА РОБОТА 1

Варіант 1

1. Порівняй з нулем значення виразу $\sin 130° \cdot \cos 50° \cdot \operatorname{tg} 80° \cdot \cos 150°$.

2. Напиши рівняння кола з центром у точці $A(-2; 3)$, яке проходить через точку $B(1; -1)$.

3. Напиши рівняння медіани BM $\triangle ABC$, якщо $A(-3; 2)$, $B(4; 1)$, $C(5; -4)$.

4. Напиши рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4; -1)$ паралельно прямій $y = 2x - 7$.

Варіант 2

1. Порівняй з нулем значення виразу $\cos 125° \cdot \sin 135° \cdot \cos 20° \cdot \operatorname{tg} 130°$.

2. Напиши рівняння кола з центром у точці $A(2; -3)$, яке проходить через точку $P(-6; 3)$.

3. Напиши рівняння середньої лінії MN $\triangle ABC$ ($MN \parallel AC$), якщо $A(-1; -3)$, $B(3; 7)$, $C(5; 1)$.

4. Напиши рівняння прямої, яка проходить через точку $K(3; -2)$ паралельно прямій $y = -4x + 5$.

Варіант 3

1. Порівняй з нулем значення виразу $\operatorname{tg} 123° \cdot \sin 132° \cdot \cos 15° \cdot \sin 15°$.

2. Напиши рівняння кола з центром у точці $A(1; -3)$, яке проходить через точку $B(4; 1)$.

3. Напиши рівняння медіани AM $\triangle ABC$, якщо $A(3; 5)$, $B(-4; 2)$, $C(2; -4)$.

4. Напиши рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; 3)$ паралельно прямій $y = 5x + 8$.

Варіант 4

1. Порівняй з нулем значення виразу $\cos 20° \cdot \sin 135° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 23°$.

2. Напиши рівняння кола з центром у точці $A(4; -3)$, яке проходить через точку $K(-2; 5)$.

3. Напиши рівняння середньої лінії MN трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), якщо $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(5; 1)$, $D(3; -3)$.

4. Напиши рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3; 3)$ паралельно прямій $y = -5x + 11$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 1

1	Знайди довжину відрізка AB, якщо $A(1; 2)$, $B(1; 6)$.	**А** $2\sqrt{17}$ **Б** 4 **В** $2\sqrt{5}$ **Г** 16
2	Дано точки $A(-1; 3)$ і $B(5; 6)$. Знайди координати точки M, яка ділить відрізок AB навпіл.	**А** $M(4; 9)$ **Б** $M(6; 3)$ **В** $M(3; 1{,}5)$ **Г** $M(2; 4{,}5)$
3	Яка пряма паралельна прямій $y = 3x + 5$?	**А** $y = 5$ **Б** $3x + y = 4$ **В** $y - 3x = 2$ **Г** $x + 3y = 6$
4	Який знак слід поставити замість *: $\sin 128° * \cos 128°$?	**А** $>$ **Б** $<$ **В** $=$ **Г** не можна встановити
5	Яка пряма утворює кут $135°$ з додатним напрямом осі OX?	**А** $y - x = 3$ **Б** $y = 2 - 0{,}5x$ **В** $x + y = 5$ **Г** $\sqrt{3}x - y = 7$
6	Радіус якого кола дорівнює 4?	**А** $x^2 + y^2 = 4$ **Б** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ **В** $(x + 2)^2 + y^2 = 2$ **Г** $x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0$
7	AB — діаметр кола. Яке з рівнянь є рівнянням цього кола, якщо $A(1; 3)$, $B(-1; -3)$?	**А** $x^2 + y^2 = 10$ **Б** $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ **В** $x^2 + y^2 = \sqrt{10}$ **Г** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{10}$
8	Укажи хибну рівність.	**А** $\sin^2 140° + \cos^2 140° = 1$ **Б** $\sin 23° = -\sin 157°$ **В** $\cos 57° = \sin 33°$ **Г** $\cos 123° = -\cos 57°$
9	Яке з рівнянь є рівнянням діаметра кола $x^2 + y^2 = 25$, проведеного через точку $A(3; 4)$?	**А** $3x + 4y = 25$ **Б** $y = \frac{3}{4}x$ **В** $y = \frac{4}{3}x$ **Г** $3x + 4y = 5$
10	Яка з прямих не є дотичною до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 9$?	**А** $x = 3$ **Б** $y = 3$ **В** $x = -3$ **Г** $y = -1$

Навколишній світ — це світ геометрії... Усе навкруги — геометрія.

Ле Корбюзьє

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Знайди довжину відрізка KP, якщо $K(1; -3)$, $P(7; 5)$.

А $\sqrt{10}$ **Б** 10 **В** $2\sqrt{10}$ **Г** 40

2. Який кут утворює пряма $y = -\sqrt{3}x - 1$ з додатним напрямом осі OX?

А 30° **Б** 60° **В** 150° **Г** 120°

3. M — середина відрізка AB. Знайди координати точки A, якщо $M(1; 4)$, $B(3; -5)$.

А $(-1; 13)$ **Б** $(5; -14)$ **В** $(5; 3)$ **Г** $(7; -6)$

4. Дано точки $A(-2; 4)$ і $B(6; -2)$. Установи відповідність між колами, заданими умовами (1–3), та рівняннями цих кіл (А–Д).

1 коло з центром A радіуса 2	**А** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
2 коло з центром B радіуса AB	**Б** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$
3 коло діаметра AB	**В** $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 10$
	Г $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
	Д $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 100$

5. Запиши рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3; -1)$ та середину відрізка BC, якщо $B(-1; 5)$, $C(5; 3)$.

6. За якого значення a відстань між точками $A(-1; a)$ і $B(2; -3)$ дорівнює 5?

7. Дано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(3; 0)$. Знайди координати вершини D.

8. Установи вид трикутника з вершинами в точках $A(-2; -8)$, $B(6; -2)$, $C(-8; 0)$. Знайди його периметр, площу та напиши рівняння кола, описаного навколо нього.

Додаткове завдання

9. Знайди довжину хорди, утвореної при перетині кола $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ прямою $y = x - 4$.

Головне в розділі 1	

РОЗДІЛ 2
Вектори на площині

Існує відмінність, але жодного протистояння, між теорією і практикою: теорія залежить від практики, а практика повинна передувати теорії. На землі немає нічого більш вражаючого за людину і нічого більш особливого за людський розум.



Вільям Ровен Гамільтон (1806–1865)

Вектор — одне з фундаментальних понять математики. Найбільш загальна теорія векторів побудована на початку XX століття на аксіоматичній основі.

Векторний метод розв'язання задач — важливий і потужний метод елементарної геометрії. Доведені за його допомогою твердження правильні не лише для фігур на площині, а й для тривимірного і навіть для n-вимірних просторів.

У цьому розділі ти ознайомишся з поняттям вектора та його різними інтерпретаціями, навчишся виконувати дії з векторами та застосовувати властивості векторів до розв'язування задач.

§ 7 Вектори
Vectors

§ 8 Координати вектора
Vector Coordinates

§ 9 Додавання і віднімання векторів
Vector Addition and Subtraction

§ 10 Множення вектора на число
Vector Multiplication by a Number

§ 11 Скалярний добуток векторів
Scalar (dot) Product of vectors

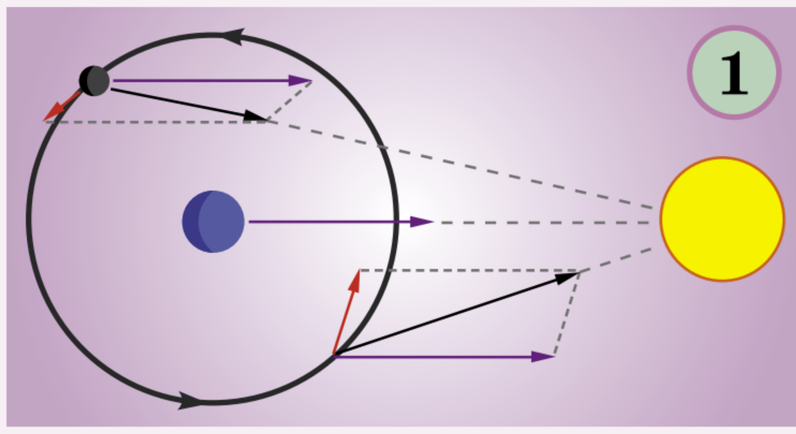
§ 12 Застосування векторів
Application of vectors

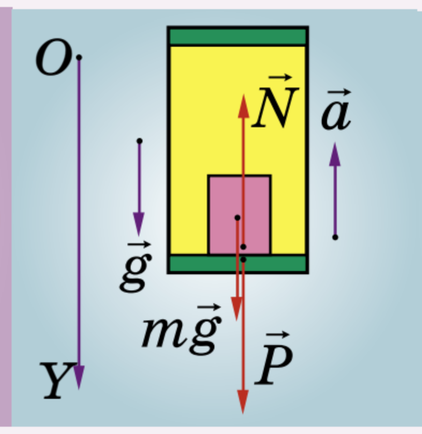
Навчальний проєкт «Векторний метод розв'язання задач»
Educational Project «Vector method of solving problems»

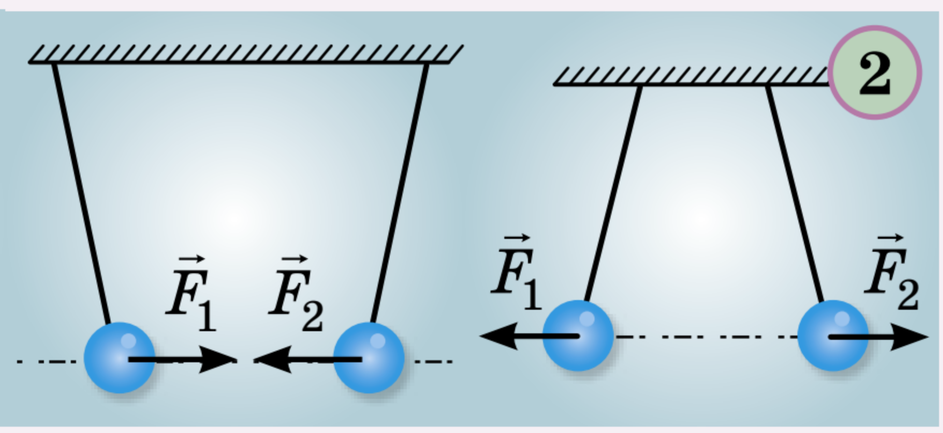


Для чого вивчати вектори?

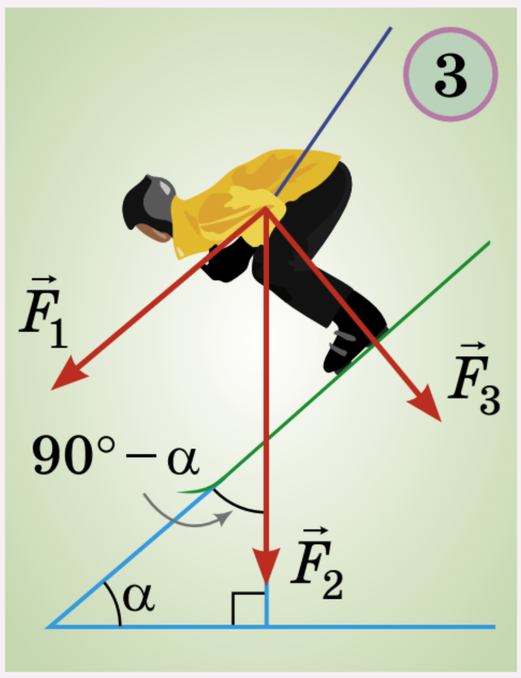
За допомогою векторного методу зручно характеризувати геометричні та інші об'єкти та співвідношення між ними. Саме тому вектори ефективно використовують у математиці, астрономії[1], хімії, фізиці[2] та інших природничих науках.

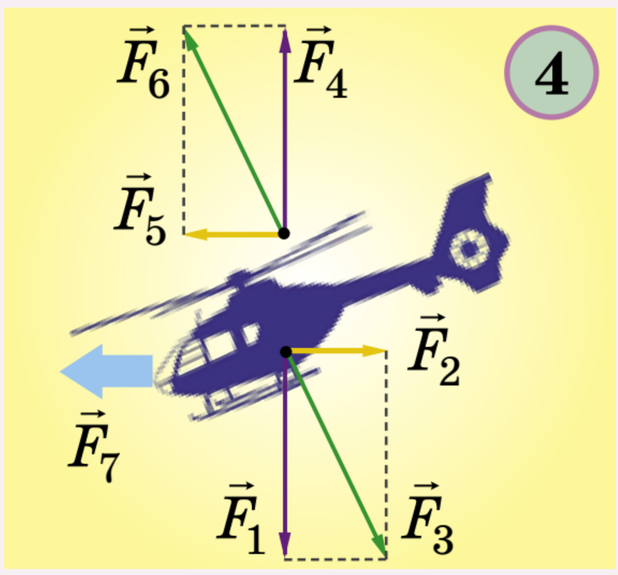


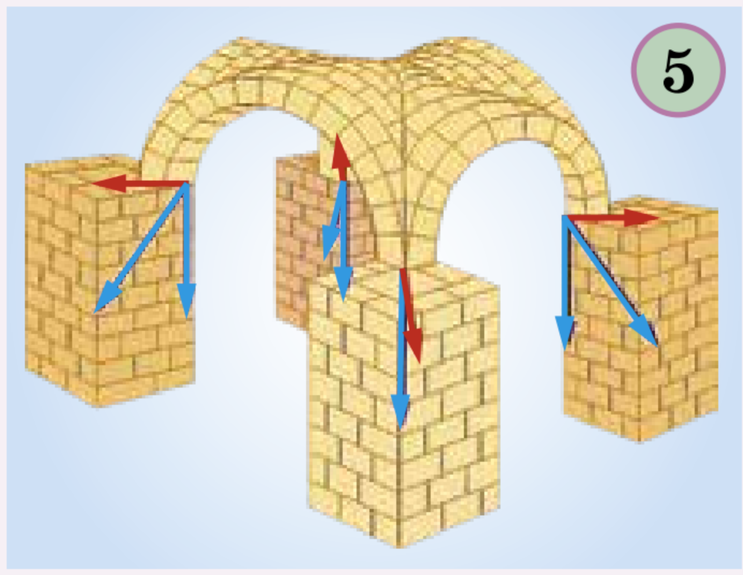




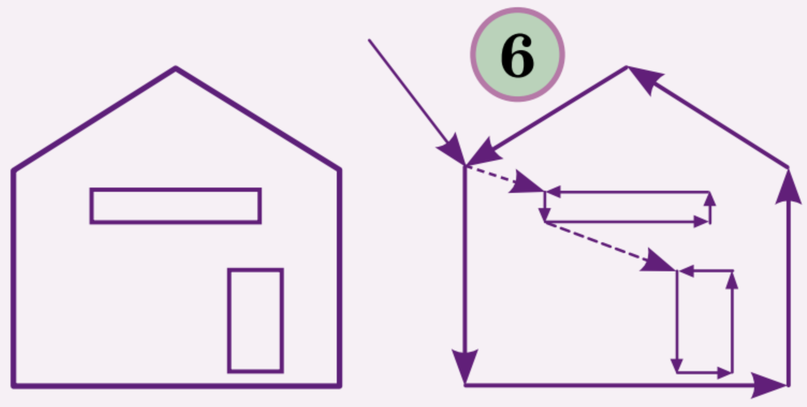
Використовують вектори та їх властивості також у багатьох сферах людської діяльності (у спорті[3], транспорті[4], у будівництві[5] тощо).

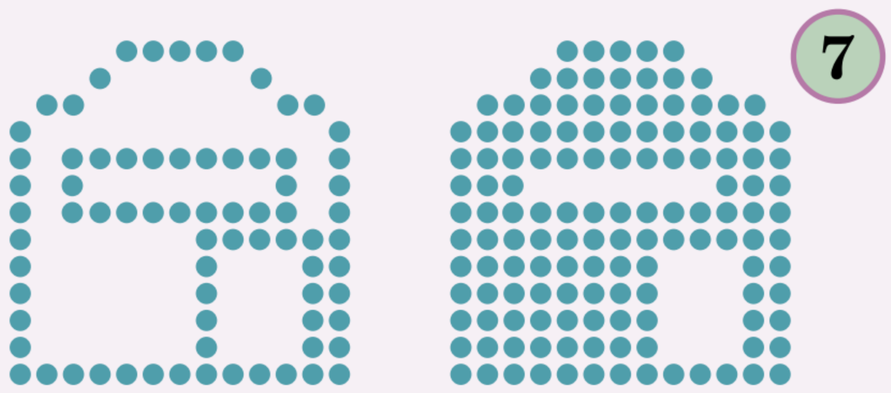






У видавництвах, рекламних агентствах і дизайнерських бюро щодня створюють і виводять на екран та друк багато різних зображень. Такі роботи виконують засобами комп'ютерних технологій на основі спеціальних програм, а саме — комп'ютерної графіки. Одним із видів комп'ютерної графіки є векторна графіка[6], у якій для опису зображення використовують вектори (на відміну від растрової графіки[7], яка описує зображення як масив точок).





А де ще використовують вектори? Наведи свої приклади.

§7 ВЕКТОРИ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- вектор — vector
- довжина вектора — magnitude of a vector
- колінеарні вектори — collinear vectors

Багато фізичних величин, таких як сила, швидкість, прискорення, характеризуються не лише числовими значеннями, а й напрямами. Наприклад, щоб охарактеризувати рух якого-небудь тіла, не достатньо сказати, що воно рухається зі швидкістю 10 метрів за секунду, треба вказати і напрям його руху. На дорогах обов'язкові напрями руху визначають дорожні знаки (мал. 7.1).

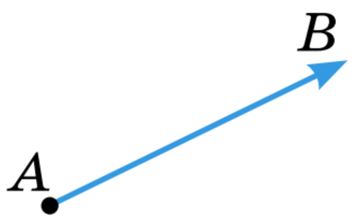


Мал. 7.1

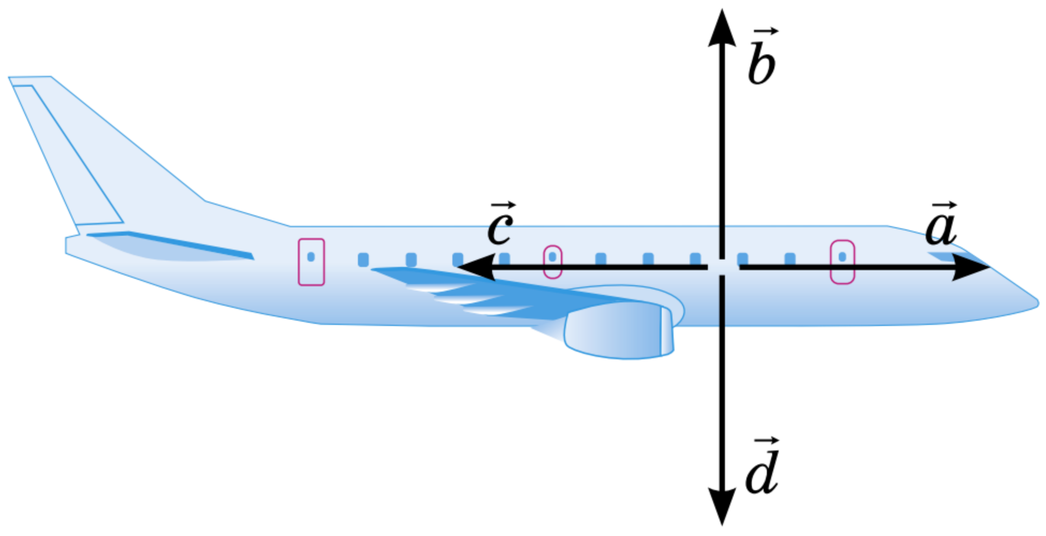
Величини, які характеризуються не лише числовими значеннями, а й напрямами, називають *векторними*, а значення векторних величин — *векторами*. Вектори найчастіше зображують напрямленими відрізками.

Напрямлений відрізок — це відрізок із вказаним напрямом. Один із його кінців вважається *початком*, другий — *кінцем*. На малюнку напрям зображують *стрілкою*. Якщо A і B — початок і кінець напрямленого відрізка, його позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (мал. 7.2). Іноді напрямлені відрізки позначають і малими буквами: $\vec{a}$, $\vec{x}$ тощо.

Відстань між початком і кінцем — довжина напрямленого відрізка. Її називають також *модулем*, або *довжиною вектора* $\overrightarrow{AB}$ і позначають $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$. Зображати вектори напрямленими відрізками зручно, бо такі зображення наочні. На малюнку 7.3 чотири напрямлені відрізки зображають найважливіші сили, які діють на літак у польоті: $\vec{a}$ — сила тяги, $\vec{b}$ — підіймальна сила, $\vec{c}$ — сила опору повітря, $\vec{d}$ — сила тяжіння.

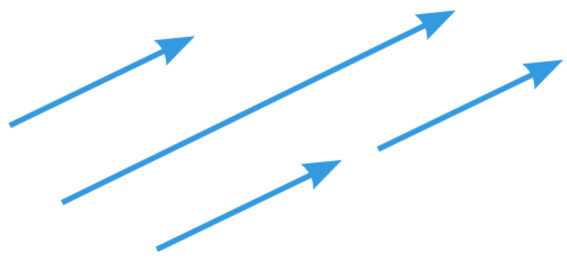


Мал. 7.2



Мал. 7.3

Зауваження. Вектор і напрямлений відрізок, який зображає цей вектор, — не одне й те саме. Однак для спрощення викладу далі замість словосполучень «вектор, зображений напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$» і «напрямлений відрізок, що зображає вектор $\overrightarrow{AB}$» будемо писати коротше: «вектор $\overrightarrow{AB}$».



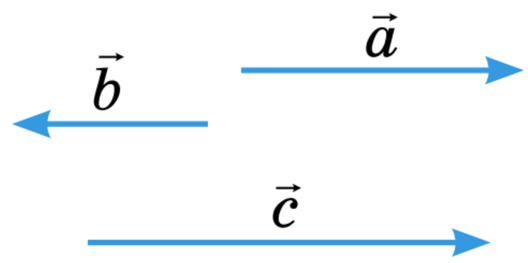
Мал. 7.4

Два вектори називають *колінеарними*, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.



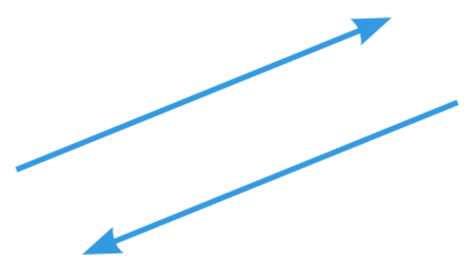
Мал. 7.5

Колінеарні вектори можуть бути *співнапрямленими*, тобто однаково напрямленими (мал. 7.4), або *протилежно напрямленими* (мал. 7.5). Співнапрямлені вектори позначають знаком $\uparrow\uparrow$, а протилежно напрямлені — знаком $\uparrow\downarrow$. Наприклад, на малюнку 7.6: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, а $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$.



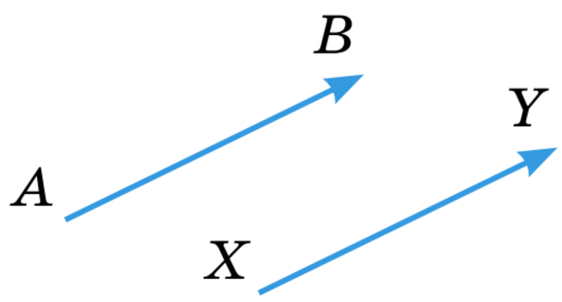
Мал. 7.6

Протилежно напрямлені вектори з рівними модулями називають *протилежними векторами* (мал. 7.7).



Мал. 7.7

Два вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі (мал. 7.8). Записують: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.



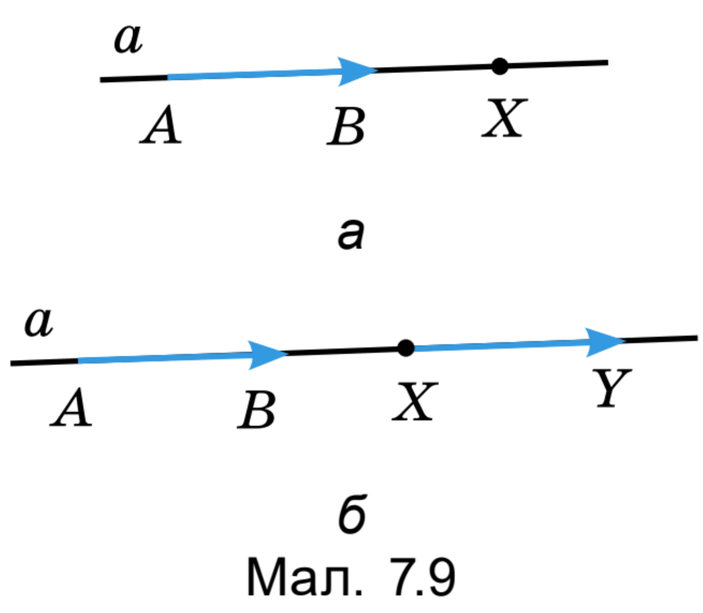
Мал. 7.8

Якщо модуль вектора дорівнює 1, його називають *одиничним вектором*.

Напрямленими відрізками зображають тільки ненульові вектори. Крім них, існує й *нульовий вектор*, який не має ні довжини, ні напряму. Його позначають символом $\vec{0}$ або $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ тощо. Геометрично нульовий вектор можна уявити таким, кінець якого збігається з початком. Нульовий вектор вважається колінеарним з будь-яким іншим вектором. Модуль нульового вектора вважається рівним нулю.

Від будь-якої точки можна відкласти вектор, який дорівнює даному вектору, і лише один. Відкласти вектор $\overrightarrow{AB}$ від точки X — це означає накреслити напрямлений відрізок $\overrightarrow{XY}$ такий, що $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$. Нехай дано вектор $\overrightarrow{AB}$ і точку X. Покажемо, як від точки X відкласти вектор $\overrightarrow{XY}$, який дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$.

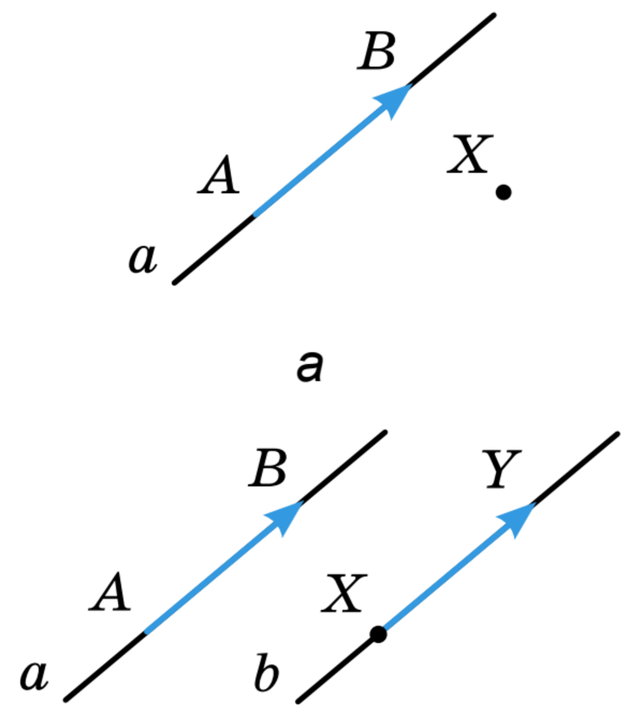
1. Якщо точка X лежить на прямій a, яка містить вектор $\overrightarrow{AB}$ (мал. 7.9, *а*), то від точки X потрібно відкласти відрізок XY, довжина якого дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$. Напрям вектора $\overrightarrow{XY}$ збігається з напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$ (мал. 7.9, *б*).



Мал. 7.9

2. Якщо точка X не лежить на прямій a, яка містить вектор $\overrightarrow{AB}$ (мал. 7.10, *а*), то через точку X потрібно провести пряму b, паралельну прямій a, і від точки X відкласти відрізок XY, довжина якого дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$. Напрям вектора $\overrightarrow{XY}$ співпадає з напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$ (мал. 7.10, *б*).

3. Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, то шуканим вектором буде вектор $\overrightarrow{XX}$.

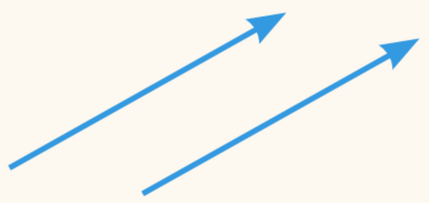


б

Мал. 7.10

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Одним і тим самим словом «вектор» часто називають різні поняття, бо вектори бувають вільні, прикладені та ін. Вільний вектор визначається тільки довжиною і напрямом, а прикладений — довжиною, напрямом і точкою прикладання. Два рівні за довжиною і однаково напрямлені відрізки позначають один і той самий вільний вектор (мал. 7.11).



Мал. 7.11

Два прикладені вектори, позначені рівними за довжиною й однаково напрямленими відрізками, не завжди рівні (мал. 7.12). Силу $\vec{F}$ не можна замінити силою $\vec{F}_1$, бо одна з них обертає шків в одному напрямі, а друга — у протилежному.

Фізики частіше використовують прикладені вектори і зображають їх прямолінійними стрілками, бо такі зображення наочні. У математиці розглядають лише вільні вектори і зображають їх не лише стрілками, а й парами точок, парами чисел тощо.



Мал. 7.12

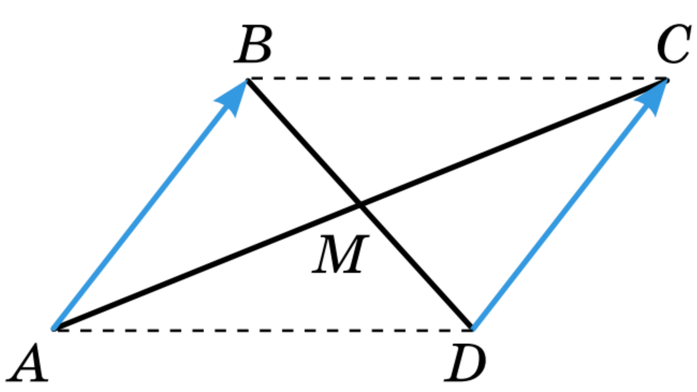
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які величини називають векторними? Наведи приклади.
2. Як зображають і позначають вектори?
3. Які вектори називають: а) колінеарними; б) рівними; в) протилежними?
4. Що називають модулем вектора?
5. Який вектор називають: а) одиничним; б) нульовим?

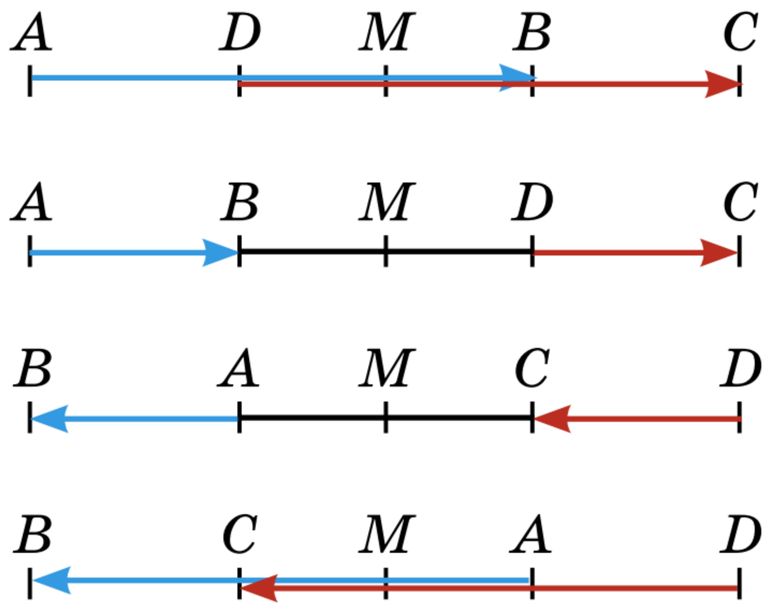
ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Доведи, що якщо середини відрізків AC і BD збігаються, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Мал. 7.13



Мал. 7.14

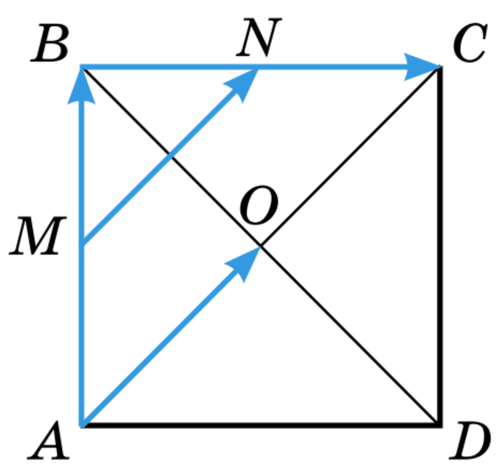
- Нехай M — спільна середина відрізків AC і BD. Якщо дані відрізки не лежать на одній прямій, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (мал. 7.13).

  Протилежні сторони паралелограма паралельні й рівні. Тому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

  Якщо дані відрізки лежать на одній прямій, то вони можуть бути розташовані, як показано на малюнку 7.14.

  У кожному з цих випадків напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ мають рівні довжини і однакові напрями. Отже, завжди $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. $ABCD$ — квадрат (мал. 7.15). Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$? А вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AO}$ (M і N — середини сторін AB і BC)?



Мал. 7.15

- Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ не рівні. Хоча вони і мають однакові довжини, але напрями у них різні.

  MN — середня лінія $\triangle ABC$, тому $MN \parallel AC$, а це означає, що $MN \parallel AO$ і $MN = 0{,}5AC = AO$. Отже, вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AO}$ — співнапрямлені і мають рівні довжини, тому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AO}$.

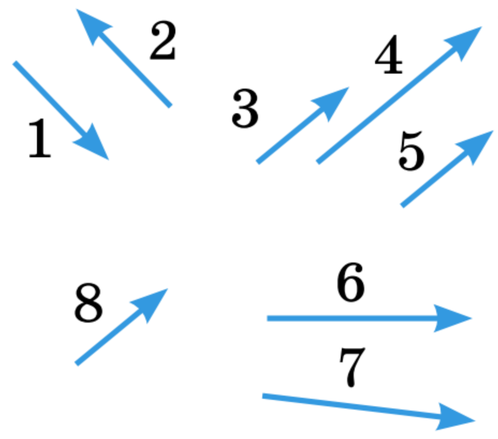
3. Дано чотирикутник $ABCD$, у якого $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Доведи, що $ABCD$ — паралелограм.

- Якщо $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, то $AD \parallel BC$ і $AD = BC$. А чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні і рівні, — паралелограм. Значить, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

ВИКОНАЄМО УСНО



283. Які з векторів, зображених на малюнку 7.16:
а) колінеарні;
б) співнапрямлені;
в) протилежно напрямлені?



Мал. 7.16

284. Точка O — середина відрізка AB. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{OB}$? А вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{BO}$? Чи рівні ці вектори?

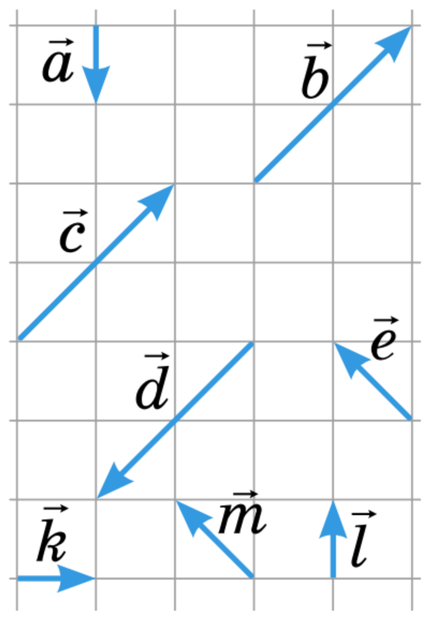
285. Трикутник ABC — рівносторонній. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$?

286. $ABCD$ — квадрат (мал. 7.15). Укажи пару рівних векторів.
А $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ **Б** $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{DA}$ **В** $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ **Г** $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$

287. $ABCD$ — квадрат (мал. 7.15). Укажи пару неколінеарних векторів.
А $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD}$ **Б** $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AD}$ **В** $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{OC}$ **Г** $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CO}$

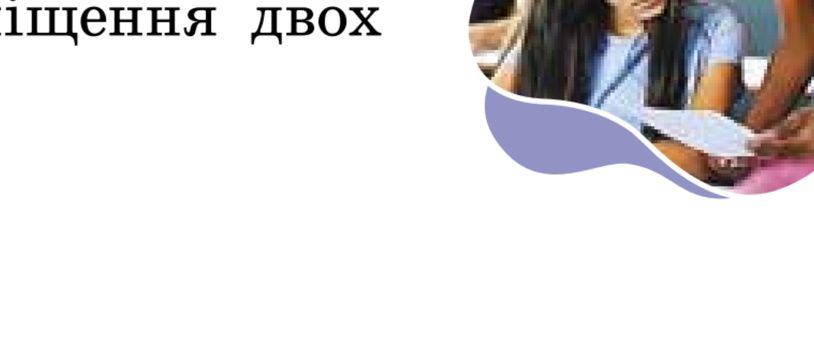
288. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Чи правильно, що $\vec{a} = \vec{b}$? Чому? Наведи приклади, використовуючи малюнки 7.15 і 7.17.

289. Які з векторів, зображених на малюнку 7.17: а) колінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені? Визнач довжини цих векторів, прийнявши довжину сторони клітинки за 1. Чи є серед них рівні вектори? А протилежні?



Мал. 7.17

290. На малюнку 7.18 зображено два рівні рівносторонні трикутники AFB і BDC, у яких точки A, B і C лежать на одній прямій. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{q}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{r}$. Які з наведених нижче тверджень є правильними?
а) $\overrightarrow{BD} = \vec{q}$; б) $\overrightarrow{FB} = \vec{q}$; в) $\vec{q} = \vec{r}$;
г) $\overrightarrow{BC} = \vec{p}$; ґ) $\overrightarrow{BF} = \vec{r}$; д) $\overrightarrow{FD} = \vec{p}$.



Мал. 7.18

291. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Чи існує вектор $\vec{c}$, колінеарний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



292. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць будує вектор, другий / друга — задає взаємне розміщення двох

векторів, а третій / третя має побудувати відповідний другий вектор. Потім учасники міняються ролями.

293. Накресли два напрямлені відрізки, розміщені на: а) одній прямій; б) паралельних прямих; в) перпендикулярних прямих.

294. Накресли напрямлені відрізки AB і AC завдовжки 2 см і 3 см відповідно, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: а) неколінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені.

295. Накресли два вектори, які мають рівні довжини і: а) неколінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені. У якому випадку вектори рівні? А протилежні?

296. $ABCD$ — прямокутник. Чи є рівні вектори серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$? Які з даних векторів мають рівні довжини?

297. $ABCD$ — ромб, O — точка перетину його діагоналей. Чи є рівні вектори серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$? Які з даних векторів мають рівні довжини?

298. Дано точки $A(2; 5)$ і $B(-2; 2)$. Побудуй вектор $\overrightarrow{AB}$. Знайди довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$. Чи рівні ці вектори?

299. Накресли ненульовий вектор $\vec{a}$ та точки M, N, P. Відклади від цих точок вектори, що дорівнюють вектору $\vec{a}$.

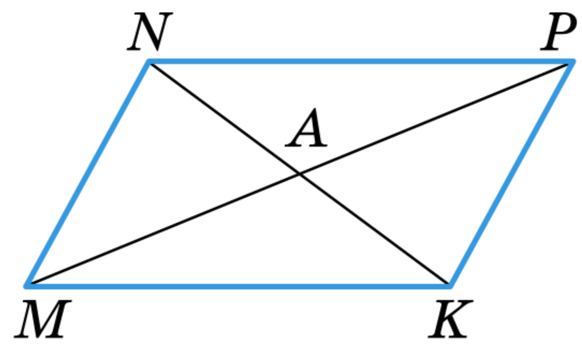
300. $ABCD$ — ромб. Відклади вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AB}$, від: а) точки C; б) середини сторони BC; в) середини діагоналі AC.

301. $ABCD$ — паралелограм. Доведи рівність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

302. Доведи, що $ABCD$ — паралелограм, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

303. Використовуючи малюнок 7.19, установіть відповідність між векторами, заданими умовами (1–4), та векторами (А–Д).

1 вектор, що дорівнює $\overrightarrow{MN}$	**А** $\overrightarrow{KP}$
2 вектор, протилежний $\overrightarrow{NP}$	**Б** $\overrightarrow{AM}$
3 вектор, співнапрямлений з $\overrightarrow{AP}$	**В** $\overrightarrow{MP}$
4 вектор, колінеарний $\overrightarrow{AN}$	**Г** $\overrightarrow{KM}$
	Д $\overrightarrow{NK}$

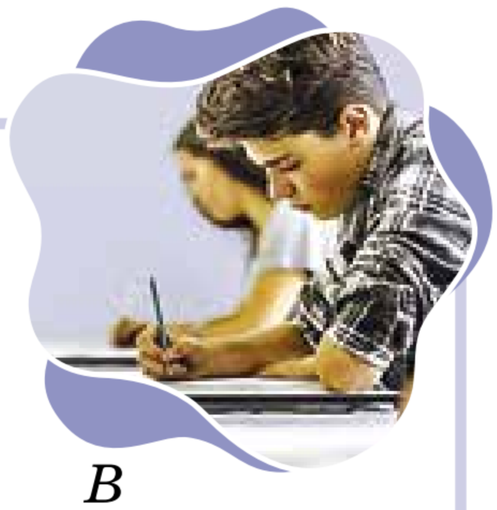


Мал. 7.19

304. Дві туристки рухалися з одного пункту: перша — на схід на 6 км, друга — на північ на 8 км. Подай переміщення кожної туристки у вигляді вектора.

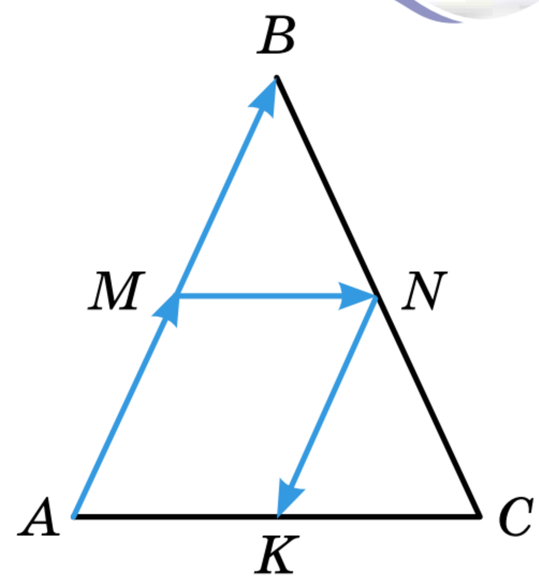
305. Вітрильник рухається морем: спочатку 5 км на північ, потім 12 км на схід. Подай переміщення вітрильника на кожній ділянці у вигляді двох векторів. Знайди довжину вектора його загального переміщення.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



306. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$ (мал. 7.20). M, N, K — середини його сторін. Запиши всі вектори, зображені на малюнку. Які з цих векторів: а) колінеарні; б) рівні; в) протилежні?

307. Точки M, N, K — середини сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC (мал. 7.20). Запишіть по дві пари: а) колінеарних векторів; б) протилежних векторів; в) рівних векторів; г) векторів, що мають рівні довжини.



Мал. 7.20

308. Дано точки $A(2; 3)$ і $B(-1; 6)$. Побудуй вектор $\overrightarrow{AB}$. Відклади від початку координат вектор, який дорівнює вектору: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$. Відклади ці самі вектори від точки $P(-3; 2)$.

309. Дано точки $M(2; 2)$ і $N(6; 5)$. Побудуй вектор $\vec{a}$, який: а) дорівнює вектору $\overrightarrow{MN}$; б) дорівнює вектору $\overrightarrow{NM}$; в) співнапрямлений з вектором $\overrightarrow{NM}$ і $|\vec{a}| = 2|\overrightarrow{MN}|$; г) не є колінеарним до вектора $\overrightarrow{MN}$ і $|\vec{a}| = 0,5|\overrightarrow{MN}|$.

310. Побудуй прямокутник $ABCD$, площа якого дорівнює 30 см^2, а периметр 22 см. Зобрази і випиши чотири пари рівних векторів, позначивши точку перетину діагоналей O. Які їх довжини?

311. O — точка перетину діагоналей прямокутника $EHPK$, $EH = 6$ см, $HP = 8$ см. Знайди довжини векторів $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH}$ і $\overrightarrow{PO}$. Чи є серед цих векторів рівні?

312. Determine the type of quadrilateral $ABCD$ if $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ and: a) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; b) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

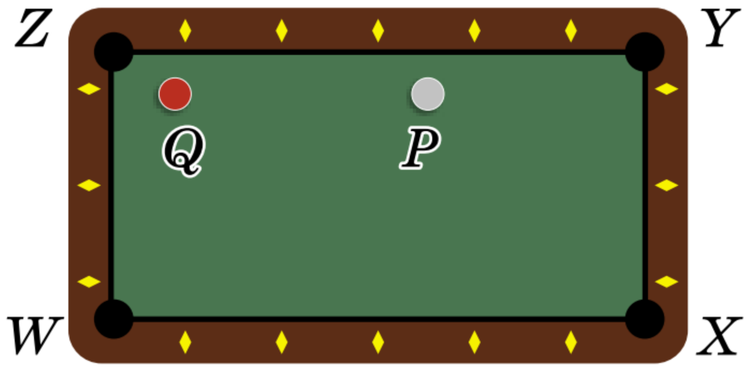
313. Установи вид чотирикутника $ABCD$ і зобрази його, якщо:

а) вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ — колінеарні, а $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — ні;

б) вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — протилежні;

в) вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ — співнапрямлені та $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

314. Намалюй в зошиті аналогічне зображення (мал. 7.21). У якому напрямку треба вдарити більярдну кулю P, щоб вона, відбившись від верхнього, правого і нижнього бортів попала в лузу Z?



Мал. 7.21

315. Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні. Чи випливає з цього, що точки A, B і C лежать на одній прямій? Чи правильне обернене твердження?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



316. Вибравши масштаб, накресли вектори, які зображають політ літака спочатку на 300 км на південь від міста A до B, а потім на 400 км на схід від міста B до C. Накресли вектор $\overrightarrow{AC}$ і знайди його довжину двома способами. Порівняй отримані значення. Як можна інтерпретувати вектор AC і його довжину?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



317. Напиши рівняння кола радіуса 3 см із центром у точці $A(-1; 3)$.

318. Знайди периметр і площу трикутника ABC, заданого координатами його вершин $A(-2; 5)$, $B(5; 6)$, $C(1; 2)$.

319. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 14 см і 48 см. Знайди довжину найкоротшої медіани.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





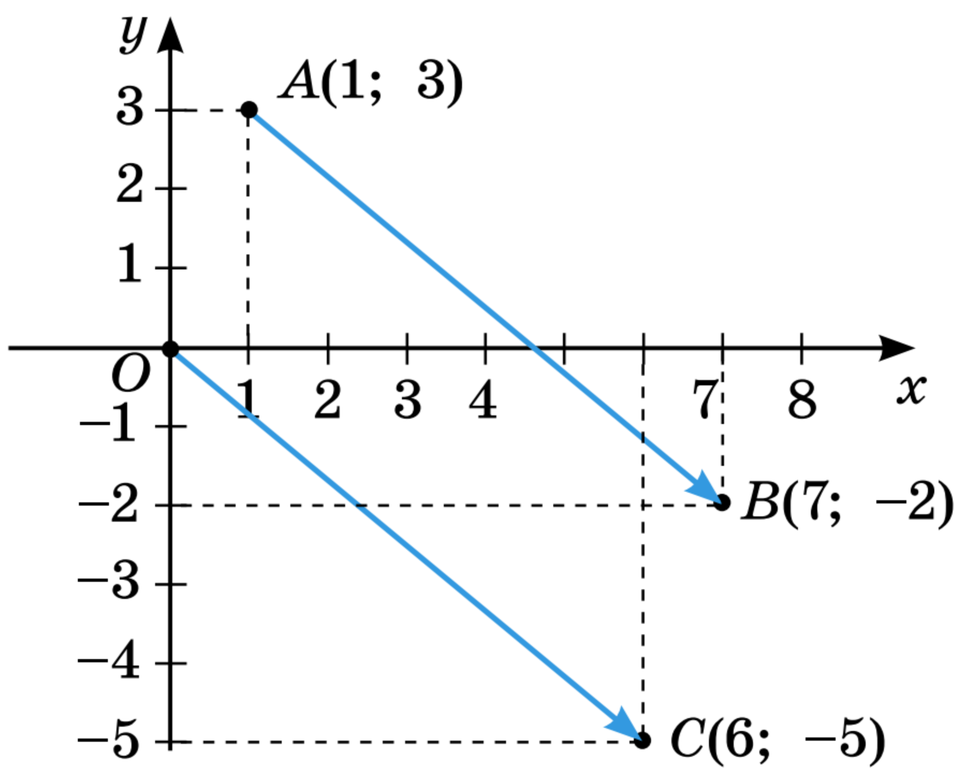
Вектори у спорті та дозвіллі

§8 КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

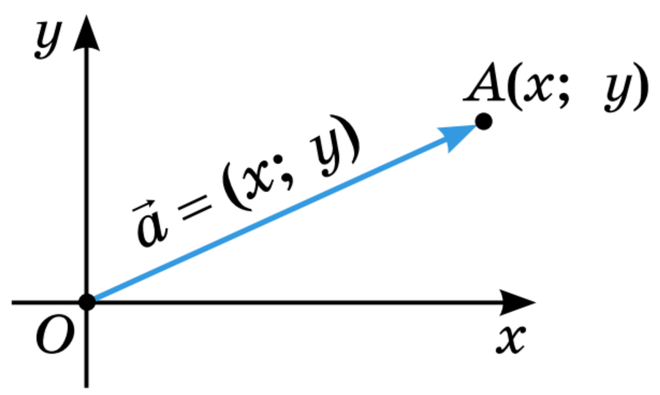
- координати вектора — vector coordinates
- нульовий вектор — zero vector or null vector
- рівні вектори — equal vectors

Вектори можна задавати різними способами. Розглянемо, як це можна зробити за допомогою координат. *Координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$ з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$. Записують такий вектор, вказуючи його координати: $\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$, або $\vec{a} = (x;\ y)$, або $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Наприклад, якщо дано точки $A(1;\ 3)$ і $B(7;\ -2)$, то $\overrightarrow{AB} = (6;\ -5)$. Числа 6 і -5 — координати вектора $\overrightarrow{AB}$ (мал. 8.1). Вектор $\overrightarrow{OC}$, початок якого — точка $O(0;\ 0)$, а кінець — $C(6;\ -5)$, має такі самі координати. Якщо O — початок координат, а числа x і y — координати точки A, то ці самі числа є також координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ (мал. 8.2).



Мал. 8.1

Координати вектора можуть бути будь-якими дійсними числами. Якщо обидві координати вектора — нулі, його називають *нульовим вектором* (позначають $\vec{0}$). Нагадаємо, що це — єдиний вектор, який не має певного напряму і якому не відповідає напрямлений відрізок.



Мал. 8.2

Якщо два рівні вектори (співнапрямлені й однакових довжин) відкласти від початку координат, то їх кінці збігатимуться. Отже, **вектори рівні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні.**

Відповідні координати протилежних векторів — протилежні числа.

Модуль вектора з координатами x і y дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$. Це випливає з формули відстані між двома точками (§ 4). Отже, якщо вектор $\vec{a} = (x;\ y)$, то його модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Якщо точка $A(x_1;\ y_1)$ — початок, а $B(x_2;\ y_2)$ — кінець вектора, то його модуль

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

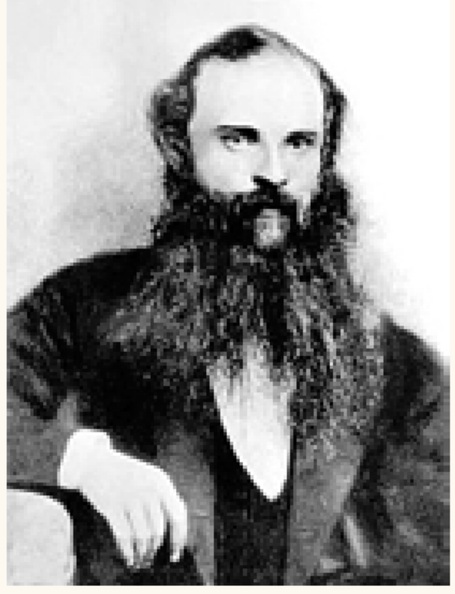


Впорядкована пара чисел, впорядкована пара точок, що визначають початок і кінець руху, напрямлений відрізок — усе це різні моделі поняття «вектор». Такий підхід до розуміння вектора обумовлений історично.

Розвиток векторного числення відбувався різними шляхами: геометричним (числення напрямлених відрізків), фізичним (дослідження векторних величин) і алгебраїчним (розширення поняття числа і операцій).

Числення напрямлених відрізків розвивали К. Вессель, Л. Карно.

Серед вітчизняних вчених геометричний напрям у формуванні теорії векторного числення представляв професор Київського університету В. Єрмаков. 1887 р. в Києві він видав роботу «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів».



Василь Єрмаков (1845–1922)

Векторні величини стосовно проблем механіки досліджували Д. Валліс, Л. Пуансо, А. де Сен-Венан. Алгебраїчний напрям розвивали У. Гамільтон, Д. Максвелл. Одним із перших вітчизняних вчених, який побудував теорію векторів на алгебраїчній основі, був професор Київського університету П. Ромер.

Використовуючи координати, можна досить просто досліджувати властивості фігур не тільки площини (простору двох вимірів), а й тривимірного, чотиривимірного і взагалі n-вимірного простору. Вектори тривимірного простору, про які ти дізнаєшся в старших класах, визначаються трьома координатами $\vec{a} = (x; y; z)$, вектори чотиривимірного простору — чотирма координатами $\vec{m} = (a; b; c; d)$ тощо.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Вектори на площині. Урок 1).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають координатами вектора?
2. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
3. Що таке модуль вектора? Як знайти модуль вектора, заданого координатами?
4. Які координати має нульовий вектор?
5. Сформулюй умову рівності векторів, заданих у координатній формі.
6. Які координати мають протилежні вектори?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-4; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 0)$, $D(2; -1)$ — паралелограм. Знайди його периметр.

- Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1 + 4; 2 - 1) = (3; 1)$. $\overrightarrow{DC} = (5 - 2; 0 + 1) = (3; 1)$.

Координати векторів рівні, отже, ці вектори рівні, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. А з цього випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$. Тоді, за ознакою, $ABCD$ — паралелограм. Знайдемо його периметр. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ і $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(5+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Тоді $P = 2\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$.

2. Дано точки $K(2;\ 2)$, $P(3;\ -1)$, $T(2;\ 8)$. Знайди координати точки $M(x;\ y)$ такої, що $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{KP}$.

- Нехай $M(x;\ y)$. Знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{TM} = (x - 2;\ y - 8)$, $\overrightarrow{KP} = (1;\ -3)$. Вектори рівні, якщо їх відповідні координати рівні.

Тому $\begin{cases} x - 2 = 1, \\ y - 8 = -3, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases}$ Отже, $M(3;\ 5)$.

ВИКОНАЄМО УСНО

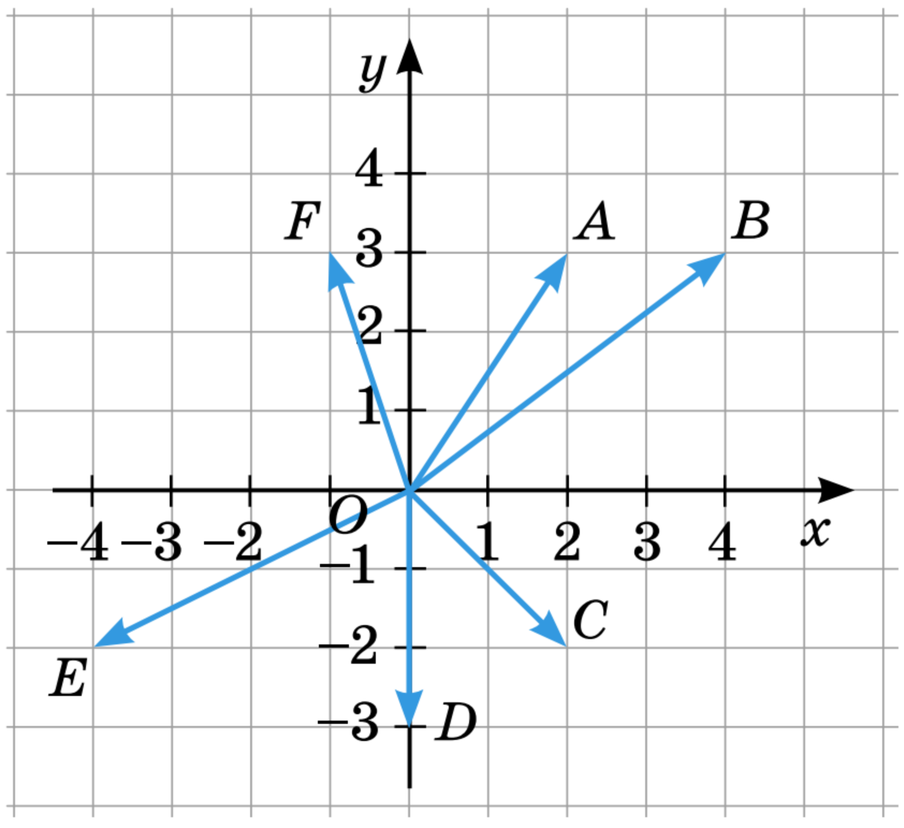


320. Дано точки $A(1;\ 3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ 5)$, $D(-2;\ -7)$, $O(0;\ 0)$. Укажи координати векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.

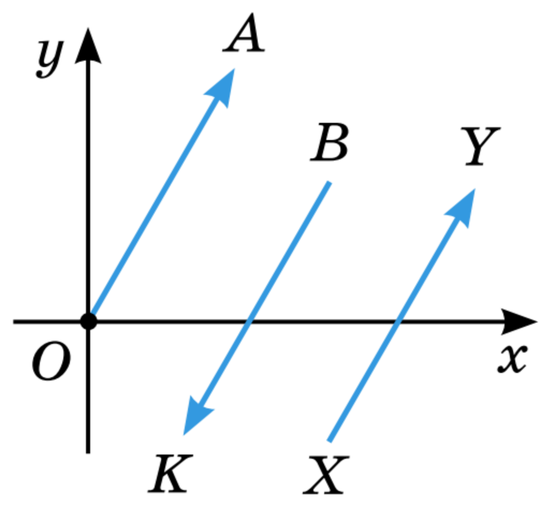
321. Назви вектори, зображені на малюнку 8.3. Модуль якого з них найбільший? А найменший?

322. Знайди координати векторів, зображених на малюнку 8.3.

323. На малюнку 8.4 зображено три рівні за довжиною колінеарні вектори. Відомо, що $\overrightarrow{XY} = (2\ ;\ 3)$. Знайди: а) координати вектора $\overrightarrow{BK}$; б) координати точки A.



Мал. 8.3



Мал. 8.4

324. Знайди $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = (3;\ 4)$.

А $\sqrt{7}$ **Б** 25 **В** 5 **Г** 1

325. ЗНО Знайди координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-2;\ 3)$, $B(-8;\ -5)$.

А $(6;\ 8)$ **Б** $(-10;\ -8)$ **В** $(-10;\ -2)$ **Г** $(-6;\ -2)$ **Д** $(-6;\ -8)$

326. Укажи координати вектора $\overrightarrow{KP}$, якщо $\overrightarrow{PK} = (-6; 2)$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



327. Дано точки $A(2;\ 4)$, $B(-1;\ 0)$, $C(8;\ -6)$, $D(-3;\ -4)$, $O(0;\ 0)$. Побудуй вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Знайди їх координати і модулі.

328. Відклади від початку координат вектори $\vec{a} = (1;\ 5)$, $\vec{b} = (5;\ 1)$, $\vec{c} = (3;\ 4)$, $\vec{d} = (2;\ 2)$.

329. Відклади вектори $\vec{m} = (2;\ 4)$ і $\vec{n} = (3;\ 1)$ від точок $O(0;\ 0)$, $A(-4;\ 2)$, $B(5;\ 0)$.

330. Draw vectors $\vec{a} = (-3;\ 5)$ and $\vec{b} = (-1;\ -3)$ from points $O(0;\ 0)$, $M(2;\ 3)$, $K(-5;\ 3)$.

331. Дано точки $A(-1;\ 3)$, $B(4;\ 2)$, $C(-3;\ -1)$, $D(2;\ -2)$. Знайди координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$. Чи є серед них рівні вектори?

332. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць задає координати точки A, другий / друга — координати точки B, третій / третя — координати вектора AB, а четвертий / четверта — координати вектора BA. Потім учасники міняються ролями.

333. Дано точки $M(2;\ 1)$, $N(0;\ 3)$, $K(6;\ 3)$, $P(4;\ 5)$. Знайди координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{NP}$. $\overrightarrow{BD}$. Чи є серед них рівні вектори? А протилежні?

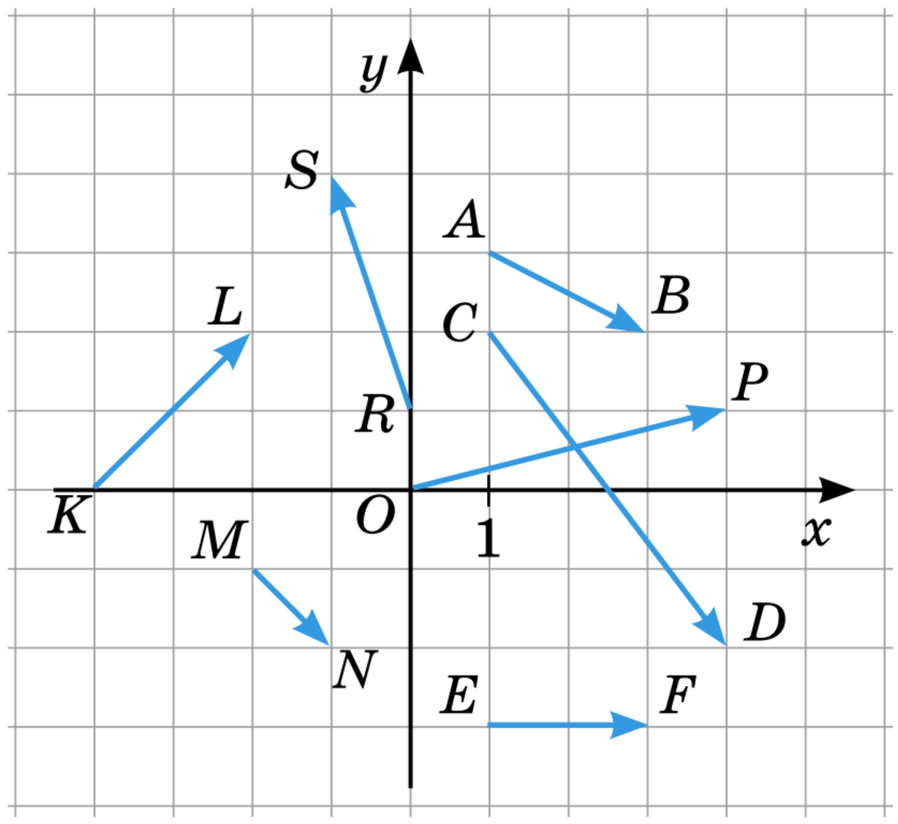
334. Знайди координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{EF}$, зображених на малюнку 8.5, та їх модулі.

335. Знайди координати векторів $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{KL}$, зображених на малюнку 8.5, та їх модулі.

336. Знайди модуль вектора, якщо його координати x і y відповідно дорівнюють:

а) 5 і 12; б) -3 і 4;

в) 1 і 7; г) -6 і -8.



Мал. 8.5

337. Дано вектори $\overrightarrow{AB} = (3;\ 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-8;\ 6)$, $\overrightarrow{MN} = (4;\ -2)$. Знайди координати векторів $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NM}$ та їх модулі.

338. Дано точки $M(1;\ 3)$, $N(7;\ 5)$, $K(5;\ -1)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їх модулі. Установіть вид трикутника MNK.

339. AD — медіана трикутника з вершинами $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 5)$, $C(8;\ -5)$. Знайди координати вектора $\overrightarrow{AD}$ та його довжину.

340. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо $A(1;\ 3)$, $B(4;\ -1)$, $C(2;\ -3)$, $D(-1;\ 1)$?

341. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо $A(-3;\ 0)$, $B(-1;\ 2)$, $C(2;\ 1)$, $D(1;\ -1)$?

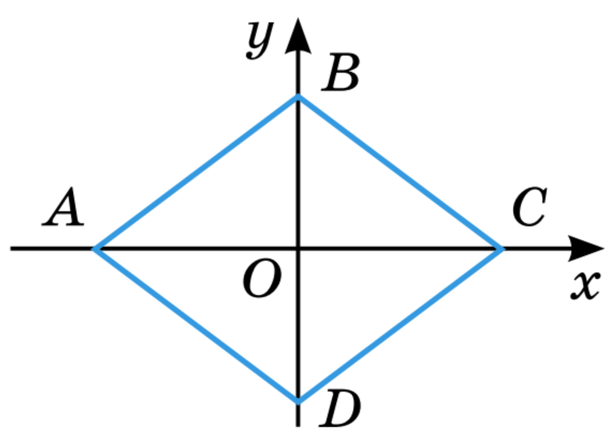
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



342. Дано точки $A(a_1;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$, $C(a_1 + k;\ a_2 + p)$, $D(b_1 + k;\ b_2 + p)$. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$? А вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$?

343. $ABCD$ — ромб (мал. 8.6).

Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, якщо $AC = 8$, $BD = 4$.



Мал. 8.6

344. ***Відкрита задача.*** Дано точки $A(2;\ 5)$, $B(-1;\ 1)$, $C(4;\ 1)$, $D(1;\ 5)$. Знайди координати та довжини векторів...

345. Знайди координати точки B, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = (1;\ 3)$ і $A(2;\ 5)$;

б) $\overrightarrow{BM} = (-2;\ 7)$ і $M(-5;\ 3)$.

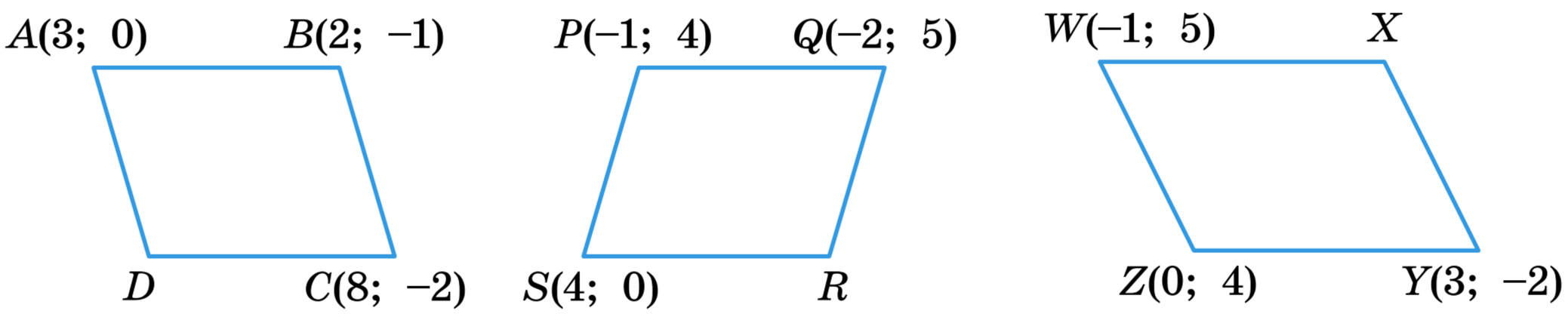
346. Знайди координати точки M, якщо:

а) $\overrightarrow{PM} = (-11;\ 4)$ і $P(1;\ 5)$;

б) $\overrightarrow{MD} = (1;\ 6)$ і $D(-10;\ 2)$.

347. Знайди координати четвертої вершини паралелограма, зображеного на малюнку 8.7 (*а*, *б*).

348. Знайди координати четвертої вершини паралелограма, зображеного на малюнку 8.8.



а *б*

Мал. 8.8

Мал. 8.7

349. При якому значенні x модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10, якщо:

а) $\vec{a} = (6;\ x)$; б) $\vec{a} = (x;\ x + 2)$?

350. При якому значенні x модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 13, якщо:

а) $\vec{a} = (x - 1;\ 5)$; б) $\vec{a} = (x + 2;\ 5x - 3)$?

351. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, якщо:

а) $\vec{a} = (4;\ m^2)$, $\vec{b} = (4;\ m)$; б) $\vec{a} = (m - 1;\ 16)$, $\vec{b} = (3;\ m^2)$?

352. При якому значенні a вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ рівні, якщо:

а) $\vec{m} = (2a;\ -2)$, $\vec{n} = (a^2;\ -2)$; б) $\vec{m} = (2 - a;\ -1 + 2a)$, $\vec{n} = (3;\ a^2 - 4)$?

353. ЗНО У прямокутній системі координат xy на площині коло задано рівнянням $x^2 - 4x + y^2 + 12y = 9$. Центр O цього кола збігається з точкою перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Визнач координати вершини $C(x_c; y_c)$, якщо вектор $\overrightarrow{OA} = (-1; 2)$. У відповідь запиши добуток $x_c \cdot y_c$.

354. На колі $x^2 + y^2 = 1$ взято точку A таку, що $\angle AOP = 60°$, де $O(0; 0)$, $P(1; 0)$. Знайди координати вектора $\overrightarrow{OA}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



355. *Навчальне дослідження.*

1. Знайди координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, якщо:

а) $A(-1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; -1)$, $D(-5; -2)$;
б) $A(5; 0)$, $B(4; -3)$, $C(-2; -1)$, $D(-1; 2)$;
в) $A(5; -2)$, $B(1; 3)$, $C(2; 5)$, $D(6; 0)$.

Результати для кожного з випадків а)–в) запиши у таблицю. Яку залежність можна побачити? Сформулюй гіпотезу.

		$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
а)	x				
	y				

2. Виконай аналогічне завдання для інших точок:

а) $A(4; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; -1)$, $D(5; -2)$;
б) $A(0; 5)$, $B(-3; 4)$, $C(-1; -2)$, $D(2; -1)$;
в) $A(5; -2)$, $B(1; 3)$, $C(2; 5)$, $D(6; 0)$.

Чи підтвердилася висунута тобою гіпотеза?

3. Зобрази у системі координат задані у попередніх завданнях точки. Установи вид кожного чотирикутника. Зроби висновок.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



356. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Доведи, що:

а) точки A, B і C лежать на одній прямій;
б) точка B — середина відрізка AC.

357. M, N, P — середини сторін AB, BC, AC трикутника ABC. Доведи: а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP}$; б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PN}$.

358. Знайди площу прямокутного трикутника, якщо різниця катетів дорівнює 2 см, а найменша медіана дорівнює 5 см.

§9 ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- додавання векторів — vector addition
- сума векторів — sum of vectors

Вектори, як і числа, можна додавати і віднімати.

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Наприклад, якщо $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (-1; 4)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (3 - 1; 2 + 4) = (2; 6)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справджуються *переставний* і *сполучний закони додавання:*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Доведемо переставний закон.

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ і $\vec{b} + \vec{a} = (x_2 + x_1; y_2 + y_1)$.

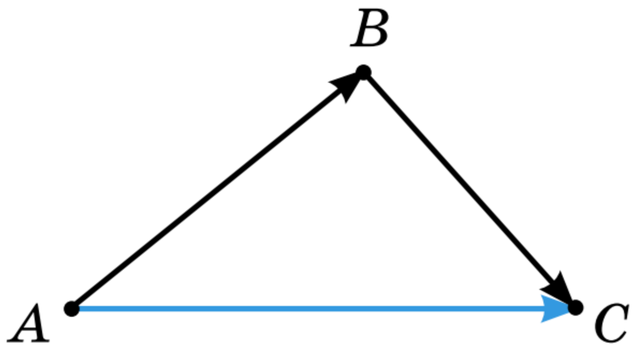
Оскільки $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ і $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$, бо для дійсних чисел справджується переставний закон додавання, то і $\vec{a} + b = b + \vec{a}$.

Сполучний закон можна довести аналогічно.

Геометрично суму двох векторів можна знайти за правилом трикутника.

Які б не були вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, завжди $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 9.1).

Якщо $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1)$.



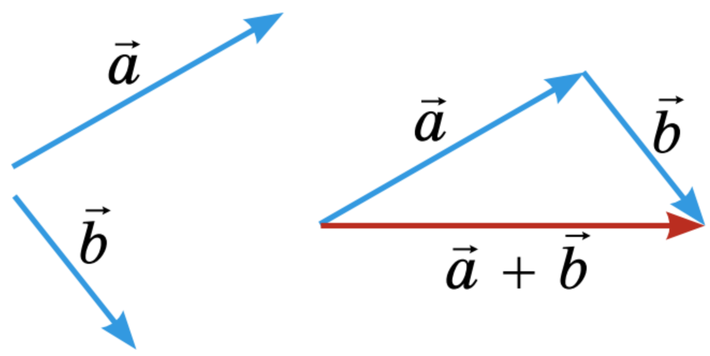
Мал. 9.1

Тому

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2; y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = (x_3 - x_1; y_3 - y_1) = \overrightarrow{AC}$.

Щоб додати два вектори за правилом трикутника, потрібно розмістити ці вектори послідовно, тобто так, щоб початок другого вектора збігався з кінцем першого. Сумою векторів буде вектор, початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець — з кінцем другого.

Наприклад, щоб додати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображені на малюнку 9.2, потрібно від довільної точки відкласти вектор $\vec{a}$, а від кінця вектора $\vec{a}$ відкласти вектор $\vec{b}$. Сумою цих векторів буде вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком $\vec{a}$, а кінець — з кінцем $\vec{b}$.

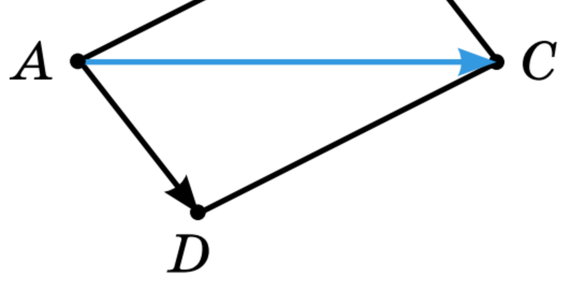


Мал. 9.2

Суму векторів можна знаходити і за *правилом паралелограма*. У цьому випадку вектори потрібно розмістити так, щоб вони виходили з однієї точки, і на цих векторах, як на сторонах, побудувати паралелограм.

Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 9.3).

Додавання векторів *http://yakistosviti.com.ua/userfiles/file/gif-file/kod-vektory.gif*



Мал. 9.3

Адже в цьому випадку $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Щоб *додати два колінеарні вектори*, їх розміщують послідовно. Сумою векторів буде вектор, початок якого збігається з початком першого, а кінець — з кінцем другого. На малюнку 9.4 показано, як знайти суму векторів, якщо вони співнапрямлені, а на малюнку 9.5 — якщо вектори протилежно напрямлені.

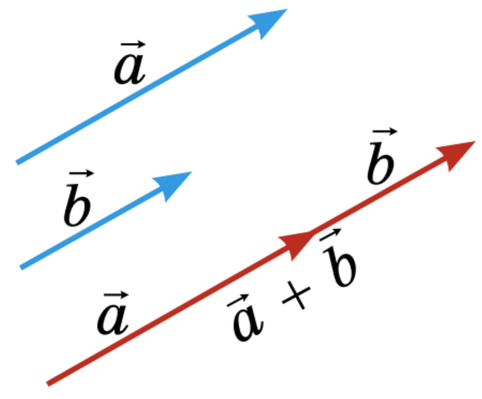
Із правила додавання колінеарних векторів випливає, що сума протилежних векторів дорівнює $\vec{0}$, тобто $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то

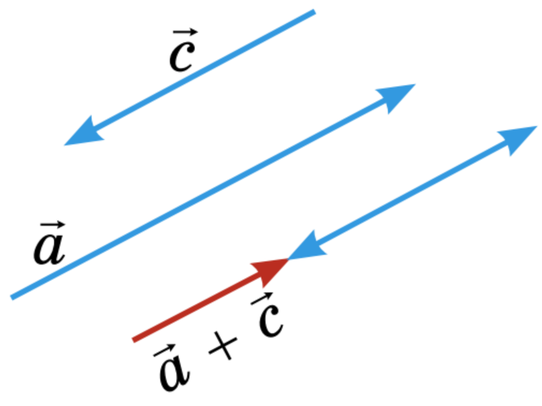
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2).$$

Адже $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = (x_1 - x_2 + x_2;\ y_1 - y_2 + y_2) = (x_1;\ y_1) = \vec{a}$.

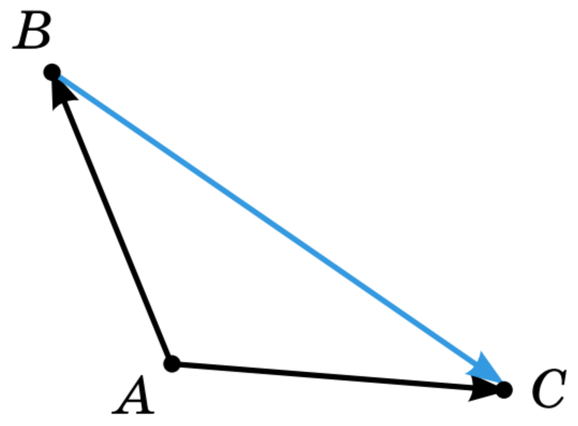
Які б не були вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, завжди $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (мал. 9.6), бо за правилом трикутника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Мал. 9.4



Мал. 9.5

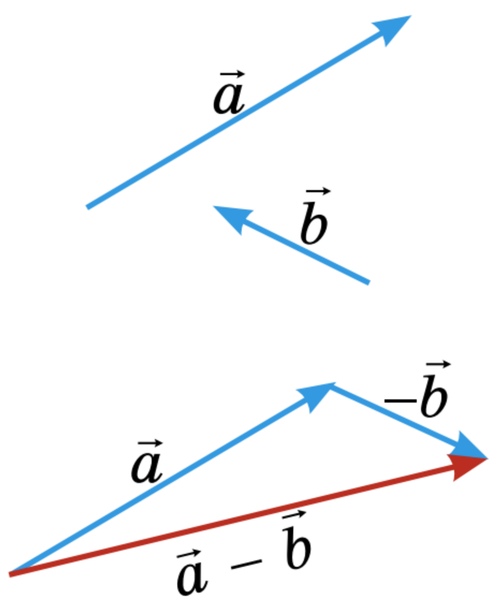


Мал. 9.6

Щоб знайти *різницю двох векторів*, потрібно розмістити вектори так, щоб вони виходили з однієї точки. Різницею векторів буде вектор, початок якого збігається з кінцем другого вектора, а кінець — з кінцем першого, тобто вектор, який іде від кінця другого вектора до кінця першого.

Можна користуватися й іншим правилом. Щоб знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$, протилежний даному вектору $\vec{b}$ (мал. 9.7). Завжди правильні рівності:

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



Мал. 9.7

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Додавати можна не тільки два вектори, а й три, чотири тощо. Які б не були точки A, B, C, D, завжди $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

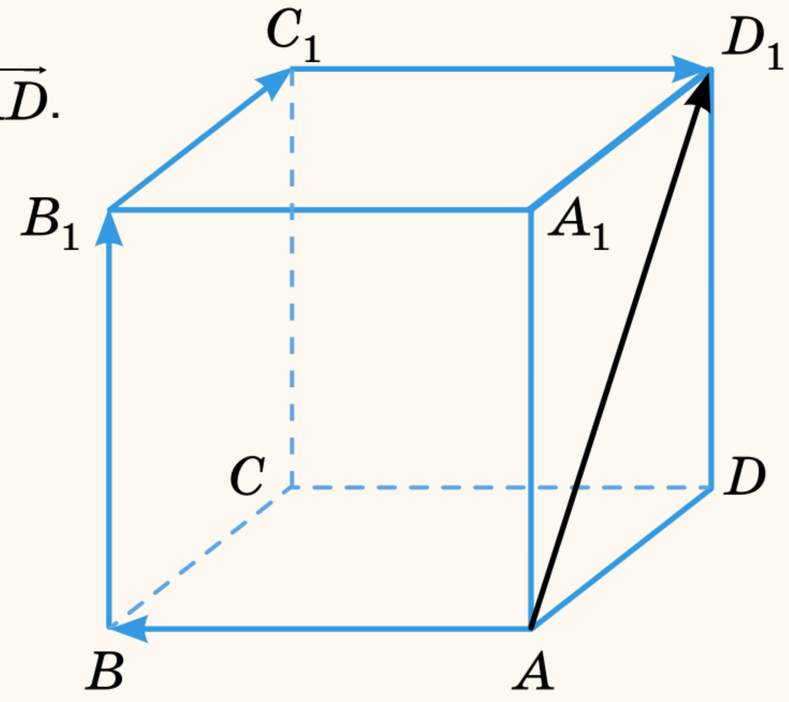
Довести таку рівність можна, скориставшись сполучним законом додавання векторів:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Подібним способом можна довести, що $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AK}$ тощо.

Тобто, яка б не була ламана $ABC \ldots KP$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{AP}$.

Такі рівності правильні не тільки для ламаних однієї площини, а й для простору. Наприклад, якщо вектори розташовані на ребрах паралелепіпеда (мал. 9.8), то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{AD_1}$.

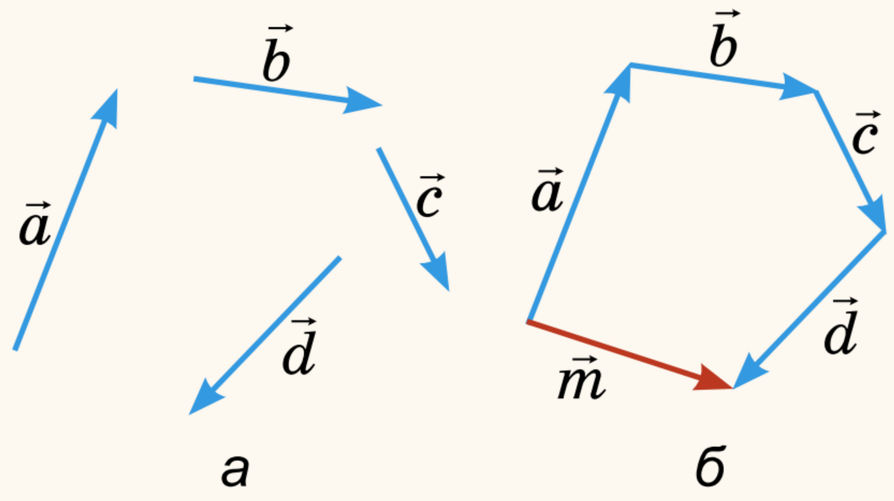


Мал. 9.8

Для знаходження суми кількох векторів користуються правилом многокутника.

Щоб *додати вектори за правилом многокутника*, потрібно розташувати ці вектори послідовно. Сумою векторів буде вектор, початок якого збігається з початком першого, а кінець — з кінцем останнього.

Наприклад, щоб додати вектори, зображені на малюнку 9.9, *а*, потрібно їх розмістити послідовно (мал. 9.9, *б*). Сумою векторів буде вектор $\vec{m}$, який сполучає початок першого вектора з кінцем останнього. Векторні доданки можна переставляти.



Мал. 9.9

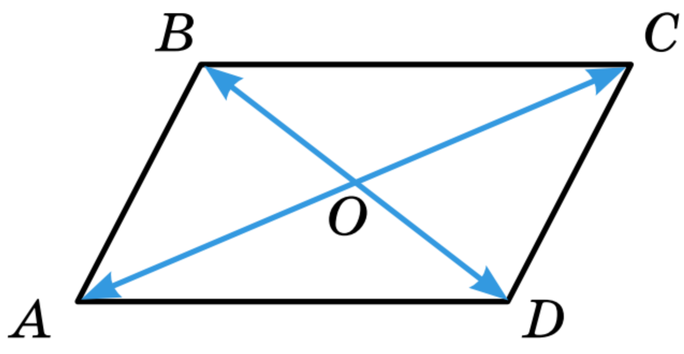
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають сумою двох векторів?
2. Як знайти суму двох векторів, заданих у координатній формі?
3. Сформулюй правило: а) трикутника; б) паралелограма для додавання векторів.
4. Як знайти суму колінеарних векторів?
5. Як знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 9.10). Чому дорівнює сума векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, і $\overrightarrow{OD}$?



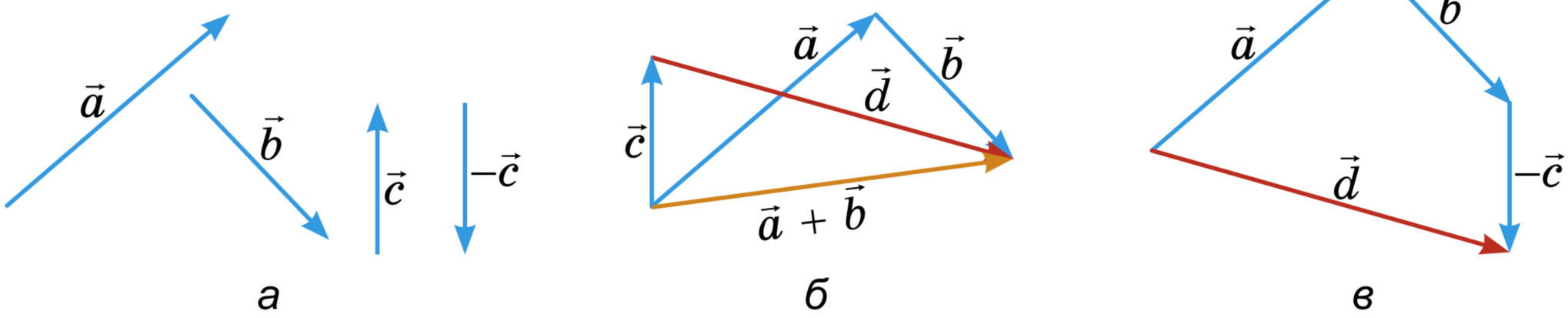
Мал. 9.10

- Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC}$ протилежні, тому їх сума дорівнює $\vec{0}$. Протилежні також вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD}$. Тому $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

2. На малюнку 9.11, *а* зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Побудуй вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

- *Перший спосіб.* Побудуємо суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отримаємо вектор $\vec{a} + \vec{b}$, від якого віднімемо вектор $\vec{c}$ (мал. 9.11, *б*). Отримаємо вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Другий спосіб. Накреслимо спочатку вектор $-\vec{c}$, протилежний даному вектору $\vec{c}$. Потім побудуємо суму векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $-\vec{c}$ (мал. 9.11, *в*). Шуканий вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$.



а *б* *в*

Мал. 9.11

ВИКОНАЄМО УСНО



359. Чому дорівнює сума протилежних векторів?

360. Прокоментуй частину кода в *Python*.

а)
```
a = (3, 4)
b = (1, -2)
sum_vec = (a[0] + b[0], a[1] + b[1])
print("Сума векторів:", sum_vec)
```

б)
```
a = (5, 2)
b = (3, 6)
diff_vec = (a[0] - b[0], a[1] - b[1])
print("Різниця векторів:", diff_vec)
```

361. Знайди суму векторів $\vec{a} = (2; 3)$ і $\vec{b} = (-1; 4)$.

А (3; 7) **Б** (1; 7) **В** (1; −1) **Г** (−3; 1)

362. Знайди різницю векторів $\vec{c} = (-2; 4)$ і $\vec{d} = (3; -2)$.

А (−2; 2) **Б** (−5; 2) **В** (−5; 6) **Г** (1; −6)

363. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3)$ і $\vec{b} = (-4; 1)$. Знайди координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{b} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{a}$.

364. Знайди суму векторів:

а) $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XT}$; б) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$.

365. Знайди різницю векторів:
а) $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XT}$; б) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$.

366. Спрости вираз $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{KL}$.
А $\overrightarrow{KL}$ **Б** $\overrightarrow{KP}$ **В** $\overrightarrow{PL}$ **Г** $\overrightarrow{LP}$

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Знайди суму векторів (367, 368).

367. а) $\vec{a} = (4;\ 2)$ і $\vec{b} = (1;\ 7)$ б) $\vec{n} = (-6;\ 8)$ і $\vec{m} = (-2;\ -9)$;
в) $\vec{p} = (-0{,}3;\ 2)$ і $\vec{q} = (1;\ 7)$.

368. а) $\vec{a} = (3;\ 8)$ і $\vec{b} = (4;\ 2)$; б) $\vec{c} = (-2;\ 4)$ і $\vec{d} = (2;\ -3)$;
в) $\vec{p} = (1{,}9;\ 6)$ і $\vec{k} = (1;\ -3{,}2)$.

369. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць задає координати першого вектора, другий / друга — координати другого, а третій / третя — знаходить їх суму. Потім учасники міняються ролями.

Знайди суму векторів (370, 371).

370. а) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CT}$; в) $\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TX} + \overrightarrow{XK}$.

371. а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$; б) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PL}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KE}$.

372. Дано точки $O(0;\ 0)$, $A(a_1;\ a_2)$ і $B(b_1;\ b_2)$. Вирази через їх координати суми:
а) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$.

373. Дано точки $O(0;\ 0)$, $M(m_1;\ m_2)$ і $N(n_1;\ n_2)$. Вирази через їх координати суми:
а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}$; б) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MO}$.

Знайди різницю векторів (374, 375).

374. а) $\vec{a} = (9;\ 5)$ і $\vec{c} = (6;\ 2)$; б) $\vec{a} = (4;\ -5)$ і $\vec{b} = (-1;\ 3)$; в) $\vec{n} = (8;\ -6)$ і $\vec{0}$.

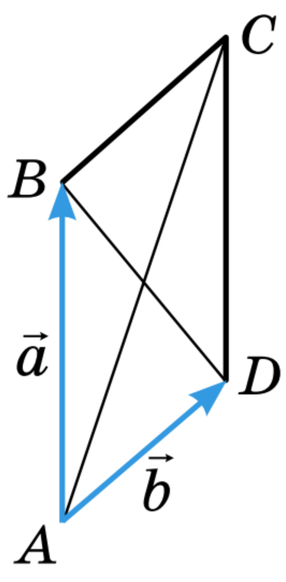
375. а) $\vec{k} = (1;\ 7)$ і $\vec{p} = (4;\ -4)$; б) $\vec{b} = (-6;\ 1)$ і $\vec{c} = (-5;\ -2)$; в) $\vec{0}$ і $\vec{b} = (-2;\ 7)$.

376. Знайди різницю векторів:
а) $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XK}$; б) $\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PK}$; в) $\vec{0} - \overrightarrow{AB}$.

377. $ABCD$ — паралелограм. Знайди різницю векторів:
а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.

378. $ABCD$ — паралелограм, у якого $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (мал. 9.12). Вирази через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

379. $ABCD$ — паралелограм, у якого $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (мал. 9.12). Вирази через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$.



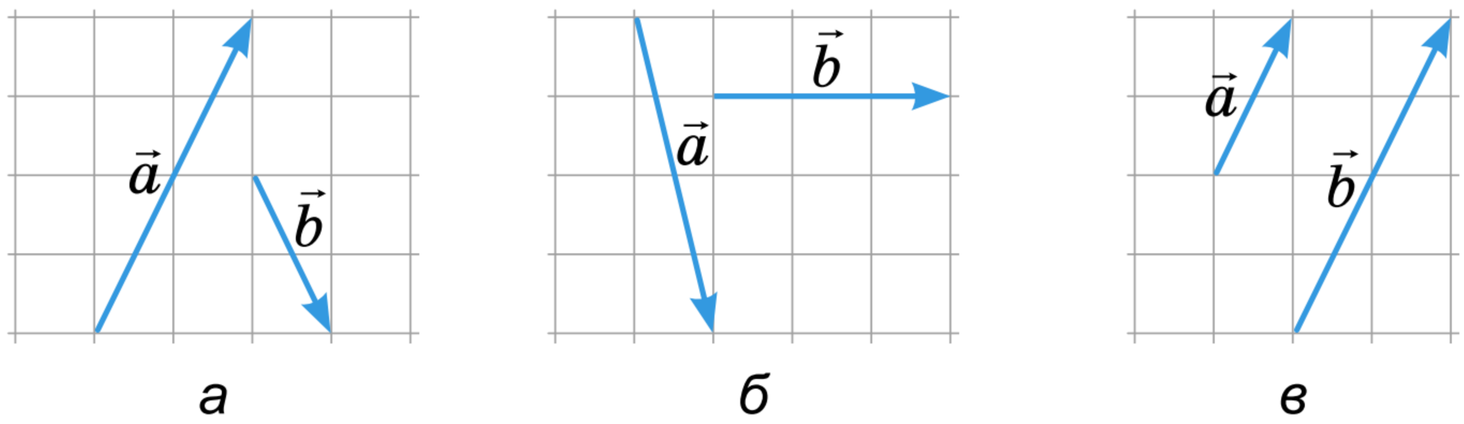
Мал. 9.12

Знайди $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$ (380, 381):

380. а) $\vec{a}=(2;\ 3)$, $\vec{b}=(4;\ 5)$; б) $\vec{a}=(6;\ -2)$, $\vec{b}=(6;\ -3)$.

381. а) $\vec{a}=(-1;\ 3)$, $\vec{b}=(4;\ 1)$; б) $\vec{a}=(-4;\ 2)$, $\vec{b}=(-2;\ 6)$.

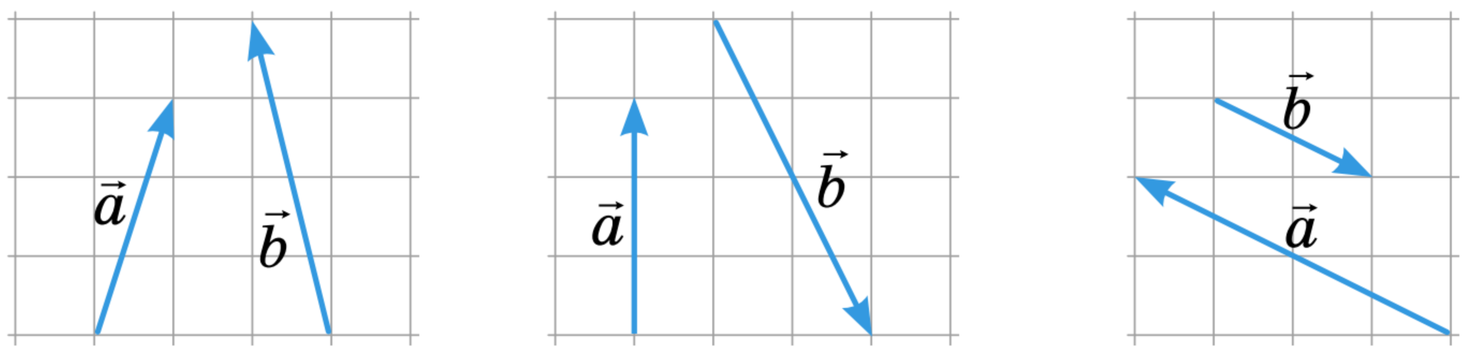
382. Знайдіть суму і різницю векторів, зображених на малюнку 9.13.



а *б* *в*

Мал. 9.13

383. Знайди суму і різницю векторів, зображених на малюнку 9.14.



а *б* *в*

Мал. 9.14

384. Відклади від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}=(3;\ 2)$ і $\overrightarrow{OB}=(-4;\ 3)$. Побудуй вектори:

а) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$;

в) $\vec{m}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; г) $\vec{n}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

385. From the origin, draw vectors $\overrightarrow{OA}=(-3;\ 4)$ and $\overrightarrow{OB}=(-2;\ -1)$. Construct vectors:

a) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$;

c) $\vec{p}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$; d) $\vec{k}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$.

386. Накресли два довільні вектори і переконайся у справедливості переставного закону додавання векторів, додаючи ці вектори за правилом: а) трикутника; б) паралелограма.

387. Накресли три довільні вектори і, додаючи їх, переконайся у справедливості сполучного закону додавання векторів.

388. Знайди x, якщо сума векторів $\vec{a}=(2;\ 7)$ і $\vec{b}=(3;\ x)$ дорівнює вектору:

а) $\vec{m}=(5;\ 10)$; б) $\vec{c}=(5;\ -4)$.

389. Знайди x і y, якщо сума векторів $\vec{m}=(6;\ y)$ і $\vec{n}=(x;\ 7)$ дорівнює вектору:

а) $\vec{q}=(-1;\ 8)$; б) $\vec{p}=(8;\ -1)$.

Доведи векторну рівність (390, 391).

390. а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PK}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

391. а) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}$; б) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PK}$.

392. Робот отримав дві команди: 1) перемістився на 5 клітинок вправо; 2) потім перемістився на 3 клітинки вгору. Для кожної з команд задай вектор переміщення. У якій точці опиниться робот після виконання обох команд? Який вектор переміщення дав змогу одразу опинитися в цій точці?

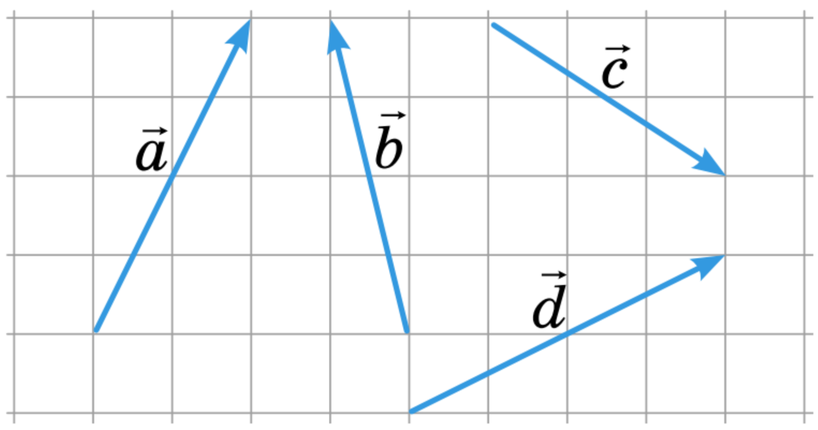


393. Дрон доставляє 2 посилки. Спочатку він пролетів на північ на 6 км, а потім на схід на 8 км. Подай загальне переміщення у вигляді вектора. У якій точці опиниться дрон після доставки обох посилок? Який вектор переміщення дав би дрону змогу одразу опинитися в кінцевій точці?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (мал. 9.15). Побудуй вектори (394, 395):



Мал. 9.15

394. а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} - \vec{d}$.

395. а) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$; б) $\vec{a} - \vec{c} + \vec{d}$; в) $\vec{a} - \vec{c} - \vec{d} + \vec{b}$.

Спрости вирази (396, 397).

396. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$; б) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{AP}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PC}$.

397. а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} + (\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FK})$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$; в) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KP} - \overrightarrow{FE}$; г) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MK}$.

398. Доведи, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо для довільної точки O виконується рівність $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

399. Доведи, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо для довільної точки O виконується рівність $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

400. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Побудуй вектори:

а) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{BO}$.

401. Чи правильно, що завжди $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{AC}|$?

402. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (-1; 4)$, $\vec{c} = (6; -2)$, $\vec{d} = (x; y)$. При яких значеннях x і y виконується рівність:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} - \vec{d}$; б) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{c} - \vec{d}$; г) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} - \vec{d} + \vec{c}$?

403. Дано точки $A(2;\ 3)$, $B(-1;\ 5)$. Знайди координати точки $C(x;\ y)$ такої, що:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

404. Дано точки $A(-4;\ -2)$, $B(2;\ 6)$, $C(x;\ y)$. Знайди геометричне місце точок площини, для яких виконується рівність:

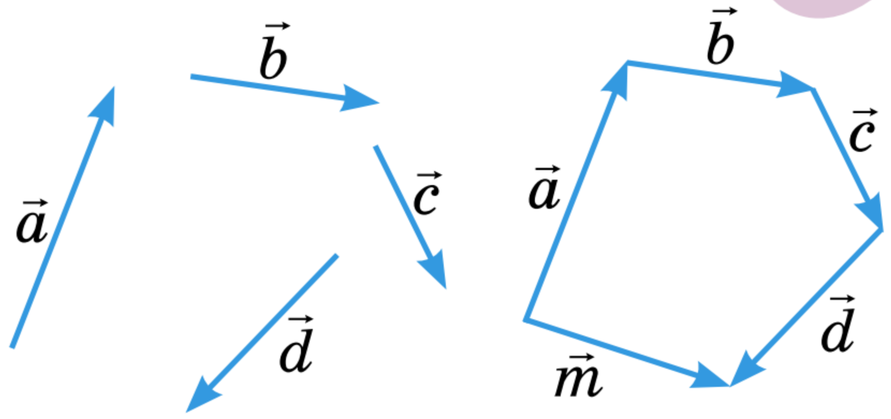
а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$; в) $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

405. За якого значення x модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ набуває найменшого значення, якщо $\vec{a} = (x;\ 3)$, $\vec{b} = (-4;\ 2)$, $\vec{c} = (6;\ -5)$. Знайди це значення.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



406. На малюнку 9.16 показано, як можна геометрично знайти суму чотирьох векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. Переконайся, що від перестановки доданків сума не змінюється. Скільки сум із різних послідовностей чотирьох таких доданків можна утворити?



Мал. 9.16 *а* *б*

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



407. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $M(-3;\ -2)$, $N(-2;\ 1)$, $P(4;\ -1)$, $K(3;\ -4)$ — паралелограм.

408. Дано точки $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ 3)$. Знайди координати точки $D(x;\ y)$ такої, що:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

409. Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює l. Знайди площу трапеції, якщо її діагоналі взаємно перпендикулярні.

У тих народів, які знають геометрію, навіть найпростіші речі мають якусь особливу красу.

Ф. Прокопович

§ 10 МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

КЛЮЧОВІ СЛОВА

множення вектора на число — vector multiplication by a number

Добутком вектора $\vec{a} = (x; y)$ на число n називають вектор $n\vec{a} = (nx; ny)$.
Наприклад, якщо $\vec{a} = (4; 3)$, то $5\vec{a} = (20; 15)$, $-2\vec{a} = (-8; -6)$, $0\vec{a} = (0; 0)$.
Із наведеного означення випливає, що:

1) для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа n: $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$;
2) для будь-яких чисел n, m і вектора $\vec{a}$: $(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$.
3) для будь-яких чисел n, m і вектора $\vec{a}$: $n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$.

Доведемо перше твердження. Нехай $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$.

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, $n(\vec{a} + \vec{b}) = (nx_1 + nx_2; ny_1 + ny_2)$; (1)

$n\vec{a} + n\vec{b} = (nx_1; ny_1) + (nx_2; ny_2) = (nx_1 + nx_2; ny_1 + ny_2)$. (2)

Праві частини рівностей (1) і (2) рівні, тому й ліві частини теж рівні:

$$\boldsymbol{n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}}.$$

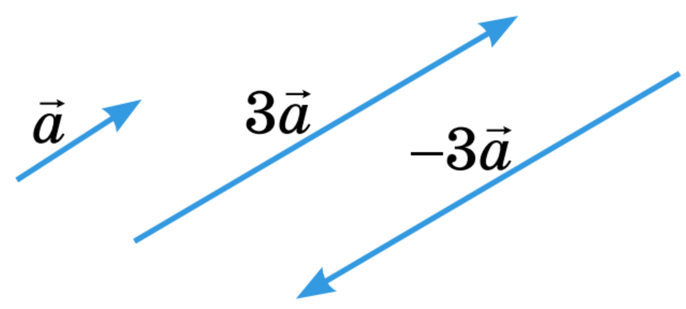
Подібним способом можна довести й інші твердження.

Ці властивості дають можливість перетворювати вирази, які містять суму векторів, їх різницю та добуток вектора на число. Наприклад,

$$3(2\vec{a} - 5\vec{b}) + 2(7\vec{b} - 3\vec{a}) = 6\vec{a} - 15\vec{b} + 14\vec{b} - 6\vec{a} = -\vec{b}.$$

Якщо число n натуральне, то $n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{n \text{ разів}}$.

Наприклад, $3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$. Довжина вектора $3\vec{a}$ в 3 рази більша за довжину вектора $\vec{a}$ (якщо $\vec{a} \neq 0$). Напрями векторів $3\vec{a}$ і $-3\vec{a}$ протилежні (мал. 10.1).



Мал. 10.1

Взагалі добутком $n\vec{a}$ є вектор, довжина якого дорівнює $|n\vec{a}| = |n| \cdot |\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $n > 0$, і протилежний йому, якщо $n < 0$.

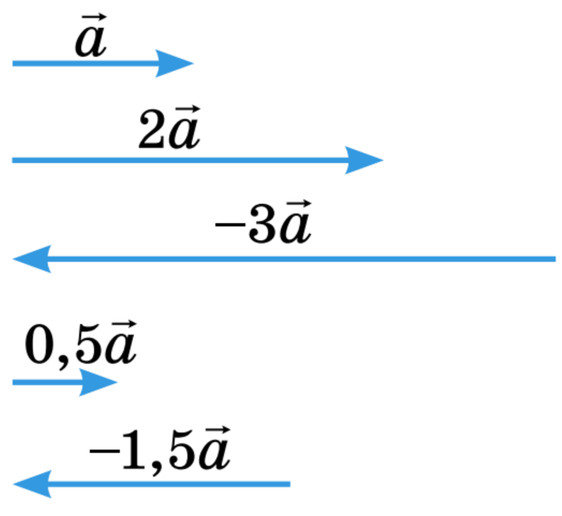
Якщо $n = 0$ або $\vec{a} = 0$, то вважають $n\vec{a} = \vec{0}$.

Тому, щоб побудувати вектор $n\vec{a}$, потрібно:

1) відкласти вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|n| \cdot |\vec{a}|$;

2) вибрати такий напрям, як і у вектора $\vec{a}$, якщо $n > 0$, і протилежний до нього, якщо $n < 0$.

Наприклад, на малюнку 10.2 зображено вектори, отримані при множенні вектора $\vec{a}$ на числа 2; –3; 0,5; –1,5.



Мал. 10.2

При множенні вектора $\vec{a}$ на число отримуємо вектор, колінеарний даному. Тобто якщо $\vec{b} = n\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то, позначивши відношення їх довжин через $|\vec{n}|$, отримаємо, що $\vec{b} = n\vec{a}$. Тому має місце така ознака колінеарності двох ненульових векторів.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує таке число n, що $\vec{b} = n\vec{a}$.

Якщо вектори задані координатами, тобто $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то вони колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Наприклад, вектори $\vec{a} = (-3;\ 1)$ і $\vec{b} = (6;\ -2)$ колінеарні, бо $\vec{b} = -2\vec{a}$ або тому, що $\dfrac{-3}{6} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$.

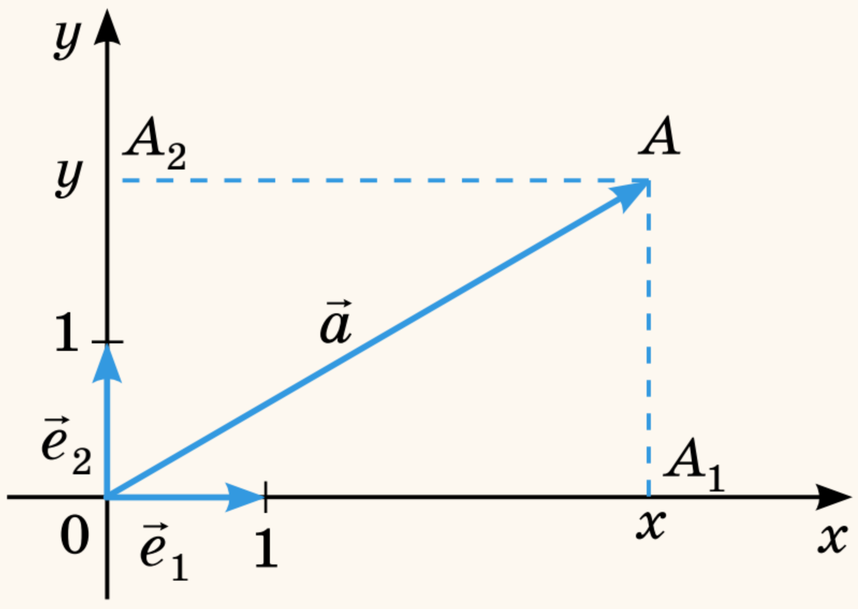
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Вектори $\vec{e}_1 = (1;\ 0)$ і $\vec{e}_2 = (0;\ 1)$ називають *ортами*, або *координатними векторами*.

Будь-який вектор $\vec{a} = (x;\ y)$ можна подати у вигляді $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Справді, $\vec{a} = (x;\ y) = (x;\ 0) + (0;\ y) = x(1;\ 0) + y(0;\ 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Таке представлення вектора $\vec{a}$ називають *розкладанням* даного вектора *за координатними векторами*. Його геометричний зміст зрозумілий з малюнка 10.3. Будь-який вектор можна розкласти за координатними векторами, і тільки одним способом.



Мал. 10.3

Часто виникає потреба розкласти даний вектор $\vec{c}$ за двома даними неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто знайти такі числа m і n, щоб виконувалась рівність $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Нехай, наприклад, вектор $\vec{c} = (1;\ 4)$ треба розкласти за векторами $\vec{a} = (2;\ -3)$ і $\vec{b} = (-1;\ 2)$.

Знайдемо числа m і n такі, щоб виконувалась рівність $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$m\vec{a} = (2m;\ -3m)$;

$n\vec{b} = (-n;\ 2n)$, $m\vec{a} + n\vec{b} = (2m - n;\ -3m + 2n)$.

Шукані числа m і n знайдемо із системи рівнянь:

$\begin{cases} 2m - n = 1, \\ -3m + 2n = 4; \end{cases} \begin{cases} 4m - 2n = 2, \\ -3m + 2n = 4; \end{cases} \begin{cases} m = 6, \\ n = 11. \end{cases}$ Отже, $\vec{c} = 6\vec{a} + 11\vec{b}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають добутком вектора на число?
2. Сформулюй властивості множення вектора на число.
3. Чи зміниться напрям вектора, якщо його помножити на:
   а) додатне число; б) від'ємне число; в) нуль?
4. Сформулюй ознаку колінеарності двох ненульових векторів.
5. Як, знаючи вектор $\vec{a}$, побудувати вектор $n\vec{a}$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Дано вектори $\vec{a} = (-2; 3)$ і $\vec{b} = (4; 1)$. Знайди $|\vec{c}|$, якщо $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

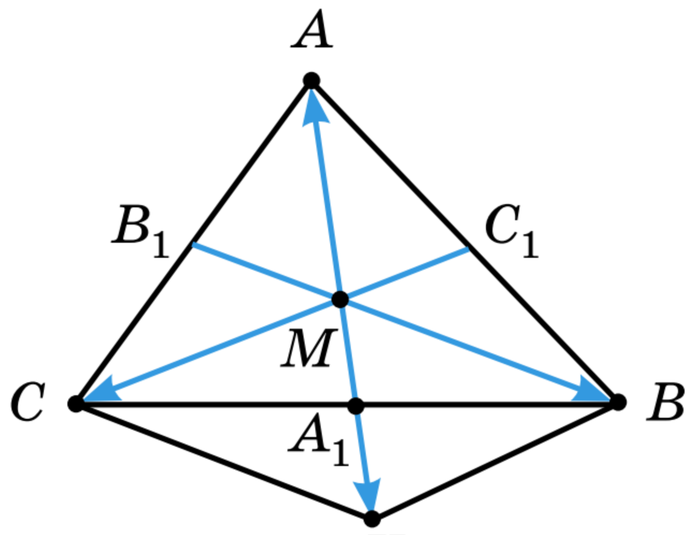
• Знайдемо координати векторів $3\vec{a}$ і $2\vec{b}$:
$3\vec{a} = 3(-2; 3) = (-6; 9)$; $2\vec{b} = 2(4; 1) = (8; 2)$. Тоді
$\vec{c} = (-6; 9) - (8; 2) = (-14; 7)$,
звідки $|\vec{c}| = \sqrt{(-14)^2 + 7^2} = \sqrt{196 + 49} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$.
Отже, $|\vec{c}| = 7\sqrt{5}$.

2. При якому значенні a вектори $\vec{m} = (4; a)$ і $\vec{n} = (2; -3)$ колінеарні?

• Вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні, тобто $\frac{4}{2} = \frac{a}{-3}$, звідси $2a = -12$, $a = -6$.

3. M — точка перетину медіан трикутника ABC. Доведи, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

• Медіани AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC точкою перетину M діляться у відношенні $2 : 1$. Відкладемо вектор $\overrightarrow{MK} = 2 \cdot \overrightarrow{MA_1}$ (мал. 10.4). Вектори $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MK}$ мають рівні довжини і протилежно напрямлені, тому $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} = \vec{0}$. Чотирикутник $BMCK$ — паралелограм, тому за правилом паралелограма $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MK}$. Отже, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} = \vec{0}$.



Мал. 10.4

ВИКОНАЄМО УСНО



410. Який із векторів співнапрямлений з вектором $\vec{a}$?

А $-2\vec{a}$ **Б** $-\vec{a}$ **В** $1{,}7\vec{a}$ **Г** $-0{,}1\vec{a}$

411. Спрости вирази: а) $\vec{c} + \vec{c} + \vec{c} + \vec{c}$; б) $3\vec{a} + 5\vec{a}$;
в) $2(3\vec{a} + 4\vec{b}) - 6\vec{a}$.

412. Помнож вектор $\vec{a} = (-3;\ 5)$: на 2; на 3; на -7; на 1,2; на $\frac{1}{3}$.

413. **Гра.** Рух робота описується вектором $v = (x;\ y)$. Якщо робот має рухатися в k разів швидше, то його новий рух описується вектором kv. Один із учнів / одна з учениць записує координати вектора v, другий / друга — задає число k, третій / третя — називає координати вектора kv. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

414. Знайди довжини векторів $2\vec{p}$ і $-2\vec{p}$, якщо $\vec{p} = (3;\ 4)$.

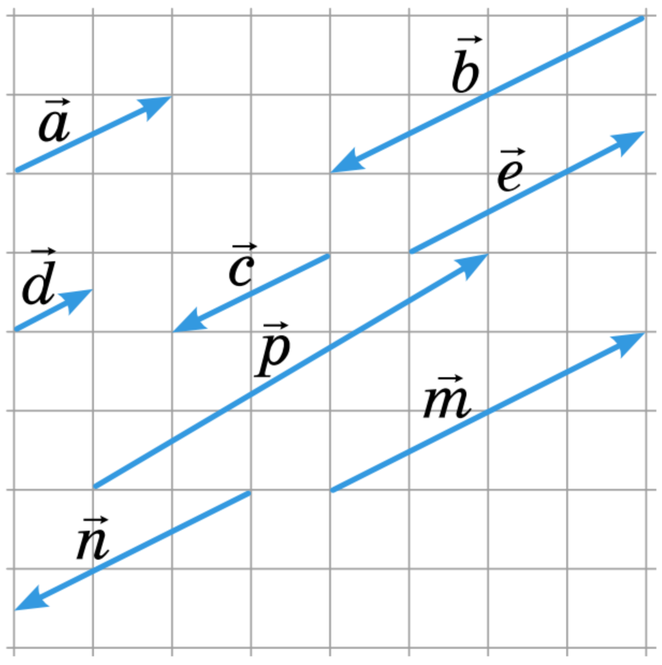
А 5 **Б** 10 **В** 5 і -5 **Г** 10 і -10

415. Які з векторів не колінеарні?

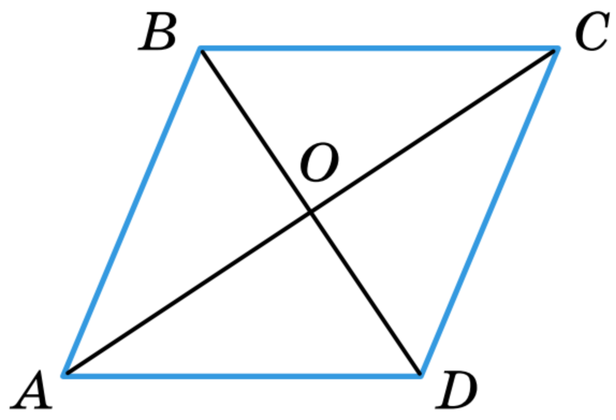
А $\vec{a} = (4;\ 6)$ і $\vec{b} = (2;\ 3)$ **Б** $\vec{x}$ $(-1;\ 1)$ і $\vec{y} = (-1;\ 1)$

В $\vec{c} = (1;\ 5)$ і $\vec{d} = (5;\ 1)$ **Г** $\vec{m} = (2;\ -5)$ і $\vec{n} = (-1;\ 2{,}5)$

416. Вектори, зображені на малюнку 10.5, отримали при множенні вектора $\vec{m}$ на деяке число. Знайди це число.



Мал. 10.5



Мал. 10.6

417. $ABCD$ — паралелограм (мал. 10.6). Знайди число k таке, щоб виконувалась рівність: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{OA}$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



418. Електросамокат за 1 секунду проїжджає відрізок, який описується вектором $v = (5;\ -2)$. Який вектор описуватиме переміщення електросамоката в тому самому напрямі за 5 секунд?

419. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3)$ і $\vec{b} = (-6; 1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; в) $\vec{c} = 5\vec{a} + 7\vec{b}$; г) $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

420. Дано вектори $\vec{m} = (5; -2)$ і $\vec{n} = (-3; 6)$. Знайди координати вектора $\vec{p}$, якщо:

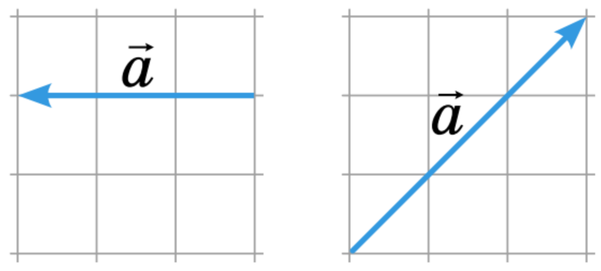
а) $\vec{p} = \vec{m} + 2\vec{n}$; б) $\vec{p} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$; в) $\vec{p} = -3\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$; г) $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{3}\vec{n}$.

Спрости вирази (421, 422).

421. а) $2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{a}$; б) $1{,}2\vec{a} - 0{,}3(4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) - 0{,}1\vec{c}$.

422. а) $2(\vec{m} - 3\vec{n}) - 3(2\vec{m} + \vec{n})$; б) $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(\vec{b} - 4\vec{c}) - (2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c})$.

Для векторів, зображених на малюнку 10.7, побудуй вектори (423, 424):



Мал. 10.7

423. $2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a}$; $-1{,}5\vec{a}$; $-\frac{2}{3}\vec{a}$.

424. $3\vec{a}$; $-2\vec{a}$; $-\frac{1}{3}\vec{a}$; $\frac{3}{2}\vec{a}$; $\frac{4}{3}\vec{a}$.

425. Знайдіть модуль вектора $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (-4; 2)$, $\vec{b} = (6; -6)$ і:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; в) $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; г) $\vec{c} = 1{,}5\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}$.

426. Знайди модуль вектора $\vec{d}$, якщо $\vec{b} = (3; -6)$, $\vec{c} = (-8; 6)$ і:

а) $\vec{d} = 2\vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{d} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$; в) $\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; г) $\vec{d} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$.

427. Знайди число k та координати вектора $\vec{p}$, якщо $\vec{p} = k\vec{b}$, $|\vec{p}| = 10$, $\vec{b} = (3; 4)$.

428. Find the number k and the coordinates of the vector $\vec{a}$, if $\vec{a} = k\vec{b}$, $|\vec{a}| = 13$, $\vec{b} = (5; -12)$.

429. Вектор $\vec{a} = (2; 0)$ задає швидкість течії річки. Власна швидкість човна у 2 рази більша. Зобрази вектори, що задають: а) швидкість човна за течією; б) швидкість човна проти течії. Знайди швидкості, з якими човен рухався за течією і проти течії.

430. Дано точки $A(-1; 3)$, $B(-2; 7)$, $C(2; 5)$, $D(4; 1)$. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$? А вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$?

При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні (431, 432)?

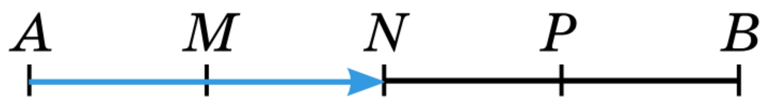
431. а) $\vec{a} = (2; m)$, $\vec{b} = (3; 12)$; б) $\vec{a} = (m; 12)$, $\vec{b} = (3; m)$.

432. а) $\vec{a} = (m; -4)$, $\vec{b} = (1; 3)$; б) $\vec{a} = (m + 1; 2)$, $\vec{b} = (4; m - 1)$.

433. ЗНО При якому значенні y вектори $\vec{a} = (-3; 5)$ і $\vec{b} = (6; y)$ колінеарні?

А -10 **Б** $-2{,}5$ **В** $2{,}5$ **Г** $3{,}6$ **Д** 10

434. Точки M, N, P ділять відрізок AB на чотири рівні частини (мал. 10.8). $\overrightarrow{AN} = \vec{a}$. Вирази через $\vec{a}$ вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MA}$.

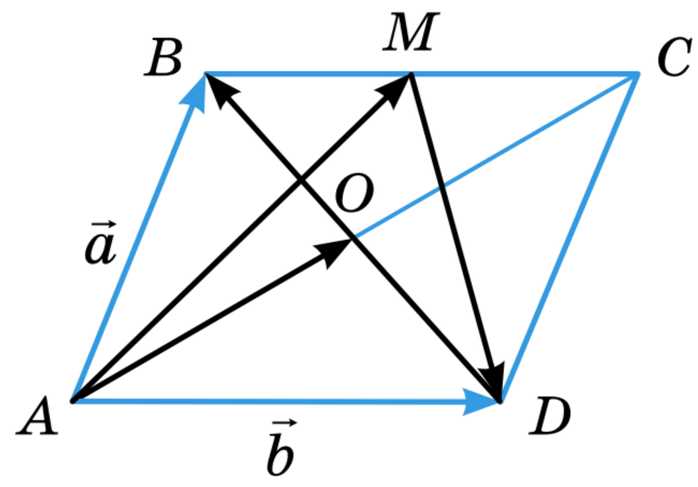


Мал. 10.8

$ABCD$ — паралелограм (мал. 10.9), M — середина BC. Вирази через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ вектори (435, 436):

435. $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AM}$.

436. $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{MD}$.



Мал. 10.9

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



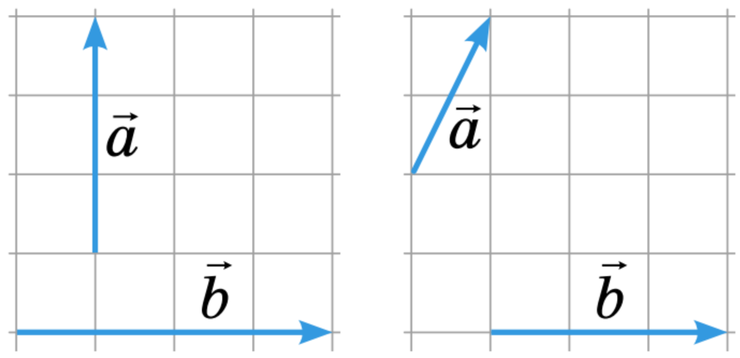
437. Для векторів, зображених на малюнку 10.10, побудуй вектори $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$;

$\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}$;

$\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$;

$\vec{n} = 2(\vec{a} - \vec{b})$;

$\vec{p} = \frac{1}{3}(3\vec{a} + 2\vec{b})$.



Мал. 10.10

438. Дано вектор $\vec{a} = (-2;\ 7)$ і точку $M(1;\ -4)$. Знайди координати точки N, для якої: а) $\overrightarrow{MN} = 2\vec{a}$; б) $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{a}$.

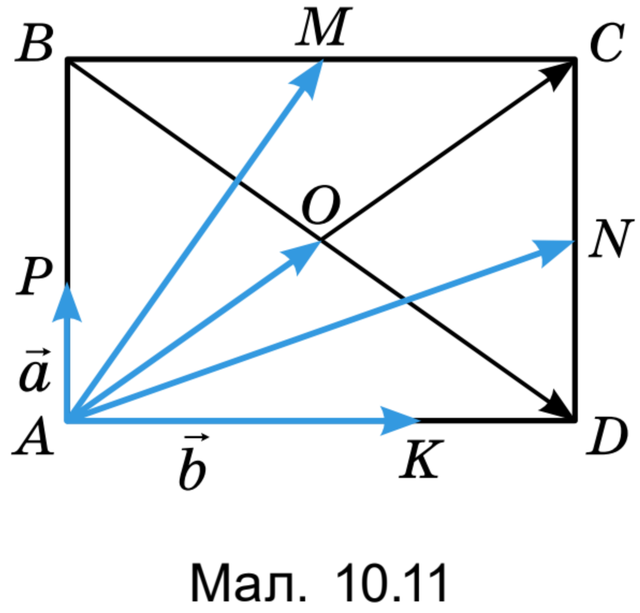
439. Дано вектор $\vec{m} = (3;\ -6)$ і точку $A(-2;\ 4)$. Знайди координати точки B, для якої: а) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m}$; б) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{m}$.

440. Знайди координати одиничного вектора, колінеарного вектору $\vec{a} = (-5;\ 12)$.

441. Знайди координати вектора $\vec{b}$, співнапрямленого з вектором $\vec{a} = (6;\ -8)$, якщо $|\vec{b}| = 5$.

442. ЗНО У прямокутній системі координат на площині задано колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a} = (3;\ -5)$. Визнач абсцису точки B, якщо $A(-4;\ 1)$, а точка B лежить на прямій $y = 3$.

$ABCD$ — прямокутник (мал. 10.11), $\vec{a} = \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



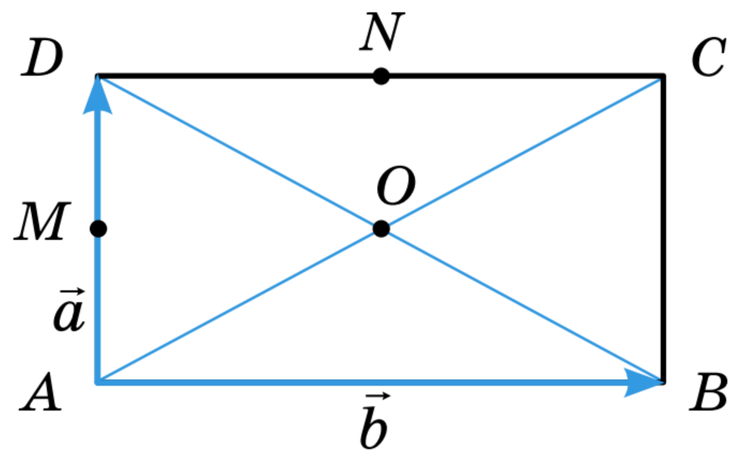
Мал. 10.11

M і N — середини сторін BC і CD. Вирази через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори (443, 444):

443. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AM}$.

444. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AN}$.

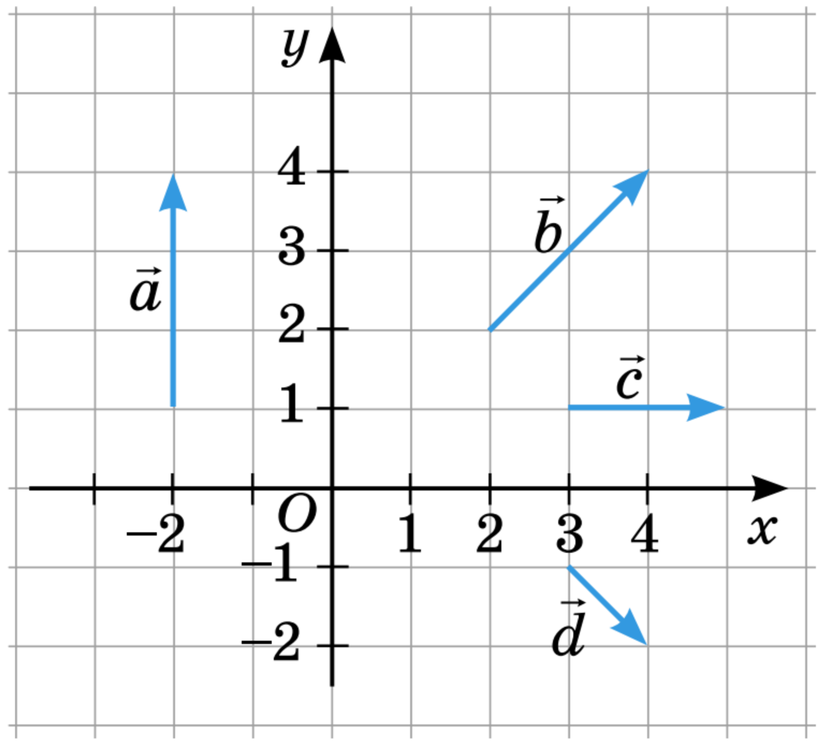
445. ***Відкрита задача.*** $ABCD$ — прямокутник (мал. 10.12). O — точка перетину його діагоналей. Точки M і N — середини сторін AD і CD. Вирази вектори ... через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.



Мал. 10.12

446. Установи відповідність між зображеними на малюнку 10.13 векторами (1–4) та колінеарними до них векторами з координатами (А–Д).

1 $\vec{a}$	**А** (–3; 3)
2 $\vec{b}$	**Б** (–3; –4)
3 $\vec{c}$	**В** (0; 3)
4 $\vec{d}$	**Г** (3; 0)
	Д (–3; –3)



Мал. 10.13

447. Знайди довжини векторів:

$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{b} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$,

$\vec{c} = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$, $\vec{d} = -2\sqrt{5}\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

448. Знайди координати векторів $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{KB} = (2; 3)$.

449. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (5; 9)$ і $\vec{m} = (5; 7)$. Знайди такі числа α і β, щоб виконувалась рівність $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



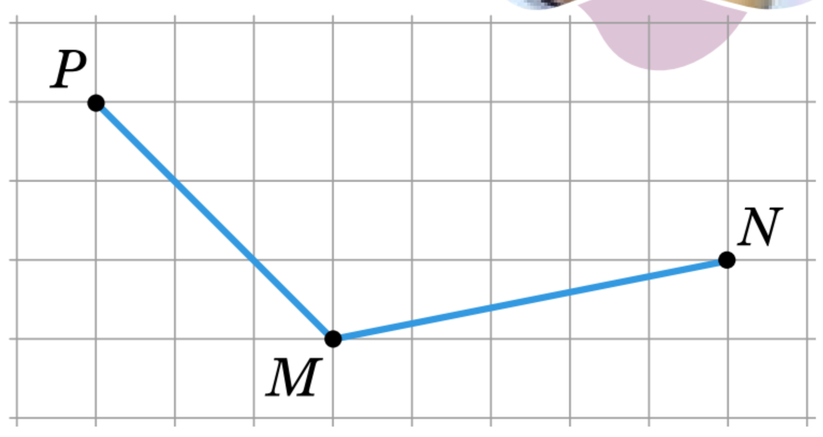
450. Перемалюй малюнок 10.14 у зошит і відклади на ньому:

а) точку X таку, що: $\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$;

б) точку Y таку, що: $\overrightarrow{MY} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$;

в) точку Z таку, що: $\overrightarrow{PZ} = 2\overrightarrow{PM}$.

Установи вид чотирикутників $MPNY$ і $XYZM$.



Мал. 10.14

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



451. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$, якщо $A(2;\ -5)$, $B(1;\ -3)$, $M(-7{,}5;\ 1{,}2)$, $N\left(-8\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{5}\right)$?

452. Спрости вираз $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} - \overrightarrow{MP} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}) + \overrightarrow{CP}$.

453. ***Задача Архімеда.*** Якщо з точки, що лежить поза колом, провести дві січні так, що одна з них проходить через центр кола, а зовнішній відрізок іншої дорівнює радіусу кола, то кут між січними дорівнюватиме третині більшої з дуг, що знаходиться між його сторонами. Доведи.

§ 11 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

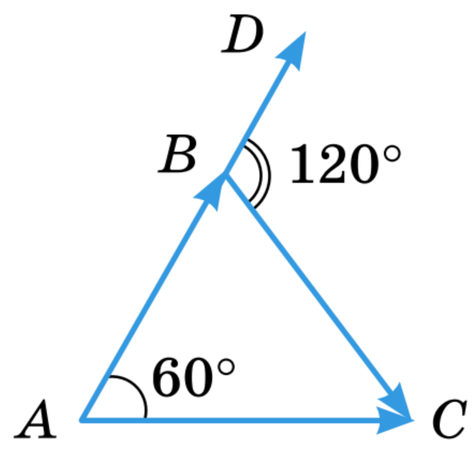
КЛЮЧОВІ СЛОВА

скалярний добуток векторів — scalar product of vectors or dot product of vectors

Досі ми множили вектори на число. Виявляється, можна множити і вектор на вектор. Оскільки розглядають таке множення, при якому добуток двох векторів дорівнює числу (скаляру), то його називають *скалярним добутком*. Для введення цього поняття пояснимо спочатку, що розуміють під кутом між двома ненульовими векторами.

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими — 0°.

Наприклад, якщо ABC — рівносторонній трикутник (мал. 11.1), то кут між векторами AB і AC дорівнює 60°, а між AB і BC — 120°, бо кут між векторами AB і BC дорівнює куту між векторами BD і BC.



Мал. 11.1

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Якщо хоч один із двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю.

Теорема 4. Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ дорівнює $x_1x_2 + y_1y_2$.

Приклад 1. Якщо $\vec{a} = (2;\ -1)$ і $\vec{b} = (1;\ 0)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2$.

Розглянемо основні властивості скалярного добутку.

Якими б не були вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ і $\vec{c} = (x_3;\ y_3)$, завжди:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Справедливість цих властивостей випливає з тотожностей:

$x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1$;

$(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 = x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3 = (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3)$;

$(kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2)$.

Доведені властивості дають можливість порівняно легко виконувати перетворення векторних виразів — за тими самими правилами, за якими виконують тотожні перетворення алгебраїчних виразів.

Знаючи скалярний добуток двох векторів та їх довжини, можна легко обчислити косинус кута між ними:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то $\cos\varphi = 0$ і $\varphi = 90°$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. І навпаки, якщо два ненульові вектори перпендикулярні, тобто $\varphi = 90°$, то $\cos\varphi = 0$. За цієї умови скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Отже, маємо умову перпендикулярності двох векторів.

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Якщо вектори задані координатами, то умова перпендикулярності двох векторів формулюється так:

Ненульові вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}^2|$. Отже, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Звідси випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Розглянемо приклад.

Приклад 2. Знайдемо $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 30°$.

Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} =$

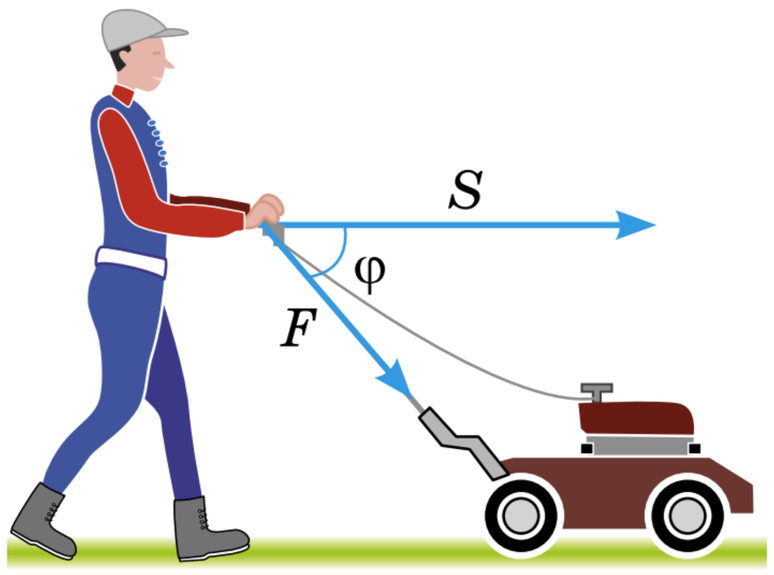
$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 30^\circ + |\vec{b}|^2} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (3\sqrt{3})^2} =$$

$= \sqrt{4 + 18 + 27} = \sqrt{49} = 7$. Отже, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

Приклад застосування скалярного добутку векторів відомий з фізики. Механічна робота A, яку виконує стала сила $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ (мал. 11.2), дорівнює скалярному добутку даних векторів:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi.$$

Скалярний добуток векторів використовується і в алгебрі, зокрема для доведення нерівностей, визначення найменшого чи найбільшого значення функції.



Мал. 11.2

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Кут між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right)$. Тому означення скалярного добутку таких векторів записують у вигляді формули

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right).$$

Чому говорять «скалярний добуток векторів», а не «добуток векторів»? Бо у вищій математиці розглядається ще векторний, косий та інші добутки.

Косим добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів і синуса орієнтованого кута між першим і другим векторами. Косий добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a} \circ \vec{b}$.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює φ, називають такий вектор $\vec{p}$, що його напрям перпендикулярний до напрямів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, орієнтація трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ збігається з орієнтацією базисної трійки векторів і $|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$. Тому, взагалі кажучи, для таких добутків переставний закон не справджується. Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a} \times \vec{b}$.

Мішаним добутком $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трьох векторів називають їх векторно-скалярний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Вектори на площині. Урок 2).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення скалярного добутку двох векторів.
2. Сформулюй означення кута між двома векторами.
3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$?
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів, якщо принаймні один із них нульовий?
5. Яка умова перпендикулярності двох векторів?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Знайди косинус кута між векторами $\vec{a} = (1; -2)$ і $\vec{b} = (-4; 2)$.

• Нехай $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \varphi$. За означенням $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Тому $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Оскільки

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 = -8$, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

і $|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, то $\cos\varphi = \dfrac{-8}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{-8}{10} = -\dfrac{4}{5}$.

Отже, $\cos\varphi = -\dfrac{4}{5}$.

2. Знайди $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 60°$.

• $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 =$

$= 3|\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° - 2|\vec{b}|^2 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} - 2 \cdot 4 =$

$= 12 + 10 - 8 = 14.$

ВИКОНАЄМО УСНО



454. Знайди скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 60°$.

А 6 **Б** 3 **В** $3\sqrt{3}$ **Г** $3\sqrt{2}$

455. Знайди кут між двома одиничними векторами, якщо їх скалярний добуток дорівнює: $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 0; $-0{,}5$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

456. Установи вид кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$.

А гострий **Б** прямий **В** тупий **Г** не можна встановити

457. Знайди скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (0;\ 1)$, $\vec{b} = (-3;\ 0)$; в) $\vec{a} = (6;\ 0)$, $\vec{b} = (-2;\ -5)$;

б) $\vec{a} = (1;\ 1)$, $\vec{b} = (2;\ 3)$; г) $\vec{a} = (4;\ 2)$, $\vec{b} = (4;\ -2)$.

458. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює $\sqrt{2}$. Обчисли $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

А 2 **Б** $2\sqrt{2}$ **В** $\sqrt{2}$ **Г** 0

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

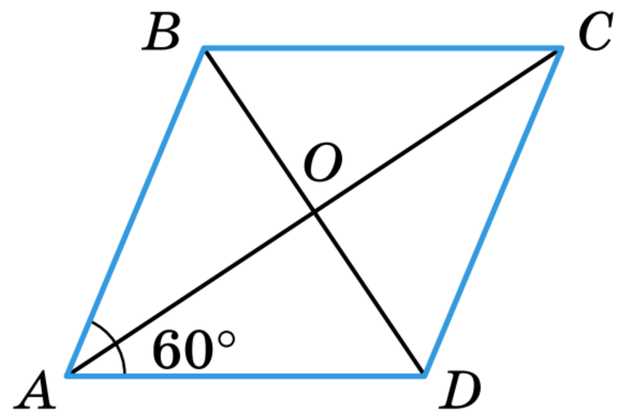


459. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. Знайди кути між векторами:

а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

460. $ABCD$ — ромб з кутом $A = 60°$ (мал. 11.3). Знайди кути між векторами:

$\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$;
$\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AD}$.



Мал. 11.3

Знайди скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (461, 462).

461. а) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 60°$;

б) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 7$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 120°$.

462. а) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 45°$; б) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 150°$.

463. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць задає модуль вектора a, другий / друга — модуль вектора b, третій / третя — кут між векторами, а четвертий / четверта — знаходить скалярний добуток векторів a і b.

464. Працівник тягне за мотузку візок, прикладаючи силу 80 Н під кутом 60° до горизонталі. Візок перемістився на 12 метрів. Знайди роботу, що була виконана. Як залежить значення роботи від кута прикладання сили?

465. Пан Максим штовхає газонокосарку із силою 100 Н під кутом 30° до горизонталі (мал. 11.2). Газонокосарка перемістилася по прямій на відстань 20 м. Знайди виконану роботу. Як залежить значення роботи від кута нахилу ручки?

466. Човен буксирують силою $F = 400$ Н. За час буксирування човен перемістився на відстань $s = 100$ м. Робота сили становила $A = 20000$ Дж. Знайди кут між напрямом сили і траєкторією руху човна.

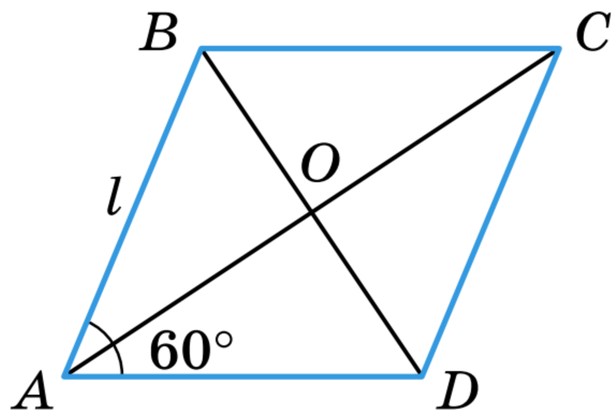


467. Хлопчик тягне санчата із силою $F = 100$ Н. Вони перемістилися на відстань $s = 10$ м. Робота цієї сили дорівнює $A = 707$ Дж. Під яким кутом до напряму руху хлопчик тягнув санчата?

468. Будівельник тягне мішок цементу по горизонтальній площині. Мішок перемістився на відстань 5 м, а кут між напрямом переміщення і силою дорівнює 30°. Робота сили становила 1300 Дж. Знайди силу, з якою будівельник тягнув мішок.

469. Трактор тягне плуг з силою 200 Н, що напрямлена під кутом 60° до напряму руху. Робота цієї сили становила 3000 Дж. Знайди переміщення плуга.

470. $ABCD$ — ромб зі стороною l і кутом $A = 60°$ (мал. 11.4). Знайдіть скалярні добутки векторів $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.



Мал. 11.4

471. Трикутник ABC — рівносторонній, $AB = 12$. Знайди: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

472. ЗНО Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 5 см. Знайди скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Знайди скалярний добуток векторів (473, 474).

473. а) $\vec{a} = (1; 2)$ і $\vec{b} = (-8; 2)$; б) $\vec{p} = (-3; -7)$ і $\vec{k} = (-2; -5)$.

474. а) $\vec{m} = (-3; -2)$ і $\vec{n} = (2; 3)$; б) $\vec{c} = \left(4\frac{1}{2}; -2\frac{2}{3}\right)$ і $\vec{d} = (2; 3)$.

475. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3)$ і $\vec{b} = (1; -2)$. Знайди скалярний добуток векторів:

а) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

476. Given vectors $\vec{p} = (1; -5)$ and $\vec{q} = (3; 1)$. Find the scalar product of the vectors:

a) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ and $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$; b) $\vec{m} = \vec{p} + 2\vec{q}$ and $\vec{n} = 3\vec{p} - \vec{q}$.

477. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 1)$; б) $\vec{a} = (2; 6)$, $\vec{b} = (3; 0)$;

в) $\vec{a} = (-4; -8)$, $\vec{b} = (-3; 3)$; г) $\vec{a} = (-3; -4)$, $\vec{b} = (3; -1)$.

478. Знайди кут між векторами:

а) $\vec{a} = (-2; 2)$ і $\vec{b} = (0; 4)$; б) $\vec{x} = (1; 1)$ і $\vec{y} = (0; -1)$;

в) $\vec{c} = (3; -1)$ і $\vec{d} = (2; 1)$; г) $\vec{p} = (0; 2)$ і $\vec{k} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

479. Доведи, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 1)$, $B(0; 5)$, $C(8; 4)$ — прямокутний.

480. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-3; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(5; 0)$, $D(3; -3)$ — прямокутник.

При якому значенні x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні (481, 482)?

481. а) $\vec{a} = (0;\ 1)$, $\vec{b} = (-3;\ x)$; б) $\vec{a} = (6;\ x)$, $\vec{b} = (-2;\ -5)$.

482. а) $\vec{a} = (1;\ 1)$, $\vec{b} = (x;\ 3)$; б) $\vec{a} = (x;\ 2)$, $\vec{b} = (4;\ -2)$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Знайди косинуси кутів трикутника ABC (483, 484).

483. $A(-4;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(-2;\ -2)$.

484. $A(-1;\ 5)$, $B(1;\ 1)$, $C(5;\ 3)$.

485. Дано точки $A(-4;\ 0)$ і $B(3;\ 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

486. Дано точки $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-2;\ 2)$, $D(-3;\ 1)$. Знайди кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

487. ЗНО Знайди кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b} + \vec{c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a} = (2;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 4)$ і $\vec{c} = (-2;\ -6)$.

488. Дано три точки: $A(-5;\ 2)$, $B(1;\ 4)$, $C(-1;\ 1)$. Знайди координати точки D такої, щоб виконувалася умова $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, якщо точка D лежить: а) на осі OX; б) на осі OY.

489. Дано вектори $\vec{a} = (3;\ 4)$ і $\vec{b} = (-1;\ 2)$. Знайди число l, при якому вектор $\vec{a} + l\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

490. При якому значенні m скалярний добуток $\vec{p} \cdot \vec{q}$ дорівнює 6, якщо: а) $\vec{p} = (2;\ 3)$, $\vec{q} = (m;\ 4)$; б) $\vec{p} = (m;\ 1)$, $\vec{q} = (m;\ -3)$?

491. При якому значенні x скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ дорівнює 4, якщо: а) $\vec{a} = (2;\ x)$, $\vec{b} = (-3;\ 5)$; б) $\vec{a} = (x;\ -3)$, $\vec{b} = (x;\ x + 2)$?

492. ЗНО На колі із центром O, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 = 80$, вибрано точку $M(x_0;\ y_0)$ так, що вектор $\overrightarrow{OM}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} = (-2;\ 1)$. Визнач абсцису x_0 точки M, якщо $x_0 < 0$.

493. Доведи: якщо довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, то вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні.

494. Доведи: якщо вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні, то довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і b рівні.

495. Дано $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 60°$. Знайди скалярний добуток векторів:

а) $2\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$; б) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$; в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$.

496. Дано $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 150°$. Знайди скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a}(2\vec{a} + \vec{b})$; б) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$; в) $(\vec{a} - 2\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$.

497. Обчисліть $|\vec{a}+\vec{b}|$ та $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо:

а) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$; б) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=60°$.

498. Обчисли $|3\vec{a}+\vec{b}|$, якщо:

а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\perp\vec{b}$; б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=120°$.

499. Обчисли кут між векторами $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{n}=\vec{a}+3\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

500. Обчисли кут між векторами $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

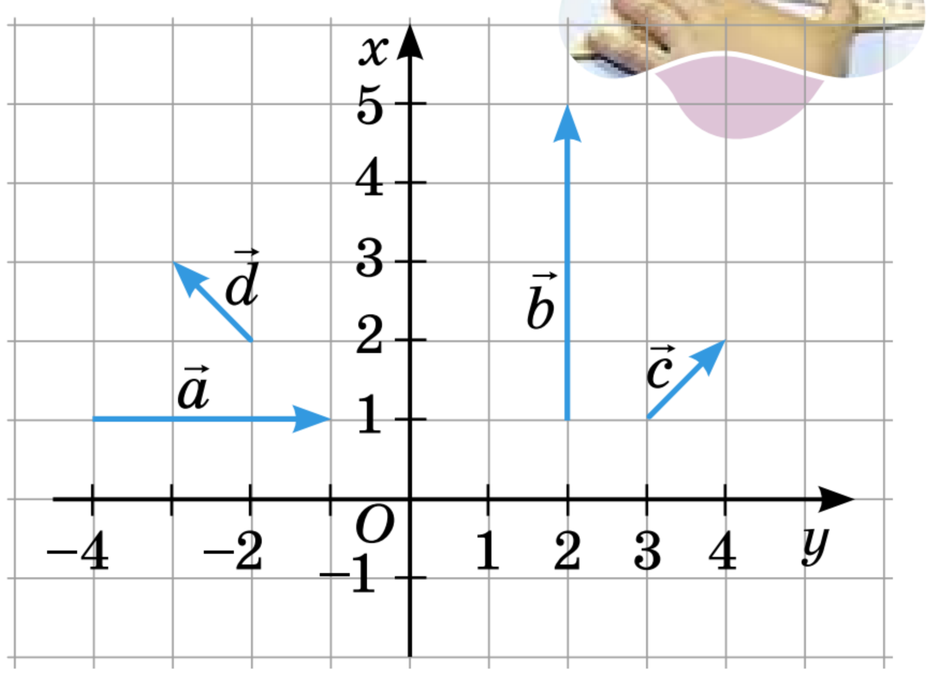
501. Обчисли $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$.

502. Дано точку $A(3;\,5)$ і вектор $\vec{a}=(-1;\,4)$. Зобрази множину всіх таких точок B, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ були:
а) колінеарні; б) перпендикулярні.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



503. Перемалюй у зошит малюнок 11.5. Знайди кути між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{a}$ і $\vec{d}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ двома способами:
а) безпосереднім вимірюванням, відклавши попарно ці вектори від початку координат;
б) за допомогою формули, визначивши попередньо координати кожного вектора.



Мал. 11.5

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



504. Від точки $A(2;\,-5)$ відкладено вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Знайди координати:
а) точки B, якщо $\vec{a}=(1;\,3)$;
б) точки C, якщо $\vec{c}=(-3;\,4)$;
в) одиничного вектора, співнапрямленого з вектором $\overrightarrow{BC}$.

505. ***Старовинна німецька задача.*** Драбину завдовжки 13 футів приставлено до стіни так, що нижня її частина віддалена від стіни на 5 футів. На скільки спуститься вона по стіні, якщо її основу відсунути ще на 7 футів? Досліди, як змінюватиметься положення верху драбини, якщо нижню частину драбини відсовувати від заданого положення на a футів.

506. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить медіану, проведену до основи, на відрізки 10 см і 8 см. Обчисли периметр і площу трикутника.

§ 12 ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- застосування векторів — application of vectors
- векторний метод — vector method

Якщо розв'язують задачу, використовуючи властивості векторів, то це — *векторний метод* розв'язування задачі. При цьому часто використовують таке твердження.

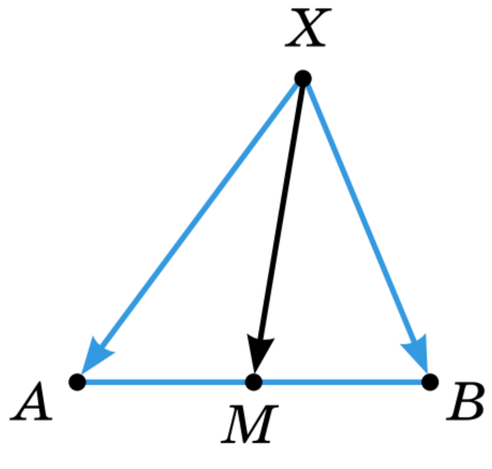
Теорема 5. Якщо X — довільна точка, а M — середина відрізка AB або точка перетину медіан трикутника ABC, то відповідно $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ або $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

Доведення. Завжди істинні рівності:

$\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{XB}$,

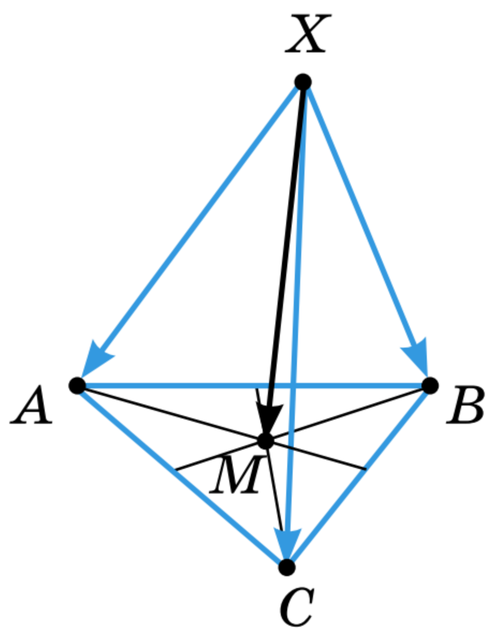
$\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{XC}$.

Додавши дві перші з цих рівностей і врахувавши, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (мал. 12.1), дістанемо: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$, звідки $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.



Мал. 12.1

Якщо додамо всі три рівності і врахуємо, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (див. мал. 10.4 і задачу на с. 81), дістанемо: $3\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$, звідки $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$ (мал. 12.2).



Мал. 12.2

Для прикладу розв'яжемо векторним методом задачу, яку раніше було розв'язано координатним методом (див. с. 26).

Задача 1. Доведи, що середини відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, збігаються.

Розв'язання. Якщо M і M_1 — середини відрізків EF і KP (мал. 12.3), а X — довільна точка (її тільки уявляємо), то

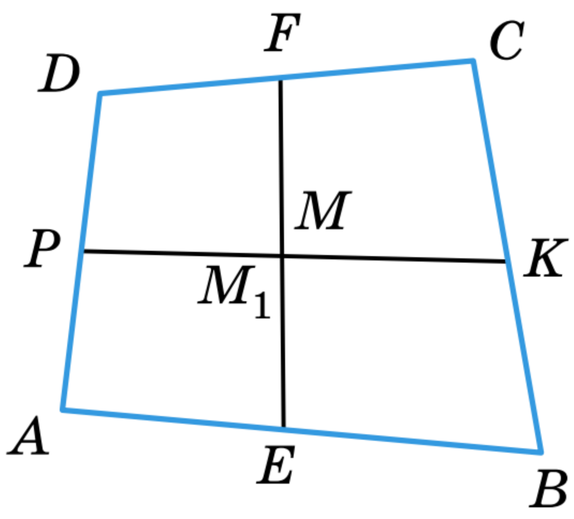
$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XE} + \overrightarrow{XF}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD});$$

$$\overrightarrow{XM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XK} + \overrightarrow{XP}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XD})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}).$$

Праві частини цих рівностей рівні, тому $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XM_1}$. А це можливо тільки тоді, коли точки M і M_1 збігаються.



Мал. 12.3

Багатьом властивостям геометричних фігур відповідають ті чи інші векторні рівності.

1. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ — точки A і B збігаються;
2. $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні;
3. $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій;
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ — прямі AB і CD перпендикулярні;
5. $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, а числа m і n додатні — точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$;
6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ — кут між прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює φ.

Користуючись цими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач та доводити теореми.

Вектори часто застосовують у фізиці. Але здебільшого — прикладені вектори, які визначаються не тільки довжиною і напрямом, а й точкою прикладання.

Задача 2. Вантаж вагою $\vec{P}$ перебуває на похилій площині, нахиленій до горизонту під кутом α (мал. 12.4). Яку треба прикласти силу $\vec{F}$, напрямлену в напрямі найбільшого підйому площини, щоб вантаж не скочувався вниз?

Мал. 12.4

Розв'язання. Силу тяжіння $\vec{P}$ розкладемо за двома взаємно перпендикулярними напрямами: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Сила $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярна до площини і не спричиняє переміщення вантажу. Його скочування викликає сила $\overrightarrow{OB}$, модуль якої дорівнює $P\sin\alpha$. Її утримує протилежна їй сила $\vec{F}$. Отже, $\vec{F} = P\sin\alpha$.

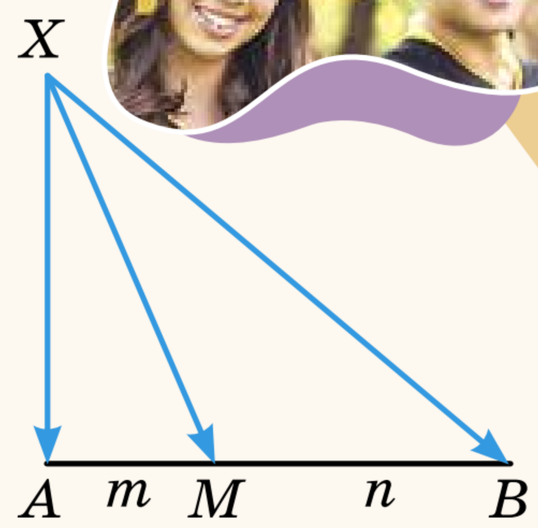
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Першу частину теореми 5 можна узагальнити (мал. 12.5).

Теорема 6. Якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$, а X — будь-яка точка площини, то

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$



Мал. 12.5

Доведення. Оскільки $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{XB}$, то $n\overrightarrow{XM} + n\overrightarrow{MA} = n\overrightarrow{XA}$, $m\overrightarrow{XM} + m\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{XB}$.

Якщо додати почленно ці векторні рівності і врахувати, що $n\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, дістанемо $(m+n)\overrightarrow{XM} = n\overrightarrow{XA} + m\overrightarrow{XB}$, звідки $\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$. Якщо $m = n$, то $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Вектори можна застосовувати не тільки в геометрії, а й при розв'язуванні алгебраїчних задач. Особливо зручно це робити при доведенні нерівностей та знаходженні найбільшого і найменшого значень функції або виразу.

Наприклад, знайдемо найбільше значення функції $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$. Її область визначення $D(y) = [0;\ 2]$.

Введемо вектори $\vec{a} = (1;\ 1)$ і $\vec{b} = (\sqrt{x};\ \sqrt{2-x})$. Тоді дану функцію можна записати у вигляді $y = \vec{a} \cdot \vec{b}$, адже $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{2-x}$. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x+2-x} = \sqrt{2}$, то $y = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos\varphi = 2\cos\varphi$.

Найбільше значення $\cos\varphi$ дорівнює 1. Тому найбільше значення функції $y = 2$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

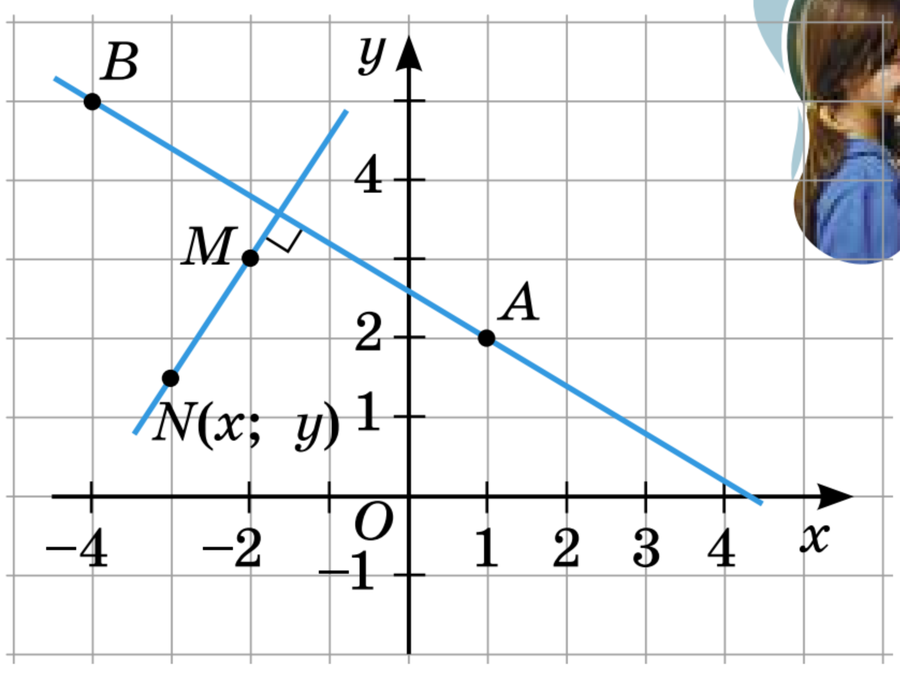
1. Що називають векторним методом розв'язування задач?
2. Які векторні формули тобі відомі?
3. Як мовою векторів записати, що: а) прямі паралельні; б) прямі перпендикулярні; в) точки збігаються; г) точки лежать на одній прямій?
4. Чи можна застосовувати векторний метод до задач, умови яких не містять векторів? Наведи приклади.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Напиши рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2;\ 3)$ перпендикулярно до прямої AB, якщо $A(1;\ 2)$, $B(-4;\ 5)$ (мал. 12.6).

- Нехай $N(x;\ y)$ — довільна точка шуканої прямої MN і $MN \perp AB$.



Мал. 12.6

Тоді $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = (-5;\ 3)$, $\overrightarrow{MN} = (x + 2;\ y - 3)$, то $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = -5(x + 2) + 3(y - 3)$. Тоді $-5(x + 2) + 3(y - 3) = 0$, звідки $-5x + 3y - 19 = 0$ або $5x - 3y + 19 = 0$. Отже, рівняння шуканої прямої матиме вигляд: $5x - 3y + 19 = 0$.

2. У $\triangle ABC$ $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 60°$. Знайди медіану трикутника, проведену з вершини A.

- Нехай AM — медіана $\triangle ABC$. Тоді $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Знайдемо довжину медіани AM.

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AM}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos 60^0 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 36} = \frac{1}{2}\sqrt{76} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{19} = \sqrt{19}.$$

Отже, $AM = \sqrt{19}$ см.

ВИКОНАЄМО УСНО



507. Що можна сказати про відрізки AB і CD, якщо $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$?

508. Установи взаємне розміщення точок A, B, C, якщо:

а) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA}$.

509. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$; в) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$?

510. Установи вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{BC} = 0{,}3\overrightarrow{AD}$.

А прямокутник **Б** ромб **В** квадрат **Г** трапеція

511. Установи вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{CA} = (-2;\ 3)$, $\overrightarrow{CB} = (3;\ 2)$.

А гострокутний **Б** прямокутний

В тупокутний **Г** не можна встановити

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



512. Доведи, що чотирикутник з вершинами в точках $M(-4;\ -2)$, $N(-6;\ 2)$, $P(4;\ 7)$, $K(6;\ 3)$ — прямокутник.

513. Prove that a quadrilateral with vertices at points $A(-1;\ -2)$, $B(-8;\ 4)$, $C(1;\ 6)$, $D(8;\ 0)$ is a rhombus.

514. Доведи, що точки $M(1; 3)$, $N(-2; 7)$, $K(-8; 15)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими? У якому відношенні вона ділить відрізок?

515. У якому відношенні вісь OX ділить відрізок AB, якщо $A(1; 6)$, $B(7; -12)$?

516. AM — медіана трикутника ABC. Знайди координати вектора $\overrightarrow{AM}$ та його модуль, якщо $A(-3; 2)$, $B(1; 1)$, $C(3; 5)$.

517. Знайди координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо $A(-7; 12)$, $B(-3; -2)$, $C(4; 5)$.

518. Напиши рівняння висот $\triangle ABC$, якщо $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(7; -3)$.

519. Напиши рівняння прямої, що дотикається до кола з центром $P(-4; 2)$ в точці $A(1; 4)$.

520. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні. Доведи, що суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні.

521. Нехай K, P, T, L — середини сторін AB, BC, CD, DA довільного чотирикутника. Доведи, що точки перетину медіан трикутників APT і CKL збігаються.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



522. Доведи теорему про середню лінію трапеції.

523. Доведи, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

524. Точки P і K — середини діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$. Доведи, що $PK \parallel AD$.

525. Точки P і K — відповідно середини діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Доведи, що $PK = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

526. Доведи, що чотирикутник, у якого діагоналі в точці перетину діляться навпіл, — паралелограм.

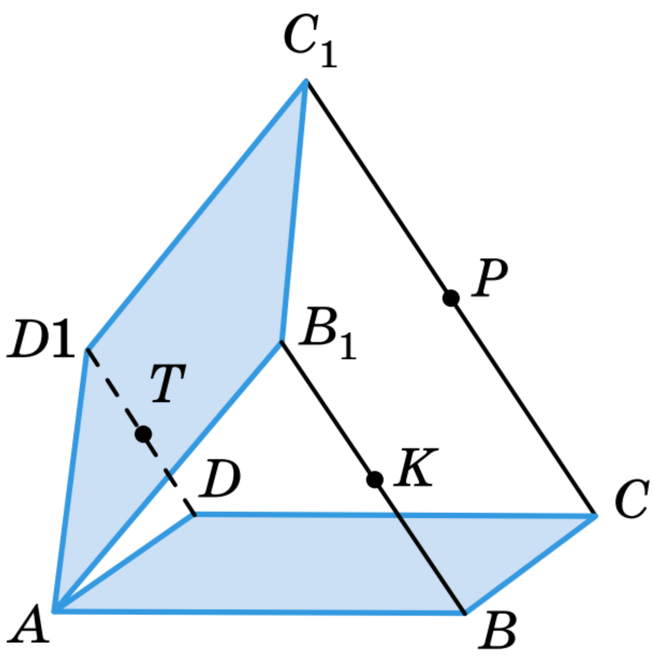
527. ***Відкрита задача.*** Доведи теорему .., використовуючи векторний метод.

528. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $A(1; -3)$, $B(-4; -8)$. Знайди координати точки C, якщо відомо, що вони рівні.

529. Напиши рівняння дотичних, проведених з точки $A(1; 1)$ до кола $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

530. Знайди координати одиничного вектора, колінеарного з бісектрисою кута B трикутника ABC, якщо $A(2; 7)$, $B(4; 3)$, $C(8; 1)$.

531. Дано прямокутник $ABCD$. Доведи, що для будь-якої точки M виконується рівність: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.



Мал. 12.7

532. Доведи, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, проходить і через точку перетину її діагоналей.

533. $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$ — паралелограми, точки K, P, T — середини відрізків BB_1, CC_1 і DD_1. Доведи, що $AK = PT$ і $AT = KP$ (мал. 12.7).

534. Знайди найбільше значення виразу $3x + 4\sqrt{1 - x^2}$ і вкажи x, при якому це значення досягається.

535. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC позначено точки A_1, B_1, C_1, такі, що $AA_1 = k \cdot AB$, $BB_1 = k \cdot BC$, $CC_1 = k \cdot CA$. Доведи, що точки перетину медіан трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ збігаються.

536. Доведи нерівність $\sqrt{2a + 1} + \sqrt{2b + 1} \le 2\sqrt{p + 1}$, де $p = a + b$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



537. Для точок $M(-3;\ 2)$ і $N(5;\ 4)$ задай формулою та зобрази на координатній площині множину точок $G(x;\ y)$, які задовольняють умову:
а) $MG \cdot MN = 0$; б) $GM \cdot GN = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

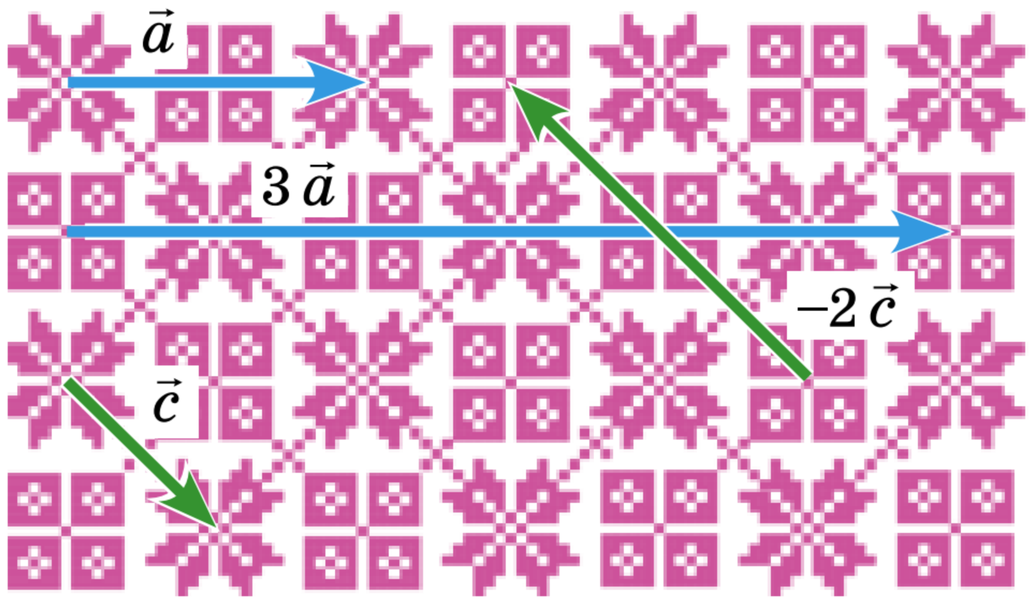


538. Знайди скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

539. Знайди модуль вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, а кут між ними $60°$.

540. Діагоналі трапеції перпендикулярні, і одна з них дорівнює 15 см. Знайди площу трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС

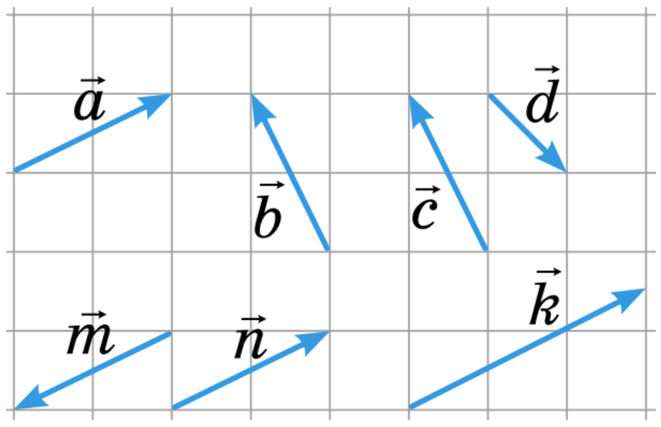


Орнаменти і вектори

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

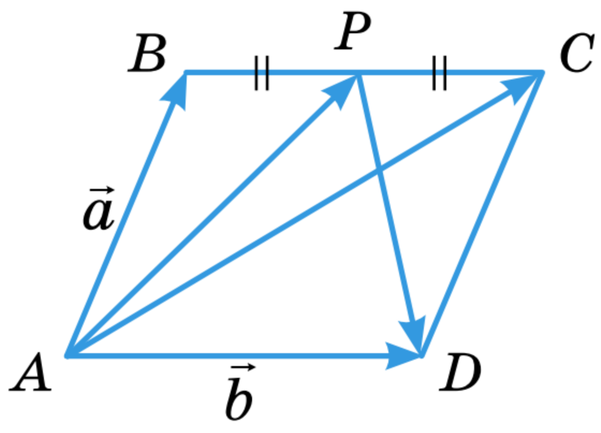
А

1 Вкажи вектори: колінеарні, рівні, протилежні.

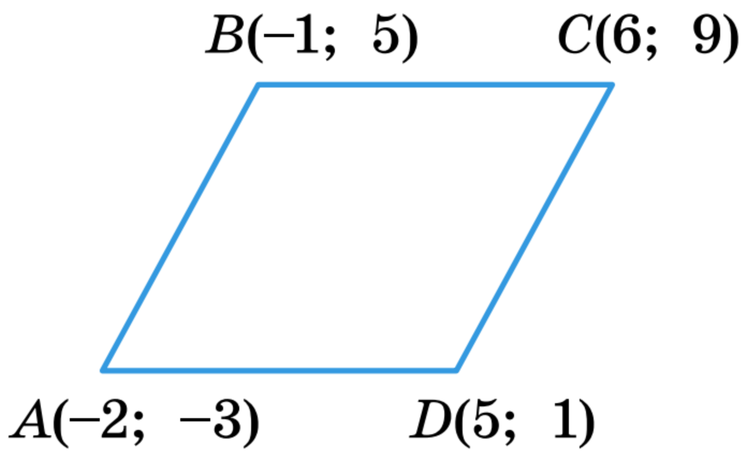


2 $ABCD$ — паралелограм.

Вирази $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PD}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$

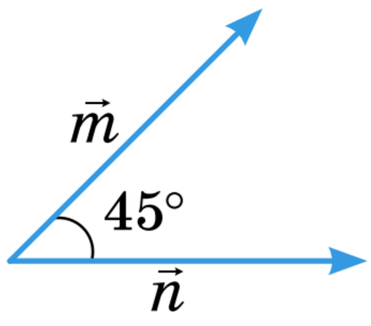


3 Доведи: $ABCD$ — ромб.



4 $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{n}| = 3$.

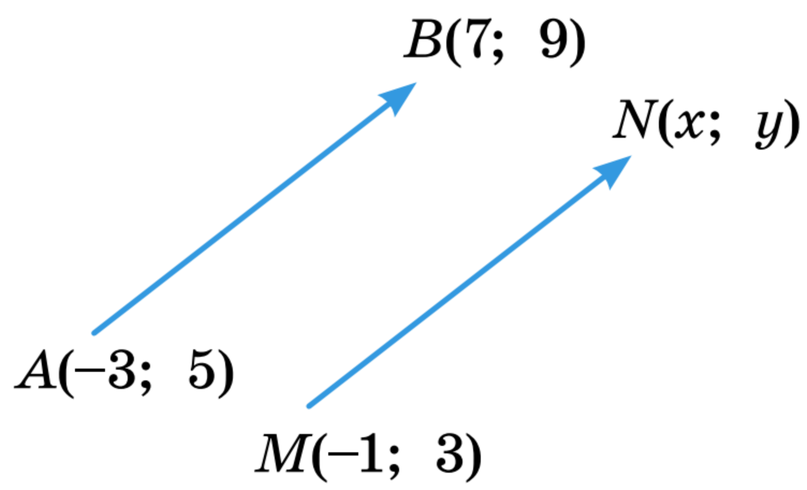
$|\vec{m} + \vec{n}|$; $|\vec{m} - \vec{n}|$



Б

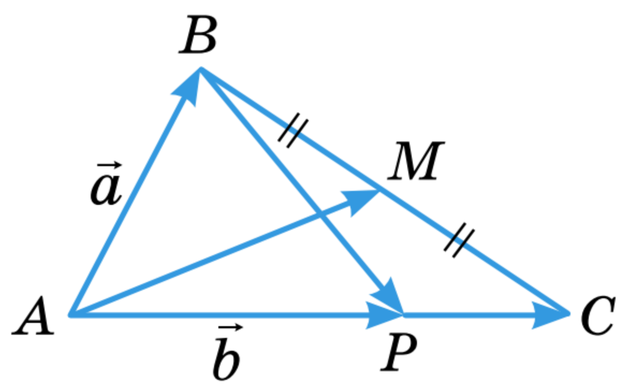
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

$N(x;\ y)$

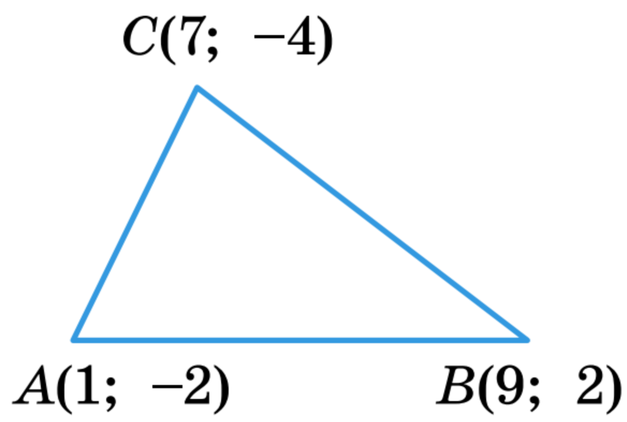


$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,
$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PC} = 3 : 1$.

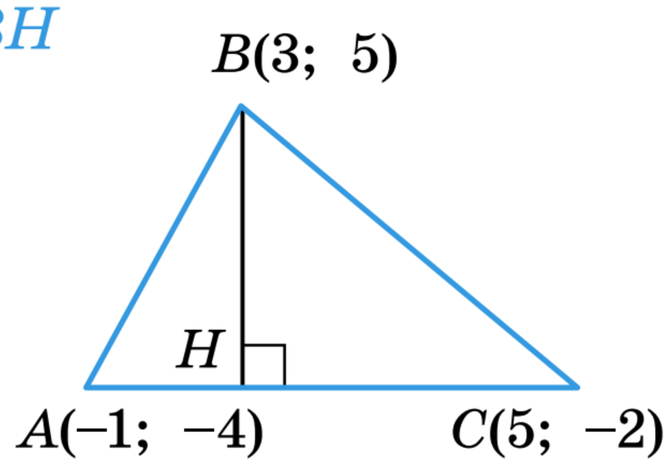
Вирази через $\vec{a}$ і b AM, BM, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$



$\angle A$; $\angle B$; $\angle C$



Рівняння BH



САМОСТІЙНА РОБОТА 2

Варіант 1

1. Накресли два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуй вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

2. Знайди координати та модуль вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (2; -1)$.

3. Знайди координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(1; 3)$, $C(5; -4)$, $D(2; 9)$.

4. Знайди модуль вектора $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}; \vec{q}}) = 45°$.

Варіант 2

1. Накресли два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуй вектор $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

2. Знайди координати та модуль вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-1; 3)$, $\vec{b} = (-2; -3)$.

3. Знайди координати вершини B паралелограма $ABCD$, якщо $A(3; 7)$, $C(-3; -1)$, $D(5; -3)$.

4. Знайди модуль вектора $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60°$.

Варіант 3

1. Накресли два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуй вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. Знайди координати та модуль вектора $\vec{m} = 0{,}5\vec{a} - 4\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2; -8)$, $\vec{b} = (-1; 2)$.

3. Знайди координати вершини C паралелограма $ABCD$, якщо $A(-3; -3)$, $B(5; 1)$, $D(3; -7)$.

4. Знайди модуль вектора $\vec{n} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 30°$.

Варіант 4

1. Накресли два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуй вектор $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$.

2. Знайди координати та модуль вектора $\vec{q} = 2\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3; 5)$, $\vec{b} = (-4; 8)$.

3. Знайди координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(-3; -5)$, $B(3; 3)$, $C(5; 6)$.

4. Знайди модуль вектора $\vec{p} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}) = 60°$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 2

1 Знайди координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-1;\ -3)$, $B(-7;\ 12)$.

А $(6;\ -15)$
Б $(-6;\ 15)$
В $(-8;\ 9)$
Г $(-6;\ 9)$

2 Яка умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

А $\vec{a} + \vec{b} = 0$
Б $\vec{a} - \vec{b} = 0$
В $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Г не можна встановити

3 Дано: $\vec{p} = (-2;\ 1)$, $\vec{q} = (4;\ -3)$. Знайди координати вектора $\vec{m} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$.

А $(8;\ -7)$
Б $(-14;\ 0)$
В $(8;\ 11)$
Г $(-2;\ 3)$

4 Знайди довжину вектора $\vec{a} = (-2;\ 4)$.

А $2\sqrt{10}$
Б $\pm 2\sqrt{3}$
В $\pm 2\sqrt{5}$
Г $2\sqrt{5}$

5 Який із векторів колінеарний вектору $\vec{a} = (-1;\ 4)$?

А $(-2;\ -8)$ **Б** $(0{,}5;\ 2)$
В $(3;\ -3)$ **Г** $(4;\ -16)$

6 Установи вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (6;\ 2)$.

А рівнобедрений
Б гострокутний
В прямокутний
Г тупокутний

7 Знайди кут між одиничними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5$.

А $30°$ **Б** $60°$
В $120°$ **Г** $45°$

8 При якому значенні m вектори $\vec{a} = (-2;\ 6)$ і $\vec{b} = (9;\ m)$ перпендикулярні?

А -3 **Б** 27
В 3 **Г** -27

9 При якому значенні x вектори $\vec{m} = (3;\ x)$ і $\vec{n} = (-6;\ 7)$ колінеарні?

А 14 **Б** $3{,}5$
В $-3{,}5$ **Г** -14

10 У якому з випадків точки M_1 і M_2 збігаються?

А $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{BM_2}$
Б $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2}$
В $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_1M_2}$
Г $\overrightarrow{M_1M_2} \neq \vec{0}$

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Дано точки $A(-3;\ 7)$ і $B(4;\ -3)$. Знайди координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

А $(1;\ 4)$ **Б** $(-7;\ 10)$ **В** $(7;\ -10)$ **Г** $(1;\ -10)$

2. Знайди скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 60°$.

А $5\sqrt{2}$ **Б** 10 **В** $5\sqrt{3}$ **Г** 5

3. Дано: $\vec{a} = (-1;\ 3)$, $\vec{b} = (-2;\ 4)$. Знайди $|\vec{c}|$, якщо $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$.

А $2\sqrt{2}$ **Б** $5\sqrt{2}$ **В** $2\sqrt{5}$ **Г** $\sqrt{6}$

4. Дано вектори $\vec{a} = (m;\ 2)$ і $\vec{b} = (4;\ m + 2)$. Установи відповідність між умовами (1–3) та значенням m (А–Д).

1 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні	**А** -4
2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні	**Б** 1
3 скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 10	**В** $-\frac{2}{3}$
	Г -4 або 2
	Д -2 або 4

5. Дано точки $A(3;\ 1)$, $B(5;\ -2)$, $C(-4;\ 5)$. Знайди координати точки D, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

6. Знайди косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(-3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ -5)$.

7. $ABCD$ — прямокутник, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Вирази вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $M \in BC$ і $BM : MC = 1 : 2$.

8. За якого значення x модуль вектора $\vec{a} = (x + 2;\ 5)$ дорівнює 13?

Додаткове завдання

9. Чи лежать точки M, P і K на одній прямій, якщо $M(-7;\ 8)$, $P(4;\ 1)$, $K(-40;\ 29)$?

Справжній світ — найкращий зі світів.

Г. Лейбніц

Головне в розділі 2

РОЗДІЛ 3

Розв′язування трикутників

Справжній світ — найкращий із світів.

Г. Лейбніц

Розв’язати трикутник — це означає за кількома відомими елементами трикутника визначити інші його елементи. Прямокутні трикутники розв’язують, використовуючи синус, косинус і тангенс гострого кута, а довільні трикутники — за теоремами косинусів і синусів. Такі задачі здавна доводилося розв’язувати багатьом ученим, тому ще в античні часи було створено окрему математичну науку — тригонометрію. Даний розділ — скорочений виклад найважливіших відомостей тригонометрії.

§ 13 Теорема косинусів
The Law of Cosines

§ 14 Теорема синусів
The Law of Sines

§ 15 Розв’язування трикутників
Triangels solving

§ 16 Формули для знаходження площі трикутника
Formulas for finding the area of a triangle

Навчальний проєкт «Знайома і незнайома тригонометрія»
Educational project «Familiar and unfamiliar trigonometry»

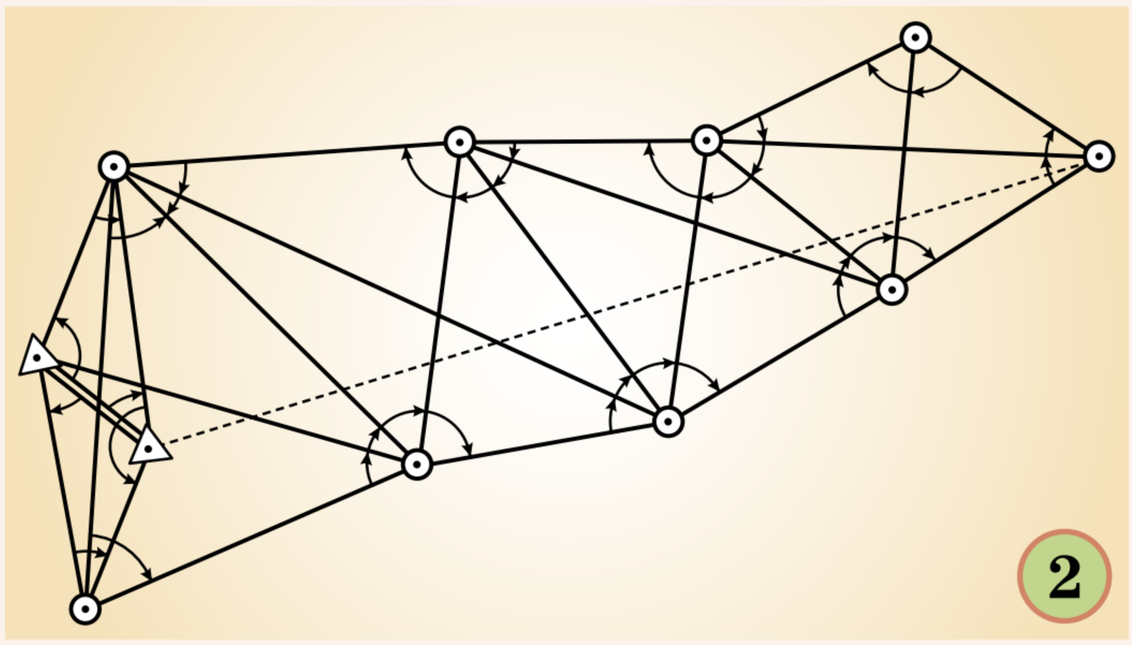


Для чого вивчати тригонометрію?

Тригонометрія, насамперед, потрібна для того, щоб вимірювати відстані між об'єктами та розміри предметів там, куди важко або неможливо дістатися: в космосі[1], в океані, під землею тощо.

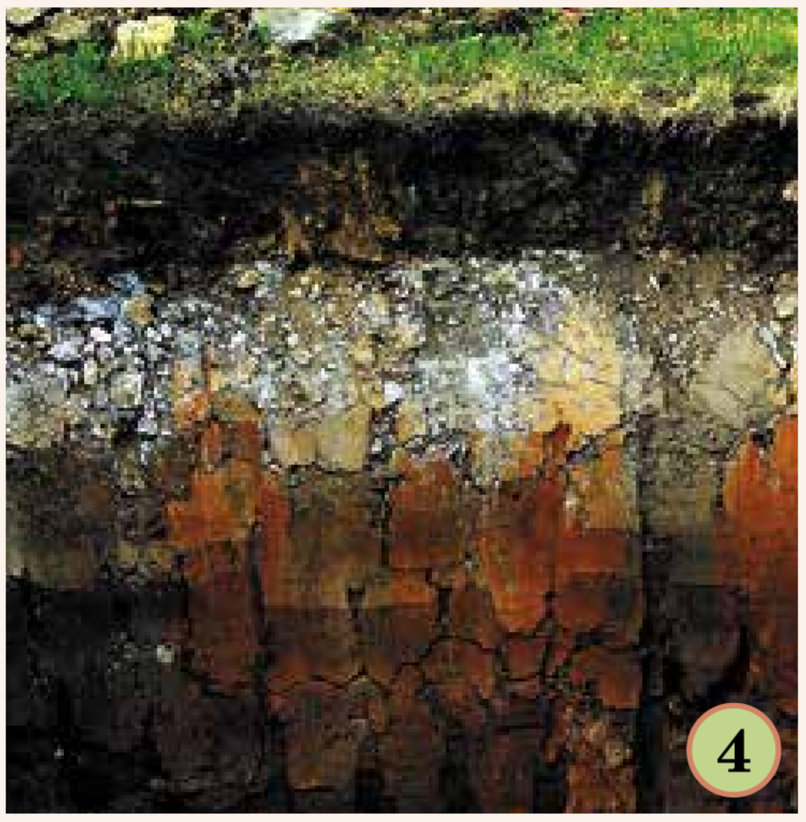

1

Геодезисти, визначаючи положення об'єктів на земній поверхні, використовують геодезичну сітку[2], метод тріангуляції та сучасні геодезичні прилади: електронний тахеометр[3] та GPS-приймач.


2


3

Під землею[4] встановлюють розміри родовища корисних копалин і підземних вод, будують тунелі для транспорту тощо. Перш ніж будувати шахту для видобування вугілля, потрібно знати розміри та кут нахилу пласта. Щоб їх визначити, роблять 3 свердловини у трьох різних місцях і з'ясовують, на якій глибині у кожному місці залягає пласт. На основі цих даних і спеціальних розрахунків, пов'язаних з тригонометричними функціями, встановлюють потрібні дані.


4

Розрахунки на основі тригонометричних функцій використовують у біології (рентгеноструктурний аналіз), медичній візуалізації (комп'ютерна томографія[5] і УЗД).


5

А де ще використовують тригонометрію? Наведи свої приклади.

§ 13 ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

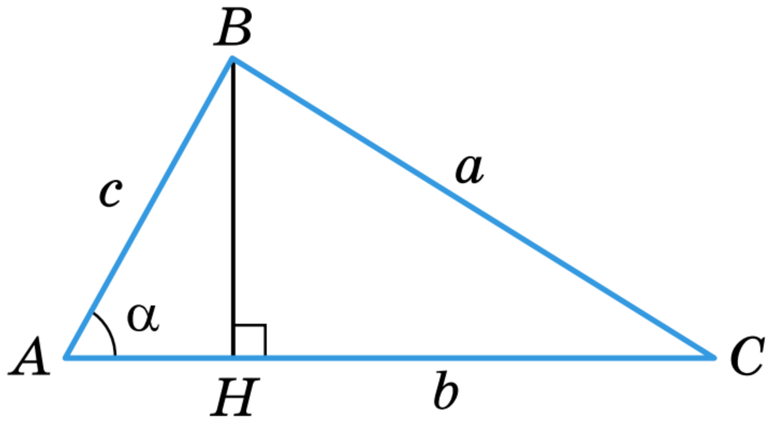
- теорема косинусів — the law of cosines
- властивість діагоналей паралелограма — properties of the diagonals of a parallelogram

Щоб розв'язувати не тільки прямокутні, а і будь-які трикутники, треба знати теореми косинусів і синусів. Для кращого їх розуміння домовимося, що сторони трикутника — це їх довжини, а кути — їх градусні міри. Сторони позначатимемо латинськими буквами a, b і c, а протилежні їм кути (при вершинах A, B, C) — грецькими літерами α, β і γ.

Теорема 7 (теорема косинусів). Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник (мал. 13.1), $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ і $\angle A = \alpha$. Доведемо, що $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Проведемо висоту BH даного трикутника і знайдемо квадрат сторони a за теоремою Піфагора з $\triangle BHC$.

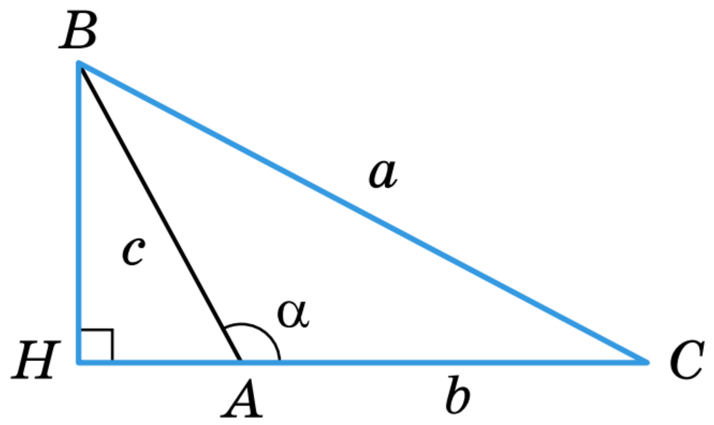


Мал. 13.1

1. Якщо $\alpha < 90°$, то $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, $HC = AC - AH = b - c\cos\alpha$.

Тоді

$a^2 = BH^2 + CH^2 = (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2 =$
$= c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha =$
$= c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc\cos\alpha =$
$= c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$. Випадок, коли $\angle C$ — тупий, розглянь самостійно.



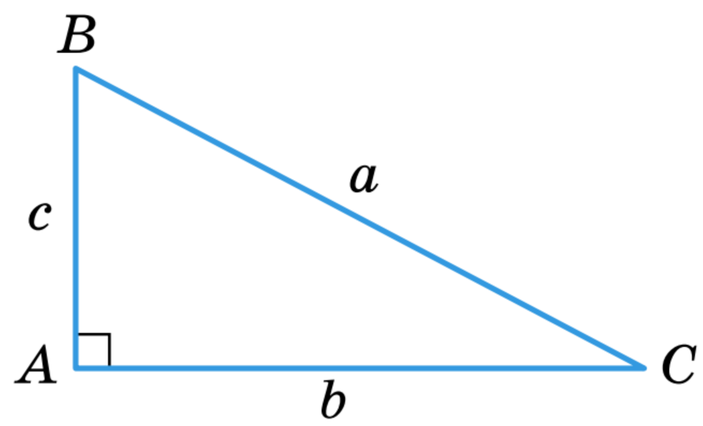
Мал. 13.2

2. Якщо $\alpha > 90°$ (мал. 13.2), то

$BH = c\sin(180° - \alpha) = c\sin\alpha$,
$AH = c\cos(180° - \alpha) = -c\cos\alpha$,
$HC = AC + AH = b + (-c\cos\alpha) = b - c\cos\alpha$.

Як і в першому випадку,

$a^2 = BH^2 + CH^2 = (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2 =$
$= c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$.



Мал. 13.3

3. Якщо $\alpha = 90°$ (мал. 13.3), то $\triangle ABC$ прямокутний і $\cos\alpha = 0$. За теоремою Піфагора $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Отже, яким би не був кут α трикутника ABC завжди

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Зверни увагу!

Теорема Піфагора — окремий випадок теореми косинусів. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Якщо ж $\gamma = 90°$, то $\cos\gamma = 0$ і $c^2 = a^2 + b^2$.

З формули $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ випливає:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ця формула дає можливість за даними сторонами трикутника обчислювати його кути. Взагалі теорема косинусів пов'язує чотири елементи трикутника: три сторони трикутника і кут. Тому за цією теоремою завжди можна знайти один із невідомих елементів, якщо відомі інші три.

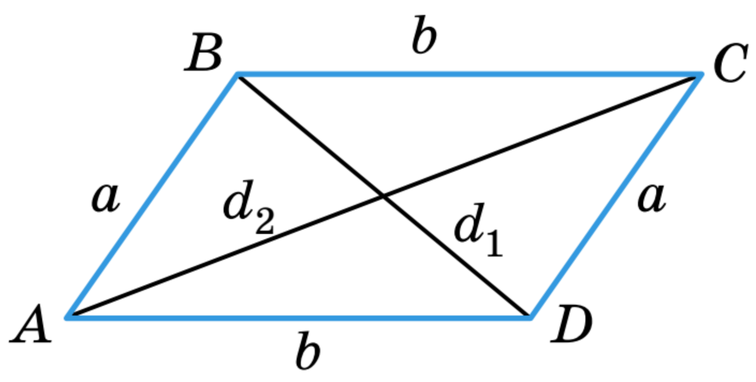
Використовуючи теорему косинусів, доведемо таку теорему.

Теорема 8 (властивість діагоналей паралелограма). Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Доведення. Нехай сторони паралелограма a, b, a і b, а діагоналі — d_1 і d_2 (мал. 13.4). За теоремою косинусів з $\triangle ABD$ і $\triangle ABC$ відповідно маємо:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B.$$



Мал. 13.4

Оскільки $\angle B = 180° - \angle A$, а косинуси таких кутів відрізняються тільки знаками, то $\cos B = -\cos A$. Тому $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos A + 2ab\cos A = 2a^2 + 2b^2$.

А це й треба було довести.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Використовуючи теорему косинусів, можна встановити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), не обчислюючи його кути. Відомо, що прямий чи тупий кут трикутника лежить проти найбільшої його сторони. Нехай у $\triangle ABC$ сторони a, b, c і найбільша з них — a. У цьому випадку кути B і C гострі, а кут A може бути гострим, прямим або тупим. Щоб це з'ясувати, скористаємося формулою

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Якщо $b^2 + c^2 > a^2$, то $\triangle ABC$ — гострокутний. Якщо $b^2 + c^2 = a^2$, то $\triangle ABC$ — прямокутний. Якщо ж $b^2 + c^2 < a^2$, то $\triangle ABC$ — тупокутний. Отже, якщо: $b^2 + c^2 > a^2$, то $\angle A$ гострий; $b^2 + c^2 = a^2$, то $\angle A$ прямий; $b^2 + c^2 < a^2$, то $\angle A$ тупий.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй і доведи теорему косинусів.
2. Покажи, що теорема Піфагора — наслідок теореми косинусів.
3. Як знайти кути трикутника за відомими його сторонами?
4. Чому дорівнює сума квадратів діагоналей паралелограма?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

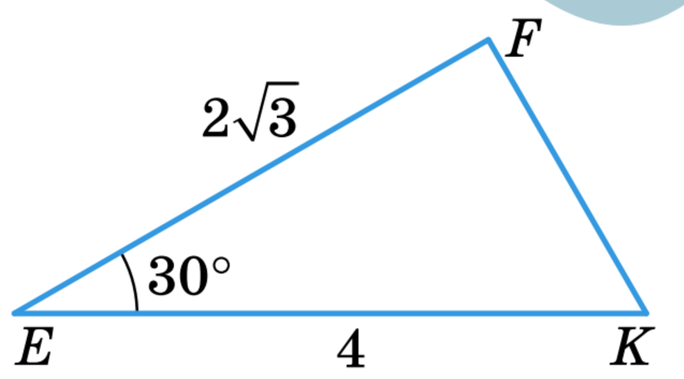


1. Знайди невідому сторону $\triangle EFK$, якщо $EF = 2\sqrt{3}$ см, $EK = 4$ см, $\angle E = 30°$ (мал. 13.5).

- За теоремою косинусів маємо:
  $FK^2 = EF^2 + EK^2 - 2 \cdot EF \cdot EK \cdot \cos 30°$,

  тоді $FK^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

  $= 12 + 16 - 24 = 4$, звідси $FK = 2$ см.



Мал. 13.5

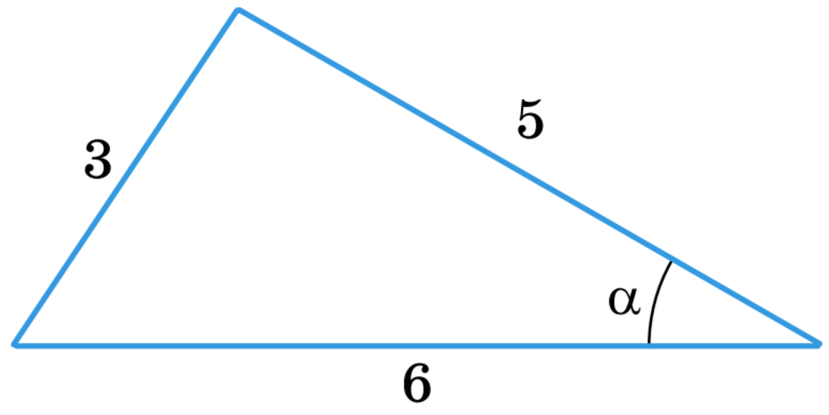
2. Знайди косинус найменшого кута трикутника, сторони якого 3, 5 і 6. Знайди найменший кут.

- Найменший кут α лежить проти найменшої сторони (мал. 13.6).

  Оскільки $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

  то

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 9}{60} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}.$$

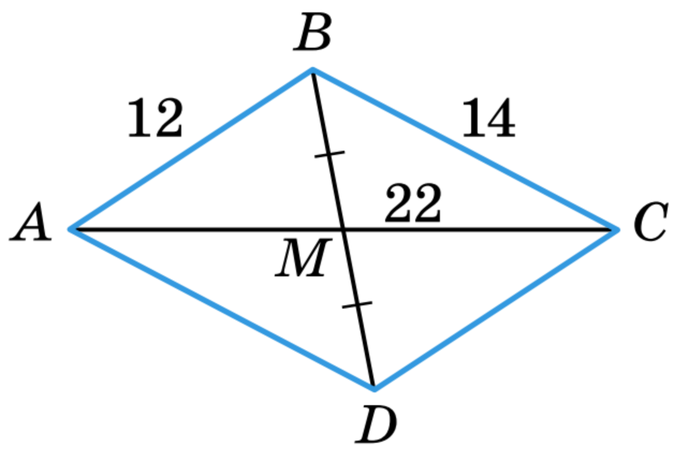


Мал. 13.6

Користуючись калькулятором, знаходимо, що $\alpha \approx 30°$.

3. Знайди довжину медіани трикутника зі сторонами 12 см, 14 см і 22 см, проведену до найбільшої сторони.

- Нехай у $\triangle ABC$ $AB = 12$ см, $BC = 14$ см, $AC = 22$ см, BM — медіана (мал. 13.7).



Мал. 13.7

Продовжимо медіану за точку M на відстань $MD = BM$ і сполучимо точку D з точками A і C. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, бо його діагоналі в точці перетину діляться навпіл. Тоді за властивістю діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, тобто $22^2 + BD^2 = 2(12^2 + 14^2)$, $484 + BD^2 = 2(144 + 196)$, звідки $BD^2 = 2 \cdot 340 - 484 = 196$. Отже, $BD = 14$ см, тоді $BM = 7$ см.

ВИКОНАЄМО УСНО



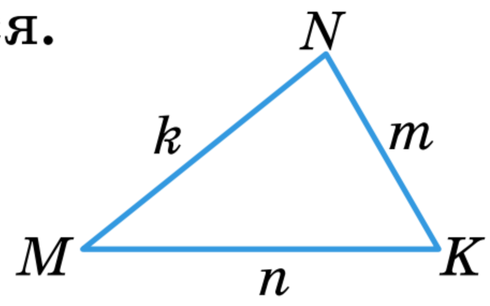
541. Якою буде рівність $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, якщо $\alpha = 90°$?

542. Чому дорівнює кут β в трикутнику ABC, якщо: а) $b^2 = a^2 + c^2$; б) $a = b = c$?

543. Дві сторони трикутника сталі, а кут між ними збільшується. Доведи, що при цьому третя сторона збільшується.

544. За мал. 13.8 укажи хибне твердження.

А $m^2 = k^2 + n^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos M$
Б $k^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos K$
В $m^2 = k^2 + n^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos N$
Г $n^2 = k^2 + m^2 - 2 \cdot k \cdot m \cdot \cos N$



Мал. 13.8

545. Вирази косинус кожного кута $\triangle MNK$ (мал. 13.8).

546. Знайди суму квадратів діагоналей ромба зі стороною a.

А $4a$ **Б** $2a$ **В** $2a^2$ **Г** $4a^2$

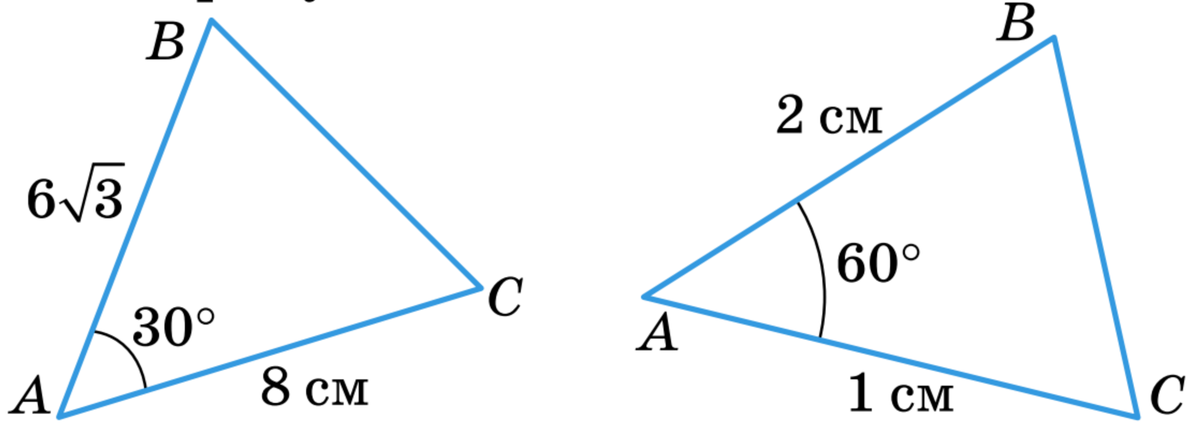
547. Знайди суму квадратів діагоналей прямокутника зі сторонами a і b.

А $2a + 2b$ **Б** $a^2 + b^2$ **В** $2(a^2 + b^2)$ **Г** $2a^2 + b^2$

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



548. Для кожного з малюнків (мал. 13.9) знайди третю сторону.



Мал. 13.9

549. Знайди невідому сторону трикутника ABC, якщо:
а) $AB = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60°$; б) $AB = 4$ см, $BC = 10$ см, $\angle B = 120°$.

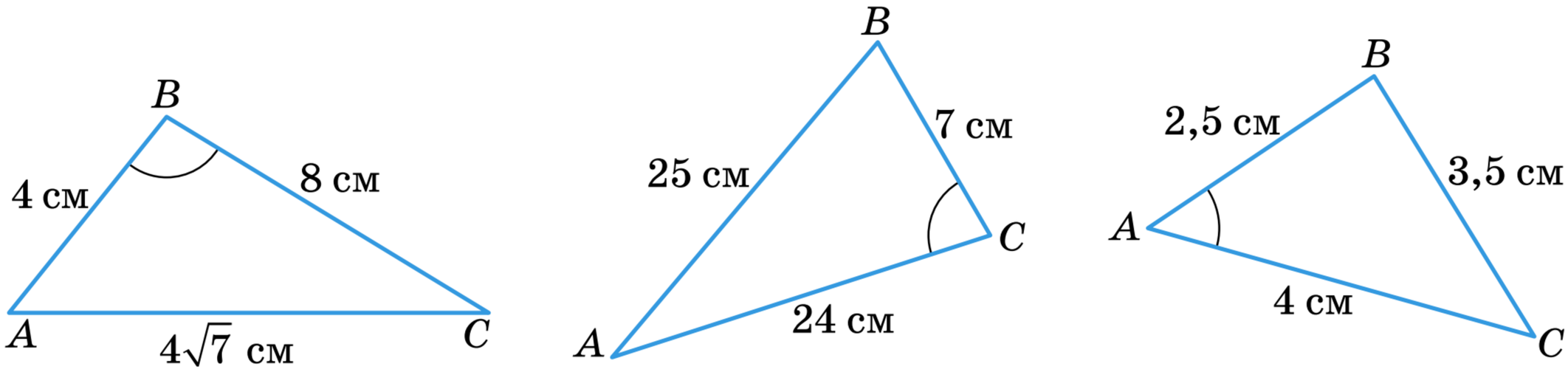
550. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць задає довжину однієї сторони, другий / друга — другої, третій / третя — обирає градусну міру кута між ними (30°, 45° або 60°), а четвертий / четверта — знаходить довжину третьої сторони.

551. Знайди невідому сторону трикутника MNK, якщо:
а) $MN = 4$ см, $NK = 2$ см, $\angle N = 60°$;
б) $MN = 3$ см, $MK = 2\sqrt{2}$ см, $\angle M = 135°$;
в) $NK = 2$ см, $MK = 2\sqrt{3}$ см, $\angle K = 30°$;
г) $MK = 7$ см, $MN = 8$ см, $\angle M = 120°$.

552. ЗНО У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Обчисли довжину медіани, проведеної з вершини C.

А $\sqrt{5}$ см **Б** $\sqrt{14}$ см **В** $2\sqrt{2}$ см **Г** $\sqrt{7}$ см **Д** $\sqrt{17}$ см

553. Для кожного з малюнків (мал. 13.10) знайди позначений кут.



Мал. 13.10

554. Знайди $\angle B$ трикутника ABC, якщо:

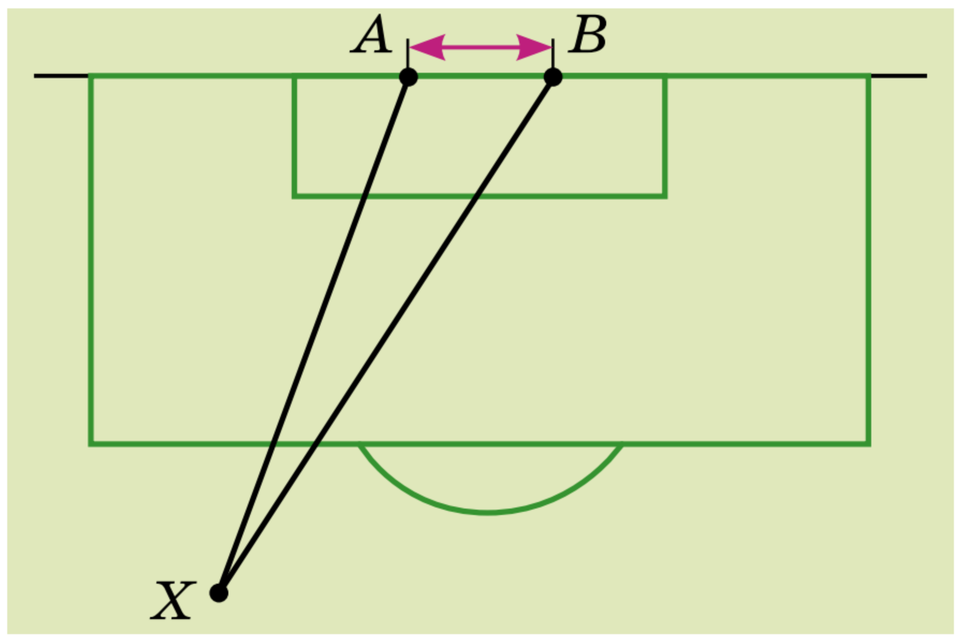
а) $AB = 5$ дм, $BC = 8$ дм, $AC = 7$ дм;

б) $AB = 8$ км, $BC = 7$ км, $AC = 13$ км.

555. Знайди косинуси кутів трикутника зі сторонами:

а) 5 см, 6 см і 7 см; б) 2 см, 4 см і 5 см.

556. Футбольні ворота AB мають ширину 8 ярдів (мал. 13.11). Гравець X забив гол, коли знаходився на відстані 25 ярдів від однієї стійки воріт і 28 ярдів від іншої. Під яким кутом гравець бачить ворота з цього місця?



Мал. 13.11

557. Гострокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами:

а) 3 см, 5 см і 7 см;

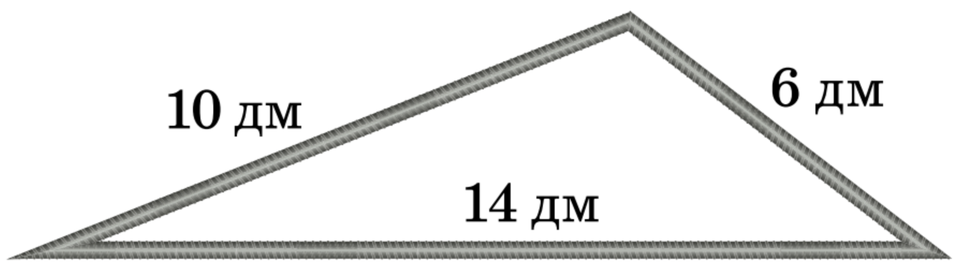
б) 5 см, 7 см і 8 см?

558. Для створення декоративної клумби у формі трикутника використали огорожу довжиною 6 м, 14 м і 16 м. Знайди величину середнього за мірою кута цієї клумби (мал. 13.12).



Мал. 13.12

559. Для ремонту даху будівельник виготовив трикутну металеву деталь для кріплення балок (мал. 13.13). Для цього він взяв три металеві прути довжиною 6 дм, 10 дм і 14 дм, які треба з'єднати між собою у вигляді



Мал. 13.13

трикутника. Знайди, під яким найбільшим кутом сходяться ці прути.

560. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 7 см і $3\sqrt{2}$ см, а гострий кут 45°.

561. Діагоналі паралелограма дорівнюють $8\sqrt{3}$ см і 16 см, а кут між ними 30°. Знайди сторони паралелограма.

562. ЗНО Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а його сторони — 3 см і 4 см. Обчисли довжину меншої діагоналі паралелограма.

А $\sqrt{37}$ см **Б** $\sqrt{31}$ см **В** 5 см **Г** $\sqrt{19}$ см **Д** $\sqrt{13}$ см

563. Сторони паралелограма дорівнюють 13 см і 15 см, а одна з діагоналей дорівнює 14 см. Знайди довжину другої діагоналі.

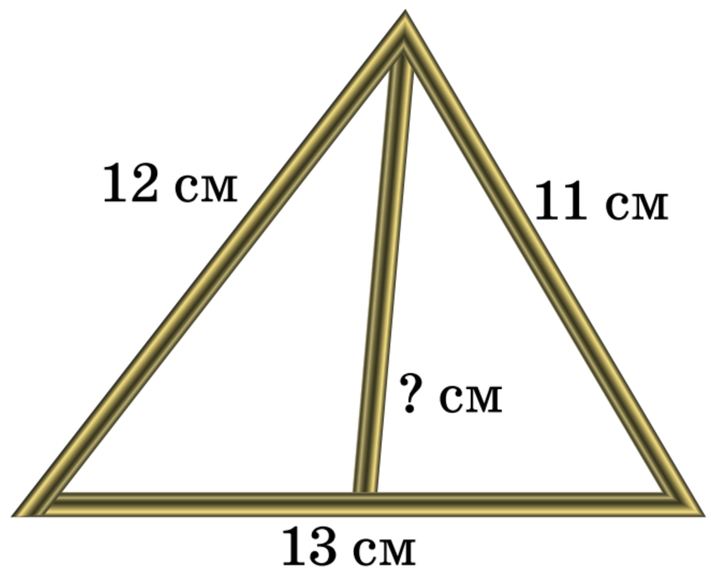
564. The sides of *a* parallelogram are 6 in and 7 in, and the diagonals **are proportional to** the numbers 11 and 7. Find the lengths of the diagonals.

565. Діагоналі паралелограма дорівнюють 4 см і 12 см. Знайди сторони паралелограма, якщо одна з них на 4 см більша за другу.

566. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а його периметр 26 см. Знайди сторони паралелограма.

567. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 16 см і 24 см. Знайди довжину медіани, проведеної до найбільшої сторони.

568. Ювелір виготовляє декоративний металевий трикутний значок зі сторонами 11 см, 12 см і 13 см. Для кріплення значка йому треба додати тонкий стрижень від вершини трикутника до середини найдовшої сторони. Якою має бути довжина цього стрижня (мал. 13.14)?



Мал. 13.14

569. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює $\sqrt{14}$ см. Знайди третю сторону трикутника.

570. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює $\sqrt{19}$ см. Знайди третю сторону трикутника та його найбільший кут.

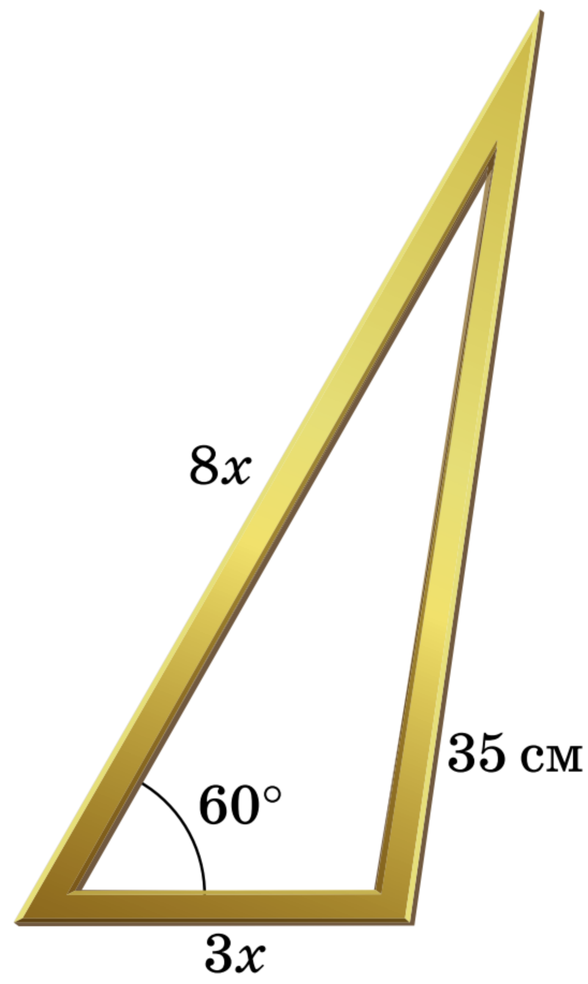
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



571. У $\triangle ABC$ $AB = 6$ см, $AC = 14$ см, $\angle B = 120°$. Знайди BC.

572. Сторони AC і BC трикутника ABC відповідно дорівнюють 9 см і 21 см, а $\angle A = 60°$. Знайди AB.

573. Дизайнер виготовляє трикутну рамку для таблички. Дві сторони рамки пропорційні числам 3 і 8 і утворюють кут 60°. Третя сторона рамки дорівнює 35 см (мал. 13.15). Знайди периметр рамки.



Мал. 13.15

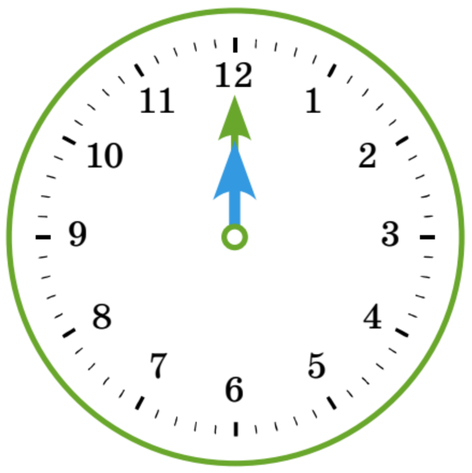
574. Будівельники виготовляють трикутну металеву деталь для кріплення. Відомо, що дві її сторони разом мають довжину 32 см, а кут між ними становить 120°. Третя сторона вже готова і дорівнює 28 см. Якою має бути довжина кожної з двох інших сторін?

575. ЗНО Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайди периметр трикутника.

А 84 см **Б** 72 см **В** 64 см **Г** 60 см **Д** 56 см

576. На малюнку 13.16 зображено непрацюючий годинник, який показує полудень. Довжина хвилинної стрілки цього годинника дорівнює 20 см, а годинної — 17 см. Дитина, граючись, повертає лише хвилинну стрілку. Установіть відповідність між кількістю хвилин (1–4), яку показує за цих умов хвилинна стрілка, і відстанню між кінцями стрілок годинника (А–Д).

1 10 хв	**А** ≈23 см
2 15 хв	**Б** ≈19 см
3 25 хв	**В** ≈36 см
4 5 хв	**Г** ≈26 см
	Д ≈10 см



Мал. 13.16

577. Один із кутів рівнобедреного трикутника з основою $2\sqrt{21}$ см дорівнює 120°. Знайди медіани трикутника.

578. BM — медіана трикутника ABC. Знайди AB, якщо $AC = 16$ см, $BC = 13$ см, $\angle BMC = 120°$.

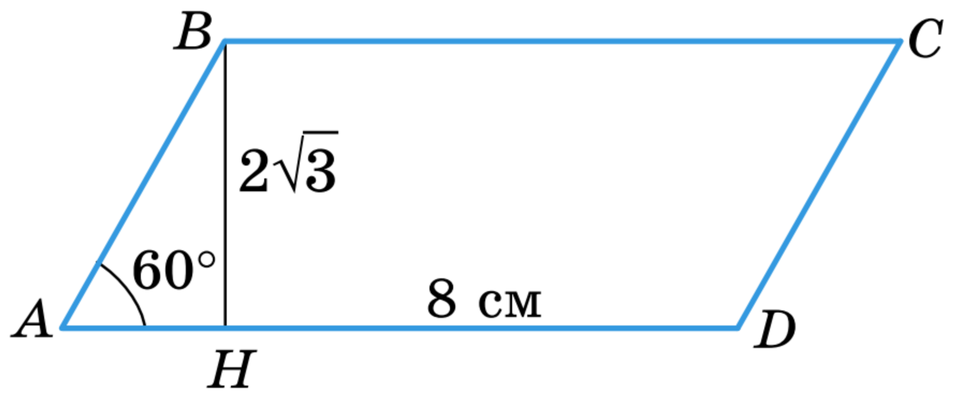
579. Медіана, проведена до сторони трикутника завдовжки 32 см, дорівнює 14 см і утворює з цією стороною кут 60°. Знайди інші сторони трикутника.

580. У трикутнику медіана і сторона, до якої вона проведена, дорівнюють відповідно 10 см і 30 см. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 64 см.

581. ЗНО У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Обчисли довжину медіани, проведеної з вершини C.

А $\sqrt{5}$ см **Б** $\sqrt{14}$ см **В** $2\sqrt{2}$ см **Г** $\sqrt{7}$ см **Д** $\sqrt{17}$ см

582. У паралелограмі $ABCD$ $AD = 8$ см, $\angle A = 60°$, а висота $BH = 2\sqrt{3}$. Знайди діагоналі паралелограма (мал. 13.17).



Мал. 13.17

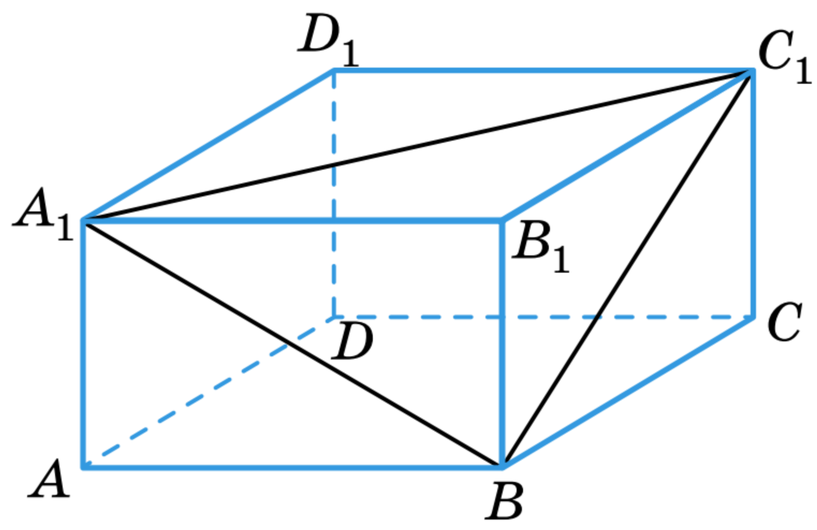
583. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 5 см, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

584. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 11$ см, $BC = 3$ см, $AC = 6$ см, $BD = 10$ см. Знайди: а) кут між діагоналями трапеції; б) косинуси кутів, які утворюють діагоналі з основами трапеції.

585. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $CD = 7$ см, $AD = 12$ см. Знайди кут A трапеції.

586. ***Відкрита задача.*** Вийшовши з автобуса, Тетяна і Михайло поспішили додому. Кожен з них рухався прямолінійно, але під кутом один до одного: Тетяна зі швидкістю 6 км/год, а Михайло зі швидкістю 8 км/год. Знайди відстань між їх будинками, якщо... .

587. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 12$, $BC = 18$, $BB_1 = 6$. Знайди косинус найбільшого кута трикутника A_1BC_1 (мал. 13.18).



Мал. 13.18

588. Доведи, що в паралелограмі проти більшого кута лежить більша діагональ. Чи правильне обернене твердження?

589. Дві сторони трикутника дорівнюють a і b, а кут між ними α. Знайди довжину бісектриси, проведеної з вершини цього кута.

590. BL — бісектриса трикутника ABC. Знайди косинус $\angle ABL$, якщо $AB = a$, $BC = b$, $BL = l$.

591. Доведи, що сума квадратів діагоналей чотирикутника у два рази більша за суму квадратів відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін.

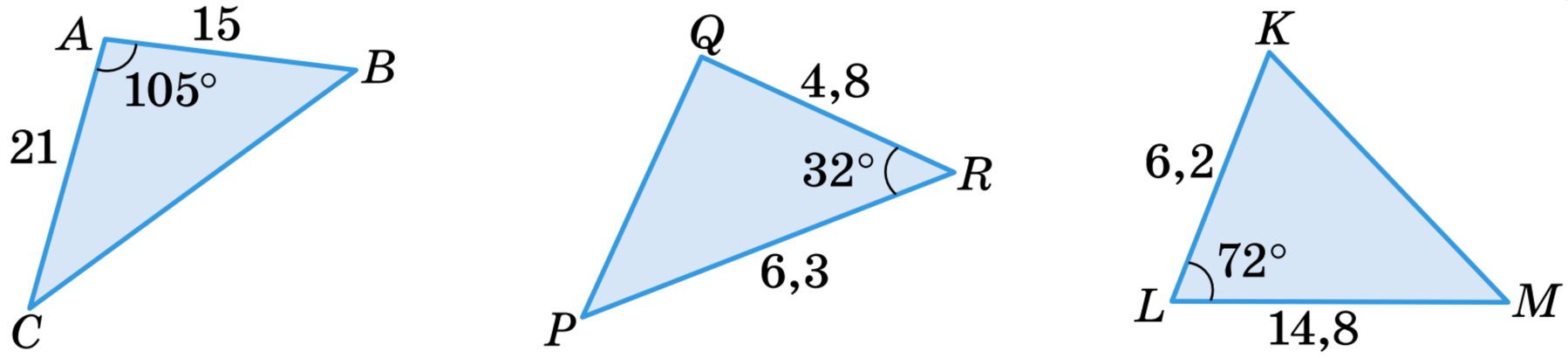
592. Довжина хвилинної стрілки годинника дорівнює 6 см, а годинної — 5,2 см. Годинник показує полудень (мал. 13.16). Через яку найменшу кількість хвилин відстань між кінцями стрілок дорівнюватиме 3,2 см? А 11,2 см?

593. Сторони трикутника — a, b і c. Доведи, що медіана, проведена до сторони a, дорівнює $m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

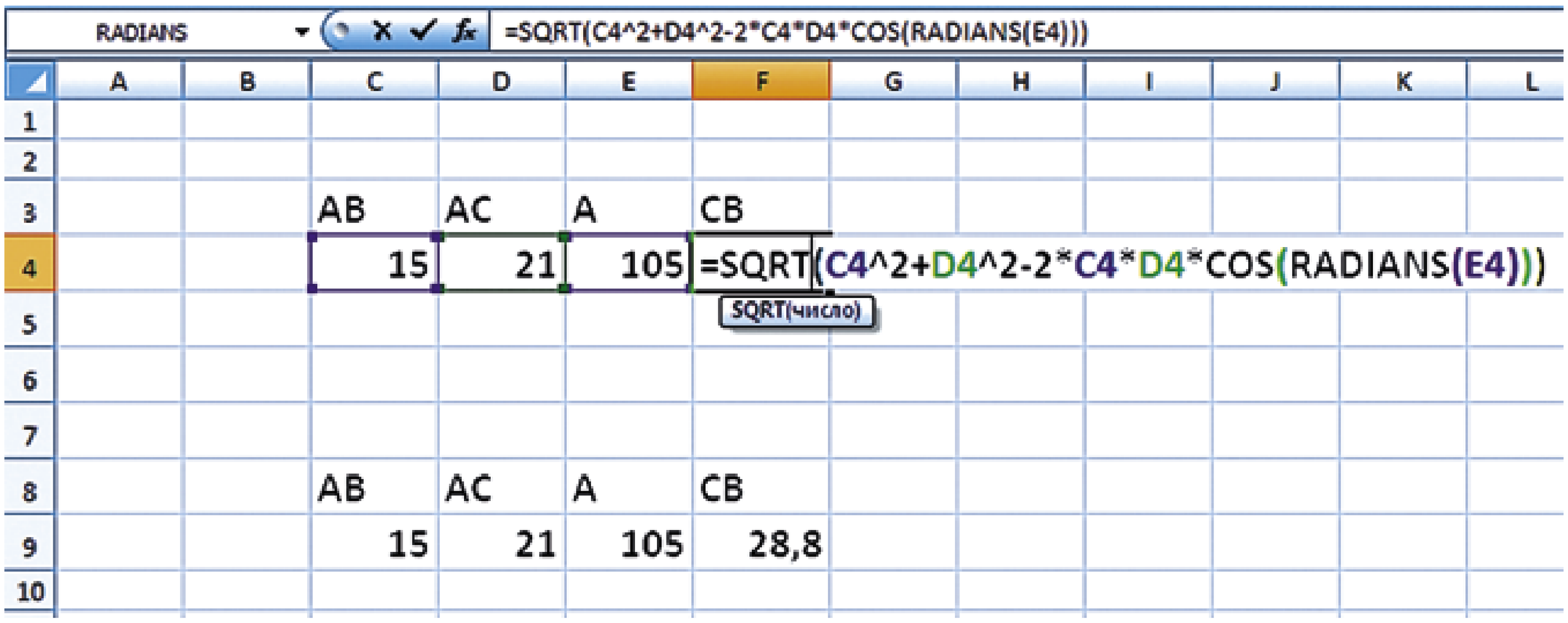
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



594. Знайди невідомі сторони і кути трикутників, зображених на малюнку 13.19, використовуючи програму Excel і зразок, поданий на малюнку 13.20.



Мал. 13.19



Мал. 13.20

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



595. Обчисли:

а) $2\sin 120° + \cos 90° \cdot \sin 135° - \operatorname{tg} 60°$;

б) $\cos 120° - \operatorname{ctg} 60° + \sin 90° \cos 135°$.

596. Спрости вираз:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1$.

597. Дано вектори $\vec{a} = (1;\ -3)$ і $\vec{b} = (7;\ 2)$. Знайди скалярний добуток векторів: а) $(\vec{a} + \vec{b})$ і $(\vec{a} - \vec{b})$; б) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} + 3\vec{a})$.

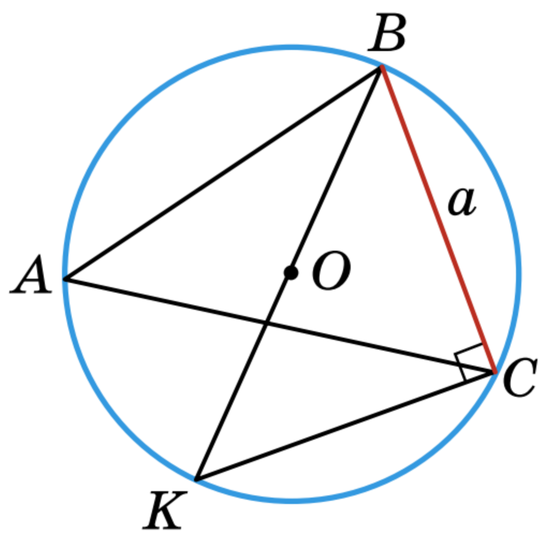
§ 14 ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Теорема 9. Діаметр кола, описаного навколо трикутника, дорівнює відношенню сторони трикутника до синуса протилежного кута.

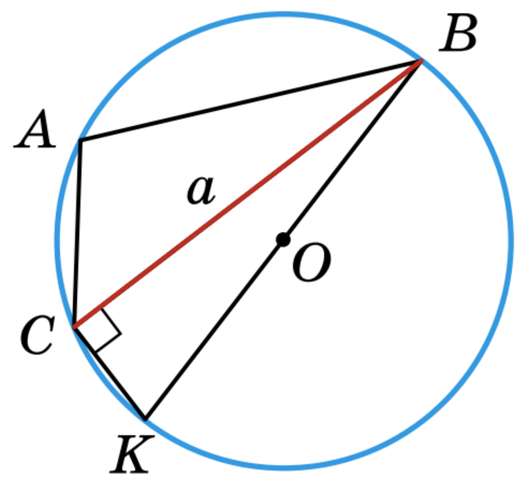
КЛЮЧОВІ СЛОВА

теорема синусів — the law of sines

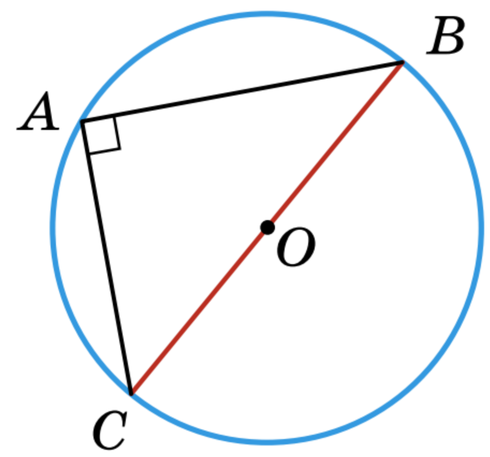
Доведення. Нехай дано гострокутний трикутник ABC, у якого відомі сторона $BC = a$ і протилежний їй кут A (мал. 14.1). Проведемо діаметр BK кола, описаного навколо трикутника, і відрізок KC.



Мал. 14.1



Мал. 14.2



Мал. 14.3

1. Кут BCK прямий, бо вписаний і спирається на діаметр; кути K і A рівні, бо вписані і спираються на одну й ту саму дугу BC. Трикутник BCK прямокутний з гіпотенузою $BK = 2R$. Тому $BC : BK = \sin K$, звідки $a = 2R \sin K = 2R \sin A$.

2. Якщо кут A тупий (мал. 14.2), то $\angle K = 180° - \angle A$. Синуси таких двох кутів рівні: $\sin(180° - \angle A) = \sin A$. Тому і в цьому випадку

$BC = BK \sin K = BK \sin(180° - \angle A) = BK \sin A$, $a = 2R \sin A$.

3. Якщо кут A прямий, то він спирається на діаметр (мал. 14.3), тобто $a = 2R = 2R \sin A$, бо синус прямого кута дорівнює 1.

Отже, завжди $a = 2R \sin A$, звідки $2R = \dfrac{a}{\sin A}$. А це й треба було довести.

Зверни увагу!

Використовуючи цю теорему, можна знаходити радіус кола, описаного навколо довільного трикутника, за формулою $\boldsymbol{R = \dfrac{a}{2 \sin A}}$.

Теорема 10 (синусів). Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

Доведення. З попередньої теореми випливає, що

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

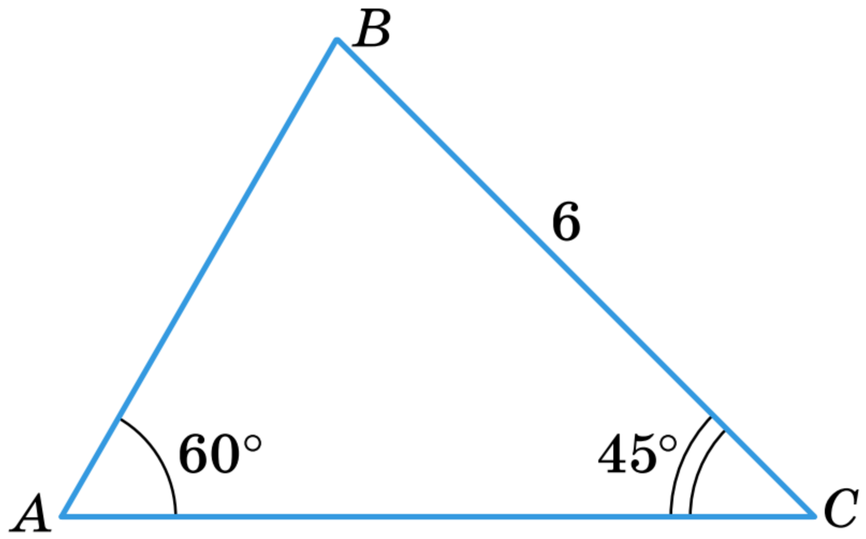
Отже, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

А це й означає, що сторони трикутника a, b, c пропорційні синусам протилежних кутів A, B і C.

Теорему синусів використовують для знаходження невідомих сторін трикутника за відомою стороною і двома кутами, а також для знаходження кутів трикутника, якщо відомі дві сторони і кут, який лежить проти однієї з них.

Приклад. Дано $\triangle ABC$, у якого $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $BC = 6$ см (мал. 14.4). Знайди сторону AB.

Розв'язання. За теоремою синусів $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$. Звідси $AB = \dfrac{BC \cdot \sin C}{\sin A}$.



Мал. 14.4

Тоді

$$AB = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

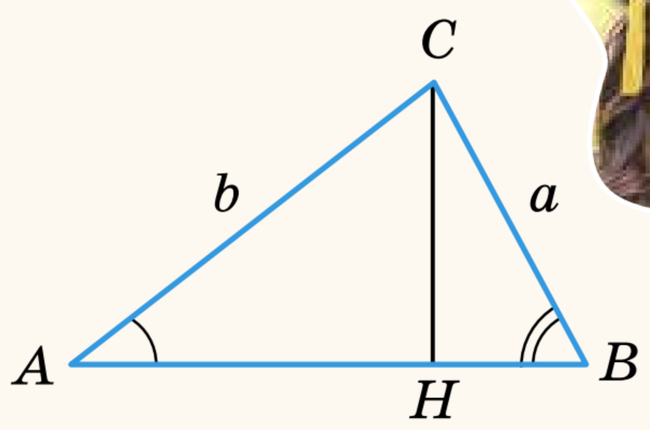
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Теорему синусів можна довести інакше. Наприклад, виразити висоту CH трикутника ABC двома різними способами (мал. 14.5):

$CH = b \sin A$ і $CH = a \sin B$, звідки

$b \sin A = a \sin B$, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ і т. д.

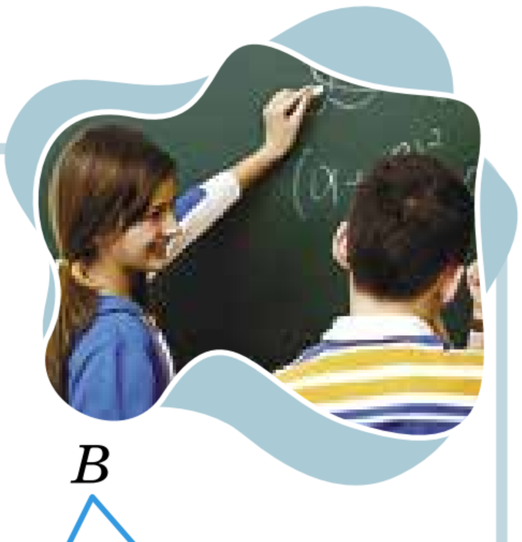


Мал. 14.5

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй теорему синусів.
2. Чому дорівнює відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута?
3. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника?
4. Як знайти сторону трикутника, знаючи радіус описаного кола і протилежний кут?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

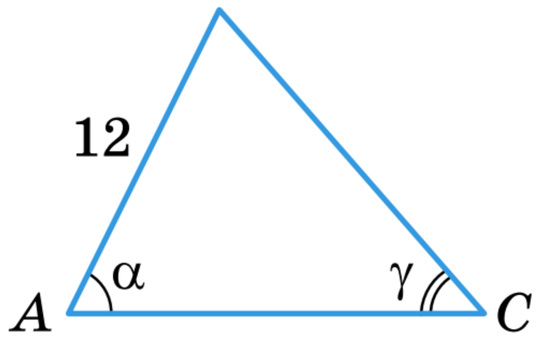


1. Знайди сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 12$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$ (мал. 14.6).

- За теоремою синусів для $\triangle ABC$ маємо:

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha},$$

звідки $BC = \dfrac{AB \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{12\sin\alpha}{\sin\gamma}$.



Мал. 14.6

2. Знайди $\angle B$ трикутника ABC, якщо $\angle A = 45°$, $AC = \sqrt{3}$ см, $BC = \sqrt{2}$ см.

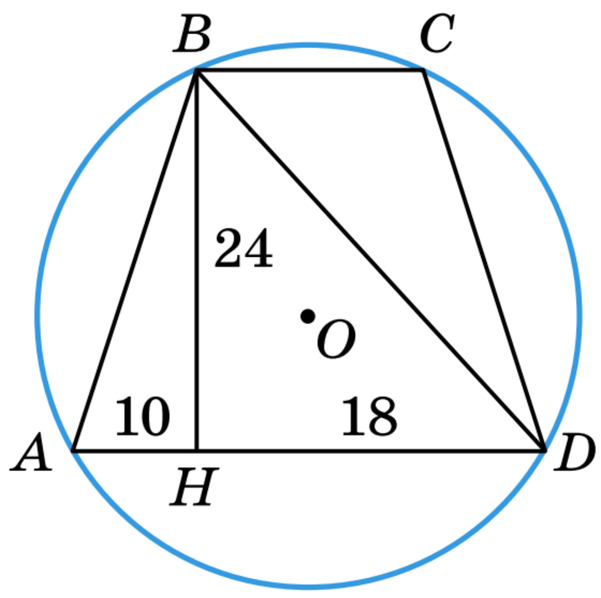
- За теоремою синусів $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A}$, звідси $\sin B = \dfrac{AC \cdot \sin A}{BC}$,

тоді $\sin B = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$. Тоді $\angle B$ може бути як гострим, так і тупим. Отже, $\angle B = 60°$ або $\angle B = 180° - 60° = 120°$.

3. Знайди радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції $ABCD$, висота якої BH дорівнює 24 см і ділить більшу основу на відрізки 10 см і 18 см.

- Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у якої $BH = 24$ см, $AH = 10$ см і $HD = 18$ см (мал. 14.7). Коло, описане навколо трапеції $ABCD$, описане й навколо $\triangle ABD$. Тому знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника. Для цього скористаємося формулою $R = \dfrac{BD}{2\sin A}$.



Мал. 14.7

За теоремою Піфагора з $\triangle ABH$:

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26\,(\text{см}).$$

Отже, $\sin A = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{24}{26} = \dfrac{12}{13}$. За теоремою Піфагора з $\triangle BHD$:

$$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30\,(\text{см}).$$

Тоді $R = \dfrac{BD}{2\sin A} = \dfrac{30 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \dfrac{65}{4} = 16,25$ (см).

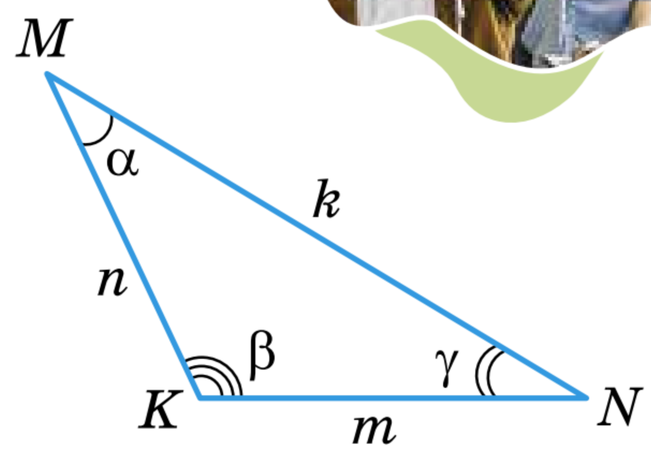
ВИКОНАЄМО УСНО



598. Розглянь малюнок 14.8. Заміни * виразом так, щоб утворилась правильна рівність.

а) $\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{n}{*}$; б) $\frac{*}{\sin\gamma} = \frac{m}{\sin\alpha}$;

в) $\frac{k}{\sin\beta} = \frac{*}{\sin\alpha}$; г) $\frac{m}{*} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.



Мал. 14.8

599. Користуючись малюнком 14.8, укажи хибну рівність.

А $\frac{n}{\sin\gamma} = \frac{m}{\sin\alpha}$ **Б** $\frac{\sin\alpha}{m} = \frac{\sin\beta}{k}$ **В** $\frac{n}{\sin\gamma} = \frac{m}{\sin\alpha}$ **Г** $\frac{n}{\sin\gamma} = \frac{k}{\sin\alpha}$

600. Чи існує трикутник, у якого:

а) $\sin A = 0{,}4$; $\sin B = 0{,}8$; $\sin C = 0{,}3$;

б) $\sin A = \frac{1}{2}$; $\sin B = \frac{1}{3}$; $\sin C = \frac{1}{4}$;

в) $\sin A = 0{,}4$; $\sin B = 0{,}6$; $\sin C = 0{,}2$?

601. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною a?

А $\frac{1}{2}a$ **Б** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **В** $\frac{a}{\sqrt{3}}$ **Г** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$

602. Чому дорівнює діаметр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою a і кутом при вершині 120°?

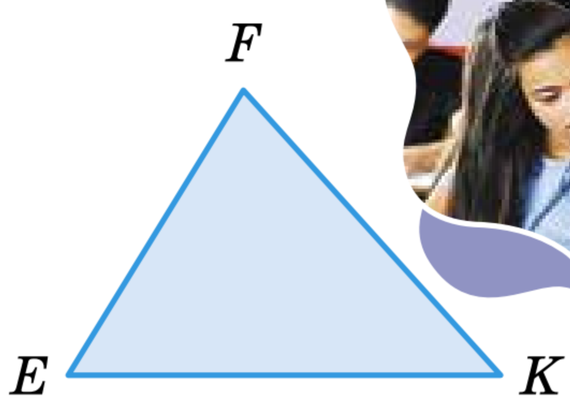
А $2a$ **Б** a **В** $\frac{a}{\sqrt{3}}$ **Г** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



603. Виразіть за теоремою синусів кожну сторону трикутника EFK (мал. 14.9).

604. Користуючись малюнком 14.9 і теоремою синусів, виразіть синуси кутів E, F і K трикутника EFK.



Мал. 14.9

605. Знайди сторону AB трикутника ABC, якщо:

а) $BC = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$; б) $AC = 9$ см, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$;

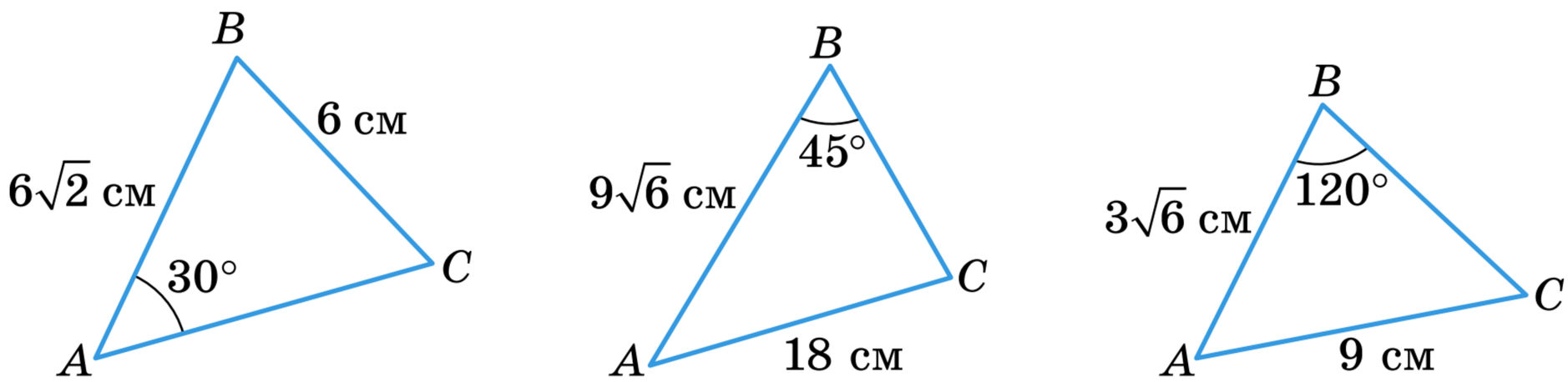
в) $BC = 16$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 105°$.

606. Знайди сторону AC трикутника ABC, якщо:

а) $AB = 20$ см, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$; б) $BC = 15$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$;

в) $AB = 18$ см, $\angle A = 105°$, $\angle C = 30°$.

607. Знайдіть гострий кут C трикутника ABC (мал. 14.10).



Мал. 14.10

608. Знайди гострий кут A трикутника ABC, якщо:

а) $AB = 6$ см, $BC = 3\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45°$;

б) $AC = 12$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle B = 60°$.

609. Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює зі сторонами кути α і β. Знайди сторони паралелограма.

610. У $\triangle ABC$ відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AC = m$. Знайди сторони AB і BC.

611. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а кут при вершині дорівнює 150°. Знайди радіус описаного кола.

612. The base of an isosceles triangle is 12 cm, and the angle **at the base** is 30°. Find the radius of the circumscribed circle.

613. Знайди радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з діагоналлю 10 см і гострим кутом 45°.

614. Знайди радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з діагоналлю $12\sqrt{3}$ см і тупим кутом 120°.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



615. Знайдіть $\angle A$ і $\angle B$ трикутника ABC, якщо $AB = 12$ см, $BC = 6\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45°$. Скільки розв'язків має задача?

616. У трикутнику MNK $MN = 3$ см, $MK = \sqrt{3}$ см, $\angle N = 30°$. Знайди невідомі кути. Скільки розв'язків має задача?

617. Чи існує трикутник ABC, у якого $AB = 15$ см, $BC = 8$ см, $\sin\angle A = 0{,}6$?

618. Знайди радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см.

619. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 9 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 3 см. Знайди радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

620. Архітектор проєктує вітраж у формі рівнобічної трапеції. Її основи становлять 5 дм і 13 дм, а висота — 12 дм. Для кріплення вітражу потрібно виготовити металеву оправу у вигляді кола, що описане навколо цієї трапеції. Знайди радіус цього кола.

621. Майстер виготовляє декоративну стільницю у формі рівнобічної трапеції з бічною стороною 15 дм. У центрі стільниці він планує вставити кругле скло радіусом 6 дм так, щоб воно було вписаним у трапецію. Знайди радіус кола, яке можна описати навколо цієї стільниці, щоб дібрати круглу картонну упаковку для транспортування.

622. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при вершині — α. Знайди радіус описаного кола.

623. ЗНО У прямокутній системі координат на площині xy навколо трикутника ABC описано коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 - 4x = 68$. Визнач довжину сторони BC, якщо $\angle A = 45°$.

624. Кути трикутника дорівнюють α і β. Знайдіть висоту, проведену з вершини третього кута, якщо радіус описаного кола дорівнює R.

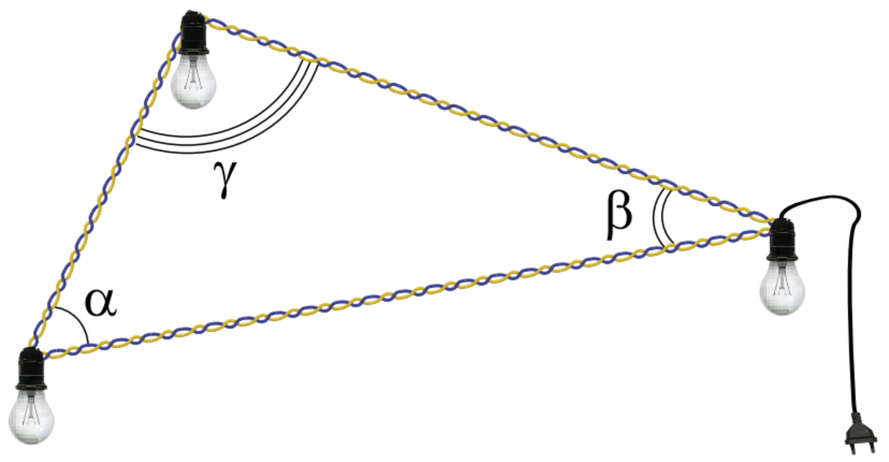
625. Знайди кути трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і $2\sqrt{6}$ см, якщо радіус описаного кола дорівнює $2\sqrt{3}$. Скільки розв'язків має задача?

626. На катеті BC трикутника ABC ($\angle C = 90°$) взято точку K так, що $BK = a$, $\angle KAB = \alpha$, $\angle AKB = \beta$. Знайди сторони трикутника ABC.

627. На продовженні катета AC за точку A у трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) взято точку M так, що $AM = m$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CMB = \beta$. Знайди сторони трикутника ABC.

628. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює d і утворює з більшою основою кут α, а з бічною стороною — кут β. Знайди сторони трапеції.

629. Дизайнерка інтер'єру створює світильник з основою у формі трикутника з кутами α, β і γ (мал. 14.11). Загальна довжина основи дорівнює P см. Знайди довжини сторін основи.

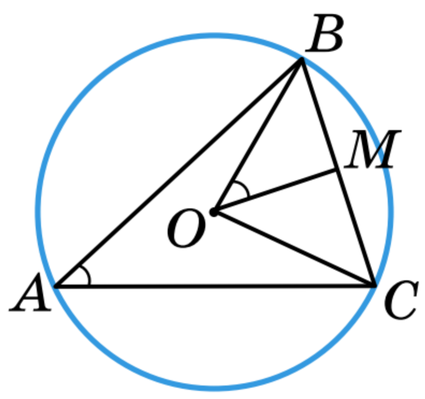


Мал. 14.11

630. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) через середину висоти BH проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Знайди BH, якщо $MN = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BMN = \beta$.

631. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а гострі кути при основі — α і β. Знайди бічні сторони трапеції.

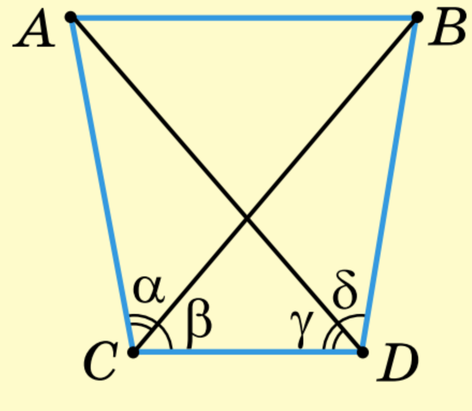
632. Доведи теорему 9, користуючись малюнком 14.12.



Мал. 14.12

633. Як знайти відстань між пунктами A і B (мал. 14.13), якщо виміряли відстань CD і кути α, β, γ, δ (дельта).

634. Як, знаючи відстань $AB = l$ і кути α, β, γ, δ, показані на малюнку 14.13, визначити відстань CD?



Мал. 14.13

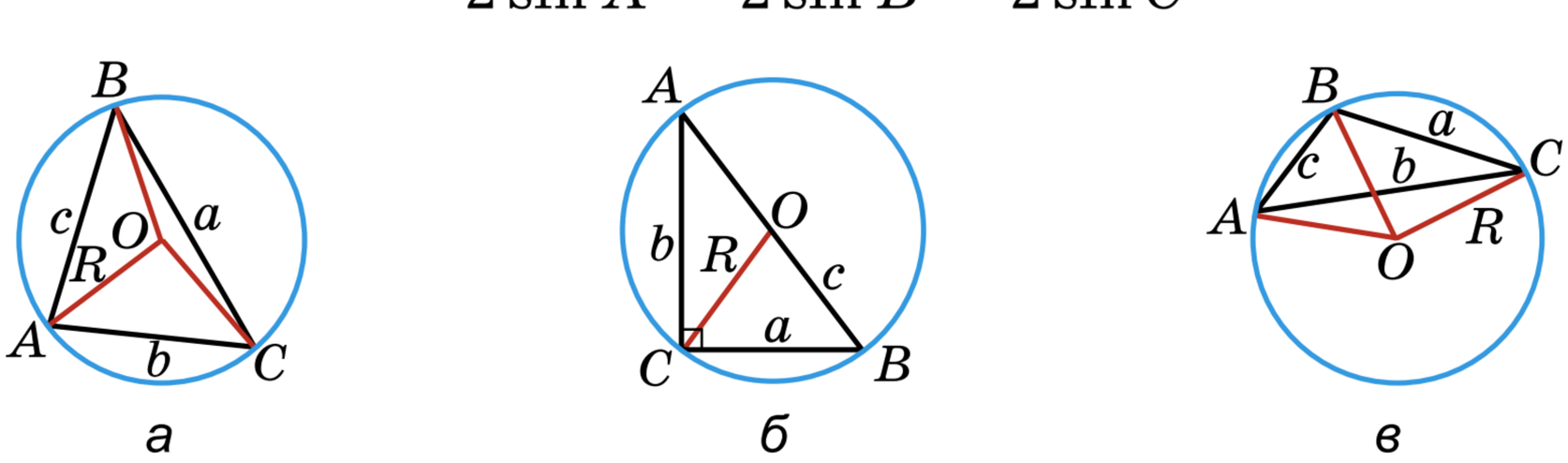
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



635. Літак має летіти на схід від одного міста до іншого зі швидкістю 400 км/год. Однак постійно дме північно-східний вітер зі швидкістю 50 км/год. У якому напрямі повинен рухатися літак і з якою швидкістю, щоб вчасно прибути у пункт призначення?

636. На малюнку 14.14 зображено три кола, у кожне з яких вписано трикутник. Виміряй довжини сторін і міри кутів кожного трикутника. Перевір правильність твердження:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}.$$



а б в

Мал. 14.14

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



637. Знайди: а) косинус найбільшого кута трикутника зі сторонами 3 см, 5 см і 6 см. Установи вид даного трикутника; б) сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 10$ см, $AC = 14$ см, $\angle B = 60°$. Установи вид даного трикутника.

638. ***Задача Брахмагупти.*** Добуток довжин двох сторін трикутника, поділений на довжину перпендикуляра, опущеного на третю сторону з протилежної вершини трикутника, дорівнює довжині діаметра описаного кола. Доведи.

639. Знайди висоти паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 6 см і 9 см та утворюють кут 30°.

§ 15 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

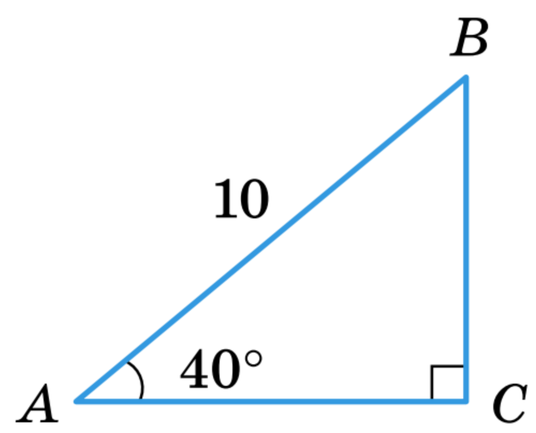
КЛЮЧОВІ СЛОВА

розв'язати трикутник — solve the triangle

Розв'язати трикутник — це означає знайти невідомі його сторони і кути за кількома відомими сторонами і кутами. Пригадаємо, як розв'язувати прямокутні трикутники.

Задача. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10, а один із гострих кутів — 40°. Знайди інші сторони і кути трикутника.

Розв'язання. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$, $AB = 10$ (мал. 15.1).

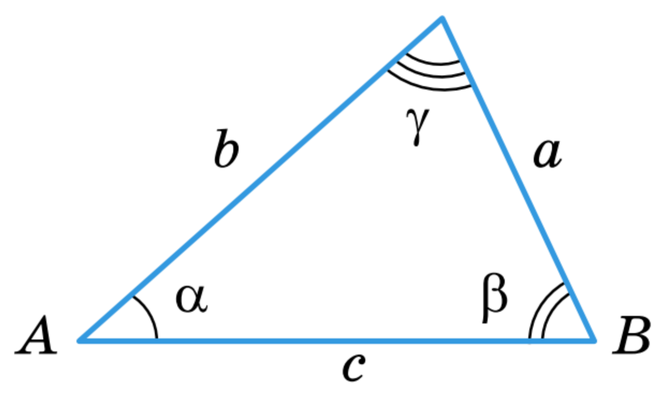


Мал. 15.1

Тоді $\angle B = 90° - 40° = 50°$, $BC = 10\sin 40° \approx$ $\approx 10 \cdot 0{,}643 \approx 6{,}43$; $AC = 10\cos 40° \approx 10 \cdot 0{,}766 \approx 7{,}66$.

Відповідь. $\angle B = 50°$, $BC \approx 6{,}43$, $AC \approx 7{,}66$.

Теореми синусів і косинусів дають можливість розв'язати будь-який трикутник (мал. 15.2) за трьома його даними елементами (крім трьох кутів). Існують чотири види основних задач на розв'язування трикутників:

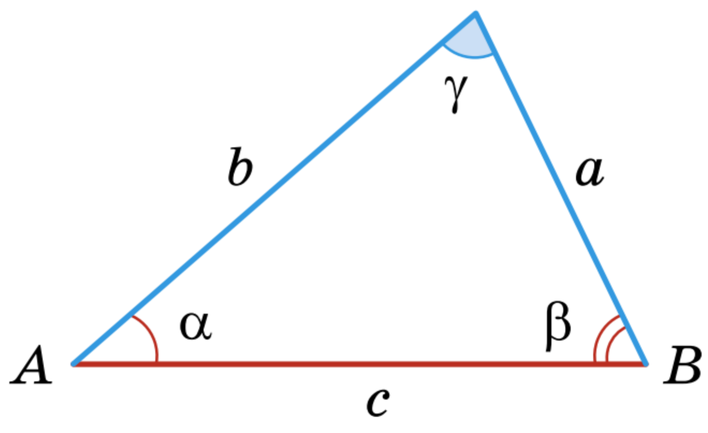


Мал. 15.2

1) за двома сторонами і кутом між ними;
2) за стороною і двома прилеглими кутами;
3) за трьома сторонами;
4) за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них.

Розглянемо кожен із цих випадків.

1. Якщо дано дві сторони і кут між ними, то за теоремою косинусів знаходять третю сторону, а за теоремою синусів — невідомі кути.



Мал. 15.3

Дано: a, b, γ. Потрібно знайти c, α і β (мал. 15.3).

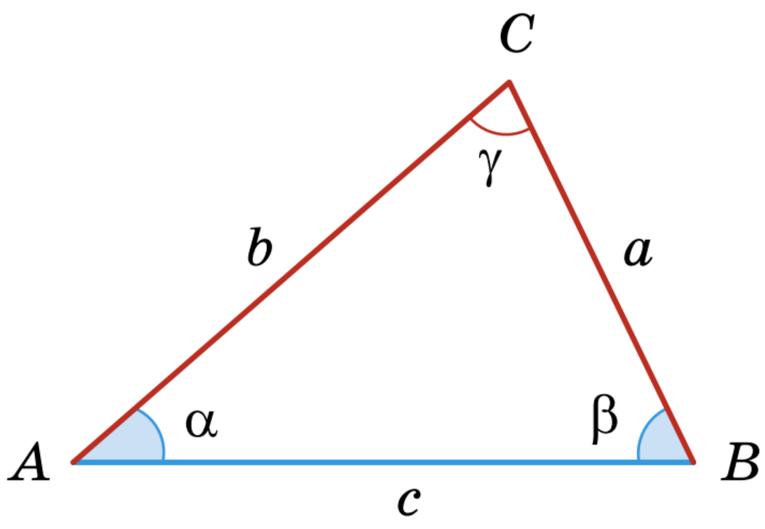
Розв'язання. Сторону c знаходимо за теоремою косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Один із невідомих кутів (не той, що лежить проти більшої сторони) зручніше визначати за теоремою синусів:

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}, \text{ тоді } \beta = 180° - (\alpha + \gamma).$$

Якщо ж потрібно першим визначити найбільший кут трикутника, то краще користуватися не теоремою синусів, а теоремою косинусів, бо знак косинуса відразу вкаже на те, тупий кут чи гострий, а за значенням синуса цього зробити не можна.

2. Якщо дано сторону і прилеглі до неї кути, то спочатку знаходять третій кут трикутника, а потім за теоремою синусів — сторони.



Мал. 15.4

Дано: c, α і β. Потрібно знайти γ, a, b (мал. 15.4).

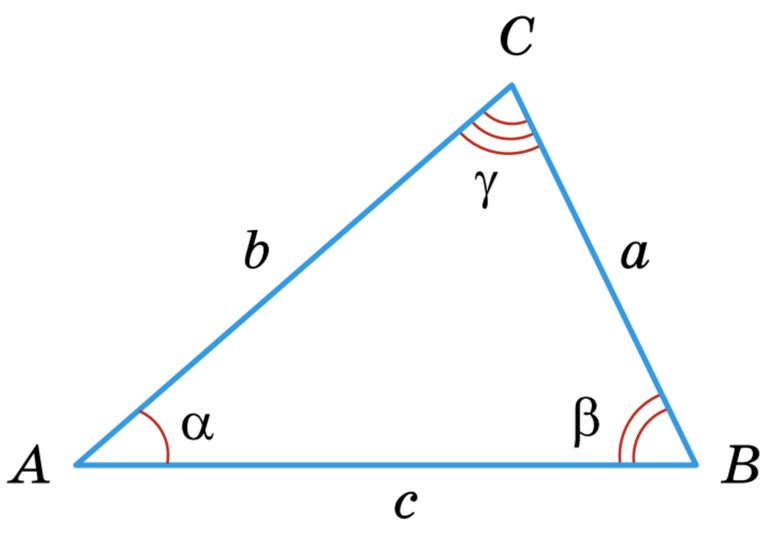
Розв'язання. $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Сторони знаходимо за теоремою синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \text{ звідки } a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

$$\text{Аналогічно } b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

3. Якщо дано три сторони, то один із кутів (краще найбільший) знаходять за теоремою косинусів, другий — за теоремою синусів або теоремою косинусів.



Мал. 15.5

Дано: a, b, c ($a \leqslant b \leqslant c$). Потрібно знайти α, β і γ (мал. 15.5).

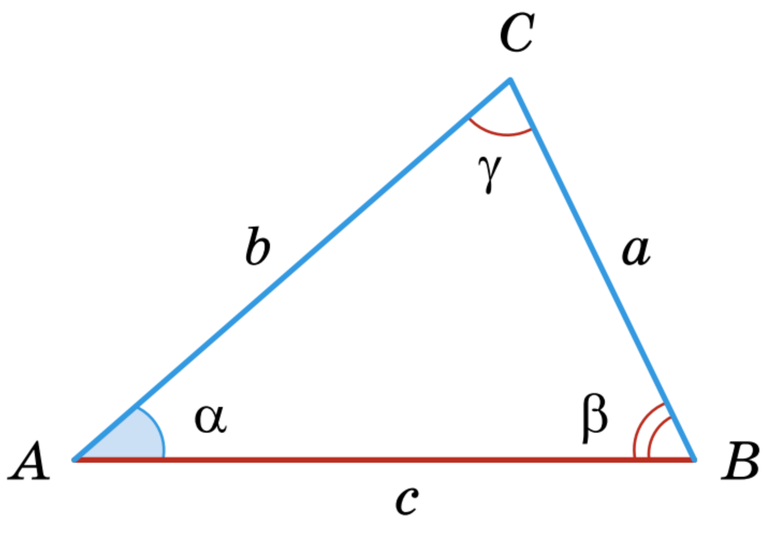
Розв'язання. Один із кутів визначаємо за теоремою косинусів (краще першим визначати найбільший кут, щоб знати, тупий він чи гострий):

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Другий із кутів визначаємо за теоремою синусів або косинусів:

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c} \text{ або } \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \text{ Тоді } \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma).$$

4. Якщо дано дві сторони і кут навпроти однієї з них, то за теоремою синусів знаходять спочатку кут, протилежний другій даній стороні. Таких кутів може бути два (якщо один α, то другий $180^\circ - \alpha$).



Мал. 15.6

Дано: a, b, α. Потрібно знайти c, β і γ (мал. 15.6).

Розв'язання. За теоремою синусів знаходимо кут β: $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$.

Потрібно пам'ятати, що даному значенню $\sin\beta$ будуть відповідати два кути: β і $180^\circ - \beta$. Тому задача може мати два розв'язки, і потрібно розглядати два випадки: коли кут β — гострий і коли він тупий.

Далі знаходимо кут γ: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

За теоремою синусів знаходимо c: $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$.

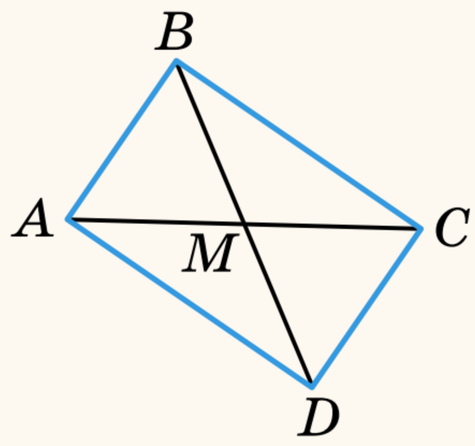


ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Іноді розв'язування трикутників розуміють ширше: серед даних можуть бути не тільки сторони і кути трикутника, а й деякі інші його елементи — медіани, бісектриси, висоти тощо.

Задача. Дві сторони і медіана трикутника, які виходять з однієї вершини, дорівнюють відповідно 10, 24 і 13. Знайди третю сторону і кути трикутника.

Розв'язання. Нехай BM — медіана трикутника ABC (мал. 15.7). Відкладемо на прямій BM відрізок MD так, щоб $MD = BM$, і сполучимо точку D з точками C і A. Оскільки $AM = MC$ (за умовою) і $BM = MD$ (за побудовою), то $ABCD$ — паралелограм. Тоді за властивістю діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Можемо знайти AC.



Мал. 15.7

$AC^2 = 2(10^2 + 24^2) - 26^2 = 2 \cdot 676 - 676 = 676$, звідки $AC = 26$.

За теоремою косинусів з трикутника ABC:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{24^2 + 10^2 - 26^2}{2 \cdot 24 \cdot 10} = 0.$$ Отже, $\angle B = 90^\circ$.

Тоді $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{10}{26} \approx 0,385$. $\angle A \approx 67^\circ$. $\angle C = 90^\circ - 67^\circ \approx 23^\circ$.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Розв'язування трикутників. Урок 2).



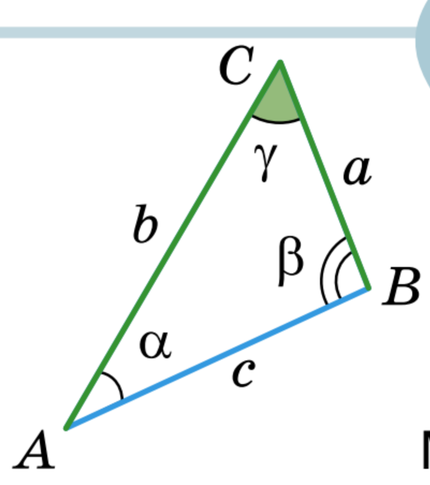
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй теорему:
   а) синусів; б) косинусів.
2. Як розв'язують трикутники:
   а) за двома сторонами і кутом між ними;
   б) за стороною і двома прилеглими кутами;
   в) за трьома сторонами?

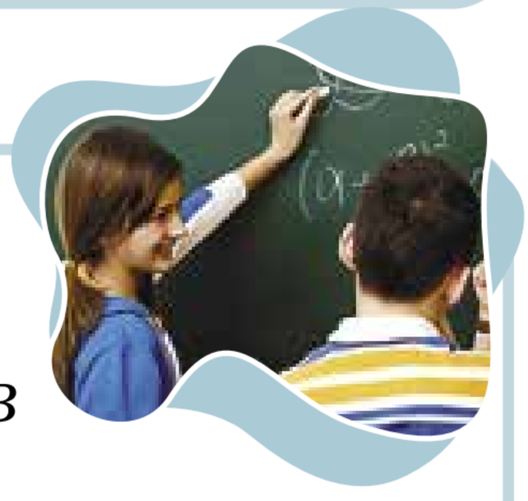
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Розв'яжи трикутник за двома даними сторонами $a = 39,7$, $b = 73,2$ і кутом між ними $\gamma = 46,5^\circ$ (мал. 15.8).

- За теоремою косинусів



Мал. 15.8



$$c = \sqrt{39,7^2 + 73,2^2 - 2 \cdot 39,7 \cdot 73,2 \cdot \cos 46,5^\circ} \approx 54,2.$$

За теоремою синусів $\frac{39,7}{\sin\alpha} = \frac{54,2}{\sin 46,5^\circ}$, звідки

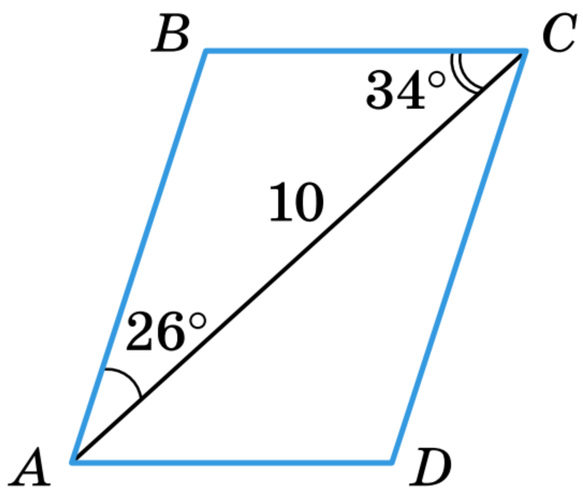
$\sin\alpha = \frac{39,7 \cdot \sin 46,5^\circ}{54,2} \approx 0,531$. Тоді $\alpha \approx 32,1^\circ$,

$\beta = 180^\circ - 46,5^\circ - 32,1^\circ \approx 101,4^\circ$.

Отже, $c \approx 54,2$, $\alpha \approx 32,1^\circ$, $\beta \approx 101,4^\circ$.

2. Діагональ паралелограма дорівнює 10 і утворює зі сторонами кути 26° і 34°. Знайди сторони паралелограма.

- Нехай $ABCD$ — паралелограм (мал. 15.9), у якого $AC = 10$, $\angle BAC = 26^\circ$, $\angle BCA = 34^\circ$.



Мал. 15.9

Тоді $\angle B = 180^\circ - (26^\circ + 34^\circ) = 120^\circ$. За теоремою синусів з $\triangle ABC$ знайдемо сторони AB і BC. $\frac{AB}{\sin 34^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}$.

Звідси $AB = \frac{AC \cdot \sin 34^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{10 \cdot 0,559}{0,866} \approx 6,5$. $\frac{BC}{\sin 26^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}$.

Звідси $BC = \frac{AC \cdot \sin 26^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{10 \cdot 0,438}{0,866} \approx 5,1$.

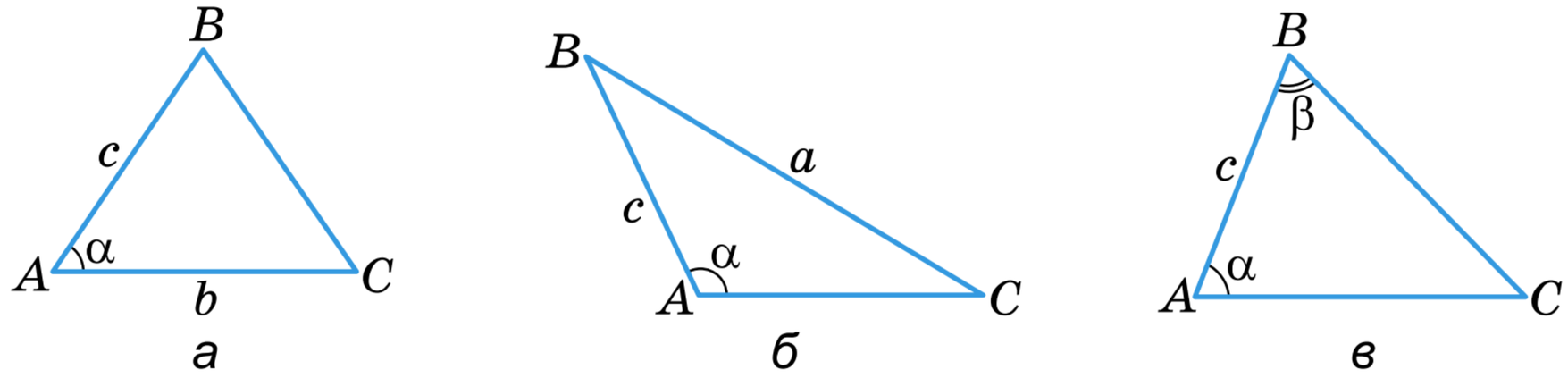
Отже, $AB = 6,5$, $BC = 5,1$.

ВИКОНАЄМО УСНО



640. Як розв'язують трикутники за двома сторонами і кутом проти однієї з них? Скільки розв'язків може мати ця задача?

641. Користуючись малюнком 15.10, розкажи, як знайти невідомі елементи трикутника для кожного випадку а), б) і в).

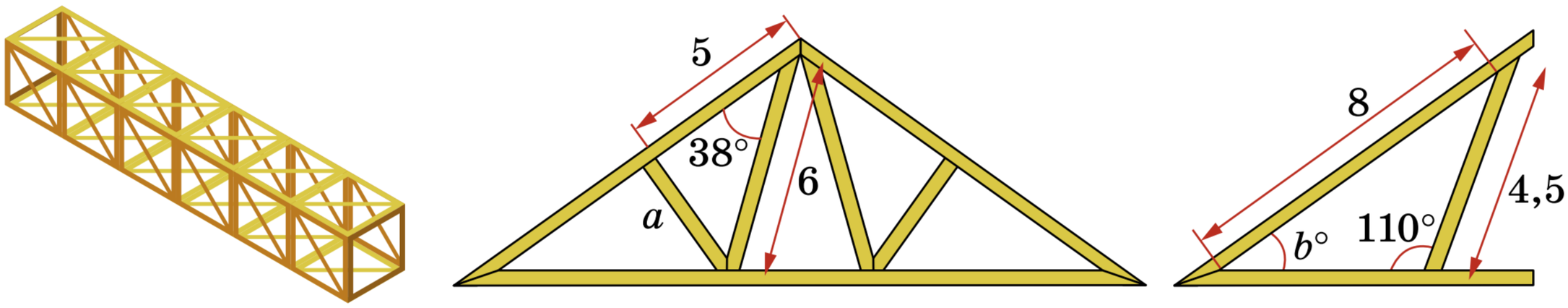


Мал. 15.10

642. Як знайти кути ромба, сторона якого дорівнює a, а менша діагональ d?

643. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць задає, які три елементи відомі в трикутнику, а другий / друга пояснює, як можна розв'язати цей трикутник.

644. **Як ти думаєш, чи використовують інженери теореми синусів і косинусів (мал. 15.11)? Де саме?**



Мал. 15.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Розв'яжи трикутник за двома даними сторонами і кутом між ними (646, 647).

645. а) $b = 22$, $c = 26$, $\alpha = 78°$; б) $a = 10$, $b = 5$, $\gamma = 102°$.

646. а) $a = 0{,}8$, $c = 0{,}6$, $\beta = 50°$;
б) $a = 49{,}3$, $b = 26{,}4$, $\gamma = 47{,}3°$.

Розв'яжи трикутник за даною стороною і прилеглими кутами (647, 648).

647. а) $a = 32$, $\beta = 36°$, $\gamma = 42°$; б) $b = 20$, $\alpha = 31°$, $\gamma = 124°$.

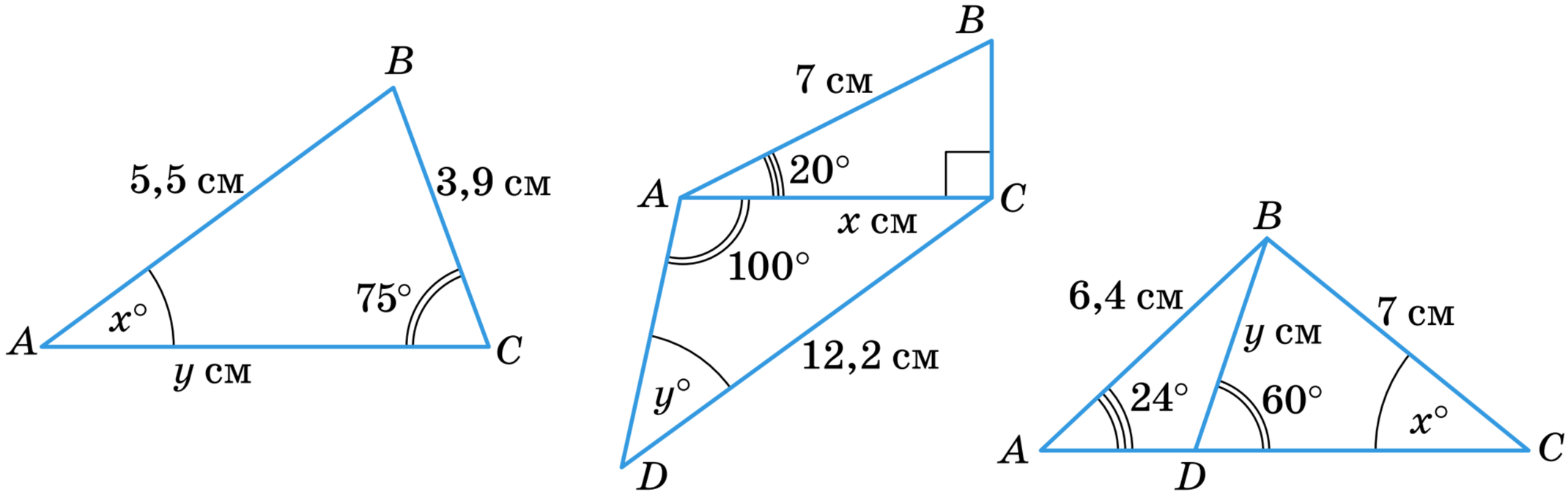
648. а) $c = 17{,}4$, $\alpha = 64°$, $\beta = 44°$; б) $a = 7{,}3$, $\beta = 28°$, $\gamma = 109°$.

649. Розв'яжи трикутник за трьома сторонами.
а) $a = 15$, $b = 18$, $c = 25$; б) $a = 41$, $b = 19$, $c = 40$.

650. Solve the triangle using three sides.
a) $a = 3$, $b = 6$, $c = 3\sqrt{3}$; b) $a = 91{,}2$, $b = 125{,}3$, $c = 176{,}2$.

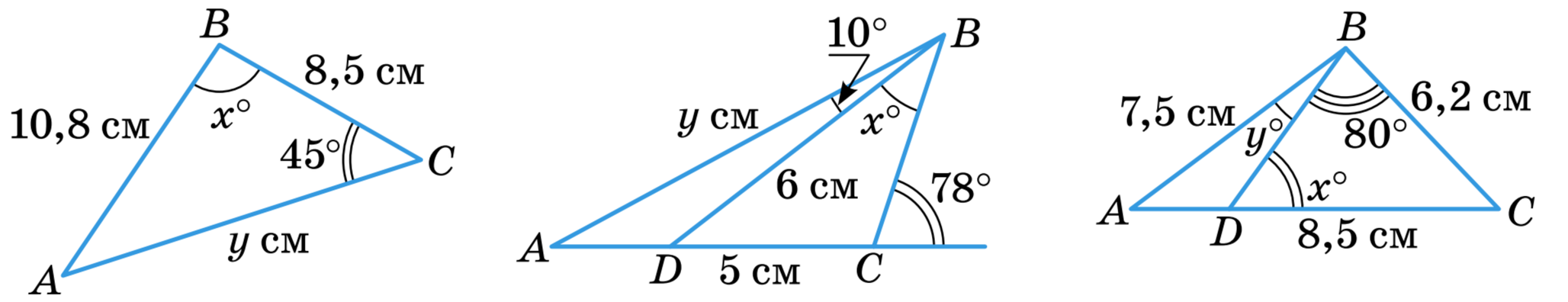
651. Розв'яжіть трикутник за двома даними сторонами і кутом, що лежить проти однієї з них.
а) $a = 4{,}2$, $b = 3{,}5$, $\alpha = 70°$; б) $c = 1{,}5$, $b = 2{,}4$, $\gamma = 28{,}5°$;
в) $a = 4{,}5$, $c = 3{,}2$, $\gamma = 85°$.

652. Для кожного з малюнків (мал. 15.12) знайди значення для x та y.



Мал. 15.12

653. Для кожного з малюнків (мал. 15.13) знайди значення для x та y.



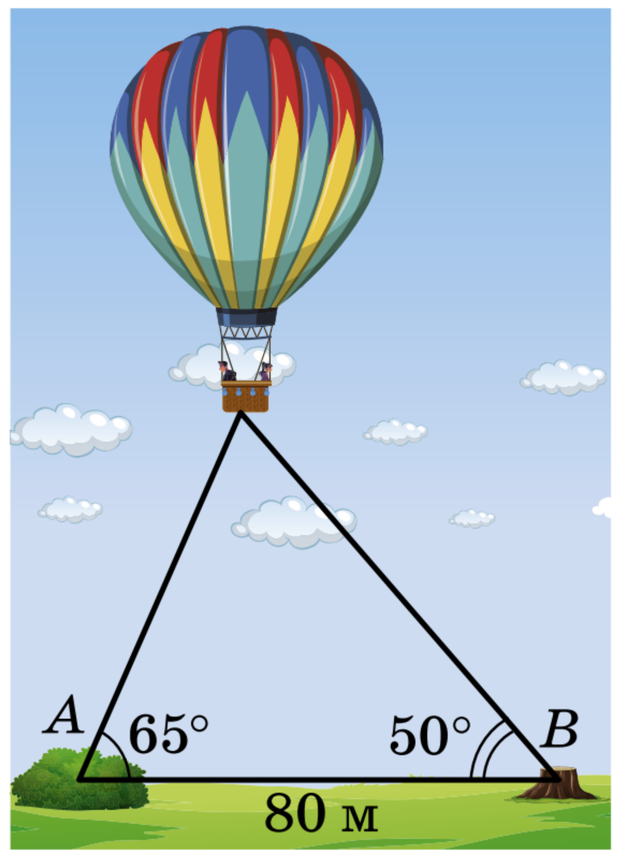
Мал. 15.13

654. Сторона ромба дорівнює 38 см, а його кут 58°. Знайди діагоналі ромба.

655. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $AD = 5$ см, $\angle A = 40°$. Знайди діагоналі паралелограма.

656. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 8 см, а гострий кут — 48°. Знайди більшу діагональ паралелограма і кути, які вона утворює зі сторонами.

657. На яку висоту піднялося дно корзини повітряної кулі, якщо в деякий момент часу вдалося зафіксувати таке її положення відносно точок A і B, як зображено на малюнку 15.14? Знайди відстань, яка була на той час, між кулею і кожною з точок A і B.

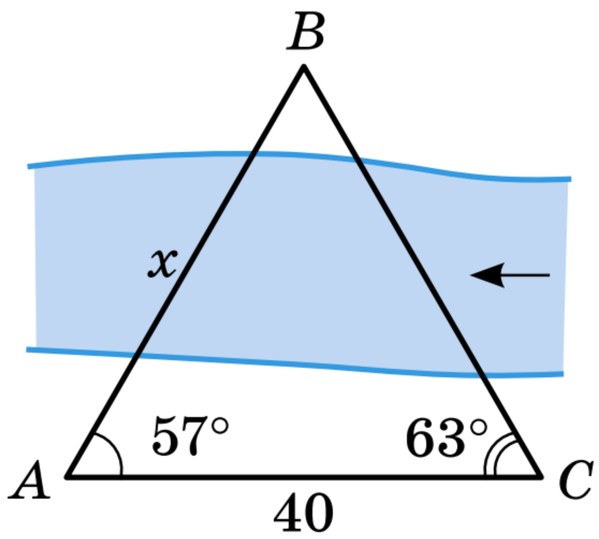


Мал. 15.14

658. Знайди сторони паралелограма, діагональ якого дорівнює 9 см і утворює з його сторонами кути 24° і 57°.

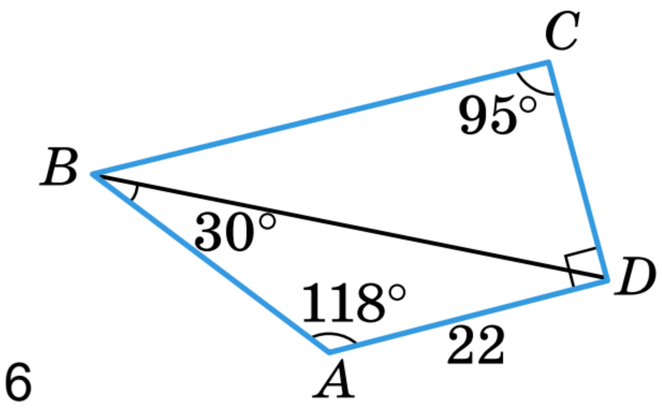
659. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 20 см, а кут між ними — 37°. Знайди сторони паралелограма.

660. Щоб визначити відстань від точки A до недоступної точки B (мал. 15.15), виміряли відстань $AC = 40$ м і кути: $\angle BAC = 57°$, $\angle ACB = 63°$. Знайди відстань AB.



Мал. 15.15

661. Використовуючи дані малюнка 15.16, установіть відповідність між відрізками (1–4), зображеними на цьому малюнку, та їхніми довжинами (А–Д).

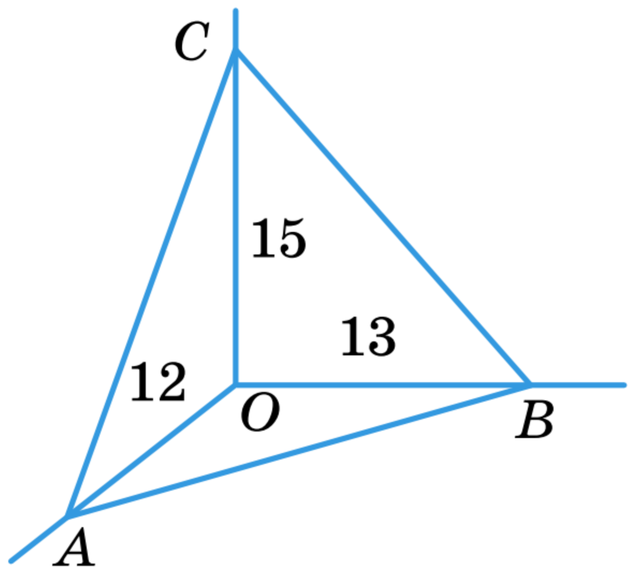


Мал. 15.16

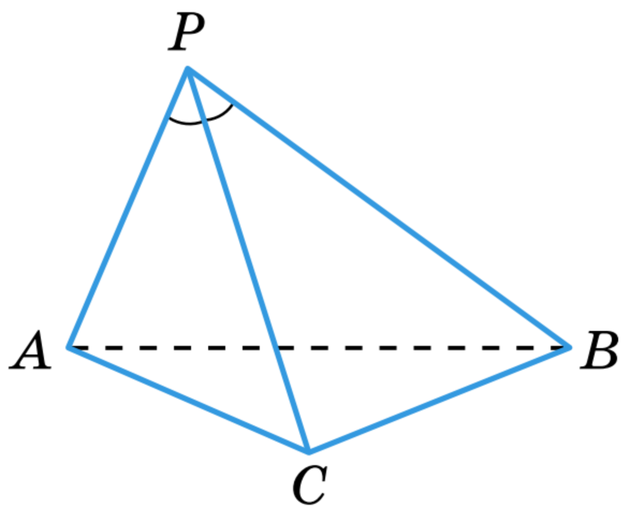
1 AB	**А** ≈33
2 BD	**Б** ≈18
3 CD	**В** ≈39
4 BC	**Г** ≈23
	Д ≈41

662. У просторі на променях OA, OB, OC, кожний із яких перпендикулярний до двох інших, на відстанях 12, 13 і 15 одиниць довжини

від точки O взято точки A, B, C (мал. 15.17). Знайдіть косинус найбільшого кута трикутника ABC.



Мал. 15.17



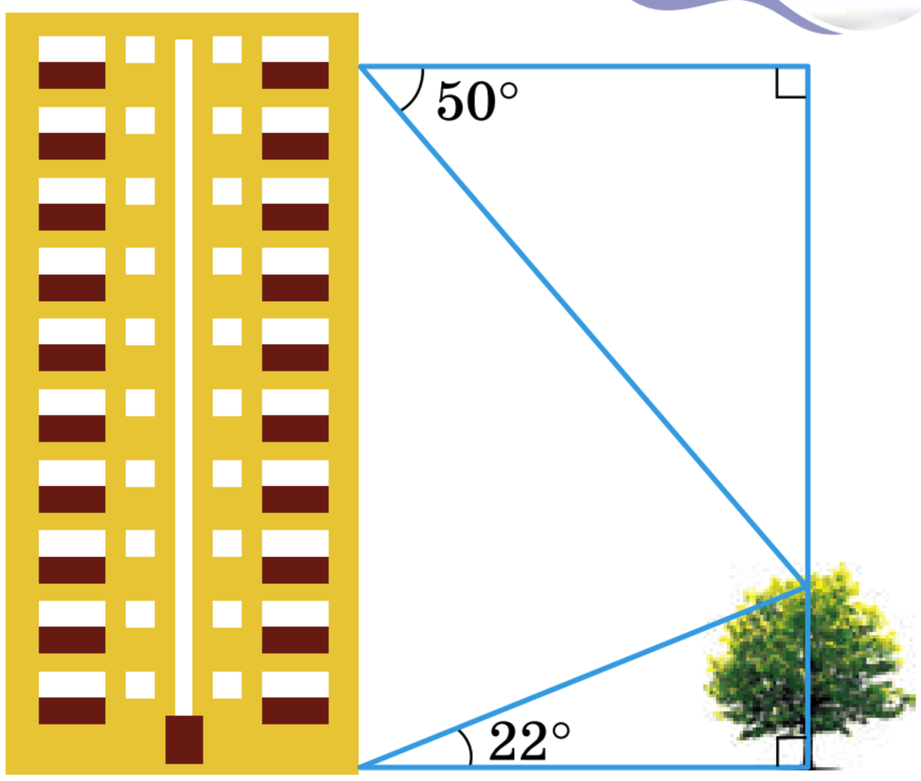
Мал. 15.18

663. У трикутній піраміді $PABC$ бічні ребра PA, PB, PC дорівнюють відповідно 3 дм, 4 дм і 5 дм, а кут між кожними двома з них — 60°. Знайди найменший кут трикутника ABC (мал. 15.18).

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



664. Щоб дістатися поглядом верхівки дерева від підніжжя будинку, потрібно дивитися вгору під кутом 22°. А щоб побачити верхівку дерева з балкона, що розташований на відстані 50 метрів над поверхнею землі, слід дивитися вниз під кутом 50° (мал. 15.19). Знайди: а) висоту дерева; б) відстань від дерева до будинку.



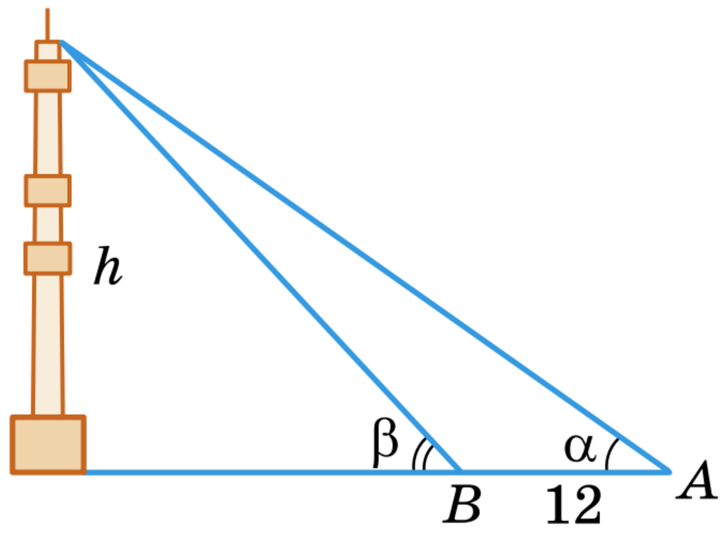
Мал. 15.19

665. Знайди сторони рівнобічної трапеції, якщо її діагональ дорівнює 16 см й утворює з бічною стороною і основою відповідно кути 53° і 48°.

666. Основи трапеції дорівнюють 14 м і 18 м, а бічні сторони — 7 м і 10 м. Знайдіть кути трапеції.

667. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а один із кутів — 100°. Знайди бісектриси трикутника.

668. У трикутнику ABC: сторона $AC = 16$ м, $\angle CAB = 122°$. $AL = 10$ м — бісектриса даного трикутника. Знайди довжини сторін AB і BC.



Мал. 15.20

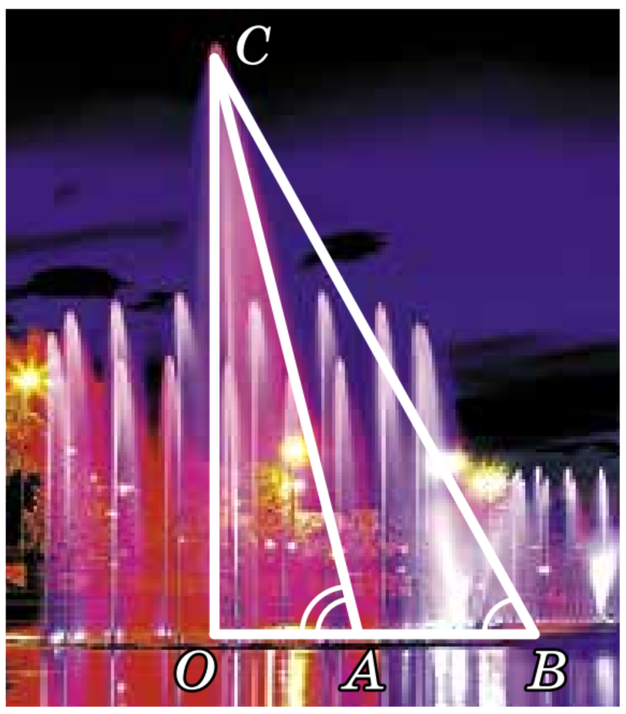
669. BM — медіана трикутника ABC. Знайди AB і BC, якщо $BM = 5$ см, $AC = 12$ см, $\angle ABM = 56°$.

670. Медіани AM і CN трикутника ABC перетинаються у точці O. Знайди сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см, $CN = 12$ см, $\angle AON = 35°$.

671. У трикутнику ABC: $AB = 8$ см, $AC = 20$ см, $\angle A = 68°$. Знайди медіани трикутника.

672. Щоб визначити висоту телевізійної вежі (мал. 15.20), виміряли відстань $AB = 12$ м і кути $\alpha = 35°$, $\beta = 49°$. Знайди висоту вежі.

673. За даними малюнка 15.21 обчисли висоту струменя води фонтану, якщо $AB = 0{,}5$ м, $\angle A = 87°$, $\angle B = 84°$.



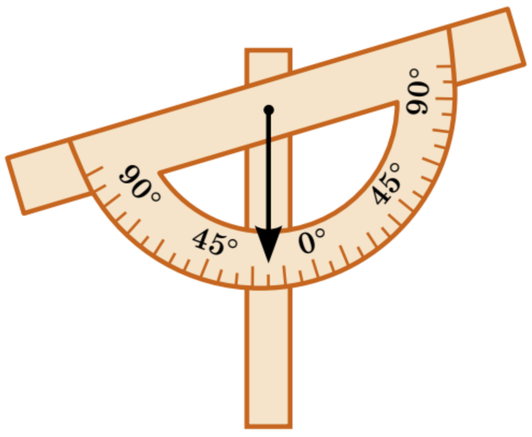
Мал. 15.21

674. Із двох пунктів A і B на березі моря спостерігають за катером, який рухається рівномірно і прямолінійно. О 10.00 катер було видно з пункту A під кутом 100° до напряму AB, а з пункту B — під кутом 51° до напряму BA. О 10.10 кути змінилися і стали дорівнювати відповідно 84° і 74°. Знайди швидкість катера, якщо $AB = 2{,}5$ км.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



675. Використовуючи малюнок 15.22, зроби екліметр (найпростіший прилад для вимірювання кутів у вертикальній площині). Обґрунтуй принцип його використання. За його допомогою спробуй виміряти кути, під якими видно багатоповерхівку (церкву, телевізійну вежу тощо) з різних відстаней.



Мал. 15.22

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



676. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайди відношення сторін трикутника.

677. Периметр ромба дорівнює 40 см, а одна з діагоналей — 10 см. Знайди кути ромба і другу діагональ.

678. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з меншою стороною кут α. Знайди площу прямокутника.

§ 16 ФОРМУЛИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

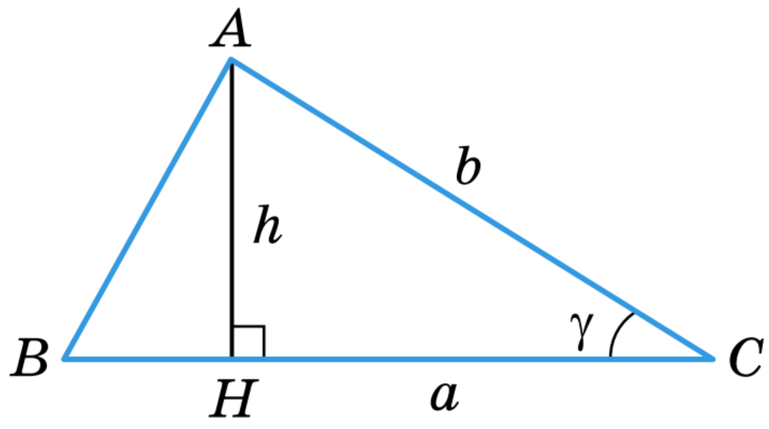
площа трикутника — area of a triangle

Як ти вже знаєш, площу S трикутника з основою a і висотою h знаходять за формулою $S = \frac{1}{2}ah$.

Користуючись тригонометричними функціями, можна вивести кілька інших формул для обчислення площі трикутника. Нехай у трикутнику ABC основа $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$, $AH = h$ — висота (мал. 16.1). З прямокутного трикутника ACH маємо: $h = b\sin\gamma$. Отже,

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Формула площі трикутника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ правильна й тоді, коли кут γ прямий або тупий (доведи це самостійно). Отже, **площа трикутника дорівнює півдобутку будь-яких двох його сторін на синус кута між ними.**



Мал. 16.1

За теоремою синусів $2R = \frac{c}{\sin\gamma}$, де R — радіус описаного кола. Тому $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$.

Отже, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Площа трикутника дорівнює добутку трьох його сторін, поділеному на почетверений радіус описаного кола.

Існує ще одна формула, яку часто використовують для визначення площі трикутника.

Якщо p — півпериметр трикутника зі сторонами a, b, c, то:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Це — **формула Герона**. Доведемо її. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, звідки $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Тому

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2 = \frac{(2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2}{(2ab)^2} =$$

$$= \frac{(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{(2ab)^2} =$$

$$= \frac{1}{(2ab)^2}\left(c^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - c^2\right).$$

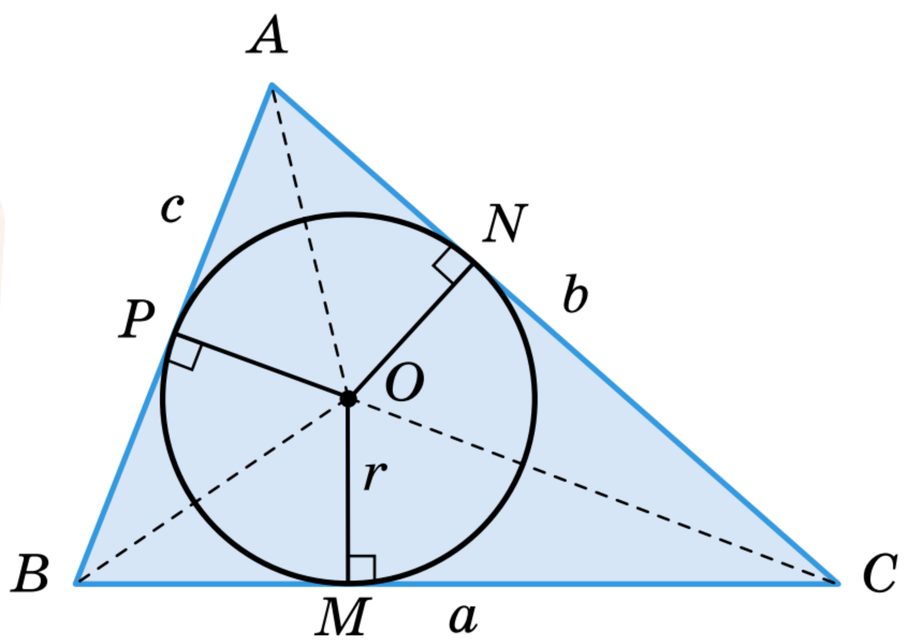
Тоді $\sin\gamma = \frac{1}{2ab}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$.

Підставивши це значення $\sin\gamma$ у формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ і позначивши півпериметр трикутника буквою p, дістанемо:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Використовуючи малюнок 16.2, доведи самостійно наступне твердження.

Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола, тобто $S = pr$.



Мал. 16.2

Аналогічно можна довести, що **площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.**

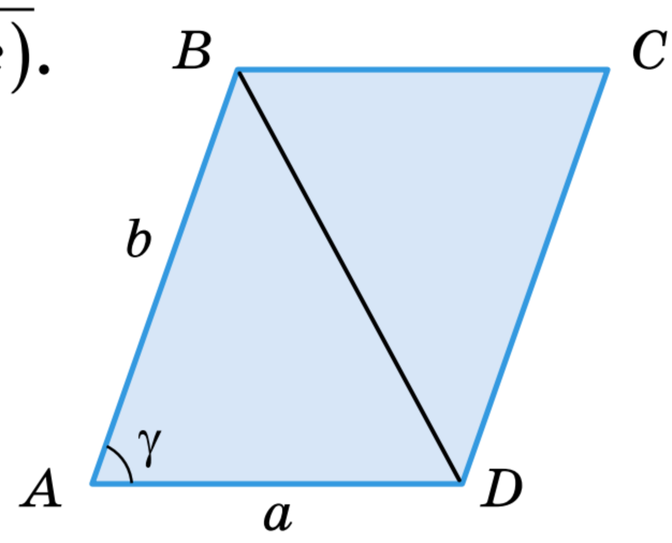
Отже, площу трикутника можна знаходити, користуючись будь-якою з формул:

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S = pr,\quad S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Якщо у трикутнику ABC відомі сторони a, b і c, то з формул $S = pr$ і $S = \frac{abc}{4R}$ можна знайти радіуси вписаного (r) і описаного (R) кіл:

$$r = \frac{S}{p},\quad R = \frac{abc}{4S}.$$



Мал. 16.3

Зауважимо, що формула $r = \frac{S}{p}$ правильна для довільного многокутника, у який можна вписати коло.

Використовуючи формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, можна довести, що формула **площі паралелограма зі сторонами a і b та кутом γ між ними має вигляд:**

$$S = ab\sin\gamma.$$

Адже якщо $ABCD$ — паралелограм, то його площа удвічі більша за площу трикутника ABD (мал. 16.3). Тому

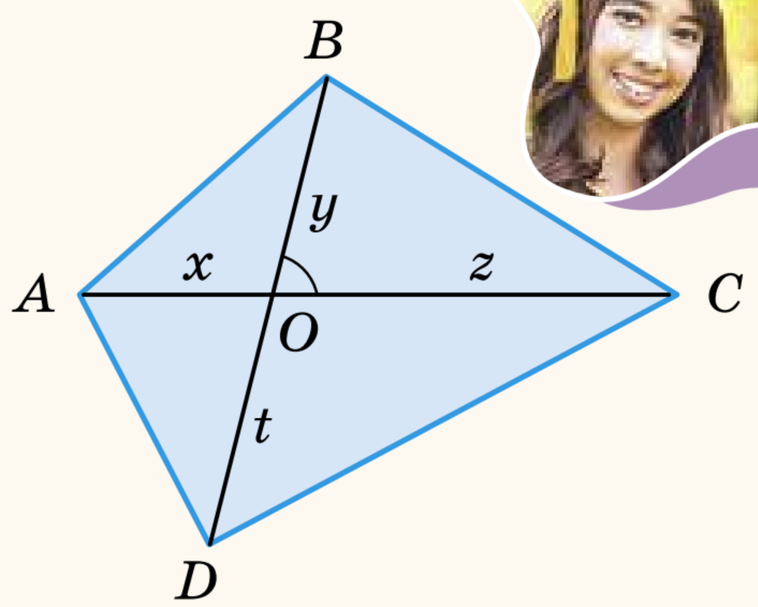
$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\gamma = ab\sin\gamma.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Виведемо ще формулу площі опуклого чотирикутника з діагоналями d_1 і d_2 та кутом α між ними.

Нехай діагоналі AC і BD опуклого чотирикутника перетинаються в точці O (мал. 16.4). Якщо один із чотирьох кутів при вершині O дорівнює α, то і вертикальний до нього кут дорівнює α, а два інші — по $(180^\circ - \alpha)$. Оскільки $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, то синуси кожного з кутів AOB, BOC, COD, AOD дорівнюють $\sin\alpha$.



Мал. 16.4

Позначимо частини діагоналей чотирикутника буквами x, y, z, t, як на малюнку 16.4. Площа всього чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі площ чотирьох утворених трикутників.

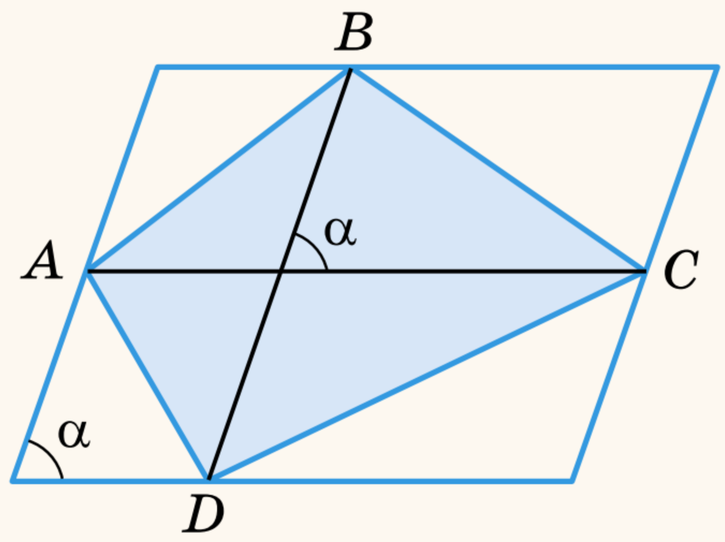
Тому

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(xy\sin\alpha + yz\sin\alpha + zt\sin\alpha + xt\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(xy + yz + zt + xt\right)\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\left(y(x+z) + t(z+x)\right)\sin\alpha =$$



Мал. 16.5

$$= \frac{1}{2}(x+z)\cdot(y+t)\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

Отже, **якщо діагоналі чотирикутника завдовжки d_1 і d_2 перетинаються під кутом α, то площа чотирикутника обчислюється за формулою:** $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.

Спробуй вивести цю формулу, описавши навколо даного чотирикутника паралелограм, сторони якого паралельні діагоналям чотирикутника (мал. 16.5). Чи правильна ця формула для неопуклого чотирикутника? Спробуй її довести.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Розв'язування трикутників. Урок 3).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як знайти площу трикутника за:
   а) стороною і проведеною до неї висотою;
   б) двома сторонами і кутом між ними;
   в) сторонами і радіусом описаного кола;
   г) його периметром і радіусом вписаного кола?
2. Сформулюй формулу Герона.
3. Як знайти радіус кола:
   а) описаного навколо трикутника;
   б) вписаного у трикутник?
4. Як знайти площу паралелограма?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Доведи, що **висоти трикутника обернено пропорційні до відповідних сторін.**

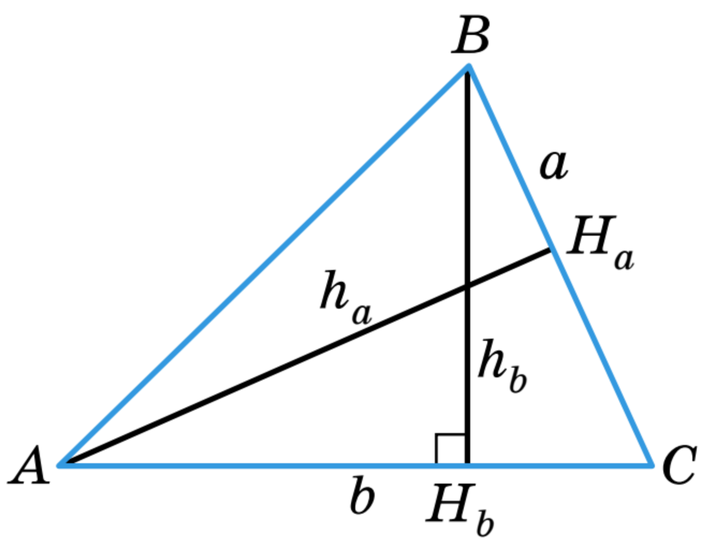
- Нехай a і b — дві сторони трикутника ABC, а проведені до них висоти — h_a, h_b (мал. 16.6).

Виразимо площу трикутника двома способами:

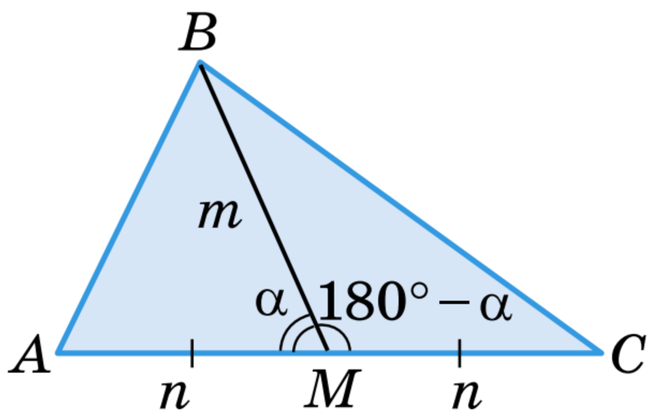
$$S = \frac{1}{2}ah_a \text{ і } S = \frac{1}{2}bh_b.$$

Тоді $ah_a = bh_b$, звідки $h_a : h_b = b : a$. А це й треба було довести.

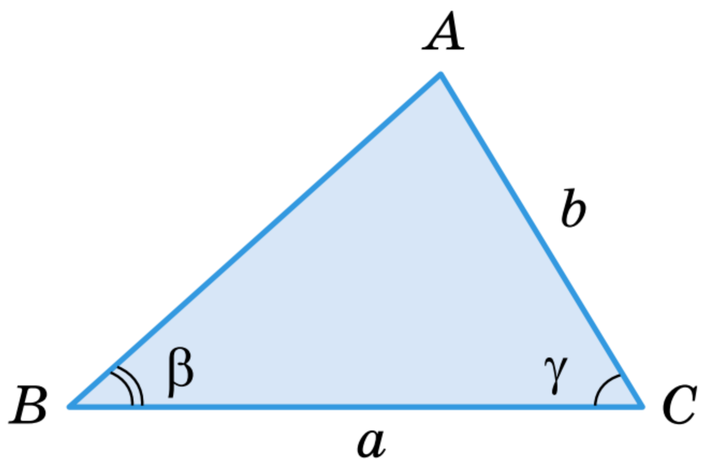
Такий спосіб розв'язання задач, коли прирівнюють площі рівних фігур, коротко називають **методом площ.**



Мал. 16.6



Мал. 16.7



Мал. 16.8

2. Доведи, що **медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.**

- Нехай $BM = m$, $AM = MC = n$ (мал. 16.7). Тоді $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin\alpha$.

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin\alpha.$$

Отже, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}$.

3. Доведи, що площа рівностороннього трикутника зі стороною a визначається за формулою $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

• Якщо трикутник рівносторонній, то його кути — по $60°$. Тоді $S = \dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 60^0 = \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

4. Виведи формулу площі трикутника за його стороною і прилеглими кутами.

• Нехай дано $\triangle ABC$, у якого $CB = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (мал. 16.8). $\angle A = 180° - (\beta + \gamma)$, тому $\sin A = \sin(\beta + \gamma)$. За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, звідки $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$.

Площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}a\,\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Отже, шукана площа трикутника $S = \dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$.

ВИКОНАЄМО УСНО



679. Знайди площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 3 см, а кут між ними $30°$.

А 12 см^2 **Б** 6 см^2 **В** 3 см^2 **Г** $3\sqrt{3}$ см^2

680. Знайди площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого $b = 6$ см, а кут при вершині: а) $45°$; б) $60°$; в) $120°$.

681. Знайди площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює 8 см.

А 64 см^2 **Б** $32\sqrt{3}$ см^2 **В** 16 см^2 **Г** $16\sqrt{3}$ см^2

682. Як змінюватиметься площа трикутника, якщо довжини двох його сторін a і b залишатимуться незмінними, а кут γ між ними збільшувати від $0°$ до $180°$?

683. Яку найбільшу площу може мати трикутник, дві сторони якого дорівнюють 2 см і 3 см?

684. Площа трикутника 15 см^2, а його сторони 10 см і 6 см. Знайди кут між ними.

А $30°$ **Б** $60°$ **В** $30°$ або $150°$ **Г** $60°$ або $120°$

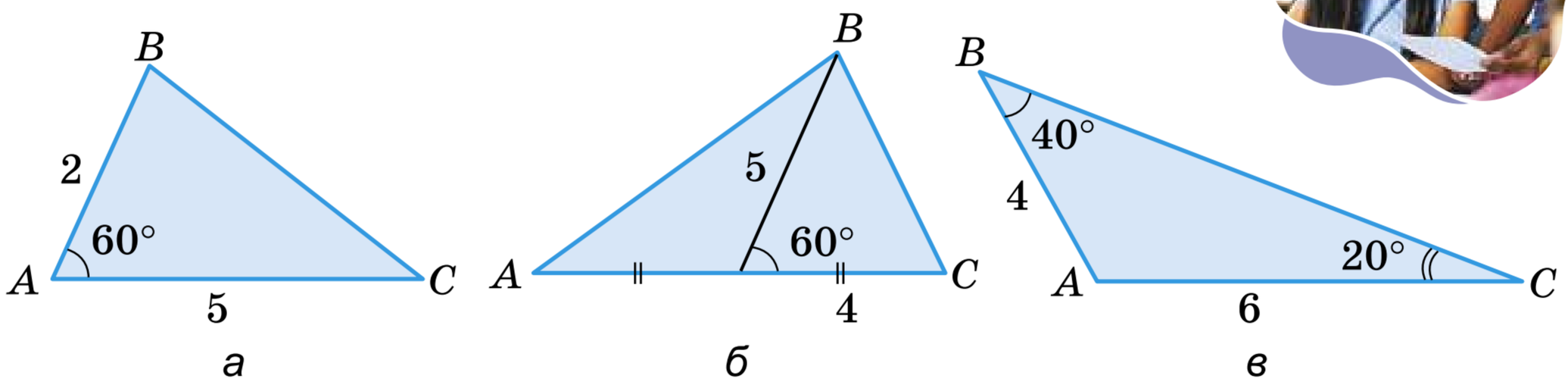
685. Оберіть варіант відповіді, щоб утворилось хибне твердження: «Якщо дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 10 см, то його площа може дорівнювати...»

А 12 см^2 **Б** 15 см^2 **В** 18 см^2 **Г** $7{,}5$ см^2

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



686. Користуючись малюнком 16.9, знайди площу трикутника ABC.



Мал. 16.9

687. Знайди площу трикутника ABC, якщо:
а) $BC = 4$ см, $AC = 8$ см, $\angle C = 45°$; б) $AB = 12$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 150°$.

688. Знайди площу, радіуси вписаного й описаного кіл для рівностороннього трикутника зі стороною 6 см.

689. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць задає півпериметр трикутника, другий / друга — радіус вписаного в нього кола, а третій / третя — знаходить площу цього трикутника.

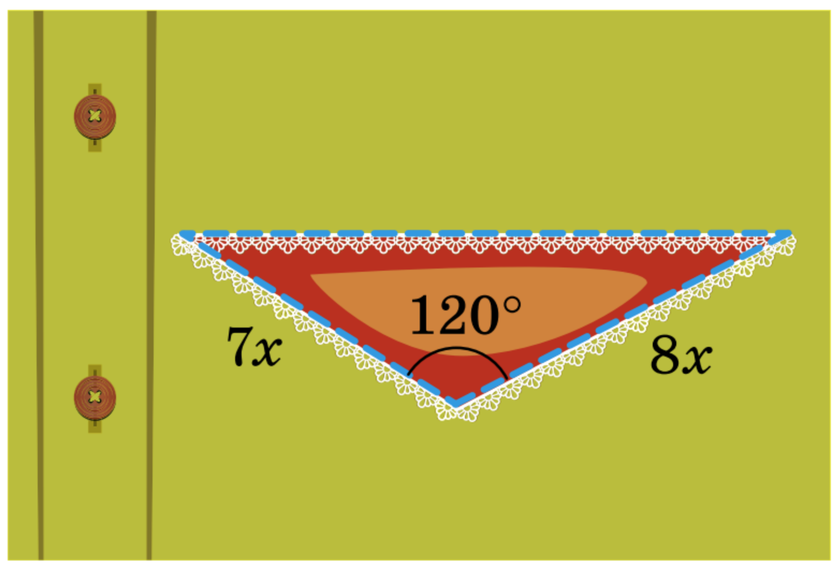
690. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см^2. Знайди периметр трикутника.

691. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі — 15°. Знайди площу трикутника.

692. Інженери проєктують металеву опору у формі рівнобедреного трикутника з кутом при вершині 120°. Площа конструкції повинна дорівнювати $25\sqrt{3}$ м^2. Знайди довжини сторін опори.

693. Одна зі сторін трикутного вітрила на 3 м довша за іншу. Кут між цими сторонами становить 30°, а площа самого вітрила — 22 м^2. Знайди довжини цих двох сторін вітрила.

694. Майстриня шиє декоративну кишеньку у формі трикутника з двома сторонами, що пропорційні числам 7 і 8, а кут між ними дорівнює 120° (мал. 16.10). Відомо, що площа кишеньки становить $56\sqrt{3}$ см^2. Знайди довжину мережива для її оздоблення.



Мал. 16.10

695. Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 18 см, а кут між ними 60°. Знайди висоти, проведені до цих сторін.

696. Two sides of a triangle measure 12 cm and 16 cm, and the angle between them is 45°. Find the heights drawn to these sides.

697. Медіана трикутника і сторона, до якої вона проведена, дорівнюють відповідно 10 см та 26 см і утворюють кут 60°. Знайди площу трикутника.

698. Медіана трикутника і сторона, до якої вона проведена, дорівнюють відповідно 6 см і 16 см. Знайди кут між ними, якщо площа трикутника 24 см^2.

699. ***Відкрита задача.*** Задай три сторони трикутника, перевір, щоб такий трикутник існував, знайди площу цього трикутника. Сформулюй і запиши умову прикладної задачі на основі складеної.

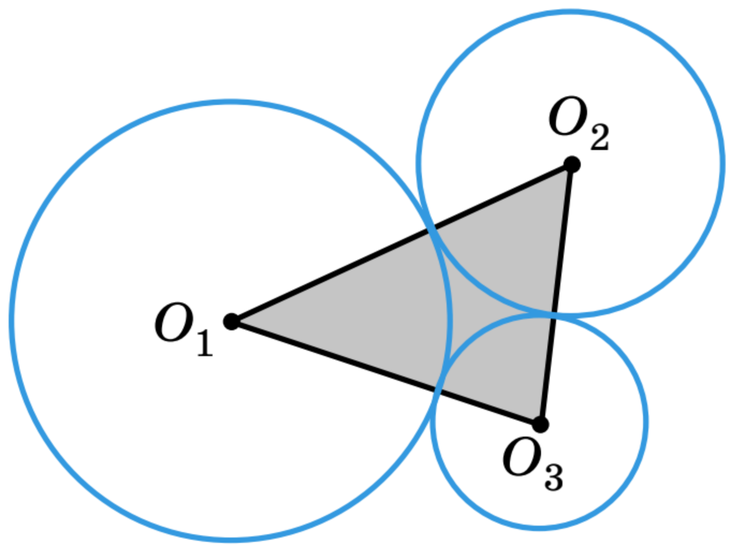
700. Сторони трикутника 10 см, 10 см і 12 см. Знайди радіуси вписаного й описаного кіл.

701. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см. Знайди його площу та радіуси вписаного й описаного кіл.

702. Знайди найбільшу висоту трикутника зі сторонами 6 см, 10 см і 14 см.

703. Знайди найменшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см.

704. Три кола радіусів 8 см, 9 см і 17 см попарно дотикаються одне до одного зовні (мал. 16.11). Знайди площу трикутника з вершинами в центрах кіл.



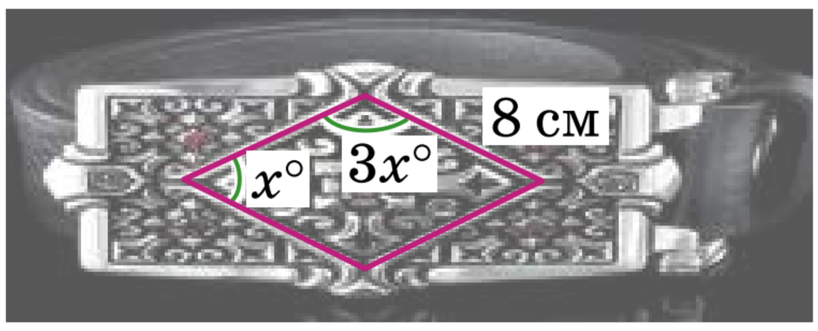
Мал. 16.11

705. Три кола радіусів 6 см, 7 см і 14 см попарно дотикаються одне до одного зовні. Знайди радіус кола, на якому лежать центри даних кіл.

706. Бісектриса AM паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки $BM = 10$ см, $MC = 8$ см. Знайди площу паралелограма, якщо $\angle A = 30°$.

707. Бісектриса AK паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC так, що $BK : KC = 2 : 3$. Знайди площу паралелограма, якщо $AB = 6$ см, $\angle A = 60°$.

708. Знайди площу ромба на пряжці (мал. 16.12), сторона якого 8 см, а кути пропорційні числам 1 і 3.



Мал. 16.12

709. Знайди кути ромба на пряжці (мал. 16.12), якщо його площа 8 см^2, а периметр 16 см.

710. Знайди площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 11 см, а кут між ними — 30°.

711. Знайди діагоналі паралелограма площею $96\sqrt{2}$ см^2, якщо одна з них на 8 см довша за другу, а кут між ними — 45°.

712. Знайди площу паралелограма $ABCD$, якщо $AB = a$, $AC = d$, $\angle BAC = \alpha$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



713. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = 7$ см, $BM = 8$ см, $BN = 3$ см, $NC = 11$ см. Знайди площу чотирикутника $AMNC$, якщо площа трикутника MBN дорівнює 4 см^2.

714. Бічні сторони AB і CD трапеції $ABCD$ дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Продовження бічних сторін трапеції перетинаються у точці O так, що $OA = 15$ см, $OD = 24$ см. Знайди площу трапеції $ABCD$, якщо площа $\triangle BOC$ дорівнює 20 см^2.

715. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, $CO = 10$ см, $DO = 8$ см. Знайди площі $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$, якщо сума їх площ дорівнює 22 см^2.

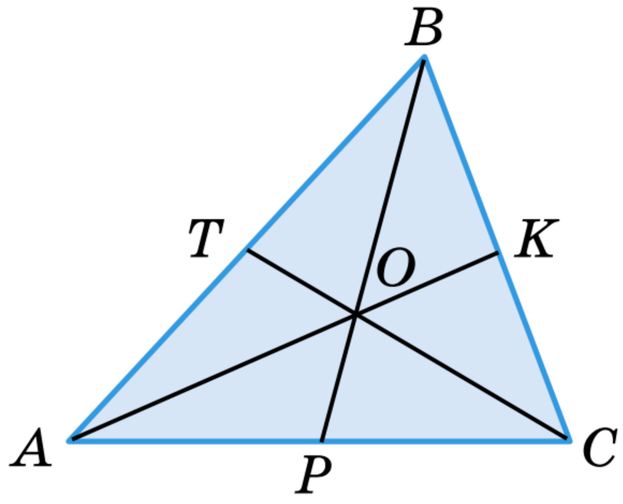
716. BL — бісектриса трикутника ABC. Знайди площу трикутника, якщо $AL = 21$ см, $CL = 35$ см, $\angle B = 120°$.

717. BL — бісектриса трикутника ABC. Знайди його площу, якщо $AL = 15$ см, $LC = 24$ см, $BC = 40$ см.

718. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 14 см, а діагоналі 13 см і 20 см. Знайдіть площу трапеції.

719. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 20 см, а бічні сторони 13 см і 15 см. Знайди площу трапеції.

720. Доведи, що **три медіани трикутника ділять його на 6 рівновеликих трикутників** (мал. 16.13).



Мал. 16.13

721. Медіани AM і CN трикутника ABC дорівнюють 9 см та 12 см і перетинаються в точці O. Знайди площу трикутника AOC і чотирикутника $BMON$, якщо $\angle AOC = 120°$.

722. Центр кола, вписаного у трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, сполучено з вершинами трикутника. Знайди площі утворених трикутників.

723. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 16 см, а бічна сторона — 20 см. Знайди відстань між центрами описаного і вписаного кіл.

724. Сторони трикутника дорівнюють 40 см, 40 см і 48 см. Знайди відстані від центра описаного кола до сторін трикутника.

725. Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 15 см і 24 см. Знайди відстані від центра вписаного кола до вершин трикутника.

726. У трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см вписано коло, до якого проведено дотичну, паралельну середній за довжиною стороні. Знайди площі частин, на які ця дотична розбиває трикутник.

727. Знайди площу паралелограма $ABCD$, якщо $BD = d$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

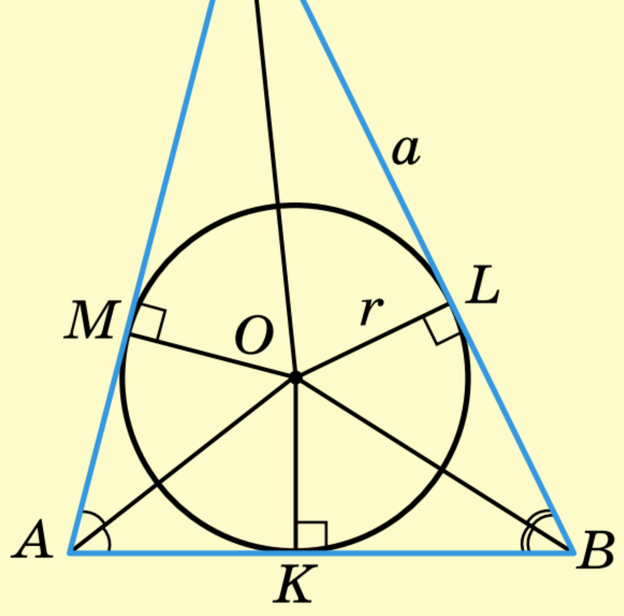
728. Знайди площу $\triangle ABC$, якщо $AC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

729. Основи трапеції $ABCD$ дорівнюють 7 см і 14 см, а діагоналі 9 см і 15 см. Знайди площі трикутників AOB, BOC, COD, AOD, де O — точка перетину діагоналей.

730. Використовуючи малюнок 16.14, доведи, що площу кожного трикутника можна обчислити за формулою

$$S = r\left(a + r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right),$$ де $a = BC$,

r — радіус кола, вписаного в $\triangle ABC$.



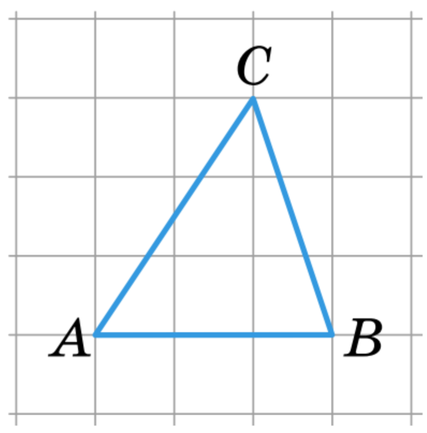
Мал. 16.14

731. Інженер розробляє металеву деталь у формі паралелограма, довжина однієї зі сторін якого дорівнює 26 см, а діагоналі 30 см і 74 см. Обчисли площу деталі, щоб визначити кількість матеріалу, необхідного для її виготовлення.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



732. Користуючись аркушем паперу в клітинку (мал. 16.15), накресли трикутник з основою AB і площею, вдвічі більшою за площу трикутника ABC. Скільки таких трикутників існує? Яким найбільшим може бути косинус кута, протилежного стороні AB?



Мал. 16.15

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



733. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 10 см. Знайди кути трикутника.

734. Доведи, що трикутник зі сторонами 7 см, 24 см і 25 см прямокутний.

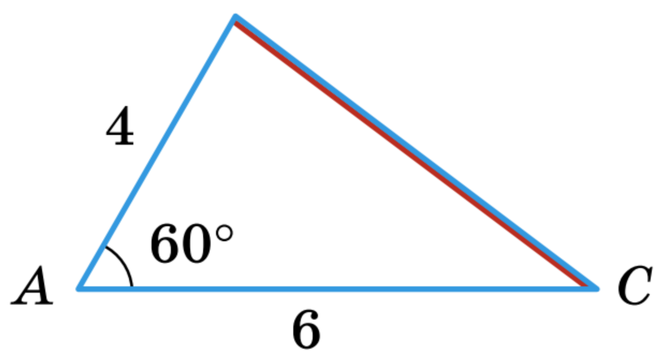
735. Запиши рівняння кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$ та вписаного в нього, якщо: $A(-3; -3)$, $B(-5; 3)$, $C(1; 5)$, $D(3; -1)$.

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

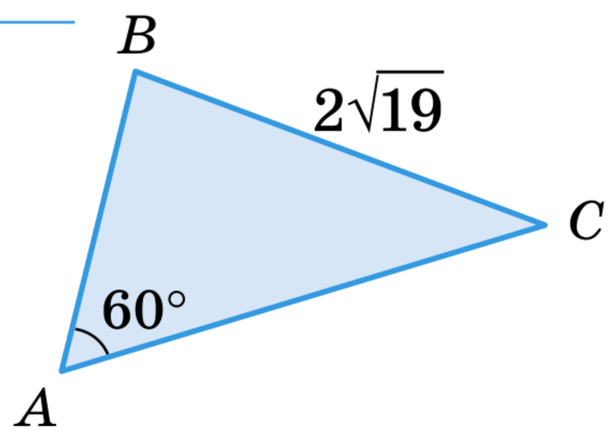
1 $AB = 4,\ AC = 6,\ \angle A = 60°.$

BC



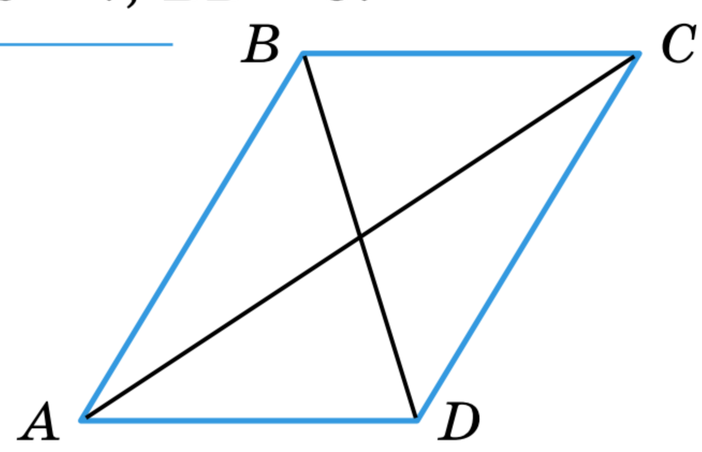
2 $BC = 2\sqrt{19}\ ,\ AC - AB = 6.$

AC, AB



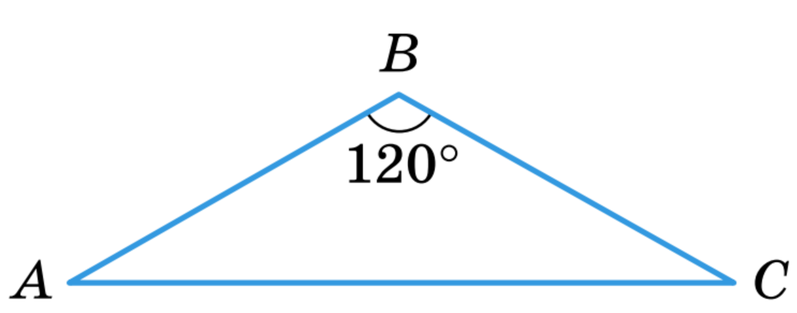
3 $\square ABCD$
$AB = 9,\ BC = 7,\ BD = 8.$

AC



4 $AB + BC = 18;\ S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}.$

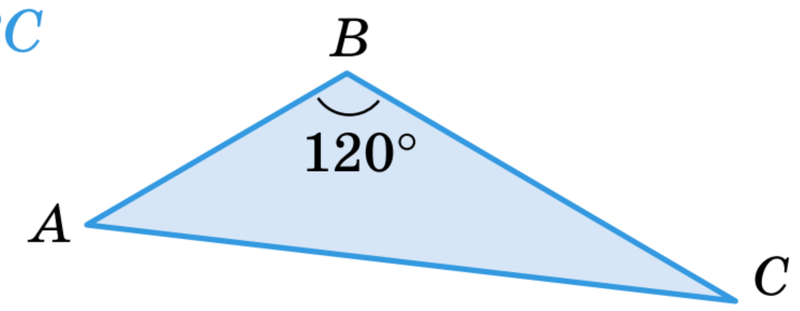
AB, BC, AC



Б

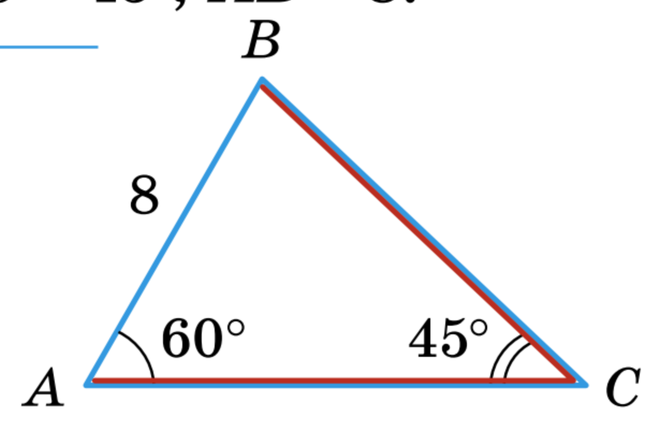
$AC = 14,\ AB : BC = 3 : 5.$

AB, BC



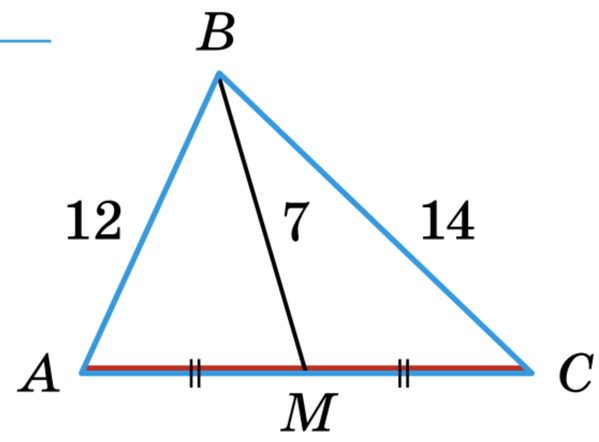
$\angle A = 60°,\ \angle C = 45°,\ AB = 8.$

AC, BC



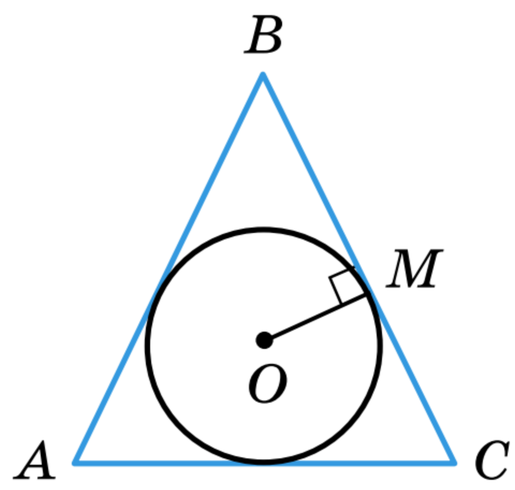
$AM = MC.$

AC



$AB = BC,\ BM : MC = 9 : 8,$
$r = OM = 24.$

R — радіус описаного кола



САМОСТІЙНА РОБОТА 3

Варіант 1

1. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см і 8 см, а кут між ними 45°.

2. Знайди меншу діагональ паралелограма, сторони якого дорівнюють 3 см і 8 см та утворюють кут 60°.

3. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 6$ дм, $AC = 9$ дм, $\angle B = 120°$. Знайди $\sin C$.

4. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника пропорційні числам 5 і 8. Знайди радіус вписаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 54 м.

Варіант 2

1. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 10 см, а кут між ними 120°.

2. Знайди меншу діагональ паралелограма, сторони якого дорівнюють $4\sqrt{3}$ см і 8 см та утворюють кут 30°.

3. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 8$ м, $AC = 12$ м, $\angle B = 60°$. Знайди $\sin A$.

4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 1 см більша за основу. Знайди радіус вписаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 50 см.

Варіант 3

1. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють 9 м і 12 м, а кут між ними 150°.

2. Знайди меншу діагональ паралелограма, сторони якого дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 7 см та утворюють кут 45°.

3. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 14$ см, $BC = 21$ см, $\angle A = 120°$. Знайди $\sin C$.

4. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться як $6 : 5$. Знайди радіус вписаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 64 дм.

Варіант 4

1. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють 6 м і 8 м, а кут між ними 135°.

2. Знайди меншу діагональ паралелограма, сторони якого дорівнюють 4 см і $2\sqrt{3}$ см та утворюють кут 30°.

3. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 15$ см, $AC = 10$ см, $\angle C = 60°$. Знайди $\sin B$.

4. Основа рівнобедреного трикутника на 6 дм менша за бічну сторону. Знайди радіус вписаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 72 дм.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 3

1 Яка з рівностей хибна?

А $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ **Б** $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

В $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin B}{b}$ **Г** $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

2 Установи вид трикутника ABC, якщо $\cos B < 0$.

А гострокутний **Б** прямокутний
В тупокутний **Г** рівносторонній

3 Знайди радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $AC = 3$ см, $\angle B = 30°$.

А 3 см **Б** 6 см
В $\sqrt{3}$ см **Г** 12 см

4 Знайди довжину меншої діагоналі паралелограма, сторони якого дорівнюють 5 см і 8 см, а кут між ними 60°.

А 129 см **Б** 7 см
В 49 см **Г** $\sqrt{129}$ см

5 Знайди площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 14 см, а кут між ними 30°.

А 42 см^2 **Б** $21\sqrt{3}$ см^2
В $21\sqrt{2}$ см^2 **Г** 21 см^2

6 Знайди площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а кут при основі дорівнює 45°.

А $25\sqrt{3}$ см^2 **Б** 50 см^2
В $25\sqrt{2}$ см^2 **Г** $50\sqrt{3}$ см^2

7 Дві сторони трикутника площею $6\sqrt{3}$ см^2 дорівнюють 4 см і 6 см. Знайди кут між цими сторонами.

А 30° **Б** 60°
В 30° або 60° **Г** 60° або 120°

8 За якою формулою обчислюють радіус кола, описаного навколо трикутника?

А $\frac{abc}{4S}$ **Б** $\frac{4S}{abc}$ **В** $\frac{S}{p}$ **Г** $\frac{p}{S}$

9 Знайди площу трикутника, якщо його периметр дорівнює 10 см, а радіус вписаного кола — 2 см.

А 20 см^2 **Б** 10 см^2
В 5 см^2 **Г** 2,5 см^2

10 Укажи площу рівностороннього трикутника зі стороною 2 дм.

А 4 дм^2 **Б** $2\sqrt{3}$ дм^2
В $\sqrt{3}$ дм^2 **Г** $0{,}5\sqrt{3}$ дм^2

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 8 см, а кут між ними 120°. Знайди довжину третьої сторони трикутника.

А $\sqrt{57}$ см **Б** 169 см **В** 13 см **Г** 57 см

2. У трикутнику ABC $AB = 8$ дм, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. Знайди BC.

А $4\sqrt{6}$ дм **Б** $4\sqrt{2}$ дм **В** $4\sqrt{3}$ дм **Г** 4 дм

3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а кут при вершині 120°. Знайди радіус кола, описаного навколо трикутника.

А $4\sqrt{3}$ см **Б** 6 см **В** 12 см **Г** $2\sqrt{3}$ см

4. Установи відповідність між фігурами, заданими умовами (1–3), та їх площами (А–Д).

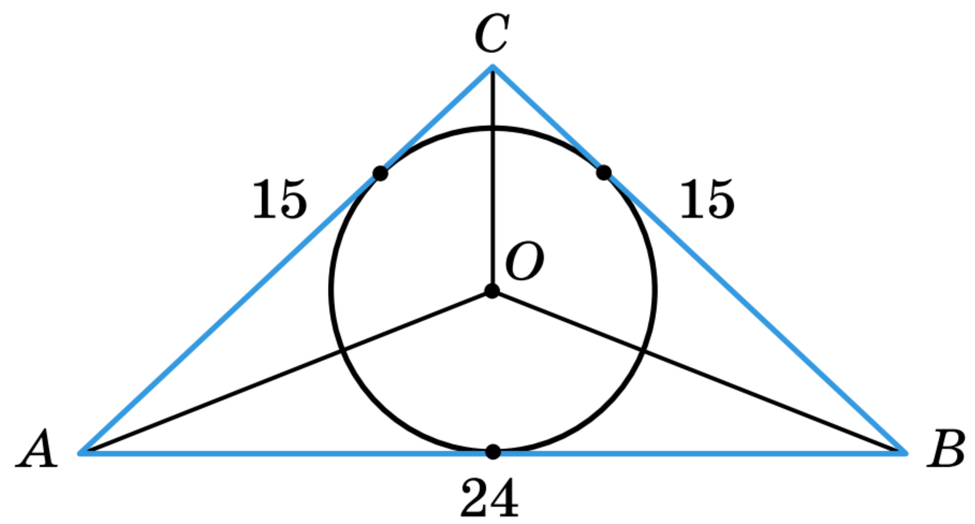
1 трикутник зі сторонами 6 см, 10 см і 14 см **2** паралелограм зі сторонами 6 см і 8 см та кутом 60° **3** ромб зі стороною 12 см і кутом 135°	**А** $24\sqrt{2}$ см^2 **Б** $24\sqrt{3}$ см^2 **В** $15\sqrt{3}$ см^2 **Г** $72\sqrt{2}$ см^2 **Д** 72 см^2

5. Площа трикутника ABC дорівнює 30 см^2, $AB = 10$ см, $BC = 12$ см. Знайди $\angle B$. Скільки розв'язків має задача?

6. Діагоналі паралелограма дорівнюють 14 см і 22 см, а сторони пропорційні числам 6 і 7. Знайди периметр паралелограма.

7. Периметр трикутника дорівнює 36 см, а дві його сторони, які пропорційні числам 8 і 3, утворюють кут 60°. Знайди сторони трикутника, його площу та висоту, проведену до найбільшої сторони.

8. У трикутник зі сторонами 15 м, 15 м і 24 м вписано коло, центр якого з'єднано з вершинами трикутника (мал. 16.16). Знайди площі утворених трикутників.



Мал. 16.16

Додаткове завдання

9. Бічні сторони трапеції дорівнюють 5 см і $5\sqrt{3}$ см, а основи — 8 см і 18 см. Знайди кути трапеції.

Головне в розділі 3	

РОЗДІЛ 4
Правильні многокутники

Нічого не зроблено,
якщо щось залишилося недоробленим.

Математики стоять на плечах один одного.

Видатний німецький математик, астроном, фізик і геодезист. Один із найвеличніших і найвпливовіших математиків усіх часів. Його називають Королем математики.



Карл Фрідріх Ґаусс (1777–1855)

Правильними називають такі опуклі многокутники, у яких всі сторони рівні і всі кути рівні. Вони відіграють важливу роль не лише в геометрії, а й у кристалографії, хімії, мінералогії тощо. Їх властивості часто використовують архітектори, дизайнери. Довжину кола і площу круга також визначають, використовуючи властивості правильних многокутників.

§ 17 Правильні многокутники та їх властивості
Regular polygons and their properties

§ 18 Правильні многокутники та кола
Regular Polygons and Circles

§ 19 Довжина кола і дуги кола
Circle length and arc length

§ 20 Площа круга і його частин
Area of a circle and its parts

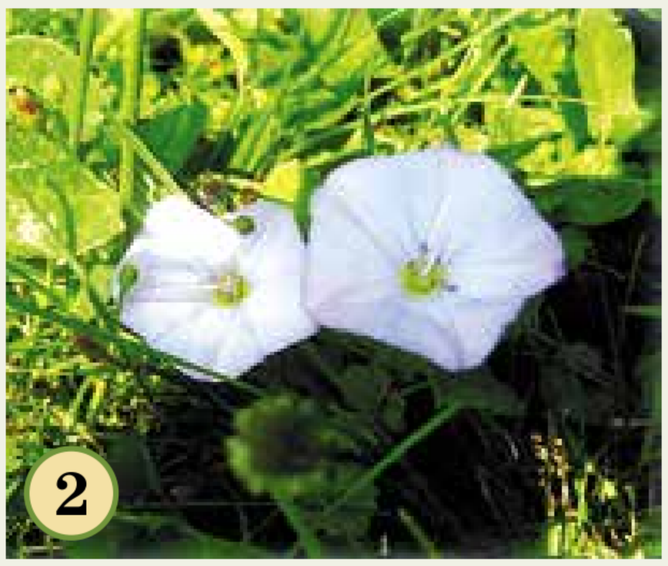
Навчальний проєкт «Замощення площини»
Educational project «Paving the plane»



Для чого вивчати правильні многокутники?

Правильні многокутники — це абстрактні поняття, створені науковцями. У природі абсолютно правильних многокутників не існує. Трапляються об'єкти у формі майже правильних многокутників. Наприклад, бджоли[1] роблять стільники у формі майже правильних шестикутників. Квіти[2] багатьох рослин ростуть так, що кінчики їх пелюсток розташовані у вершинах правильних многокутників, а кінчики сніжинок розташовані у вершинах правильних шестикутників. Форми майже правильних многокутників мають грані деяких кристалів[3]. Наприклад, грані кристалів кухонної солі — квадрати, грані кристалів алмаза — правильні трикутники.

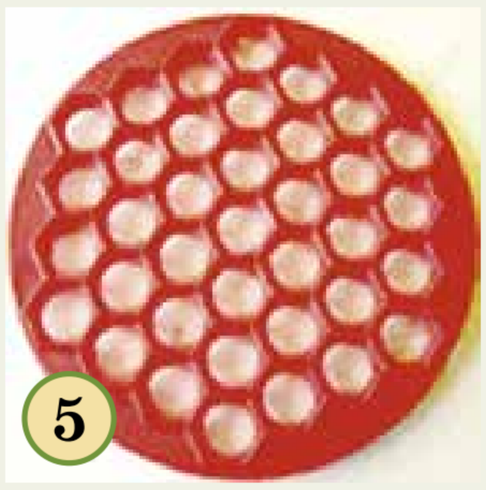

1


2

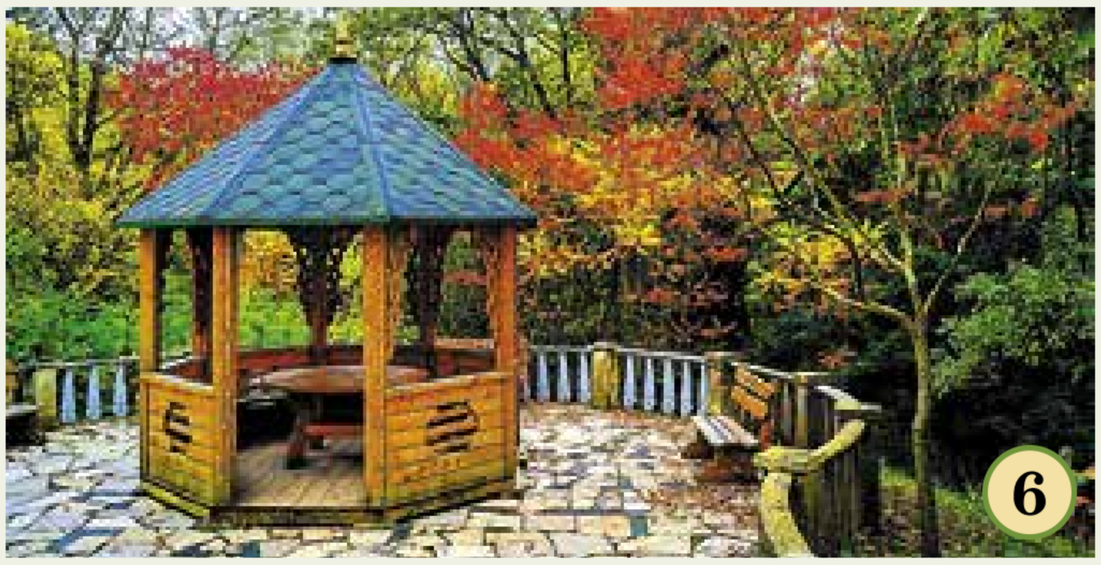

3

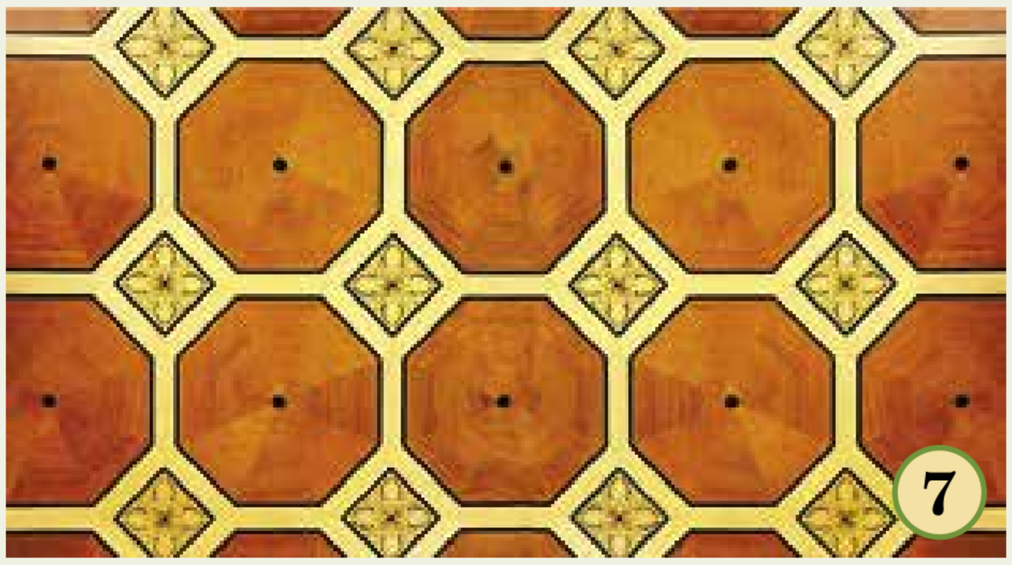
Правильні многокутники зустрічаються і в багатьох виробах (голівках болтів і гайок[4], пельменницях[5]).


4


5

В архітектурі[6] часто можна побачити будови, що мають форми правильних многокутників або їх частин. Особливо часто з правильними многокутниками мають справу паркетники, плиточники, архітектори. У деяких палацах, залах настеляють паркет[7] із кількох правильних многокутників: правильних трикутників і шестикутників, квадратів і правильних восьмикутників тощо.


6


7

А де ще використовують правильні многокутники? Наведи свої приклади.

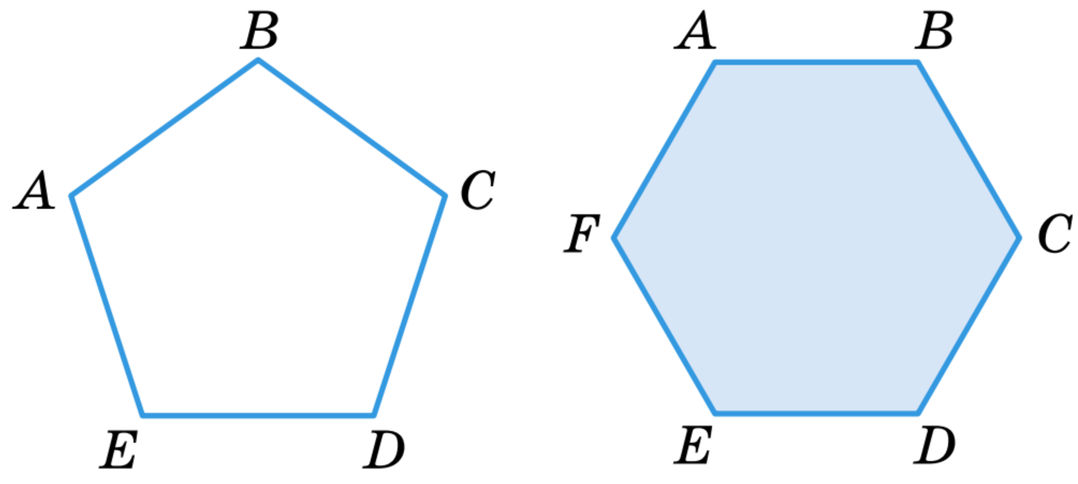
§ 17 ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

правильний многокутник — regular polygon
центральний кут многокутника — central angle of a polygon
апофема — apothem

Опуклий многокутник називають *правильним*, якщо всі його сторони рівні і всі кути рівні.

Рівносторонній трикутник і квадрат — приклади правильних многокутників. На малюнку 17.1 зображено правильний п'ятикутник і правильний шестикутник.



Мал. 17.1

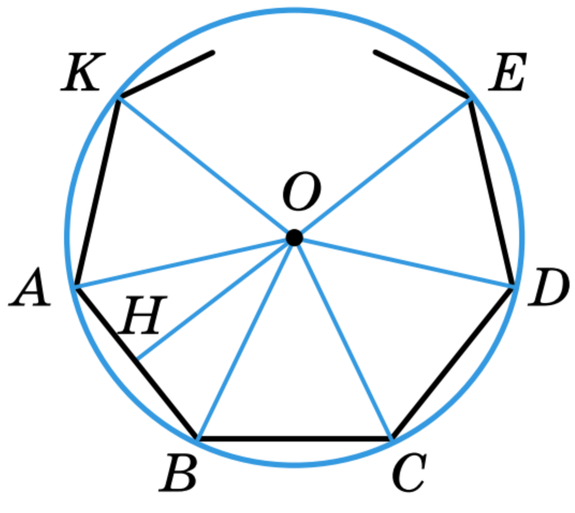
Якщо правильний многокутник має n сторін, то сума всіх його кутів (внутрішніх) дорівнює $180°(n - 2)$, а один із них — у n разів менший, тобто дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$.

Чим більше число n, тим більший кут правильного n-кутника.

Теорема 11. Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.

Доведення. Нехай $ABCDE...K$ — правильний n-кутник (мал. 17.2). Бісектриси його кутів A і B перетинаються в деякій точці O. Трикутник AOB рівнобедрений, бо $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де α — кут даного многокутника. Сполучимо точку O відрізками з усіма вершинами многокутника. Трикутники OBC і OBA рівні, бо в них сторона OB спільна, $BC = BA$ і $\angle OBC = \angle OBA$. Подібним способом переконуємося, що $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODE...$

Отже, $OA = OB = OC = OD = ... = OK$, тобто всі вершини даного правильного многокутника $ABCDE...K$ рівновіддалені від точки O. Тому коло радіуса OA — описане навколо даного многокутника. Першу частину теореми доведено.



Мал. 17.2

Оскільки трикутники OAB, OBC, OCD, ODE, ..., OKA рівні, то рівні і їх відповідні висоти, тобто перпендикуляри, опущені з точки O на всі сторони даного правильного многокутника. Отже, коло з центром O, яке дотикається до сторони AB, дотикається і до всіх сторін многокутника $ABCDE...K$. Це коло — вписане в даний многокутник. Другу частину теореми також доведено.

Як випливає з попередніх міркувань, центром кола, вписаного в правильний многокутник, і кола, описаного навколо нього, є одна і та сама точка O. Її називають *центром правильного многокутника*.

Кут, під яким з центра правильного многокутника видно його сторону, називають *центральним кутом многокутника*. Перпендикуляр, опущений з центра правильного многокутника на його сторону, — *апофема* правильного многокутника. На малюнку 17.2 $\angle AOB$ — центральний кут правильного многокутника $AB...K$, а OH — його апофема.

Міра центрального кута правильного n-кутника дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$. Чому?

У вершинах правильних многокутників звичайно знаходяться центри кульок у підшипниках, центри отворів на фланцях (мал. 17.3), кінці зубів круглих пилок тощо.



Мал. 17.3

Плитки і плити для покриття підлоги в будинках, площ і вулиць, аеродромів здебільшого виготовляють у формі правильних многокутників (мал. 17.4).



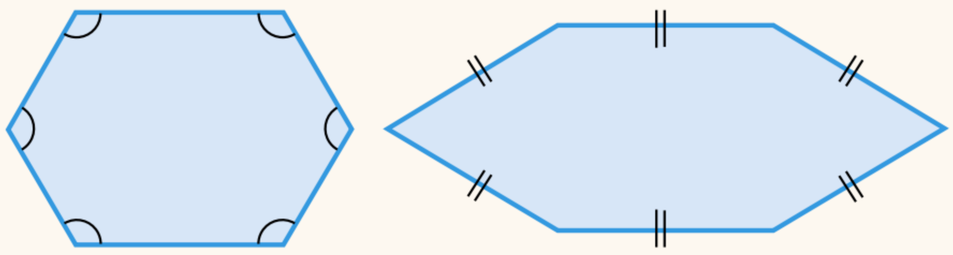
Мал. 17.4

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



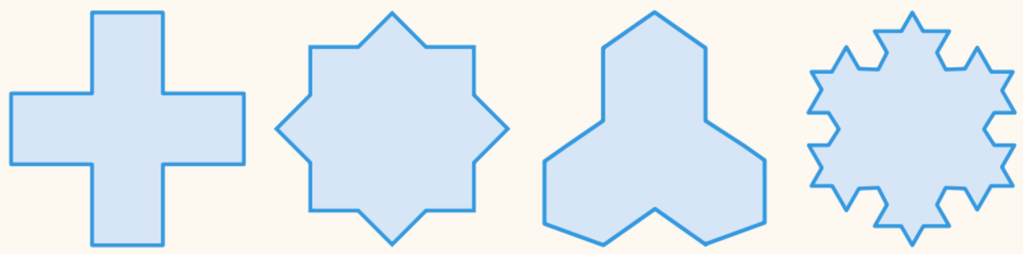
Чи можна з означення правильного многокутника вилучити словосполучення «сторони рівні» або «кути рівні»? Ні, бо опуклий многокутник, усі кути якого рівні або всі сторони рівні, може бути й неправильним (мал. 17.5).

Приклади неопуклих многокутників, усі сторони яких рівні, наведено на малюнках 17.6. Їх не вважають правильними многокутниками.



а *б*

Мал. 17.5



а *б* *в* *г*

Мал. 17.6

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

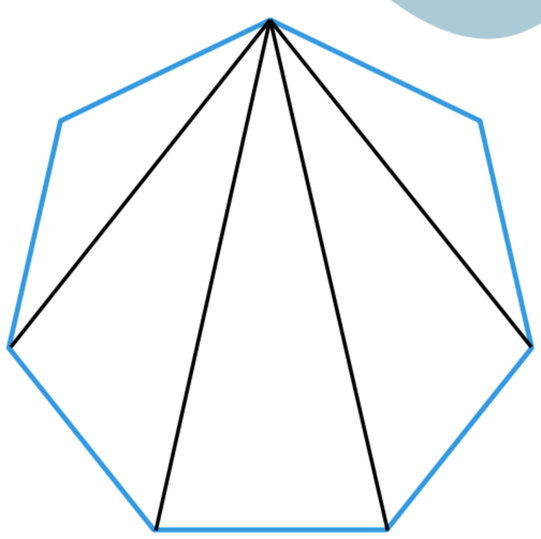
1. Сформулюй означення правильного многокутника.
2. Чому дорівнює сума кутів правильного многокутника?
3. Чому дорівнює міра внутрішнього кута правильного n-кутника?
4. Чому дорівнює міра центрального кута правильного n-кутника?
5. Чи можна навколо кожного правильного многокутника описати коло?
6. Чи можна у кожний правильний многокутник вписати коло?
7. Що називають центром правильного многокутника?
8. Що називають апофемою правильного многокутника?
9. Наведи приклади предметів з оточуючого середовища, які мають форму правильних многокутників.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Скільки діагоналей має правильний n-кутник?

- Із кожної вершини правильного n-кутника виходить $n - 3$ діагоналі (мал. 17.7). Усього вершин n. Маємо добуток $n(n - 3)$. Але кожна діагональ виходить із двох різних вершин. Тому $n(n - 3)$ — подвоєна кількість діагоналей. Отже, кожний правильний n-кутник (як і кожний опуклий многокутник) має $0{,}5n(n - 3)$ діагоналей. Трикутник діагоналей не має.



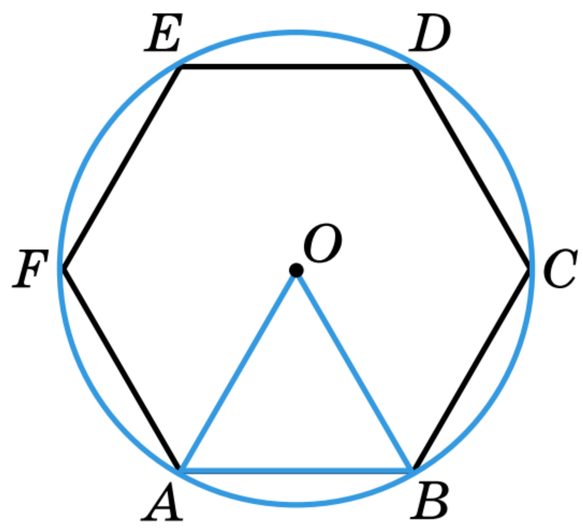
Мал. 17.7

Відповідь. Правильний n-кутник має $\dfrac{n(n-3)}{2}$ діагоналей.

2. Доведи, що сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу цього кола.

• На малюнку 17.8 зображено правильний шестикутник $ABCDEF$, вписаний у коло з центром у точці O. Доведемо, що $AB = OA$. Розглянемо трикутник AOB. Оскільки $AO = BO$, як радіуси одного кола, то трикутник AOB — рівнобедрений.

$\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ — як центральний кут правильного шестикутника. Тоді $\angle OAB = \angle OBA = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ = \angle AOB$. Отже, $\triangle AOB$ — рівносторонній, а тому $AB = OA$.



Мал. 17.8

ВИКОНАЄМО УСНО



736. Як інакше називають правильний трикутник і правильний чотирикутник?

737. Сторона правильного n-кутника дорівнює a. Знайди його периметр.

738. Периметр правильного n-кутника дорівнює $2p$. Знайди довжину його сторони.

739. Знайди сторону правильного п'ятикутника, якщо вона менша від периметра на 20 см.

А 4 см **Б** 10 см **В** 5 см **Г** не можна встановити

740. Чому дорівнює сума кутів правильного п'ятикутника?

А 180° **Б** 360° **В** 900° **Г** 540°

741. Скільки діагоналей має правильний шестикутник?

А 6 **Б** 9 **В** 12 **Г** 18

742. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів квадрата, взятих по одному при кожній його вершині? А правильного трикутника?

743. Чи існує правильний многокутник, центральний кут якого дорівнює 60°? А 50°?

744. Які многокутники будуть намальовані внаслідок виконання кожного з кодів?



745. Чому плити для покриття площ, вулиць, аеродромів не роблять у формі правильних п'ятикутників?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Знайди суму кутів правильного n-кутника, якщо (746, 747):

746. а) $n = 5$; б) $n = 7$; в) $n = 18$.

747. а) $n = 8$; б) $n = 12$; в) $n = 15$.

Знайди кут правильного n-кутника, якщо (748, 749):

748. а) $n = 5$; б) $n = 8$; в) $n = 20$.

749. а) $n = 10$; б) $n = 6$; в) $n = 15$.

750. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць називає правильний n-кутник, другий / друга — знаходить його внутрішній кут, третій / третя — зовнішній кут, а четвертий / четверта — центральний кут.

751. Знайди зовнішній і центральний кути правильного n-кутника, якщо:

а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = 100$.

752. Сума зовнішніх кутів правильного n-кутника, взятих по одному при кожній його вершині, дорівнює 360°. Доведи.

Скільки діагоналей має правильний n-кутник, якщо (753, 754):

753. а) $n = 5$; б) $n = 7$; в) $n = 100$?

754. а) $n = 8$; б) $n = 12$; в) $n = 16$?

755. Скільки сторін має правильний многокутник, кожний із кутів якого дорівнює:

а) 108°; б) 135°; в) 144°?

756. How many sides does a regular polygon have, if each of its angles is equal to:

a) 120°; b) 140°; c) 150°?

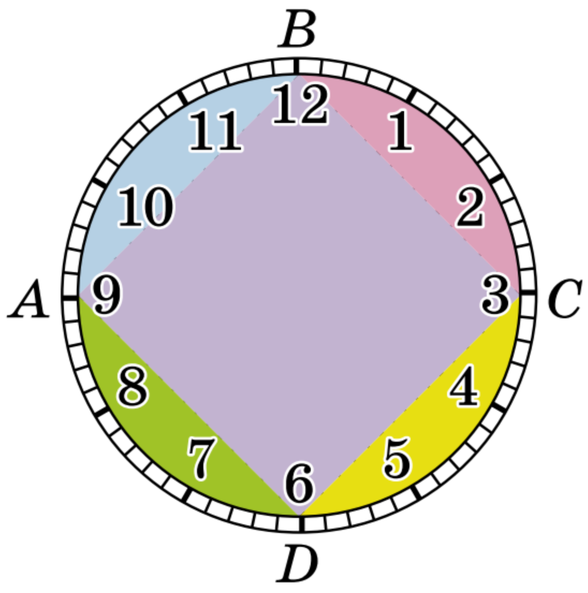
Скільки сторін має правильний многокутник, кожний із зовнішніх кутів якого дорівнює (757, 758):

757. а) 24°; б) 30°; в) 36°?

758. а) 15°; б) 40°; в) 72°?

759. Сторона квадрата дорівнює 10 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.

760. Доведи, що на малюнку 17.9 утворений чотирикутник $ABCD$ — правильний.



Мал. 17.9

761. Установи відповідність між мірами центральних кутів правильних многокутників (1–4) та мірами їх внутрішніх кутів (А–Д).

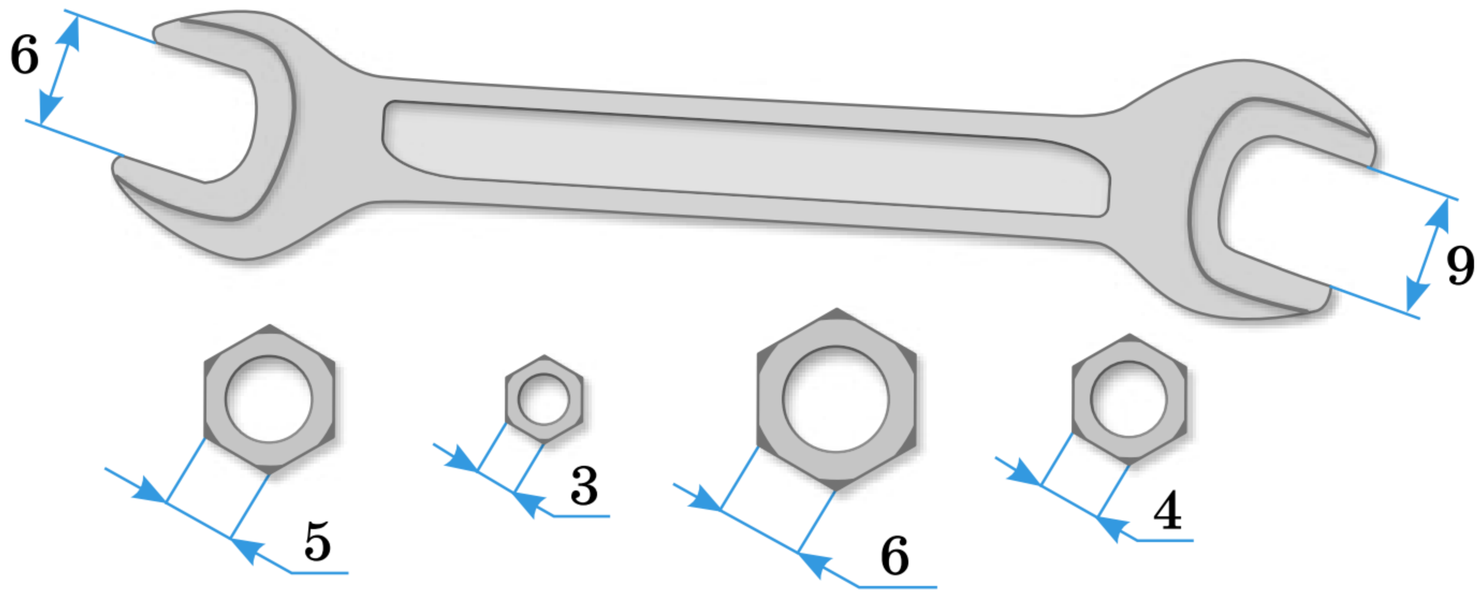
1 36°	**А** 150°
2 45°	**Б** 135°
3 30°	**В** 145°
4 24°	**Г** 144°
	Д 156°

762. Сторона правильного многокутника дорівнює a, а радіус описаного навколо нього кола R. Знайди радіус вписаного кола.

763. Сторона правильного многокутника дорівнює a, а радіус вписаного в нього кола r. Знайди радіус описаного навколо нього кола.

764. R і r — радіуси описаного навколо правильного многокутника і вписаного в нього кіл. Знайди сторону многокутника.

765. На малюнку 17.10 зображено гайковий ключ і 4 гайки. Які з гайок можна відкрутити цим ключем?



Мал. 17.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



766. Доведи, що в правильному шестикутнику протилежні сторони паралельні.

767. Знайди діагоналі правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

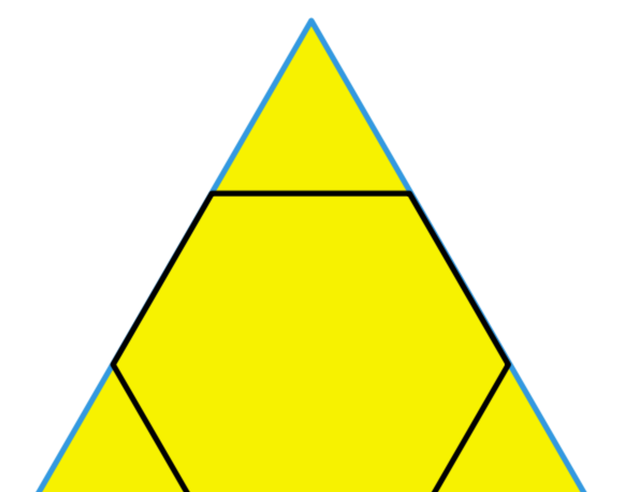
768. Відстань між паралельними сторонами правильного шестикутника дорівнює l. Знайди сторону шестикутника.

769. У правильному восьмикутнику зі стороною 6 см сполучено середини чотирьох сторін, взятих через одну. Доведи, що утворений чотирикутник — квадрат, і знайди його сторону.

770. У правильному дванадцятикутнику зі стороною 8 см сполучено середини сторін, взятих через одну. Доведи, що утворений шестикутник — правильний, і знайди його периметр.

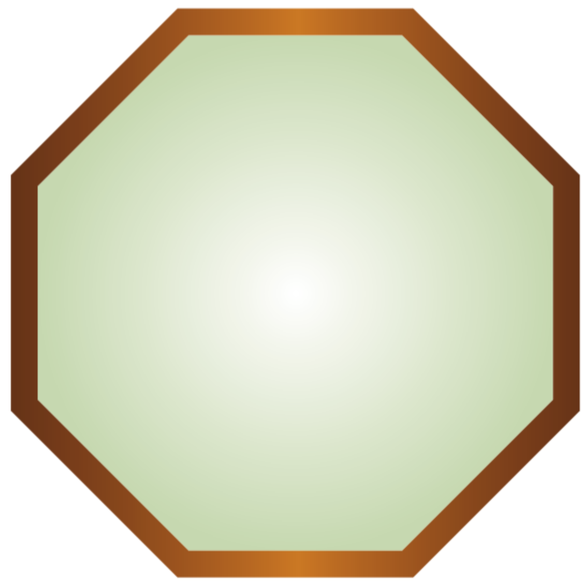
771. Доведи, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.

772. Майстриня вітражів спершу вирізала з кольорового скла правильний трикутник зі стороною m, а потім зрізала його кути, щоб отримати правильний шестикутник (мал. 17.11). Знайди довжину сторони шестикутника.



Мал. 17.11

773. Дизайнерка створює дзеркало у формі правильного восьмикутника. Для цього вона взяла квадратне дзеркало зі стороною a і зрізала його кути. Знайди довжину сторони утвореного восьмикутного дзеркала (мал. 17.12).



Мал. 17.12

774. Доведіть, що в правильному п'ятикутнику:

а) всі діагоналі рівні;

б) кожна діагональ паралельна одній із його сторін;

в) дві діагоналі, що виходять з однієї вершини, утворюють 3 рівнобедрені трикутники.

775. У якому відношенні діагональ правильного п'ятикутника ділить кут, із вершини якого вона виходить?

776. Під яким кутом перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?

777. ***Задача Каталана.*** Розбий даний правильний шестикутник на 7 правильних шестикутників і 12 рівносторонніх трикутників.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



778. 1) Виріж з цупкого паперу такі три рівні ромби, щоб із них можна було скласти правильний шестикутник.

Знайди:

а) кути кожного ромба та утвореного шестикутника;

б) відношення периметрів шестикутника і ромба.

2) Виріж з цупкого паперу десять рівних правильних трикутників і склади із них правильний трикутник і правильний шестикутник.

Знайди відношення:

а) периметрів утворених фігур;

б) площ утворених фігур.

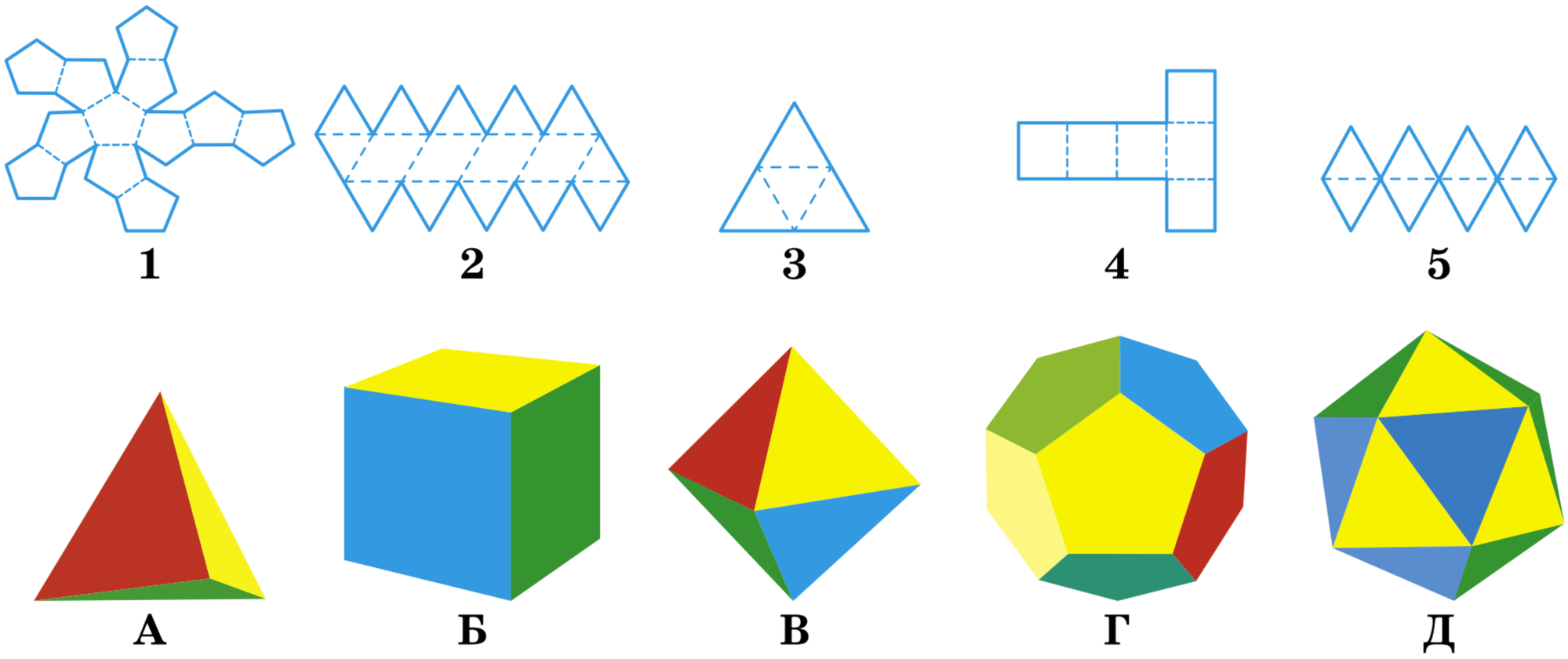
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



779. Знайди висоти паралелограма, якщо його сторони 5 см і 12 см, а кут між ними 60°.

780. Знайди радіус кола, якщо хорда довжиною 24 см віддалена від центра на 5 см.

781. **Із правильних многокутників (трикутників, чотирикутників і п'ятикутників) складаються розгортки правильних многогранників. За поданими нижче розгортками (мал. 17.13) спробуй виготовити моделі правильних многогранників (врахуй допуски на склеювання). Установи відповідність між розгортками правильних многогранників (1–5) і відповідними многогранниками (А–Д).**



Мал. 17.13

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Многокутники у ландшафтному дизайні

§ 18 ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ ТА КОЛА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- правильний шестикутник — regular hexagon
- вписане коло — inscribed circle
- описане коло — circumscribed circle

Встановимо співвідношення між стороною правильного n-кутника a_n і радіусами R_n і r_n описаного і вписаного в нього кіл.

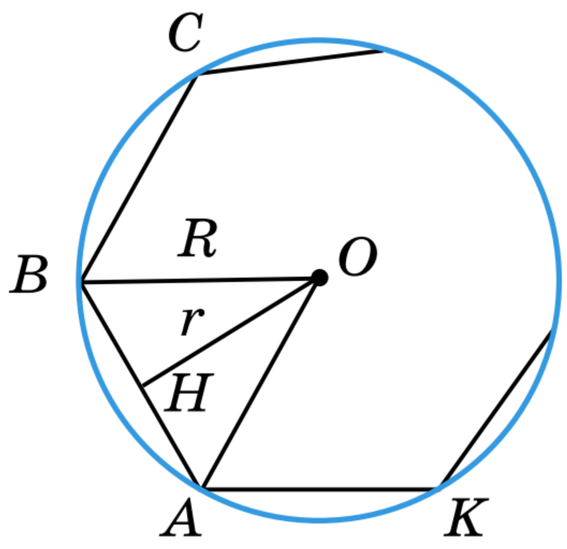
Нехай $ABC...K$ — правильний n-кутник з центром O і стороною $AB = a_n$ (мал. 18.1).

Тоді $OA = OB = R$, $OH = r$. Центральний кут AOB, який спирається на сторону AB правильного n-кутника, дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$. Тоді $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$, $AH = \frac{1}{2}a_n$, бо висота OH рівнобедреного $\triangle AOB$ є одночасно і бісектрисою, і медіаною.

Із прямокутного $\triangle AOH$ маємо:

1) $\frac{AH}{AO} = \sin\frac{180^\circ}{n}$ або $\frac{a_n}{2R_n} = \sin\frac{180^\circ}{n}$,

звідки $a_n = 2R_n \sin\frac{180^\circ}{n}$ і $R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.



Мал. 18.1

2) $\frac{AH}{HO} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ або $\frac{a_n}{2r_n} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$,

звідки $a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ і $r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

Ці формули дають можливість виражати сторони правильного n-кутника через радіуси описаного або вписаного кіл і, навпаки, можна знаходити радіуси описаного або вписаного кіл, знаючи сторону правильного n-кутника.

Наприклад, підставивши у формули $a_n = 2R_n \sin\frac{180^\circ}{n}$ і $a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ замість n числа 3, 4 і 6, отримаємо вираження довжин сторін правильних трикутників, чотирикутників і шестикутників через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола.

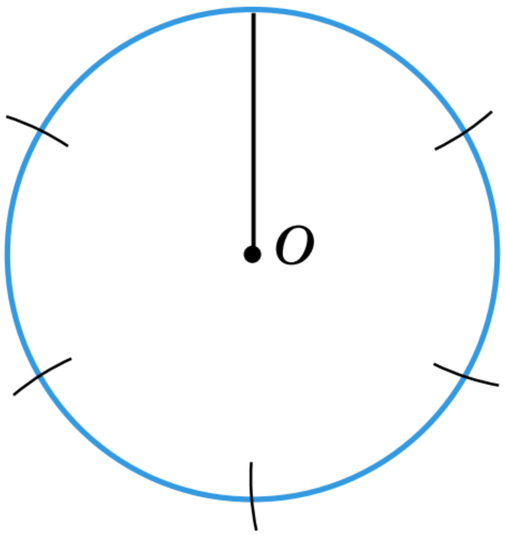
Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Сторона правильного n-кутника	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_6 = R$
	$a_3 = 2r\sqrt{3}$	$a_4 = 2r$	$a_6 = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$

Якщо у формули $R_n = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ і $r_n = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ замість n підставити числа 3, 4 і 6, то отримаємо вираження радіуса R описаного кола і радіуса r вписаного кола через сторону правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a_n.

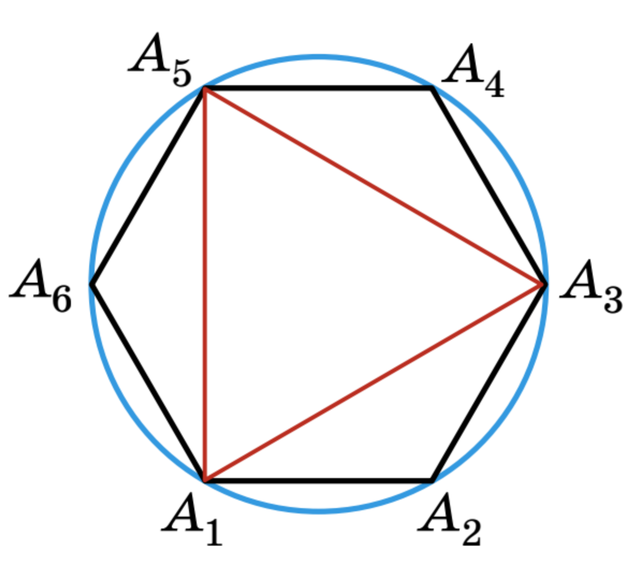
Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Зверни увагу!

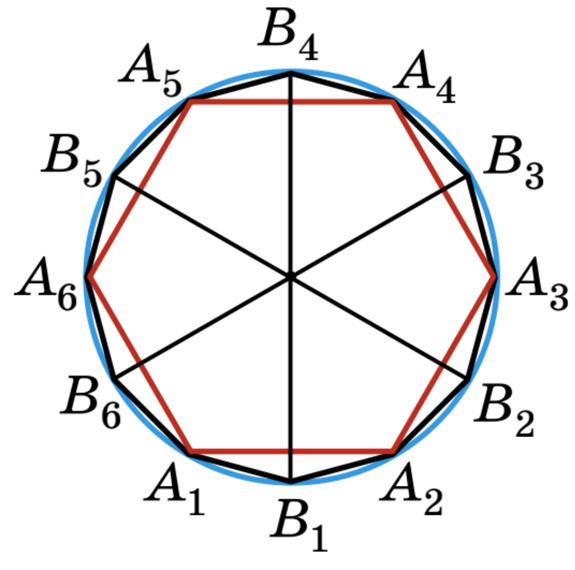
Сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу описаного кола. Отже, щоб поділити коло на 6 рівних частин, досить послідовно відкласти 6 хорд, що дорівнюють радіусу кола (мал. 18.2). Якщо точки поділу з'єднати через одну, то отримаємо правильний трикутник (мал. 18.3). Якщо ж кожну з утворених 6 дуг поділити навпіл і точки поділу послідовно сполучити, то утвориться правильний дванадцятикутник (мал. 18.4) і т. д. Отже, якщо коло поділено на n рівних частин, то це коло не важко поділити на $2n$ рівних частин.



Мал. 18.2



Мал. 18.3

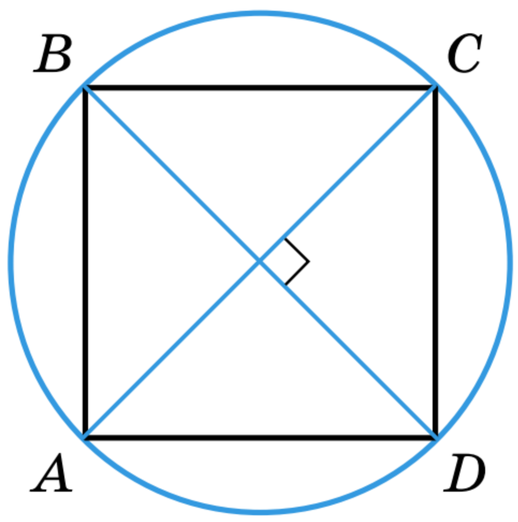


Мал. 18.4

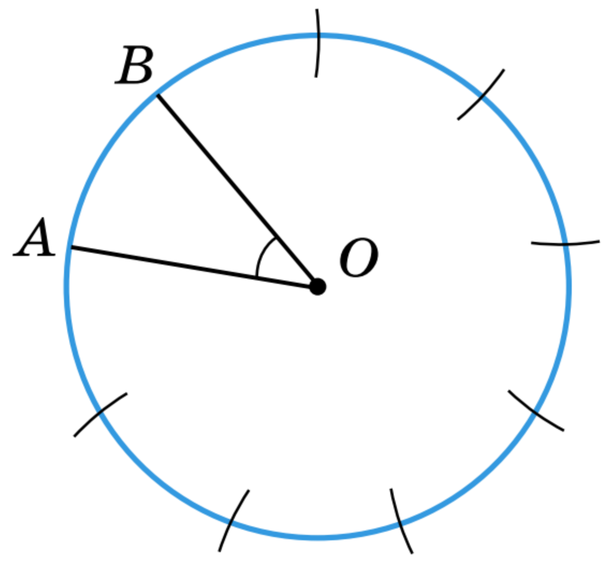
Щоб побудувати правильний чотирикутник (квадрат), у колі проводять два перпендикулярні діаметри, наприклад AC і BD (мал. 18.5) і по-

слідовно сполучають їх кінці. Утворений у такий спосіб чотирикутник $ABCD$ — квадрат.

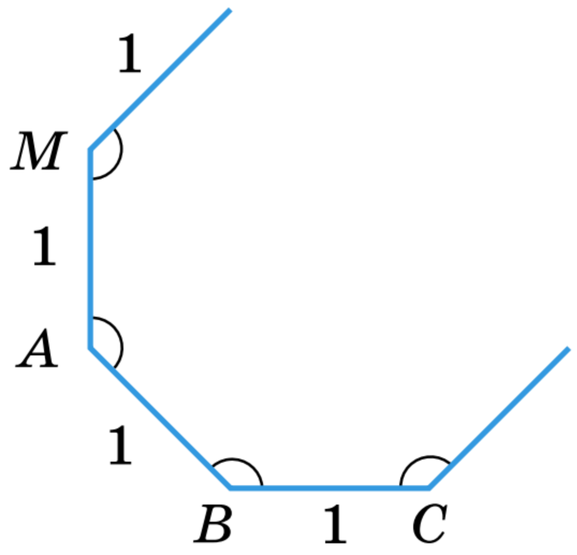
Використовуючи малюнок 18.5, спробуй самостійно побудувати правильний восьмикутник.



Мал. 18.5



Мал. 18.6



Мал. 18.7

Ти вже знаєш, як будувати правильні трикутник, чотирикутник і шестикутник. А як побудувати правильний п'ятикутник чи будь-який n-кутник?

Якщо коло поділити на n рівних частин і одержані точки поділу послідовно сполучити відрізками, то утвориться правильний n-кутник. Отже, задача про побудову правильного n-кутника зводиться до поділу кола на n рівних частин. Центральний кут $\angle AOB$, який спирається на сторону правильного n-кутника, вписаного в коло, дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$. Тому, якщо потрібно поділити коло, наприклад, на 9 рівних частин, ми спочатку обчислюємо відповідний центральний кут ($360^\circ : 9 = 40^\circ$) і за допомогою транспортира будуємо такий центральний кут — $\angle AOB = 40^\circ$ (мал. 18.6).

А далі розхилом циркуля, що дорівнює AB, «обходимо» все коло. Якщо точки поділу послідовно сполучити відрізками, то утвориться правильний дев'ятикутник. Він правильний, бо його сторони рівні (як хорди, що стягують рівні дуги) і кути рівні (як вписані кути, що спираються на рівні дуги).

Можна будувати правильні многокутники і без використання кола. Побудуємо, наприклад, правильний восьмикутник зі стороною 1 см. Оскільки кут правильного восьмикутника дорівнює 135°, то за допомогою транспортира будуємо спочатку $\angle A = 135^\circ$ (мал. 18.7) і на його сторонах відкладаємо відрізки $AM = AB = 1$ см. А далі послідовно добудовуємо кути 135° і відкладаємо на них відрізки довжиною 1 см. Отриманий восьмикутник буде правильним, бо його кути і сторони рівні за побудовою. Однак побудований у такий спосіб восьмикутник практично може дуже відрізнятися від правильного восьмикутника, бо неминучі креслярські похибки додаються і в результаті можуть бути надто великими. У класичних побудовах дозволяється користуватися лише циркулем і лінійкою, а не транспортиром.

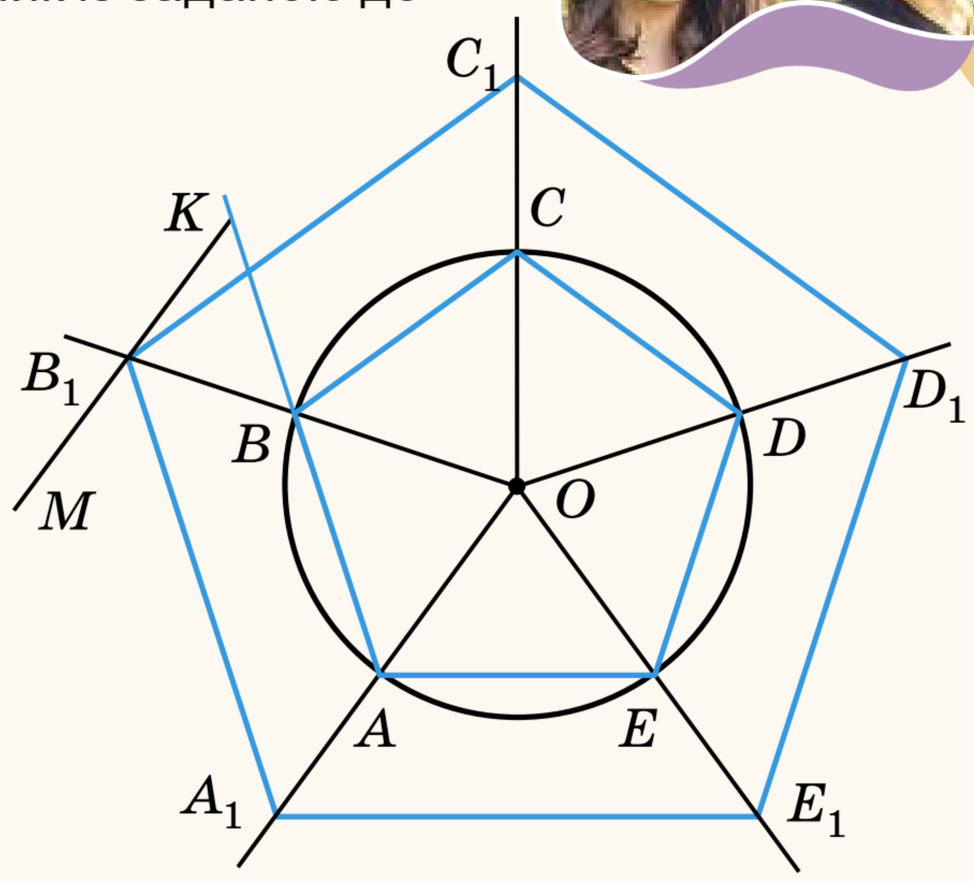
Як можна знайти площу правильного n-кутника? Як відомо, площу будь-якого многокутника з периметром $2p$, описаного навколо кола радіуса r, можна знайти за формулою $S = pr$. Ця формула справедлива і для правильного n-кутника.

Якщо його сторона a, то $p = \frac{1}{2}na$, тоді $S = \frac{1}{2}nar$.



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вище йшлося про побудову довільного правильного n-кутника. А як побудувати правильний n-кутник із заданою довжиною сторони a (або радіуса r чи R кола, вписаного в цей многокутник чи описаного навколо нього)? Такі побудови виконують, користуючись методом подібності. Наприклад, щоб побудувати правильний п'ятикутник зі стороною $a_5 = 2$ см, спочатку будують довільний правильний п'ятикутник $ABCDE$ (мал. 18.8) і проводять промені OA, OB, OC, OD, OE. На промені AB відкладають відрізок $AK = a_5 = 2$ см і проводять $KM \parallel OA$. Якщо KM перетинає промінь OB в точці B_1, то далі проводять $B_1A_1 \parallel BA$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ і т. д. П'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$ — той, який треба було побудувати.



Мал. 18.8

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Коло, круг та їх елементи. Урок 3).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

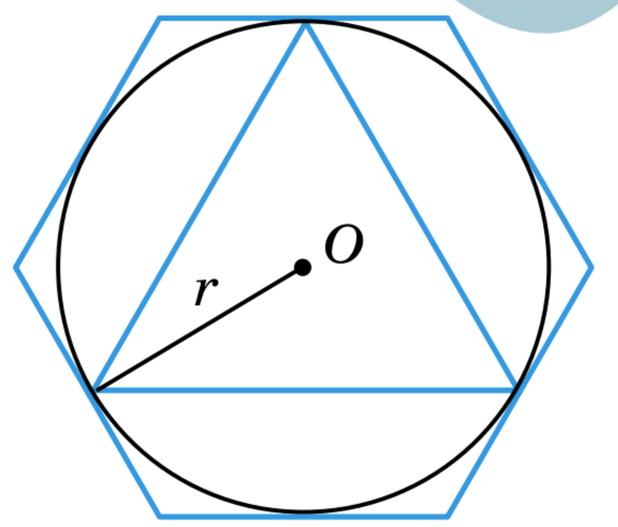
1. Як виражається через радіус описаного кола сторона правильного:
   а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
2. Як виражається через радіус вписаного кола сторона правильного:
   а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
3. Як виражається радіус описаного кола через сторону правильного:
   а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
4. Як виражається радіус вписаного кола через сторону правильного:
   а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
5. Як знайти площу правильного n-кутника?
6. Як побудувати правильний n-кутник?
7. Як побудувати правильний n-кутник за його стороною?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Сторона правильного шестикутника, описаного навколо кола, дорівнює 4 см. Знайди сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

• Нехай радіус кола r (мал. 18.9). Тоді для шестикутника це буде радіус вписаного кола, а для трикутника — радіус описаного кола.

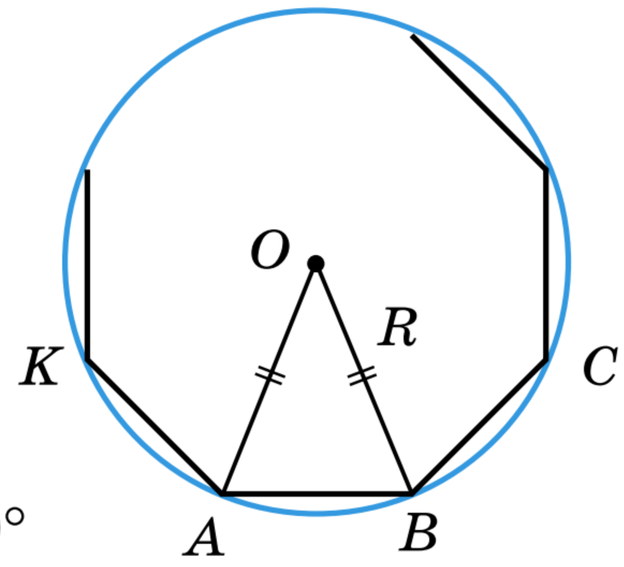


Мал. 18.9

Отже, $r_6 = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6 = R_3$, то $a_3 = R_3\sqrt{3}$, $a_3 = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$ см.

2. Доведи, що площу правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R, можна визначити за формулою $S = \dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

• На малюнку 18.10 зображено правильний n-кутник $ABC...K$, вписаний у коло радіуса R. Розглянемо $\triangle AOB$: $AO = BO = R$, $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{n}$, а тому



Мал. 18.10

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\angle AOB = \frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Оскільки $ABC...K$ — правильний n-кутник, то його площа S у n разів більша за площу трикутника AOB.

Отже, $S = n\cdot S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

Зверни увагу на формули, за допомогою яких можна знаходити площу правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a.

Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Площа правильного n-кутника	$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = a^2$	$S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

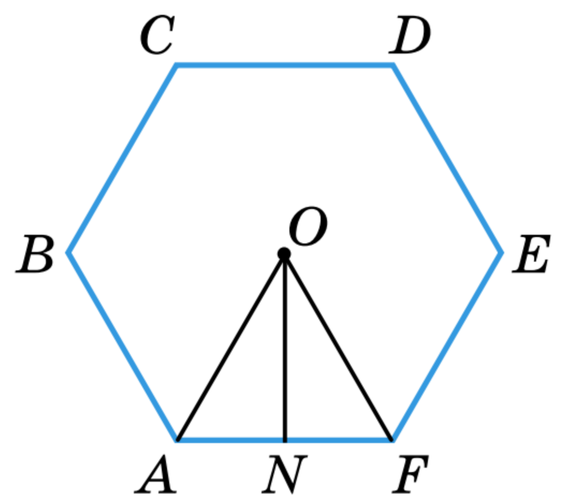
ВИКОНАЄМО УСНО



782. Сторона правильного чотирикутника дорівнює a. Чому дорівнює: а) його периметр; б) довжина діагоналі; в) кут між діагоналями; г) радіус описаного кола; ґ) радіус вписаного кола; д) площа чотирикутника?

783. Діагональ правильного чотирикутника дорівнює d. Чому дорівнює: а) сторона чотирикутника; б) його периметр; г) радіус описаного кола; ґ) радіус вписаного кола; д) площа чотирикутника?

784. Сторона правильного шестикутника дорівнює a (мал. 18.11). Знайди: а) його периметр; б) радіус описаного кола; в) радіус вписаного кола; г) відстань між найвіддаленішими точками шестикутника; ґ) площу шестикутника.



Мал. 18.11

785. Сторона квадрата, описаного навколо кола, дорівнює a. Знайди сторону правильного шестикутника, вписаного в це коло.

А a **Б** $2a$ **В** $\frac{a}{2}$ **Г** $\frac{a}{4}$

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



786. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць записує довжину радіуса кола, а другий / друга має знайти сторону вписаного в це коло правильного трикутника і квадрата. Потім учні / учениці міняються ролями.

787. Радіус кола дорівнює 8 см. Знайди сторону вписаного в це коло правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

788. Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайди сторону описаного навколо нього правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 18$.

789. Сторона правильного n-кутника дорівнює $4\sqrt{3}$. Знайди радіус кола, описаного навколо нього, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

790. Сторона правильного n-кутника дорівнює $3\sqrt{6}$ см. Знайди радіус вписаного в нього кола, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 18$.

791. **ЗНО** Установіть відповідність між многокутником (1–4) і радіусом кола (А–Д), вписаного в цей многокутник.

1 рівносторонній трикутник зі стороною $3\sqrt{3}$ см	**А** 1 см
2 квадрат зі стороною 2 см	**Б** 1,5 см
3 прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см	**В** $\sqrt{3}$ см
4 правильний шестикутник зі стороною 2 см	**Г** 2 см
	Д 4 см

792. Сторона правильного многокутника, вписаного в коло, дорівнює 12 см. Знайди периметр і площу цього многокутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$.

793. Знайди площу правильного n-кутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 4 см і:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

794. Знайди площу правильного n-кутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 6 см. Розглянь випадки:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$; ґ) $n = 12$.

795. У коло вписано правильний шестикутник, периметр якого 24 см. Знайди периметр і площу вписаного в це коло правильного:
а) трикутника; б) чотирикутника.

796. У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в це коло?

797. Ювелір виготовляє 3 різні прикраси з металевих дротів довжиною 36 см: у формі правильного трикутника, у формі правильного чотирикутника, у формі правильного шестикутника. Яка з підвісок матиме найбільшу площу, а яка — найменшу, якщо вся довжина дроту витрачається на контур фігури?

798. Побудуй правильний n-кутник, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = 8$; г) $n = 12$.

799. Побудуй правильний трикутник за даним радіусом R описаного кола.

800. Побудуй правильний шестикутник за: а) даним радіусом описаного кола; б) даною стороною; в) даним периметром.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



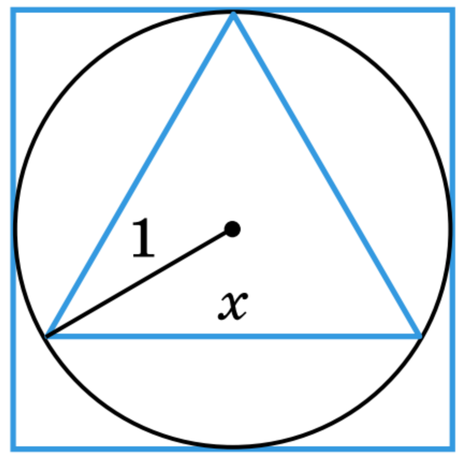
801. Дано квадрат. Побудуй правильний восьмикутник, чотири вершини якого збігалися б із вершинами даного квадрата. Як відносяться їхні периметри і площі?

802. Given a regular triangle ABC. Construct a regular hexagon $AKBPCT$. How do their perimeters and areas relate?

803. Користуючись малюнками 18.12, 18.13, знайдіть невідомі сторони x і y правильних многокутників.

804. Користуючись малюнком 18.14, знайди невідомі сторони x і y правильних многокутників.

805. Знайди довжини діагоналей правильного восьмикутника:
а) за радіусом описаного кола R;
б) за стороною a.



Мал. 18.12

806. Знайди довжини діагоналей правильного дванадцятикутника:
а) за радіусом описаного кола R;
б) за стороною a.

807. У коло радіуса 12 см вписано правильний n-кутник і послідовно сполучено середини його сторін. Визнач сторону утвореного многокутника і радіус описаного навколо нього кола, якщо:
а) $n = 4$;
б) $n = 6$.

808. У коло, радіус якого дорівнює R, вписано правильний трикутник, а на його стороні побудовано квадрат. Знайди радіус кола, описаного навколо квадрата.

809. У коло з радіусом R вписано правильний трикутник, у трикутник вписано коло, у яке вписано квадрат. Знайди сторону квадрата.

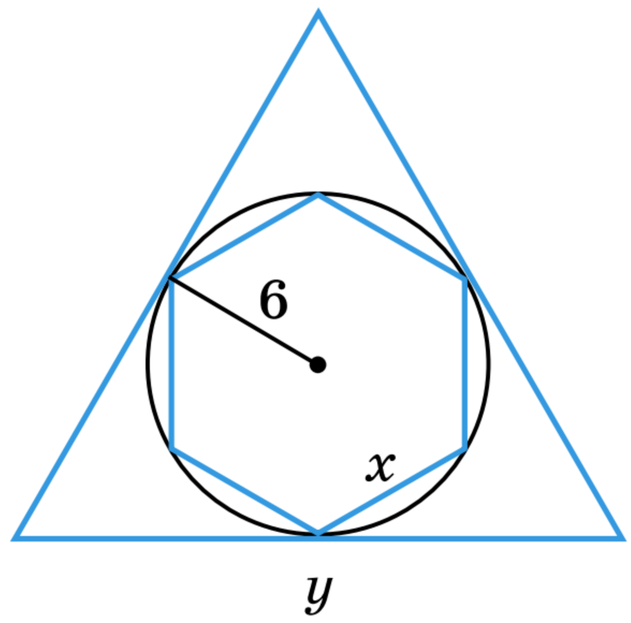
810. У коло вписано правильний шестикутник зі стороною a, а навколо кола описано правильний трикутник. Він є також вписаним у деяке коло. Знайди відношення радіусів цих кіл.

811. ***Відкрита задача.*** У коло з радіусом R вписано правильний трикутник. У трикутник вписано ..., а в нього вписано ... . Знайди сторону ... .

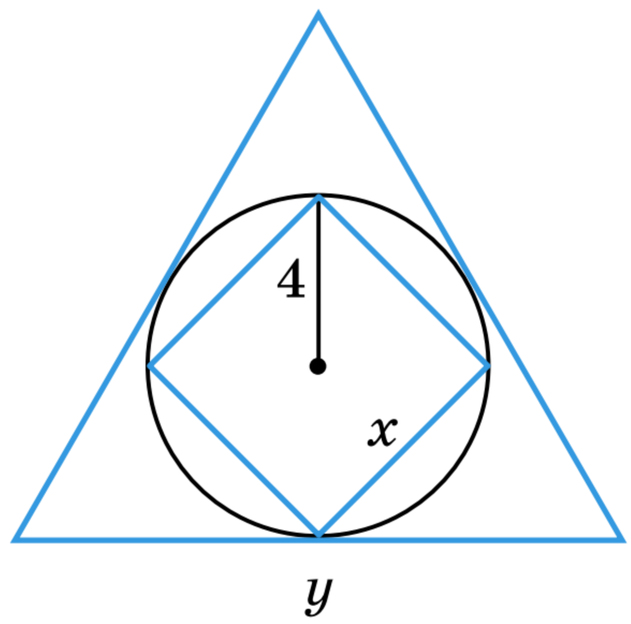
812. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, дорівнює l і служить для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата (мал. 18.15). Знайди відстань між центрами кіл.

813. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, дорівнює l і служить для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата. Знайди відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по один бік від хорди.

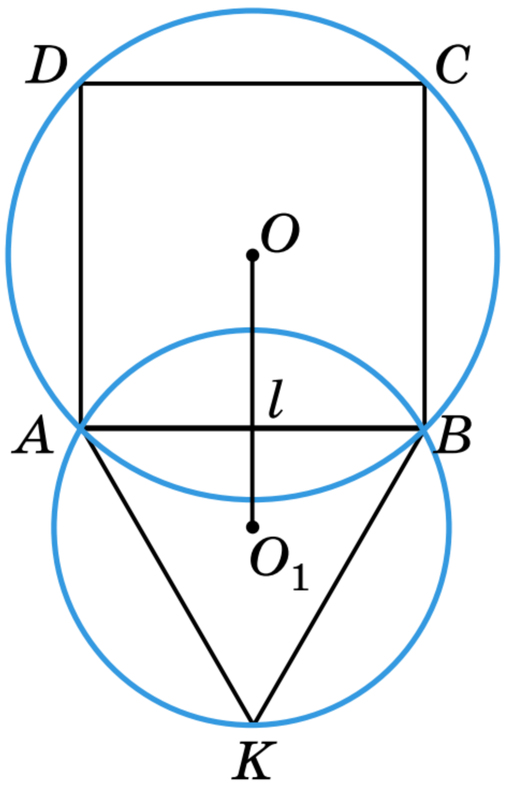
814. Майстриня кераміки виготовляє декоративну плитку двох форм — у вигляді правильного шестикутника та правильного трикутника, що займають однакову площу на стіні. Якою має бути сторона трикутної плитки, якщо сторона шестикутної дорівнює 10 см?



Мал. 18.13



Мал. 18.14



Мал. 18.15

815. Площа правильного шестикутника, описаного навколо кола, дорівнює $72\sqrt{3}$ см^2. Знайди площу правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

816. Площа правильного восьмикутника, вписаного в коло, дорівнює $162\sqrt{2}$ м^2. Установи відповідність між правильними многокутниками (1–4), вписаними в це коло, та значеннями їх площ (А–Д).

1 трикутник	**А** $\frac{243\sqrt{3}}{2}$
2 чотирикутник	**Б** 243
3 шестикутник	**В** $\frac{243\sqrt{2}}{4}$
4 дванадцятикутник	**Г** 162
	Д $\frac{243\sqrt{3}}{4}$

817. Побудуй правильний n-кутник зі стороною 2 см, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 6$;
в) $n = 9$; г) $n = 12$.

818. Дано коло радіуса R. Визнач сторону вписаного у це коло правильного:
а) восьмикутника; б) дванадцятикутника.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



819. Великий інтерес до геометричних побудов виявили всесвітньо відомі художники Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер, Сальвадор Далі, Мауріц Ешер. За допомогою правильних геометричних побудов вони досягали досконалості в зображенні простору. Розглянь ескіз Леонардо да Вінчі до його «Таємної вечері» (мал. 18.16), на якому, крім іншого, зображено побудову правильного восьмикутника, вписаного в коло, за його стороною.

а) Доведи, що така побудова забезпечує правильне визначення центра кола, описаного навколо правильного восьмикутника із заданою стороною.
б) Побудуй у такий спосіб правильний восьмикутник, сторона якого дорівнює 2 см.



Мал. 18.16

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



820. Скільки діагоналей має правильний 75-кутник?

821. Знайди кути правильного 30-кутника.

822. У якому відношенні ділять кут діагоналі правильного шестикутника, які виходять з вершини цього кута?

§ 19 ДОВЖИНА КОЛА І ДУГИ КОЛА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

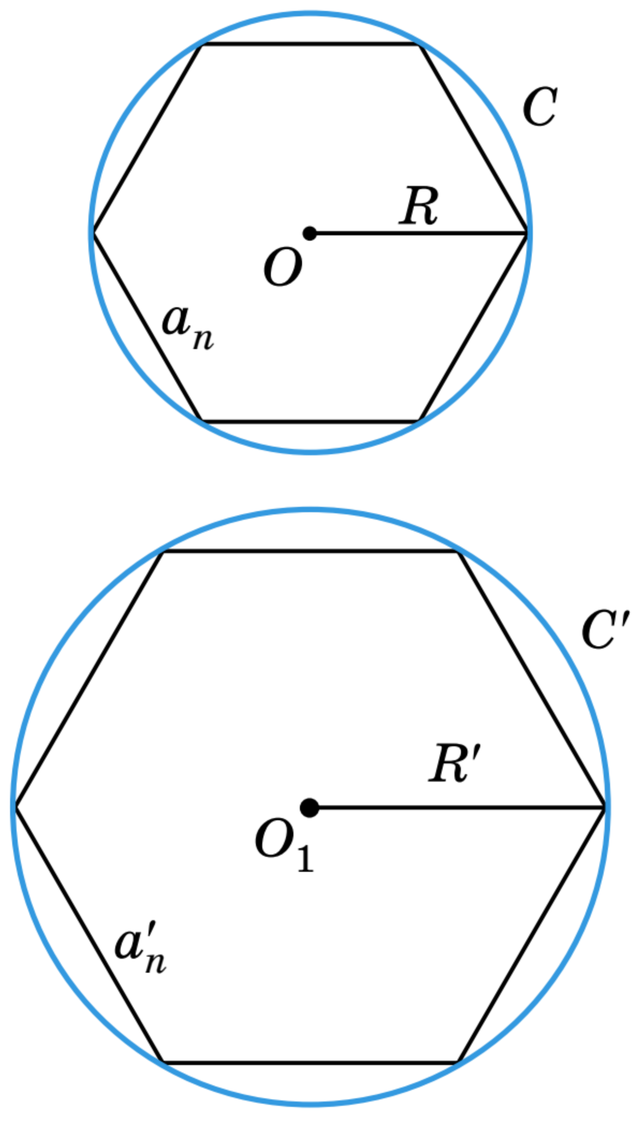
- відношення — ratio
- довжина кола — circumference
- довжина дуги кола — arc length

У молодших класах довжину кола визначають за допомогою нитки. Але чи можна інакше?

Уявімо, що в коло вписано правильний 10-кутник, потім — правильний 20-кутник, 40-кутник і т. д. Їх периметри P_{10}, P_{20}, P_{40}, ... дедалі менше і менше відрізняються від довжини даного кола C. Якщо кількість сторін многокутника (n) необмежено збільшується, то P_n наближається до C. Можна сказати так: *довжина кола* — це число, до якого наближається числове значення периметра вписаного в це коло правильного n-кутника при необмеженому збільшенні кількості його сторін.

Виведемо формулу, що виражає довжину кола через його радіус. Нехай маємо два довільні кола (мал. 19.1). Позначимо їх радіуси буквами R і R', а довжини — буквами C і C'. У кожне з цих кіл впишемо правильний n-кутник з однаковим числом сторін. Якщо a_n і a'_n — сторони цих многокутників, а P_n і P'_n — їх периметри, то $P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \dfrac{180^\circ}{n}$ і $P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \dfrac{180^\circ}{n}$. Звідки $\dfrac{P_n}{P'_n} = \dfrac{2R}{2R'}$.

Ця пропорція правильна при кожному значенні n. Тому якщо значення n необмежено збільшувати, то периметри P_n і P'_n прямуватимуть до довжин кіл C і C', а відношення периметрів — до відношення $\dfrac{C}{C'}$.



Мал. 19.1

Отже, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ або $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Оскільки $2R$ — діаметр кола радіуса R, то **відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.**

Це стале відношення прийнято позначати грецькою буквою π (читається «пі»). Число π ірраціональне, його наближене значення з точністю до сотих $\pi \approx 3{,}14$.

Отже, якщо C — довжина кола радіуса R, то $\frac{C}{2R} = \pi$, звідки

$$C = 2\pi R.$$

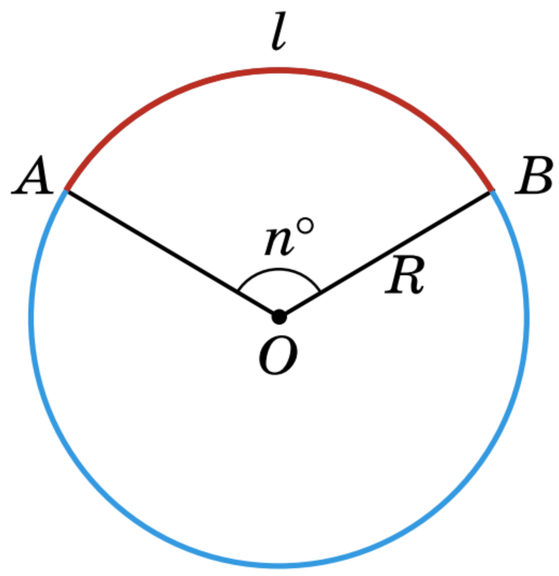
Це — *формула довжини кола*.

Наприклад, якщо радіус кола $R = 150$ см, то його довжина $C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 = 942$ (см).

Оскільки діаметр кола $d = 2R$, то формулу довжини кола можна записати у вигляді $C = \pi d$.

Виведемо формулу для обчислення довжини дуги кола (його частини).

Довжина дуги пропорційна до міри відповідного центрального кута. Дуга, що відповідає центральному куту $1°$, має довжину $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді центральному куту $n°$ відповідає дуга довжиною $\frac{\pi R n}{180}$ (мал. 19.2).



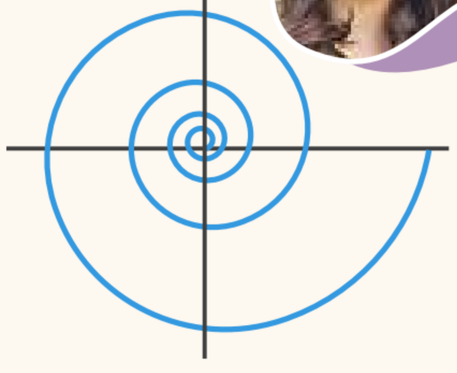
Мал. 19.2

Отже, довжина l дуги кола радіуса R, градусна міра якої становить $n°$, обчислюється за формулою: $l = \frac{\pi R n}{180}$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



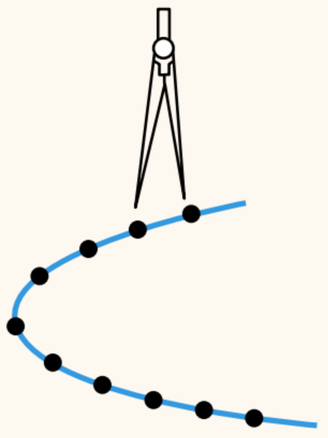
Довжину кола та його частин (з певним рівнем точності) уміли визначати ще в 2000 році до н. е. в Стародавніх Єгипті та Вавилоні. Пізніше у Стародавній Греції Архімед, прийнявши діаметр кола за одиницю, вписував у коло і описував навколо кола правильні многокутники. Знайшовши периметри вписаного й описаного 96-кутника, він встановив, що довжина кола діаметром 1 знаходиться у таких межах: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.



Мал. 19.3

Оскільки $3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$, то як наближене значення числа π для розв'язування багатьох практичних задач брали число $3{,}14$.

Досі йшлося про довжини кіл і їх частин. Крім них існує безліч інших кривих ліній: параболи, еліпси, спіралі (мал. 19.3) тощо. Як визначати довжини таких кривих або їх частин? З історії математики відомо, що



Мал. 19.4

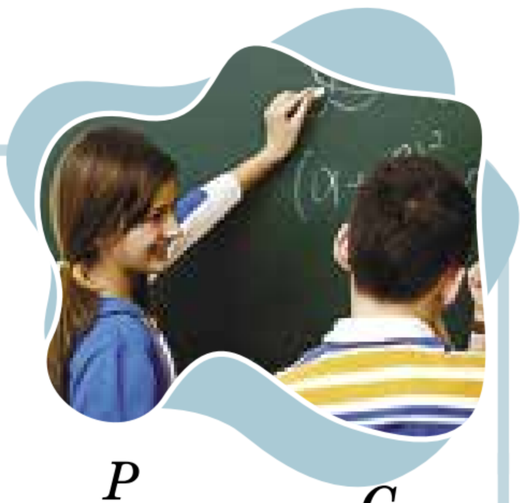
це була дуже складна задача, яка мала назву «спрямлення кривої». Визначити довжину дуги кривої, крім кола, вдалося лише у XVII столітті. Нині довжини кривих визначають методами математичного аналізу.

На практиці довжини таких ліній визначають наближено. Довжину кривої, яка не є частиною кола, наближено можна визначити, крокуючи по ній циркулем відомого розхилу (мал. 19.4).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

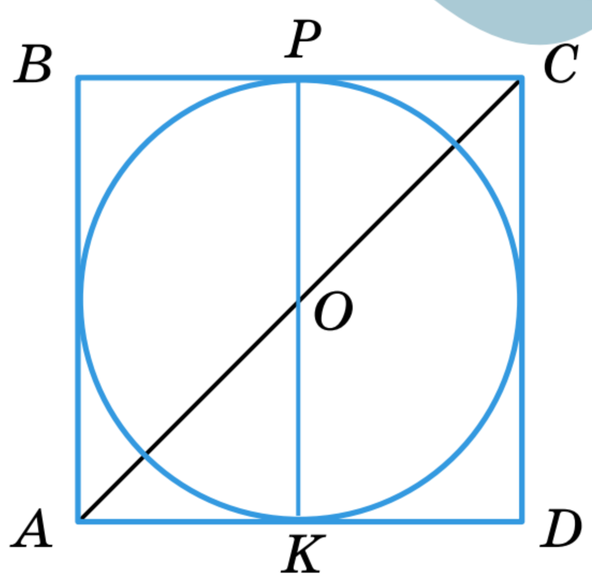
1. Як позначається відношення довжини кола до його діаметра?
2. Чому дорівнює наближене значення числа π з точністю до сотих?
3. За якою формулою знаходять: а) довжину кола; б) довжину дуги кола?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Знайди діагональ квадрата, описаного навколо кола, довжина якого дорівнює l.

• Позначимо радіус розглядуваного кола буквою r. Тоді $l = 2\pi r$, звідки $r = \dfrac{l}{2\pi}$. Сторона описаного квадрата дорівнює діаметру кола (мал. 19.5). $AB = KP = 2 \cdot r = \dfrac{l}{\pi}$. Шукана довжина діагоналі $AC = AB\sqrt{2} = \dfrac{l\sqrt{2}}{\pi}$.



Мал. 19.5

2. Знайди радіус кола, довжина якого дорівнює третині довжини кола радіуса 30 см.

• Довжина заданого кола $C = 2\pi \cdot 30 = 60\pi$ (см). Тоді довжина меншого кола $C_1 = \dfrac{1}{3}C = \dfrac{1}{3} \cdot 60\pi = 20\pi$ (см). Якщо шуканий радіус r, то $2\pi r = 20\pi$, звідки $r = 10$ (см).

ВИКОНАЄМО УСНО



823. Знайди наближене значення 10π; 2π; $\dfrac{\pi}{2}$.

824. Чому дорівнює довжина кола радіуса:

а) 1 см; б) 1 м?

825. Діаметр кола дорівнює 2 м. Чому дорівнює довжина кола?

А $0{,}5\pi$ м **Б** π м **В** 2π м **Г** 4π м

826. Чому дорівнює радіус кола завдовжки 10π см?

А 10 см **Б** 20 см **В** 5 см **Г** 2,5 см

827. Більше чи менше 5 м дорівнює довжина кола радіуса 1 м?

828. Учні виміряли відстань, яку проходить колесо велосипеда за один оберт, і отримали різні результати. Один учень отримав приблизне значення 220 см за допомогою формули. Інший виміряв відстань реально — і вона виявилася близько 215 см. Чому результати відрізняються?

829. Знайди довжину кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 10 м.

А 20π м **Б** 10π м **В** 5π м **Г** $2{,}5\pi$ м

830. Чому дорівнює довжина дуги AB кола з центром у точці O і радіусом 3 см, якщо $\angle AOB = 120°$?

А 2 см **Б** π см **В** 2π см **Г** 1 см

831. Як збільшиться довжина кола, якщо його радіус збільшити в k разів?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



832. Знайди довжину кола радіуса:

а) 30 см; б) 12 см; в) 25 см.

833. Знайди довжину кола діаметра:

а) 5 см; б) 16 см; в) 32 см.

834. Знайди радіус кола, довжина якого:

а) 12π см; б) 6,28 см; в) 40π см.

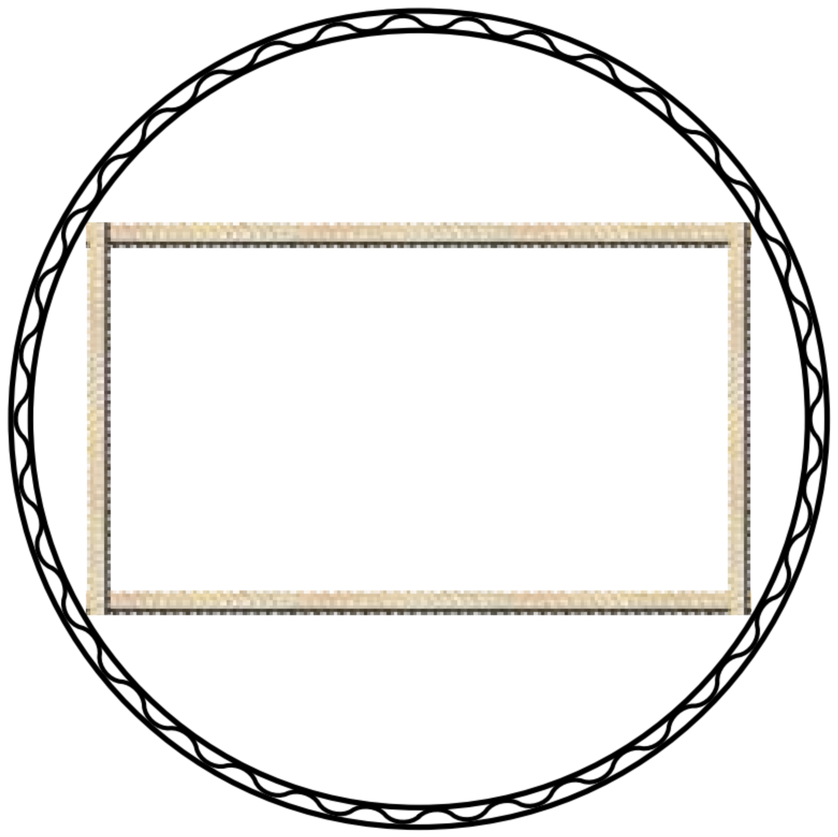
835. Find the diameter of a circle whose circumference is:

a) 7π см; b) 6,28 см; c) 15π см.

836. Знайдіть довжину кола, описаного навколо квадрата зі стороною 8 см, і довжину кола, вписаного в цей квадрат.

837. Діагональ квадрата дорівнює $4\sqrt{2}$. Знайди довжину кола, описаного навколо квадрата, і довжину кола, вписаного в цей квадрат.

838. Дизайнерка хоче зробити металеву рамку у формі прямокутника зі сторонами 33 см і 56 см. Потім цю рамку планує помістити всередину круглого декоративного обідка так, щоб він проходив через усі її вершини (мал. 19.6). Яку довжину матиме цей круглий обідок?



Мал. 19.6

839. Сторона правильного шестикутника дорівнює 9 см. Обчисли довжину кола, описаного навколо цього шестикутника, і кола, вписаного в нього.

840. Сторона правильного трикутника дорівнює 12 см. Знайди довжину кола: а) вписаного в трикутник; б) описаного навколо трикутника.

841. ЗНО Кола з центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються зовні. Радіус більшого кола в 3 рази перевищує радіус меншого кола. Обчисли довжину відрізка O_1O_2, якщо довжина меншого кола дорівнює 10π см. Уважай, що кола лежать в одній площині.

А 10 см **Б** 24 см **В** 30 см **Г** 15 см **Д** 20 см

842. ЗНО Два кола, довжини яких дорівнюють 9π см і 36π см, мають внутрішній дотик. Знайди відстань між центрами цих кіл (у см).

843. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць задає радіус кола, другий / друга — центральний кут цього кола, а третій / третя — знаходить довжину дуги кола відповідного центрального кута. Потім учні міняються ролями.

844. Знайди довжину дуги кола, радіус якого 6 см, а відповідний центральний кут: а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 120°.

845. Навколо рівностороннього трикутника ABC зі стороною 6 см описано коло. Знайди довжини дуг AB, BC і AC.

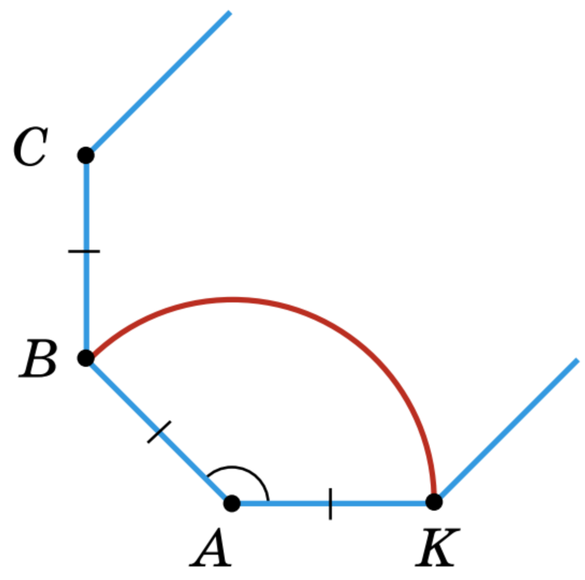
846. Точки M і N ділять коло діаметра 20 см на частини, пропорційні числам 2 і 3. Знайди довжини утворених дуг.

847. Точки P і K ділять коло радіуса 4 см на дві дуги так, що різниця їх довжин дорівнює $1{,}4\pi$ см. Знайди довжину більшої дуги.

848. На стороні $AC = 6$ см рівностороннього трикутника ABC, як на діаметрі, побудовано півколо. Знайди довжини дуг, на які це півколо ділять сторони AB і BC.

849. У парку устатковують круглу клумбу діаметром 36 дм. Дизайнер планує прокласти вузьку доріжку, що з'єднує дві точки на межі клумби так, щоб відстань між ними дорівнювала радіусу клумби. На які дві дуги поділить доріжка межу клумби?

850. Дано правильний многокутник $ABC...K$ (мал. 19.7), сторона якого дорівнює 18 см. BK — дуга кола з центром у точці A і радіуса AB. Установи відповідність між мірою кута A (1–4) та довжиною дуги BK (А–Д).



Мал. 19.7

1 60°	**А** 14π
2 108°	**Б** $10{,}8\pi$
3 140°	**В** 6π
4 156°	**Г** 15π
	Д $15{,}6\pi$

851. ЗНО На колі з центром O вибрано точки A і B так, що довжина дуги AB становить $\frac{1}{6}$ довжини цього кола. Визнач градусну міру кута AOB.

А 30° **Б** 45° **В** 60° **Г** 75° **Д** 90°

852. На котушці діаметра 0,6 м є 30 витків дроту. Знайди довжину дроту.

853. Знайди довжину орбіти штучного супутника Землі, якщо він рухається по колу на відстані 320 км від поверхні Землі. Радіус Землі дорівнює приблизно 6370 км.



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



854. Уяви, що кулю радіуса 6370 км оперезано по екватору обручем. Якщо довжину цього обруча збільшити на 1 м, він відійде від поверхні кулі (скрізь однаково) на якусь відстань. Знайди її.

855. Діаметр колеса поїзда 0,8 м. Скільки обертів за хвилину робить це колесо, коли поїзд їде зі швидкістю 60 км/год?

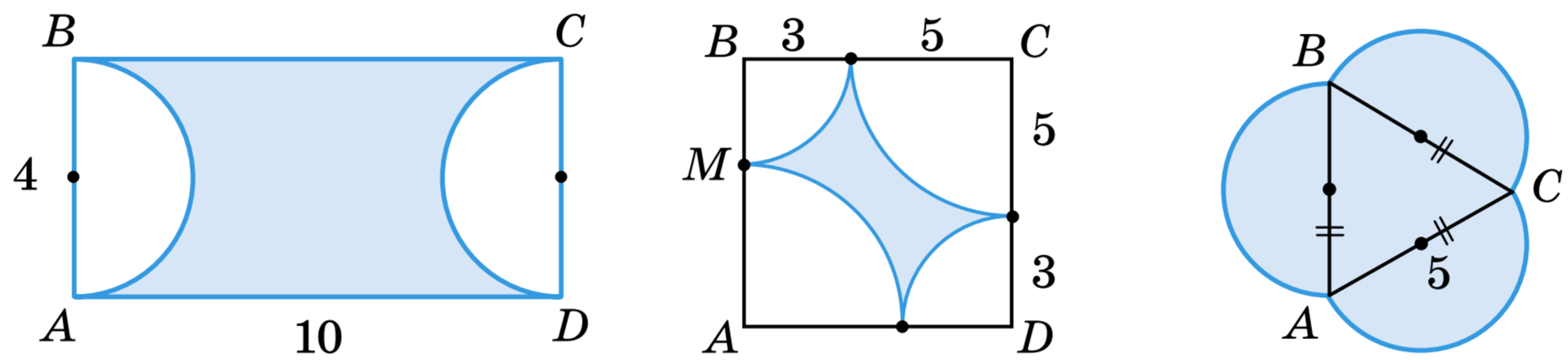


856. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а прилеглий гострий кут β. Знайди довжину описаного кола.

857. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а протилежний кут α. Знайди довжину описаного кола.

858. Як відносяться довжини двох кіл, одне з яких описане навколо правильного трикутника, а друге вписане в нього?

859. Знайдіть довжини ліній, які обмежують фігури, зображені на малюнку 19.8 (*а*, *б*).



а *б* *в*

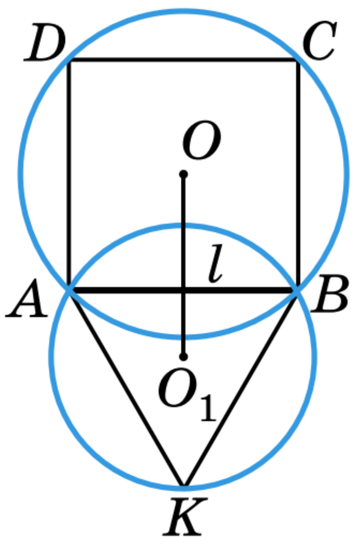
Мал. 19.8

860. Знайди довжину лінії, яка обмежує фігуру, зображену на малюнку 19.8, *в*.

861. Сторона ромба дорівнює 16 см, а кут — 30°. Знайди довжину вписаного кола.

862. Знайди довжину кола, описаного навколо трапеції зі сторонами a, a, a і $2a$.

863. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, дорівнює l і служить для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата (мал. 19.9). Знайди довжини цих кіл.



Мал. 19.9

864. Знайди довжину кола, яке довше від свого діаметра на 21,4 см.

865. Коло радіуса 3 см розігнуте в дугу радіуса 9 см. Знайди градусну міру утвореної дуги і міру відповідного їй центрального кута.

866. Сторона трикутника дорівнює $12\sqrt{2}$ см, а прилеглі до неї кути 45° і 75°. Знайди довжини дуг, на які вершини трикутника поділяють описане коло.

867. Сторона трикутника дорівнює $18\sqrt{3}$ см, а прилеглі до неї кути 15° і 120°. Знайди довжини дуг, на які вершини трикутника поділяють описане коло.

868. Навколо трикутника ABC, кути якого пропорційні числам 3, 4 і 5, описано коло радіуса 6 см. Знайди довжини його дуг AB, BC і CA.

869. Знайди довжини дуг, на які коло довжиною 20π см ділить хорда, проведена на відстані $5\sqrt{2}$ см від центра кола.

870. Довжина кола 24π см. Знайди довжини дуг, на які це коло ділить хорда довжиною $12\sqrt{3}$ см.

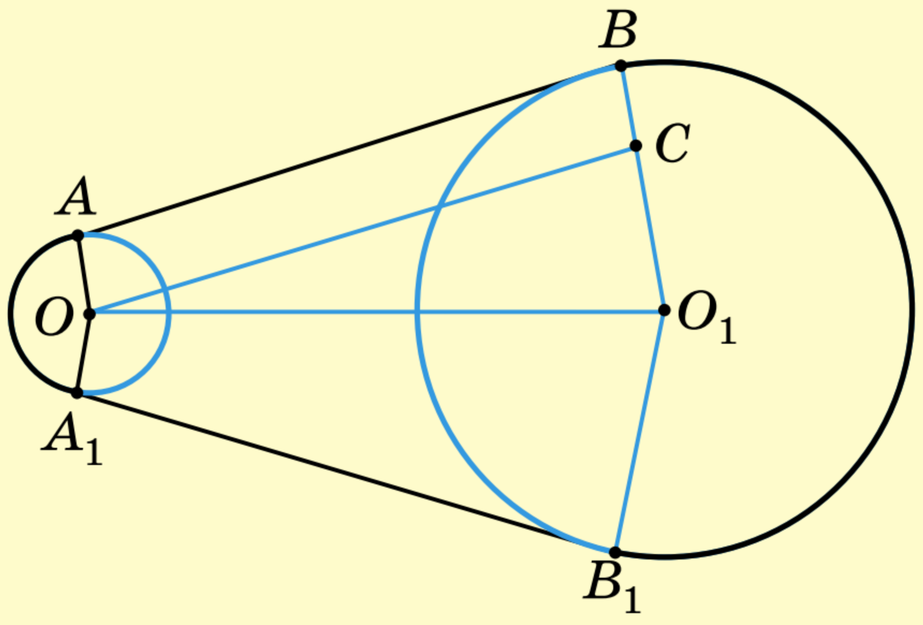
871. З точки A кола з центром O проведено хорди AB і AC так, що $AC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle BOC = 120°$. Знайдіть довжини дуг AB, AC і BC, якщо довжина кола 12π см. Скільки розв'язків має задача?

872. ЗНО На стороні AD паралелограма $ABCD$ як на діаметрі побудовано півколо так, що воно дотикається до сторони BC в точці M. Довжина дуги MD дорівнює $6{,}5\pi$ см.

1. Обчисли (у см) довжину радіуса цього кола.
2. Обчисли площу паралелограма $ABCD$ (у $см^2$).

873. Хорда стягує дугу кола завдовжки l, градусна міра якої $n°$. Знайди довжину хорди.

874. Знайди довжину приводного паса, який сполучає два шківи, якщо їх радіуси дорівнюють 10 см і 30 см, а відстань між центрами $OO_1 = 1$ м (мал. 19.10).



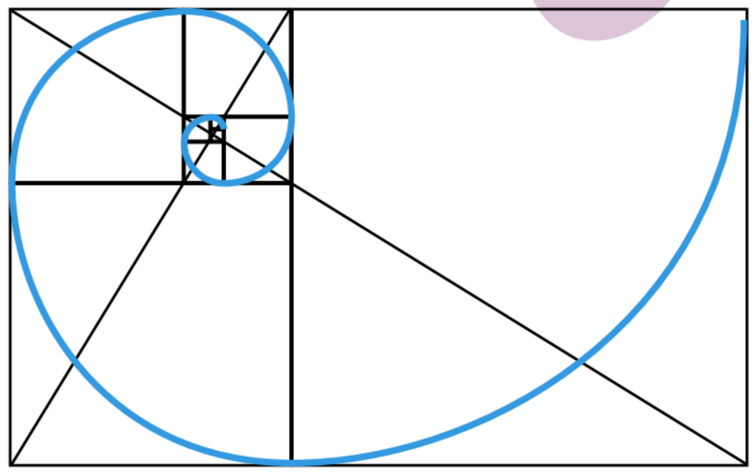
Мал. 19.10

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



875. а) У декартовій системі координат, у якій одиничний відрізок має довжину 1 см, на проміжку $[-2; 3]$ побудуй графік функції $y = x^2$. За допомогою циркуля і лінійки знайди наближену довжину цього графіка.

б) Аналогічно знайди наближену довжину частини золотої спіралі, зображеної на малюнку 19.11. Який розхил циркуля доцільно взяти у цьому випадку? Дізнайся більше про цю спіраль. Чому її так називають?



Мал. 19.11

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

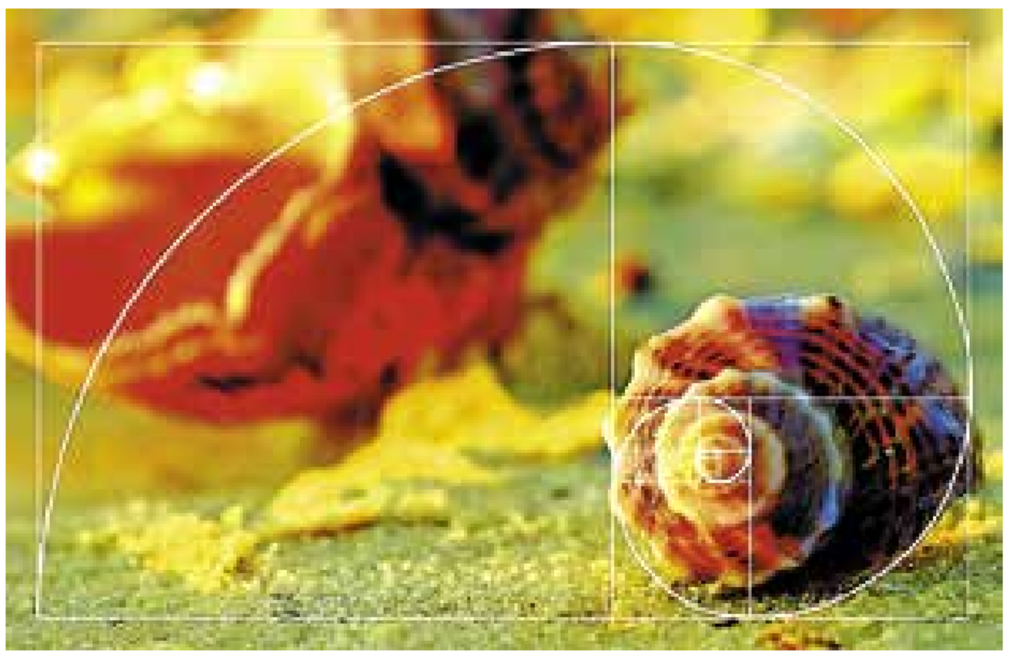


876. Знайди периметр шестикутника, вписаного в коло радіуса R.

877. У коло радіуса 3 см впиши правильний 12-кутник.

878. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут α. Знайди діагоналі ромба, площу і радіус вписаного кола.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





Золота спіраль у природі

§ 20 ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

КЛЮЧОВІ СЛОВА

площа круга — area of a circle
сектор — sector
сегмент — segment

Кругом називають частину площини, обмежену колом (мал. 20.1, *а*). *Центром*, *радіусом*, *діаметром*, *хордою круга* називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке обмежує даний круг. *Многокутником*, *вписаним у круг*, називають многокутник, вписаний у коло даного круга.

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором* (мал. 20.1, *б*). Хорда круга розбиває його на два *сегменти* (мал. 20.1, *в*). На малюнку 20.1 зображено круг, два сектори і два сегменти.

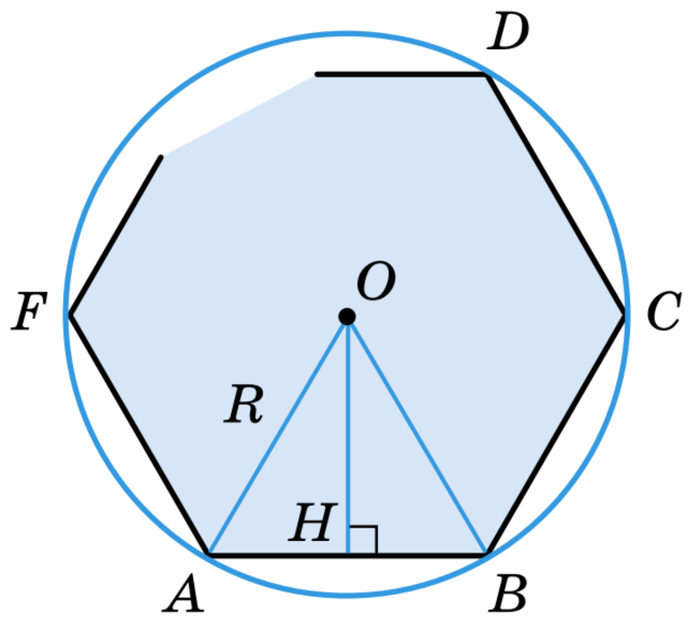


а *б* *в*

Мал. 20.1

Що таке площа круга? Відповісти на це запитання нелегко, бо строга теорія площ фігур, обмежених кривими лініями, досить складна, і ми її не розглядатимемо. Зауважимо лише, що кожний круг має площу і що площа вписаного в круг правильного n-кутника при необмеженому збільшенні числа n прямує до площі круга. На основі цих тверджень виведемо формулу для обчислення площі круга.

Нехай дано круг довільного радіуса R. Впишемо в нього правильний n-кутник $ABCD...F$ (мал. 20.2).



Мал. 20.2

Якщо OH — висота трикутника OAB, то $AH = \frac{1}{2} AB$, $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$ і $OH = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} AB \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$. Многокутник $ABCD...F$ складається з n таких трикутників, тому його площа

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} PR \cos \frac{180^\circ}{n},$$

де P — периметр даного многокутника.

Якщо число n нескінченно збільшувати, то периметр P наближатиметься до довжини кола $2\pi R$, кут $\dfrac{180^\circ}{n}$ — до 0°, а його косинус — до 1. Тому $S = \pi R \cdot R \cdot 1 = \pi R^2$.

Площу круга радіуса R знаходять за формулою: $S = \pi R^2$.

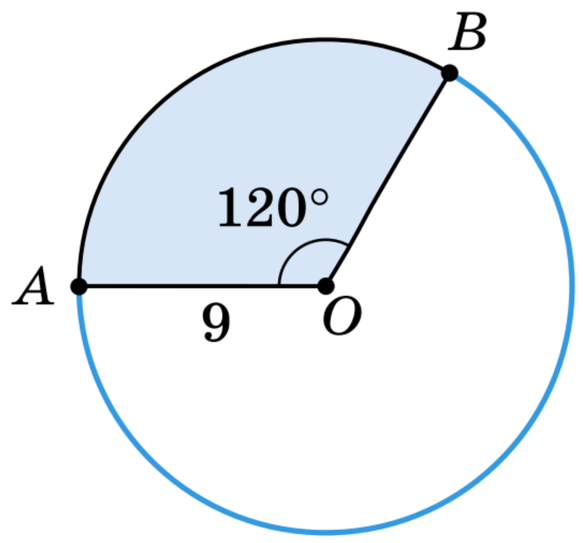
Виведемо формули для обчислення площі сектора та сегмента.

Площа сектора, що відповідає центральному куту 1°, дорівнює $\dfrac{\pi R^2}{360}$. Тоді центральному куту n° відповідає сектор, площа якого дорівнює $\dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

Отже, *площа сектора* круга радіуса R, градусна міра якого становить n°, обчислюється за формулою $S_{\text{сек}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

Наприклад, якщо радіус сектора $OA = 9$ см, а $\angle AOB = 120^\circ$ (мал. 20.3), то площа цього сектора

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 120}{360} = 27\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

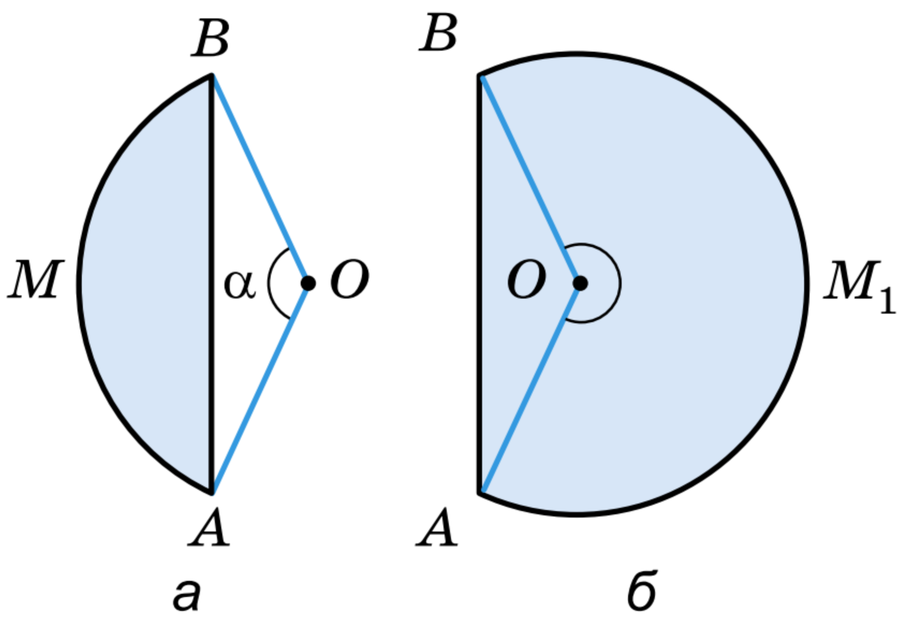


Мал. 20.3

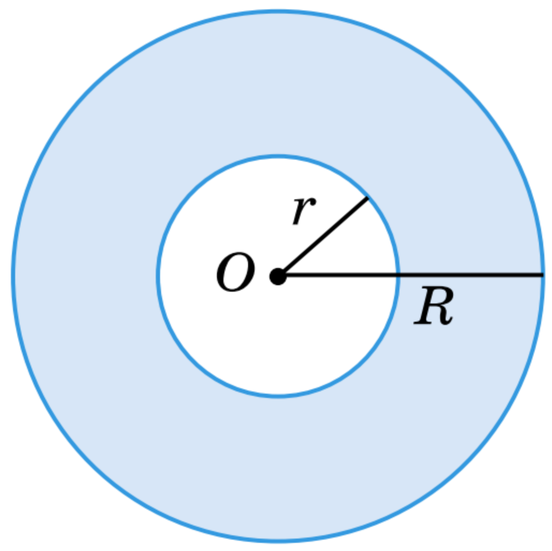
Щоб знайти *площу сегмента AMB* (мал. 20.4), треба від площі відповідного сектора відняти площу трикутника OAB, якщо кут сектора $\alpha < 180^\circ$ (мал. 20.4, *а*), або додати площу трикутника OAB, якщо $\alpha > 180^\circ$ (мал. 20.4, *б*). Сектор з кутом 180° — *півкруг*, його площа дорівнює половині площі відповідного круга.

Частиною круга є також *кільце*, обмежене двома концентричними колами (мал. 20.5). Якщо радіуси кіл, які обмежують кільце, дорівнюють R і r, то площа кільця

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$



Мал. 20.4



Мал. 20.5

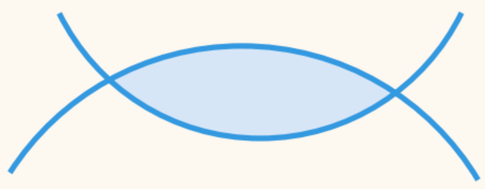
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Цікаві з погляду геометрії частини круга, обмежені дугами двох кіл, — *лінзи* (мал. 20.6) і *серпики* (мал. 20.7). Подумай, як можна визначати площі таких фігур, знаючи, наприклад, радіуси кіл, які їх обмежують, і відстань між їх центрами.

Для прикладу розглянемо такий серпик, обмежений півколом радіуса r і чвертю кола радіуса $r\sqrt{2}$ (мал. 20.8). Для цього потрібно від площі півкруга радіуса r відняти площу сегмента круга радіуса $r\sqrt{2}$, який відповідає куту 90°:

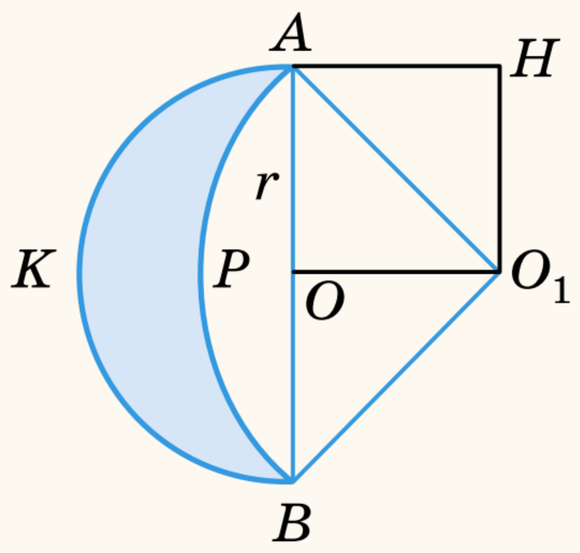
$$S = \frac{\pi r^2}{2} - \left(\frac{1}{4}\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 - r^2\right) = r^2.$$



Мал. 20.6



Мал. 20.7



Мал. 20.8

Площа серпика $AKBP$ дорівнює площі квадрата AOO_1H. Існують серпики, квадратура яких можлива! Це довів ще в V ст. до н. е. Гіппократ Хіоський. (Не плутай з давньогрецьким лікарем, автором «Клятви Гіппократа», який жив у III ст. до н. е.)

Квадратура фігури — це обчислення її площі. Раніше говорили, що квадратура фігури можлива, якщо можна побудувати (циркулем і лінійкою!) квадрат, рівновеликий даній фігурі.

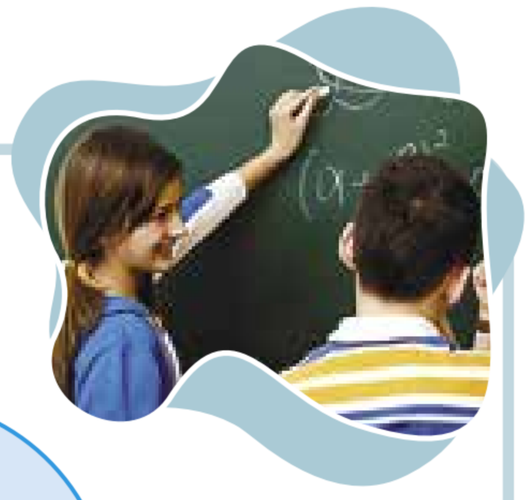
Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Коло, круг та їх елементи. Урок 4).



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

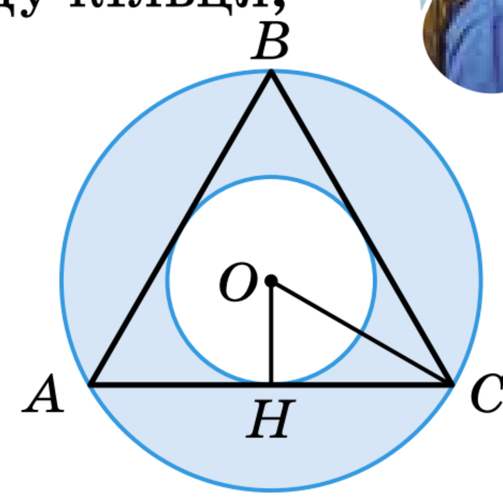
1. Що називають: а) кругом; б) сектором; в) сегментом; г) кільцем?
2. За якою формулою знаходять площу: а) круга; б) сектора?
3. За якою формулою знаходять площу: а) сегмента; б) кільця?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. У правильний трикутник вписано коло радіуса r і навколо нього описано коло. Знайди площу кільця, обмеженого цими колами.

- Задачі відповідає малюнок 20.9, на якому $OH = r$, $OC = R$. Оскільки у правильному трикутнику $R = 2r$, то площа кільця $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$.



Мал. 20.9

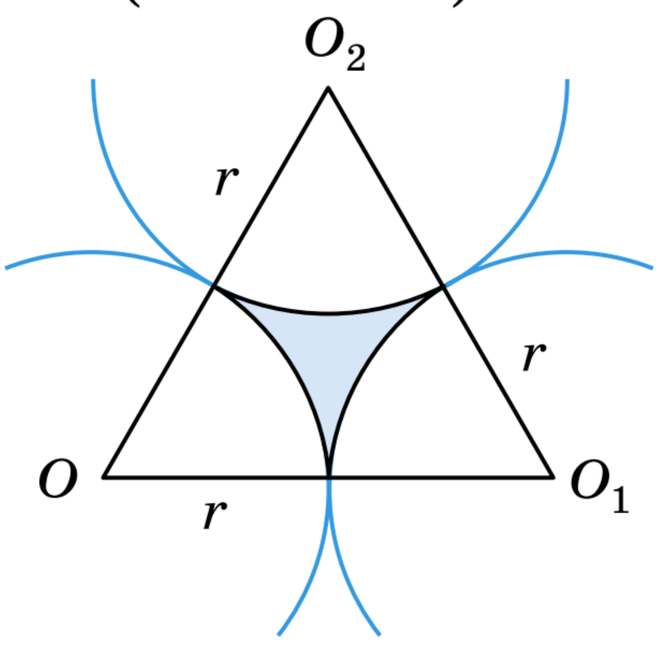
2. Три кола радіуса r попарно мають зовнішній дотик. Обчисли площу «криволінійного трикутника», обмеженого дугами цих кіл.

- Щоб знайти площу цієї фігури, потрібно від площі $\triangle OO_1O_2$ відняти площі трьох секторів. Центри даних кіл утворюють рівносторонній трикутник OO_1O_2 зі стороною $2r$ (мал. 20.10). Його площа $S = \dfrac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}$.

Оскільки $\angle O_2OO_1 = 60°$, то площа кожного з утворених секторів дорівнює $\dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot 60}{360} = \dfrac{1}{6}\pi r^2$.

Тоді площа шуканої фігури

$$S = \sqrt{3}r^2 - 3 \cdot \frac{1}{6}\pi r^2 = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$



Мал. 20.10

ВИКОНАЄМО УСНО



879. Знайди площу круга радіуса 1 м; 2 дм; 5 см.

880. Знайди площу круга діаметра 2 дм; 6 см; 3 м.

881. Знайди площу півкруга радіуса 6 см.

А 72π см **Б** 36π см **В** 18π см **Г** 9π см

882. Площа круга дорівнює 3π м^2. Чому дорівнює його радіус?

А 3 м **Б** 1,5 м **В** 6 м **Г** $\sqrt{3}$ м

883. Знайди площу круга, описаного навколо квадрата з діагоналлю d.

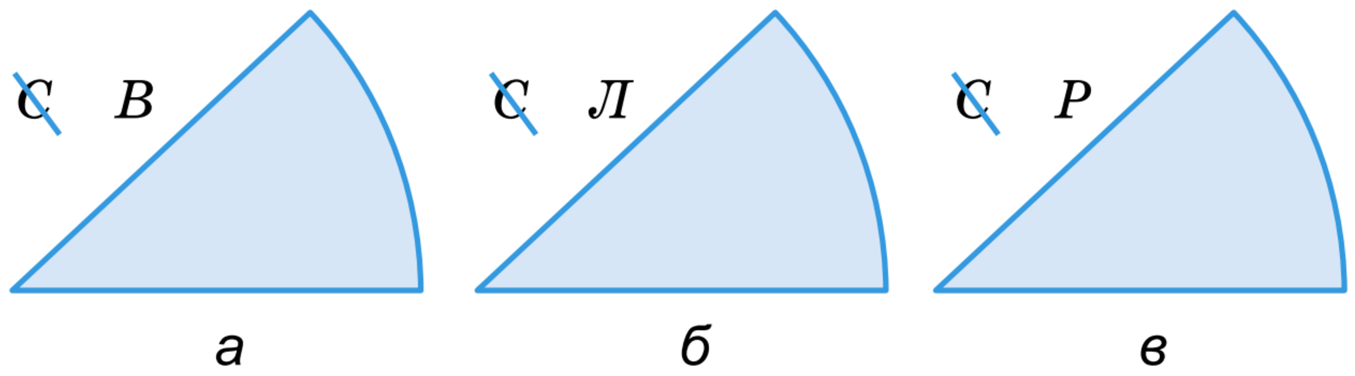
884. Знайди площу круга, вписаного в квадрат зі стороною a.

А πa^2 **Б** $4\pi a^2$ **В** $\dfrac{\pi a^2}{2}$ **Г** $\dfrac{\pi a^2}{4}$

885. Як зміниться площа круга, якщо його радіус збільшити у 2 рази?

886. Як зміниться площа круга, якщо його діаметр зменшити у 3 рази?

887. Розв'яжи ребус за малюнком 20.11.



Мал. 20.11

888. Учениця обчислила площу кільця з радіусами 10 см і 8 см за допомогою формули $S = \pi(10 - 8)^2 = 4\pi$. Перевір, чи правильні її міркування.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



889. Обчисли площу круга, радіус якого дорівнює 8 см; 10 см; 5 см.

890. Обчисли площу круга, діаметр якого дорівнює 6 см; 18 см; 22 см.

891. Площа круга дорівнює S. Знайди довжину кола, яке обмежує його, якщо S дорівнює:
а) 12,56 см^2; б) 16π см^2; в) $1{,}44\pi$ см^2.

892. Знайди площу циркової арени, довжина кола якої 41 м.

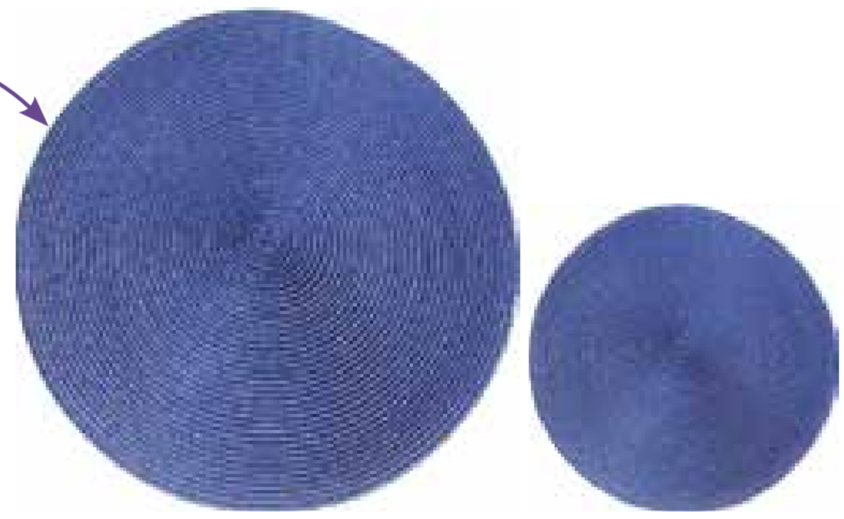
893. ЗНО Довжина кола дорівнює 16π см. Знайди площу круга, обмеженого цим колом.
А 128π см^2 **Б** 64π см^2 **В** 32π см^2 **Г** 16π см^2 **Д** 8π см^2

894. Побудуй круг, площа якого дорівнює 4π см^2, впиши у нього квадрат. Знайди площу круга, вписаного в цей квадрат.

895. Знайдіть площу круга, якщо сторони вписаного в нього прямокутника дорівнюють 12 см і 16 см.

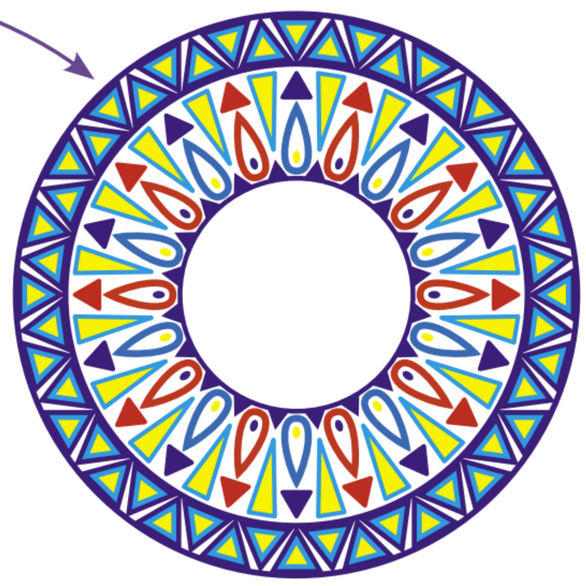
896. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайди площу: а) круга, вписаного в трикутник; б) круга, описаного навколо трикутника.

897. Площі двох круглих серветок відносяться, як 4 : 9. Знайди відношення довжин їх країв.



898. Знайди відношення площі круга, вписаного у правильний трикутник, до площі круга, описаного навколо того самого трикутника.

899. На майстер-класі Андрій виготовив підставку під чашку у формі кільця. Зовнішній радіус підставки дорівнює 5 см, а радіус внутрішнього отвору — 2 см. Знайди площу поверхні підставки.



900. Площа кільця, обмеженого двома концентричними колами, дорівнює 63π см^2. Знайди радіуси цих кіл, якщо: а) один із них на 3 см більший за другий; б) вони пропорційні числам 3 і 4.

901. Площа кільця, обмеженого двома концентричними колами, дорівнює 100π см^2. Знайди радіуси цих кіл, якщо: а) вони пропорційні числам 12 і 13; б) їх сума дорівнює 50 см.

902. Знайди площу сектора круга радіуса 12 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює: а) 40°; б) 120°.

903. Find the area of a sector of a circle with a radius of 8 in, if the corresponding central angle is equal to: a) 60°; b) 270°.

904. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць задає діаметр круга, другий / друга — центральний кут, а третій / третя має знайти площу відповідного сектора круга. Потім учні / учениці міняються ролями.

905. Знайди площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а дуга містить: а) 90°; б) 150°.

906. Знайди площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а дуга містить: а) 60°; б) 120°.

907. ЗНО Установи відповідність між геометричною фігурою (1–4) та її площею (А–Д).

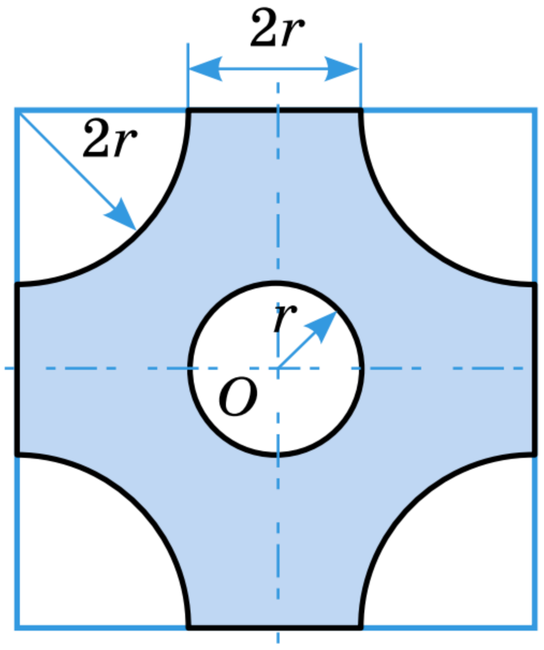
1 круг радіуса 4 см	**А** 12π см^2
2 півкруг радіуса 6 см	**Б** 16π см^2
3 сектор радіуса 12 см з градусною мірою центрального кута 30°	**В** 18π см^2
	Г 20π см^2
4 кільце, обмежене колами радіусів 4 см і 6 см	**Д** 24π см^2

908. Із квадратного листа жерсті вирізали круг найбільшої площі. Скільки відсотків листа становлять відходи?

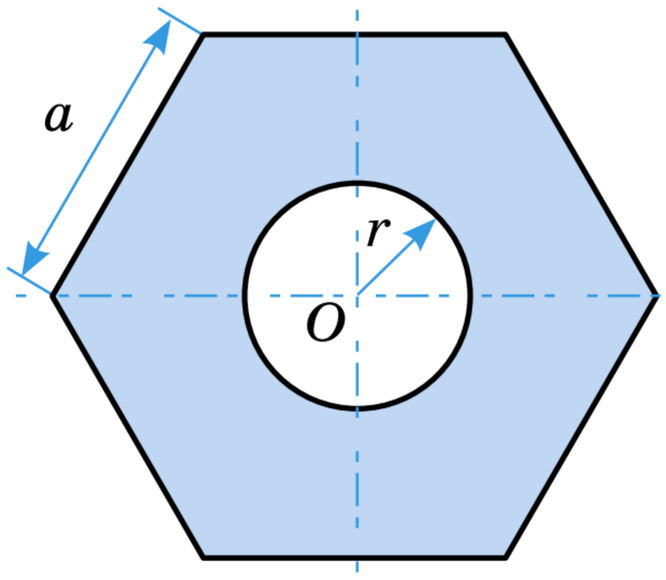
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



909. Знайдіть площі деталей, вирізаних із жерсті (мал. 20.12–20.14).



Мал. 20.12



Мал. 20.13

Мал. 20.14

910. Знайди радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 20π см^2, а відповідний центральний кут дорівнює 72°.

911. Хорда довжиною $9\sqrt{3}$ см ділить круг діаметра 18 см на два сегменти. Знайди площі цих сегментів.

912. У крузі радіуса R проведено дві паралельні хорди, кожна з яких стягує дугу 60°. Знайди площу частини круга, що міститься між хордами.

913. Сума катетів прямокутного трикутника на 10 см більша від гіпотенузи. Знайди площу круга, вписаного в цей трикутник.

914. На сторонах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано три півкруги. Доведи, що площа найбільшого з них дорівнює сумі площ двох інших.

915. Сторона правильного шестикутника дорівнює 3 см. Знайди площі кругів, вписаного в цей шестикутник і описаного навколо нього.

916. Площа круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 100π см^2. Знайди площу круга, вписаного в цей трикутник, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 18 см.

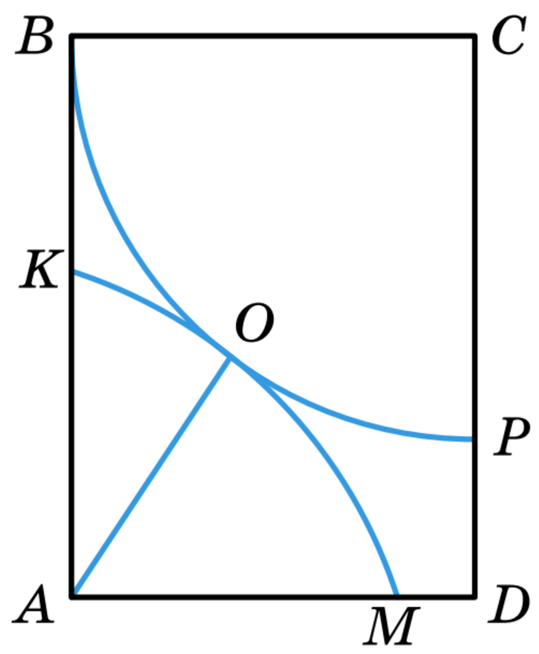
917. Площа круга, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 144π см^2. Знайди площу трапеції, якщо її більша основа 36 см.

918. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайди площу кільця, утвореного вписаним і описаним навколо трикутника колами.

919. Навколо правильного n-кутника зі стороною a описано коло і в нього вписано коло. Доведи, що площа кільця, обмеженого цими колами, не залежить від числа n.

920. ЗНО На малюнку 20.15 зображено прямокутник $ABCD$ і кругові сектори KAM та BCP, що мають одну спільну точку O. Площа сектора BCP дорівнює 9π см^2, $AO = 4$ см.

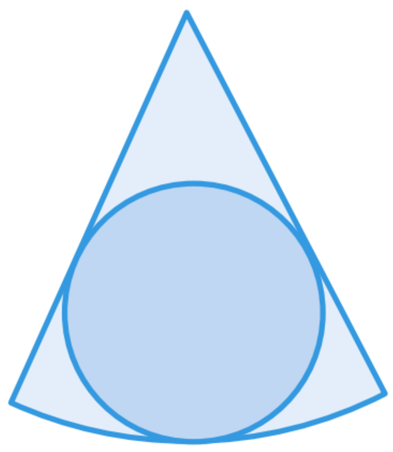
1. Визначте радіус сектора BCP (у см).
2. Обчисліть площу прямокутника $ABCD$ (у см^2).

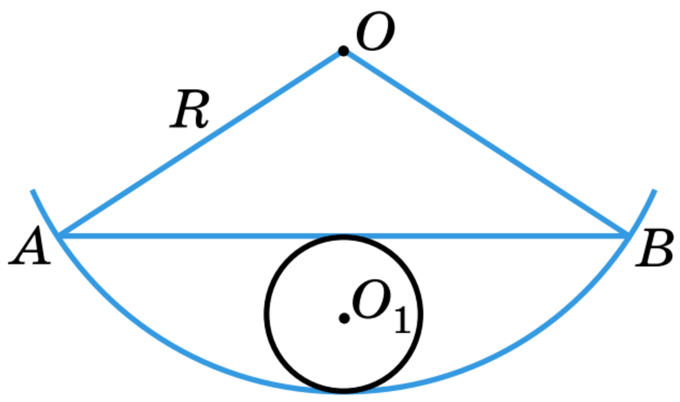


Мал. 20.15

921. У круговий сектор з кутом 60° вписано круг (мал. 20.16). Знайди відношення площі сектора до площі вписаного круга.

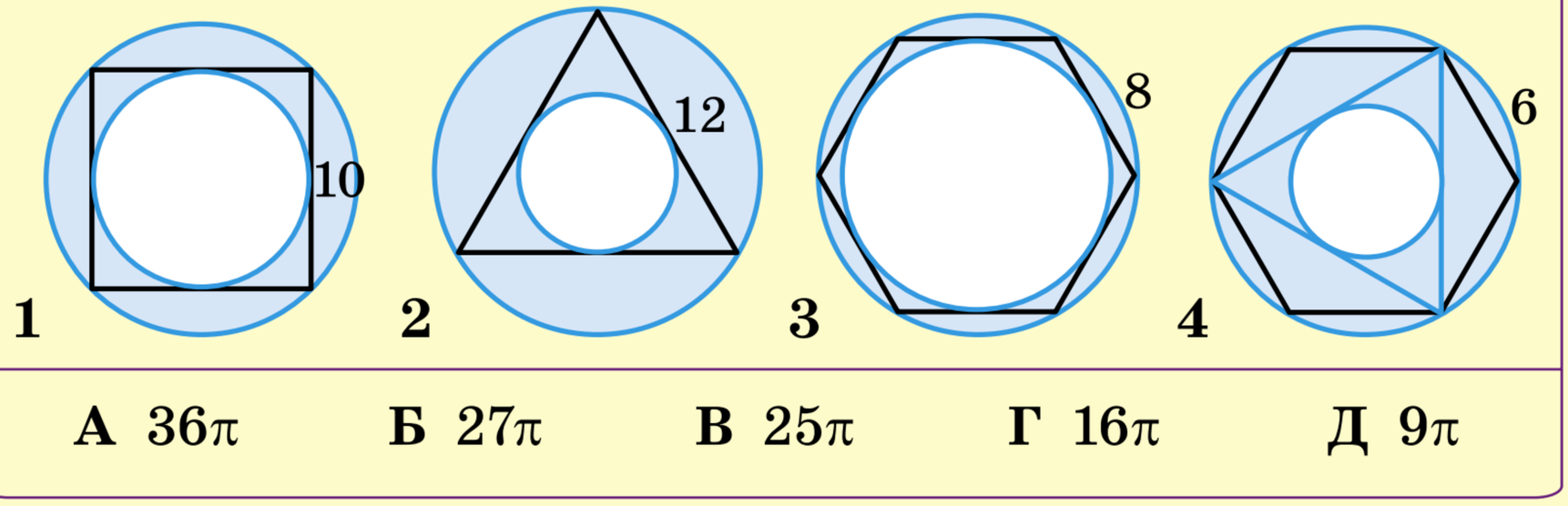
922. Знайди площу круга, вписаного в сегмент круга радіуса R, дуга якого 120° (мал. 20.17).


Мал. 20.16



Мал. 20.17

923. **Установи відповідність між зафарбованими фігурами (1–4), зображеними на малюнку 20.18, та їх площами (А–Д).**



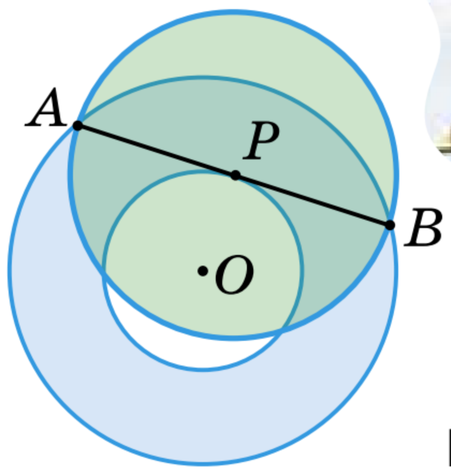
А 36π Б 27π В 25π Г 16π Д 9π

Мал. 20.18

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



924. Накресли два концентричні кола радіусів R і r та хорду AB більшого з них, яка дотикається до меншого (мал. 20.19). Порівняй площу кільця, обмеженого цими колами, з площею круга діаметра AB. Досліди, чи завжди ці площі рівні.



Мал. 20.19

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



925. Знайди довжину кола, описаного навколо рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a.

926. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см. Знайди довжину кола, вписаного в трикутник.

927. Основи рівнобічної трапеції пропорційні числам 4 і 9, а периметр дорівнює 52 см. Знайди довжину кола, вписаного в трапецію.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





Круг у побуті та мистецтві

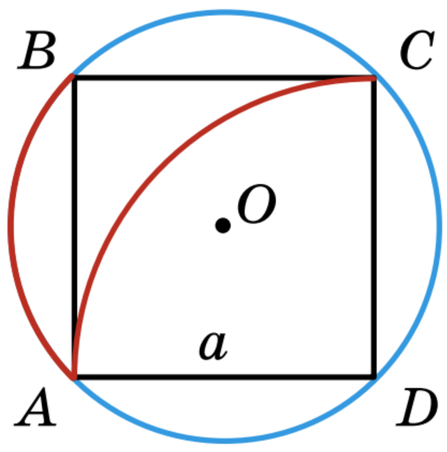
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

Знайди довжину дуги

1 $ABCD$ — квадрат, $AD = a$.

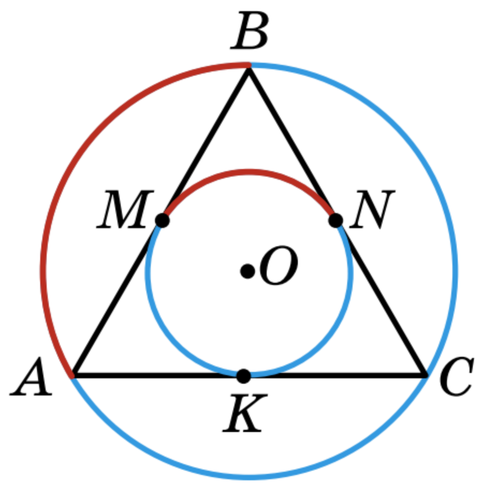
AB; AC



Б

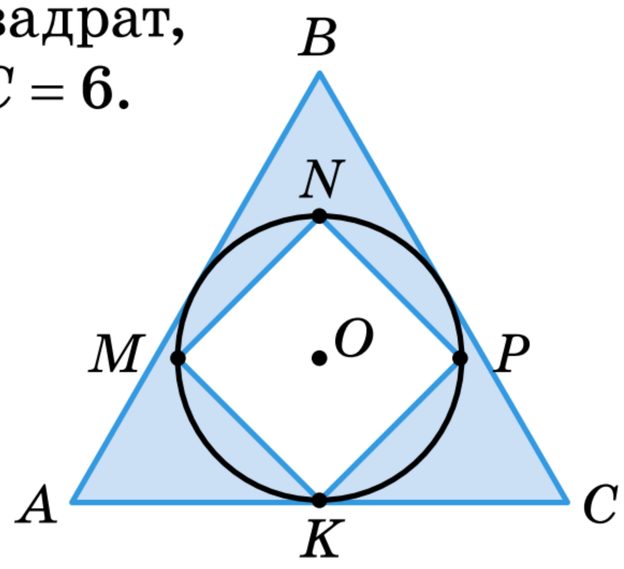
$AB = BC = AC = a$.

AB; MN

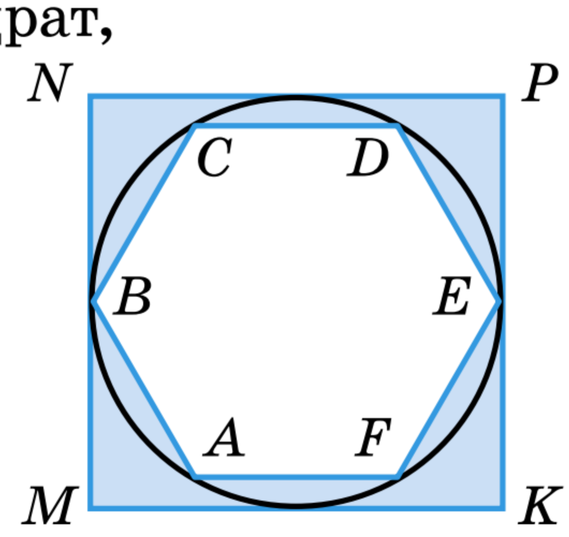


Знайди площі зафарбованих фігур

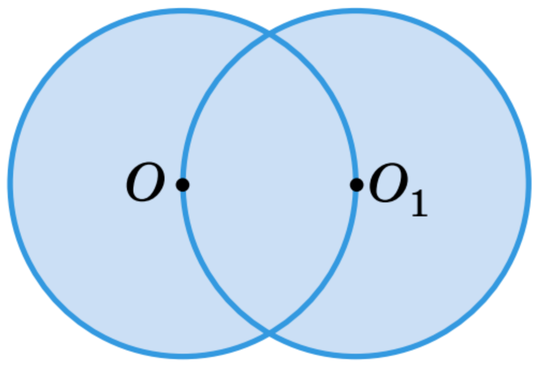
2 $MNPK$ — квадрат, $AB = BC = AC = 6$.



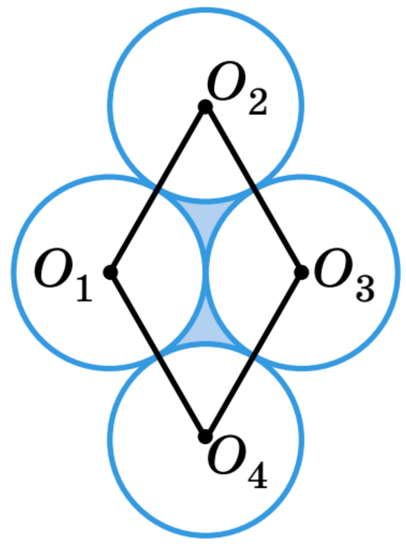
$ABCDEF$ — правильний шестикутник, $MNPK$ — квадрат, $MN = 8$.



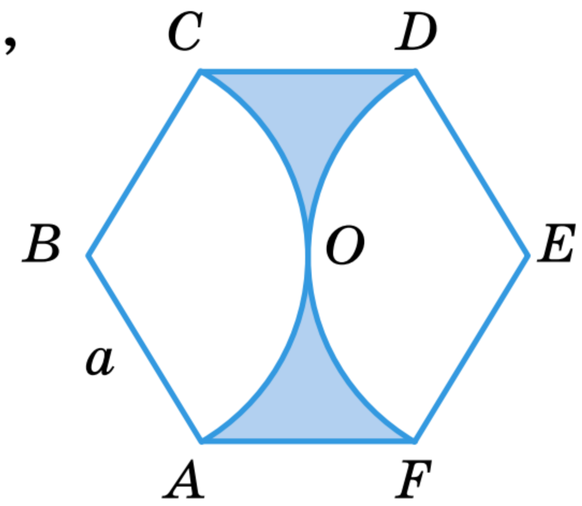
3 $OO_1 = 8$.



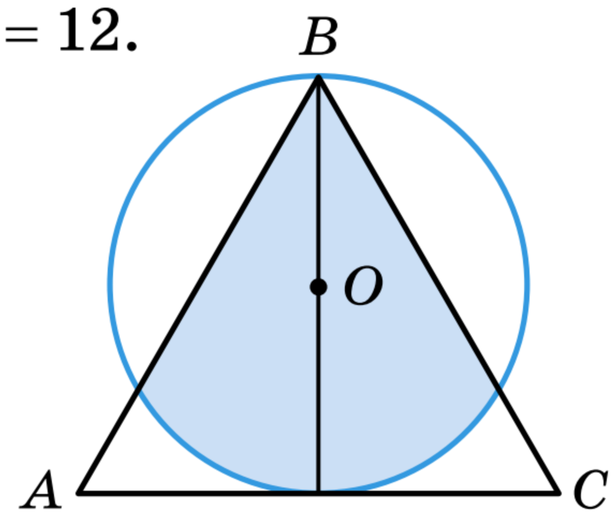
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.



4 $ABCDEF$ — правильний шестикутник, $AB = a$.



$AB = BC = AC = 12$.



САМОСТІЙНА РОБОТА 4

Варіант 1

1. Знайди міру внутрішнього і центрального кутів правильного 12-кутника.

2. Сторона квадрата дорівнює 8 см. Знайди довжину кола і площу круга, описаного навколо квадрата.

3. Знайди радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 10π см^2, а відповідний центральний кут дорівнює $36°$.

4. У коло вписано квадрат периметра 24 см. Знайди периметр правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

Варіант 2

1. Знайди міру внутрішнього і центрального кутів правильного 9-кутника.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайди довжину кола і площу круга, описаного навколо трикутника.

3. Знайди радіус кола, якщо довжина дуги цього кола дорівнює 5π см, а відповідний центральний кут дорівнює $45°$.

4. У коло вписано правильний 6-кутник периметра 36 см. Знайди периметр правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

Варіант 3

1. Знайди міру внутрішнього і центрального кутів правильного 10-кутника.

2. Діагональ і бічна сторона рівнобічної трапеції перпендикулярні і дорівнюють 24 см і 10 см. Знайди довжину кола і площу круга, описаного навколо цієї трапеції.

3. Знайди радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 9π см^2, а відповідний центральний кут дорівнює $40°$.

4. У коло вписано правильний трикутник периметра 18 см. Знайди периметр квадрата, описаного навколо цього кола.

Варіант 4

1. Знайди міру внутрішнього і центрального кутів правильного 18-кутника.

2. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 16 см. Знайди довжину кола і площу круга, описаного навколо прямокутника.

3. Знайди радіус кола, якщо довжина дуги цього кола дорівнює 2π см, а відповідний центральний кут дорівнює $30°$.

4. Периметр правильного трикутника, описаного навколо кола, дорівнює 36 см. Знайди периметр правильного 6-кутника, вписаного в це коло.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 4

1	Довжина кола радіуса 6 см дорівнює:	**А** 3π см **В** 12π см	**Б** 6π см **Г** 36π см
2	Кут правильного шестикутника дорівнює:	**А** $110°$ **В** $135°$	**Б** $120°$ **Г** $150°$
3	Центральний кут правильного 8-кутника дорівнює:	**А** $60°$ **В** $45°$	**Б** $40°$ **Г** $72°$
4	R і r — радіуси кола, описаного і вписаного в правильний трикутник. Який знак слід поставити замість *: $R * 2r$?	**А** $>$ **Б** $<$ **В** $=$ **Г** не можна встановити	
5	Площа півкруга діаметра 10 см дорівнює:	**А** 25π см^2 **Б** 100π см^2 **В** $12{,}5\pi$ см^2 **Г** 50π см^2	
6	Сторона квадрата, описаного навколо кола завдовжки 16π см, дорівнює:	**А** 16 см **В** 4 см	**Б** 8 см **Г** $4\sqrt{2}$ см
7	Правильний $\triangle ABC$ вписаний в коло. Знайди довжину кола, якщо довжина дуги BAC дорівнює 6 см.	**А** 12π см **В** 9 см	**Б** 12 см **Г** $4\sqrt{3}\pi$ см
8	Знайди площу сектора круга радіуса 6 см з центральним кутом $60°$.	**А** 6π см^2 **Б** 36π см^2 **В** 9π см^2 **Г** 2π см^2	
9	Площа круга дорівнює 100π см^2. Знайди довжину його кола.	**А** 100π см **Б** 50π см **В** 20π см **Г** 2500π см	
10	Периметр правильного шестикутника дорівнює 48 см. Знайди довжину кола, описаного навколо нього.	**А** 16π см **В** 8π см	**Б** 96π см **Г** 12π см

Головне в розділі 4

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Знайди внутрішній кут правильного десятикутника.

А 36° **Б** 288° **В** 144° **Г** 100°

2. Знайди площу сектора, радіус якого дорівнює 9 см, а центральний кут — 80°.

А 9π см^2 **Б** 18π см^2 **В** 36π см^2 **Г** 2π см^2

3. Довжина кола дорівнює 18π см. Знайди довжину дуги цього кола, якщо відповідний центральний кут дорівнює 120°.

А 6π см **Б** 12π см **В** 3π см **Г** 6 см

4. Установи відповідність між правильним многокутником, заданим умовами (1–3), та довжиною кола, описаного навколо цього многокутника (А–Д).

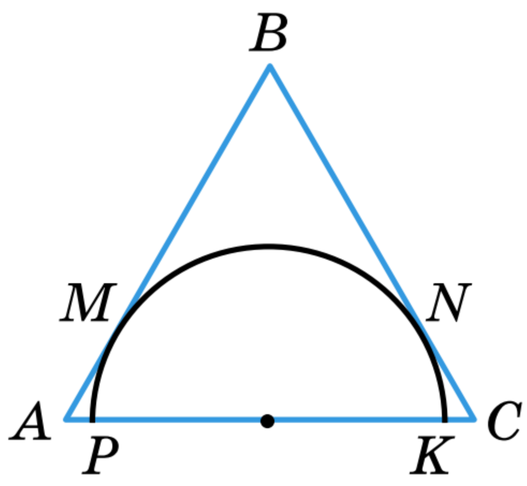
1 чотирикутник, площа якого дорівнює 8 см^2	**А** 2π см
2 трикутник, радіус вписаного кола якого дорівнює 4 см	**Б** 4π см
3 шестикутник, периметр якого дорівнює 18 см	**В** 6π см
	Г 16π см
	Д 36π см

5. Площа кільця, утвореного двома концентричними колами, дорівнює 32π см^2. Знайди радіуси цих кіл, якщо один із них у 3 рази більший за другий.

6. Знайди периметр правильного многокутника, сторона якого дорівнює 5 см, а кут — 156°.

7. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює 12 см. Знайди сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

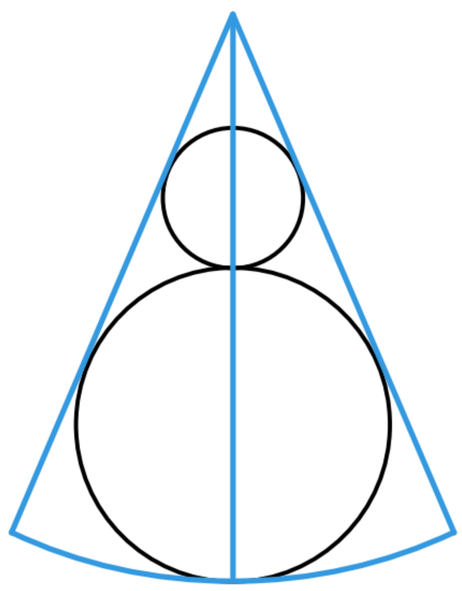
8. У правильний трикутник ABC вписано півколо з центром на стороні AC (мал. 20.20), яке дотикається до сторін AB і BC у точках M і N. Знайди довжини дуг PM, MN, NK, якщо $PK = 4$ см.



Мал. 20.20

Додаткове завдання

9. У сектор радіуса R з центральним кутом 60° вписано два кола, які дотикаються одне одного і радіусів, що обмежують сектор (мал 20.21). Знайди відношення довжин цих кіл, якщо радіус одного з них на 4 см більший за радіус другого. Чому дорівнює R?


Мал. 20.21

РОЗДІЛ 5
Геометричні перетворення

Геометричні перетворення — один із найважливіших розділів сучасної геометрії. У геометрії вони відіграють приблизно таку саму роль, як функції в алгебрі. На основі геометричних перетворень доводять складні твердження з різних розділів математики та розв'язують задачі, які іншими методами розв'язати надто важко чи зовсім неможливо.

Геометричні перетворення використовують не тільки геометри, а й фахівці інших галузей: архітектори, конструктори, майстри прикладного мистецтва.

§ 21 Переміщення та його властивості
Movement and Its Properties

§ 22 Симетрія відносно точки
Rotational Symmetry

§ 23 Симетрія відносно прямої
Reflectional Symmetry

§ 24 Поворот навколо точки
Rotation

§ 25 Паралельне перенесення
Translation

§ 26 Перетворення подібності
Similarity Transformation (Scaling)

Навчальний проєкт «Орнаменти і геометричні перетворення»
Educational project «Ornaments and Geometrical Transformations»



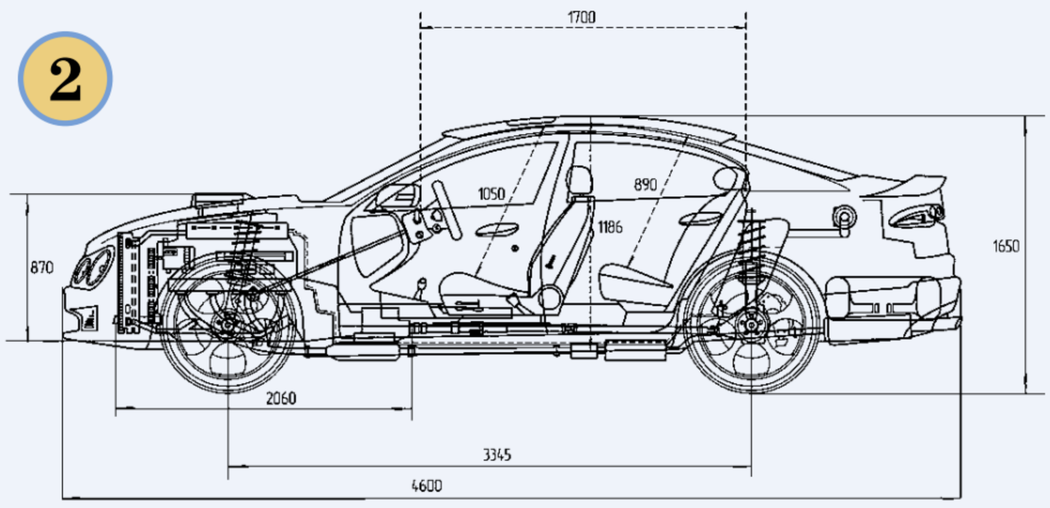
Для чого вивчати геометричні перетворення?

Геометрія допомагає краще вивчати довкілля, досліджувати не тільки стани (різні види фігур, їх розміри і форми), а й процеси. Для цього найбільше підходять геометричні перетворення.

Хто має справу з геометричними перетвореннями? Насамперед науковці, інженери, архітектори[1], конструктори, митці та інші.



1



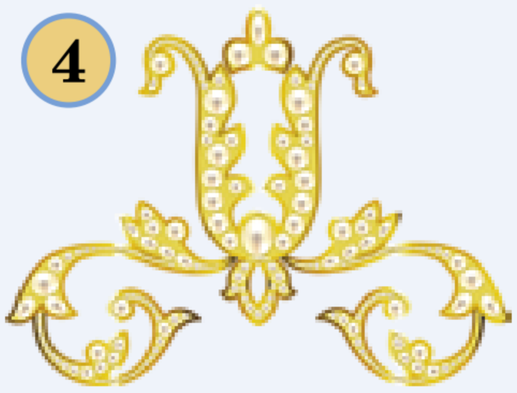
2

Геометричні перетворення — значна частина особливої мови, якою спілкуються творці задумів з робітниками, інженерами. Перш ніж створити який-небудь механізм, конструктори створюють креслення[2].

Фізики, механіки, інженери[3] й інші фахівці мають справу з подібними, симетричними відносно осі чи точки фігурами. Навіть ювеліри[4], художники[5] і вишивальниці[6] мають справу з геометричними перетвореннями.



3



4



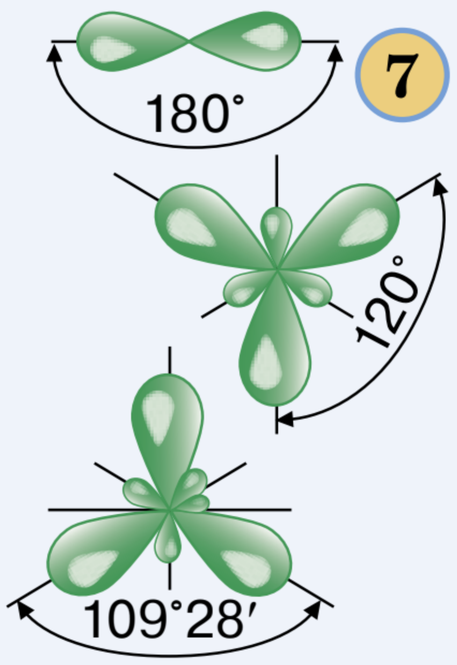
5



6

Геометричні перетворення ти використовуєш для побудови графіків і дослідження властивостей функцій, для вивчення різних процесів у фізиці і валентних зв'язків у хімії[7], для характеристики живих організмів у біології, для оздоблення та конструювання одягу тощо.

Важливу роль геометричні перетворення відіграють у комп'ютерах. Повертання малюнків на різні кути, паралельні перенесення їх — усе це рухи. Збільшення чи зменшення малюнків і шрифтів — приклади перетворень подібності.



7

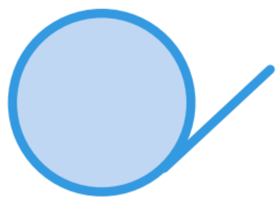
А де ще використовують геометричні перетворення? Наведи свої приклади.

§ 21 ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

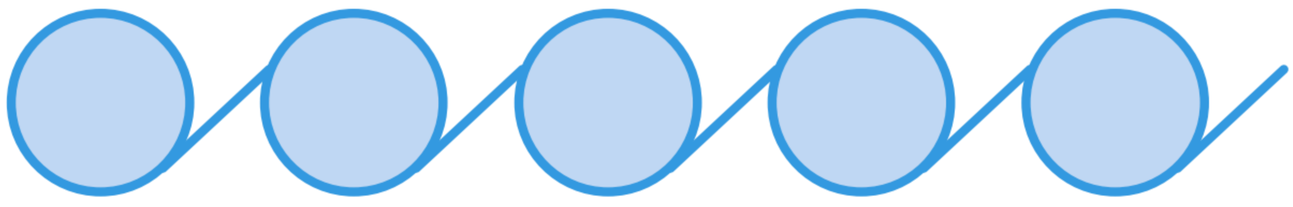
КЛЮЧОВІ СЛОВА

геометричне перетворення — geometric transformations
переміщення — translations
рівні фігури — congruent figures

Розглянемо, як утворюють орнаменти, які використовують для оздоблення шпалер, килимів, одягу, прикрас та інших предметів побуту. Спочатку обирають базовий елемент орнаменту (мотив) — частину візерунка, що багаторазово повторюється (мал. 21.1). Найпростіший стрічковий орнамент можна отримати, якщо змістити мотив у вибраному напрямі та повторити цю операцію декілька разів (мал. 21.2).

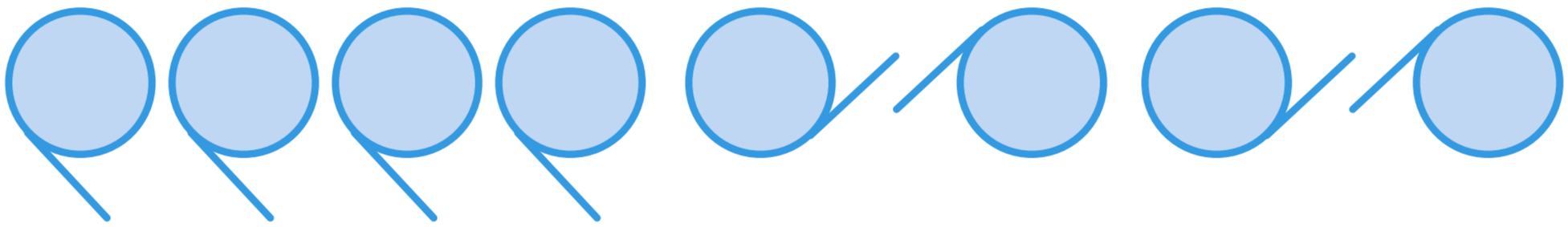


Мал. 21.1



Мал. 21.2

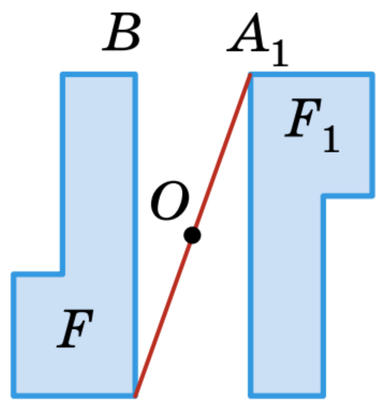
Зміщуючи мотив орнаменту у різних напрямах, можна отримати багато різних орнаментів за допомогою одного і того самого мотиву (мал. 21.3).



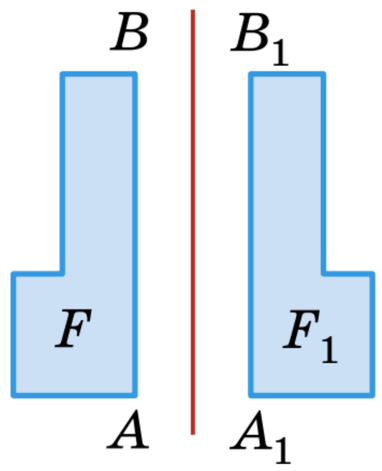
Мал. 21.3

Якщо точки фігури F змістити яким-небудь способом, то дістанемо нову фігуру F_1. Якщо при цьому різні точки фігури F переходять (відображаються) в різні точки фігури F_1, то говорять про *геометричне перетворення фігури* F у фігуру F_1. При цьому фігуру F_1 називають образом фігури F, а фігуру F — прообразом фігури F_1.

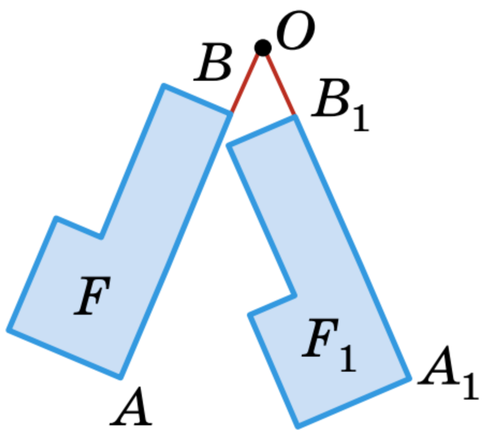
На малюнках 21.4–21.8 зображено приклади геометричних перетворень фігур F у фігури F_1. Зверни увагу, що в результаті чотирьох перших перетворень (мал. 21.4–21.7) відстані між відповідними точками зберігаються: $AB = A_1B_1$. У п'ятому випадку (мал. 21.8) відстані між точками фігури F і відповідними точками фігури F_1 не зберігаються: $AB \neq A_1B_1$.



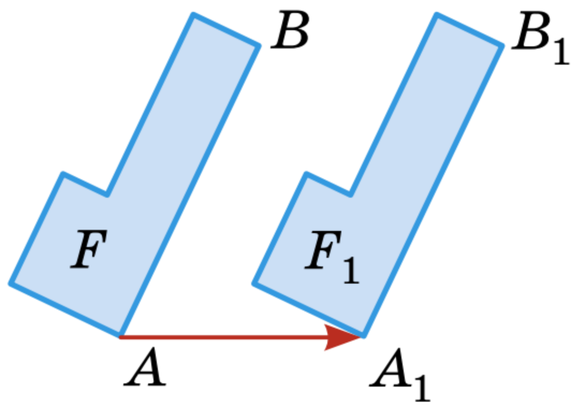
Мал. 21.4



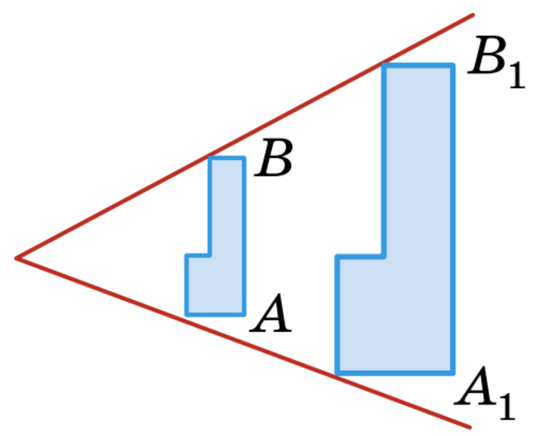
Мал. 21.5



Мал. 21.6



Мал. 21.7



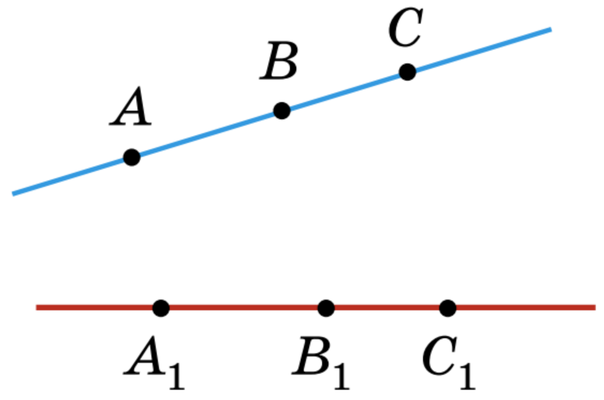
Мал. 21.8

Геометричні перетворення, при яких зберігаються відстані між точками, називають *переміщеннями* (або *рухами*).

Далі ми розглянемо окремі види переміщень: симетрію відносно точки (мал. 21.4), симетрію відносно прямої (мал. 21.5), поворот (мал. 21.6) і паралельне перенесення (мал. 21.7). Спочатку звернемо увагу на загальні властивості переміщень. Пригадаємо, що точка B лежить між A і C тоді і лише тоді, коли B — внутрішня точка відрізка AC, тобто коли виконується рівність $AB + BC = AC$.

Теорема 12. Якщо точка B лежить між A і C, а переміщення відображає їх відповідно на точки B_1, A_1 і C_1, то B_1 лежить між A_1 і C_1.

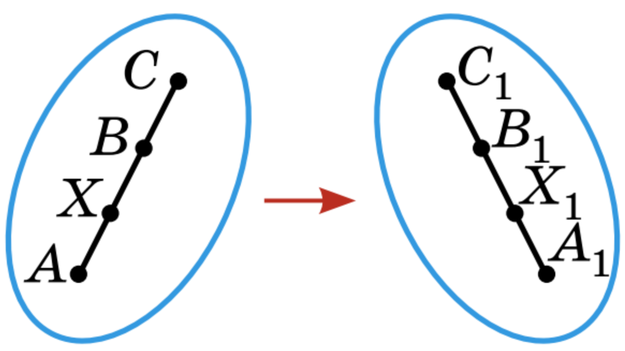
Доведення. Якщо точка B лежить між A і C, то $AB + BC = AC$ (мал. 21.9). При переміщенні відстані між точками зберігаються: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Підставивши ці значення в рівність $AB + BC = AC$, дістанемо $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. А це й означає, що точка B_1 лежить між A_1 і C_1.



Мал. 21.9

Теорема 13. Переміщення відображає відрізок на рівний йому відрізок.

Доведення. Нехай AC — відрізок, а B — його довільна внутрішня точка (мал. 21.10). Розглянемо довільне переміщення. Згідно з теоремою 12 кожне переміщення відображає точки A, C і B на такі точки A_1, C_1 і B_1, що B_1 лежить між A_1 і C_1. Отже, це переміщення кожну точку відрізка AC відображає на деяку точку відрізка A_1C_1.



Мал. 21.10

Розглянемо ще довільну точку X_1 відрізка A_1C_1. Відкладемо на AC відрізок AX, який дорівнює A_1X_1. Оскільки при переміщенні відстані між точками зберігаються, то точка X відрізка AC відображається на точку X_1 відрізка A_1C_1.

Отже, кожна точка відрізка AC при переміщенні відображається на деяку точку відрізка A_1C_1, і при цьому переміщенні кожну точку відрізка A_1C_1 одержано з деякої точки відрізка AC. Це й означає, що переміщення відображає відрізок AC на відрізок A_1C_1. При цьому $A_1C_1 = AC$.

Із двох попередніх теорем випливає, що переміщення відображає: пряму — на пряму, промінь — на промінь, кут — на рівний йому кут, трикутник — на рівний йому трикутник.

Користуючись поняттям переміщення, можна ввести загальне поняття рівності довільних геометричних фігур.

Дві фігури називають рівними, якщо вони переміщенням переводяться одна в одну.

З цього означення випливає:

1) **якщо фігура F дорівнює F_1, то і F_1 дорівнює F;**

2) **якщо фігура F дорівнює F_1, а F_1 дорівнює F_2 , то F дорівнює F_2.**

Відомі тобі із попередніх класів означення рівності відрізків, кутів і трикутників не суперечать новому загальному означенню рівності фігур.

Із попередніх міркувань випливають такі твердження:

1) кожне переміщення відображає будь-яку фігуру на рівну їй фігуру;

2) якщо дві геометричні фігури рівні, то існує переміщення, яке відображає одну з них на другу.



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Уяви, що кожну точку кола w спроєктували на пряму a (мал. 21.11). У результаті утвориться відрізок AB. Чи можна таке відображення кола на відрізок AB вважати геометричним перетворенням даного кола? Ні, бо при такому відображенні дві різні точки K і P кола відобразилися на одну точку T відрізка.

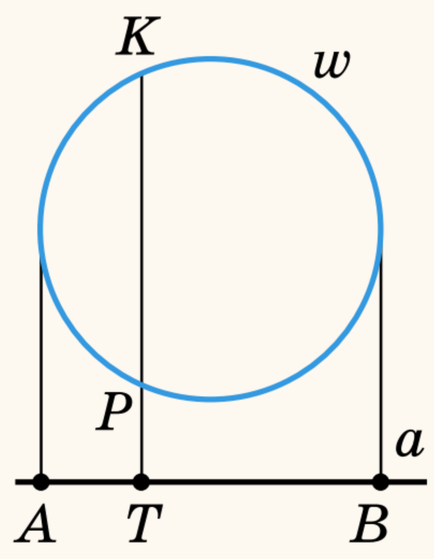
Геометричним перетворенням фігури F у F_1 називають таке відображення, при якому:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F_1;

2) кожна точка фігури F_1 є образом деякої точки фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F_1.

Переміщення фігури на площині можна уявити як зміну положення цієї фігури на площині, а краще — у вигляді зміщення всієї площини разом з фігурою на ній.



Мал. 21.11

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

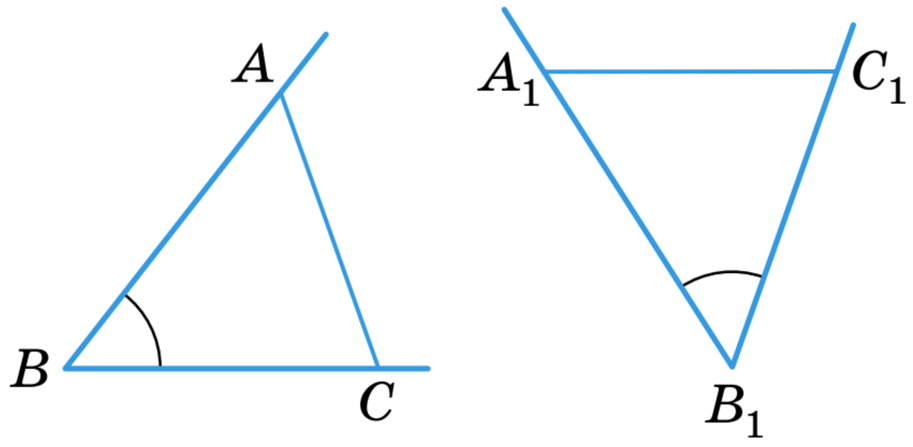
1. Які геометричні перетворення називають переміщеннями?
2. На яку фігуру переміщення відображає:
   а) відрізок; б) пряму; в) кут; г) трикутник?
3. Сформулюй загальне означення рівності двох фігур.
4. Які властивості мають рівні фігури?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Доведи, що переміщення відображає кут на рівний йому кут.

• Нехай дано кут ABC (мал. 21.12). Сполучимо відрізком довільні точки A і C його сторін, одержимо $\triangle ABC$. Цей трикутник переміщенням відображається на $\triangle A_1B_1C_1$, що дорівнює $\triangle ABC$ (бо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$), а даний кут ABC — на кут $A_1B_1C_1$. Оскільки відповідні кути рівних трикутників рівні, то $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. А це й треба було довести.



Мал. 21.12

ВИКОНАЄМО УСНО



928. Чи правильно виражає співвідношення між переміщеннями і геометричними перетвореннями діаграма, що на малюнку 21.13?



Мал. 21.13

929. Скільки існує точок, які лежать між точками A і B?

930. Чи правильно, що кожне геометричне перетворення відображає відрізок на відрізок?

931. Яка геометрична фігура може бути образом відрізка при переміщенні?

А пряма **Б** відрізок **В** промінь **Г** не можна встановити

932. **Гра.** Один із учасників / одна з учасниць називає геометричну фігуру, а другий / друга називає, у яку фігуру вона переходить при переміщенні. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

933. Чи може геометричне перетворення відобразити відрізок завдовжки 2 см на відрізок завдовжки 3 см?

934. Чи може переміщення відображати відрізок на не рівний йому відрізок?

935. Чи може переміщення відобразити коло на круг? А круг — на коло?

936. Переміщення відображає рівнобедрений тупокутний трикутник на

А різносторонній трикутник

Б рівнобедрений гострокутний трикутник

В прямокутний трикутник
Г тупокутний рівнобедрений трикутник

937. Чи існує переміщення, яке відображає трикутник на чотирикутник? А чотирикутник — на трикутник?

938. Чи рівні фігури, зображені на малюнку 21.14?



Мал. 21.14

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



939. Дано відрізки $AB = 3$ см, $CP = 5$ см і $KM = 5$ см. Доведи, що існує переміщення, яке відображає відрізок KM на CP, і не існує переміщення, яке відображає CP на AB.

940. Трикутник ABC — рівносторонній. Чи існує переміщення, яке відображає відрізок AB на AC, кут A на кут B? Відповідь обґрунтуй.

941. Доведи, що переміщення відображає трикутник на рівний йому трикутник.

942. Знайди кути трикутника, якщо існує переміщення, яке відображає трикутник, один із кутів якого дорівнює 30°, на трикутник, один із кутів якого — 50°.

943. В одному трикутнику є кут 100°, а в другому — кут 120°. Чи існує переміщення, яке відображає один трикутник на другий? Чи можуть бути рівними ці трикутники?

944. Установи вид трикутника, якщо існує переміщення, яке кожну його сторону відображає на іншу сторону.

945. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник. Доведи, що існує переміщення, яке відображає катет на другий катет. Чи існує переміщення, яке відображає катет на гіпотенузу?

946. Установи вид чотирикутника, якщо існує переміщення, яке кожну його сторону відображає на іншу сторону.

947. Градусні міри двох дуг рівні. Чи можуть бути нерівними їх довжини? Чи завжди існує переміщення, яке відображає одну з цих дуг на іншу? Зроби відповідні малюнки.

948. Периметр квадрата дорівнює 28 см. Чи існує переміщення, яке відображає даний квадрат на:

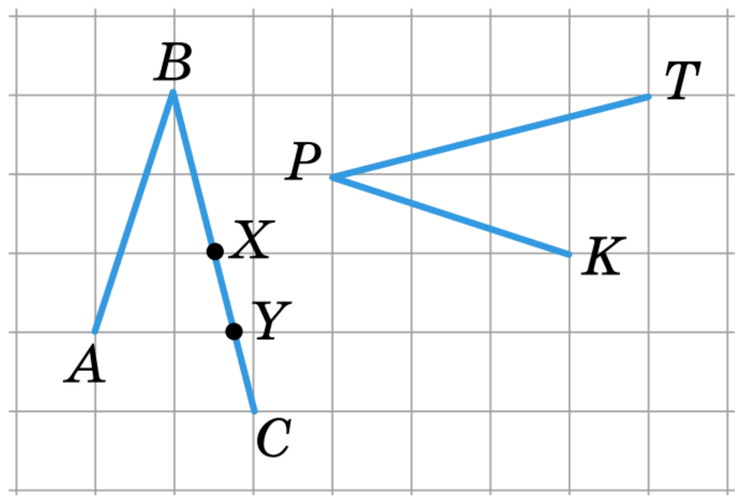
а) квадрат площею 49 см;

б) прямокутник периметра 28 см;

в) квадрат, описаний навколо кола радіуса 3,5 см;

г) ромб з діагоналями 4 см і $2\sqrt{3}$ см?

949. Переміщення відображає ламану ABC на ламану KPT (мал. 21.15). Побудуй точки, на які відображаються цим переміщенням точки X, Y.



Мал. 21.15

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



950. Доведи, що переміщення відображає коло на коло.

951. Prove that the translation maps **parallel lines onto parallel lines.**

952. Переміщення відображає $\triangle ABC$ на $\triangle KPT$. Доведіть, що це переміщення відображає:
а) медіани першого трикутника на медіани другого;
б) бісектриси першого трикутника на бісектриси другого;
в) висоти першого трикутника на висоти другого.

953. При переміщенні точка O відображається на точку $O_1(-4; 5)$. Запиши рівняння кола з центром у точці O_1, якщо $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ — рівняння кола з центром у точці O.

954. ***Відкрита задача.*** Переміщення відображає коло ... на коло з центром у точці ... . Знайди ... .

955. Дано точки $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-5; -1)$, $D(-1; -3)$. Доведи, що:
а) існує переміщення, яке відображає відрізок AB на відрізок CD;
б) не існує переміщення, яке відображає AC на відрізок BD.

956. Ромб $ABCD$ з периметром 20 см і кутом 60° при деякому переміщенні відображається на чотирикутник $MNPK$. Знайди діагоналі й площу цього чотирикутника.

957. При переміщенні $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) з катетами 5 см і 12 см відображається на $\triangle KMN$. Знайди синуси кутів $\triangle KMN$.

958. Якщо діагоналі одного ромба дорівнюють відповідно діагоналям другого ромба, то такі ромби рівні. Доведи.

959. Якщо діагональ і сторона одного прямокутника дорівнюють відповідно діагоналі і стороні другого, то такі прямокутники рівні. Доведи.

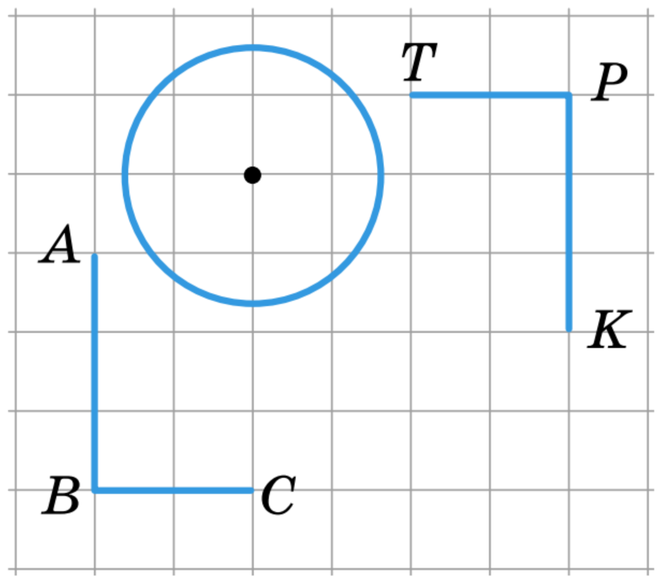
960. Сформулюй і доведи яку-небудь ознаку рівності паралелограмів.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

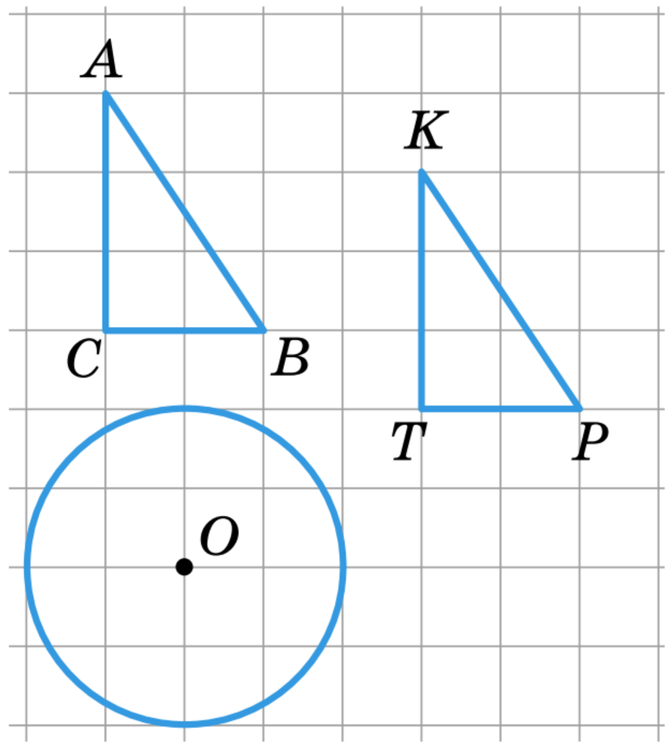


961. а) Перемалюй в зошит малюнок 21.16. Зобрази фігуру, у яку переходить коло внаслідок переміщення, яке відображає ламану ABC на KPT.

б) Перемалюй в зошит малюнок 21.17 і побудуй фігуру, на яку відображається дане коло переміщенням, що переводить $UABC$ в $UKPT$.



Мал. 21.16



Мал. 21.17

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



962. Синус одного з кутів прямокутного трикутника дорівнює 0,4. Знайди синуси двох інших кутів трикутника.

963. Через кінець діаметра кола проведено хорду, вдвічі коротшу від діаметра. Знайди кут між ними.

964. Прямі a і c перетинаються під кутом α. Під яким кутом перетинаються прямі x і y, якщо:

а) $a \parallel x$ і $c \parallel y$; б) $a \perp x$ і $c \perp y$?

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





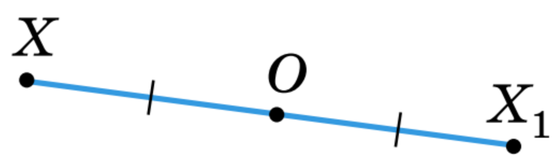
Такі різні переміщення

§ 22 СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

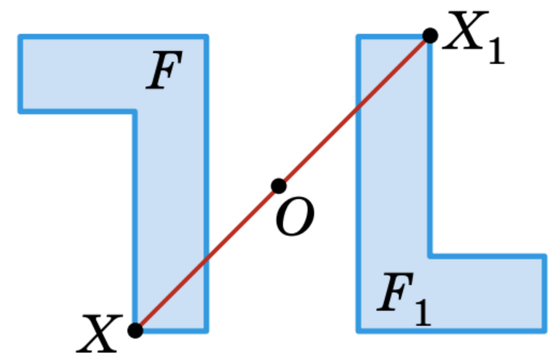
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- симетрія відносно точки — rotational symmetry
- центрально-симетрична фігура — rotation symmetric figure
- образ — image
- прообраз — preimage

Точки X і X_1 називають *симетричними відносно точки O*, якщо O — середина відрізка XX_1 (мал. 22.1). Якщо відносно O кожна точка фігури F симетрична деякій точці фігури F_1 і навпаки, то фігури F і F_1 симетричні відносно точки O (мал. 22.2). Таке відображення фігури F на F_1 називають *перетворенням симетрії відносно точки O*.



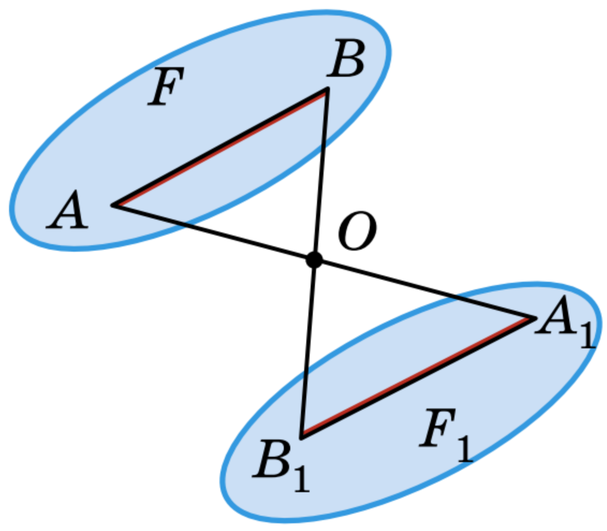
Мал. 22.1



Мал. 22.2

Теорема 14. Симетрія відносно точки — переміщення.

Доведення. Нехай симетрія відносно точки O відображає довільні точки A і B фігури F на точки A_1 і B_1 фігури F_1 (мал. 22.3). Доведемо, що $AB = A_1B_1$.



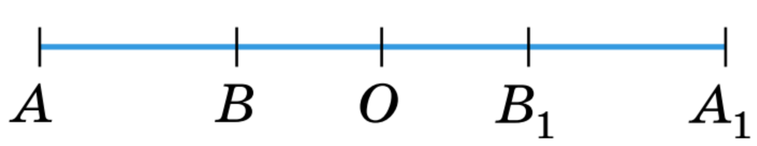
Мал. 22.3

Точка O — середина відрізків AA_1 і BB_1, тому $OA = OA_1$ і $OB = OB_1$.

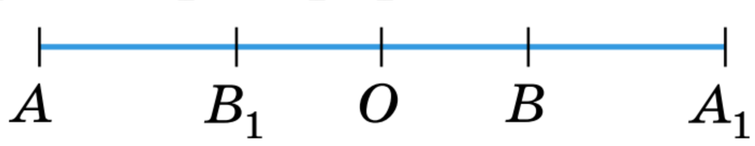
Якщо точки A, B і O не лежать на одній прямій, то кути AOB і A_1OB_1 рівні, бо вертикальні. За двома сторонами і кутом між ними трикутники ABO і A_1B_1O рівні, тому $AB = A_1B_1$.

Якщо, наприклад, точка B лежить між A і O (мал. 22.4), то

$$AB = OA - OB = OA_1 - OB_1 = A_1B_1.$$



Мал. 22.4



Мал. 22.5

Якщо точка O лежить між A і B (мал. 22.5), то

$$AB = OA + OB = OA_1 + OB_1 = A_1B_1.$$

Отже, якщо точки A і B відносно O симетричні точкам A_1 і B_1, то завжди $AB = A_1B_1$. Тому симетрія відносно точки — переміщення.

Оскільки симетрія відносно точки є переміщенням, то вона відображає пряму на пряму, промінь — на промінь, відрізок — на рівний

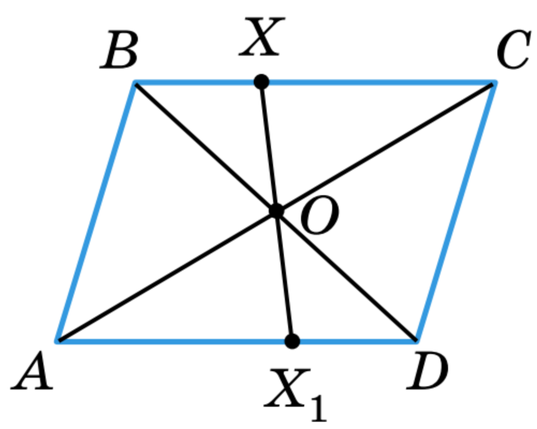
йому відрізок, кут — на рівний йому кут і взагалі — будь-яку фігуру на рівну їй фігуру.

Симетрію відносно точки (або перетворення симетрії відносно точки) часто називають також *центральною симетрією*.

Іноді трапляється, що симетрія відносно точки дану фігуру F відображає на цю саму фігуру F.

Якщо перетворення симетрії відносно деякої точки O відображає фігуру F на себе (тобто на цю саму фігуру), то таку фігуру називають *центрально-симетричною*, а точку O — її *центром симетрії*. Наприклад, кожний паралелограм — центрально-симетрична фігура. Центром симетрії паралелограма є точка перетину його діагоналей.

Кожна точка X паралелограма симетрична відносно O деякій точці X_1 цього самого паралелограма (мал. 22.6). Чому? Точку O називають також *центром паралелограма*. Центрально-симетричними фігурами є коло, квадрат, правильний шестикутник тощо. Приклади центрально-симетричних фігур, які трапляються в природі, техніці, побуті, спорті, зображені на малюнках 22.7–22.9.



Мал. 22.6


Мал. 22.7


Мал. 22.8


Мал. 22.9

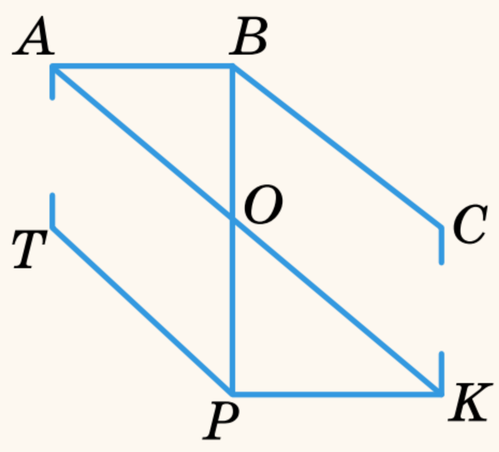
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Розглянемо важливі властивості центрально-симетричних многокутників. Якщо n-кутник має центр симетрії O, то число n парне, бо кожній його вершині відповідає протилежна їй вершина — симетрична відносно O.

Теорема 15. Протилежні сторони центрально-симетричного многокутника паралельні і рівні.

Доведення. Нехай $ABC\ldots KPT\ldots$ — центрально-симетричний многокутник, а O — його центр симетрії (мал. 22.10). Проведемо діагоналі AK і BP. За двома сторонами і кутом між ними $\triangle ABO = \triangle KPO$. Тому $AB = KP$ і $\angle BAO = \angle PKO$. Ці кути — внутрішні різносторонні при січній AK і прямих AB і KP. Тому $AB \parallel KP$.

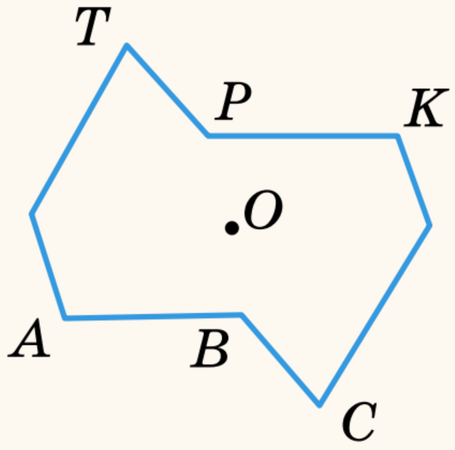


Мал. 22.10

Теорема правильна не тільки для опуклих центрально-симетричних многокутників, а й для неопуклих (мал. 22.11).

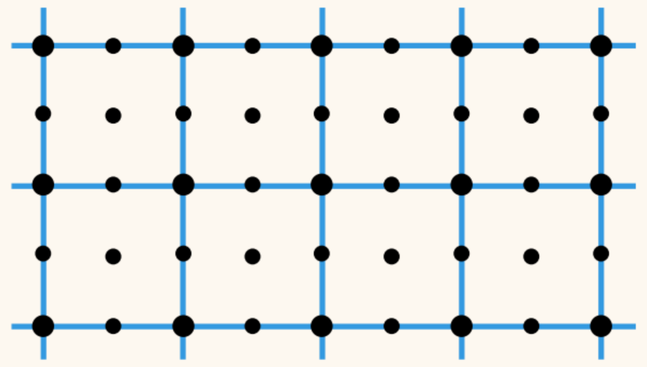
Якщо центрально-симетричні фігури обмежені, то вони мають тільки один центр симетрії. Необмежені фігури можуть мати безліч центрів симетрій. Наприклад, нескінченна в обидва боки крива, зображена на малюнку 22.12, має безліч центрів симетрій. Де вони містяться?

Необмежена у всі боки сітка з рівних квадратів також має безліч центрів симетрій. Ними є: центри всіх квадратиків, усі їх вершини і середини усіх сторін (мал. 22.13).



Мал. 22.11

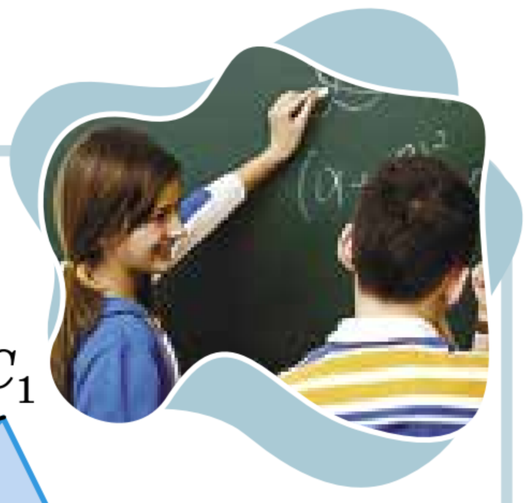

Мал. 22.12


Мал. 22.13

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

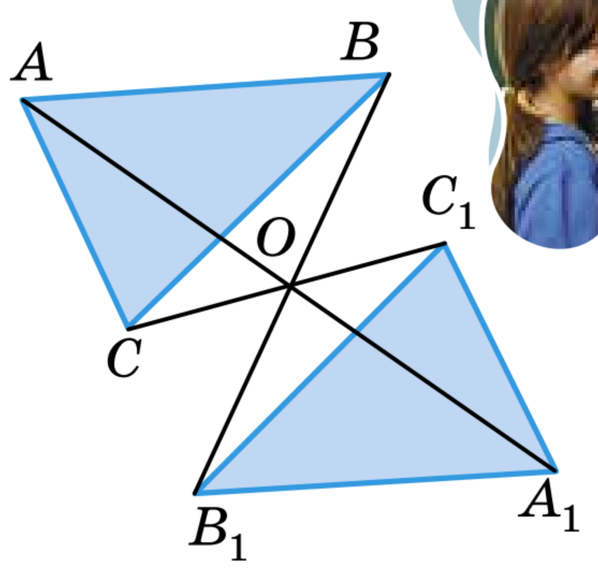
1. Які точки називають симетричними відносно точки?
2. Чи є перетворення симетрії переміщенням? Доведи.
3. Сформулюй властивості симетрії відносно точки.
4. Які фігури називають центрально-симетричними?
5. Наведи приклади центрально-симетричних фігур.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Побудуй трикутник, симетричний $\triangle ABC$ відносно точки O, яка лежить поза трикутником (мал. 22.14).

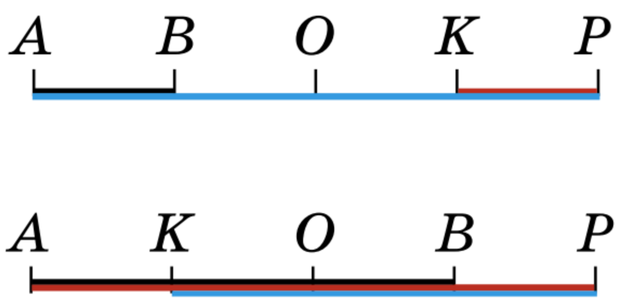
- Через вершини $\triangle ABC$ і точку O проводимо прямі AO, BO, CO і відкладаємо відрізки $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$. Сполучивши точки A_1, B_1, C_1, отримаємо $\triangle A_1B_1C_1$, симетричний $\triangle ABC$ відносно точки O.



Мал. 22.14

2. На прямій дано два рівні відрізки. Вкажіть, де буде їх центр симетрії.

- Нехай рівні відрізки AB і KP лежать на одній прямій. Можливі різні випадки їх розташування (мал. 22.15), але завжди їх центр симетрії — точка O — ділить навпіл відстань між найвіддаленішими точками даних відрізків.



Мал. 22.15

3. Дано точку $A(a; b)$. Знайди координати точки B, симетричної точці A відносно точки $M(m; n)$.

- Якщо точка $B(x; y)$ симетрична точці $A(a; b)$ відносно точки M, то точка $M(m; n)$ — середина відрізка AB. Отже, $\frac{a + x}{2} = m$, $\frac{b + y}{2} = n$, звідки $x = 2m - a$, $y = 2n - b$.

Отже, маємо точку $B(2m - a; 2n - b)$.

ВИКОНАЄМО УСНО



965. Точки A і B симетричні відносно точки M. Знайди відношення: а) $AM : AB$; б) $AM : MB$.

966. Під час моделювання автомобіля інженер відмітив точку кріплення лівої фари як $F(-2; 1)$. Права фара має бути симетрична F відносно $O(0; 0)$. Знайди координати встановлення правої фари.

967. На координатній прямій дано точки $A(-2)$, $B(-1)$, $O(0)$, $C(1)$, $D(2)$. Які з цих точок симетричні відносно інших?

968. Закінчи формулювання правильного твердження: «Відносно точки перетину діагоналей паралелограма кожна його вершина симетрична..., кожна його сторона симетрична..., кожна його діагональ симетрична...».

969. Яка з наведених геометричних фігур не має центра симетрії?

А коло **Б** квадрат **В** рівносторонній трикутник **Г** прямокутник

970. Чи існують фігури, які мають безліч центрів симетрії? Наведи приклади.

971. Скільки центрів симетрії мають дві паралельні прямі? А дві прямі, які перетинаються?

972. Чи має центр симетрії трикутник або п'ятикутник?

973. Чи має центр симетрії графік функції $y = x^3$?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



974. Зобрази дві фігури, що мають центр симетрії.

975. Накресли квадрат, ромб, прямокутник і паралелограм. Познач іншим кольором їх центри симетрії.

976. Дано точки A і O. Побудуй точку A_1, симетричну точці A відносно точки O.

977. Дано відрізок AB і точку O. Побудуй відрізок A_1B_1, симетричний відрізку AB відносно точки O, якщо: а) $O \notin AB$; б) $O \in AB$; в) O — середина AB.

978. Побудуй фігуру, симетричну прямій a відносно точки O, якщо: а) $O \notin a$; б) $O \in a$.

Побудуй довільний трикутник і трикутник, симетричний йому відносно точки O, якщо (979, 980):

979. а) O лежить поза трикутником; б) O лежить на стороні трикутника.

980. а) O — вершина трикутника; б) O — точка перетину медіан трикутника.

981. **Гра.** Перший учасник / перша учасниця ставить точку O, другий / друга — будує фігуру, третій / третя має симетрично відобразити цю фігуру відносно точки O. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

982. Дано точки $A(2; -3)$, $B(4; 2)$, $C(-3; -3)$. Знайди координати точок, симетричних даним відносно:
а) початку координат; б) точки $M(1; 1)$.

983. Дано точки $A(3; 5)$, $B(-4; 3)$, $C(-5; -1)$. Знайди координати точок, симетричних даним відносно:
а) початку координат; б) точки $K(2; -1)$.

Відносно якої точки симетричні точки (984, 985):

984. а) $A(1; 2)$ і $B(5; 6)$; б) $M(-1; 0)$ і $H(3; 6)$?

985. а) $E(2; 6)$ і $C(-8; 3)$; б) $P(9; 0)$ і $K(6; 8)$?

986. Доведи, що точки $A(a; c)$ і $B(-a; -c)$ симетричні відносно початку координат.

987. Дано дві паралельні прямі. Побудуй геометричне місце їх центрів симетрії.

988. Дано два рівні і паралельні відрізки. Побудуй їх центр симетрії. Доведи, що побудована точка — центр симетрії даних відрізків.

989. Доведи, що центром симетрії ромба є точка перетину його діагоналей.

990. Доведи, що дві центрально-симетричні прямі паралельні.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



991. Добудуй до даного трикутника фігуру, симетричну цьому трикутнику відносно середини однієї з його сторін.

992. Добудуй до даної трапеції фігуру, симетричну цій трапеції відносно середини однієї з бічних сторін.

993. Два кола рівних радіусів дотикаються зовні у точці M. Доведіть, що M — центр симетрії цих кіл.

994. Доведи, що чотирикутник, який має центр симетрії, — паралелограм.

995. При яких значеннях x і y точки $M(-1;\ y)$ і $N(x;\ 3)$ симетричні відносно точки $K(2;\ -1)$?

996. For what values of x and y points $M(1;\ -3)$ and $N(x;\ y)$ rotation symmetrical to point $K(3;\ -5)$?

997. Напиши рівняння кола, яке симетричне колу $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ відносно: а) початку координат; б) точки $M(3;\ -2)$.

998. Установи, відносно якої точки симетричні кола $(x-1)^2+(y-5)^2=6$ і $(x+7)^2+(y-9)^2=6$.

999. Напиши рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x+y-6=0$ відносно: а) початку координат; б) точки $K(1;\ 1)$. Побудуй дані прямі і доведи, що вони паралельні.

1000. $x+2y+11=0$ і $2x-y+7=0$ — рівняння прямих, яким належать сторони квадрата, $M(-2;\ -2)$ — центр симетрії цього квадрата. Напиши рівняння двох інших його сторін. Обчисли периметр і площу квадрата.

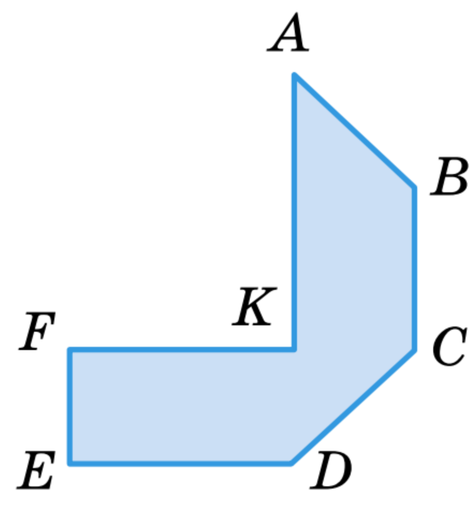
1001. Установіть відповідність між фігурами (1–4) та координатами (А–Д) їх центра симетрії (якщо він існує).

1 відрізок AB, якщо $A(-1;\ 3)$, $B(5;\ 7)$	**А** $(0{,}5;\ 4)$
2 чотирикутник $ABCD$, якщо $A(-2;\ 6)$, $B(0;\ 4)$, $C(3;\ 2)$, $D(1;\ 4)$	**Б** $(2;\ -4)$
	В $(0;\ 0)$
3 трикутник ABC, якщо $A(-2;\ 2)$, $B(3;\ 3)$, $C(2;\ -2)$	**Г** не існує
4 коло $(x-2)^2+(y+4)^2=9$	**Д** $(2;\ 5)$

1002. Дано $\angle ABC$ і точку M всередині нього. Побудуй відрізок з кінцями на сторонах кута такий, щоб точка M була його серединою.

1003. Побудуй центрально-симетричний шестикутник: а) опуклий; б) неопуклий.

1004. Перемалюй у зошит зображений на малюнку 22.16 семикутник. Добудуй до нього семикутник, симетричний відносно середини сторони: а) AB; б) BC; в) CD; г) AK.



Мал. 22.16

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1005. 1. Виріж з кольорового паперу дві рівні різнокольорові прямокутні трапеції і розташуй на столі їх так, щоб вони виявилися симетричними відносно: а) середини однієї її сторони (4 випадки); б) довільної точки найбільшої сторони; в) довільної точки, розташованої поза трапецією; г) точки перетину діагоналей однієї трапеції.

2. На основі результатів завдання 1 намалюй орнамент, мотивом якого є прямокутна трапеція. Сфотографуй створений орнамент і ознайом із ним своїх рідних і однокласників / однокласниць.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1006. Клумба має форму правильного восьмикутника, вписаного в круг, радіус якого дорівнює 5 м. Передбачається, що восьмикутник буде засаджено багаторічними квітучими рослинами, а решта круга — газонною травою. Скільки газонної трави потрібно підготувати для цієї клумби, якщо у середньому на 1 кв. м землі висівають 9 г насіння трави?

1007. Чи існує переміщення, яке відображає одну сторону квадрата на протилежну сторону? А на сусідню сторону?

1008. Знайди кути ромба, якщо його периметр у 4 рази більший за одну з його діагоналей.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



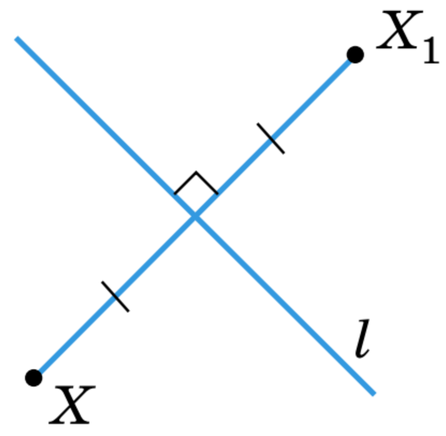
Симетрія відносно точки у роботах Мауріца Ешера

§ 23 СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

симетрія відносно прямої — reflectional symmetry
вісь симетрії — axis of symmetry

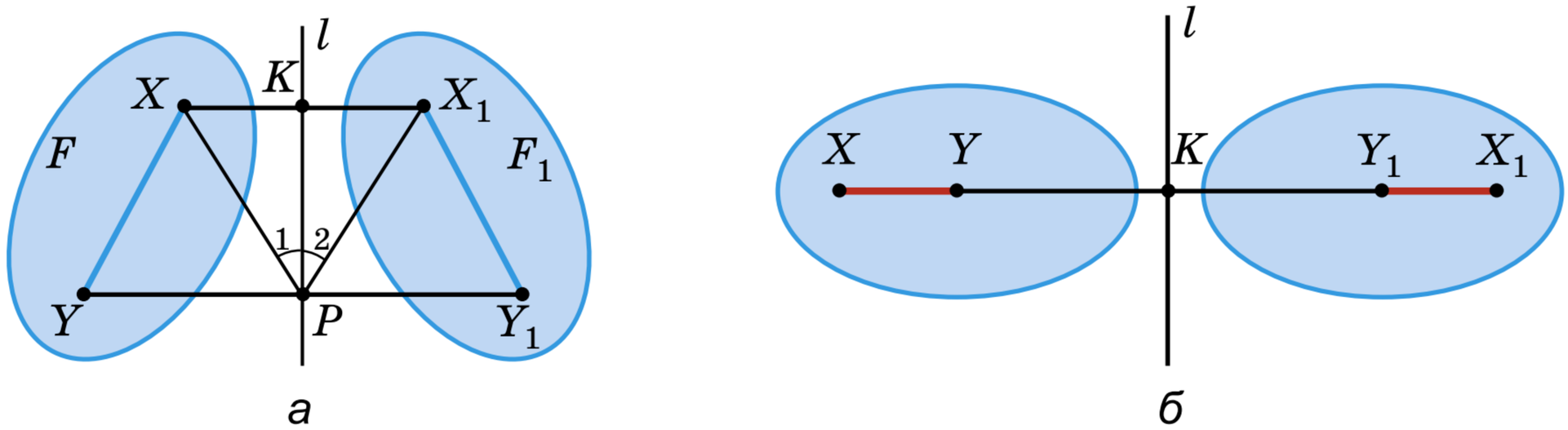
Точки X і X_1 називають *симетричними відносно прямої l*, якщо ця пряма — серединний перпендикуляр відрізка XX_1 (мал. 23.1). Якщо точка X лежить на прямій l, вона вважається симетричною сама собі відносно прямої l. Перетворення фігури F, при якому кожна її точка відображається на симетричну їй відносно прямої l точку, називають *перетворенням симетрії відносно прямої l*. Якщо при цьому перетворенні фігура F відображається на F_1, то ці дві фігури називають *симетричними відносно прямої l*.



Мал. 23.1

Теорема 16. Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.

Доведення. Нехай довільні точки X і Y фігури F перетворенням симетрії відносно прямої l відображаються на точки X_1 і Y_1 фігури F_1 (мал. 23.2, *а*). Доведемо, що $XY = X_1Y_1$.



Мал. 23.2

Якщо K і P — точки перетину відрізків XX_1 і YY_1 з прямою l, то $\triangle XKP = \triangle X_1KP$ (за двома катетами). Отже, $XP = X_1P$ і $\angle 1 = \angle 2$, звідки $\angle XPY = \angle X_1PY_1$. Оскільки $PY = PY_1$, то $\triangle XYP = \triangle X_1Y_1P$, тому $XY = X_1Y_1$.

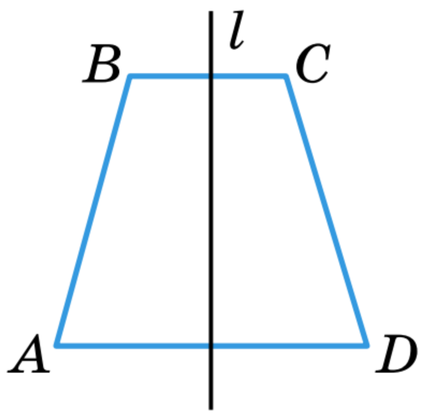
Якщо точки X, Y, X_1 і Y_1 лежать на одній прямій (мал. 23.2, *б*), то

$$XY = |KX - KY| = |KX_1 - KY_1| = X_1Y_1.$$

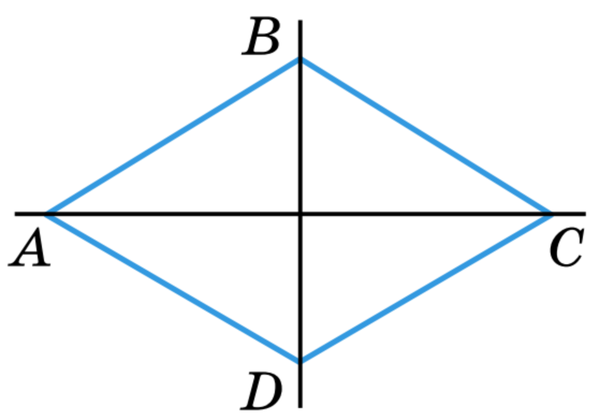
Отже, в обох випадках $XY = X_1Y_1$, тобто перетворення симетрії відносно прямої зберігає відстані між точками. Це перетворення — переміщення.

З доведеної теореми випливає, що перетворення симетрії відносно прямої відображає пряму на пряму, будь-яку фігуру — на рівну їй фігуру.

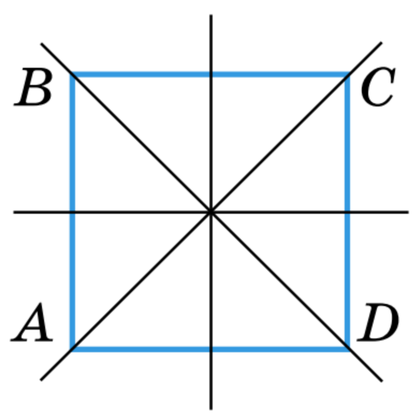
Якщо при симетрії відносно прямої l фігура F відображається на себе, таку фігуру називають *симетричною відносно прямої*, а пряму l — *віссю симетрії фігури* F. Наприклад, рівнобічна трапеція симетрична відносно прямої, що проходить через середини її основ (мал. 23.3). Ромб, відмінний від квадрата, має дві осі симетрії (мал. 23.4), квадрат — чотири (мал. 23.5), а коло — безліч. Правильний n-кутник має n осей симетрії. Усі вони проходять через його центр. Фігури, симетричні відносно прямої, часто трапляються в природі (мал. 23.6), техніці (мал. 23.7) і мистецтві (мал. 23.8).



Мал. 23.3



Мал. 23.4



Мал. 23.5













Мал. 23.6

Мал. 23.7

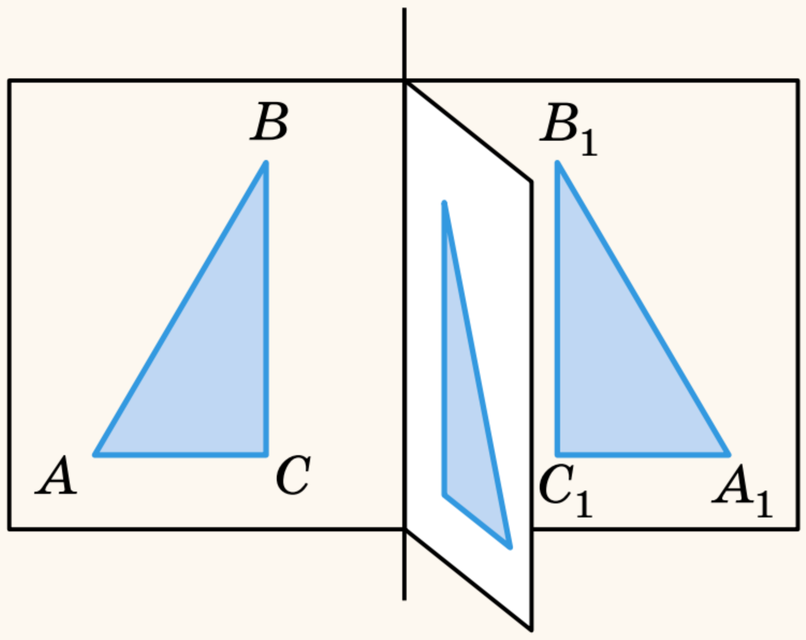
Мал. 23.8

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

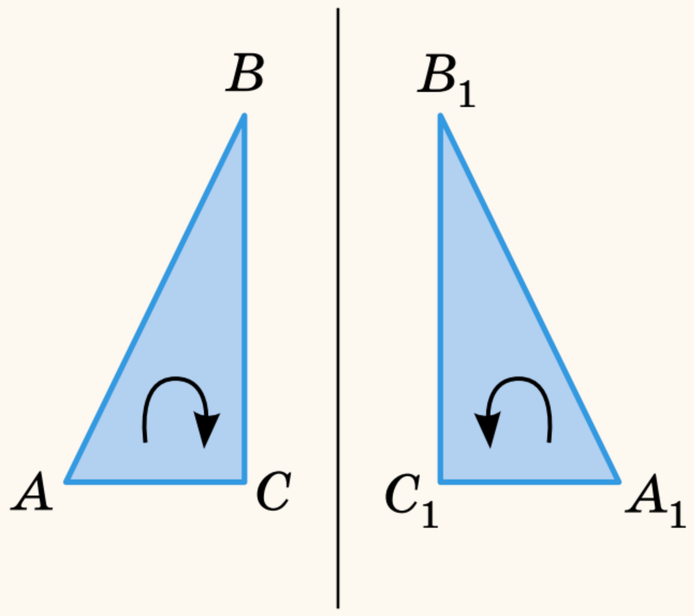


Дві симетричні відносно прямої фігури рівні і лежать в одній площині. А чи завжди, переміщаючи їх тільки в цій площині, можна сумістити їх накладанням? Ні. Наприклад, два симе-

трічні відносно прямої прямокутні нерівнобедрені трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні. Але щоб сумістити їх накладанням, треба один із них перевернути іншим боком, а для цього винести його з площини в простір (мал. 23.9).



Мал. 23.9



Мал. 23.10

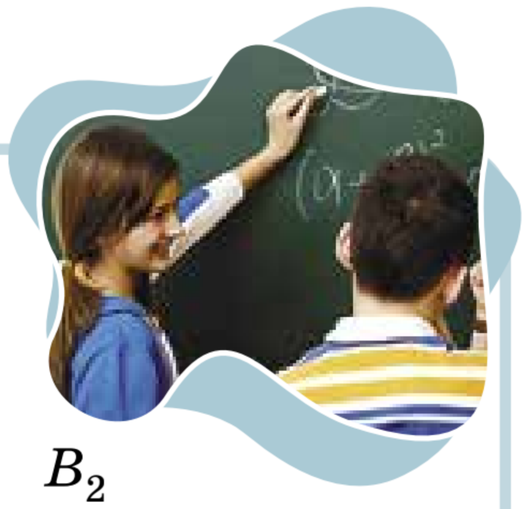
Кажуть, що такі трикутники рівні, але неоднаково орієнтовані. Якщо вершини A, B, C першого трикутника можна обійти в напрямі руху годинникової стрілки, то відповідні вершини трикутника $A_1B_1C_1$ — у протилежному напрямі (мал. 23.10).

Отже, симетрія відносно прямої змінює орієнтацію фігур.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

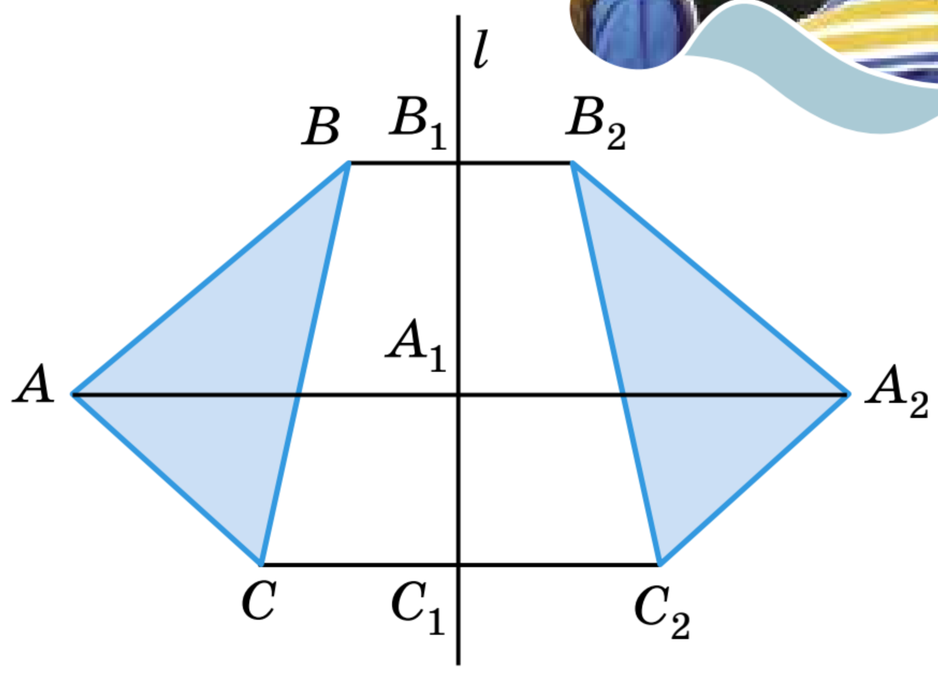
1. Які точки називають симетричними відносно деякої прямої?
2. Яке перетворення називають симетрією відносно прямої?
3. Доведи, що симетрія відносно прямої — переміщення.
4. Які фігури називають симетричними відносно прямої?
5. Скільки осей симетрії має: а) ромб; б) квадрат; в) коло?
6. Чи має вісь симетрії: а) трикутник; б) трапеція; в) паралелограм?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



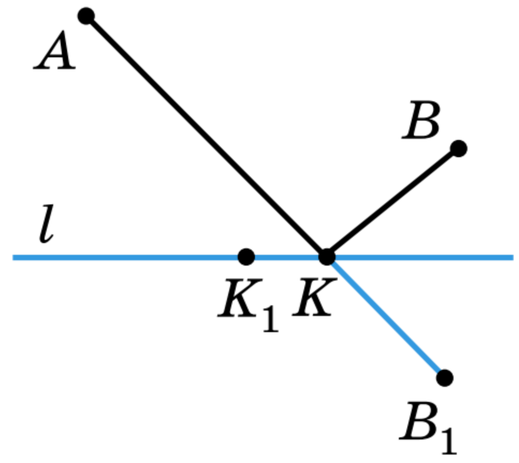
1. Побудуй трикутник, симетричний $\triangle ABC$ відносно прямої l, яка лежить поза трикутником (мал. 23.11).

- Через вершини $\triangle ABC$ проводимо прямі AA_1, BB_1, CC_1, перпендикулярні до l, і відкладаємо на них відрізки $A_1A_2 = AA_1$, $B_1B_2 = BB_1$, $C_1C_2 = CC_1$. Сполучивши точки A_2, B_2, C_2, отримаємо $\triangle A_2B_2C_2$, симетричний $\triangle ABC$ відносно прямої l.



Мал. 23.11

2. Точки A і B лежать з одного боку від прямої l. Знайди на цій прямій таку точку K, щоб сума $AK + KB$ була найменшою.



Мал. 23.12

- Позначимо точку B_1, симетричну B відносно l (мал. 23.12). Точка K перетину прямих AB_1 і l — шукана. Справді, якщо K_1 — яка-небудь інша точка прямої l, то

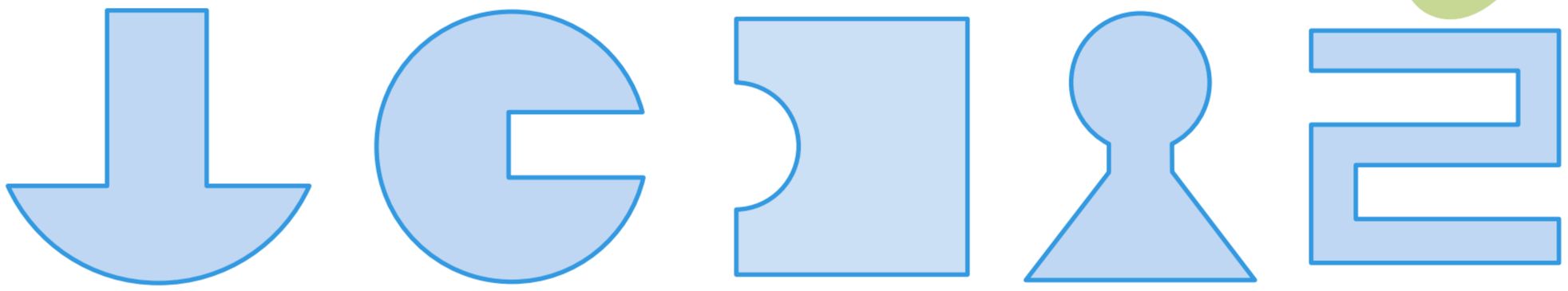
$$AK_1 + K_1B = AK_1 + K_1B_1 > AK + KB_1 = AK + KB.$$

Сума $AK + KB$ менша від будь-якої суми $AK_1 + K_1B$.

ВИКОНАЄМО УСНО



1009. Які з фігур, зображених на малюнку 23.13, мають осі симетрії?


Мал. 23.13

1010. Які з наведених нижче букв симетричні відносно прямої: А, Б, В, Г, Д, Е, Є, Ж, З, К, Л, М, Н, О, П, С, Т, Х, Ф?

1011. Чи правильно, що бісектриса кута є його віссю симетрії?

1012. Скільки осей симетрії має: а) відрізок; б) пряма; в) коло?

1013. Чи може мати вісь симетрії ламана, що має 4 ланки? А 5 ланок, n ланок?

1014. Скільки осей симетрії може мати:
а) незамкнена ламана; б) замкнена ламана?

1015. Фігура складається з двох рівних кіл, що перетинаються. Скільки осей симетрії має ця фігура?

А одну **Б** дві **В** безліч **Г** жодної

1016. Фігура складається з трьох рівних кіл, що дотикаються одне до одного. Скільки осей симетрії має ця фігура?

1017. Який чотирикутник має тільки одну вісь симетрії?

А паралелограм
Б ромб
В рівнобічна трапеція
Г квадрат

1018. Скільки осей симетрії має це фото з підніжжя Ейфелевої вежі?



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

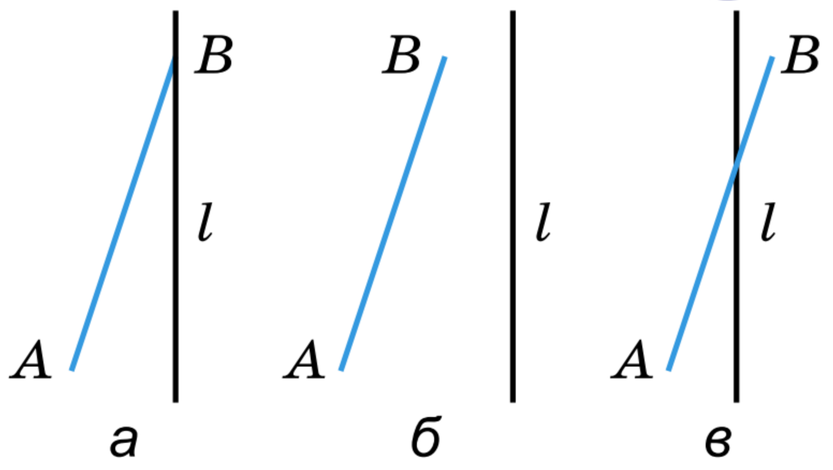


1019. Побудуй точку, симетричну даній точці A відносно прямої l.

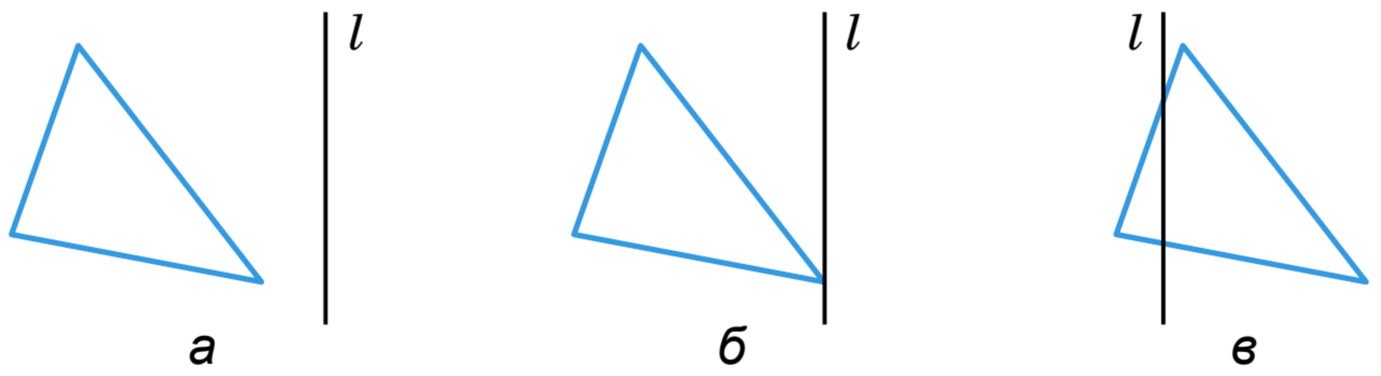
1020. Дано дві точки. Побудуй пряму, відносно якої вони симетричні.

1021. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно даної прямої l. Розгляньте кілька випадків (мал. 23.14).

1022. Побудуй трикутник, симетричний даному трикутнику відносно прямої l. Розглянь різні випадки (мал. 23.15).



Мал. 23.14



Мал. 23.15

1023. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць малює фігуру, другий / друга — пряму, третій / третя — має відобразити фігуру симетрично відносно прямої. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

1024. Побудуй фігуру, симетричну даному колу відносно прямої, яка:
а) не має з колом спільних точок;
б) дотикається до кола;
в) перетинає коло.

1025. Всередині гострого кута AOB дано точку M. Точки M_1 і M_2 симетричні точці M відносно прямих OA і OB. Знайди міру кута M_1OM_2, якщо $\angle AOB = \alpha$.

1026. Кола з центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B. Доведи, що точки A і B симетричні відносно прямої OO_1.

1027. Доведи, що трикутник, який має вісь симетрії, рівнобедрений.

1028. Доведи, що трикутник, який має дві осі симетрії, рівносторонній. Скільки осей симетрії має рівносторонній трикутник?

1029. Доведи, що бісектриса кута лежить на його осі симетрії.

1030. Побудуй точки $A(-3; 1)$, $B(4; 5)$, $C(-2; -6)$, $D(0; 3)$, $E(2; 0)$, $K(1; 1)$ і точки, симетричні даним відносно: а) осі OX; б) осі OY. Запиши координати цих точок.

1031. Побудуй точки $A(4; -2)$, $B(-1; 3)$, $C(-4; -3)$, $D(0; -4)$, $E(-3; 0)$ і точки, симетричні даним відносно: а) осі OX; б) осі OY. Запиши координати цих точок.

1032. Установи вид трикутника ABC, якщо $A(-4;\ 2)$, $B(3;\ 6)$, $C(2;\ -2)$. Скільки осей симетрії має цей трикутник?

1033. Determine the type of quadrilateral $ABCD$ if $A(-4;\ -3)$, $B(-7;\ 3)$, $C(-1;\ 6)$, $D(2;\ 0)$. How many axes of symmetry does this quadrilateral have?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1034. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = AD$ і $CB = CD$. Доведи, що пряма AC — його вісь симетрії.

1035. Діагоналі чотирикутника є його осями симетрії. Доведи, що цей чотирикутник — ромб.

1036. Дано пряму l, рівняння якої $y = 2x + 3$. Запиши рівняння прямих, симетричних l відносно: а) осі x; б) осі y.

1037. Фасад музею має декоративні елементи у вигляді відрізків AB і CD, розташовані симетрично відносно деякої прямої l. Напиши рівняння цієї прямої, якщо на плані будівлі $A(-1;\ 4)$, $B(2;\ 3)$, $C(-3;\ 2)$, $D(-2;\ -1)$. Зроби малюнок.

1038. Установи вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-3;\ -1)$, $B(-5;\ 3)$, $C(-1;\ 5)$, $D(1;\ 1)$. Скільки осей симетрії він має? Напиши їх рівняння.

1039. Напиши рівняння осей симетрії чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-5;\ 1)$, $B(-3;\ 5)$, $C(1;\ 3)$, $D(-1;\ -1)$.

Зроби малюнок і встанови, скільки осей симетрії має фігура, яка є об'єднанням кіл (1040, 1041).

1040. а) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ і $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
б) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ і $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

1041. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ і $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

1042. Кожна з фігур (А–Д) має вісь симетрії, що задається деякою прямою (1–4). Установіть відповідність між прямими (1–4) та фігурами (А–Д).

1 $y = x + 1$	**А** чотирикутник $ABCD$, якщо $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 4)$, $C(4;\ 4)$, $D(4;\ 1)$
2 $y = -x - 2$	**Б** трикутник ABC, якщо $A(2;\ -1)$, $B(-1;\ 8)$, $C(8;\ 5)$
3 $y = 7 - x$	**В** коло $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$
4 $y = 0$	**Г** чотирикутник $ABCD$, якщо $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 6)$, $C(6;\ 7)$, $D(5;\ 2)$
	Д кут AOB, якщо $A(5;\ 5)$, $O(0;\ 0)$, $B(3;\ -3)$

1043. Два відрізки симетричні відносно прямої a. Доведи, що серединні перпендикуляри цих відрізків також симетричні відносно прямої a.

1044. Доведи, що сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедреного гострокутного трикутника до бічних сторін дорівнює висоті трикутника, опущеній на бічну сторону.

1045. Через внутрішню точку даного кута проведи пряму, яка відтинає на його сторонах рівні відрізки.

1046. Точки A і B лежать по різні боки від прямої l. Знайди на прямій l таку точку M, щоб бісектриса кута AMB належала цій прямій.

1047. Опуклий чотирикутник, який має тільки одну вісь симетрії, що проходить через дві його вершини, називають дельтоїдом. Накресли який-небудь дельтоїд і досліди його властивості.

1048. Дано кут, вершина якого недоступна. Побудуй кут, удвічі більший від даного.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1049. Підготуй презентацію на тему «Симетрія навколо нас». Покажи, де і коли ти особисто використовуєш симетрію та її властивості (симетрія у природі, побуті, техніці, спорті, мистецтві тощо).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1050. Побудуй квадрат зі стороною 3 см і квадрат, симетричний йому відносно деякої точки O. Знайди периметр і площу побудованого квадрата.

1051. Ділянку, що має форму круга діаметра 90 м, потрібно обгородити сіткою рабиця. Скільки потрібно стовпчиків для цієї огорожі, якщо відстань між сусідніми стовпчиками (по дузі кола) має бути 90 см?

1052. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють a і b.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



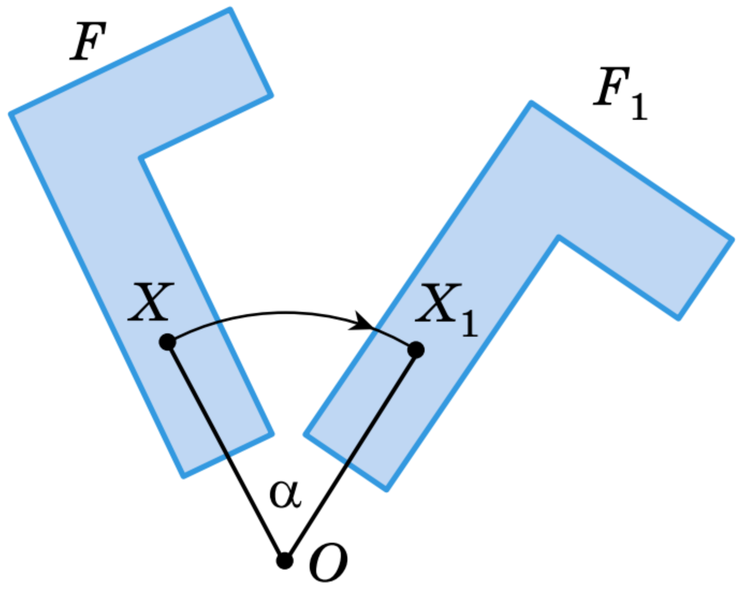
Маріїнський палац у Києві

§ 24 ПОВОРОТ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

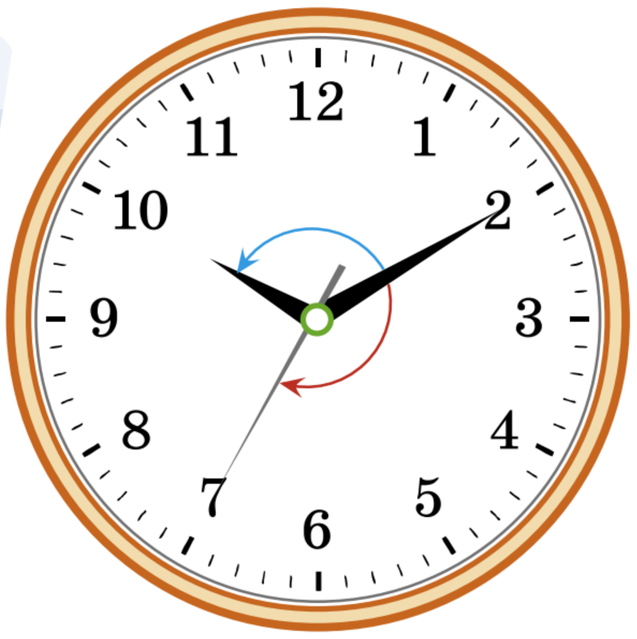
- поворот — rotation
- кут повороту — angle of rotation
- центр повороту — centre of rotation

Нехай дано точку O і довільну фігуру F (мал. 24.1). Повернемо точку X цієї фігури навколо точки O на кут α за рухом годинникової стрілки. При цьому точка X відобразиться на таку точку X_1, що кутова міра дуги XX_1 з центром O дорівнює α (OX і OX_1 — рівні радіуси). Якщо таким способом повернути навколо точки O на кут α кожну точку фігури F, то дістанемо фігуру F_1. Говорять, що поворот навколо точки O на кут α відображає фігуру F на фігуру F_1.



Мал. 24.1

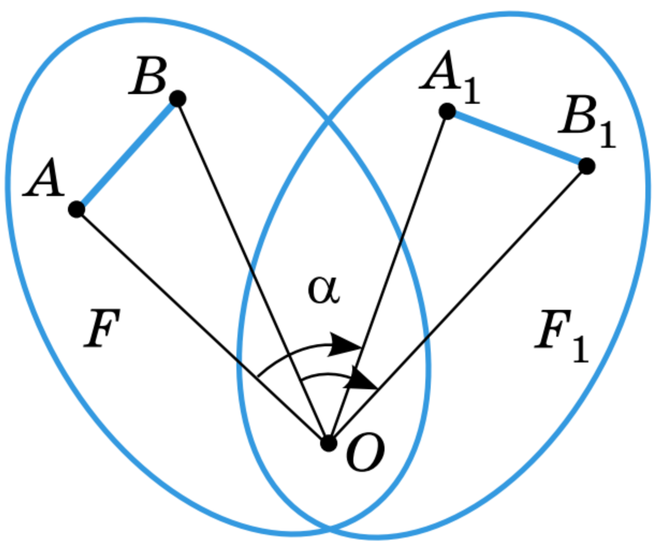
Точку O називають *центром повороту*, а кут XOX_1 — *кутом повороту*. Поворот можна здійснювати як за рухом годинникової стрілки, так і проти її руху (мал. 24.2).



Мал. 24.2

Теорема 17. Поворот навколо точки — переміщення.

Доведення. Нехай при повороті фігури F навколо точки O на кут α точки A і B цієї фігури відображаються на точки A_1 і B_1 фігури F_1 (мал. 24.3). Тоді $OA = OA_1$, $OB = OB_1$ і $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$. Якщо точки A, B і O не лежать на одній прямій, то $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ (за двома сторонами і кутом між ними, оскільки $\angle AOB = \angle A_1OB_1$). Отже, в цьому випадку $AB = A_1B_1$.



Мал. 24.3

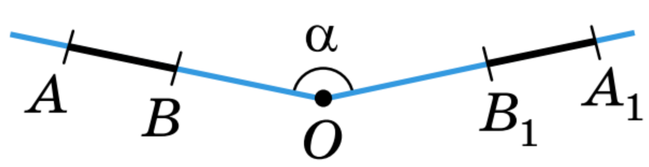
Якщо точки A, B і O лежать на одній прямій (мал. 24.4), то

$$AB = |OA - OB| = |OA_1 - OB_1| = A_1B_1.$$

Випадок, коли точка O лежить між A і B, розглянь самостійно.

Отже, завжди $AB = A_1B_1$.

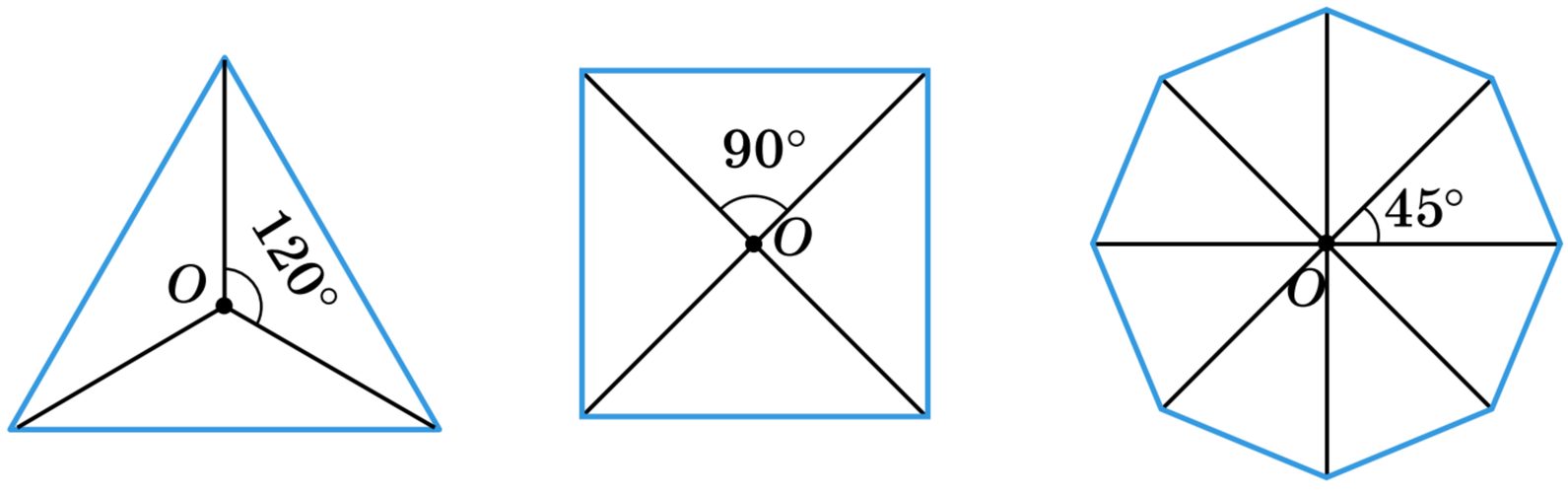
Як бачимо, поворот — один із видів переміщення. Тому при повороті пряма відображається на пряму, будь-яка фігура — на рівну їй фігуру.



Мал. 24.4

Існують фігури, які при повороті навколо однієї з точок переходять самі в себе. З по-

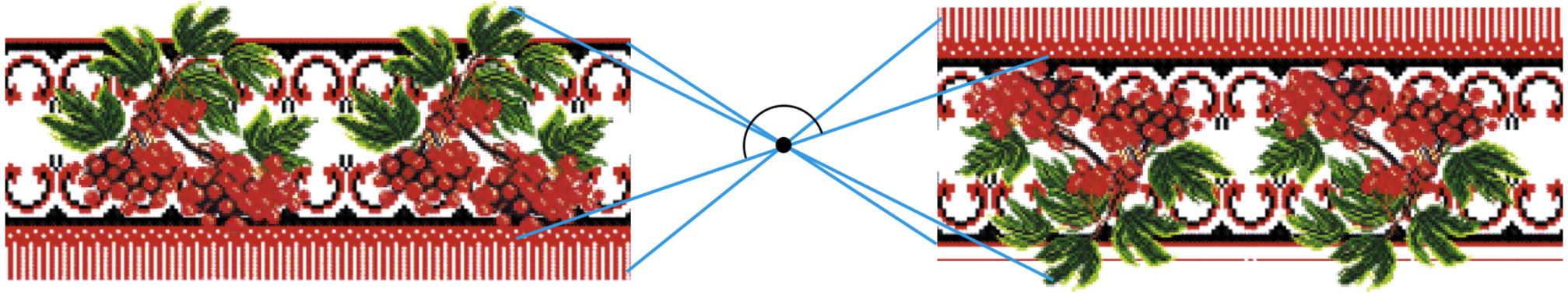
переднього розділу ти вже знаєш, що центральний кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$. Тому будь-який правильний n-кутник переходить у себе при повороті навколо свого центра на кут $\frac{360^\circ}{n}$. Наприклад, переходять самі у себе правильні трикутник, чотирикутник і восьмикутник (мал. 24.5).



Мал. 24.5

Зверни увагу!

Поворот на 180° навколо точки O — симетрія відносно цієї точки (мал. 24.6).



Мал. 24.6

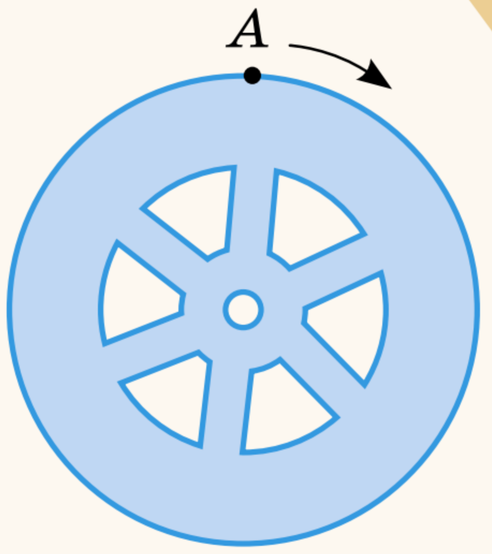
Правильне і таке означення. **Симетрією відносно точки є поворот на 180° навколо цієї точки.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Геометричне поняття *поворот* слід відрізняти від фізичного обертання. *Обертання* — це процес, який визначається часом, кутовою швидкістю, кутовим прискоренням тощо. Обертання може бути рівномірним або нерівномірним, здійснюватися на який завгодно великий кут в одному і другому напрямах. Наприклад, якщо шків (мал. 24.7) зробить два чи десять повних обертів, кажуть, що він обернувся відповідно на 720° чи на 3600°. Поворот як геометричне перетворення не пов'язаний із часом чи швидкістю, а є відображенням однієї фігури на іншу, рівну їй.

Вище йшлося про поворот фігури. Але науковці частіше розглядають поворот всієї площини. Поворот площини однозначно можна задати, вказавши його центр O і кут α, де — $0^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.



Мал. 24.7

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Геометричні переміщення. Урок 2).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

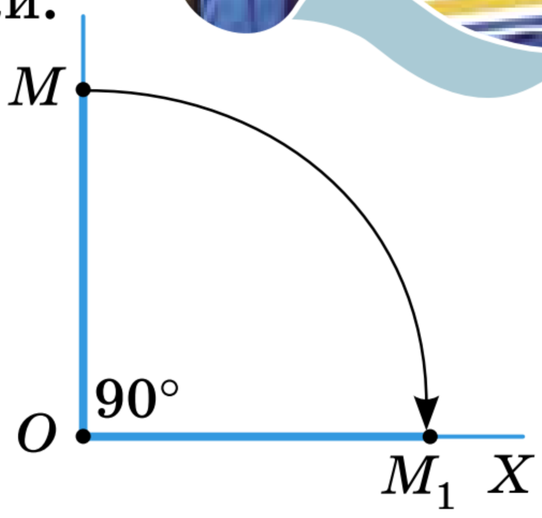
1. Яке геометричне перетворення називають поворотом?
2. Чи є поворот переміщенням? Чому?
3. Сформулюй властивості повороту навколо точки.
4. Який поворот називають симетрією відносно точки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Дано дві різні точки M і O. Побудуй точку M_1, в яку переходить точка M при повороті навколо точки O на кут 90° за рухом годинникової стрілки.

- Проведемо промінь OM і побудуємо промінь OX так, що $\angle MOX = 90°$ за рухом годинникової стрілки. На промені OX від точки O відкладемо відрізок, що дорівнює відрізку OM. Отримаємо точку M_1 (мал. 24.8).

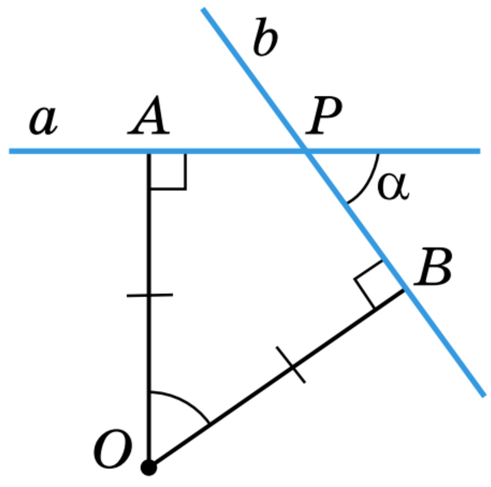


Мал. 24.8

2. Дано пряму a і точку $O \notin a$. Поверни пряму a навколо O на даний кут α за рухом годинникової стрілки.

- *Перший спосіб.*

Опустимо перпендикуляр OA на пряму a (мал. 24.9). Повернемо цей перпендикуляр навколо O на кут α за рухом годинникової стрілки. Для цього побудуємо кут $AOB = \alpha$ і на промені OB відкладемо відрізок $OB = OA$. Через точку B проведемо пряму b, перпендикулярну до OB. Пряма b — та, яку потрібно було побудувати.



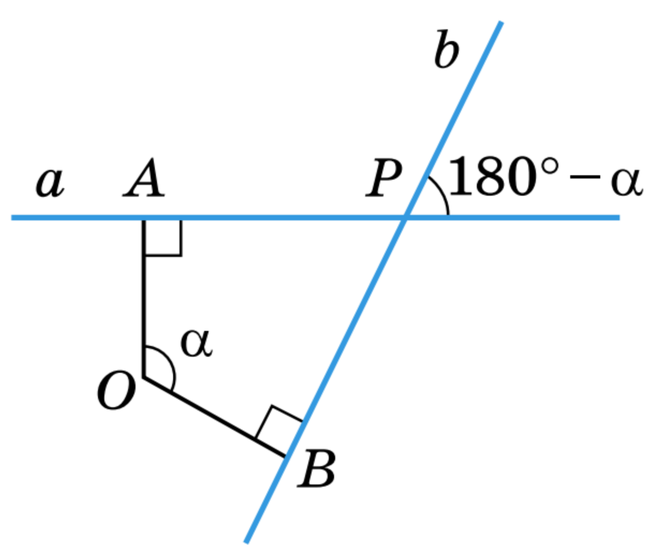
Мал. 24.9

- *Другий спосіб.*

Позначимо будь-які дві точки A і B прямої a і повернемо кожну з них на кут α за рухом годинникової стрілки. Якщо при цьому вони відобразяться на точки A_1 і B_1, то пряма A_1B_1 — та, яку треба було побудувати. Малюнок зроби самостійно.

3. Поворот на кут α навколо точки O відображає пряму a на b. Знайди кут β між цими прямими.

- Якщо прямі a і b перетинаються в точці P, а OA і OB — перпендикуляри до прямих a і b, то $\angle APB = 180° - \alpha$. Якщо кут α гострий або прямий, то $\beta = \alpha$ (мал. 24.9). Якщо кут α тупий, то $\beta = 180° - \alpha$ (мал. 24.10).

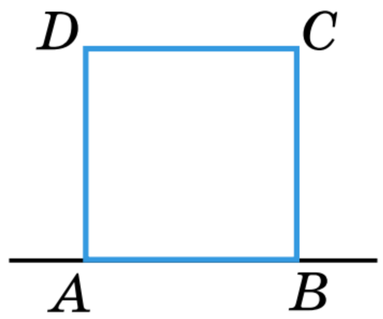


Мал. 24.10

ВИКОНАЄМО УСНО



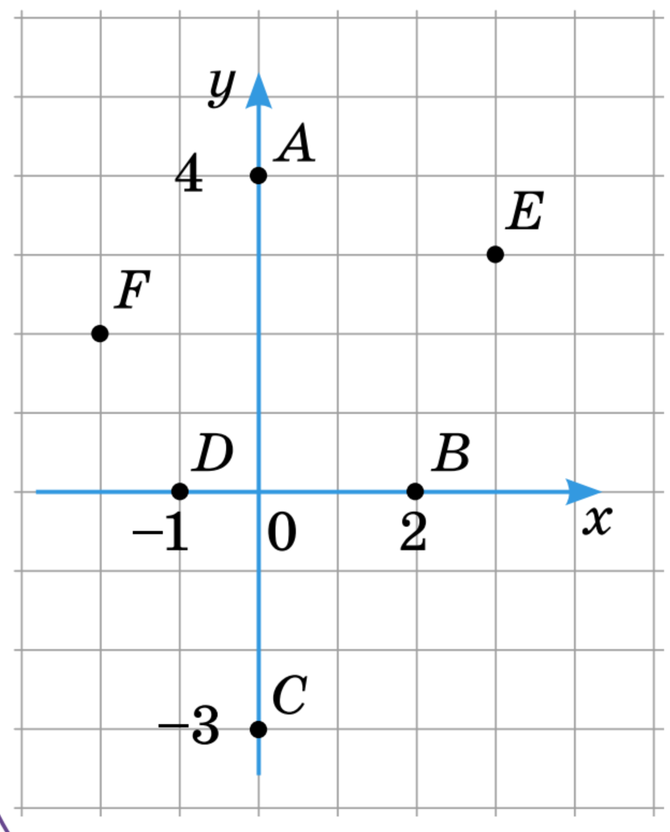
1053. $ABCD$ — квадрат (мал. 24.11). На який кут треба повернути пряму AB навколо точки A, щоб вона пройшла через точку: а) C; б) D; в) B?



Мал. 24.11

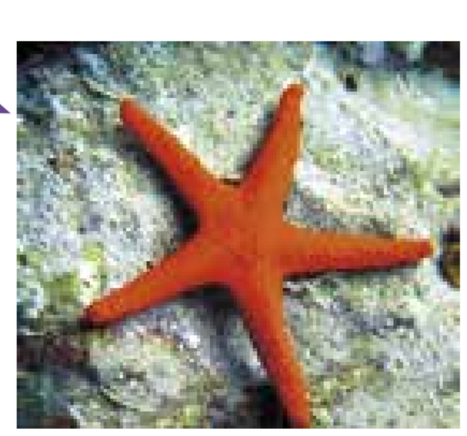
1054. На який кут треба повернути пряму AB навколо точки C, щоб утворена пряма стала: а) перпендикулярною до AB; б) паралельною AB?

1055. Укажи координати точок, на які відобразяться точки A, B, C, D, E, F (мал. 24.12) при повороті навколо початку координат на кут 90°:
а) за годинниковою стрілкою; б) проти годинникової стрілки.



Мал. 24.12

1056. На який кут треба повернути один промінь морської зірки, щоб він перейшов у сусідній?

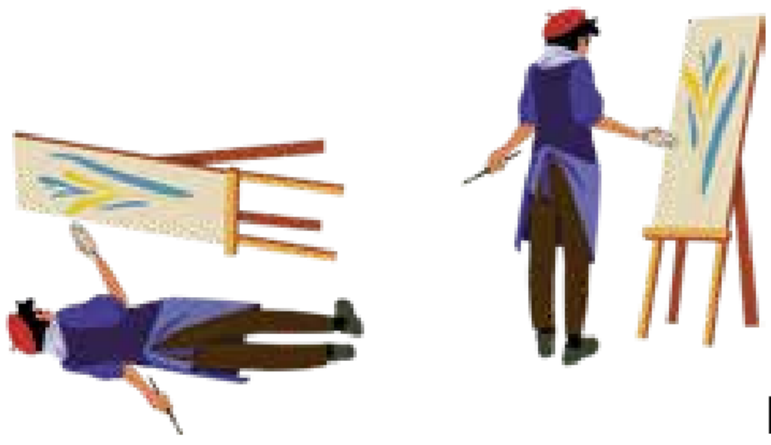


1057. Навколо якої точки і на який кут слід повернути одну із двох паралельних прямих, щоб вона сумістилась із другою?

1058. Два рівні кола дотикаються в точці A. На який кут одне з них слід повернути навколо точки A, щоб воно сумістилось із другим колом?
А 60° **Б** 90° **В** 180° **Г** 360°

1059. Який чотирикутник можна повернути навколо деякої точки O на 90° так, щоб він сумістився сам із собою?
А прямокутник **Б** квадрат **В** ромб **Г** трапецію

1060. Проаналізуй малюнки, чи є ці 2 малюнки образом і прообразом при повороті (мал. 24.13)?



Мал. 24.13

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1061. Дано точки O і A. Виконай поворот точки A навколо точки O на кут 60° за рухом годинникової стрілки.

1062. Дано відрізок AB і точку O, що не лежить на прямій AB. Поверни відрізок AB навколо точки O на кут 45° проти руху годинникової стрілки.

1063. Поверніть даний трикутник ABC за рухом годинникової стрілки на 90° навколо: а) вершини A; б) середини сторони BC.

1064. На логотипі відрізок AB_1 утворений з відрізка AB поворотом на 60° навколо точки A. Знайди відстань BB_1, якщо $AB = a$.

1065. Квадрат $ABCD$ повернули навколо точки A так, що його вершина B перейшла в D, а C — у C_1. Знайди відстань CC_1, якщо $AB = a$. На який кут виконано поворот?

1066. Дано дві перпендикулярні прямі. Знайди геометричне місце точок, навколо яких можна повернути одну з прямих, щоб вона сумістилась із другою прямою.

1067. Навколо якої точки і на який кут слід повернути рівносторонній трикутник, щоб він сумістився із собою?

1068. **Гра**. Один із учасників / одна із учасниць малює 2 фігури, а другий / друга визначає, чи можуть ці дві фігури бути образом і прообразом при повороті. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

1069. Правильний n-кутник при повороті навколо центра на кут β за годинниковою стрілкою відображається на себе. Знайди найменший кут β ($\beta \neq 0$) для: а) $n = 5$; б) $n = 9$; в) $n = 10$; г) $n = k$.

1070. Правильний n-кутник при повороті навколо центра на кут α проти годинникової стрілки відображається на себе. Знайди найменший кут α ($\alpha \neq 0$) для: а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = 12$; г) $n = k$.

1071. Дано точки $A(2; 2)$, $B(9; 2)$, $C(6; -1)$. Побудуй трикутник $A_1B_1C_1$, у який перейде трикутник ABC при повороті навколо початку координат на кут 90° за годинниковою стрілкою. Знайди периметр і площу трикутника $A_1B_1C_1$.

1072. Дано точки $A(1; 1)$, $B(6; 1)$, $C(3; 5)$. Побудуй трикутник $A_1B_1C_1$, у який перейде трикутник ABC при повороті навколо початку координат на кут 90° проти годинникової стрілки. Знайди периметр і площу трикутника $A_1B_1C_1$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1073. На кресленні точка $A(2; 3)$ відповідає положенню деталі. Після обертання деталі навколо початку координат ця точка перемістилася в точку $B(3; -2)$. На який кут було виконано поворот?

1074. Знайди m і n, якщо точка $M(m; 1)$ переходить у точку $N(n; 4)$ при повороті навколо точки $O(0; 0)$ на кут 90° за годинниковою стрілкою.

1075. Find m and n if point $E(-4; m)$ moves to point $F(3; n)$ when rotated around point $P(1; 4)$ by an angle of $90°$ counterclockwise.

1076. Дано два рівні кола. Знайди геометричне місце точок, навколо яких можна здійснити поворот одного з кіл, щоб воно сумістилося з другим.

1077. Трикутник AB_1C_1 — образ правильного трикутника ABC при повороті його навколо точки A на кут $60°$: а) за рухом годинникової стрілки; б) проти руху годинникової стрілки. Знайдіть BC_1, якщо $AB = a$.

1078. Чотирикутник $AB_1C_1D_1$ — образ квадрата $ABCD$ при повороті навколо точки A на кут $45°$. Знайди BC_1 і BD_1, якщо $AB = a$. Розглянь два випадки:

а) поворот за рухом годинникової стрілки;

б) поворот проти руху годинникової стрілки.

1079. При повороті правильного шестикутника $ABCDEF$ навколо його центра на кут $90°$ за рухом годинникової стрілки отримали шестикутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Знайди AA_1, AB_1, AC_1, AD_1, якщо $AB = a$.

1080. На сторонах AB і BC трикутника ABC зовні побудовано рівносторонні трикутники ABP і BKC. Доведи, що $AK = PC$. Знайди кут між прямими AK і PC.

1081. На послідовних відрізках AB і BC прямої AC з одного боку від неї побудовано правильні трикутники ABK і BCP. Точки M і H — середини відрізків AP і CK. Доведи, що трикутник BMH — правильний.

1082. На сторонах AB і AC трикутника ABC зовні побудовано квадрати $ABMH$ і $ACPK$. Доведи, що медіана AE трикутника ABC перпендикулярна до відрізка HK і дорівнює його половині.

1083. Дано два рівні відрізки (мал. 24.14). Знайди точку, поворот навколо якої відображає один із цих відрізків на другий.

Мал. 24.14

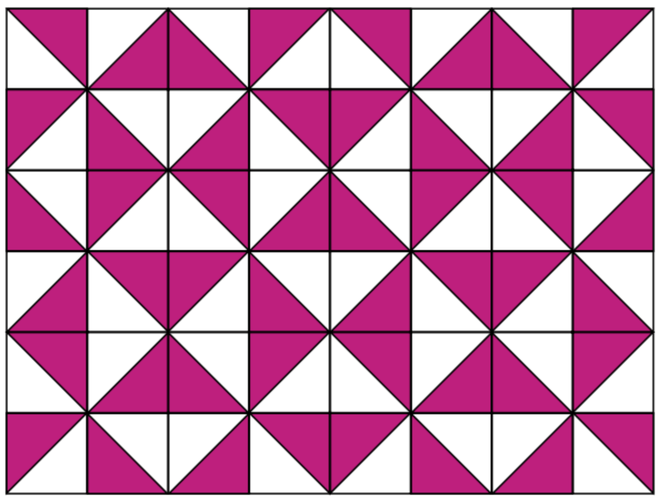
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1084. Виріж з паперу у клітинку один квадрат і розфарбуй його, як показано на малюнку 24.15. За допомогою повороту на кут 90° і осьової симетрії спробуй створити орнамент, зображений на малюнку 24.16. Із якого перетворення слід почати? Який інший мотив і перетворення можна використати, щоб отримати схожий орнамент?



Мал. 24.15



Мал. 24.16

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1085. Сторони одного трикутника пропорційні числам 3, 5 і 7. Знайди сторони подібного йому трикутника, якщо його периметр дорівнює 3 м.

1086. З катера в деякий момент видно маяк під кутом в 30° за курсом корабля, а коли катер пройшов курсом 20,4 км, маяк стало видно під кутом в 135° ліворуч від курсу. Знайди відстань від катера до маяка в кожний момент, коли вимірювався кут.

1087. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Обчисли синуси, косинуси і тангенси його гострих кутів.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





Поворот у різних сферах людської діяльності

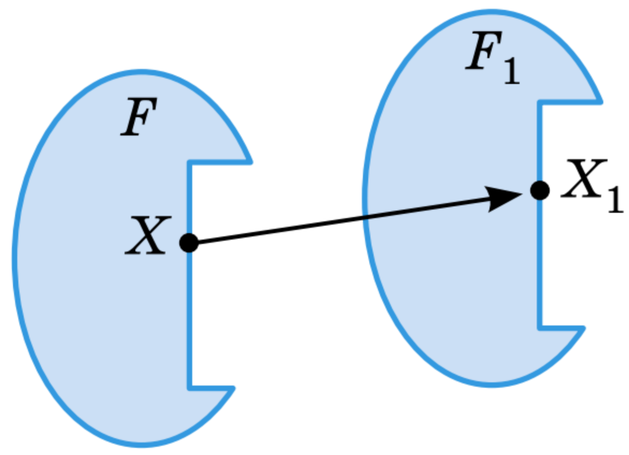
§ 25 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

паралельне перенесення — translation

Один із прикладів геометричного перетворення — *паралельне перенесення*.

Нехай дано фігуру F (мал. 25.1). Якщо кожну її точку змістити в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань XX_1 (або на вектор $\overrightarrow{XX_1}$), то дістанемо фігуру F_1. У такому випадку говорять, що паралельне перенесення, яке відображає точку X на X_1, відображає фігуру F на F_1.

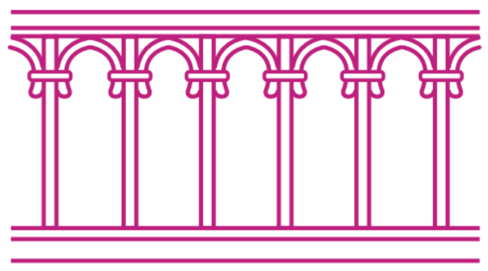


Мал. 25.1

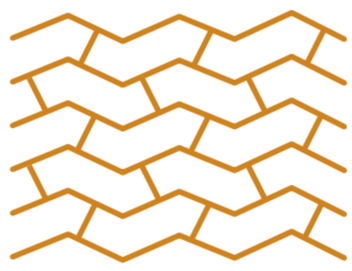
Однакові малюнки, які періодично повторюються на тканинах, шпалерах, вишиванках (мал. 25.2), можна вважати виконаними за допомогою паралельних перенесень. Те саме можна сказати про однакові поверхи багатоповерхового будинку, секції огорожі (мал. 25.3), паркетини підлоги, плити на аеродромах, майданах (мал. 25.4) тощо.



Мал. 25.2



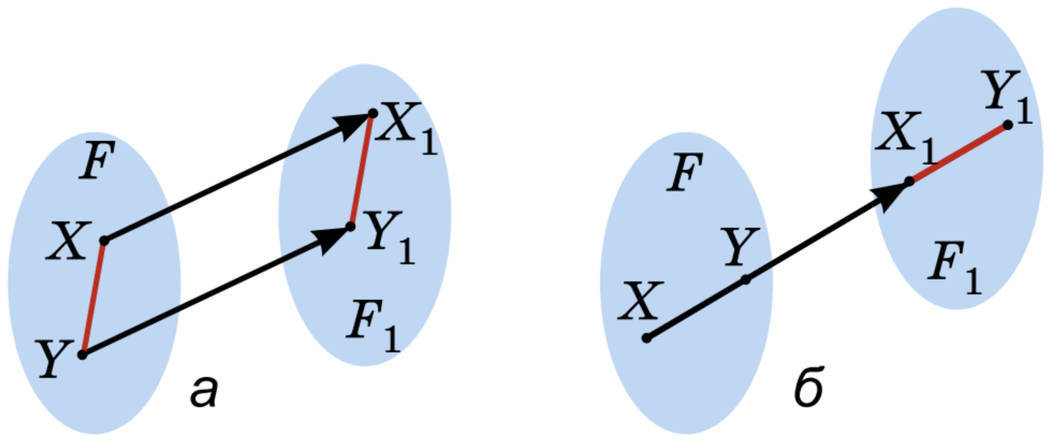
Мал. 25.3



Мал. 25.4

Теорема 18. Паралельне перенесення — переміщення.

Доведення. Якщо відрізок X_1Y_1 — образ відрізка XY при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{XX_1}$, то відрізки XX_1 і YY_1 рівні й паралельні або лежать на одній прямій. Якщо ці відрізки рівні і паралельні, то чотирикутник XX_1Y_1Y — паралелограм. Отже, $XY = X_1Y_1$ (мал. 25.5, *а*).



Мал. 25.5

Якщо рівні відрізки XX_1 і YY_1 лежать на одній прямій (мал. 25.5, *б*), то

$$XY = |XX_1 - YX_1| = |YY_1 - YX_1| = X_1Y_1.$$

Отже, в обох випадках $XY = X_1Y_1$. При паралельному перенесенні зберігаються відстані між точками. Тому паралельне перенесення — переміщення.

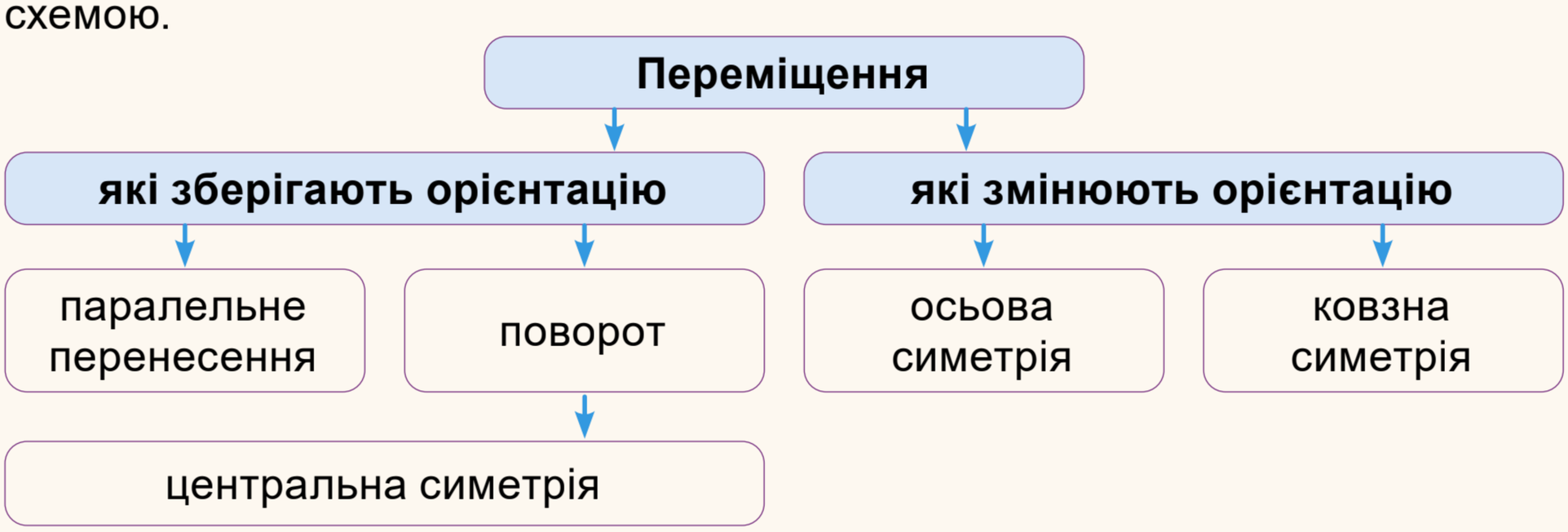
Паралельне перенесення відображає пряму на паралельну їй пряму і будь-яку фігуру — на рівну їй фігуру. Розв'язуючи геометричні задачі або доводячи теореми, іноді здійснюють паралельне перенесення частини фігури. У таких випадках говорять про *метод паралельного перенесення*.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Досі ми розглядали окремі види переміщень: симетрію відносно точки, симетрію відносно прямої, поворот, паралельне перенесення. Заслуговують на увагу і їх *композиції* — послідовні виконання двох чи кількох із них. Наприклад, якщо паралельне перенесення відображає фігуру F на F_1, а симетрія відносно прямої відображає фігуру F_1 на F_2, то кажуть, що фігуру F на F_2 відображено композицією паралельного перенесення і симетрії відносно прямої. Композицію паралельного перенесення уздовж прямої l і симетрії відносно прямої l називають **ковзною симетрією**. Оскільки симетрія відносно прямої змінює орієнтацію фігур, а паралельне перенесення не змінює, то ковзна симетрія змінює орієнтацію фігур.

Співвідношення між розглянутими переміщеннями можна зобразити такою схемою.



Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Геометричні переміщення. Урок 1).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

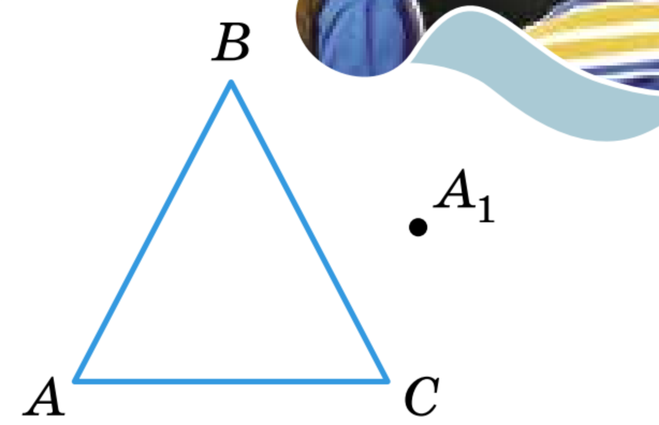
1. Яке перетворення називають паралельним перенесенням?
2. Наведи приклади паралельного перенесення в навколишньому середовищі.
3. Сформулюй і доведи теорему про властивість паралельного перенесення.
4. Чи зберігається рівність фігур при паралельному перенесенні?
5. Яка фігура є образом прямої при паралельному перенесенні на ненульовий вектор?
6. Що називають методом паралельного перенесення?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

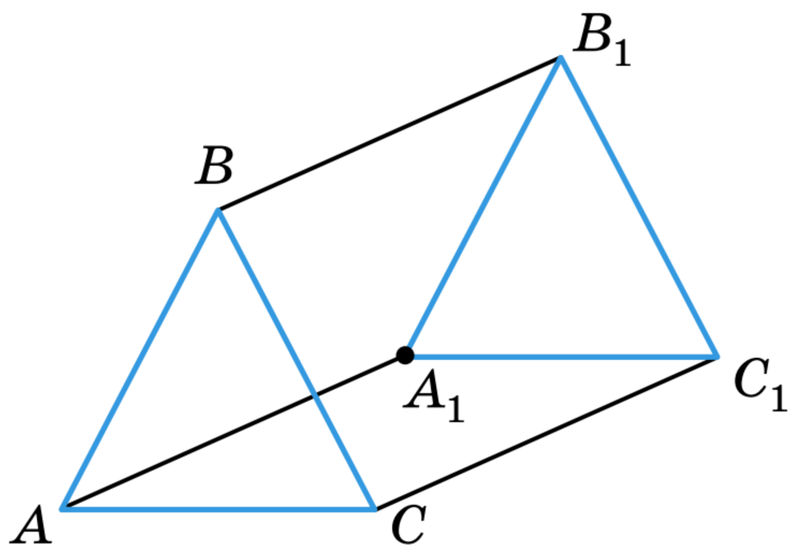


1. Побудуй трикутник, у який переходить трикутник ABC при паралельному перенесенні, що відображає точку A на A_1 (мал. 25.6, *а*).

• Проведемо відрізок AA_1. Через точки B і C проведемо прямі, паралельні AA_1, і відкладемо на них відрізки $BB_1 = AA_1$ і $CC_1 = AA_1$. Сполучимо точки A_1, B_1, C_1 відрізками. Трикутник $A_1B_1C_1$ — шуканий (мал. 25.6, *б*).



а



б

Мал. 25.6

2. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка $A(1; 3)$ відображається на точку $A_1(-2; 5)$. Знайди координати образу точки $B(-4; 7)$ при цьому паралельному перенесенні.

• Знайдемо координати $\vec{a}$, на який виконано паралельне перенесення.

$\vec{a} = \overrightarrow{AA_1} = (-3; 2)$. Нехай образом точки $B(-4; 7)$ буде точка $B_1(x; y)$.

Тоді $\overrightarrow{BB_1} = (x + 4; y - 7)$.

Оскільки $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, то $x + 4 = -3$, $y - 7 = 2$, звідси $x = -7$, $y = 9$.

Отже, $B_1(-7; 9)$.

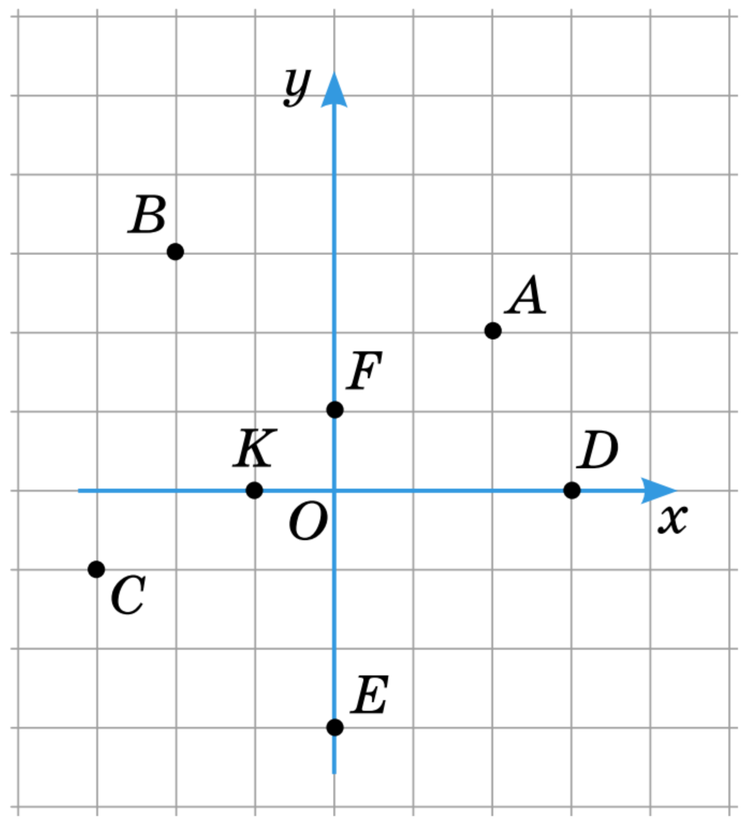
ВИКОНАЄМО УСНО



1088. Вкажи координати точок, на які відображаються точки, зображені на малюнку 25.7, при паралельному перенесенні, яке точку $O(0; 0)$ відображає на точку: а) $D(3; 0)$; б) $K(-1; 0)$; в) $A(2; 2)$.

1089. Дано дві паралельні прямі. Скільки існує паралельних перенесень, які відображають одну з них на другу?

1090. Два рівні відрізки лежать на одній прямій. Яким паралельним перенесенням один із них можна відобразити на другий?



Мал. 25.7

1091. Який вектор задає паралельне перенесення паралелограма $ABCD$, при якому образом сторони CD є сторона BA?

А $\overrightarrow{AD}$ **Б** $\overrightarrow{CB}$ **В** $\overrightarrow{AB}$ **Г** $\overrightarrow{DC}$

1092. Який вектор задає паралельне перенесення трапеції $ABCD$, при якому образом сторони BC є сторона AD?

А $\overrightarrow{AB}$ **Б** $\overrightarrow{DC}$ **В** $\overrightarrow{AC}$ **Г** такого перенесення не існує

1093. Яке геометричне переміщення переводить фігуру 1 в фігуру 2 (мал. 25.8)?



Мал. 25.8

1094. Опиши, за допомогою яких геометричних перетворень могли отримати такі декоративні елементи (мал. 25.9).



Мал. 25.9

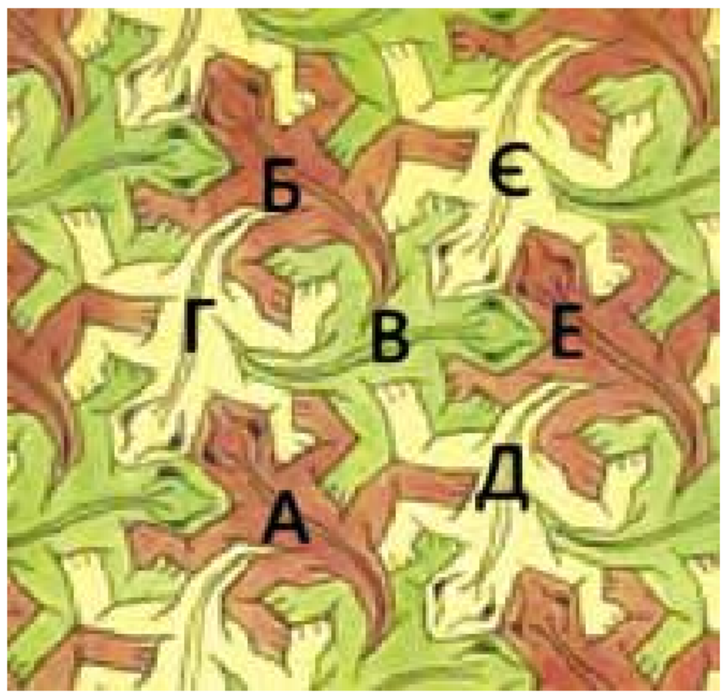
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1095. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць записує одну букву із зазначених на малюнку 25.10, а другий / друга — іншу. Третій учасник / третя учасниця має визначити, за допомогою якого геометричного переміщення перша фігура є прообразом другої. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

1096. Познач точки A, A_1 і B. Побудуй точку, у яку переходить точка B при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AA_1}$.

1097. Дано відрізок AB і точку K. Виконай паралельне перенесення відрізка AB так, щоб його середина відобразилась на точку K.



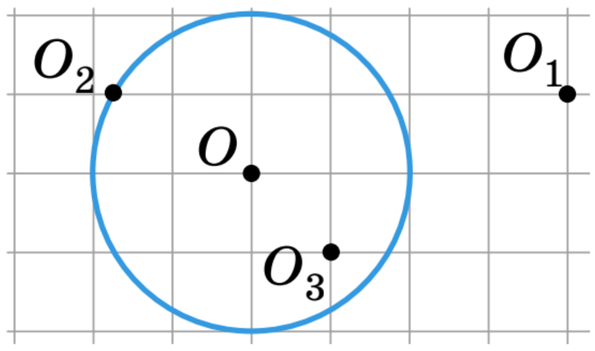
Мал. 25.10

1098. Побудуй фігуру, у яку переходить даний трикутник ABC при паралельному перенесенні, що відображає точку A на точку C.

1099. Construct the figure into which the given parallelogram $ABCD$ transforms when parallel translated by the vector $\overrightarrow{AC}$.

1100. Виконай паралельне перенесення даної прямої AB так, щоб її точка A відобразилась на дану точку C. Розглянь два випадки: а) $C \notin AB$; б) $C \in AB$.

1101. Виконай паралельне перенесення даного кола (мал. 25.11) так, щоб його центр O відобразився на дану точку: а) O_1; б) O_2; в) O_3.



Мал. 25.11

1102. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ образом точки $A(1; -6)$ є точка $A_1(-7; 2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

1103. Знайди точки, які є образами точок $M(4; -2)$, $P(6; 0)$, $K(-7; 4)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a} = (1; -3)$.

1104. Чи існує паралельне перенесення, яке точку $A(1; 5)$ відображає на точку $A_1(4; 2)$, а точку $B(-1; 3)$ на точку: а) $B_1(3; 1)$; б) $B_2(2; 0)$; в) $B_3(-4; 6)$?

1105. Дано точки $M(-3; 7)$, $N(-1; 1)$, $P(1; 2)$. При паралельному перенесенні середина відрізка MN переходить у точку P. Зроби малюнок і вкажи координати точок, у які переходять точки M і N.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1106. Виконай паралельне перенесення кола, рівняння якого $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$, так, щоб його центр O відобразився на точку $O_1(3; -2)$. Запиши рівняння утвореного кола.

1107. При паралельному перенесенні пряма a, рівняння якої $2x + y = 5$, відображається на пряму l, що проходить через точку: а) $A(-1; -1)$; б) $B(2; 5)$. Запиши рівняння прямої l.

1108. Точки $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 3)$ — вершини паралелограма $ABCD$. Знайди образи точок A, B, C і D при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AC}$.

1109. При паралельному перенесенні образом точки $A(-1; 3)$ є точка $A_1(5; -2)$, а образом точки $B(x; -3)$ — точка $B_1(-2; y)$. Знайди x і y.

1110. Точки $A_1(2; 9)$, $O_1(2; 5)$, $C_1(5; 5)$ є образами точок $A(0; y)$, $O(0; 0)$, $C(x; 0)$ при паралельному перенесенні. Знайди x і y та периметр трикутника AOC.

1111. Доведи, що кути при основі рівнобічної трапеції рівні.

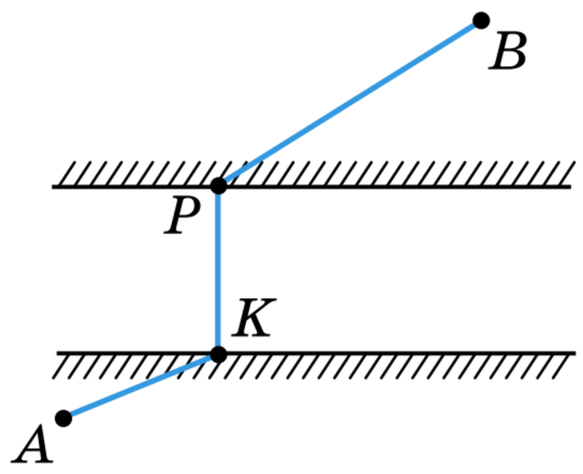
1112. Доведи, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

1113. Трикутник KPT одержано паралельним перенесенням трикутника ABC. Доведи, що відповідні медіани цих трикутників рівні і паралельні. А бісектриси?

1114. На сторонах AB і CD деталі у формі паралелограма $ABCD$ інженер будує квадрати з центрами O і O_1. Доведи, що середина відрізка OO_1 — центр паралелограма.

1115. З одного боку від прямолінійної залізниці розташовані села A і B. В якому місці слід побудувати платформу KP, щоб сума відстаней AK, KP і PB була найменшою?

1116. Де слід побудувати міст KP, перпендикулярний до берега річки, щоб шлях $AKPB$ між пунктами A і B був найкоротшим (мал. 25.12)?



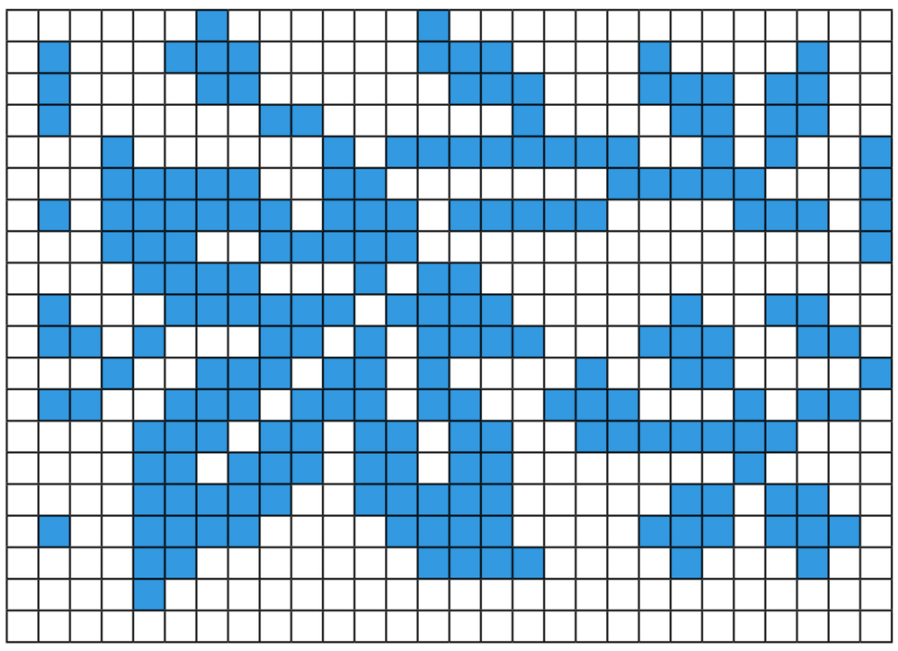
Мал. 25.12

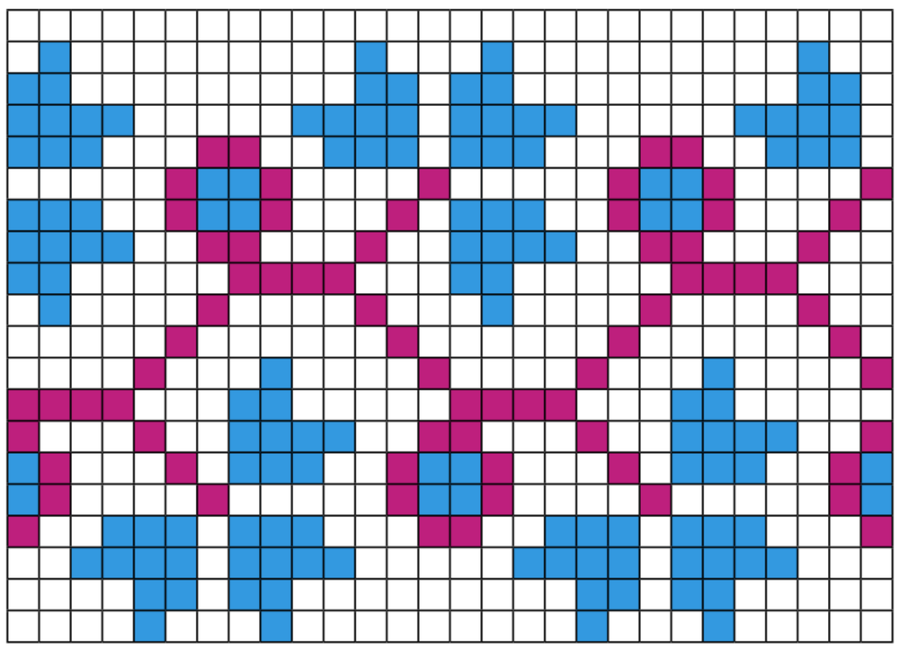
1117. Доведи, що паралельне перенесення можна здійснити, застосувавши дві симетрії відносно паралельних осей.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1118. 1. Розкресли частину сторінки зошита на менші клітинки і перенеси на них малюнок 25.13 або 25.14. Користуючись паралельним перенесенням, зроби зображення вишивки удвічі довшим.


Мал. 25.13


Мал. 25.14

2. Створи власну вишивку або орнамент.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1119. Знайди сторони прямокутного трикутника, якщо найбільша з них дорівнює 20 см, а синус одного з кутів дорівнює 0,2.

1120. Знайди катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза c, а площа S.

1121. Дано трикутник зі сторонами 2 см, 3 см і 4 см. Знайди сторони подібного йому трикутника з периметром 27 см.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС





Паралельне перенесення і сільське господарство

§ 26 ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

перетворення подібності — scaling
коефіцієнт подібності — scale factor

У повсякденному житті нам часто доводиться мати справу з предметами однакової форми, але різних розмірів. На площині це картина та її репродукція, плани одного об'єкта різного масштабу, букви і цифри у комп'ютерному наборі, здійсненому одним шрифтом, але різними розмірами.



Все навкруги — геометрія Коефіцієнт Точки Подібність Все навкруги — геометрія Точки Подібність Точки Перетворення Коефіцієнт Подібність

Репродукція картини Казимира Малевича

Перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому відстані між точками змінюються у тому самому відношенні в ту саму кількість разів k, $k > 0$, називають *перетворенням подібності*. Це означає, що коли довільні точки A і B фігури F при перетворенні подібності переходять

у точки A_1 і B_1 фігури F_1, то $A_1B_1 = kAB$. Число k називають *коефіцієнтом подібності*.

Коефіцієнт подібності завжди додатний. Якщо $k = 1$, то перетворення подібності є переміщенням.

Теорема 19. Перетворення подібності переводить три точки, що лежать на одній прямій, у точки, що лежать на одній прямій, і зберігає порядок взаємного розміщення цих точок.

Доведення. Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій так, що точка B лежить між точками A і C. Тоді $AC = AB + BC$. За означенням перетворення подібності для точок A_1, B_1 і C_1, що є образами точок A, B і C, виконуються такі рівності: $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. З останньої рівності маємо:

$A_1C_1 = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A_1B_1 + B_1C_1$,

або $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$.

З останньої рівності випливає, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій і точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Можна довести ще й такі властивості подібності. Перетворення подібності відображає відрізок на відрізок, промінь — на промінь, паралельні прямі — на паралельні прямі, кут — на рівний йому кут (спробуйте зробити це самостійно).

Для будь-якого перетворення подібності з коефіцієнтом k існує обернене перетворення, яке є перетворенням подібності з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Дві фігури називають *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Якщо фігура F подібна фігурі F_1, то пишуть $F \sim F_1$.

Відношення подібності фігур має такі властивості:

1) завжди $F \sim F$;

2) якщо $F \sim F_1$, то і $F_1 \sim F$;

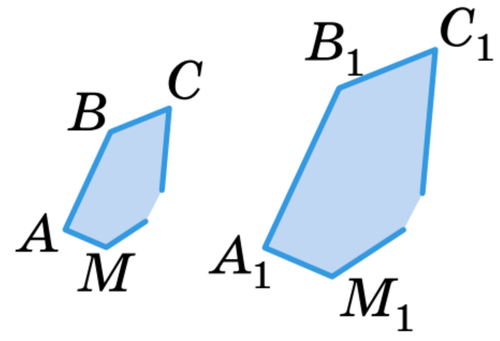
3) якщо $F \sim F_1$ і $F_1 \sim F_2$, то $F \sim F_2$.

У 8 класі ти ознайомився / ознайомилася з подібністю трикутників. Тепер відношення подібності можна поширити на будь-які геометричні фігури. Наприклад, можна довести, що **два многокутники подібні, якщо їх сторони пропорційні, а відповідні кути рівні.** Тому два квадрати завжди подібні. Подібними завжди будуть і два відрізки, два кола, два круга.

Ти вже знаєш, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності. Ця властивість правильна і для інших геометричних фігур.

Теорема 20. Відношення периметрів подібних многокутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Доведення. Нехай $ABC...M$ і $A_1B_1C_1...M_1$ — подібні многокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 26.1), тобто $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, ..., $M_1A_1 = kMA$. Тоді $P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + ... + M_1A_1 = kAB + kBC + ... + kMA = k(AB + BC + ... + MA) = kP$, звідки $P_1 : P = k$.



Мал. 26.1

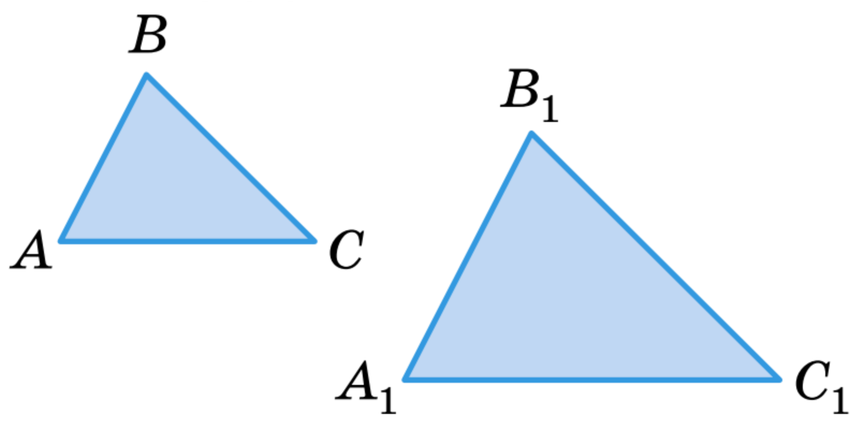
Теорема 21. Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Доведення. Доведемо спочатку цю теорему для трикутників (мал. 26.2). Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом k, тобто $A_1B_1 = kAB$, $A_1C_1 = kAC$, $\angle A_1 = \angle A$.

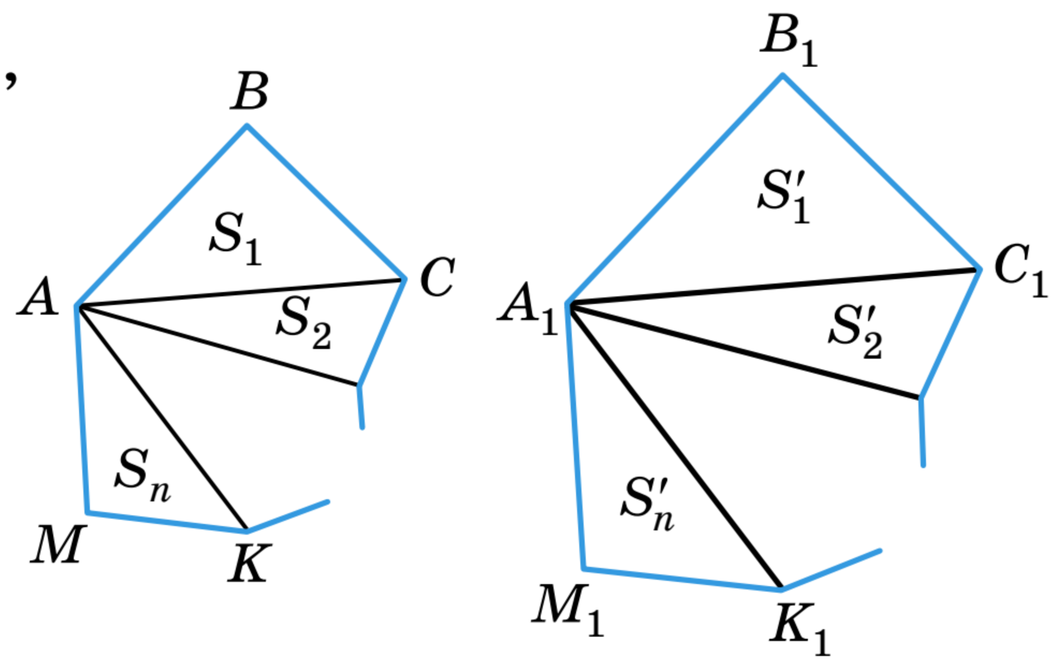
Тоді $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1 = \frac{1}{2} kAB \cdot kAC \cdot \sin A =$

$= k^2 \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \right) = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$,

звідки $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC} = k^2$.



Мал. 26.2



Мал. 26.3

Доведемо теорему для довільних многокутників. Нехай дано два подібні многокутники, коефіцієнт подібності яких k, а площі S і S'. Розіб'ємо дані многокутники на трикутники діагоналями, які виходять з відповідних вершин (мал. 26.3). Тоді

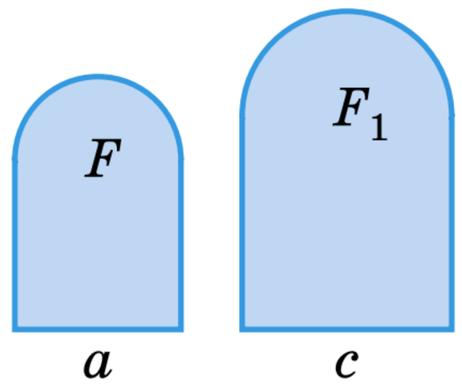
$S' = S'_1 + S'_2 + \ldots + S'_n = k^2S_1 + k^2S_2 + \ldots + k^2S_n =$

$= k^2 \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n \right) = k^2S.$

Отже, $S' : S = k^2$.

Можна довести, що таку властивість мають площі будь-яких подібних фігур, а не тільки подібних многокутників. Наприклад, фігури F і F_1, що є об'єднанням квадратів і півкругів, подібні (мал. 26.4). Тому їх площі відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів:

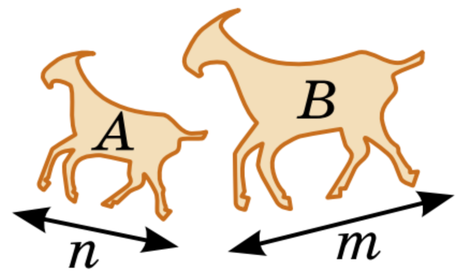
$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$



Мал. 26.4

Фігури A і B, що на малюнку 26.5, також подібні, тому їх площі відносяться як квадрати відстаней n і m:

$$S_A : S_B = n^2 : m^2.$$

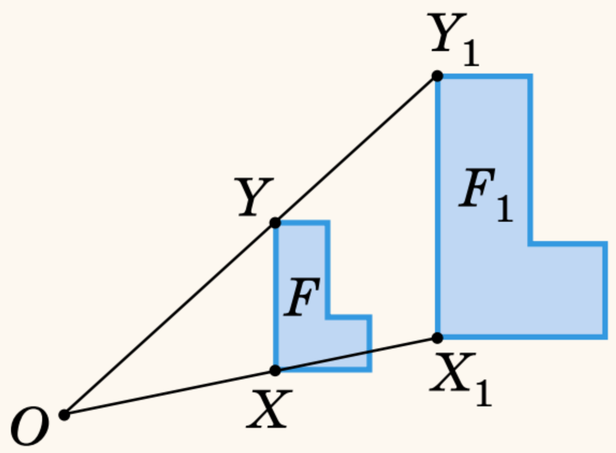


Мал. 26.5

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Нехай дано точку O і фігуру F (мал. 26.6). Проведемо через довільну точку X фігури F промінь OX і позначимо на ньому точку X_1 таку, що $OX_1 : OX = k$. Якщо таким способом побудувати відповідні точки для кожної точки фігури F, то одержимо нову фігуру F_1.

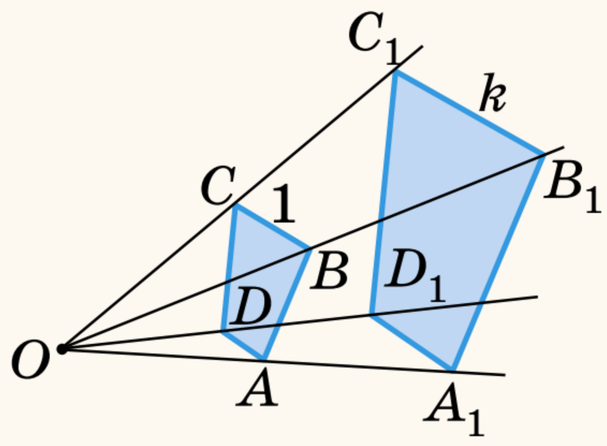


Мал. 26.6

Таке відображення фігури F на F_1 називають *гомотетією* відносно точки O з коефіцієнтом k. Говорять також, що фігура F_1 гомотетична фігурі F відносно центра O з коефіцієнтом k.

Якщо $k > 1$, то гомотетія відображає дану фігуру на більшу: кожну відстань збільшує у k разів. Якщо $0 < k < 1$, то гомотетія кожну відстань зменшує у k разів. Якщо $k = 1$, то гомотетія кожну фігуру відображає на ту саму фігуру.

При $k \neq 1$ гомотетія не зберігає відстаней між точками. Наприклад, якщо $k = 2$, то точки X і Y гомотетією відображаються на X_1 і Y_1 такі, що $X_1Y_1 = 2XY$. Отже, $X_1Y_1 \neq XY$, тому гомотетія не є переміщенням. Але при гомотетії зберігається відношення відстаней між точками. Наприклад, якщо при гомотетії з коефіцієнтом k чотирикутник $ABCD$ відображається на $A_1B_1C_1D_1$, то кожне з відношень $\frac{A_1B_1}{AB}$, $\frac{B_1C_1}{BC}$, $\frac{C_1D_1}{CD}$, $\frac{D_1A_1}{DA}$, $\frac{A_1C_1}{AC}$, $\frac{B_1D_1}{BD}$ дорівнює k (мал. 26.7).



Мал. 26.7

З означення перетворення подібності випливає, що кожні дві рівні фігури подібні. Але не кожні дві подібні фігури рівні. Аналогічно, кожні дві гомотетичні фігури подібні, але не кожні подібні фігури гомотетичні. Діаграмою це можна зобразити так (мал. 26.8 і 26.9).



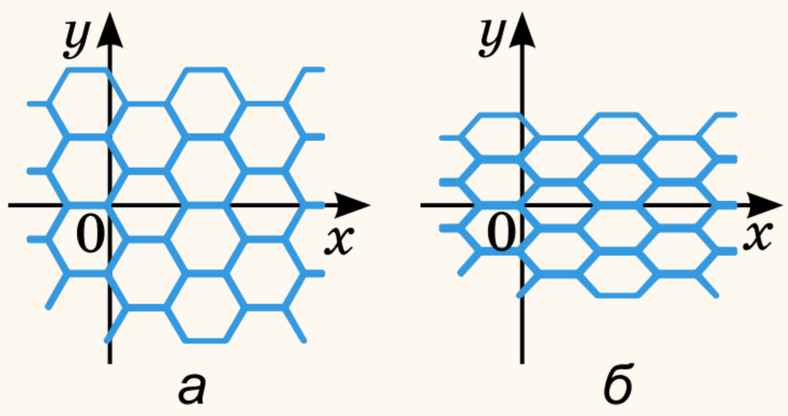
Мал. 26.8



Мал. 26.9

Чи існують геометричні перетворення, відмінні від переміщень і перетворень подібності? Існують. Такими є, наприклад, *стиск* і *розтяг*. Наприклад, якщо кожна точка $A(x; y)$ координатної площини відображається на точку $A(x; ky)$, то говорять про стиск цієї площини до осі x з коефіцієнтом k. Якщо коефіцієнт $k > 1$, такий стиск називають розтягом. На малюнках зображено: сітка з правильними шестикутними сотами (мал. 26.10, *а*) і сітка, яка стиснута до осі x (мал. 26.10, *б*).

Цікавим геометричним перетворенням є *інверсія* — своєрідна симетрія відносно кола. Множину точок, що лежать у внутрішній області кола, це перетворення відображає на точки його зовнішньої області, і навпаки. Інверсію розглядають у курсах вищої геометрії.



а *б*

Мал. 26.10

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке геометричне перетворення називають перетворенням подібності?
2. Які властивості має перетворення подібності?
3. Які фігури називають подібними? Назви їх властивості.
4. Як відносяться у подібних фігур: а) периметри; б) площі?

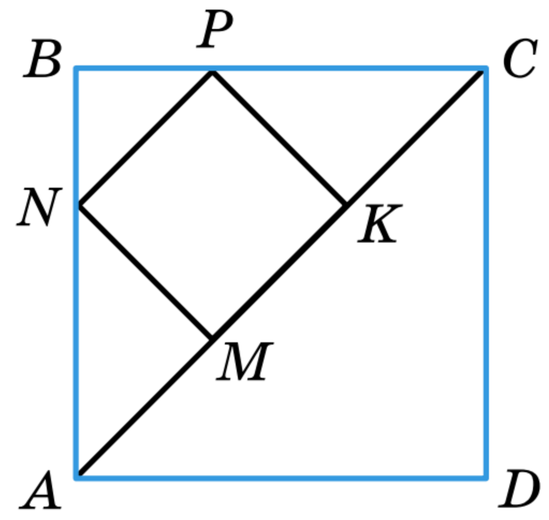
ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Периметри двох подібних многокутників пропорційні числам 2 і 5. Знайди площі цих многокутників, якщо їх різниця дорівнює 42 см^2.

• Якщо периметри пропорційні числам 2 і 5, то площі $S_1 : S_2 = 4 : 25$. Нехай коефіцієнт пропорційності x. Тоді $S_1 = 4x$, $S_2 = 25x$. За умовою задачі $25x - 4x = 42$, звідки $x = 2$. Тоді $S_1 = 8$ см^2, $S_2 = 50$ см^2.

2. Дано квадрат $ABCD$. У трикутник ABC вписано квадрат $MNPK$ (мал. 26.11). Чи подібні ці квадрати? З яким коефіцієнтом подібності?



Мал. 26.11

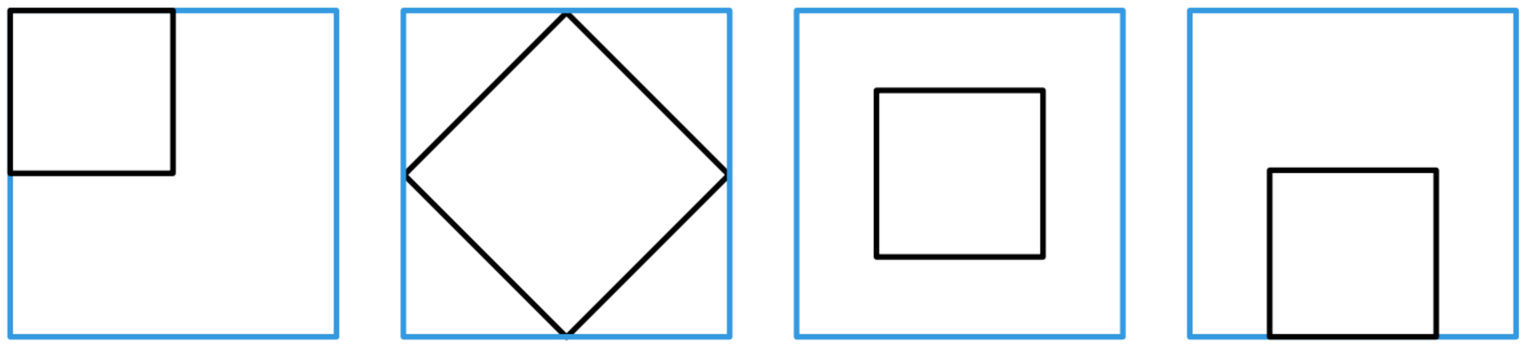
• Два квадрати завжди подібні. Знайдемо коефіцієнт подібності. Нехай $AB = a$, тоді $AC = a\sqrt{2}$. $\triangle AMN$ — рівнобедрений прямокутний, бо $\angle AMN = 90°$, $\angle NAM = \angle ANM = 45°$. Тоді $AM = MN$. Аналогічно, $KC = PK$. Тоді $AM = MK = KC$.

Отже, $MK = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, звідки $k = \frac{MK}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{3a} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

ВИКОНАЄМО УСНО



1122. У якому з випадків квадрати, зображені на малюнках 26.12–26.15, подібні?


Мал. 26.12

Мал. 26.13

Мал. 26.14

Мал. 26.15

1123. Чи завжди подібні два правильні шестикутники?

1124. Назви фігури, які завжди подібні.

1125. Чи завжди подібні два ромби? Чи подібні ромби, якщо один із них має кут 55°, а другий — 125°?

1126. Радіус одного з кіл дорівнює діаметру іншого. Знайди коефіцієнт подібності.

А 1 : 1 **Б** 1 : 2 **В** 1 : 4 **Г** 2 : 1

1127. Площі двох подібних многокутників відносяться як 9 : 16. Як відносяться їх периметри?

А 9 : 16 **Б** 16 : 9 **В** 3 : 4 **Г** $\sqrt{3}$: 2

1128. Сторони прямокутника 2 см і 6 см. Знайди периметр і площу подібного прямокутника, якщо: а) $k = 2$; б) $k = 0{,}5$.

1129. Периметр многокутника 10 см. Знайди периметр подібного многокутника, якщо $k = 0{,}2$.

А 10 см **Б** 20 см **В** 0,4 см **Г** 2 см

1130. Дві фігури симетричні відносно деякої прямої. Чи подібні вони? З яким коефіцієнтом подібності?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1131. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць малює фігуру, інший / інша — точку, третій / третя — задає коефіцієнт подібності, а четвертий має побудувати образ фігури. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

1132. Діагональ одного з квадратів є стороною іншого. Чому дорівнює коефіцієнт подібності цих квадратів?

1133. Відрізок, паралельний основам трапеції, ділить її на дві трапеції. Чи подібна якась із них даній трапеції?

1134. Середня лінія трапеції розбиває її на дві трапеції. Чи подібні вони?

1135. Як відносяться довжини кіл вписаного в рівносторонній трикутник і описаного навколо нього?

1136. Find ration of the circumference of inscribed circles in a square and circumscribed around it?

1137. Яким буде відношення площ ділянок, на які поділяється трикутна земельна ділянка доріжкою, що проходить по середній лінії трикутника?

1138. Перенеси таблицю в зошит і заповни її, якщо P_1, P_2, S_1, S_2 — периметри і площі двох подібних фігур, k — коефіцієнт подібності.

k	P_1	P_2	S_1	S_2
2	5			16
	12	3	48	
		5	90	10
0,6		10	72	

1139. Знайди сторони чотирикутника периметра 88 см, якщо він подібний чотирикутнику, сторони якого 3 см, 5 см, 6 см і 8 см.

1140. Дизайнер інтер'єрів готує два варіанти декоративних настінних панелей у формі многокутників однакової форми, але різних розмірів. Відомо, що периметри цих панелей відносяться як 2 : 5, а загальна площа обох становить 232 см^2. Знайди площу кожної панелі.

1141. В поліграфії створюється збільшена копія декоративної наліпки, що має форму прямокутника зі сторонами 5 см і 9 см. Нова наліпка має мати площу 180 см^2. Знайди довжини сторін збільшеної наліпки.

1142. Діагоналі ромба 10 см і 24 см, а сторона подібного йому ромба дорівнює 26 см. Знайди площу другого ромба.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1143. M — середина сторони BC паралелограма $ABCD$, O — точка перетину прямих AC і MD. Знайди площу $\triangle MOC$, якщо $S_{\triangle AOD} = 12$ см^2.

1144. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайди площу трапеції, якщо $AB : BM = 2 : 3$, а площа трикутника BMC дорівнює 18 см^2.

1145. Знайди радіуси двох кругів, які мають зовнішній дотик, якщо їх площі відносяться як 4 : 25, а відстань між центрами дорівнює 14 см.

1146. Знайди відношення довжин двох кіл з центрами O_1 і O_2, якщо їх спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці P і $PO_1 : O_1O_2 = 2 : 7$.

1147. AM і BN — медіани трикутника ABC. Знайди площу чотирикутника $ABMN$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 48 см^2.

1148. У трикутнику ABC, площа якого 45 см^2, проведено висоти AN і BM. Знайди площу чотирикутника $ABMN$, якщо $\cos C = \frac{1}{3}$.

1149. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайди площу трапеції, якщо площі трикутників AOD і BOC відповідно дорівнюють 90 см^2 і 40 см^2.

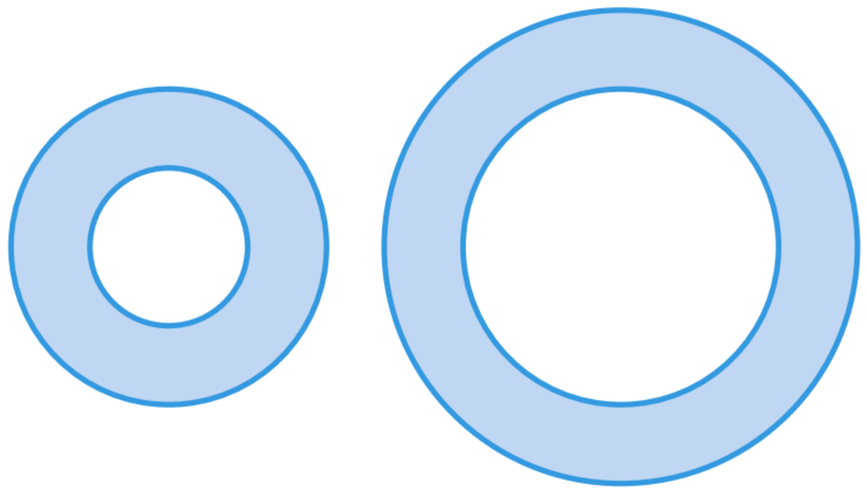
1150. Усередині опуклого п'ятикутника $ABCDE$ взято довільну точку O. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — точки, симетричні точці O відносно вершин п'ятикутника. Знайди площу п'ятикутника $ABCDE$, якщо площа п'ятикутника $A_1B_1C_1D_1E_1$ дорівнює 100 см^2.

1151. Сформулюйте і доведіть ознаки подібності: а) двох ромбів; б) двох прямокутників.

1152. Доведи, що паралелограми подібні, якщо діагоналі ділять гострі кути на відповідно рівні кути.

1153. Доведіть, що дві рівнобічні трапеції подібні, якщо їх гострі кути рівні, а діагоналі є бісектрисами цих кутів.

1154. Є два декоративні кільця (мал. 26.16). Радіуси одного з них 1 см і 2 см, а другого — 2 см і 3 см. Чи подібні вони? Досліди, за якої умови два кільця, обмежені двома концентричними колами, подібні.



Мал. 26.16

1155. Усередині опуклого чотирикутника, площа якого дорівнює S, взято довільну точку і її відображено симетрично відносно середин усіх сторін. Отримані точки послідовно з'єднані. Знайди площу утвореного чотирикутника.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1156. Добери кілька цитат про математику і за допомогою комп'ютера зроби хмару слів, щоб на ній були подібні і не подібні зображення.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1157. Доведи, що середини основ трапеції, точка перетину її діагоналей та точка перетину прямих, на яких лежать бічні сторони трапеції, лежать на одній прямій.

1158. Найкоротша медіана прямокутного трикутника дорівнює 5 дм, а один із катетів 6 дм. Знайди площу трикутника.

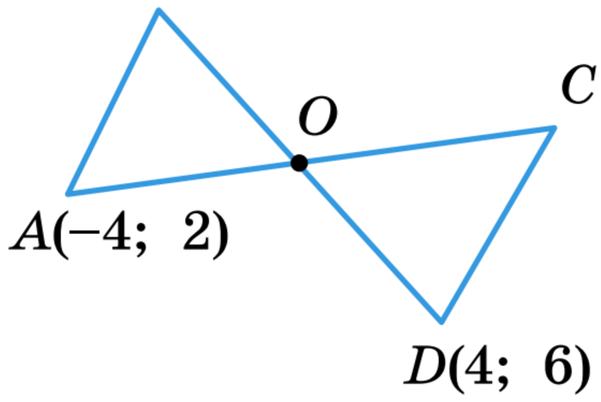
1159. У трикутнику медіана, проведена до сторони, утворює з нею кут $60°$, а дві інші сторони дорівнюють 7 см і $\sqrt{19}$ см. Знайди невідому сторону трикутника.

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

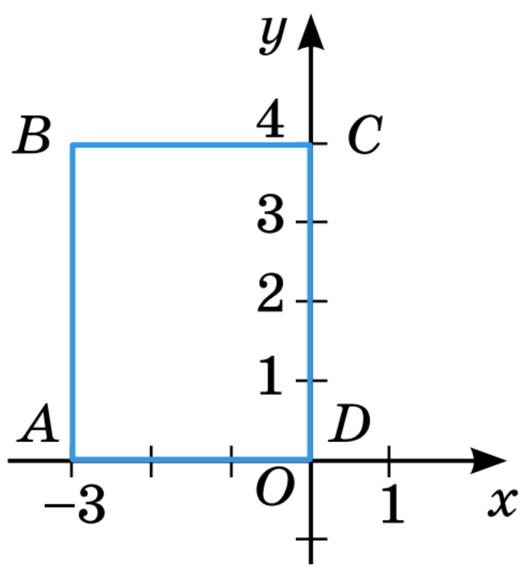
А

1 AB симетричний CD відносно O.

$C(x;\ y)$

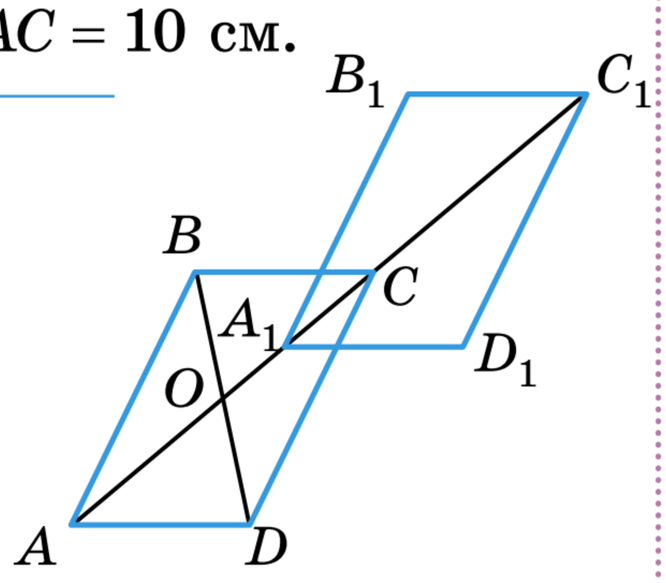


2 Рівняння осей симетрії прямокутника $ABCD$



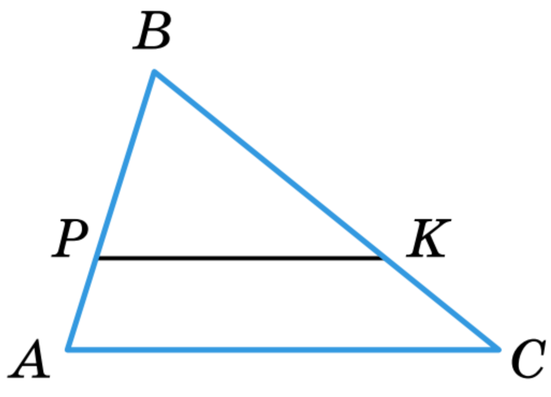
3 $ABCD$ — паралелограм.
$OA_1 = A_1C$; $AC = 10$ см.

AC_1; BB_1



4 $PK \parallel AC$;
$S_{\triangle PBK} : S_{APKC} = 9 : 7$.

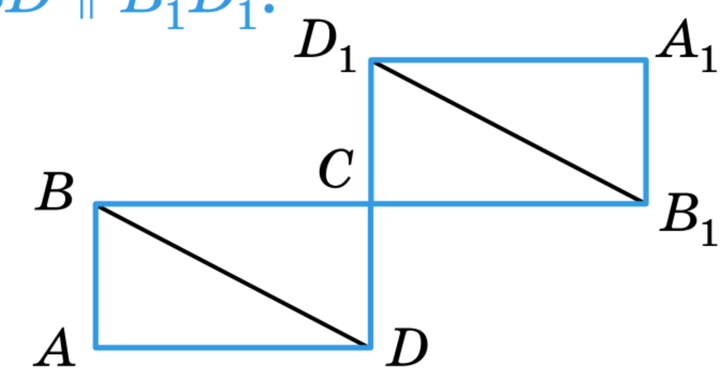
$AP : PB$



Б

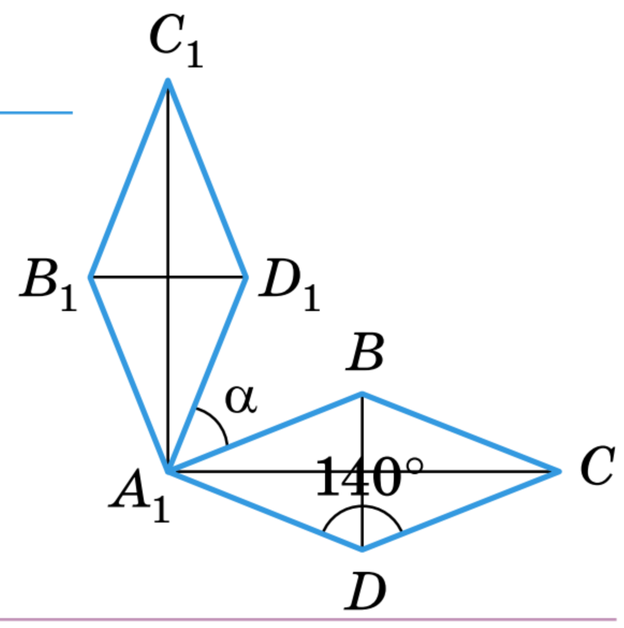
$A_1B_1CD_1$ симетричний $ABCD$ відносно C.

Довести: $BD \parallel B_1D_1$.

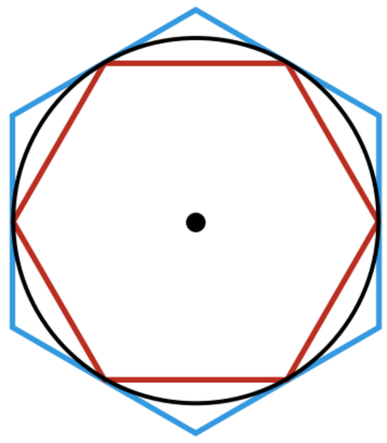


A_1BCD — ромб. Виконано поворот на 90°

α

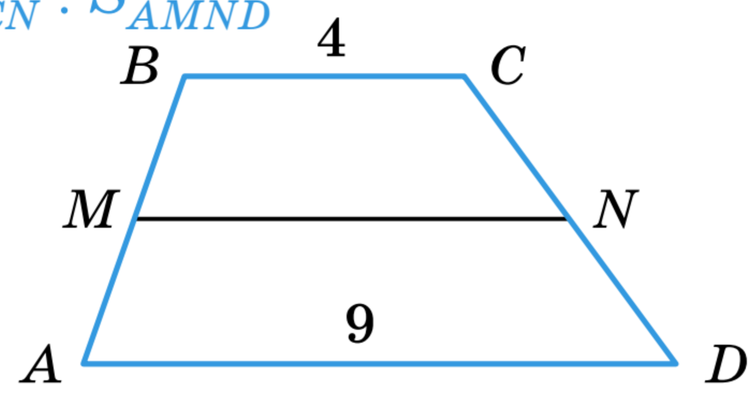


Відношення площ правильних шестикутників



$ABCD$ — трапеція;
$MBCN \sim AMND$.

MN; $S_{MBCN} : S_{AMND}$



САМОСТІЙНА РОБОТА 5

Варіант 1

1. Дано відрізок AB і точку $O \notin AB$. Побудуй відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O.

2. Побудуй довільний трикутник ABC і пряму l, $C \in l$. Побудуй трикутник, симетричний даному відносно прямої l.

3. При паралельному перенесенні вершина A трикутника ABC відобразилася на вершину C, а точка B — на точку B_1. Знайди координати точки B_1, якщо $A(3; 5)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 0)$.

4. Знайди радіуси двох кругів, які мають зовнішній дотик, якщо відстань між їх центрами — 15 см, а площі відносяться як $4 : 9$.

Варіант 2

1. Дано відрізок PK і точку $O \notin PK$. Побудуй відрізок, симетричний відрізку PK відносно точки O.

2. Побудуй довільний трикутник EFK і пряму l, $K \in l$. Побудуй трикутник, симетричний даному відносно прямої l.

3. При паралельному перенесенні вершина A паралелограма $ABCD$ відобразилася на вершину C, а точка B — на точку B_1. Знайди координати точки B_1, якщо $A(-1; 0)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$.

4. Знайди радіуси двох кругів, які мають зовнішній дотик, якщо відстань між їх центрами — 22 см, а площі відносяться як $16 : 49$.

Варіант 3

1. Дано відрізок MN і точку $P \notin MN$. Побудуй відрізок, симетричний відрізку MN відносно точки P.

2. Побудуй довільний трикутник SPT і пряму l, $T \in l$. Побудуй трикутник, симетричний даному відносно прямої l.

3. При паралельному перенесенні вершина E трикутника EFK відобразилась на вершину F, а точка K — на точку K_1. Знайди координати точки K_1, якщо $E(2; -4)$, $F(1; 3)$, $K(4; 2)$.

4. Знайди радіуси двох кругів, які мають зовнішній дотик, якщо відстань між їх центрами — 28 см, а площі відносяться як $25 : 81$.

Варіант 4

1. Дано відрізок EK і точку $P \notin EK$. Побудуй відрізок, симетричний відрізку EK відносно точки P.

2. Побудуй довільний трикутник AKL і пряму l, $L \in l$. Побудуй трикутник, симетричний даному відносно прямої l.

3. При паралельному перенесенні вершина B паралелограма $ABCD$ відобразилася на вершину D, а точка C — на точку C_1. Знайди координати точки C_1, якщо $B(-1; 4)$, $C(5; 4)$, $D(3; 1)$.

4. Знайди радіуси двох кругів, які мають зовнішній дотик, якщо відстань між їх центрами — 52 см, а площі відносяться як $36 : 49$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 5

1	Яке з перетворень не зберігає відстань між точками?	**А** поворот **Б** центральна симетрія **В** перетворення подібності **Г** осьова симетрія
2	Точки A і B симетричні відносно точки O. Який знак слід поставити замість *: $AB * 2AO$?	**А** $>$ **Б** $<$ **В** $=$ **Г** $\neq$
3	$\triangle ABC$ при повороті навколо точки A на кут $60°$ відобразився на $\triangle A_1B_1C_1$. Знайди $\angle BAC$, якщо $\angle B_1AC_1 = 85°$.	**А** $85°$ **Б** $145°$ **В** $95°$ **Г** $35°$
4	Яка з фігур має лише 4 осі симетрії?	**А** коло **Б** квадрат **В** ромб **Г** прямокутник
5	Точки $A(-4; 6)$ і $B(-2; 2)$ симетричні відносно точки M. Знайди її координати.	**А** $(-6; 8)$ **Б** $(-3; 2)$ **В** $(-3; 4)$ **Г** $(-1; 2)$
6	Точки P і K симетричні відносно прямої l. Який знак слід поставити замість *: $PK * l$?	**А** $\parallel$ **Б** $\in$ **В** $\perp$ **Г** $=$
7	При паралельному перенесенні точка $A(-3; 5)$ відобразилась на точку $B(-1; 3)$. У яку точку відобразиться середина відрізка AB?	**А** $(-2; 4)$ **Б** $(-4; -6)$ **В** $(1; 1)$ **Г** $(0; 2)$
8	Які з фігур не завжди подібні?	**А** два кола **Б** два квадрати **В** два правильні трикутники **Г** два ромба
9	Площі двох півкругів відносяться як $4 : 9$. Як відносяться їх радіуси?	**А** $16 : 81$ **Б** $2 : 4{,}5$ **В** $1 : 1{,}5$ **Г** $2 : 3$
10	Який з правильних многокутників є центрально-симетричним?	**А** трикутник **Б** п’ятикутник **В** шестикутник **Г** семикутник

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Знайди координати вектора, при паралельному перенесенні на який образом точки $A(3; 5)$ є точка $B(7; -3)$.

А $(10; 2)$ **Б** $(-4; 8)$ **В** $(4; 2)$ **Г** $(4; -8)$

2. $\triangle ABC$ симетричний $\triangle AMC$ відносно прямої AC. $\angle BCA = 20°$, $\angle MAC = 45°$. Знайди $\angle ABC$.

А $65°$ **Б** $25°$ **В** $115°$ **Г** $125°$

3. Знайди координати точки, яка є образом точки $A(0; 4)$ при повороті навколо початку координат на кут $90°$ за рухом годинникової стрілки.

А $(0; -4)$ **Б** $(4; 0)$ **В** $(-4; 0)$ **Г** $(-4; -4)$

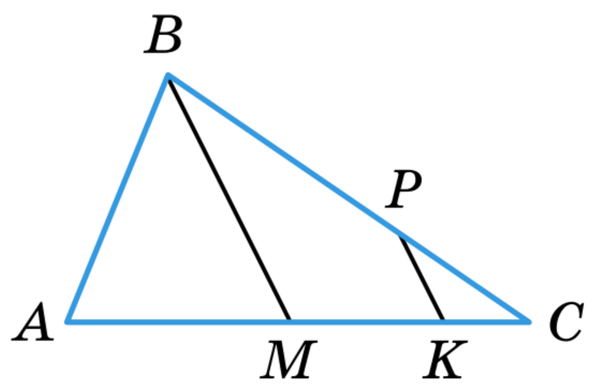
4. Дано точки $A(-3; 5)$ і $B(5; 1)$, які симетричні відносно точки O. Установи відповідність між умовами (1–3) та координатами точок (А–Д), які цим умовам відповідають.

1 координати точки O	**А** $(5; -1)$
2 координати точки, яка симетрична точці A відносно осі ординат	**Б** $(1; 3)$
3 координати точки, яка симетрична точці B відносно осі абсцис	**В** $(4; -2)$
	Г $(-5; 1)$
	Д $(3; 5)$

5. Прямокутники $ABCD$ і $A_1BC_1D_1$ симетричні відносно вершини B. Виконай малюнок. Доведи, що відрізки AC_1 та A_1C рівні і паралельні.

6. Запиши рівняння кола, яке симетричне колу $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$ відносно точки $P(5; -1)$.

7. BM — медіана трикутника ABC (мал. 26.17). На сторонах BC і AC вибрано точки P і K так, що $BP : PC = MK : KC = 2 : 1$. Знайди площу чотирикутника $MBPK$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 54 см^2.



Мал. 26.17

8. Запиши рівняння прямої, на яку відобразиться пряма $y = 2x + 4$ при симетрії відносно осі абсцис. Виконай малюнок.

Додаткове завдання

9. На осі OX знайди точку, сума відстаней від якої до точок $M(-2; 5)$ і $N(4; 4)$ найменша.

Головне в розділі 5	

РОЗДІЛ 6
Початкові відомості стереометрії

Стереометрія — один із найдавніших і найцікавіших розділів геометрії. Її класичні основи було закладено ще в античні часи, а сучасна аксіоматична база дозволяє строго й точно описувати властивості навколишнього світу.

У цьому розділі ти ознайомишся з основними поняттями та відношеннями стереометрії, навчишся розпізнавати види многогранників, тіл обертання, а також здобудеш досвід обчислення їхніх площ поверхонь та об'ємів. У кожному параграфі є багато цікавих прикладних задач. У світі, де технології 3D-моделювання та віртуальної реальності стають частиною повсякдення, здатність просторово мислити стає твоєю стратегічною перевагою.

§ 27 Взаємне розміщення прямих у просторі
Mutual placement of straight lines in space

§ 28 Многогранники
Polyhedra

§ 29 Тіла обертання
Bodies of rotation



Для чого вивчати стереометрію?

Світ, що нас оточує, є тривимірним, тобто всі тіла навколо нас є стереометричними.

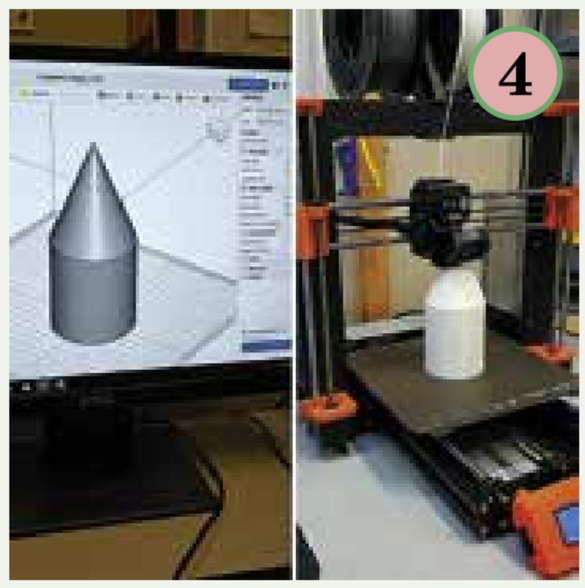
Знання про стереометричні тіла використовують в архітектурі, будівництві та дизайні інтер'єрів. Наприклад, обчислення площі поверхні дозволяють точно визначити кількість необхідних матеріалів для оздоблення фасадів будинків[1], а обчислення об'єму є важливим для проєктування систем кондиціонування[2], басейнів[3] або резервуарів.


1

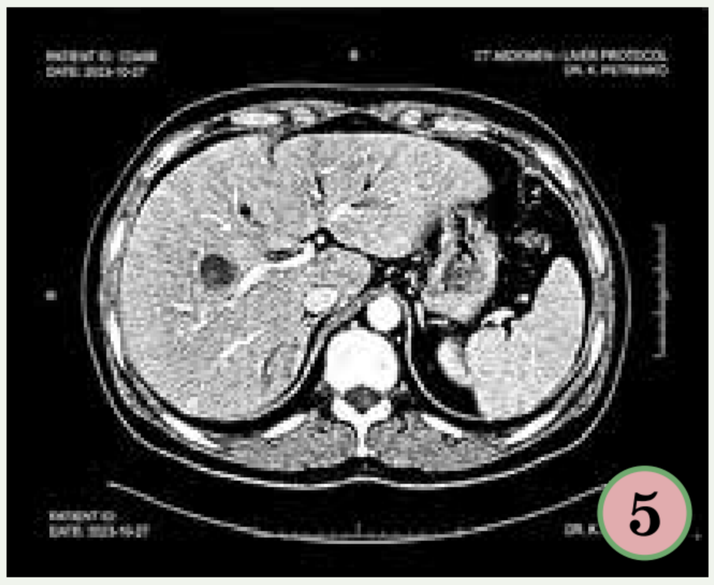

2


3

У логістиці та промисловому пакуванні знання стереометрії допомагають оптимізувати простір, щоб умістити максимальний об'єм вантажу в контейнери з мінімальними витратами матеріалів. Крім того, жодна сучасна розробка у сфері високих технологій не обходиться без просторового моделювання. Робота 3D-принтерів[4] та систем автоматизованого проєктування (CAD) повністю спирається на математичне моделювання.


4

У медицині[5] стереометричні методи дозволяють лікарям точно визначати розміри внутрішніх органів за знімками томографії та планувати складні операції. Спеціальні обчислення об'ємів використовують в екології для моніторингу стану льодовиків[6] та водних ресурсів планети.


5


6

Вивчивши матеріал розділу, ти розвинеш просторове мислення та зможеш застосувати ці знання для розв'язування завдань.

А де ще, на твій погляд, використовують знання із стереометрії? Наведи свої приклади.

§ 27 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

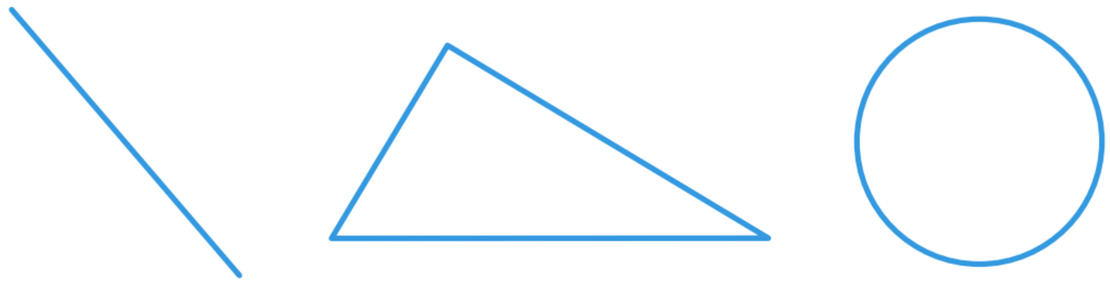
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- площина — plane
- належати — belong
- взаємне розміщення — mutual placement

Геометрія — наука про властивості геометричних фігур. Вона складається з двох частин: планіметрії і стереометрії. У планіметрії розглядають фігури в одній площині. Стереометрія вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

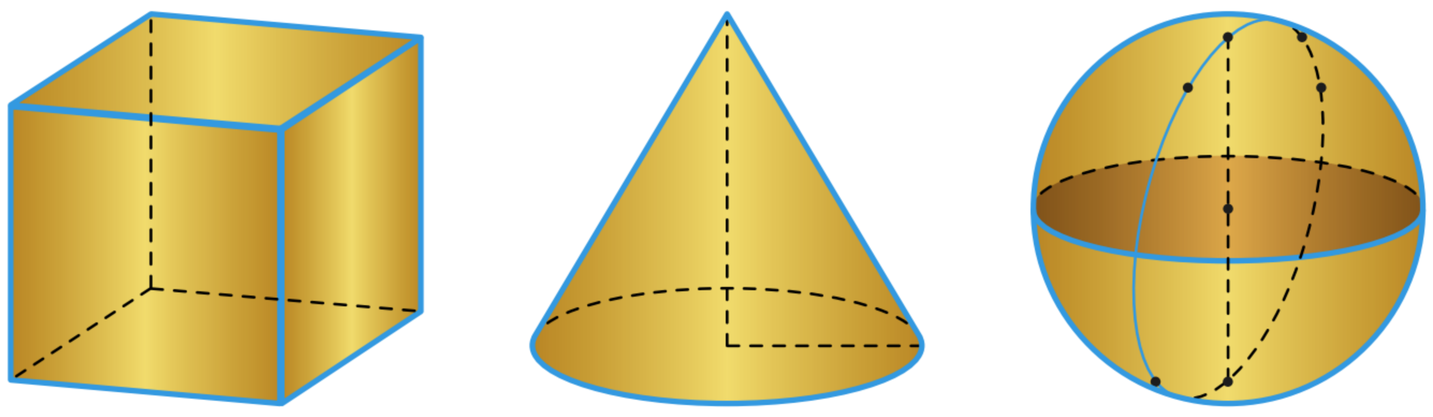
Геометрична фігура — будь-яка множина точок: скінченна або нескінченна, на площині або в просторі.

У стереометрії вивчають властивості як плоских геометричних фігур, так і не плоских. Приклади плоских фігур: пряма, трикутник, коло (мал. 27.1).



Мал. 27.1

Фігуру називають *неплоскою* (просторовою), якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: куб, конус, куля (мал. 27.2).



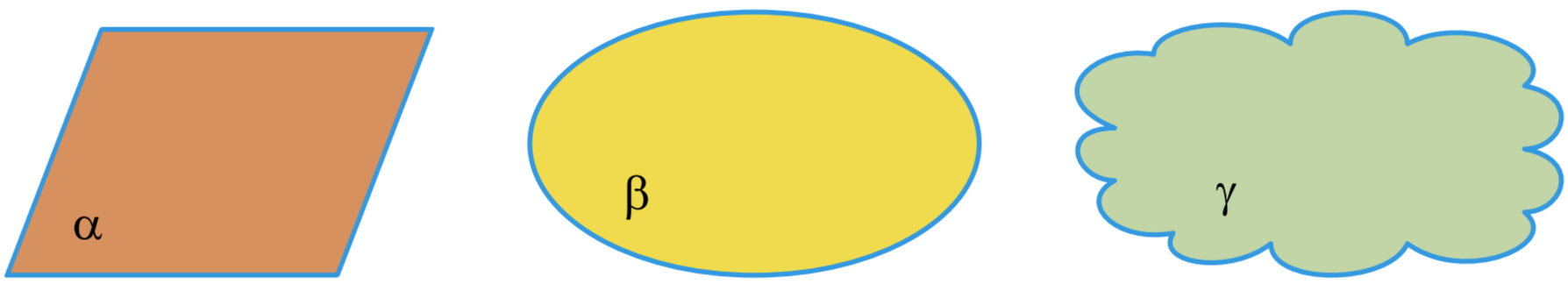
Мал. 27.2

У стереометрії універсальною множиною є простір (тривимірний), у ньому існує безліч різних площин. Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня стола, поверхня віконного скла, мармурової плити, гладенька поверхня озера, футбольне поле (мал. 27.3).



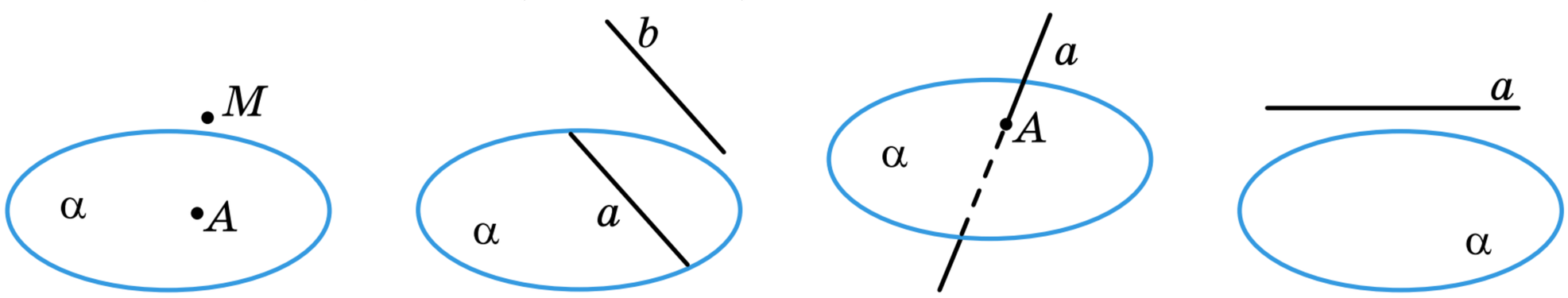
Мал. 27.3

Зрозуміло, що це грубі моделі. У геометрії площину уявляють необмеженою, ідеально рівною і гладенькою, що не має товщини. Зображають площини у вигляді паралелограмів або частин площини, обмежених довільними замкненими лініями (мал. 27.4). Позначають їх зазвичай грецькими літерами α, β, γ тощо.



Мал. 27.4

Як і будь-яка геометрична фігура, площина складається з точок. Якщо точка A лежить у площині α, то кажуть, що площина проходить через точку A, і записують: $A \in \alpha$. Запис $M \notin \alpha$ означає, що точка M не лежить у площині α (мал. 27.5).

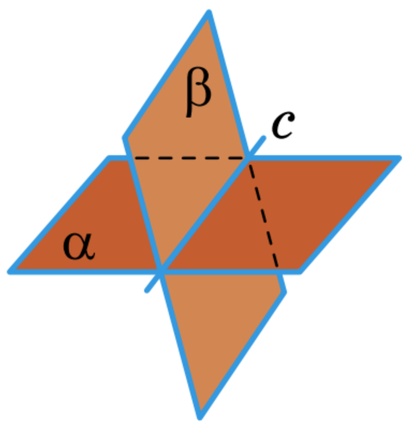


Мал. 27.5 Мал. 27.6 Мал. 27.7 Мал. 27.8

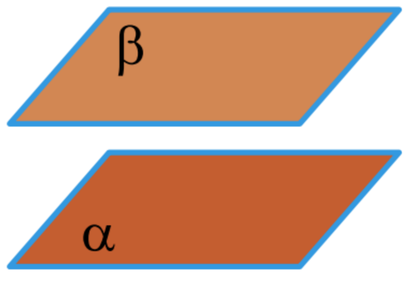
Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що пряма a *лежить у площині* α, або площина α проходить через пряму a і записують $a \subset \alpha$. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма b площині α не належить (мал. 27.6).

Якщо пряма і площина мають тільки одну спільну точку A, то кажуть, що вони *перетинаються* в точці A (мал. 27.7) і записують $a \cap \alpha = A$. Пряма і площина можуть не мати спільних точок, тоді кажуть, що вони паралельні (мал. 27.8) і записують $a \parallel \alpha$.

Якщо через пряму c проходять дві площини α і β, то кажуть, що ці площини *перетинаються* по прямій c (мал. 27.9) і записують: $\alpha \cap \beta = c$. Якщо дві площини не мають спільних точок, то вони *паралельні* (мал. 27.10). Записують $\alpha \parallel \beta$.

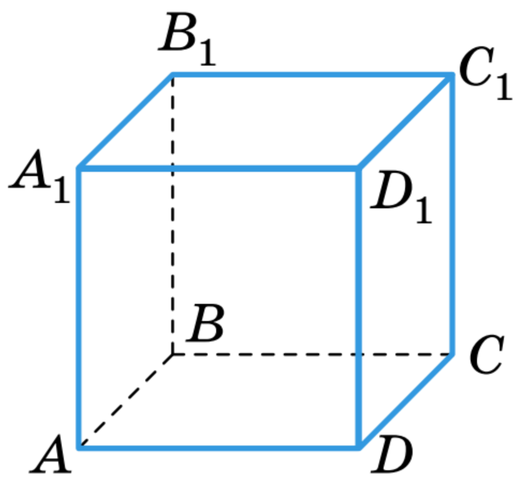


Мал. 27.9



Мал. 27.10

Якщо дві прямі лежать в одній площині, то вони або перетинаються, або паралельні. У стереометрії можливий і третій випадок. Прямі можуть не перетинатися і не бути паралельними. Наприклад, на малюнку 27.11 прямі AB і CC_1, BC і A_1B_1 не перетинаються і не паралельні. Такі прямі називають *мимобіжними*.



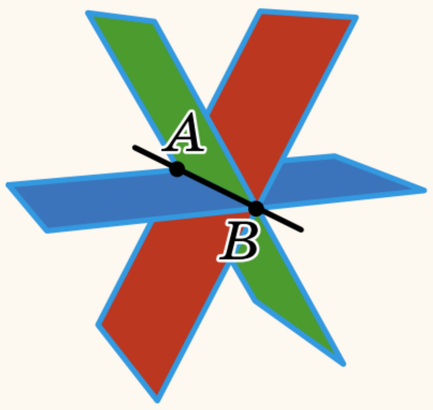
Мал. 27.11

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

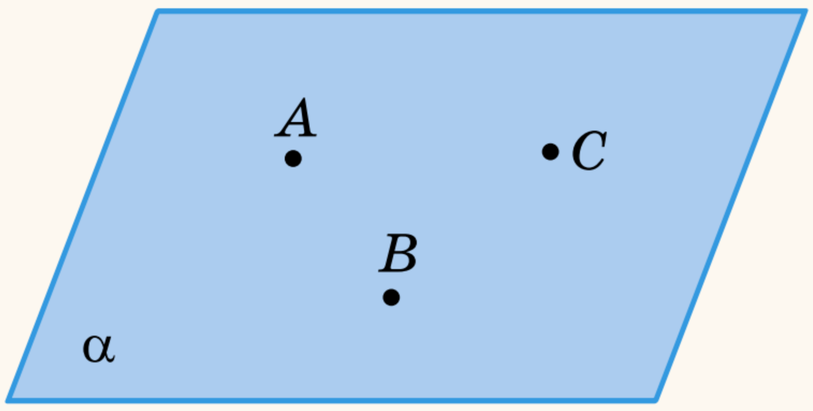


Скільки площин можна провести через дві точки? А через три?

Очевидно, що через одну точку можна провести безліч площин. Через дві точки проходить одна і тільки одна пряма. Оскільки площини перетинаються по прямим, то всі площини, які перетинаються по прямій AB, проходять через точки A і B (мал. 27.12). Значить, через дві точки можна провести безліч площин.



Мал. 27.12



Мал. 27.13

Тому якщо три точки лежать на одній прямій, то через них можна провести теж безліч площин. Якщо ж три точки не лежать на одній прямій, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну (мал. 27.13). Про це говорить одна з аксіом стереометрії, які ти вчитимеш у 10 класі.

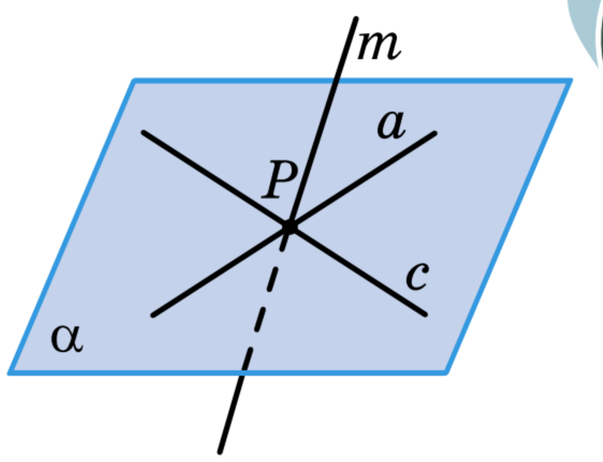
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як називають розділ геометрії, у якому вивчають властивості фігур у просторі?
2. Які фігури називають неплоскими? Наведи приклади плоских і неплоских фігур.
3. Як можуть розміщуватися у просторі пряма і площина? А дві площини?
4. Яке можливе розміщення двох прямих на площині? А у просторі?
5. Скільки площин можна провести через дві точки? А через три?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Намалюй площину α і прямі a і c, які лежать у площині α і перетинаються в точці P, та пряму m, яка перетинає площину α у точці P (мал. 27.14).



Мал. 27.14

2. Дано пряму m і площину α. Яким може бути $m \cap \alpha$?

- Якщо пряма m не має спільних точок з площиною α, то $m \cap \alpha = \varnothing$. Якщо пряма m перетинає площину α у точці M, то $m \cap \alpha = M$. Якщо пряма m лежить у площині α, то $m \cap \alpha = m$.

ВИКОНАЄМО УСНО



1160. Наведи приклади геометричних фігур:
а) плоских; б) неплоских.

1161. Чи є геометричними фігурами фігури вищого пілотажу, які виконують льотчики? А шахові фігури?





1162. Чи відрізняються поняття «площина» і «площа»?

1163. Які з перелічених фігур неплоскі: відрізок, куля, призма, коло, циліндр, прямокутний трикутник, прямокутний паралелепіпед, площина?

1164. Скільки спільних точок можуть мати дві прямі?
А одну **Б** жодної **В** безліч **Г** усі відповіді: А, Б і В.

1165. Скільки спільних точок можуть мати дві площини?

1166. Скільки спільних точок можуть мати пряма і площини? Вкажи хибне твердження.
А безліч **Б** жодної **В** одну **Г** дві

1167. **Гра.** Один з учасників / одна з учасниць задає взаємне розташування двох прямих або взаємне розташування прямої і площини, а другий / друга має змоделювати його за допомогою 2 ручок і 1 картону. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1168. Побудуй площину α, точку M, що лежить у цій площині, і точку K, яка не належить площині α. Запиши це за допомогою символів.

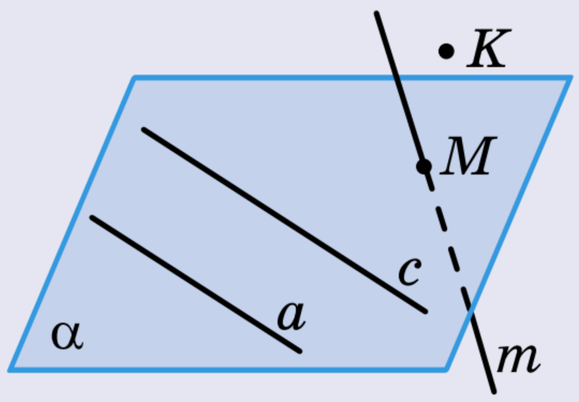
1169. Побудуй площину α, точку M, що лежить у цій площині, і пряму m, яка належить площині α і проходить через точку M. Запиши це за допомогою символів.

1170. Побудуй площину α, пряму n, що лежить у цій площині, і пряму m, яка перетинає площину α у точці P. Запиши це за допомогою символів.

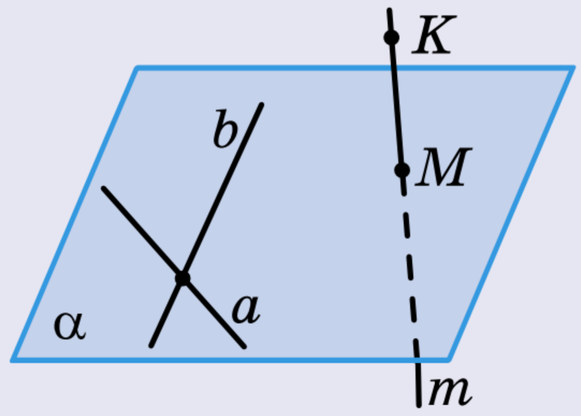
1171. Побудуй площини α і β, які перетинаються по прямій c. Запиши це за допомогою символів.

1172. Побудуй площини α і β, які перетинаються по прямій n, і точки A, B, C такі, що A належить α, B належить β, C належить і площині α, і площині β. Запиши це за допомогою символів.

1173. Запиши за допомогою символів взаємне розташування точок, прямих і площин, зображених на малюнку 27.15.



Мал. 27.15



Мал. 27.16

1174. Use symbols to record the mutual placement of the points, lines and planes shown in the diagram 27.16.

1175. Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає α? Зроби відповідний малюнок.

1176. Скільки спільних точок можуть мати площина і коло? А площина і круг? Змоделюй ситуації за допомогою поверхні води, кільця і монети та зроби відповідні світлини.

1177. Відрізок AB і площина α розміщені так, що $A \subset \alpha, B \not\subset \alpha$. Чи належить площині α середина відрізка AB? Виконай відповідний малюнок.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1178. Площини α, β, пряма a і точка A задовольняють такі умови: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$. Зобрази це на малюнку.

1179. Площини α, β, γ попарно перетинаються по прямих a, b і c, причому $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Зобрази це на малюнку.

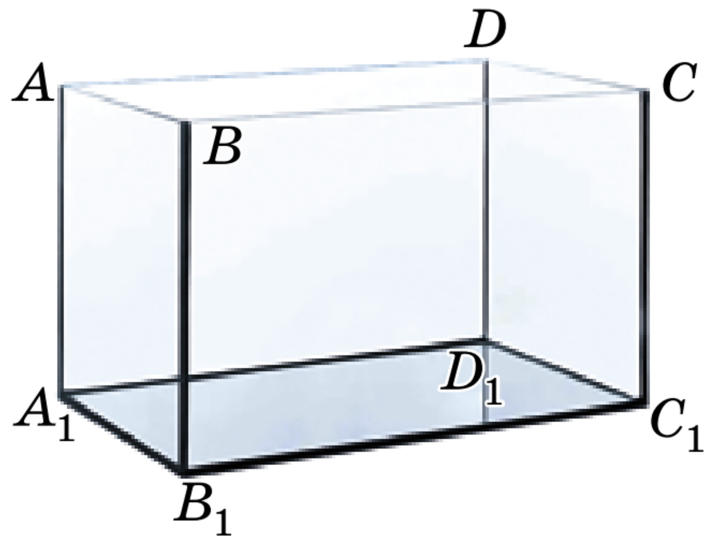
1180. Пряма a перетинає площину α в точці A. У площині α дано ще точку B. Площина β проходить через пряму a і точку B. Зроби відповідний малюнок.

1181. Через три точки проведено дві різні площини. Як розміщені ці точки?

1182. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см?

1183. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 16$ см?

1184. Дано акваріум $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 27.17). Назви його ребра, які: а) паралельні AA_1; б) перетинають AA_1; в) мимобіжні з AA_1.



Мал. 27.17

1185. Дано акваріум $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 27.17). По яким прямим перетинаються площини граней:
а) $ABCD$ і AA_1D_1D;
б) AA_1B_1B і AA_1D_1D;
в) BB_1C_1C і CC_1D_1D?

1186. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — акваріум (мал. 27.17). Установи відповідність між прямими (1–3) та їх взаємним розміщенням (А–Г).

1 DC і DD_1	**А** паралельні
2 B_1D і BC	**Б** перетинаються
3 AB_1 і DC_1	**В** суміщаються
	Г мимобіжні

1187. Побудуй трикутну піраміду $ABCD$. Запиши за допомогою символів відповіді на запитання: а) по якій прямій перетинаються площини (ABC) і (ABD); б) якій площині не належить точка B; в) яким площинам належить пряма AC?

1188. Побудуй трикутну піраміду $ABCD$. Чи є на малюнку паралельні прямі? Укажи дві пари прямих, що перетинаються. Укажи дві пари мимобіжних прямих.

1189. Точка M не лежить у площині трикутника ABC. Яке взаємне розміщення прямих MA і MC? А прямих MA і BC?

1190. На скільки частин розділяється простір двома площинами? Змоделюй за допомогою картону чи в GeoGebra.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1191. Зроби з цупкого паперу чи картону модель площин, що перетинаються:
а) двох площин;
б) трьох площин.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1192. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка $M(5; -1)$ відобразилась на точку $N(2; 4)$. Знайди координати вектора $\vec{a}$.

1193. Знайди радіус кола, описаного навколо трапеції з діагоналлю 10 см і гострим кутом 60°.

1194. Знайди радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 4 см і 16 см.

§ 28 МНОГОГРАННИКИ

Світ навколо нас цікавий і різноманітний. У ньому багато предметів мають поверхню, що складається з многокутників. Наприклад, коробки для подарунків, контейнери для сортування сміття, упаковки для парфумів тощо (мал. 28.1).

КЛЮЧОВІ СЛОВА

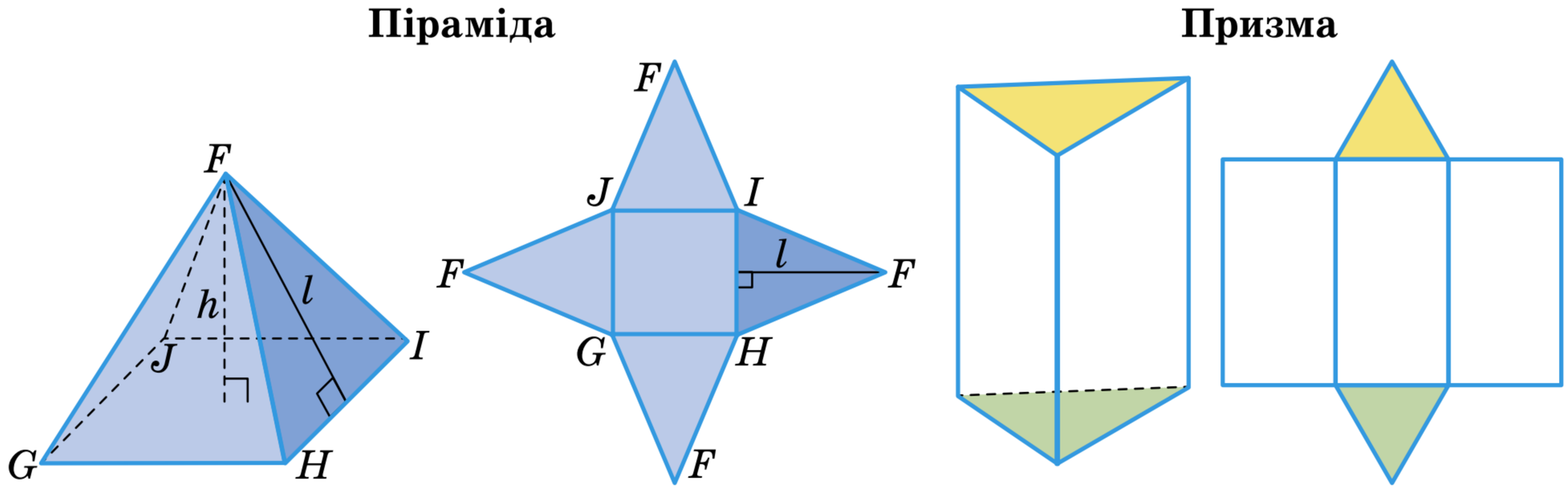
- многогранники — polyhedrons
- грань — face
- ребро — edge
- площа повної поверхні — total surface area
- площа бічної поверхні — lateral surface area



Мал. 28.1

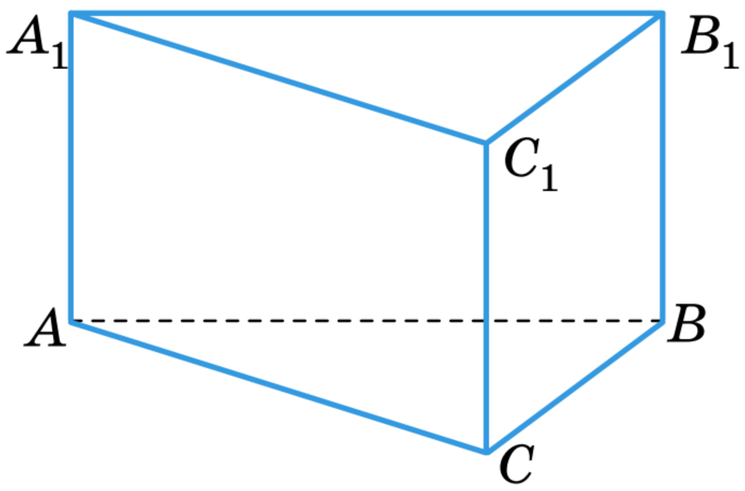
У математиці також розглядають геометричні тіла, поверхня яких складається з многокутників. Їх називають *многогранниками*. Окремі з них мають власні назви: призма і піраміда.

Наприклад, щоб утворити пакування у вигляді піраміди та призми, можна використати такі розгортки (мал. 28.2).

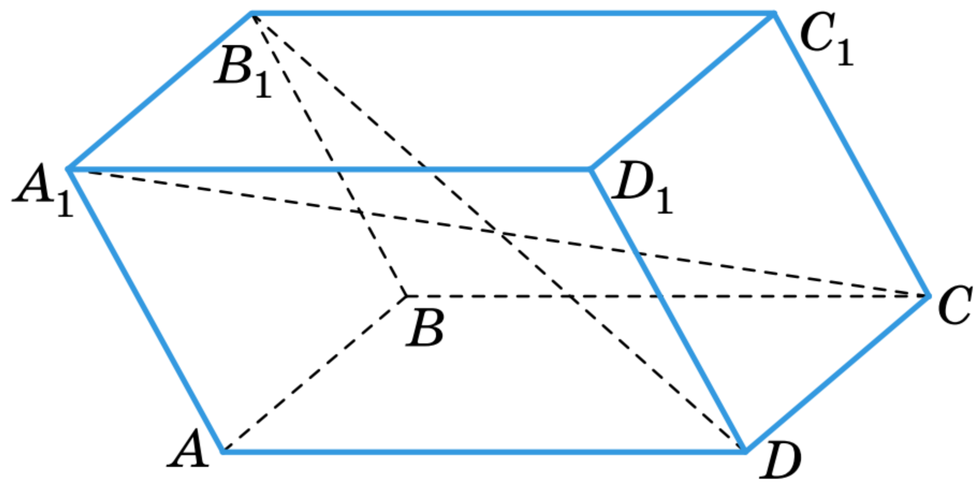


Мал. 28.2

Призма — це многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші n граней — паралелограми. Два n-кутники — основи призми, решта граней — бічні грані. Ребра призми, які не є сторонами основи, називають *бічними ребрами*. Усі бічні ребра призми попарно паралельні і рівні. Якщо всі бічні грані призми прямокутники, то таку призму називають *прямою*.



Мал. 28.3

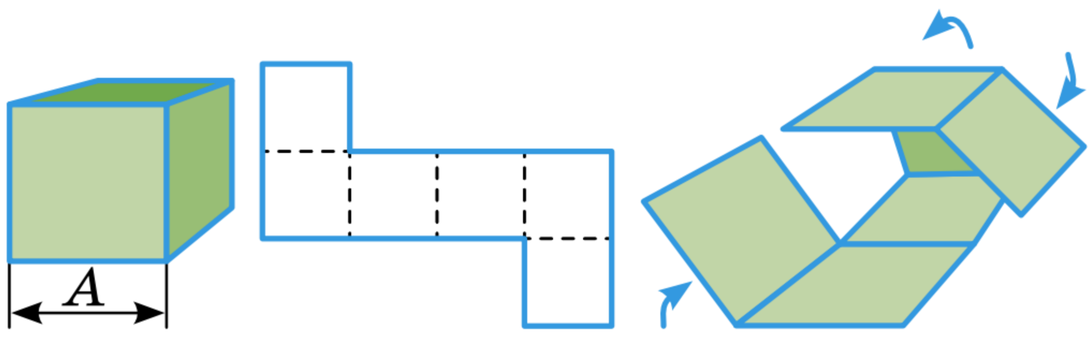


Мал. 28.4

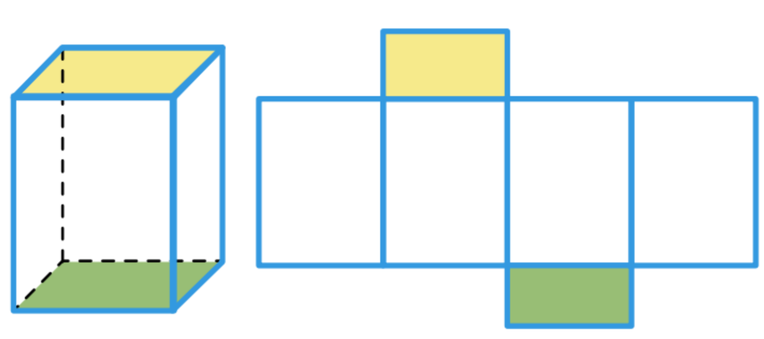
На малюнку 28.3 зображено пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — основи призми, відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — бічні ребра, а прямокутники AA_1B_1B, BB_1C_1C і AA_1C_1C — бічні грані призми.

На малюнку 28.4 зображено чотирикутну похилу призму. Відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані, називають *діагоналлю* призми (на малюнку 28.4 побудовано діагоналі B_1D і A_1C). Трикутна призма діагоналей не має.

Ти вже знаєш деякі види призм, а саме куб (мал. 28.5) і прямокутний паралелепіпед (мал. 28.6).

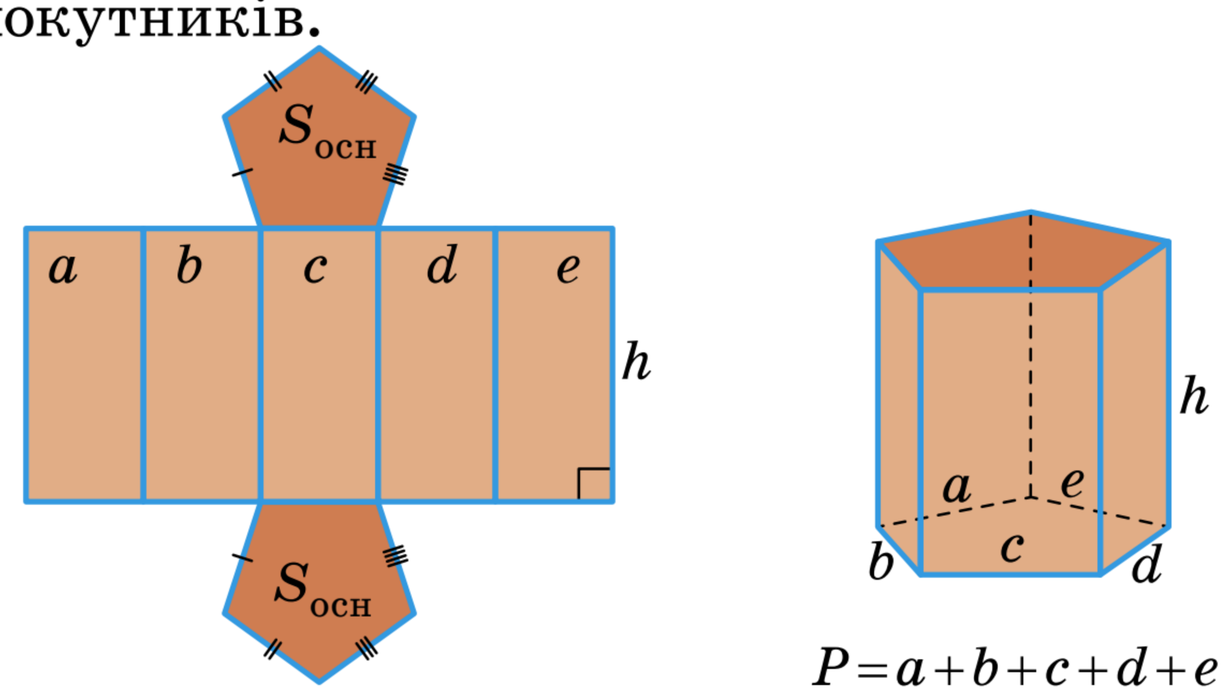


Мал. 28.5



Мал. 28.6

Площа бічної поверхні призми — це сума площ усіх її бічних граней. На малюнку 28.7 площа бічної поверхні призми дорівнює площі помаранчевих прямокутників.



$$P = a + b + c + d + e$$

Мал. 28.7

Площа повної поверхні призми — це сума площ усіх її граней, тобто

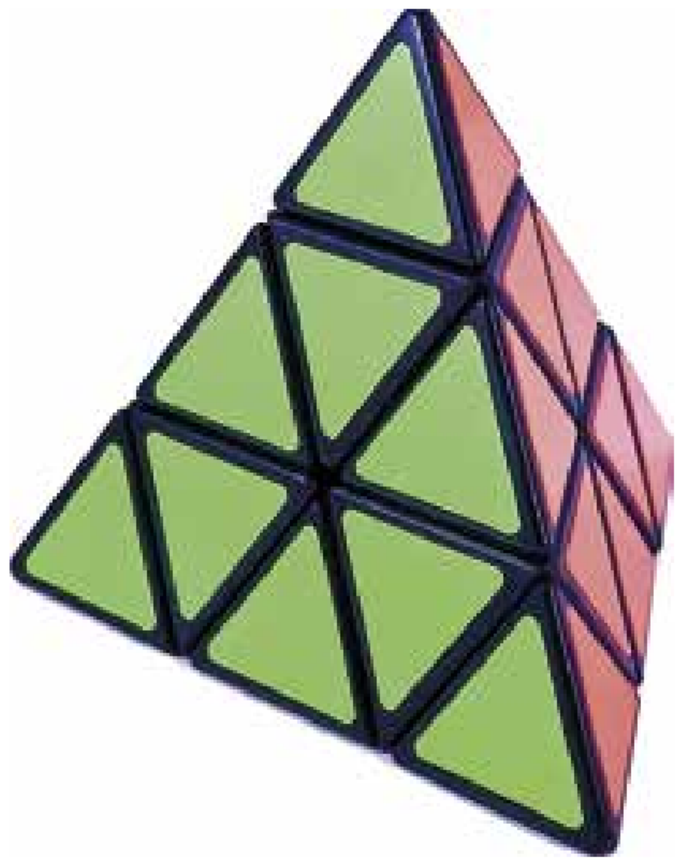
$$S_{п.п} = S_{б.п} + 2S_{осн}$$

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину її бічного ребра.

Якщо довжину бічного ребра позначити h, то

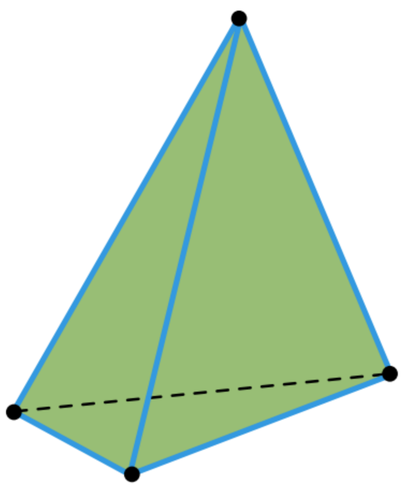
$$S_{б.п} = P_{осн} \cdot h$$

Ще один відомий тобі з 5 класу вид многогранника — піраміда. Піраміда — термін багатозначний. Його використовують в екології — екологічні піраміди, в економіці — фінансові піраміди, в архітектурі — єгипетські піраміди, у спорті — акробатичні піраміди, більярдні піраміди, у побуті — дитячі піраміди, пірамідка Мефферта (мал 28.8), у математиці — вид многогранника.

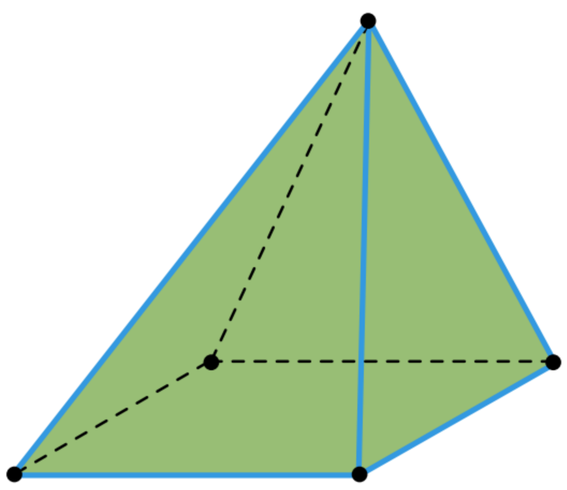


Мал. 28.8

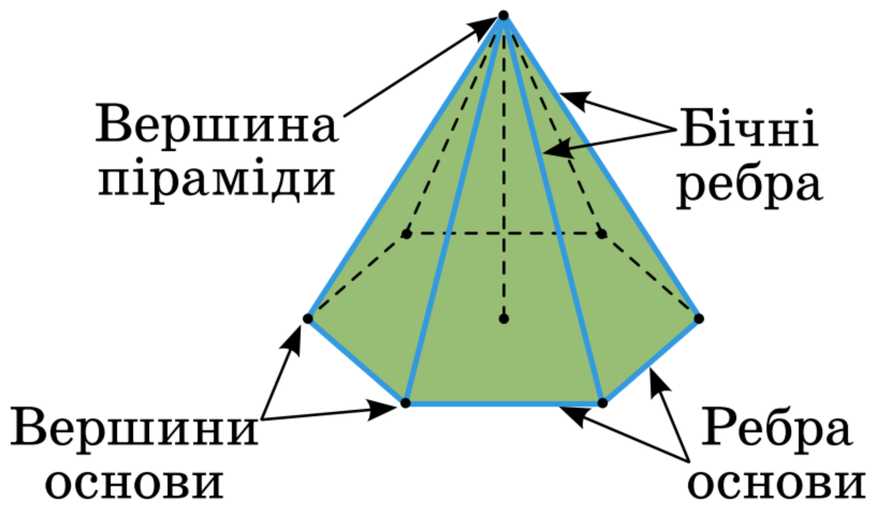
Піраміда — це многогранник, одна грань якого — довільний многокутник (основа піраміди), а всі інші грані — трикутники, що мають спільну вершину. На малюнку 28.9 зображено трикутну піраміду, а на малюнку 28.10 — чотирикутну піраміду.



Мал. 28.9



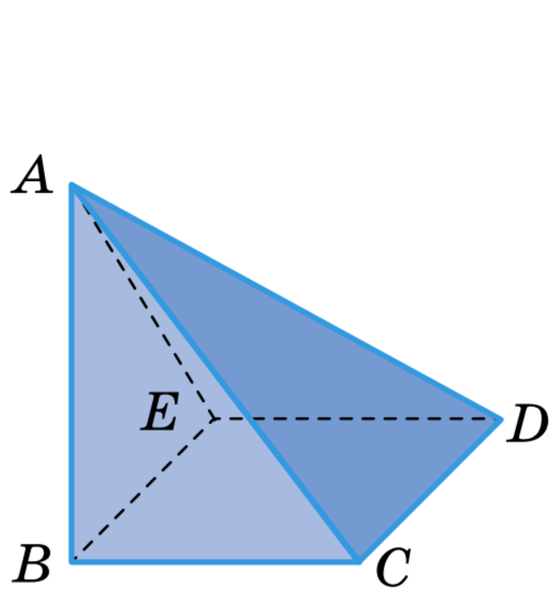
Мал. 28.10

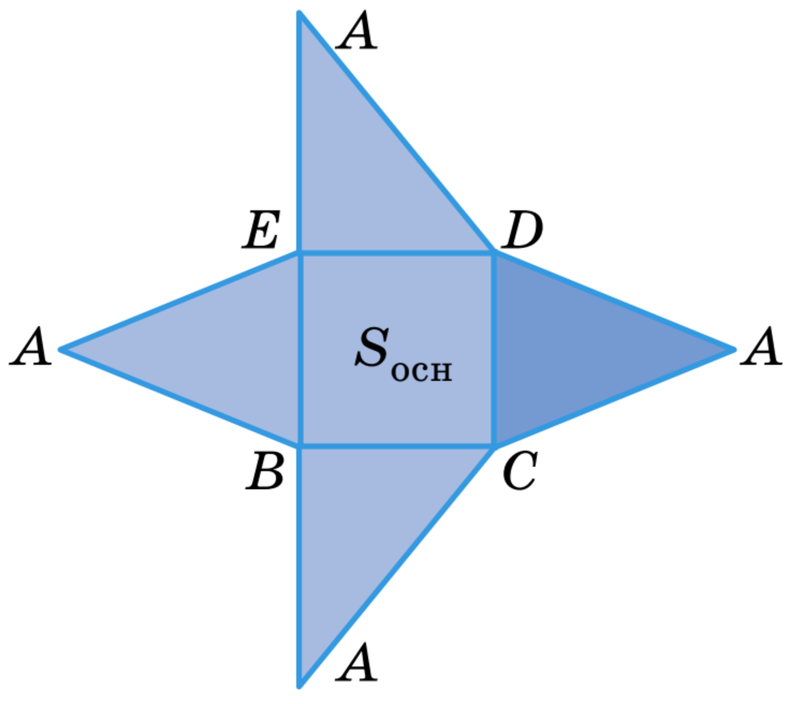


Мал. 28.11

Ці трикутники, які мають спільну вершину, називають *бічними гранями*, а їхню спільну вершину — *вершиною піраміди*. Кожне ребро піраміди, яке не є ребром основи, називають *бічним ребром*. Перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи, називають *висотою піраміди* (мал. 28.11).

Площа бічної поверхні піраміди — це сума площ усіх її бічних граней. На мал. 28.12 — це площа всіх трикутних граней.





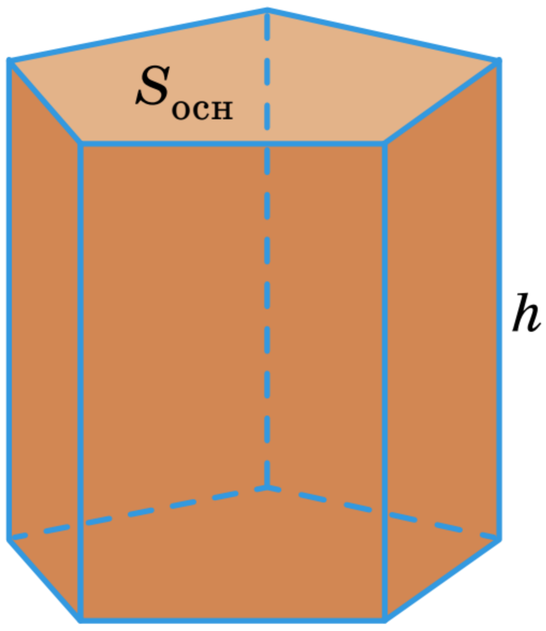
Мал. 28.12

Площа повної поверхні піраміди — це сума площ усіх її граней, тобто

$$S_{п.п} = S_{б.п} + S_{осн}$$

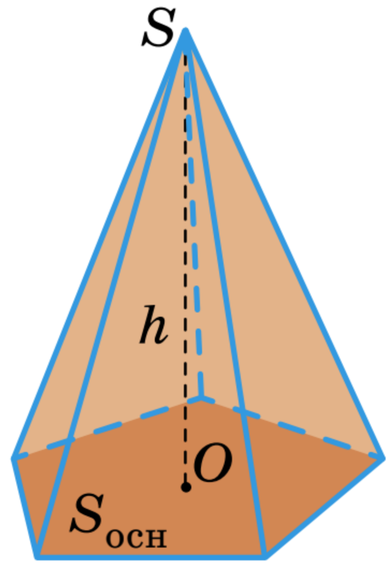
Об'єми многогранників

Об'єм прямої призми



$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Об'єм піраміди



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Крім призми і піраміди існують й інші многогранники. Особливий інтерес представляють правильні многогранники. Многогранник називають *правильним*, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники, а всі вершини однаково віддалені від деякої точки. Цю точку називають центром правильного многогранника. Наприклад, куб — правильний многогранник, оскільки всі його грані — рівні квадрати, а всі вершини однаково віддалені від точки перетину діагоналей куба.

На малюнку 28.13 зображено інсталяцію із п'яти правильних многогранників: тетраедра (1), ікосаедра (2), гексаедра (куба) (3), октаедра (4) і додекаедра (5). Ці тіла стали предметами дослідження багатьох учених ще до нашої ери.



Мал. 28.13

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення призми. Назви елементи призми.
2. Як знайти площу бічної поверхні призми? А площу повної поверхні?
3. За якою формулою знаходять об'єм призми?
4. Сформулюй означення піраміди. Назви її елементи.
5. Як знайти площу бічної поверхні піраміди? А повної поверхні?
6. За якою формулою знаходять об'єм піраміди?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Дано прямий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 60°$ (мал. 28.14). Знайди площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо діагональ $B_1D = 9$ см.

- Площу бічної поверхні паралелепіпеда знаходимо за формулою $S_{б.п} = P_{осн} \cdot h$. $P_{осн} = 2(5 + 8) = 26$ (см).

З $\triangle ABD$ за теоремою косинусів знайдемо BD.

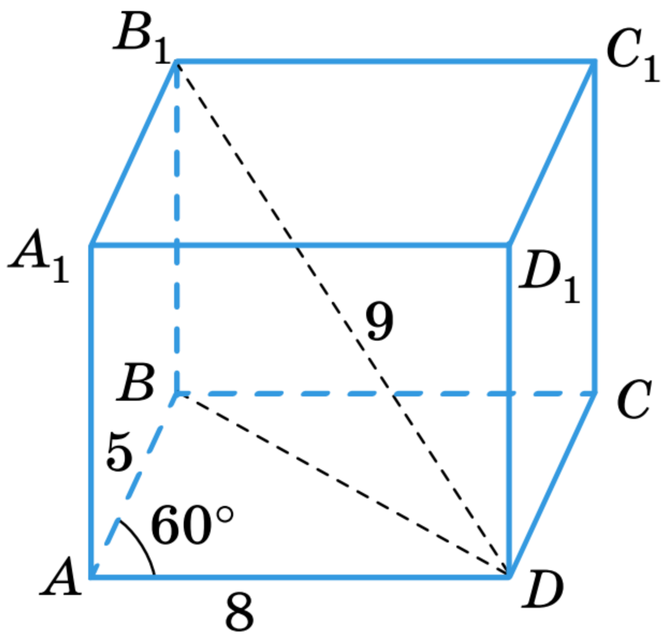
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60°$.

Тоді $BD^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 64 - 40 = 49$. Звідси $BD = 7$ см.

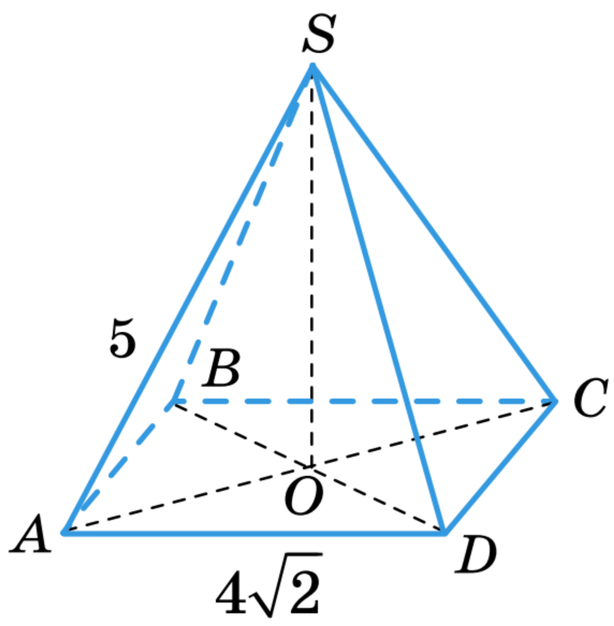
З $\triangle B_1BD$ за теоремою Піфагора знайдемо висоту $B_1B^2 = B_1D^2 - BD^2$.

$B_1B^2 = 81 - 49 = 32$, $B_1B = 4\sqrt{2}$ (см). Тоді $S_{б.п} = 26 \cdot 4\sqrt{2} = 104\sqrt{2}$ (см^2).

Відповідь. $S_{б.п} = 104\sqrt{2}$ см^2.



Мал. 28.14



Мал. 28.15

2. Знайди об'єм чотирикутної піраміди, в основі якої лежить квадрат зі стороною $4\sqrt{2}$ см, а всі бічні ребра дорівнюють 5 см (мал. 28.15).

- Якщо всі ребра піраміди рівні, то O — точка перетину діагоналей квадрата (це випливає з рівності трикутників SOA, SOB, SOC і SOD). Якщо сторона квадрата $4\sqrt{2}$ см, то його діагоналі дорівнюють $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ (см). Отже, $AC = 8$ см, тоді $AO = 4$ см. З $\triangle SOA$ за теоремою Піфагора знайдемо SO.

$SO^2 = SA^2 - SO^2$, $SO^2 = 25 - 16 = 9$, тоді $SO = 3$ см.

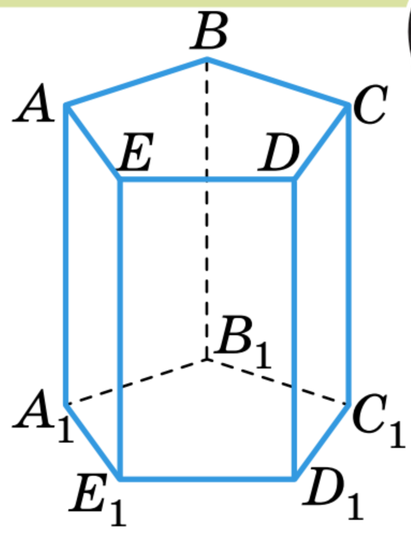
$S_{\text{осн}} = (4\sqrt{2})^2 = 32\,(\text{см}^2)$. Знаючи площу основи і висоту піраміди, можемо знайти її об'єм. $V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 3 = 32\ (\text{см}^3)$.

Відповідь. $V = 32\ \text{см}^3$.

ВИКОНАЄМО УСНО

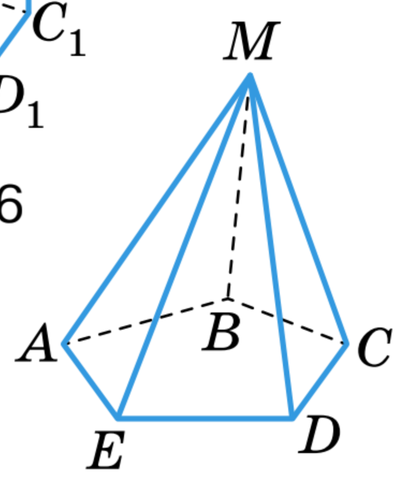


1195. Назви на мал. 28.16:
а) основи призми;
б) бічні грані;
в) бічні ребра;
г) ребра основи;
ґ) пряма чи похила призма;
д) як можна назвати таку призму?



Мал. 28.16

1196. Назви на мал. 28.17:
а) основу піраміди;
б) бічні грані;
в) бічні ребра;
г) ребра основи;
ґ) як можна назвати таку піраміду?



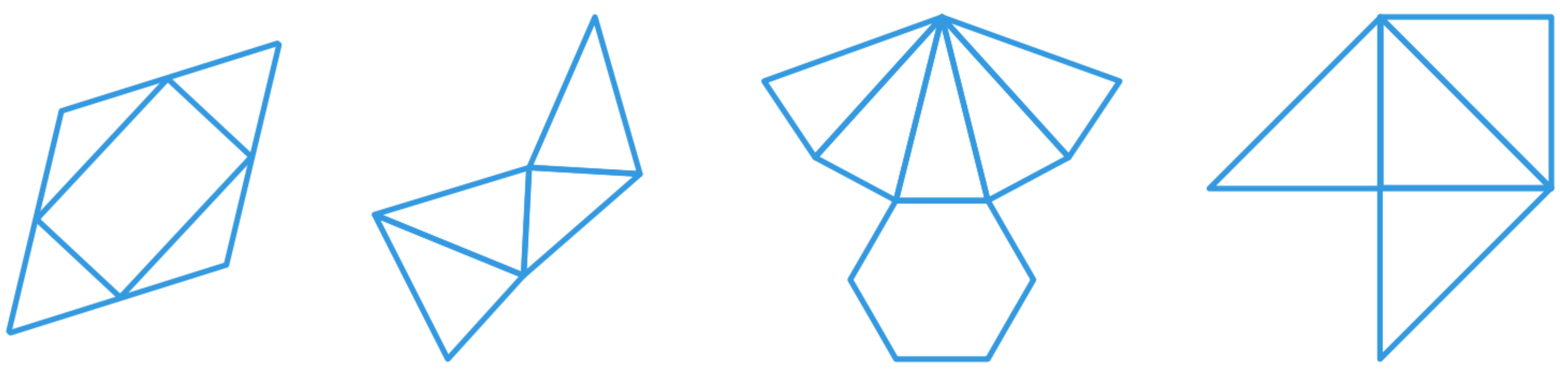
Мал. 28.17

1197. Скільки ребер має семикутна призма? А граней?

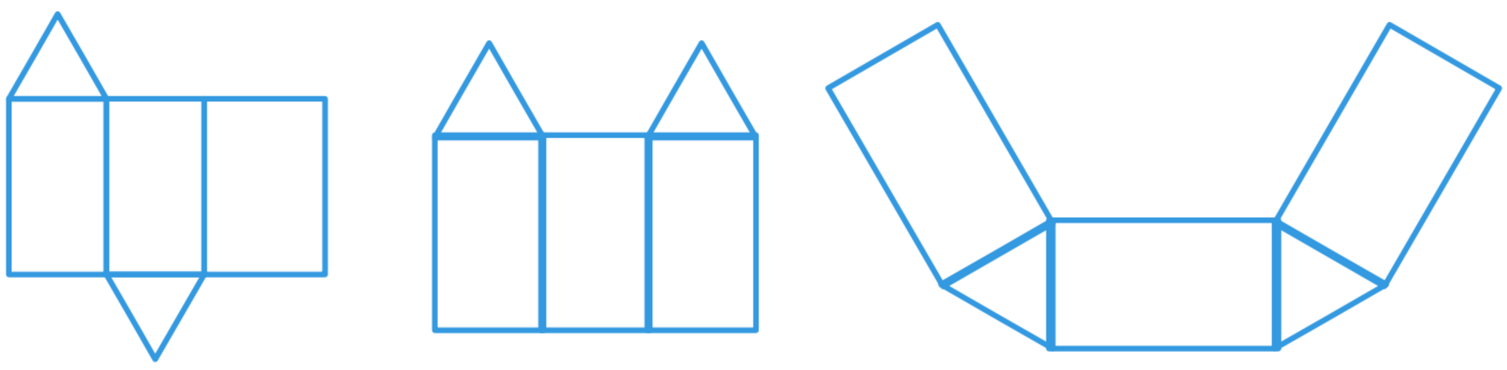
1198. Скільки ребер має восьмикутна піраміда? А граней?

1199. **Гра.** Один із учнів / одна з учениць називає многогранник, другий / друга має сказати, скільки вершин він має, третій / третя — скільки ребер, а четвертий / четверта — скільки граней. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

1200. На якому малюнку зображено розгортку піраміди (мал. 28.18)?


Мал. 28.18

1201. Поясни, чому на жодному з малюнків не наведено розгортку призми (мал. 28.19).

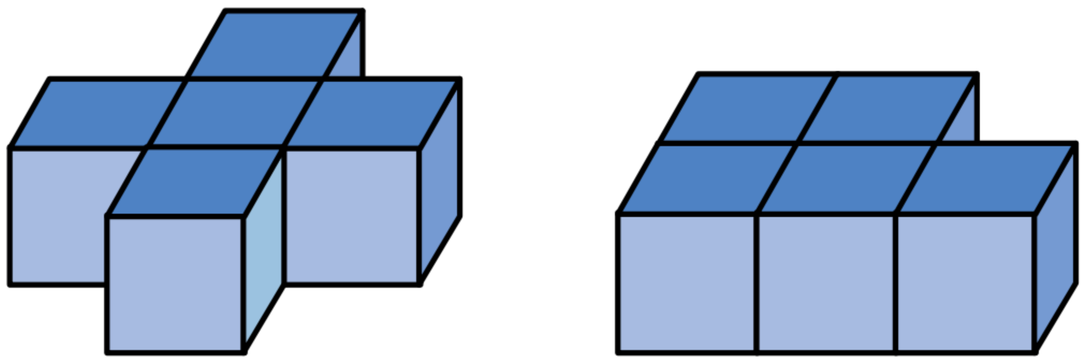

Мал. 28.19

1202. Ребро куба дорівнює 2 см. Чому дорівнює його площа поверхні?
А $2\ \text{см}^2$ **Б** $4\ \text{см}^2$ **В** $16\ \text{см}^2$ **Г** $24\ \text{см}^2$

1203. Ребро куба дорівнює 3 см. Чому дорівнює його об'єм?
А 3 см^3 **Б** 27 см^3 **В** 54 см^3 **Г** 9 см^3

1204. Чому дорівнює площа бічної поверхні шестикутної піраміди, якщо кожна її бічна грань має площу 12 см^2?
А 18 см^2 **Б** 60 см^2 **В** 72 см^2 **Г** 84 см^2

1205. Фігури складено з одиничних кубів (мал. 28.20). Порівняй їх об'єми та площі повної поверхні.



Мал. 28.20

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1206. Сконструюйте зі спагетті і маршмелоу:
а) трикутну призму; б) трикутну піраміду;
в) чотирикутну призму; г) чотирикутну піраміду.

1207. Знайди площу повної поверхні та об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри 3 см, 8 см і 10 см.

1208. Знайди площу повної поверхні та об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри 2 см, 6 см і 8 см.

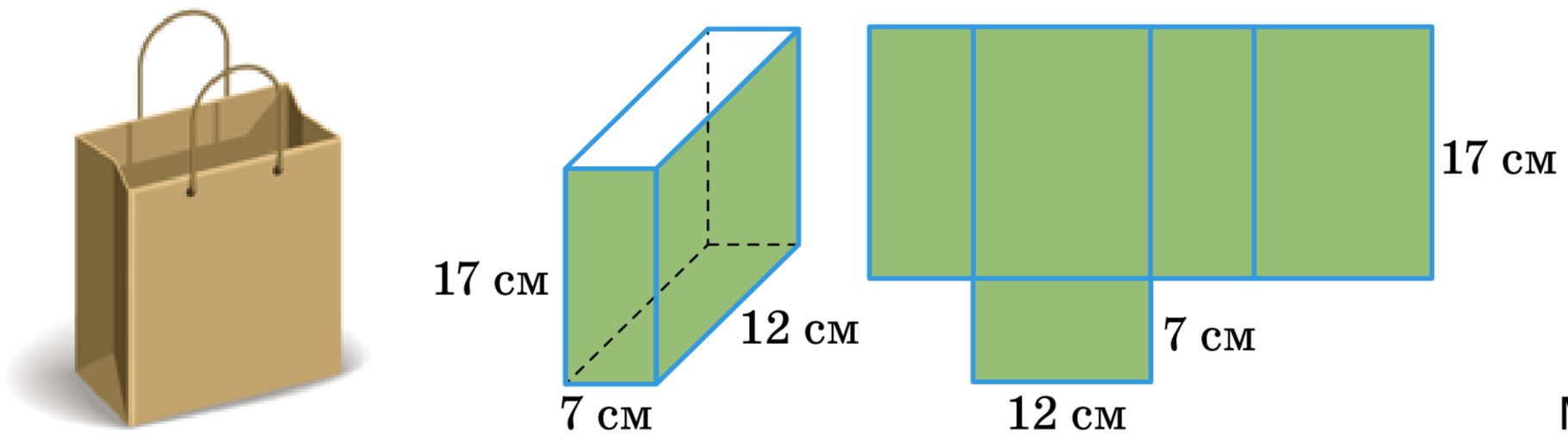
1209. Знайди площу бічної поверхні та об'єм прямої призми, основою якої є квадрат зі стороною 5 см, а бічне ребро дорівнює 8 см.

1210. Знайди площу бічної поверхні та об'єм прямої призми, основою якої є правильний трикутник зі стороною 6 см, а бічне ребро дорівнює 5 см.

1211. Усі грані трикутної піраміди — правильні трикутники зі стороною 4 см. Знайди площу повної поверхні цієї піраміди.

1212. All the lateral faces of a quadrangular pyramid are right triangles with sides of length 6 cm. Find the total surface area of this pyramid.

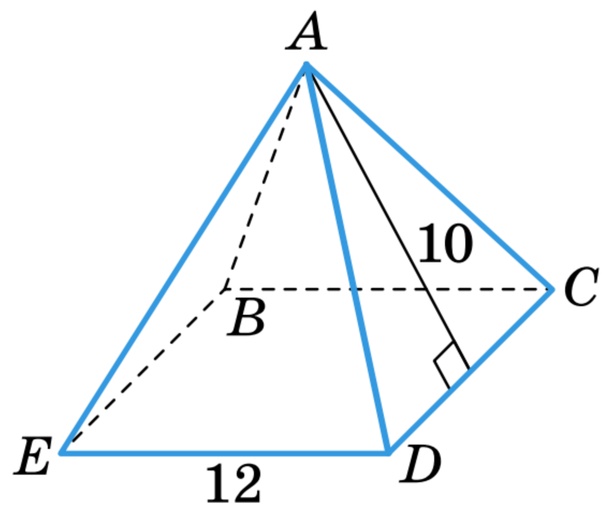
1213. За малюнком 28.21 знайди, скільки картону піде на виготовлення такого пакету.

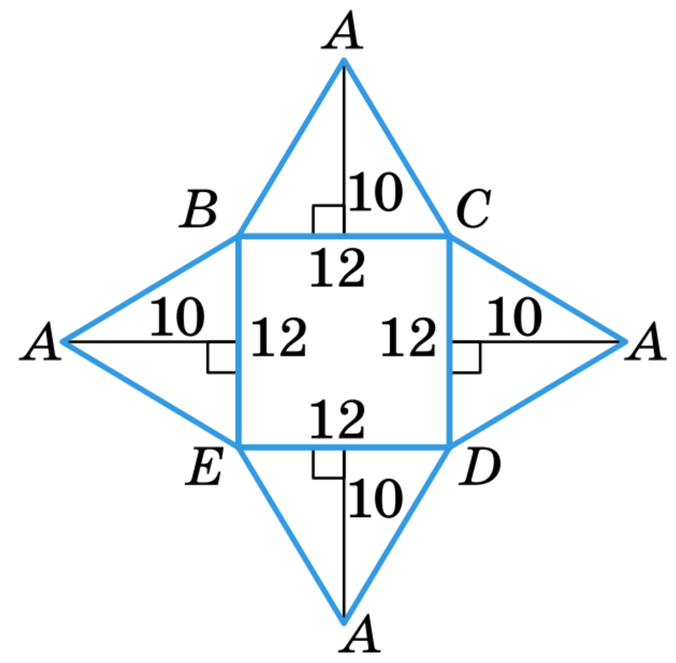


Мал. 28.21

1214. За малюнком 28.22 знайди, скільки картону піде на пакування у формі піраміди.







Мал. 28.22

1215. Входом у Лувр є скляна піраміда, що має висоту 21,64 м та основу у формі квадрата зі сторонами 35,42 м (мал. 28.23). Обери значення для об'єму цієї піраміди, що округлене до цілого метру кубічного.

А 27149 м^3 **Б** 9050 м^3

В 2034 м^3 **Г** 766 м^3

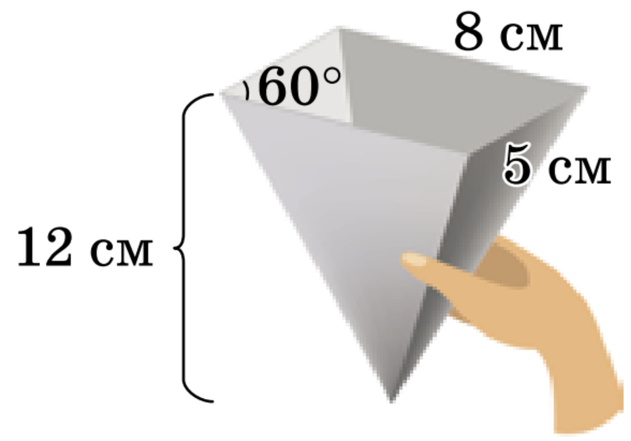


Мал. 28.23

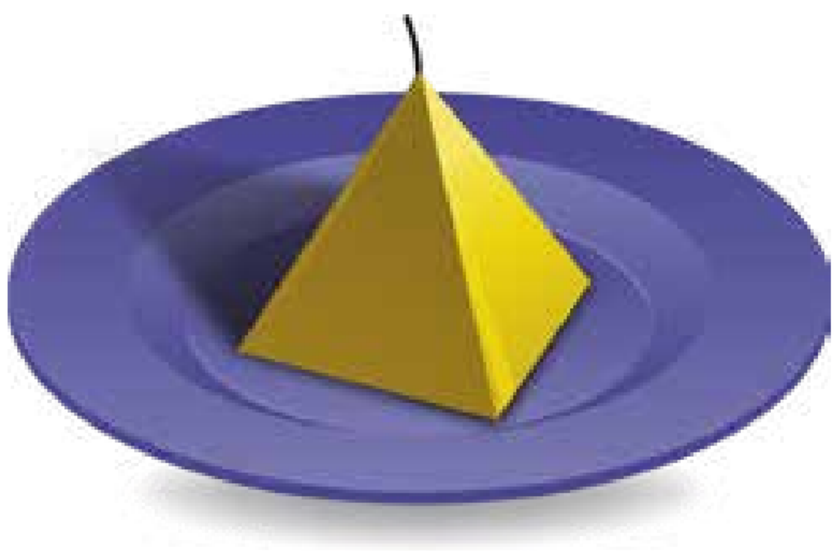
1216. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, основою якої є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 12 см і кутом при вершині 30°, якщо висота піраміди дорівнює 15 см.

1217. Знайди об'єм трикутної піраміди, основою якої є рівнобедрений трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см, якщо висота піраміди дорівнює 7 см.

1218. Знайди об'єм воску, що можна залити у форму чотирикутної піраміди, основою якої є паралелограм зі сторонами 5 см і 8 см та гострим кутом 60°, якщо висота форми дорівнює 12 см (мал. 28.24).



1219. Декоративний світильник має форму піраміди, основа якої — ромб з діагоналями 9 см і 12 см. Висота світильника становить 8 см. Знайди об'єм, що займає світильник.



Мал. 28.24

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1220. За малюнком 28.25 знайди площу поверхні та об'єм вази.

1221. За малюнком 28.26 знайди площу повної поверхні та об'єм акваріуму.

1222. Для вентиляційної системи будівельники використовують модульні блоки у формі прямої призми (мал. 28.27). Основа кожного модуля має форму правильного трикутника, а діагональ бічної металевої панелі дорівнює 13 см. Висота модуля — 5 см. Знайди площу бічної поверхні модуля та об'єм повітря в ньому.



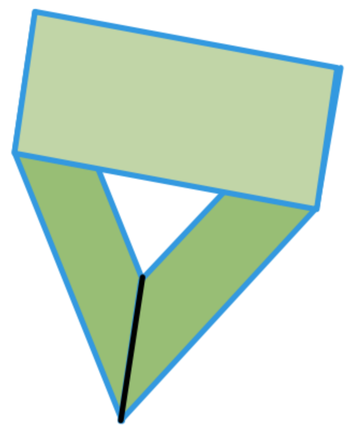
Мал. 28.25



Мал. 28.26

1223. Контейнер має форму прямої призми з основою у вигляді квадрата. Діагональ бічної стінки контейнера становить 17 см, а висота контейнера — 15 см. Обчисли площу бічної поверхні та об'єм контейнера.

1224. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм прямої призми, основою якої є рівнобічна трапеція з основами 12 см і 18 см та кутом 60°, якщо бічне ребро призми дорівнює 9 см.



Мал. 28.27

1225. Знайди площу бічної поверхні та об'єм прямої призми, основою якої є рівнобічна трапеція з основами 9 см і 21 см та бічною стороною 10 см, якщо бічне ребро призми дорівнює 16 см.

1226. Знайди площу бічної поверхні трикутної піраміди, основою якої є правильний трикутник, якщо всі її бічні грані — рівнобедрені прямокутні трикутники, а бічні ребра дорівнюють 6 см.

1227. Усі бічні грані чотирикутної піраміди — рівнобедрені трикутники з бічною стороною 12 см і кутом при вершині 30°. Знайди площу бічної поверхні піраміди.

1228. Дано піраміду $SABCD$ з висотою SO. Знайди об'єм піраміди, якщо O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, $AB = 8\sqrt{2}$ см, $SA = 17$ см.

1229. Дано піраміду $SABCD$ з висотою $SO = 12$ см. Знайди об'єм піраміди, якщо O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, $SA = 13$ см.

1230. Знайди площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є квадрат, якщо діагональ бічної грані дорівнює d і утворює з бічним ребром кут α.

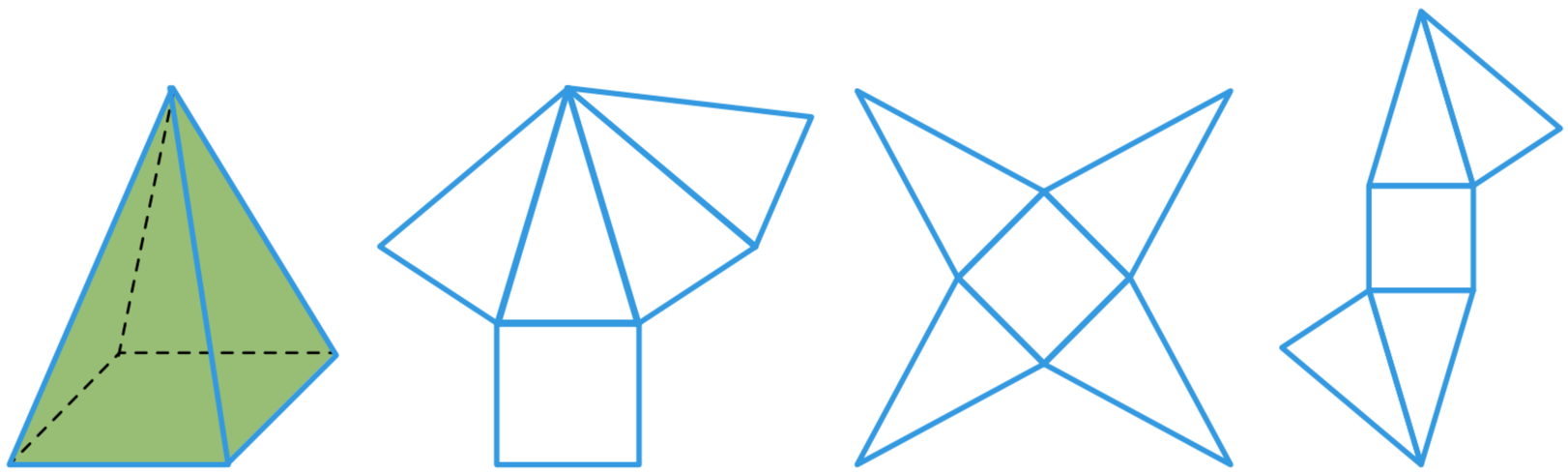
1231. Знайди площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є правильний трикутник, якщо діагональ бічної грані дорівнює d і утворює з ребром основи кут α.

1232. Знайди об'єм прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $B_1D = d$, $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1233. Зробіть чотирикутну піраміду з різних розгорток (мал. 28.28). Чи є інші розгортки, із яких можна зробити таку чотирикутну піраміду?



Мал. 28.28

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1234. Знайди площу квадрата, якщо його діагональ дорівнює 10 см.

1235. Обчисли площу ромба, вершинами якого є точки $A(6; 7)$, $B(7; 4)$, $C(4; 3)$ і $D(3; 6)$.

1236. Запиши рівняння прямої, яка є образом прямої $y = x + 4$ при симетрії відносно: а) осі абсцис; б) осі ординат.

§ 29 ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Деякі тіла обертання тобі вже знайомі. Це — циліндр, конус і куля. Предмети, які мають такі форми, ми постійно зустрічаємо у повсякденному житті (мал. 29.1). Крім того, їх широко використовують у промисловості, побуті, архітектурі тощо.

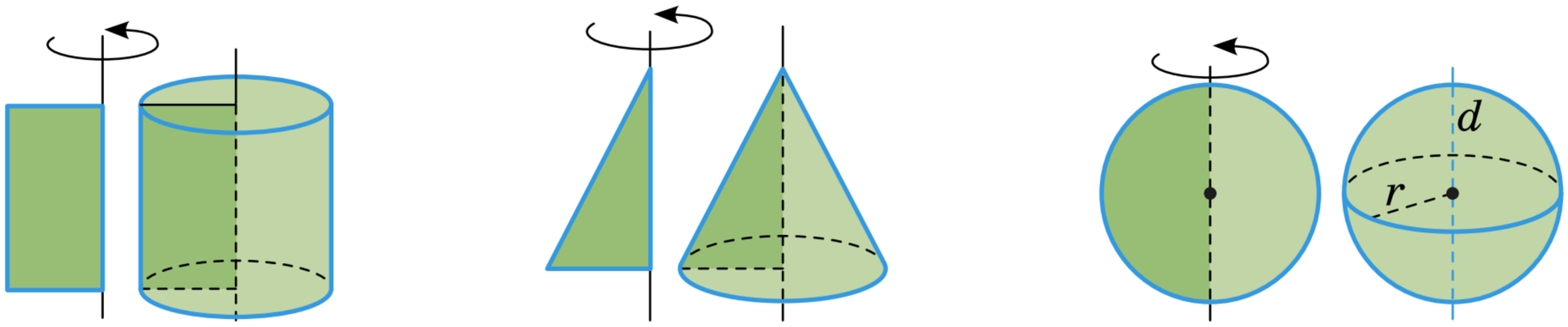
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- тіла обертання — solids of revolution
- конус — cone
- циліндр — cylinder
- сфера — sphere
- об'єм — volume



Мал. 29.1

Ці геометричні фігури називають *тілами обертання*, бо кожну з них можна отримати внаслідок обертання плоскої фігури навколо деякої прямої (мал. 29.2).

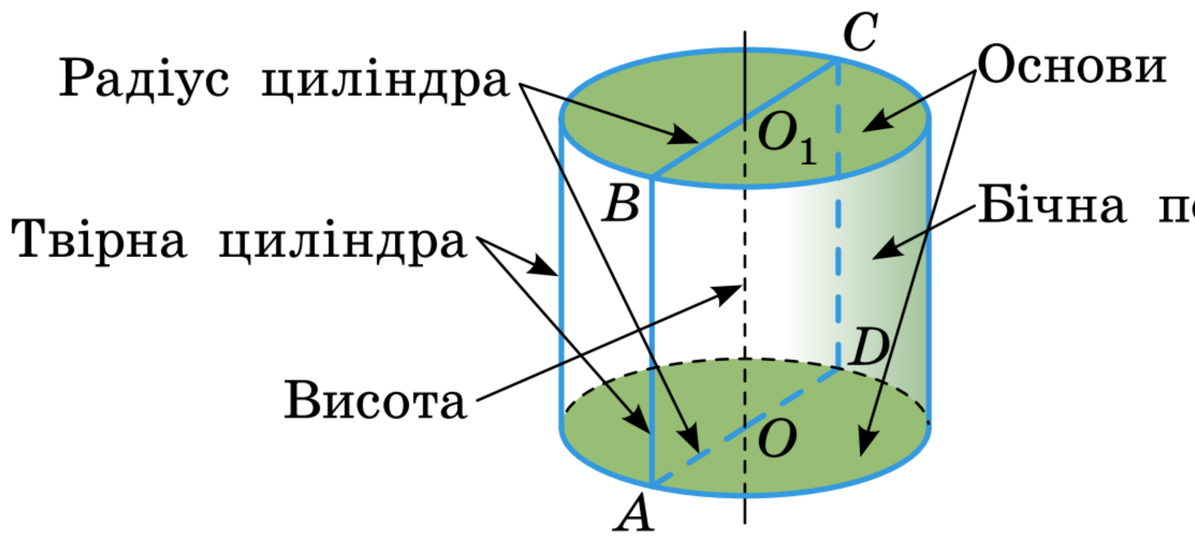


Мал. 29.2

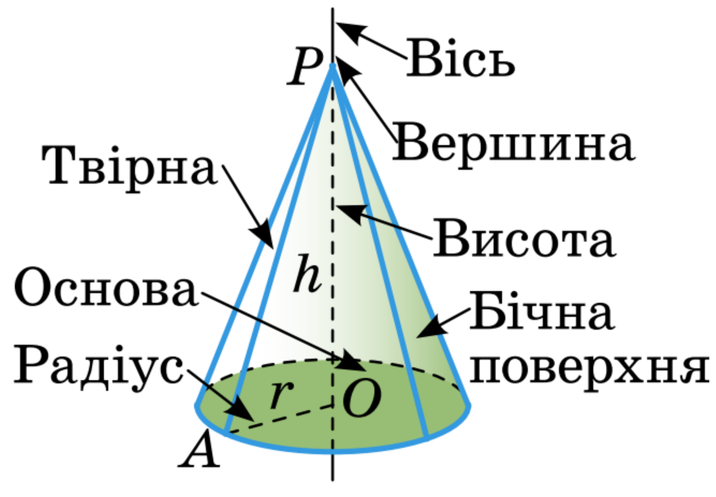
Циліндр утворюється при обертанні прямокутника навколо його сторони. Якщо прямокутник $OABO_1$ обертати навколо сторони OO_1, то отримаємо циліндр, зображений на малюнку 29.3. Пряму OO_1 називають *віссю циліндра*. Сторони OA і O_1B, обертаючись, утворюють рівні круги, які називають *основами циліндра*, а їхній радіус — *радіусом циліндра*.

При обертанні сторони AB утворюється циліндрична поверхня, яку називають *бічною поверхнею циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні, що дорівнює AB, — твірна циліндра. Усі твірні одного циліндра рівні та паралельні одна одній, оскільки кожна з них дорівнює стороні прямокутника, який обертається, і паралельна осі циліндра. Довжина твірної — висота циліндра, вона дорівнює відстані між основами циліндра.

Якщо перетнути циліндр площиною, яка проходить через його вісь, то отримаємо прямокутник, дві сторони якого — діаметри основ, а дві інші — твірні циліндра. Такий переріз називають *осьовим перерізом циліндра*. На мал. 29.3 прямокутник $ABCD$ — осьовий переріз циліндра.



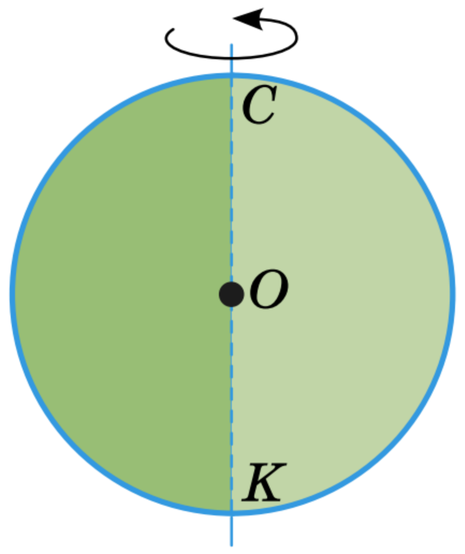
Мал. 29.3



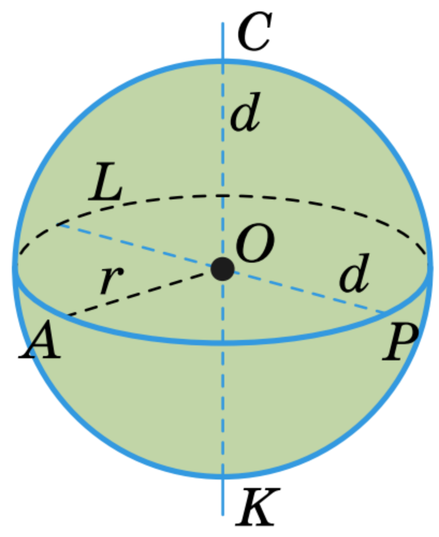
Мал. 29.4

Конус можна уявити як тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета. Якщо прямокутний трикутник OPA обертати навколо катета PO, то його гіпотенуза PA опише бічну поверхню конуса, а катет OA — круг — основу конуса (мал. 29.4). Радіус цього круга називають *радіусом* конуса. Точку P, відрізок PO, пряму PO — відповідно *вершиною*, *висотою* та *віссю* конуса. Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, — *твірна* конуса. Усі твірні конуса рівні, оскільки кожна з них дорівнює гіпотенузі трикутника, обертанням якого утворено конус.

Кулею називають тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра (мал. 29.5). Будь-який відрізок, який сполучає центр кулі з якою-небудь точкою його поверхні, називають *радіусом* кулі. Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через центр, — *діаметр* кулі (мал. 29.6).

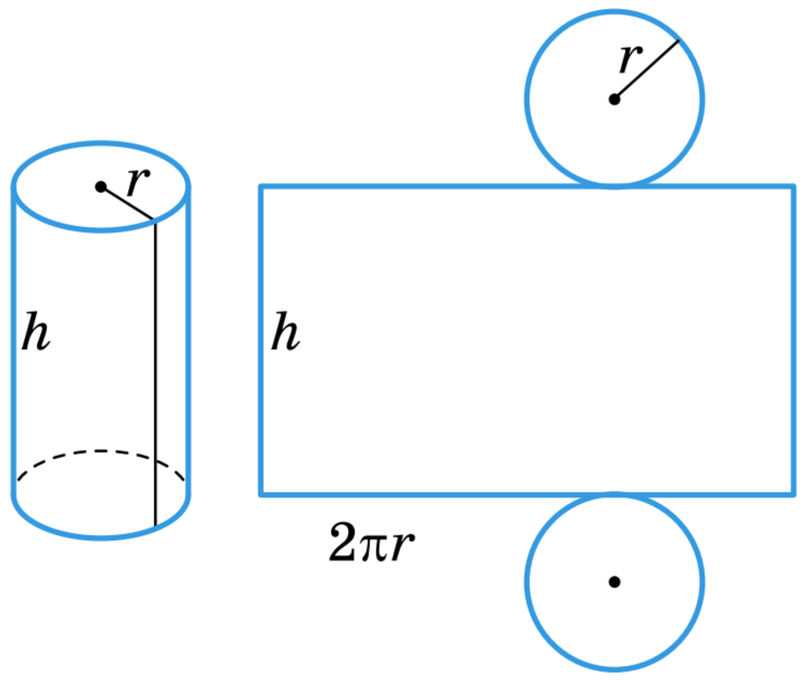
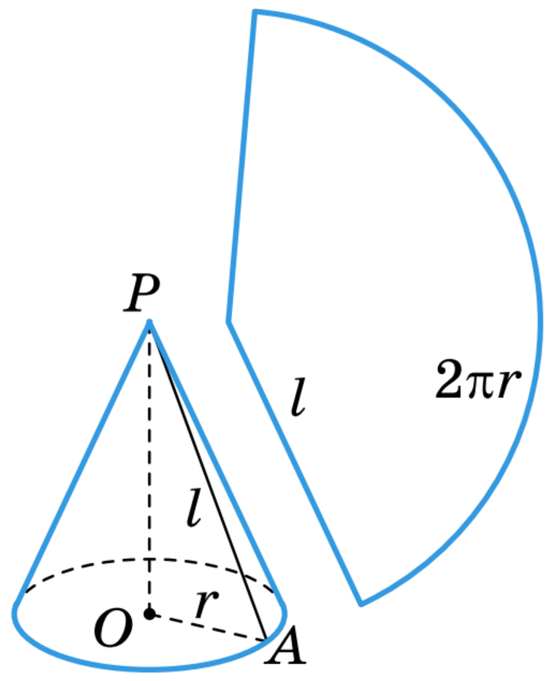


Мал. 29.5



Мал. 29.6

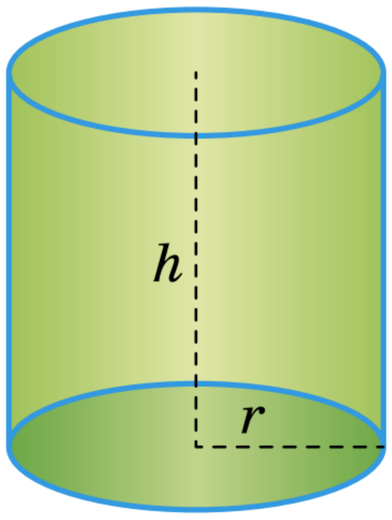
Площі повної поверхні тіл обертання

Циліндр	**Конус**
	
Якщо радіус циліндра r, а висота h, то його бічну поверхню розгортаємо у прямокутник зі сторонами $2\pi r$ і h. $S_{б.п} = 2\pi rh$	Площа бічної поверхні конуса радіуса r і з твірною l є площею сектора радіуса l, довжина дуги якого $2\pi r$. $S_{б.п} = \pi rl$
Площа повної поверхні циліндра дорівнює сумі площ бічної поверхні циліндра і площ його основ, тобто $S_{п.п} = S_{б.п} + 2S_{осн}$. Оскільки площа круга дорівнює πr^2, то $S_{п.п} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.	Щоб знайти площу повної поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи: $S_{п.п} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

Площу поверхні кулі радіуса r обчислюють за формулою: $S = 4\pi r^2$.

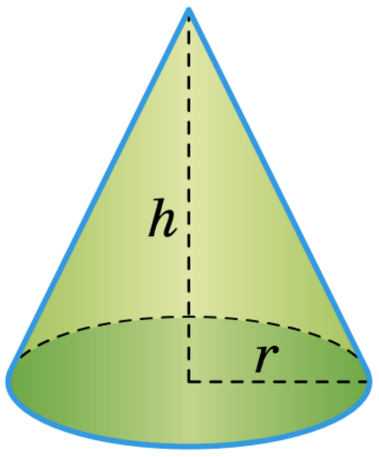
Об'єми тіл обертання

Об'єм циліндра



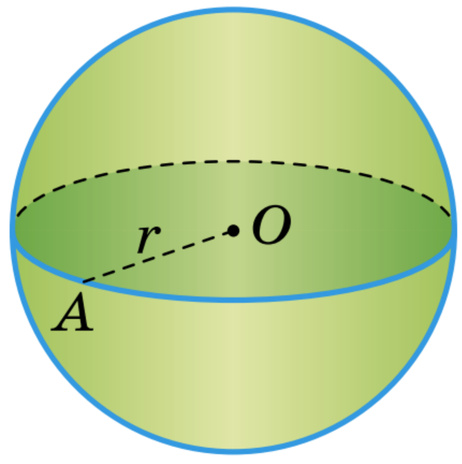
$$V = \pi r^2 h$$

Об'єм конуса



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Об'єм кулі

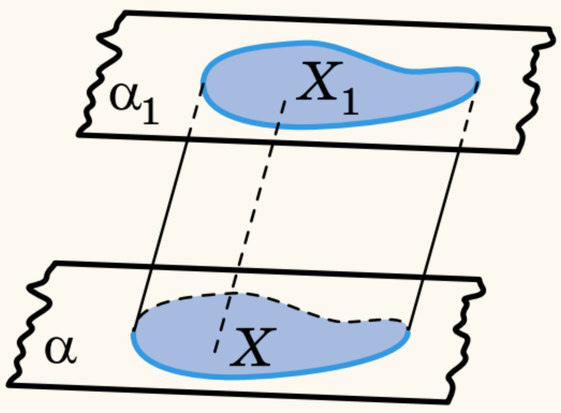


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

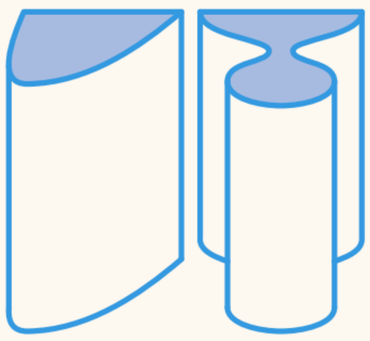
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони, у вищій математиці називають *прямим круговим циліндром*. Циліндр у широкому розумінні — це тіло, яке складається з двох обмежених плоских областей, які можна сумістити паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають їхні відповідні точки (мал. 29.7). Під це означення підходять кожна призма і тіла, подібні зображеним на малюнку 29.8. Якщо твірні такого циліндра перпендикулярні до площини основи, то його називають *прямим циліндром*. Якщо його основи — круги, його називають *круговим*. З усіх циліндрів тільки прямий круговий є тілом обертання.



Мал. 29.7

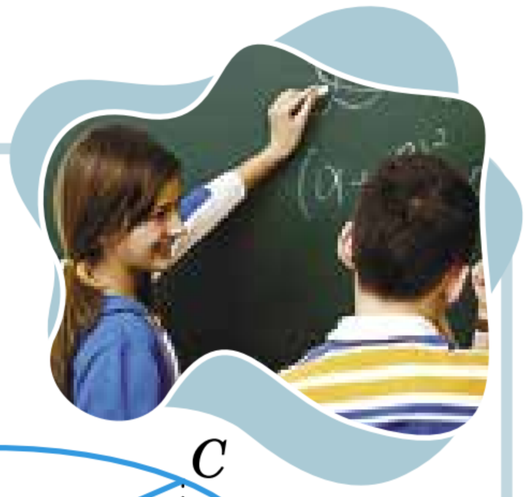


Мал. 29.8

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дай означення: а) циліндра; б) конуса; в) кулі.
2. Назви елементи: а) циліндра; б) конуса; в) кулі.
3. Що є розгорткою бічної поверхні циліндра?
4. Як знайти площу бічної поверхні: а) циліндра; б) конуса?
5. Як знайти площу повної поверхні: а) циліндра; б) конуса; в) кулі?
6. За якою формулою знаходять об'єм: а) циліндра; б) конуса; в) кулі?

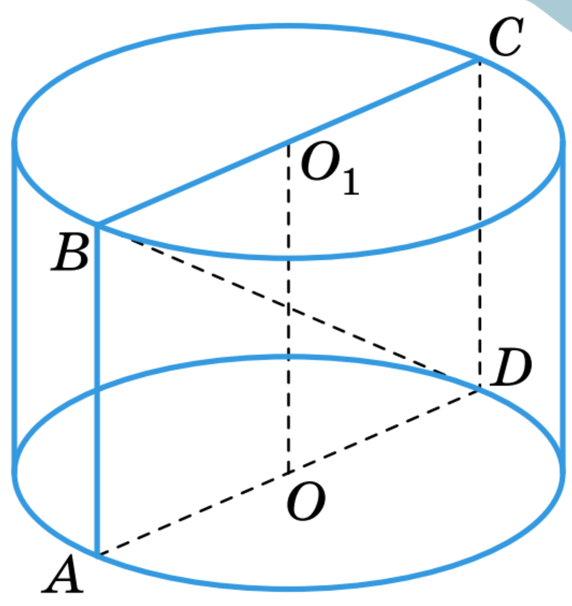
ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Знайди об'єм циліндра, якщо його радіус дорівнює 4 см, а діагональ осьового перерізу 10 см (мал. 29.9).

• Об'єм циліндра визначають за формулою $V = \pi r^2 h$. Висоту циліндра знайдемо з $\triangle ABD$ за теоремою Піфагора: $AB^2 = BD^2 - AD^2$. Якщо радіус циліндра дорівнює 4 см, то $AD = 2 \cdot 4 = 8$ (см). Тоді $AB^2 = 100 - 64 = 36$, звідси висота циліндра $AB = 6$ (см). Знаючи радіус циліндра і його висоту, можемо знайти об'єм: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$ (см^3).

Відповідь. $V = 96\pi$ см^3.



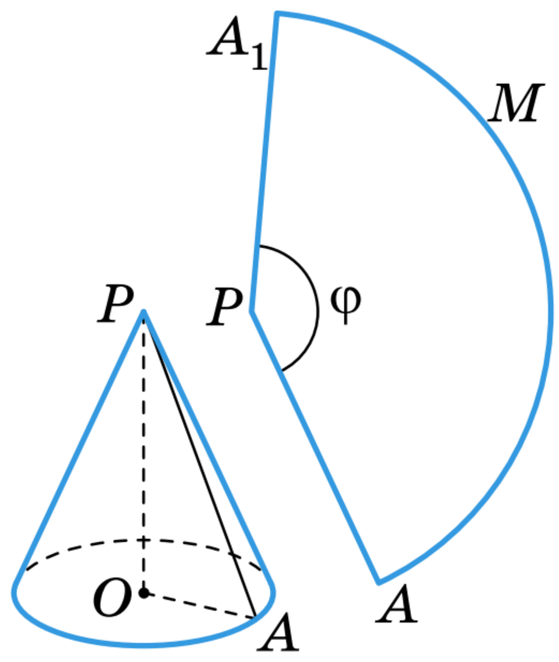
Мал. 29.9

2. Висота конуса дорівнює 4 см, а твірна 5 см. Знайди кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

• З $\triangle POA$ за теоремою Піфагора знайдемо радіус основи конуса (мал. 29.10). $OA^2 = PA^2 - PO^2$, $OA^2 = 25 - 16 = 9$, тоді $OA = 3$ (см). Тому довжина кола основи конуса $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ (см). Такою ж буде і довжина дуги сектора AMA_1.

Оскільки довжина дуги кола радіуса R і центральним кутом φ визначається за формулою $l = \dfrac{\pi R \varphi}{180}$, то $6\pi = \dfrac{\pi \cdot AP \cdot \varphi}{180}$

або $6\pi = \dfrac{\pi \cdot 5 \cdot \varphi}{180}$, тоді $\varphi = \dfrac{6\pi \cdot 180}{5\pi} = 216°$.



Мал. 29.10

Відповідь: $\varphi = 216°$.

ВИКОНАЄМО УСНО



1237. Наведи приклади тіл з навколишнього середовища, які мають: а) форму циліндра; б) форму конуса; в) форму кулі.

1238. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Знайди площу бічної поверхні цього циліндра.

А 9 см^2 **Б** 18 см^2 **В** 20 см^2 **Г** 40 см^2

1239. Осьовим перерізом циліндра радіуса 5 см є квадрат. Чому дорівнює висота цього циліндра?

А 5 см **Б** 10 см **В** $5\sqrt{2}$ см **Г** $10\sqrt{2}$ см

1240. Знайди площу основи конуса, якщо його радіус дорівнює 4 см.
А $16\ см^2$ **Б** $8\pi\ см^2$ **В** $16\pi\ см^2$ **Г** $32\pi\ см^2$

1241. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а твірна 10 см. Чому дорівнює радіус сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса?
А 6 см **Б** 10 см **В** 8 см **Г** 6 см або 10 см

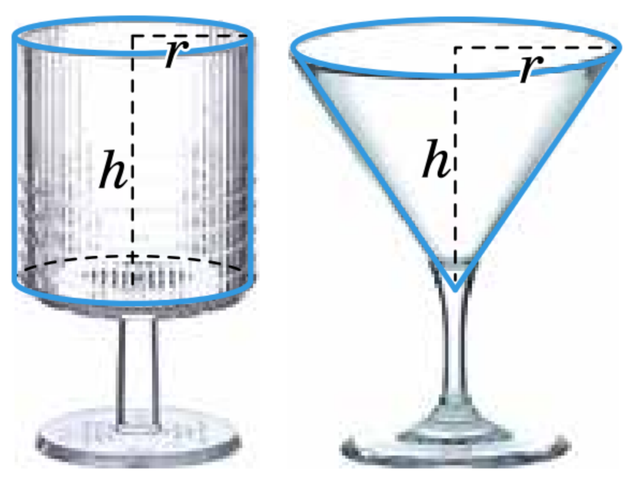
1242. Діаметр кулі дорівнює 7 см. Чому дорівнює радіус цієї кулі?

1243. Радіус кулі дорівнює 2 см. Чому дорівнює відстань від центра кулі до точки на поверхні кулі?

1244. Яка з банок консерви матиме найбільший об'єм? Яка найменший? Поясни (мал. 29.11).



Мал. 29.11



Мал. 29.12

1245. Скільки других склянок води вміститься у першу (мал. 29.12)?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1246. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайди площу поверхні і об'єм кулі.

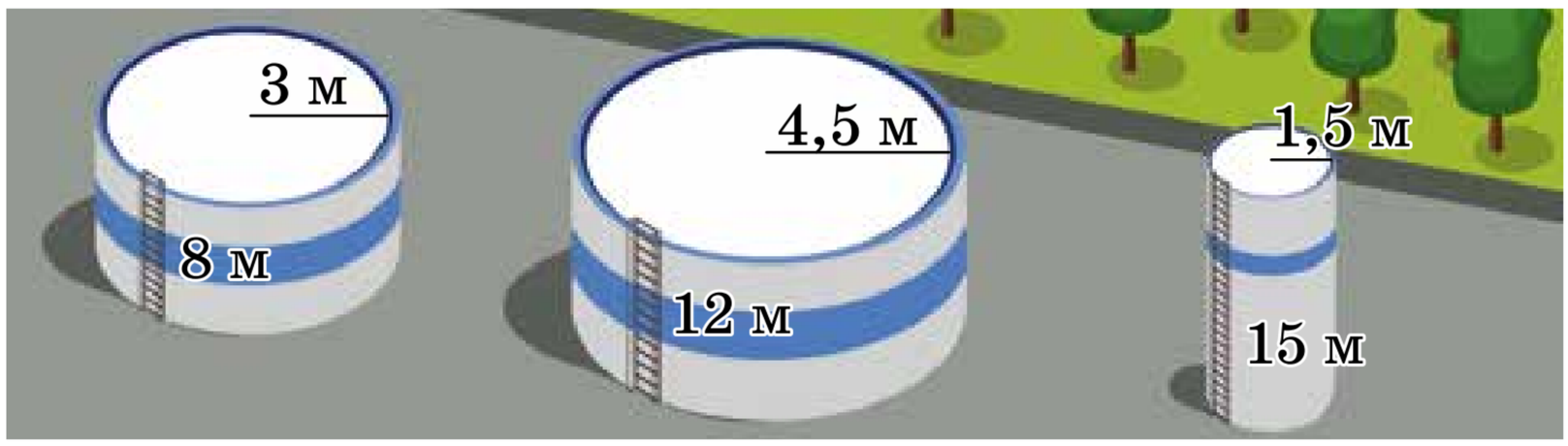
1247. Діаметр кулі дорівнює 12 см. Знайди площу поверхні і об'єм кулі.

1248. Який об'єм солі вміщує шалька терезів, якщо її діаметр дорівнює 9 см (мал. 29.13)? Відповідь округли до цілих.
А $191\ см^3$ **Б** $382\ см^3$ **В** $1526\ см^3$ **Г** $3052\ см^3$


Мал. 29.13

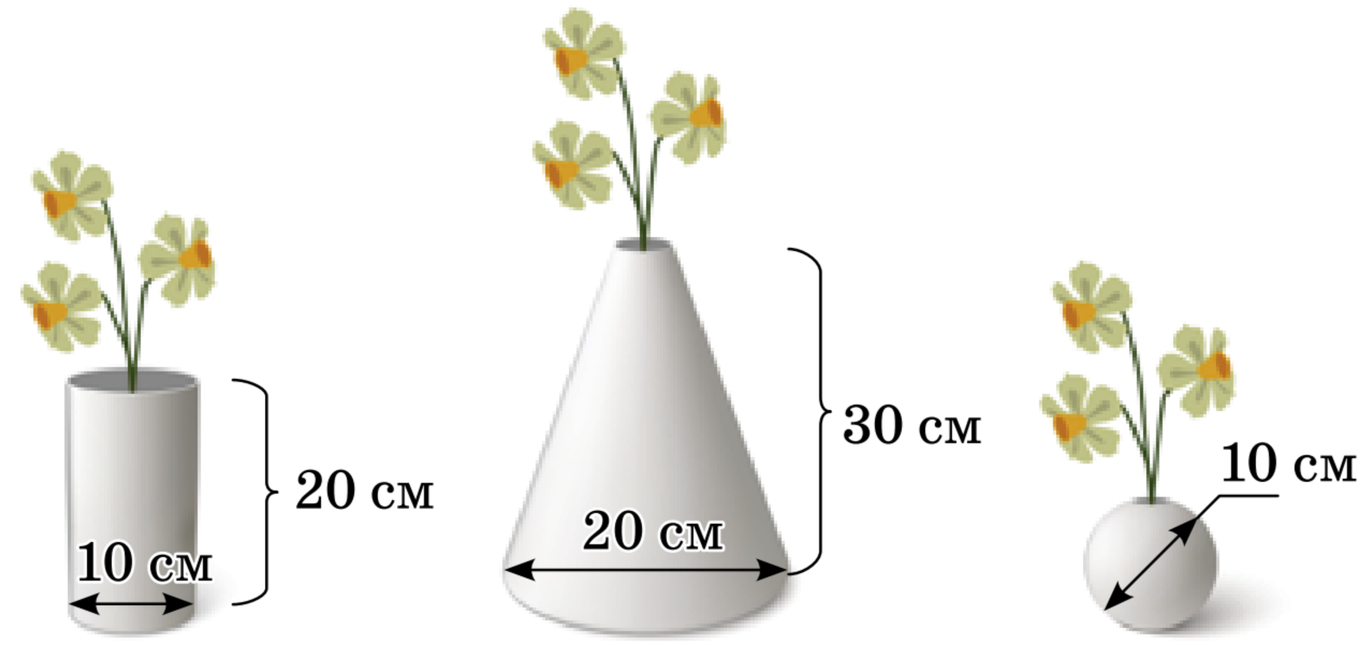
1249. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць записує значення для площі основи циліндра, другий / друга — значення для його висоти, а третій / третя — знаходить об'єм цього циліндра. Потім учні / учениці міняються ролями.

1250. Знайди об'єм баків в резервуарному парку (мал. 29.14).



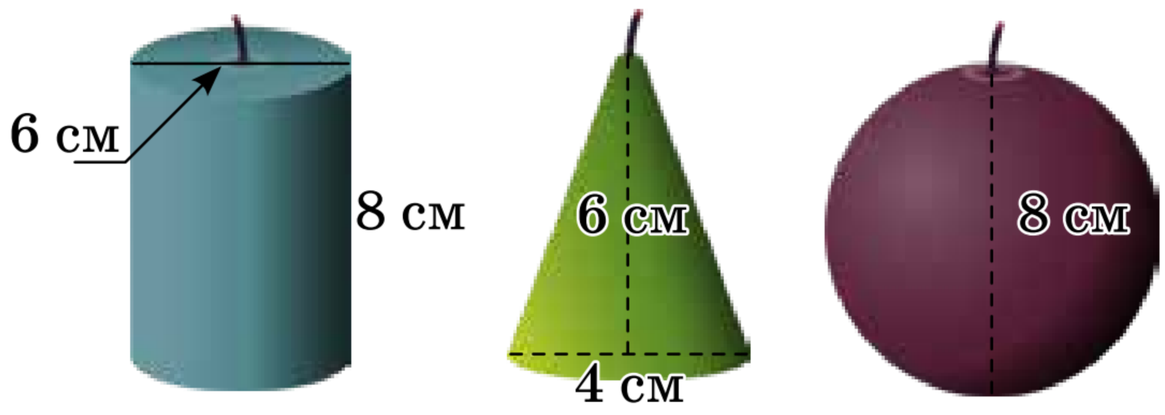
Мал. 29.14

1251. **Яка з ваз вміщує більший об'єм води (мал. 29.15)?**

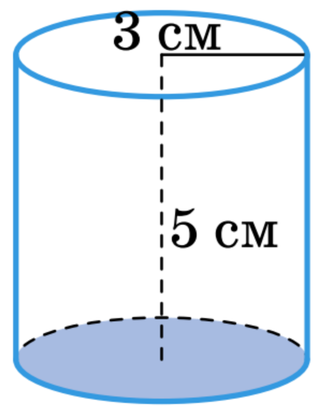


Мал. 29.15

1252. Знайди об'єм воску, що знадобиться для виготовлення кожної свічки (мал. 29.16). Відповідь округли до десятих квадратного сантиметра.



Мал. 29.16



Мал. 29.17

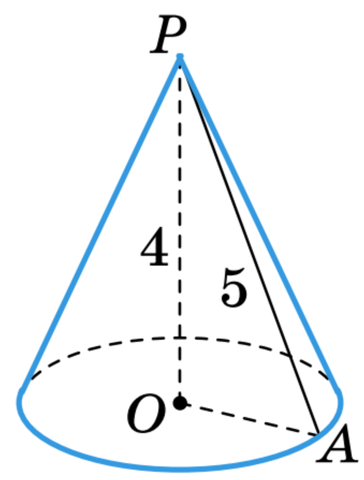
1253. За малюнком 29.17 знайди довжини сторін прямокутника, який є розгорткою бічної поверхні цього циліндра.

1254. Сторони прямокутника, який є розгорткою бічної поверхні циліндра, дорівнюють 3 см і 10π см. Знайди радіус основи і висоту цього циліндра.

1255. Прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см обертають навколо меншої сторони. Чому дорівнює радіус основи циліндра? А твірна? Знайди площу бічної поверхні цього циліндра.

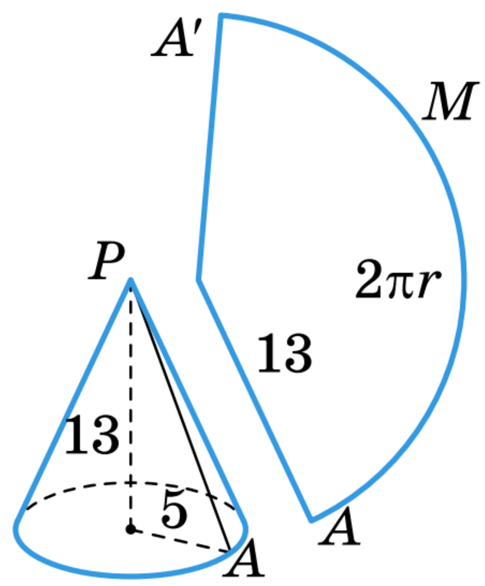
1256. Квадрат зі стороною 6 см обертають навколо однієї зі сторін. Чому дорівнює радіус основи циліндра? А висота? Знайди площу бічної поверхні цього циліндра та його об'єм.

1257. Твірна конуса дорівнює 5 см, а висота 4 см (мал. 29.18). Знайди площу його бічної поверхні та об'єм.



Мал. 29.18

1258. Твірна конуса дорівнює 13 см, а радіус основи 5 см (мал. 29.19). Знайди площу його бічної поверхні та об'єм.



Мал. 29.19

1259. Прямокутний трикутник з катетами 15 см і 8 см обертається навколо меншого катета. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного конуса та його об'єм.

1260. Рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 3 см обертається навколо одного з катетів. Знайди площу бічної поверхні утвореного конуса та його об'єм.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1261. На підприємстві з виготовлення тари планують виготовити металеву бочку циліндричної форми. За технічними вимогами висота бочки дорівнює діаметру її основи, а радіус основи становить 5 дм. Визнач площу всієї поверхні бочки та її об'єм.

1262. Створюють пакування у формі циліндра, у якого твірна дорівнює діаметру його основи. Знайди площу поверхні та об'єм пакування, якщо твірна циліндра дорівнює 6 см.

1263. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см і утворює з твірною кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

1264. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з твірною кут 60°. Знайди площу бічної поверхні циліндра.

1265. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 18 $см^2$. Знайди площу бічної поверхні цього циліндра.

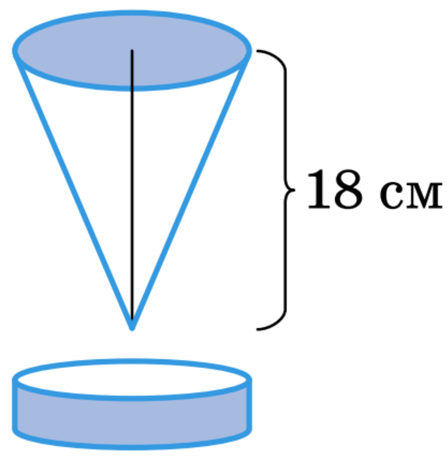
1266. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 15 $см^2$. Знайди площу бічної поверхні цього циліндра.

1267. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 48π $см^2$, а площа бічної поверхні — 30π $см^2$. Знайди об'єм циліндра.

1268. The total surface area of the cylinder is 90π cm^2, and the lateral surface area is 40π cm^2. Find the volume of the cylinder.

1269. Прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см обертають спочатку навколо більшої сторони, а потім навколо меншої сторони. У якому випадку об'єм циліндра буде більшим? А площа бічної поверхні?

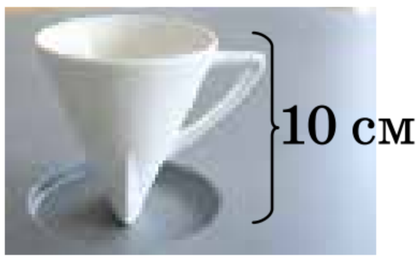
1270. Прямокутник зі сторонами 4 см і 6 см обертають спочатку навколо меншої сторони, а потім навколо більшої сторони. У якому випадку об'єм циліндра буде більшим? А площа бічної поверхні?



Мал. 29.20

1271. Автоматична годівниця для кота має форму конуса висотою 18 см та вміщує 8 308 $см^3$ корму (мал. 29.20). Знайди приблизний радіус цієї годівниці.

1272. Знайди приблизно радіус чашки, щоб вона могла вмістити 262 мл води (мал. 29.21).



Мал. 29.21

1273. Твірна конуса дорівнює 12 см і утворює з висотою кут 30°. Знайди об'єм конуса.

1274. Висота конуса дорівнює 8 см і утворює з твірною кут 45°. Знайди площу бічної поверхні конуса.

1275. Прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см обертають спочатку навколо меншого катета, а потім навколо більшого. У якому випадку об'єм утвореного конуса буде більшим? А площа бічної поверхні?

1276. Прямокутний трикутник з катетами 8 см і 15 см обертають спочатку навколо меншого катета, а потім навколо більшого. У якому випадку об'єм утвореного конуса буде більшим? А площа бічної поверхні?

1277. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор радіуса 6 см і центральним кутом 120°. Знайди площу повної поверхні конуса.

1278. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор радіуса 8 см і центральним кутом 90°. Знайди площу повної поверхні конуса.

1279. Радіуси двох куль відносяться як 2 : 3. Як відносяться їх площі поверхонь? А об'єми?

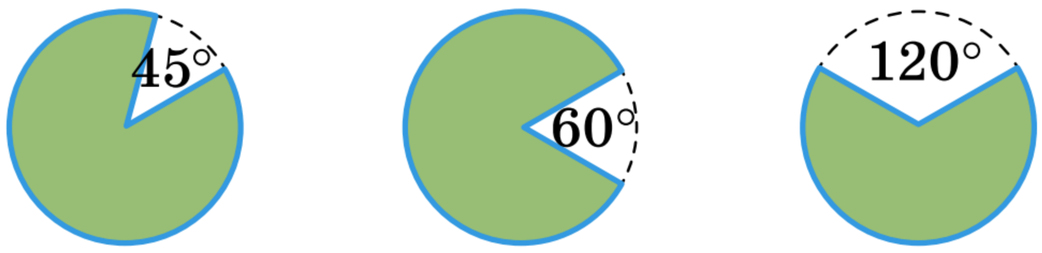
1280. Об'єми двох куль відносяться як 27 : 64. Як відносяться їх площі поверхонь?

1281. Прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см обертається навколо гіпотенузи. Знайди площу поверхні та об'єм утвореного тіла обертання.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



1282. Зроби із цупкого паперу розгортки конуса з 3 секторів (мал. 29.22).
Який із конусів буде найвищий? Який займатиме найбільшу площу на поверхні столу? Який матиме найбільшу площу основи? Висунь гіпотезу, а потім перевір її.



Мал. 29.22

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1283. Склади рівняння кола з центром у точці $P(-2; 6)$, яке проходить через точку $A(1; 2)$.

1284. Площа трикутника ABC дорівнює 36 см^2, $AB = 9$ см, $AC = 16$ см. Знайди міру кута A.

1285. Знайди площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною 6 см і кутом при основі 30°.

САМОСТІЙНА РОБОТА 6

Варіант 1

1. Намалюй площину α, точку M, що лежить у цій площині, точку K, яка не належить площині α, та пряму a, яка лежить у площині α і проходить через точку M. Запиши це за допомогою символів.

2. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник зі сторонами 9 см, 9 см і 7 см. Знайди площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

3. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 5 см і 6 см. Знайди об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 8 см.

4. Знайди твірну конуса, якщо його радіус основи і висота дорівнюють відповідно 6 см і 8 см.

Варіант 2

1. Намалюй площину α, точку M, що лежить у цій площині, пряму m, яка належить площині α і проходить через точку M та пряму a, яка перетинає площину α у точці M. Запиши це за допомогою символів.

2. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 6 см, 9 см і 10 см. Знайди площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 7 см.

3. Основою піраміди є квадрат зі стороною 4 см. Знайди об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.

4. Знайди висоту конуса, якщо його радіус основи і твірна дорівнюють відповідно 5 см і 13 см.

Варіант 3

1. Намалюй площину α, пряму n, що лежить у цій площині, і пряму m, яка перетинає площину α у точці P, яка не лежить на прямій n. Запиши це за допомогою символів.

2. В основі прямої призми лежить правильний трикутник зі стороною 8 см. Знайди площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 9 см.

3. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 5 см і 8 см. Знайди об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.

4. Знайди твірну конуса, якщо його радіус основи і висота дорівнюють відповідно 8 см і 15 см.

Головне в розділі 6

Тренувальні тести за 9 клас

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 6

1 Як правильно записати умову, що точка A належить площині α?

А $A \subset \alpha$ **Б** $A \in \alpha$
В $A \cap \alpha$ **Г** $A \notin \alpha$

2 Скільки різних площин можна провести через три точки, які лежать на одній прямій?

А одну **Б** дві
В жодної **Г** безліч

3 Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра, якщо розгорткою його бічної поверхні є прямокутник зі сторонами 5 см і 12 см?

А 17 см^2 **Б** 34 см^2
В 60 см^2 **Г** 120 см^2

4 Розгорткою бічної поверхні конуса є...

А трикутник **Б** квадрат
В круг **Г** сектор

5 Скільки ребер має шестикутна призма?

А 6 **Б** 12
В 18 **Г** 24

6 Площа бічної поверхні піраміди — це сума площ...

А бічних ребер
Б усіх ребер
В бічних граней
Г усіх граней

7 Яку фігуру потрібно обертати навколо однієї зі сторін, щоб отримати циліндр?

А трикутник
Б прямокутник
В ромб
Г трапецію

8 Об'єм кулі з радіусом 3 см дорівнює...

А 36π см^3 **Б** 27π см^3
В 18π см^3 **Г** 108π см^3

9 Об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 5 см, 6 см і 8 см дорівнює...

А 19 см^3 **Б** 38 см^3
В 240 см^3 **Г** 80 см^3

10 Ребро куба дорівнює 4 см. Чому дорівнює площа його поверхні?

А 16 см^2 **Б** 64 см^2
В 96 см^2 **Г** 128 см^2

Задачі підвищеної складності

Задачі для повторення

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Скільки граней має трикутна призма?

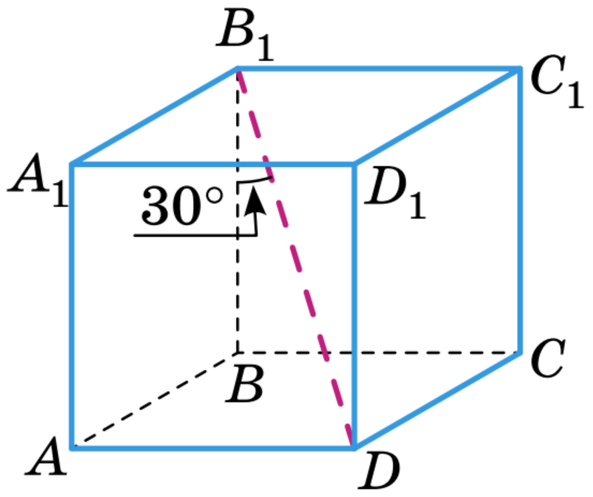
А 3 **Б** 4 **В** 5 **Г** 6

2. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 29.23). Яке з ребер мимобіжне з ребром AA_1?

А BB_1 **Б** BC **В** AD **Г** AB

3. Площа основи конуса дорівнює 36π см^2. Чому дорівнює радіус основи?

А 18 см **Б** 6 см **В** $3\sqrt{2}$ см **Г** $2\sqrt{3}$ см



Мал. 29.23

4. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 29.23), у якого $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $\angle BB_1D = 30°$. Установи відповідність між елементами паралелепіпеда, заданого умовами (1–3), та їх числовими значеннями (А–Д).

1 діагональ основи	**А** 5 см
2 діагональ паралелепіпеда	**Б** 10 см
3 висота паралелепіпеда	**В** 20 см
	Г $10\sqrt{3}$ см
	Д $10\sqrt{5}$ см

5. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо $AB = 7{,}8$ см, $BC = 6{,}2$ см, $AC = 10$ см?

6. Знайди площу поверхні кулі, якщо її діаметр дорівнює 5 см.

7. Знайди площу повної поверхні прямої призми, основою якої є трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см, якщо діагональ бічної грані, що містить основу трикутника, дорівнює 13 см.

8. Радіус основи конуса дорівнює його висоті. Знайди площу бічної поверхні конуса і його об'єм, якщо твірна дорівнює 6 см.

Додаткове завдання

9. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з більшою стороною кут α. Знайди площу поверхні тіла, утвореного при обертанні даного прямокутника навколо більшої сторони.

Історичні відомості

Відомості за курс основної школи

Навчальні проєкти

Навчальний проєкт 1. ЦІКАВІ КРИВІ

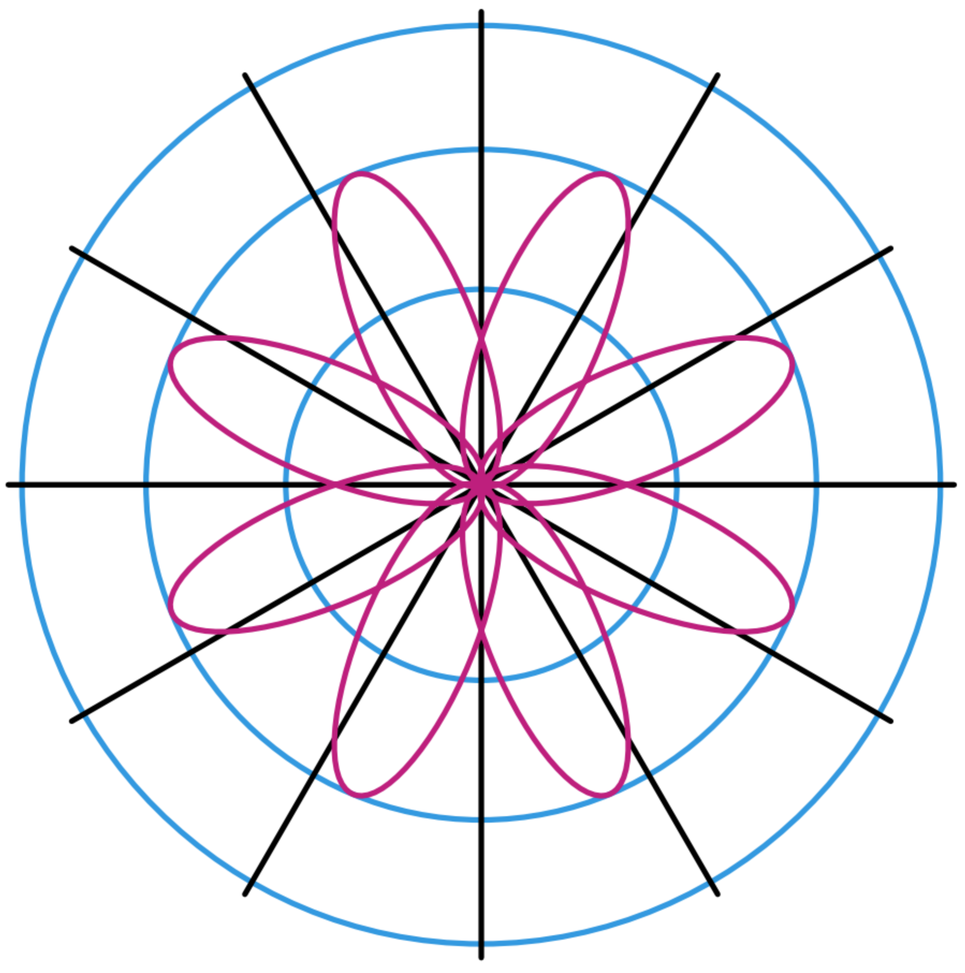
Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «комп'ютерні дизайнери». Кожен учень / учениця може взяти участь у роботі однієї або двох проєктних груп. Учні / учениці формуються у групи і працюють індивідуально чи в парах над однією із запропонованих тем.

1. «Історики» досліджують, які криві були предметом вивчення математиків у різні часи, розглядають особливості використання цих кривих, з'ясовують походження їх назв, ознайомлюються з життєвим шляхом математиків, які досліджували ці криві. Учням / ученицям можна запропонувати розглянути історію дослідження вже відомих їм кривих (параболи, гіперболи, еліпса, кола) або тих, що вивчатимуть в старшій школі (синусоїди, тангенсоїди). Крім цього, це, наприклад, можуть бути такі криві:



- спіраль Архімеда;
- ланцюгова лінія;
- локон Аньєзі;
- циклоїда;
- Декартів лист.

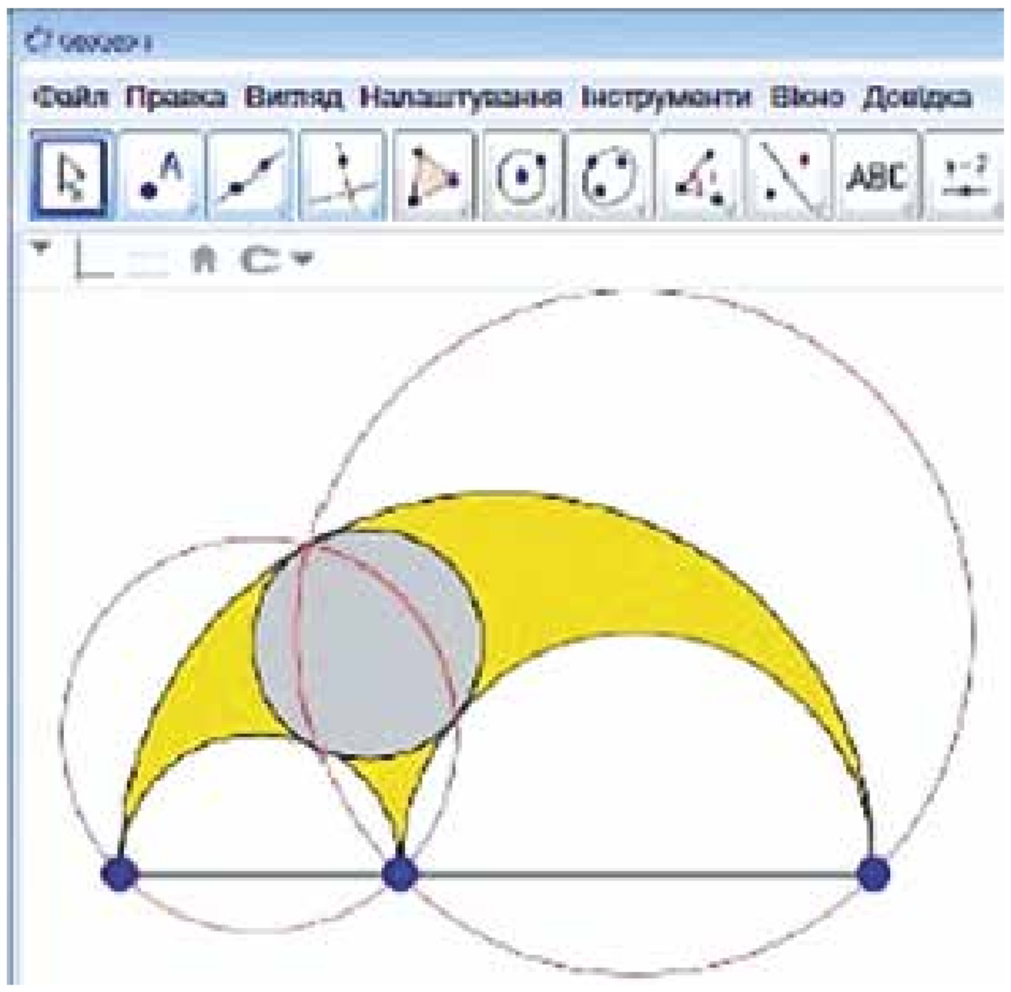
2. «Математики» вивчають різні системи координат і правила побудови в них. Дізнаються, якими формулами задають відомі їм криві в нових системах координат. З'ясовують переваги і недоліки цих систем координат і способи використання. Конструюють свою криву та подають її аналітично і графічно у кількох системах координат. Учням / ученицям можна запропонувати ознайомитися детальніше з однією із таких систем координат:



- прямокутна система координат на площині;
- прямокутна система координат у просторі;

- полярна система координат;
- сферична система координат.

3. «Комп'ютерні дизайнери» вивчають один із доступних програмних засобів (*Excel*, *GeoGebra*, *Gran* та інші) для зручної побудови кривих. За допомогою обраного програмного засобу будують криві, які важко побудувати традиційним способом.



Теми для проєктної діяльності повідомляються учням / ученицям наприкінці вересня.

Результати роботи над проєктом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

Захист проєктів доцільно провести на позакласному заході, запросивши учнів / учениць інших класів, учителів і батьків.

Навчальний проєкт 2. ВЕКТОРНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Цей проєкт доцільно виконувати індивідуально. Учням / ученицям пропонується опрацювати матеріал параграфа 12 і знайти додаткові відомості щодо застосування векторів.

Векторний метод розв'язування задач пов'язаний з використанням властивостей векторів. Особливістю цього методу є те, що в процесі розв'язування задач не виникає потреби в розгляданні складних геометричних конфігурацій. Іноді за допомогою векторного методу геометричну задачу досить просто звести до алгебраїчної, яку легше розв'язати, ніж вихідну геометричну.

Задачі, які розв'язують за допомогою векторів, поділяються на афінні та метричні. Перші розв'язують із застосуванням лише лінійних операцій: додавання і віднімання векторів та множення вектора на число. Метричні задачі, крім іншого, стосуються знаходження довжини відрізка і міри кута, тому в процесі їх розв'язування використовують крім лінійних операцій скалярний добуток векторів.

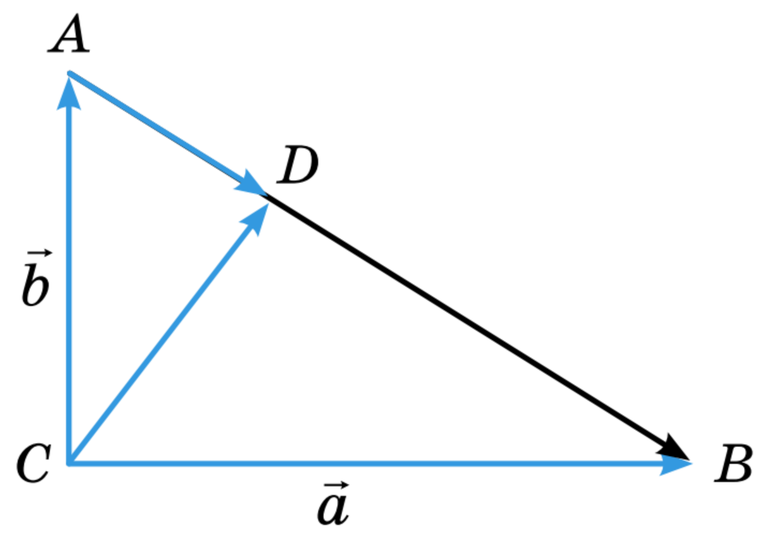
Учням / ученицям слід усвідомити правило-орієнтир розв'язування метричних задач векторним методом. Проілюструємо правило-орієнтир для визначення довжини відрізка векторним методом на конкретній задачі.

Для обчислення довжини відрізка необхідно:

- вибрати на площині два неколінеарних вектори (базисні), довжини яких та кут між якими вважаються відомими;

- вектор, довжина якого дорівнює довжині шуканого відрізка, розкласти за базисними векторами;
- обчислити довжину шуканого відрізка як модуль вектора за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Задача. На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову: $BD : DA = 3 : 1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.



Розв'язання. Нехай базисними будуть вектори CA і CB, $\angle C = 90°$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$. Виразимо $\overrightarrow{CD}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та знайдемо його довжину.

З трикутника CAD $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \overrightarrow{AD}$; $AD \uparrow\uparrow AB$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$;

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{4}, \text{ а } \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{4} = \frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}.$$

Оскільки $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\overrightarrow{CD}^2}$, то $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{9\vec{b} + 6\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2}}{4}$.

За умовою $\vec{a} \perp \vec{b}$, тому $\vec{a}\vec{b} = 0$. Оскільки $\vec{a}^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = b^2$,

то $|\overrightarrow{CD}| = \frac{\sqrt{9b^2 + a^2}}{4}$. Отже, $CD = \frac{\sqrt{9b^2 + a^2}}{4}$.

Векторним методом доцільно розв'язувати такі геометричні задачі:

- задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;
- задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок у деякому відношенні;
- задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;
- задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;
- задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;
- задачі на знаходження величини кута.

Навчальний проєкт 3. ЗНАЙОМА І НЕЗНАЙОМА ТРИГОНОМЕТРІЯ

Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «практики». Кожен учень / учениця може взяти участь у роботі однієї або двох проєктних груп. Учні / учениці формуються у групи і працюють індивідуально чи в парах над однією із запропонованих тем.

1. «Історики» досліджують виникнення тригонометрії та її розвиток в окремі періоди:

- зародження тригонометрії у Стародавній Греції;
- розвиток вчення про тригонометричні величини в країнах Сходу;
- розвиток тригонометрії в Європі.



Птолемей



Абуль-Вафа



Регіомонтан

Результати роботи над проєктом учні / учениці з групи «Історики» оформляють у вигляді стіннівок і групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

2. «Математики» опановують додатковий теоретичний матеріал, що стосується геометрії. Це, наприклад, можуть бути такі питання:

- періодичні процеси і тригонометричні функції;
- графіки тригонометричних функцій;
- теореми додавання та формули кратних кутів.

Результати роботи над проєктом учні / учениці з групи «Математики» оформляють у вигляді індивідуального портфоліо.

3. «Практики» досліджують, де і як використовують відомості з тригонометрії.

Тригонометрія виникла як засіб для вимірювання відстаней і розмірів тіл. Тому найчастіше використовували її в астрономії, географії і мореплавстві. Спершу користувалися примітивними вимірювальними інструментами: відстані міряли мотузками, кути — астролябіями, екерами, екліметрами. Згодом інструментарій удосконалювали і теорію збагачували, ввели поняття тригонометричних функцій.

Пізніше виявили, що тригонометричні функції чудово описують гармонічні коливання та різні періодичні процеси, тому особливо часто стали використовувати їх у фізиці — особливо там, де відбувається перехід кругових рухів у лінійні, і навпаки (різні види кривошипів). Тепер тригонометрію використовують в астрономії, геодезії, маркшейдерії, фізиці, кристалографії, хімії та інших науках, у яких розглядаються лінійні розміри і кути, а також у науках, які вивчають періодичні процеси.

Результати роботи над проєктом учні / учениці з групи «Практики» оформляють у вигляді презентації.

Навчальний проєкт 4. ЗАМОЩЕННЯ ПЛОЩИНИ

Тема про замощення площини широка й багатогранна. Вона містить багато простих задач, доступних молодшим учням, і досить важких, які не всі студенти можуть розв'язати.

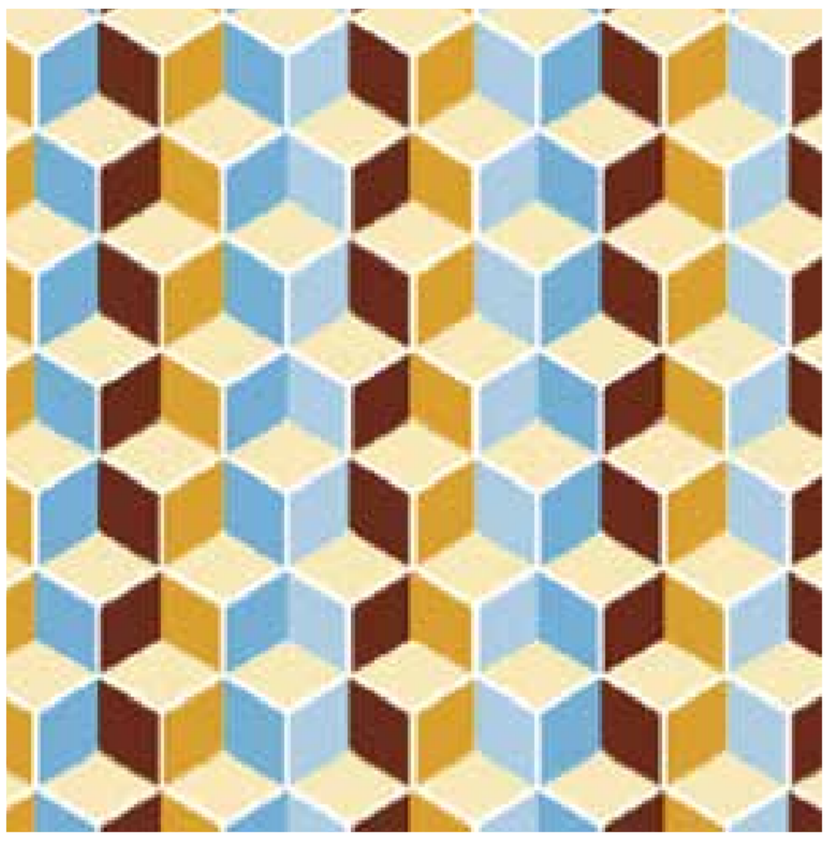
Учням 9 класу можна запропонувати такі теми:

1. Паркети і смуги.
2. Замощення площини правильними многокутниками.
3. Замощення площини напівправильними многокутниками.
4. Замощення площини рівними шестикутниками.
5. Замощення площини рівними п'ятикутниками.
6. Паркети з поліміно.
7. Сюжетні мозаїки.
8. Замощення площини кольоровими многокутниками. Наведемо кілька прикладів сюжетних мозаїк.





Замощення площини кольоровими многокутниками імітує об'ємне зображення або зображення рельєфної поверхні.



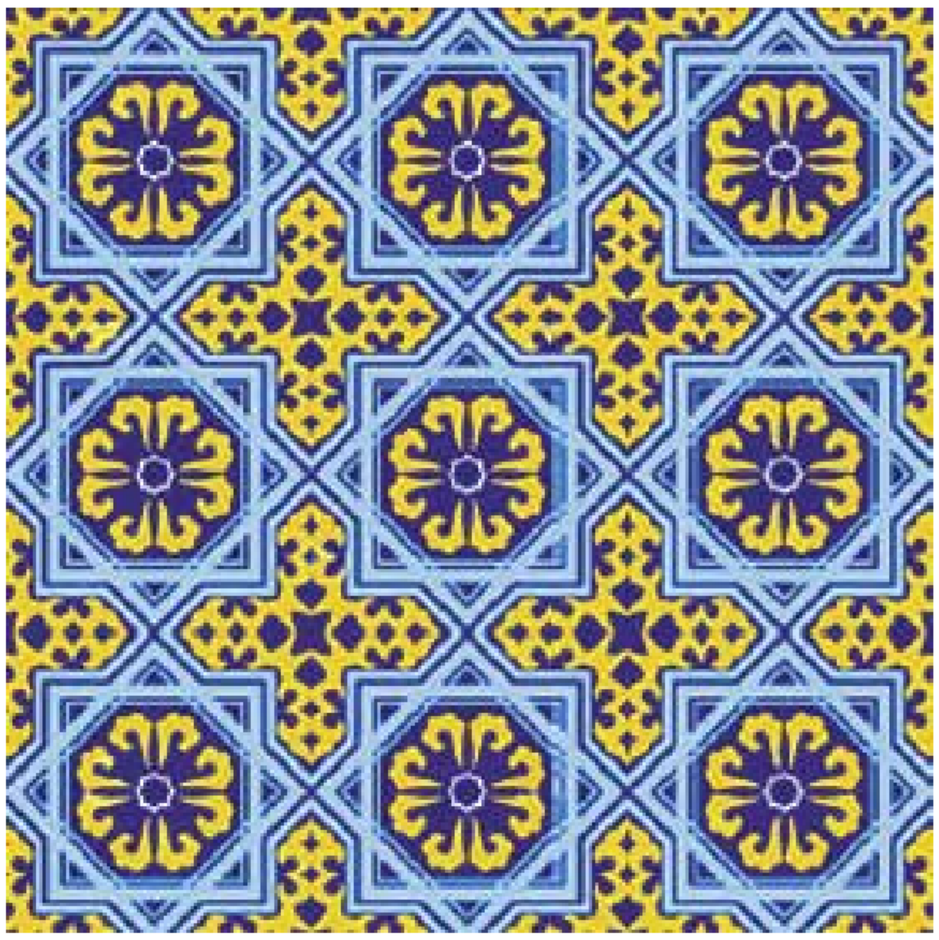


Добре, якщо в процесі роботи над проєктом учні зможуть створити власні цікаві паркети чи сюжетні мозаїки. У цьому випадку доцільно провести конкурс творчих робіт.

Навчальний проєкт 5. ОРНАМЕНТИ І ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Учні / учениці класу формуються в малі групи по 2–3 особи. За бажанням учнів можна здійснювати індивідуальну проєктну діяльність. Кожна група обирає для проєктної діяльності одну із запропонованих нижче тем.

- Що таке орнамент. Коли і де з'явилися перші орнаменти.
- Види орнаментів.
- Характерні риси орнаментів у різних народів.



Орнамент Туркменистану



Орнамент Норвегії

- Орнаменти трипільської культури.
- Орнаменти і вишивки мого краю.
- Види геометричних перетворень на українських вишивках.
- Види геометричних перетворень в орнаментах на різьбленні по дереву.
- Технологія створення орнаментів.
- Створення орнаментів на основі паралельного перенесення.
- Створення орнаментів на основі центральної симетрії.
- Створення орнаментів на основі осьової симетрії.
- Створення орнаментів на основі повороту.
- Створення орнаментів на основі подібності.
- Створення орнаментів на основі композицій геометричних перетворень.
- Улюблені орнаменти моєї родини.
- Комп'ютерне створення орнаментів.

Завдання для проєктної діяльності бажано повідомити учням / ученицям перед вивченням теми «Геометричні перетворення». У процесі вивчення конкретного геометричного перетворення на уроці чи в позаурочний час учні / учениці зможуть показувати результати своєї проєктної діяльності. Після вивчення теми доцільно провести виставку-конференцію.

Предметний покажчик

Бічна поверхня
— конуса 248
— циліндра 248
Бічне ребро
— призми 238
— піраміди 240

Вектор 57
— одиничний 58
— нульовий 58, 65
Вектори
— колінеарні 58, 80
— координатні 80
— співнапрямлені 58
— протилежні 58
— рівні 58
Векторний метод розв'язування задач 94
Вершина
— конуса 248
— піраміди 240
Висота
— конуса 248
— піраміди 240
— циліндра 248
Вісь
— абсцис 21
— конуса 248
— ординат 21

Геометричне перетворення 184
Гомотетія 221

Діагональ призми 239
Діаметр
— круга 170
— кулі 249
Добуток
— векторний 88
— косий 88
— мішаний 88
Довжина
— вектора 57
— кола 162
Додавання векторів
— за правилом многокутника 73
— за правилом трикутника 71
— за правилом паралелограма 72
— колінеарних 72

Загальне рівняння прямої 43

Інверсія 221

Квадратура фігури 172
Кільце 171
Коефіцієнт
— кутовий 43
— подібності 219
Координати вектора 65
Координатна
— площина 21
— пряма 21
Косинус кута 7
Котангенс кута 9
Круг 170
Куля 249
Кут між двома ненульовими векторами 86
Кут повороту 205

Лінзи 172

Многогранник 238
— правильний 241
Многокутник, вписаний в круг 170
Множення вектора на число 79
Модуль вектора 65

Напрямлений відрізок 57

Одиничне коло 7

Основа
— конуса 248
— циліндра 248
Осьовий переріз циліндра 248

Паралельне перенесення 212
Переміщення 185
Перетворення
— подібності 218
— симетрії відносно прямої 198
Півкруг 171
Піраміда 240
Площа
— бічної поверхні піраміди 240
— бічної поверхні призми 239
— круга 171
— поверхні кулі 249
— поверхні піраміди 240
— повної поверхні призми 239
— сегмента 171
— сектора 171
— трикутника 130
Паралельні площини 233
Поворот 205
Початок координат 21
Правильні многокутники 145
Призма 238
— пряма 238
Прямі мимобіжні 233
Прямокутна система
координат 21

Радіус
— конуса 248
— кулі 249
— циліндра 248
Рівняння
— прямої з кутовим
коефіцієнтом 43
— фігури 35
Розв'язування трикутників 122
Різниця векторів 72

Серпики 172
Симетрія
— відносно точки 191, 205
— ковзна 213
Синус кута 7
Скалярний добуток векторів 86
Сума векторів 71

Тангенс кута 8
Твірна
— конуса 248
— циліндра 248
Теорема
— властивостей діагоналей
паралелограма 107
— косинусів 106
— синусів 115
Тіла обертання 248
Точки, симетричні відносно
прямої 198
Тригонометрична
— тотожність 15
— функція 8

Фігури
— неплоскі 232
— рівні 186
— подібні 219
— центрально-симетричні 192
— симетричні відносно
прямої 199
Формула
— довжини кола 163
— Герона 130

Хорда 170

Центр
— круга 170
— повороту 205
— правильного многокутника 146
— симетрії 192
Центральна симетрія 192
Центральний кут
многокутника 146
Циліндр 248

Відповіді

23. Г, Б, А, Д. **30.** 150°, 15°, 15°. **31.** 30°, 30°, 120° або 30°, 30°, 75° або 150°, 15°, 15°. **32.** $a, a\sqrt{2}$. **63.** В, А, Д, Г. **72.** а) 1; б) 0; в) –1. **79.** а) 1; б) –1; в) –1. **81.** Г, А, Б, Д. **82.** б) 1. **107.** $B(3; -10)$. **109.** $M(1; 3)$, $D(3; 9)$. **111.** $B(6; -6)$, $A(-14; 10)$. **113.** Д, В, Б. **114.** а) $a = -11$; $b = 6$. **115.** $M(-1; 1{,}5)$. **116.** $C(-10; 8)$. **119.** $D(-3; 7)$. **121.** $M(6; 0)$, $N(5; 2)$. **122.** (1; 3). **123.** $C(-7; 2)$. **125.** (4; 3), (–2; 1), (2; 7). **144.** 7,5. **147.** 5, 5, $\sqrt{10}$. **149.** Д, В, Б. **152.** $B(5; 3)$, $\alpha \approx 18°$. **154.** $a = -3$ або $a = 1$. **157.** а) (1; 0); б) (0; –3); в) (2; 6). **163.** 1 : 3. **165.** Так. **166.** $\sqrt{10}$. **167.** 26. **169.** $B(1; 4\sqrt{3} + 1)$ або $B(1; 1 - 4\sqrt{3})$. **180.** Г, Д, В, А. **187.** а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **196.** $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ або $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$. **197.** $(x - 1{,}5)^2 + (y + 2)^2$.

200. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$, $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. **202.** $x^2 + (y - 1)^2 = 16$. **203.** $(x - 5)^2 + y^2 = 4$ або $(x - 1{,}25)^2 + y^2 = 18{,}0625$. **208.** а) $(0; 2), R = 3$; б) $(5; -1), R = 2\sqrt{5}$. **210.** 10. **212.** Дотикаються. **217.** а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. **218.** а) $a = 2$ або $a = -6$; б) $a = 4$ або $a = -8$. **220.** а) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 40$; б) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$. **243.** а) $y = -3x$; б) $y = 0{,}5x$. **245.** а) $4x + 5y = 20$; б) $y = 6x - 23$. **247.** $y = 0{,}5x$, так. **253.** а) $y = x - 8$; б) $y = -0{,}5x + 5$. **255.** а) $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$; б) $y = -x + 5$. **257.** а) $y = -3x + 7$; б) $2x - 3y - 12 = 0$. **258.** $a = -2$, так. **259.** $b = 1$, ні. **263.** 6 кв. од. **267.** $y = -3x - 1$. **268.** $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$, $y = 0$ або $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$, $y = 0$. **270.** $y = \sqrt{3}x + 5$, $y = -\sqrt{3}x + 5$, $y = \sqrt{3}x - 5$, $y = -\sqrt{3}x - 5$. **271.** (1; 6), (–3; –2), (6; 1). **273.** В, Г, А, Б. **276.** $a = 1$, $b = -2$.

303. А, Г, В, Д. **340.** Так. **341.** Ні. **346.** а) $M(-10; 9)$; б) $M(-11; -4)$. **347.** $D(9; -1)$. **348.** $X(2; -1)$. **350.** а) $x = 13$ або $x = -11$; б) $x = 3$ або

$x = -2$. **352.** а) $a = 0$ або $a = 2$; б) $a = -1$. **378.** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}; \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. **379.** $\overrightarrow{CD} = -\vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b}$. **389.** а) $x = -7$, $y = 1$; б) $x = 2$, $y = -8$.

402. а) $\vec{d} = (5; -3)$; г) $\vec{d} = (1{,}5; 2{,}5)$. **403.** а) $C(2; 3)$; б) $C(-1; 5)$. **404.** а), в) коло радіуса 10 з центром $A(-4; -2)$; б) коло радіуса 10 з центром $B(2; 6)$. **426.** в) $5\sqrt{2}$; г) $5\sqrt{5}$. **428.** $k = 1$, $\vec{a} = (5; -12)$ або $k = -1$, $\vec{a} = (-5; 12)$. **431.** а) $m = 8$; б) $m = 6$ або $m = -6$. **436.** $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CM} = -0{,}5\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 0{,}5(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MD} = 0{,}5\vec{b} - \vec{a}$. **439.** а) $B(4; -8)$; б) $B(-1; 2)$. **441.** $\vec{b} = (3; -4)$. **443.** $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 1{,}5\vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$, $\overrightarrow{BO} = 1{,}5(-\vec{a} + 0{,}5\vec{b})$, $\overrightarrow{AM} = 3\vec{a} + 0{,}75\vec{b}$. **446.** В, Д, Г, А. **471.** а), в) 72; б) −72. **476.** а) 16; б) 48. **478.** а) 45°; б) 135°; в) 45°; г) 30°. **482.** а) $x = -3$; б) $x = 1$. **486.** 135°. **488.** а) $D(-2; 0)$. **489.** $l = -5$. **491.** а) 2; б) 5, −2. **496.** а) 2; б) −14; в) 18. **498.** б) $\sqrt{61}$. **499.** 135°.

500. 45°. **501.** 22. **515.** 1 : 2. **517.** $(-2; 5)$. **518.** $x - 2y + 5 = 0{,}8x - 5y + 1 = 0{,}4x + 3y - 19 = 0$. **519.** $5x + 2y - 13 = 0$. **528.** $(-2; -2)$. **529.** $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$. **554.** а) 60°; б) 120°. **556.** ≈16°. **558.** 60°. **559.** 120°. **561.** 4 см і $4\sqrt{13}$ см. **566.** 6 см і 7 см. **569.** 12 см. **570.** 14 см, 120°. **571.** 10 см. **572.** 24 см. **573.** 90 см. **574.** 20 см і 12 см. **576.** Б, Г, В, Д. **578.** $\sqrt{71}$ см. **579.** $2\sqrt{57}$ см, 26 см. **580.** 11 см і 23 см. **582.** $4\sqrt{3}$ см і $4\sqrt{7}$ см. **583.** 3 см або $\sqrt{73}$ см. **586.** 60°. **587.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **589.** $\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

606. а) $10\sqrt{2}$ см; б) $5\sqrt{6}$ см; в) $18\sqrt{2}$ см. **608.** а) 60°; б) 30°. **609.** $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}; \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **610.** $\frac{m\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}; \frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$. **613.** $5\sqrt{2}$ см. **614.** 12 см. **616.** 60° і 90° або 120° і 30°. **617.** Ні. **619.** 7,5 см. **621.** $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см. **624.** $2R\sin\alpha\sin\beta$. **625.** 45°, 60°, 75° або 120°, 45°, 15°. **627.** $\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, **628.** $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{d\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **631.** $\frac{(a-b)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{(a-b)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

655. 3,2 см. **657.** ≈61,3 м, 80 м, ≈67,6 м. **658.** ≈3,7 м, ≈7,6 м. **661.** Г, В, Б, А. **662.** 65°. **664.** а) ≈13 м; б) ≈32 м. **665.** ≈12 см; ≈13 см; ≈6 см. **667.** ≈7,6 см, ≈13,4 см. **668.** ≈29 м, ≈40 м. **669.** ≈7 см, ≈8,5 см. **670.** ≈7,1 см, ≈11,6 см, ≈13,4 см. **671.** ≈10,2 см, ≈18,9 см, ≈19 см. **672.** ≈21,5 м. **674.** ≈16,8 км/год. **692.** 10 м, 10 м, $10\sqrt{3}$ м. **693.** 8 м і 11 м. **694.** 56 см. **695.** $9\sqrt{3}$ см і $8\sqrt{3}$ см. **698.** 30°.

700. 3 см, 6,25 см. **701.** 60 см^2, 2 см, 18,125 см. **703.** 8,8 см. **704.** 204 см^2. **707.** $45\sqrt{3}$ см^2. **708.** $32\sqrt{2}$ см^2. **710.** 22 см^2. **711.** 16 см^2 і 24 см^2. **712.** $ad\sin\alpha$. **714.** 25 см^2. **715.** 10 см^2 і 12 см^2. **716.** *** **717.** 468 см^2. **719.** 156 см^2. **722.** 6 см^2, 25 см^2, 29 см^2. **723.** 2,5 см. **724.** 15 см, 15 см, 7 см. **726.** 21 см^2 і 63 см^2. **727.** $\dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **728.** $\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **754.** а) 20; б) 54; в) 104. **756.** а) 6; б) 9; в) 12. **758.** а) 24; б) 9; в) 5. **761.** Г, Б, А, Д. **762.** $\dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$. **764.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **767.** $a\sqrt{3}$, $2a$, $a\sqrt{3}$. **768.** $\dfrac{l\sqrt{3}}{3}$. **770.** $24(2+\sqrt{3})$. **772.** $\dfrac{m}{3}$. **773.** $a(\sqrt{2}-1)$. **775.** 1 : 2. **776.** 72°.

804. $x=4\sqrt{2}$, $y=8\sqrt{3}$. **807.** а) 12 см, $6\sqrt{2}$ см; б) $6\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см. **808.** $\dfrac{R\sqrt{6}}{2}$. **809.** $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **810.** 1 : 2. **812.** $\dfrac{l(3+\sqrt{3})}{6}$. **813.** $\dfrac{l(3-\sqrt{3})}{6}$. **814.** $10\sqrt{6}$ см. **815.** $108\sqrt{3}$ см^2. **816.** Д, Г, А, Б. **837.** $4\sqrt{2}\pi$ і 4π. **838.** 65π. **840.** а) $4\sqrt{3}\pi$ см; б) $8\sqrt{3}\pi$ см. **847.** $4,7\pi$ см. **849.** 6π см і 30π см. **850.** В, Б, А, Д. **855.** 398. **858.** 2 : 1. **859.** а) $4\pi+20$; б) 8π см. **862.** $2\pi a$. **865.** 120°. **867.** $1,5\sqrt{6}\pi$ см, $4,5\sqrt{6}\pi$ см, $12\sqrt{6}\pi$ см. **868.** 3π см, 4π см, 5π см. **869.** 5π см, 15π см. **870.** 8π см і 16π см. **871.** π см, 3π см, 8π см або 5π см, 3π см, 4π см. **896.** а) 4π см; б) 25π см.

900. а), б) 9 см і 12 см. **906.** а) $3(2\pi-3\sqrt{3})$ см^2; б) $3(4\pi-3\sqrt{3})$ см^2. **908.** 21,5 %. **911.** $\dfrac{27(4\pi-3\sqrt{3})}{4}$ см^2, $\dfrac{27(8\pi+3\sqrt{3})}{4}$ см^2. **912.**

$\frac{R^2(4\pi + 3\sqrt{3})}{6}$ см^2. **913.** 25π см^2. **915.** $6,75\pi$ см^2, 9π см^2. **916.** $4\pi(11 - 2\sqrt{10})$ см^2. **917.** 648 см^2. **918.** $\frac{3201}{64}\pi$ см^2. **921.** 3 : 2. **922.** $\frac{\pi R^2}{16}$. **923.** В, А, Г, Б. **942.** 30°, 50°, 100°. **948.** а), в) так; б), г) ні. **956.** 5 см, $5\sqrt{3}$ см, $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ см^2. **957.** $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, 1$. **985.** а) (–3; 4,5); б) (7,5; 4). **995.** $x = 5$, $y = -5$. **996.** $x = 5$, $y = -7$. **997.** б) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 20$. **998.** (–3; 7). **999.** а) $y = -2x - 6$; б) $y = -2x$.

1001. Д, А, Г, Б. **1025.** 2α. **1036.** а) $y = -2x - 3$; б) $y = -2x + 3$. **1037.** $y = -x + 1$. **1038.** $x - 2y + 6 = 0$. **1041.** 2. **1042.** Г, В, Б, Д. **1065.** $2a$, 90°. **1070.** а) 120°; б) 60°; в) 15°. **1072.** $P = 10 + 2\sqrt{5}$, $S = 10$. **1073.** 90°. **1074.** $m = -4, n = 1$. **1077.** а) $a\sqrt{3}$. **1078.** а) $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; б) $a(\sqrt{2} - 1)$, $a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **1079.** $AA_1 = AD_1 = a\sqrt{2}, AB_1 = AC_1 = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1102. $\vec{a} = (-8; 8)$. **1104.** а), в) ні; б) так. **1106.** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. **1107.** а) $y = -2x - 3$; б) $y = -2x + 9$. **1108.** $A_1(4; 3)$, $B_1(8; 7)$, $C_1(10; 5)$, $D_1(6; 1)$. **1109.** $x = -8$, $y = -8$. **1110.** $x = 3$, $x = 4$, $P = 12$. **1133.** Ні. **1135.** 1 : 2. **1139.** 12 см, 20 см, 24 см, 32 см. **1141.** 10 см і 18 см. **1143.** 3 см^2. **1145.** 4 см і 10 см. **1146.** 2 : 9 або 2 : 5. **1147.** 36 см^2. **1148.** 40 см^2.

1208. 152 см^2, 96 см^3. **1209.** 160 см^2, 200 см^3. **1210.** 90 см^2, $45\sqrt{3}$ см^3. **1211.** $16\sqrt{3}$ см^3. **1216.** 180 см^3. **1217.** 112 см^3. **1218.** $80\sqrt{3}$ см^3. **1219.** 144 см^3. **1223.** 480 см^2, 960 см^3. **1225.** 800 см^2, 1920 см^3. **1226.** 54 см^2. **1227.** 144 см^2. **1229.** 200 см^3. **1231.** $3d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **1259.** 255π см^2, 600π см^3. **1260.** $9\sqrt{2}\pi$ см^2, 9π см^3. **1264.** $36\sqrt{3}\pi$ см^2. **1266.** 15π см^2. **1267.** 45π см^3. **1268.** 100π см^3. **1273.** $72\sqrt{3}\pi$ см^3. **1274.** $64\sqrt{2}\pi$ см^2. **1277.** 16π см^2. **1278.** 20π см^2. **1280.** 9 : 16.

ЗМІСТ

Розділ 1. Метод координат на площині 4
§1 Синус, косинус і тангенс кутА від 0° до 180° 6
§2 Тригонометричні тотожності 15
§3 Декартові координати 21
§4 Відстань між точками 29
§5 Рівняння кола 35
§6 Рівняння прямої 42

Розділ 2. Вектори на площині 55
§7 Вектори 57
§8 Координати вектора 65
§9 Додавання і віднімання векторів 71
§10 Множення вектора на число 79
§11 Скалярний добуток векторів 86
§12 Застосування векторів 94

Розділ 3. Розв'язування трикутників 104
§13 Теорема косинусів 106
§14 Теорема синусів 115
§15 Розв'язування трикутників 122
§16 Формули для знаходження площі трикутника 130

Розділ 4. Правильні многокутники 143
§17 Правильні многокутники та їх властивості 145
§18 Правильні многокутники та кола 153
§19 Довжина кола і дуги кола 162
§20 Площа круга та його частин 170

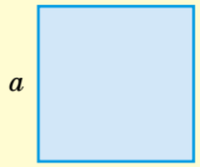
Розділ 5. Геометричні перетворення 182
§21 Переміщення та його властивості 184
§22 Симетрія відносно точки 191
§23 Симетрія відносно прямої 198
§24 Поворот 205
§25 Паралельне перенесення 212
§26 Перетворення подібності 218

Розділ 6. Початкові відомості стереометрії 230
§27 Взаємне розміщення прямих у просторі 232
§28 Многогранники 238
§29 Тіла обертання 247

Додатки 259
Навчальні проєкти 259
Предметний покажчик 265
Відповіді 267

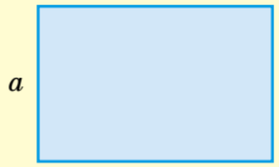
Площі плоских фігур

Квадрат



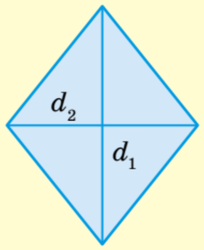
$S = a^2$

Прямокутник



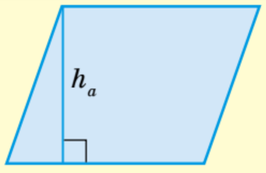
$S = ab$

Ромб

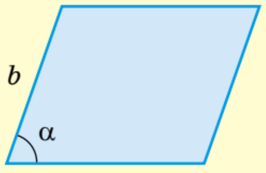


$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

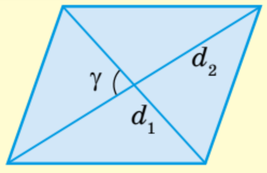
Паралелограм



$S = ah_a$

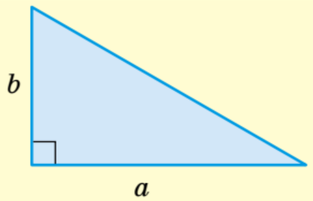


$S = ab \sin \alpha$

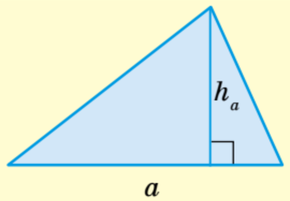


$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$

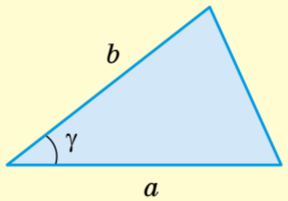
Трикутник



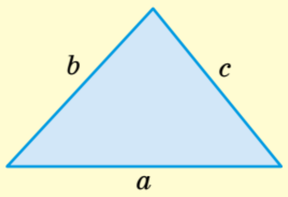
$S = \frac{1}{2} ab$



$S = \frac{1}{2} ah_a$

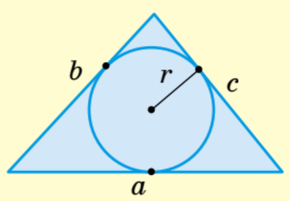


$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$



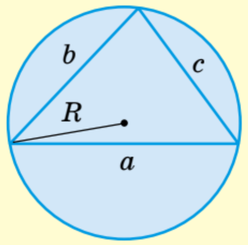
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

$p = \frac{a+b+c}{2}$



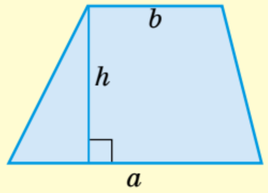
$S = pr$

$p = \frac{a+b+c}{2}$

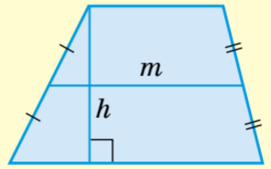


$S = \frac{abc}{4R}$

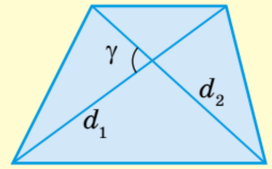
Паралелограм



$S = \frac{1}{2}(a+b)h$



$S = mh$



$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$

Для правильних многокутників

Внутрішній кут	Зовнішній кут	Центральний кут
$\frac{180°(n-2)}{n}$	$\frac{360°}{n}$	$\frac{360°}{n}$

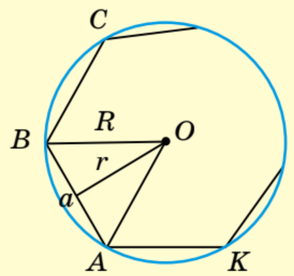
Сторона a_n правильного n-кутника $a_n = 2R_n \sin \frac{180°}{n}$ і $a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$

Радіус описаного кола

$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180°}{n}}$

Радіус вписаного кола

$r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}$



	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
P	$3a$	$4a$	$6a$
S	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a^2	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$