

Оріон

Нова українська школа

9

$$\begin{cases} |2x+4| \leq 6, \\ 3-2x \geq -1 \end{cases}$$

$$b_0 = b_1 \cdot q^3 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{27}{27} = 1$$

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{\frac{1}{9}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{169}}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-5) \leq (x+6)(x-4)+1, \\ -2(1-1,6x) < 8(2x+0,7). \end{cases}$$



$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

АЛГЕБРА

НАВЧАЄМОСЯ РАЗОМ З ПІДРУЧНИКОМ

Одержуємо
додаткові відомості

Перевіряємо
знання теорії

Тренуємо усний
рахунок

Розглядаємо
ситуацію

Дивимосся
презентацію

Вчимося
діяти

Розглядаємо
типову задачу

Вчимо терміни
іншими мовами

Перевіряємо
свої знання

Розв'язуємо
задачі

Відповідаємо
на запитання

Вчимо правило

Розділ 5

§ 18. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Ситуація. Еміолог (дослідник) вивчає частоту випадкової події. У даному місті N осіб, який випадок починати та як спостерігати за ними? Як вибрати серед них? Як вибрати серед них? Як вибрати серед них?

Чи можна за цими даними визначити частоту випадкової події? Так.

У даному дослідженні «учень закриває на застуду» — випадкова подія, яка відбувається чи ні під час навчання. Частота цієї події — це відношення кількості дітей, які захворіли, до загальної кількості дітей, що спостерігалися впродовж місяця:

$$\text{частота} = \frac{30}{1000} = 0,03.$$

Це число отримало в результаті аналізу спостережень лікар. У таких випадках кажуть: «Ймовірність того, що випадково вибраний учень захворіє на застуду, дорівнює 0,03». Частота таких випадкових подій дозволяє оцінити ризик, передбачити спалахи хвороби і розробити заходи профілактики.

Випадкова подія — це випадкова статистична подія, яку широко використовують на практиці.

Запам'ятайте! Частота випадкової події A називається відношенням кількості випадків, які нас цікавлять, до загальної кількості випробувань (спостережень).

Розділ 5

Задача 1

Вчитель 9 класу провів випробування, яке полягало в підкиданні монети.

Номер випробування	Кількість випадань герба	Кількість підкидань монети
1	6	10
2	47	100
3	98	200
Всього	151	310

Чому дорівнює частота випадань герба в кожному випробуванні та в загальному підсумку?

Розв'язання 1-ше випробування: частота $= \frac{6}{10} = 0,6$.
2-ге випробування: частота $= \frac{47}{100} = 0,47$.
3-тє випробування: частота $= \frac{98}{200} = 0,49$.
Усього випробувань: частота $= \frac{151}{310} = 0,49$.

Частота випадкової події тим краще характеризує явище, чим більше випробувань (спостережень) проведено.

Чи можна стверджувати, що ймовірність випадкової події завжди дорівнює частоті цієї події? Ні.

Розділ 3

Щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними, можна використати такі способи: 1) в одному або в обох рівняннях виразити одну змінну через іншу; 2) розв'язати систему рівнянь методом підстановки; 3) відобразити графіки двох рівнянь на одній площині; 4) розв'язати систему рівнянь методом додавання; 5) розв'язати систему рівнянь методом вирахування.

Якщо рівняння мають вигляд $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$, то можна зробити заміну: $x = a - y$, $x^2 + y^2 = b$. Підставивши вираз $x = a - y$ у друге рівняння, отримаємо рівняння $(a - y)^2 + y^2 = b$, яке можна розв'язати відносно y . Після знаходження y знайдемо x за формулою $x = a - y$.

Дізнайтеся. Метод — це спосіб дій, який використовується для досягнення певної мети. Метод — це спосіб дій, який використовується для досягнення певної мети.

Словничок. Метод — це спосіб дій, який використовується для досягнення певної мети. Метод — це спосіб дій, який використовується для досягнення певної мети.

Розділ 3

ЩО ТАКЕ СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ?

Системою двох рівнянь із двома змінними називають систему двох рівнянь, в яких з'являються дві змінні. Наприклад, система двох рівнянь із двома змінними:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Систему двох рівнянь із двома змінними можна розв'язати різними способами. Найпростішим способом розв'язання системи двох рівнянь із двома змінними є метод підстановки.

Розв'яжіть задачі. 1. Розв'яжіть систему двох рівнянь із двома змінними: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$. 2. Розв'яжіть систему двох рівнянь із двома змінними: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Розділ 3

ТЕСТОВІ ЗАДАВАННЯ 1

Уважно прочитайте задачу та виберіть серед запропонованих варіантів правильну. Для кожної задачі потрібно 10-15 сек.

За кожним з 10 рівнянь задачі 1-5.

- Визначте область визначення функції: $y = x^2 - 4$.
A. $x \in (-\infty; +\infty)$.
B. $x \in (-4; 4)$.
C. $x \in (-\infty; 4)$.
D. $x \in (-4; +\infty)$.
- Визначте проміжок зростання функції: $y = x^2 - 4$.
A. $x \in (-\infty; 0)$.
B. $x \in (0; +\infty)$.
C. $x \in (-4; 0)$.
D. $x \in (0; 4)$.
- Яка з наведених у відповіді квадратичних функцій не є парною? $y = x^2 - 4$.
A. $y = x^2 - 4$.
B. $y = x^2 - 4$.
C. $y = x^2 - 4$.
D. $y = x^2 - 4$.
- Розв'яжіть квадратну рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.
A. $x_1 = 1; x_2 = 3$.
B. $x_1 = 2; x_2 = 1$.
C. $x_1 = 3; x_2 = 1$.
D. $x_1 = 1; x_2 = 3$.
- Визначте координати точки перетину графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$ з осью Ox .
A. $(1; 0); (3; 0)$.
B. $(2; 0); (1; 0)$.
C. $(3; 0); (1; 0)$.
D. $(1; 0); (3; 0)$.

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

УДК 512*кл9(075.3)
А45

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 № 110)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авторський колектив програми:
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва)

Авторський колектив підручника:

Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, О. А. Данько,
О. М. Коломієць, І. М. Богатирьова, З. О. Сердюк

**Інтерактивний електронний додаток до підручника розміщено
на освітній платформі FAINO**



Електронний
додаток: реєстрація
<https://faino.school/>



Електронний додаток:
пряме посилання

<https://qr.orioncentr.com.ua/RWDBC>

**Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Данько О. А.,
Коломієць О. М., Богатирьова І. М., Сердюк З. О.**

А45 Алгебра : підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої
освіти / Київ: УОВЦ «Оріон», 2026. 336 с. : іл.

ISBN 978-966-991-505-4.

УДК 512*кл9(075.3)

© Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А.,
Данько О. А., Коломієць О. М.,
Богатирьова І. М., Сердюк З. О., 2026
© УОВЦ «Оріон», 2026

ISBN 978-966-991-505-4

ДОРОГІ УЧНІ Й УЧЕНИЦІ!

Алгебра — один із розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики та як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються в багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У 8 класі ви навчилися перетворювати числові вирази та вирази зі змінними, доводити тотожності, виконувати дії з одночленами та многочленами, дізналися, що таке функція та які властивості має функція $y = x^2$ та деякі інші функції, навчилися будувати графіки цих функцій та досліджувати їх, розв'язувати раціональні рівняння. Тепер ви продовжите розвивати свої вміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити обґрунтовані висновки. Для цього потрібно наполегливо й відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Весь матеріал поділено на 5 розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші формулювання виділено **жирним шрифтом**. На допомогу вам наведено поради з позначкою «Важливо знати». *Курсивом* виділено терміни (назви понять). У рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано цікавий і корисний додатковий матеріал.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, і повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», а матеріал розділу — контрольні запитання і тестові завдання наприкінці розділу.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх потрібно навчитися розв'язувати всім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня

складності. Якщо не зможете відразу їх розв’язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв’язання складної задачі буде вам нагородою. Номери завдань для домашньої роботи виділено рожевим кольором.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (пиктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ



— Увага! Не припустіться помилки



— Важливо знати



— Як записати



Словничок

— Словничок



— Запитуємо



— Відповідаємо



— Інтерактивні вправи



— Вправи з Е-додатка

**Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового
і задоволення від навчання!**

Розділ 1.

ПОВТОРЕННЯ ЗА 8 КЛАС

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

qr.orioncentr.com.ua/5tecz



1. Визначте ОДЗ змінних

виразу і за можливості скоротіть дріб:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x+5}{2x-1}; & 4) \frac{x^3+6x^2+9x}{x^4-81}; \\ 2) \frac{a^3+a}{a^3-a}; & 5) \frac{b^2-7b+12}{b^2+3b-18}; \\ 3) \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}; & 6) \frac{(y-1)(y^2-5y+6)}{y^2-3y+2}. \end{array}$$

2. За яких значень змінної x не має змісту вираз:



$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2x-1}{2x+1}; & 3) \frac{3x-1}{3x^2+12x}; & 5) \frac{x+1}{x^3-1}; \\ 2) \frac{3x}{x-6}; & 4) \frac{4x-1}{x^2-16}; & 6) \frac{5x}{5x^2-125}? \end{array}$$

3. У виразі $\frac{x^2+5}{*-1}$ замініть $*$ таким виразом, щоб ОДЗ

змінної x в одержаному виразі набувала вигляду:

$$\begin{array}{lll} 1) x \neq 2; & 3) x \neq \frac{2}{3}; & 5) x \neq -\frac{2}{3} \text{ і } x \neq 0; \\ 2) x \neq 0; & 4) x \neq 0 \text{ і } x \neq 3; & 6) x \neq 1 \text{ і } x \neq -1. \end{array}$$

4. Зведіть дробі до знаменника $x^4 - y^4$:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{x+y}{x^2-y^2}; & 3) \frac{x-y}{x+y}; & 5) \frac{2y-1}{x^2+2xy+y^2}; \\ 2) \frac{x-y}{x^2-y^2}; & 4) \frac{x+y}{x-y}; & 6) \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}. \end{array}$$

5. Зведіть дробі до знаменника $x^3 - y^3$:



$$1) \frac{2x-3y}{x-y}; \quad 2) \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}; \quad 3) \frac{x+4y}{x^2-y^2}; \quad 4) \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

6. Скоротіть дріб:



$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3x^2-12}{6x-12}; & 3) \frac{c^6-c^4}{c^6+c^4}; \\ 2) \frac{x^3+27}{5x^2+15x}; & 4) \frac{a^3-16a}{4a^2+a^3}; \end{array}$$



qr.orioncentr.com.ua/fEvBu

5) $\frac{b^2 - 2b - 3}{3b + 3};$

6) $\frac{10y + 2y^2}{10 - 13y - 3y^2}.$

7. Скоротіть дріб:



1) $\frac{6x + 18y}{24xy};$ 2) $\frac{x^2 - 2x + 1}{7x - 7};$ 3) $\frac{x^2 + 4x - 5}{(x - 1)^2};$ 4) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^3 + 1}.$

8. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2 - 80}{a - 9} - \frac{1}{a - 9};$

4) $\frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x^2 - 1};$

2) $\frac{b^2 + 64}{2b - 16} + \frac{16b}{16 - 2b};$

5) $\frac{c^2 + d}{c} - c;$

3) $\frac{x - 1}{5x} + \frac{5x + 1}{x^2};$

6) $2b + 1 - \frac{8b^2}{4b - 5}.$

9. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{3}{5x^2 + 9x - 2} - \frac{x + 2}{20x - 4} \right) \cdot \frac{20x - 4}{8 - 4x - x^2};$

2) $\left(\frac{y}{x} - 2 + \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{y^2}{y^2 - x^2};$

3) $\frac{x^2 y^2 - 4y^2}{4xy} \cdot \frac{x^2 y}{2xy - x^2 y};$

4) $(x^2 - y^2) : \frac{(x + y)^2}{4x^2};$

5) $\left(\frac{y}{y - 3} - 7y \right) : \frac{7y - 22}{y - 3};$

6) $\left(\frac{2x}{1 - 3y} + \frac{2x}{1 + 3y} \right) : \frac{4x}{9y^2 + 1 - 6y}.$

10. Спростіть вираз:



1) $\left(\frac{36}{a^3 - 36a} + \frac{1}{a + 6} \right) : \left(\frac{a - 6}{a^2 + 6a} - \frac{a}{36 + 6a} \right);$

2) $\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} \right) : \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right).$

11. Врахувавши, що $\frac{2a - b}{b} = 11$, знайдіть значення дробів:

1) $\frac{a}{b};$

2) $\frac{a + 2b}{b};$

3) $\frac{3a - 4b}{a}.$

12. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2 - 3x}{4x - 12};$$

$$3) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2};$$

$$2) y = \frac{x^2 + 5x}{5x};$$

$$4) y = \frac{x^2 + 5x - 6}{2x + 12}.$$

13. Не будуючи графіки функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, знайдіть точки їх перетину:

$$1) f_1(x) = \frac{3}{x} \text{ і } f_2(x) = \frac{12}{x-3} + 1;$$

$$2) f_1(x) = \frac{9}{x-2} \text{ і } f_2(x) = \frac{5}{x} + 2;$$

$$3) f_1(x) = \frac{3}{x-5} \text{ і } f_2(x) = 2 - \frac{8}{x};$$

$$4) f_1(x) = \frac{6}{x-2} \text{ і } f_2(x) = 3 - \frac{5}{x}.$$

14. За яких значень a і b графіки функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ перетинаються:

$$1) y_1(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, y_2(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2};$$

$$2) y_1(x) = \frac{1}{x^3 + 1}, y_2(x) = \frac{a}{3x+3} + \frac{bx+2}{3(x^2 - x + 1)};$$

$$3) y_1(x) = \frac{2x-1}{(x^2+1)(x+2)}, y_2(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx}{x^2+1}?$$

СТЕПЕНІ

qr.orioncentr.com.ua/FCFbB

15. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

$$1) \frac{1}{x}; \quad 2) \frac{1}{x^{10}}; \quad 3) \left(\frac{x}{y}\right)^2; \quad 4) \frac{25}{x^2}.$$



16. Запишіть як степінь:

$$1) x^{-15} \cdot x^{10}; \quad 3) x^{-4} \cdot x^2 : x^{-2}; \quad 5) (x^3)^{-5} \cdot (x^3)^4;$$

$$2) x^{12} : x^{-4}; \quad 4) (x^{-8})^4 : x^{-1}; \quad 6) (x^{-15} \cdot x^3) : (x^{-10} \cdot x^3)^2.$$

17. Запишіть як степінь:

$$1) 2^{-5} \cdot 3^{-5}; \quad 3) x^{-2} \cdot y^{-2} : a^{-2}; \quad 5) (1+a)^{-5} \cdot (1-a)^{-5};$$

$$2) 14^{-4} : 7^{-4}; \quad 4) 30^4 : 15^{-4}; \quad 6) \frac{x^{-3} \cdot (x+2)^0}{4^0 \cdot y^{-3}}.$$

18. Піднесіть до степеня:

$$1) (3x^{-1}y)^{-3}; \quad 2) (x^{-2}y^6)^{-6}; \quad 3) \left(-\frac{xm^{-3}}{7n^{-1}}\right)^{-2}; \quad 4) \left(-\frac{12y^{-8}}{x}\right)^{-1}.$$

19. Обчисліть:



$$1) 3^{-3}; \quad 5) (0,5^{-3})^0 + 2^{-2};$$

$$2) (-0,1)^{-2}; \quad 6) 10 \cdot 2^{-1} \cdot 4^2;$$

$$3) \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}; \quad 7) \frac{20^4 \cdot 2^{-3}}{10^{-3} \cdot 10^0};$$

$$4) 4 - 3^{-2}; \quad 8) \frac{0,25^6 \cdot 3^{-8}}{12^{-7}}.$$



qr.orioncentr.com.ua/ZMuac

20. Запишіть у стандартному вигляді число:

$$1) 651; \quad 3) 20,5 \cdot 10^3;$$

$$2) 0,099; \quad 4) 0,2 \cdot 10^{-6}.$$

21. Енергетична цінність 1 г білка становить 4 ккал. Скільки калорій містить 100 г білка? Відповідь подайте числом у стандартному вигляді.

22. Маса одного куба повітря дорівнює 1,29 кг. Скільки грамів повітря в десяти кубах? Відповідь подайте числом у стандартному вигляді.



23. Знайдіть суму і добуток чисел:

$$1) 21,4 \cdot 10^{-3} \text{ і } 27,6 \cdot 10^{-3}; \quad 2) 4,8 \cdot 10^2 \text{ і } 1,2 \cdot 10^1.$$

Результат дії подайте числом у стандартному вигляді.

24. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $A(3; 4)$. Знайдіть абсцису точки B , яка також належить графіку даної оберненої пропорційності, якщо її ордината дорівнює -6 .



25. Побудуйте графіки функцій:

$$1) y = \frac{4}{x}; \quad 2) y = \frac{-6}{x}; \quad 3) y = \frac{8}{x}; \quad 4) y = \frac{-12}{x}.$$

КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

qr.orioncentr.com.ua/sGHS2

26. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

$$1) A(0; 2); \quad 3) C(-4; 16);$$

$$2) B(0; 0); \quad 4) D(4; 8)?$$



27. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:



1) $A(-4; 2);$

3) $C(4; 2);$

2) $B(0; 0);$

4) $D(8; 4)?$

28. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = x^2$ і $y = 4;$

3) $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2;$

2) $y = -\frac{1}{x}$ і $y = x^2;$

4) $y = \sqrt{x}$ і $y = 2.$

Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину.

29. Виберіть серед чисел 8, -5 , (5) , 0, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, π , 4, $\sqrt{6} : 1$) на-



туральні; 2) цілі; 3) раціональні; 4) ірраціональні; 5) дійсні.

30. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\frac{1}{9}} \cdot (-\sqrt{10})^2;$

4) $(-\sqrt{5})^2 + \sqrt{(-5)^2};$

2) $7\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{18}};$

5) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{98} \cdot \sqrt{1,6};$

3) $(\sqrt{0,3})^2 \cdot \sqrt{1\frac{7}{9}};$

6) $\sqrt{2\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{3}.$

31. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:



1) $\frac{1}{\sqrt{6}};$

3) $\frac{20}{\sqrt{20}};$

5) $\frac{a}{\sqrt{ab}};$

7) $\frac{4}{\sqrt{5+1}};$

2) $\frac{15}{\sqrt{3}};$

4) $\frac{1}{\sqrt{a}};$

6) $\frac{1}{2-\sqrt{3}};$

8) $\frac{1}{x-\sqrt{3}}.$

32. Внесіть множник під знак кореня:

1) $5\sqrt{2};$

4) $x^2\sqrt{x};$

2) $0,2\sqrt{2};$

5) $-x\sqrt{y}$, якщо x — від'ємне;

3) $6\sqrt{5x};$

6) $-x\sqrt{x}.$

33. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{0,9};$

4) $\sqrt{288x^4};$

2) $\sqrt{108};$

5) $\sqrt{7,2yx^2}$, якщо x — додатне;

3) $\sqrt{8a^4};$

6) $\sqrt{yx^3}$, якщо x — від'ємне.

34. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(x-2)^2}$, якщо $x > 2$;
- 2) $\sqrt{(2x+10)^2}$, якщо $x > -5$;
- 3) $\sqrt{(x-9)^2}$, якщо $x < 9$;
- 4) $\sqrt{4(x^2+1)^2}$;
- 5) $\sqrt{x^2+6x+9}$, якщо $x > -3$;
- 6) $\sqrt{x^2+8x+16}$, якщо $x < -4$.

35. Спростіть вираз:

- 1) $8\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 10\sqrt{5}$;
- 2) $\sqrt{8} - \sqrt{98} + \sqrt{50}$;
- 3) $5\sqrt{27} - \sqrt{3} + 3\sqrt{75}$;
- 4) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$;



qr.orioncentr.com.ua/GXA3t

- 5) $(4 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} + 1)^2$; 7) $\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;
- 6) $(2 - \sqrt{11})^2 + 2(\sqrt{11} + 1)^2$; 8) $\sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$.

Яке з отриманих значень є: раціональним числом; ірраціональним числом?

36. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 = 16$; 3) $4x^2 = 100$; 5) $(x + 1)^2 = 25$;
- 2) $x^2 = -4$; 4) $x^2 = 3$; 6) $(x - 9)^2 = 0$.

37. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 5$; 2) $\sqrt{x} = 1,1$; 3) $\sqrt{x+1} + 6 = 0$; 4) $\sqrt{x-5} = 0$.

38. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{27}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$;
- 2) $\frac{\sqrt{40} + 2}{\sqrt{10} + 1}$;
- 3) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$;
- 4) $\frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}}$;
- 5) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$;
- 6) $\frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{x - y}$.

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ


qr.orioncentr.com.ua/BYECJ

39. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$;

2) $x^2 + 6x - 7 = 0$;

3) $7x = 24 - 5x^2$;

4) $1 - 5y = 6y^2$.

40. Знайдіть корені рівняння:



1) $x^2 - 8x + 16 = 0$;

3) $15x^2 + 4 = 8x$;

2) $x^2 + 12x + 27 = 0$;

4) $4y^2 = 37y - 9$.

41. Розв'яжіть квадратне рівняння за теоремою Вієта:



1) $x^2 - 16x + 15 = 0$;

2) $x^2 + 11x + 10 = 0$;

3) $x^2 - 2x - 24 = 0$;

4) $x^2 + 2x - 3 = 0$.


qr.orioncentr.com.ua/HSyYR

42. Розкладіть квадратний тричлен на лінійні множники:

1) $x^2 - 6x + 8$;

3) $5x^2 + 3x - 2$;

2) $x^2 - x - 2$;

4) $-6x^2 + 14x - 8$.

43. Розкладіть квадратний тричлен на лінійні множники:



1) $x^2 - 4x + 3$;

3) $7x^2 + 5x - 2$;

2) $x^2 - 2x - 8$;

4) $-9x^2 + 12x - 4$.

44. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-1}{2x^2+3x-5}$;

3) $\frac{x^2-2x+1}{3x^2-4x+1}$;

2) $\frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$;

4) $\frac{x^3+5x^2-24x}{x^3+2x^2-15x}$.

45. Розв'яжіть рівняння:

1) $8x(x-5) + 5 = 3(x^2-10)$;

2) $(y-2)(y+6) = 3y-6$;

3) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$;

4) $(3x-2)^4 - (3x-2)^2 - 12 = 0$.

46. Розв'яжіть рівняння:



1) $4x(x+1) + 5 = 4(2x+1)$;

2) $(x+6)(x-5) + 2 = 4x$;

3) $9x^4 + 26x^2 - 3 = 0$;

4) $(x^2+x+2)(x^2+x-1) = 40$.

47. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1-2x}{3x+4} = \frac{x+7}{1-x}; & 3) \frac{5}{x-3} - \frac{8}{x} = 3; \\ 2) \frac{4}{x-0,5} = x+3; & 4) \frac{x-1}{x+3} + \frac{x+3}{2x-6} = \frac{5}{2}. \end{array}$$

48. Розв'яжіть рівняння:



$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2}{x^2-81} = \frac{9-10x}{81-x^2}; & 3) \frac{12}{x^2-12x} - \frac{1}{x-12} = 1; \\ 2) \frac{8}{x-3} - \frac{10}{x} = 2; & 4) \frac{x-1}{x+3} + \frac{x+3}{2x-6} = \frac{5}{2}. \end{array}$$

49. Запишіть загальний вигляд квадратного рівняння, у якого:

- 1) обидва корені дорівнюють 0;
- 2) один із коренів дорівнює 0;
- 3) два корені рівні за модулем і мають протилежні знаки.

50. Добуток двох чисел дорівнює 64. Знайдіть ці числа, якщо:

- 1) їх сума дорівнює 20;
- 2) їх різниця дорівнює 30.

51. Автомобіль інспекційного контролю якості утримання та ремонту доріг проїхав 40 км від Умані до Тального. Повертаючись назад зі швидкістю, на 10 км/год меншою від початкової, він витратив на шлях на 20 хв більше. Знайдіть початкову швидкість автомобіля.

52. Два контент-менеджери, Анна й Богдан, працюючи разом, можуть повністю наповнити новий розділ веб-сайту контентом за 2 год. За який час міг би виконати це завдання окремо кожний контент-менеджер, якщо Анні на це потрібно на 3 год більше, ніж Богданові?

53. Дві команди інженерів на заводі з виробництва електроніки завершили налагодження нової лінії виробництва мікросхем за 4 год. Якби спочатку половину цієї лінії налагоджувала перша команда, а потім решту — друга команда, то налагодження було б завершено за 9 год. За який час змогла б налагодити всю лінію виробництва мікросхем кожна з команд, працюючи окремо?

54. Агрохолдинг «Зелений Обрій» виділив експериментальну земельну ділянку прямокутної форми для дослідження врожайності нового гібридного сорту пшениці. Довжина цієї ділянки у 5 разів більша за її ширину. Якби дослідницька зона була розширена (ширину ділянки збільшили б на 9 м), то її площа зросла б у 4 рази. Однак поки що керівництво планує обгородити наявну ділянку. Знайдіть довжину огорожі, яку їм потрібно закупити.
55. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за перший катет на 6 см, а другий катет на 3 см більший за перший катет. Знайдіть периметр трикутника.
56. За яких значень параметра b рівняння $x^2 + bx + 9 = 0$:
 1) має два рівні корені;
 2) має один із коренів, що дорівнює числу 0.
57. За яких значень параметра a рівняння $x^2 + 2ax + 1 = 0$ і $x^2 + x + 2a = 0$ мають хоча б один спільний корінь.

ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

qr.orioncentr.com.ua/zXCQ3



58. Софія готує натуральний напій для свого інтернет-магазину. У неї є 250 г фруктового сиропу, який містить 15 % цукру. Вона хоче зробити напій менш солодким, щоб вміст цукру в ньому становив лише 10 %. Скільки грамів чистої води потрібно додати до сиропу, щоб досягти бажаної концентрації?
59. У двох телеграм-чатах навчальної онлайн-платформи на початку місяця було 60 учасників. Упродовж місяця кількість учасників у першому чаті збільшилася на 50 %, а в другому — зменшилася на 25 %. Після змін у двох чатах разом стало 72 учасники. Скільки учасників було на початку в кожному чаті?
60. Є два сплави міді й олова. Відсотковий вміст олова в першому сплаві дорівнює 60 %, а в другому — 20 %. Переплавили 4 кг першого сплаву і 6 кг другого. Визначте відсотковий вміст олова в отриманому сплаві.



61. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого концентрація розчину зменшилась на 10 %. Якою була початкова маса і концентрація розчину?



62. У груповому чаті IT-курсу студенти ділилися враженнями про вебінар, оцінюючи його за 100-бальною шкалою. Середня оцінка шести студентів склала 88 балів. Після того як один зі студентів видалив свій відгук, середня оцінка решти стала дорівнювати 86 балів. Яку оцінку залишив студент, чий відгук було видалено?

63. Марина проаналізувала результати продажу трьох моделей смартфонів за тиждень (табл. 1):



Таблиця 1

Модель	A-17	B-20	C-35
Кількість продажів	50	20	30
Ціна моделі (грн)	8000	12 000	10 000

1. Знайдіть середню вартість одного смартфона.

qr.orioncentr.com.ua/7AaiZ

2. Визначте, яка модель була найпопулярнішою (моду).

3. Скільки відсотків продажів припадає на модель C-35?



64. Розв'яжіть рівняння $x(x^2 - 18x - 63) = 0$. Знайдіть середнє арифметичне розв'язків рівняння.

65. IT-компанія організовує онлайн-хакатон. Кожний учасник повинен:

1) вибрати одну із чотирьох тем (наприклад: штучний інтелект, кібербезпека, екологія, освітні технології);

2) вибрати одну із трьох платформ для подання проєкту (наприклад: GitHub, Notion або Google Drive).

Скількома способами учасник може зробити вибір теми й платформи?

Якщо кожний учасник обиратиме для консультацій одного з двох менторів (наприклад, технічного або дизайнерського), то скількома способами він може зробити повний вибір — теми, платформи й ментора?

66. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 5, 8, якщо всі цифри числа різні й число є:
- 1) кратним числу 10;
 - 2) непарним;
 - 3) більшим ніж 800?
67. Скільки існує:
- 1) трицифрових чисел;
 - 2) трицифрових чисел, усі цифри яких різні;
 - 3) трицифрових чисел, сума цифр яких більша за 25?
68. Класичне доміно складається із 28 ігрових кісточок. Випадковим чином вибрали одну кісточку. Яка ймовірність того, що:
- 1) вона не є дублем;
 - 2) на ній випала п'ятірка;
 - 3) добуток очок на ній менший, ніж 29?
69. (НМТ-2024) В Андрія є 25 кульок: 7 синіх і по 6 зелених, жовтих та червоних. Щоб визначити першочергову справу у вихідний день, хлопець навмання вибирав одну кульку: якщо вибере синю кульку, то буде робити домашнє завдання, а якщо кульку іншого кольору — піде на баскетбол. Визначте ймовірність того, що Андрій піде на баскетбол.
70. У функцію $y = ax + 18$ випадковим чином замість коефіцієнта a підставляють цілі числа від 0 до 5. Яка ймовірність того, що графік отриманої функції:
- 1) не перетинає вісь ординат;
 - 2) не перетинає вісь абсцис;
 - 3) перетинає вісь абсцис у точці $(-9; 0)$?
71. У кожную клітинку таблиці 2×2 випадковим чином ставлять хрестик чи нулик. Знайдіть ймовірність того,



- 1) поставлять лише один нулик;
- 2) поставлять рівно два хрестики;
- 3) у кожній клітинці буде стояти хрестик;
- 4) у лівій верхній клітинці поставлять нулик.





Розділ 2. НЕРІВНОСТІ

У розділі дізнаєтесь:

- про властивості числових нерівностей;
- що таке нерівність зі змінною та як її розв'язувати;
- що таке числовий проміжок;
- як знаходити об'єднання й переріз числових проміжків;
- що таке лінійна нерівність з однією змінною та як її розв'язувати;
- що таке система / сукупність лінійних нерівностей з однією змінною та як її розв'язувати;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці

§ 1. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1. Числові нерівності

Ситуація. Богдан активно користується телефоном: упродовж місяця він використовує приблизно 12 ГБ Інтернету, надсилає орієнтовно 30 SMS, близько 70 хв розмовляє з абонентами з інших мереж, активно користується TikTok та Instagram. Хлопець вирішив оновити тарифний план на телефоні й розглядає пропозиції від двох операторів (табл. 2).



qr.orioncentr.com.ua/hmqjB

Таблиця 2

	Тариф 1	Тариф 2
Абонентська плата	150 грн / місяць	170 грн / місяць
Мобільний інтернет	15 ГБ	20 ГБ
Дзвінки в мережі оператора	без обмежень	без обмежень
Дзвінки на інші мережі	100 хв	80 хв
SMS	50 шт.	без обмежень
Додатково	безлімітний доступ до Viber і WhatsApp	безлімітний доступ до TikTok, Instagram та YouTube



Який тарифний план, на вашу думку, буде вигіднішим для Богдана?

Проаналізуймо.



Обидва тарифи покривають його потребу в мобільному інтернеті ($15 \text{ ГБ} > 12 \text{ ГБ}$ і $20 \text{ ГБ} > 12 \text{ ГБ}$), у наданих хвилинах для дзвінків до абонентів з інших мереж ($100 \text{ хв} > 70 \text{ хв}$ і $80 \text{ хв} > 70 \text{ хв}$), у можливостях надсилати SMS ($50 > 30$). Тому його рішення залежить від його пріоритетів: безлімітний доступ до улюблених соціальних мереж чи краща пропозиція абонентської плати ($150 \text{ грн / місяць} < 170 \text{ грн / місяць}$).

Загалом, у повсякденному житті є безліч ситуацій, де потрібно порівнювати числові значення. Результати таких порівнянь записують за допомогою знаків $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Запам'ятайте!

Запис, у якому два числа, або два числові вирази, або числовий вираз і число сполучено знаком нерівності, називається *числовою нерівністю*.

Наприклад: $\frac{2}{9} < 1$, $2 \cdot 5 + 1 < 3 \cdot 6$, $2 + 3 \cdot 7 > 2\frac{1}{7}$.

Числова нерівність може бути строгою і нестроною (табл. 3).

Таблиця 3

Нерівність	Знак	Як прочитати	Приклад
строга	$<$	менше	$0,001 < 0,01$
	$>$	більше	$0 > -17$
нестрога	$\leq$	менше або дорівнює (не більше)	$100 \leq 100$, $19 \leq 100$
	$\geq$	більше або дорівнює (не менше)	$5^3 \geq 5 \cdot 5^2$, $\sqrt{27} \geq 2\sqrt{3}$

Числова нерівність може бути *правильною* або *неправильною*.

Правильна числова нерівність

$$-2^3 \leq (-2)^3; \quad 5^{-1} > 5^{-2}$$

Неправильна числова нерівність

$$\sqrt{8} \geq 3\sqrt{2}; \quad 2\frac{3}{7} + 1 < \frac{5}{7}$$

Установити правильність / неправильність числової нерівності можна, порівнявши дані числа або значення даних числових виразів.



Щоб порівняти два числа a і b або два числові вирази, треба:

- знайти значення їх різниці;
 - порівняти отримане значення з нулем:
- 1) якщо $a - b > 0$, то $a > b$;
 - 2) якщо $a - b < 0$, то $a < b$;
 - 3) якщо $a - b = 0$, то $a = b$.

Задача 1 Порівняйте числа: $\frac{5}{12}$ і $\frac{4}{11}$.

Розв'язання

Знайдемо різницю
даних чисел:

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{11} = \frac{5 \cdot 11 - 4 \cdot 12}{12 \cdot 11} = \frac{55 - 48}{132} = \frac{7}{132}.$$

Порівняємо отримане
значення з нулем:

$$\frac{7}{132} > 0.$$

Отже,

$$\frac{5}{12} > \frac{4}{11}.$$

Задача 2 Порівняйте значення числових виразів: $3b - 4$ і $3a - 4$, якщо $a > b$.

Розв'язання

Знайдемо різницю
даних виразів:

$$\begin{aligned} (3b - 4) - (3a - 4) &= \\ &= 3b - 4 - 3a + 4 = 3b - 3a = \\ &= 3 \cdot (b - a) = -3 \cdot (a - b). \end{aligned}$$

Врахуємо, що за
умовою задачі $a > b$:

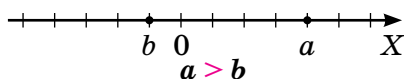
$$a - b > 0, \text{ тому } -3 \cdot (a - b) < 0.$$

Отже,

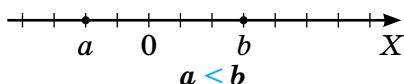
$$3b - 4 < 3a - 4.$$



На координатній прямій більше з двох чисел зображують правіше (мал. 1), а менше — лівіше (мал. 2).



Мал. 1



Мал. 2

2. Властивості числових нерівностей

qr.orioncentr.com.ua/2LQ8Y



Ви знаєте властивості числових рівностей, такі як:

1) $a = a$; 2) якщо $a = b$, то $b = a$, де a і b — довільні дійсні числа.



Чи мають аналогічні властивості числові нерівності?

Так. Деякі їхні властивості — аналогічні (табл. 4).



Будемо вважати, що a , b і c — довільні дійсні числа.

Таблиця 4

Числові рівності	Числові нерівності
$a = a$	$a \leq a$
якщо $a = b$, то $b = a$	якщо $a > b$, то $b < a$
<i>Властивість транзитивності:</i> якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$	<i>Властивість транзитивності:</i> якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$, якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$
якщо $a = b$, то $a + c = b + c$	якщо $a < b$, то $a + c < b + c$, якщо $a > b$, то $a + c > b + c$
якщо $a = b$, і $c \neq 0$, то $ac = bc$	якщо $a < b$ і $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$,
	якщо $a < b$ і $c < 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$



Знак нерівності **не зміниться**, якщо до обох її частин додати одне й те саме число.

Знак нерівності **не зміниться**, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме **додатне** число.

Знак нерівності **зміниться**, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме **від'ємне** число.



Чи можна додавати або множити числові нерівності, так само як і числові рівності?

Так, але є певні особливості (табл. 5).



Таблиця 5

Числові рівності	Числові нерівності
якщо $a = b$ і $c = d$, то $a + c = b + d$	якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$
якщо $a = b$ і $c = d$ ($c \neq 0$), то $a \cdot c = b \cdot d$	якщо $a < b$ і $c < d$ (a, b, c і d — додатні числа), то $a \cdot c < b \cdot d$
якщо $a = b$, то $a^n = b^n$, де n — будь-яке натуральне число	якщо $a < b$ (a, b — додатні числа), то $a^n < b^n$, де n — будь-яке натуральне число



- Можна додавати правильні нерівності одного знака.
- Можна множити правильні нерівності одного знака, членами яких є додатні числа.
- Можна підносити до того самого степеня з натуральним показником обидві частини правильної нерівності, членами якої є додатні числа.
- Деякі з нерівностей виконуються за певних заданих умов, а деякі — для будь-яких чисел.

Задача 3 Доведіть, що нерівність $(a+2)a < (a+1)^2$ є правильною за будь-якого значення a .

Розв'язання

Знайдемо різницю даних виразів:

Порівняємо отримане значення з нулем:

Отже,

$$(a+2)a - (a+1)^2 = a^2 + 2a - a^2 - 2a - 1 = -1.$$

$$-1 < 0 \text{ за будь-якого значення } a.$$

$$(a+2)a < (a+1)^2 \text{ за будь-якого значення } a.$$

Дізнайтеся більше

Томас Херріот (англ. Thomas Harriot) (1560–1621) — англійський астроном, математик, етнограф та перекладач; закінчив Оксфордський університет. Удосконалив алгебраїчну символіку, а також запропонував загальноприйняті нині знаки для відношення порівняння: « $>$ » (більше) та « $<$ » (менше).



Розвиваючи роботи Вієта, він підготував працю «Застосування аналітичного мистецтва до розв'язування алгебраїчних рівнянь», опубліковану посмертно в 1631 році. Херріот значно вдосконалив алгебраїчну символіку, наблизивши її до сучасної.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/kCMYz

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
числова нерівність	numerical inequality	numerische Ungleichung	inégalité numérique

Пригадайте головне

1. Що таке числова нерівність?
2. Наведіть приклади числових нерівностей.
3. У якому випадку число a називають більшим за число b ?
4. У якому випадку число a називають меншим від числа b ?
5. Наведіть приклади правильної / неправильної числової нерівності.
6. Наведіть приклади строгої / нестрокої числової нерівності.
7. Сформулюйте властивості числових нерівностей.

Усне тренування

1. Пригадайте правило множення на 11 й обчисліть:
 $71 \cdot 11$; $-65 \cdot 11$; $46 \cdot (-11)$; $-27 \cdot (-11)$; $93 \cdot 11$.

2. Пригадайте правило множення на 5 $\left(5a = \frac{10a}{2}\right)$ й обчисліть:
 $24 \cdot 5$; $-38 \cdot 5$; $246 \cdot (-5)$; $-210 \cdot (-5)$; $193 \cdot 5$.

Розв'яжіть задачі

72'. Чи є правильною дана числова нерівність:

1) $3 > \frac{20}{7}$; 4) $4 \leq \frac{41}{8}$;

2) $\frac{5}{3} > 2$; 5) $\frac{18}{7} \geq 3$?

3) $\frac{5}{2} \geq 2,5$;

73'. Відомо, що $a < b$ і $b < c$. Яке із чисел більше: a чи c ?

74'. Відомо, що $a > b$ і $b > c$. Яке із чисел більше: a чи c ?

75'. Укажіть правильне твердження:

- 1) знак нерівності зміниться, якщо до обох її частин додати одне й те саме число;
- 2) знак нерівності зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме додатне число;
- 3) знак нерівності зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число;
- 4) знак нерівності не зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме додатне число;
- 5) знак нерівності не зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число.

76'. Укажіть правильне твердження:

- 1) можна додавати правильні нерівності різних знаків;
- 2) можна додавати правильні нерівності одного знака;
- 3) можна множити правильні нерівності одного знака, членами яких є додатні числа;
- 4) можна множити правильні нерівності різних знаків, членами яких є додатні числа;
- 5) можна множити правильні нерівності одного знака, членами яких є додатні й від'ємні числа.

77'. Чи є дана нерівність правильною:

1) $\frac{3}{8} > -1$; 3) $1\frac{6}{7} \leq \frac{13}{7}$; 5) $-\frac{4}{3} < -\frac{4}{5}$;

2) $\frac{4}{3} < \frac{4}{5}$; 4) $-\frac{3}{8} > -\frac{8}{3}$; 6) $1\frac{2}{7} \geq \frac{11}{7}$?

Відповідь поясніть.

78°. Чи є дана нерівність правильною:



1) $\frac{5}{6} > \frac{6}{5}$; 2) $-\frac{5}{6} > -\frac{6}{5}$; 3) $2\frac{2}{3} \leq \frac{8}{3}$?

Відповідь поясніть.

79°. Розмістіть у порядку



збільшення числа:

0; 0,001; 0,01; 0,0001; 0,0011; 1,00001;
0,011; 0,1; 0,11.

qr.orioncentr.com.ua/mi8R4



80°. Розмістіть у порядку зменшення числа:

0,9; 0,099; 0,09; 0,99; 0,009; 0,0099; 1.

81°. Яке із чисел найбільше, а яке — найменше:

2,23; 2,233; 2,223; 2,33; 2,32; 3,22; 3,23; 3,32; 2,323?

82°. Розмістіть у порядку збільшення числа:



1; 1,001; 1,01; 1,0001; 0,1; 1,0011; 1,011; 1,1; 1,11.

83°. Яке із чисел більше — a чи c , якщо:

1) $a - c = 1,2$; 4) $c - a = 1,8$; 7) $c - a = (-1)^3$;
2) $a - c = -2,5$; 5) $c - a = -0,5$; 8) $a - c = (0,5)^2$;
3) $a - c = 0$; 6) $c - a = 0$; 9) $c - a = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$?

84°. Яке із чисел більше — a чи b , якщо:



1) $a - b = 0,99$; 3) $b - a = (-2)^3$;
2) $b - a = 0$; 4) $a - b = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{17}\right)$?

85°. Відомо, що $a < b$. Чи може значення виразу $a - b$ дорівнювати:

1) 4,4; 3) 0; 5) $(-12)^2$;
2) -3; 4) 11^2 ; 6) $(-0,1)^3$?

86°. Відомо, що $x > y$. Чи може значення виразу $x - y$ дорівнювати:

1) 3,1; 2) 0; 3) $(-5)^3$; 4) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$; 5) $-9 \cdot 0,1$; 6) $\sqrt{9}$?

87°. Відомо, що $d > c$. Чи може значення виразу $c - d$ дорівнювати:



1) 1; 2) 0; 3) $(-4)^3$; 4) $4,1 \cdot (-0,1)$; 5) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; 6) $-\frac{3}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$?

88°. Яка з точок — $A(a)$ чи $B(b)$ — на координатній прямій розміщена лівіше, якщо:

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| 1) $a = 3, b = -3$; | 4) $a = 0, b = -3$; |
| 2) $a = -3, b = 3$; | 5) $a = 0,01, b = 0,99$; |
| 3) $a = 3, b = 0$; | 6) $a = -0,1, b = -0,9$? |

89°. Яка з точок — $M(x)$ чи $N(y)$ — на координатній прямій розміщена правіше, якщо:

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| 1) $x = -5, y = 0$; | 4) $x = 5, y = -5$; |
| 2) $x = -5, y = 5$; | 5) $x = 0,5, y = 0,55$; |
| 3) $x = 0, y = 5$; | 6) $x = -0,5, y = -0,55$? |

90°. Яка з точок — $C(x)$ чи $D(y)$ — на координатній прямій розміщена правіше, якщо:



- | | |
|----------------------|----------------------------|
| 1) $x = -9, y = 9$; | 4) $x = 0,9, y = -0,9$; |
| 2) $x = 9, y = 0$; | 5) $x = 0,99, y = 0,9$; |
| 3) $x = 0, y = -9$; | 6) $x = -0,99, y = -0,9$? |

91°. Дано нерівність $\frac{3}{5} < \frac{7}{3}$. Виконайте вказану дію:

- 1) обидві частини нерівності помножте на 2;
- 2) обидві частини нерівності помножте на -3 ;
- 3) до обох частин нерівності додайте 2;
- 4) до обох частин нерівності додайте -3 ;
- 5) обидві частини нерівності піднесіть до квадрата.

92°. Відомо, що $a > b$. Порівняйте вирази:



- | | |
|----------------------|--|
| 1) $3a$ і $3b$; | 4) $\frac{2a}{3}$ і $\frac{2b}{3}$; |
| 2) $-5a$ і $-5b$; | 5) $-\frac{4}{7}b$ і $-\frac{4}{7}a$; |
| 3) $0,1b$ і $0,1a$; | 6) $\sqrt{3}a$ і $\sqrt{3}b$. |

qr.orioncentr.com.ua/xje7i



93°. Відомо, що $m < n$. Порівняйте вирази:

- 1) $m + 2$ і $2 + n$;
- 2) $m - 5$ і $n - 5$;
- 3) $2m + 1$ і $2n + 1$;
- 4) $-5m + 7$ і $7 - 5n$.

94°. Відомо, що $x < y$. Порівняйте вирази:



- 1) $3x - 1$ і $-1 + 3y$;
- 2) $-4y + 5$ і $5 - 4x$.

95. Чи існують числа, за яких нерівність буде правильною? Якщо так, то назвіть три такі числа.

1) $m - 4 > m + 3$; 2) $3m - 1 < 3m + 1$; 3) $3m < 2m$.

96. Порівняйте значення виразів $4m + 1$ і $5m - 1$, якщо:

1) $m = 3$; 3) $3m = 4$; 5) $-2m = 0,4$;
2) $m = 0$; 4) $6m = 7$; 6) $-0,1m = -0,7$.

97. Порівняйте значення виразів:

1) $2m - 1$ і $2m + 3$; 3) $2(0,5 - 2m)$ і $1 - 4m$;
2) $3m - 5$ і $4 + 3m$; 4) $3(0,2m - 1)$ і $2(0,3m - 1,6)$.

98. Порівняйте значення виразів:



1) $1 - 2n$ і $-2n + 0,5$;
2) $3(2m - 1)$ і $2(2 + 3m)$.

99. Доведіть, що за будь-якого значення a нерівність є правильною:

1) $a(a - 2) < (a - 1)^2$; 4) $a(a - 1)(a + 1) > -1 - a(1 - a)^2$;
2) $(a - 1)(a + 2) < a(a + 1)$; 5) $36a - 6a^2 \leq 54$;
3) $(a + 5)(a - 1) < (a + 2)^2$; 6) $24a - 5a^2 \leq 20 + 4a$.

100. Доведіть, що за будь-яких значень m і n нерівність є правильною:

1) $m^2 + 3mn + n^2 \geq mn$; 3) $m^2 + 9n^2 \geq 6mn$;
2) $m^2 - 2mn + 2n^2 \geq 2mn - 2n^2$; 4) $4m^2 + 25n^2 \geq 20mn$.

101. Доведіть, що за будь-яких значень m і n нерівність є правильною:

1) $(1 + m)^2 > (m + 6)(m - 4)$; 2) $30mn \leq 9m^2 + 25n^2$.

102*. Відомо, що $a < b$. Порівняйте вирази:

1) a^2 і ab ;
2) $(a + 1)^3$ і $(b + 1)^3$;
3) $(a + 2)(b - 1)$ і $(a - 2)(b + 1)$.

103*. Доведіть нерівності, не користуючись калькулятором:

1) $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 7$; 3) $\sqrt{38} - \sqrt{15} > 6 - \sqrt{14}$;
2) $\sqrt{20} - \sqrt{6} < \sqrt{21} - \sqrt{5}$; 4) $\sqrt{140} - \sqrt{170} < -1$.

104*. Між якими цілими числами розташоване число:

1) $\frac{1 - \sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{1 - \sqrt{39}}{4}$; 3) $2 + \sqrt{17}$?

105*. Доведіть, що за будь-яких значень a і b нерівність є правильною:

1) $a^2 + b^2 + 9 \geq ab + 3a + 3b$;

2) $a^3 + 8 > (a+2)(a-1)^2$;

3) $2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2a - 2b + 2 \geq 0$;

4) $5a^2 + 5b^2 - 2ab + 4a - 4b + 2 \geq 0$;

5) $8a^2 + 2a^3 \leq a^4 + 16$.

Проявіть компетентність

106. Україна брала участь у семи літніх і семи зимових Паралімпійських іграх. Уперше країна виступала на іграх у 1996 р. й відтоді не пропустила жодної Паралімпіади. За свою історію завоювала загалом 613 медалей (472 на літніх іграх і 141 на зимових іграх). Досягнення України на літніх Паралімпійських іграх подано в таблиці 6.

Таблиця 6

Ігри	Золото	Срібло	Бронза	Загалом	Місце
1996, Атланта	1	4	2		44
2000, Сідней	3	20	14		35
2004, Афіни	24	12	19		6
2008, Пекін	24	18	32		4
2012, Лондон	32	24	28		4
2016, Ріо-де-Жанейро	41	37	39		3
2020, Токіо	24	47	27		6
2024, Париж	22	28	32		7
Загалом					

1. Порахуйте загальну кількість медалей кожного ґатунку та порівняйте, яких медалей Україна здобула найбільше, а яких — найменше. Запишіть ці числа в порядку збільшення; запишіть відповідні числові нерівності.

2. Порахуйте загальну кількість медалей за кожний рік проведення олімпіади та визначте, у якому році Україна здобула найбільше медалей, а в якому — найменше. Запишіть усі числа в порядку зменшення; запишіть відповідні числові нерівності.

3. Порахуйте, на скільки позицій Україна піднялась у командному рахунку в 2016 р. порівняно з 1996 р.; з 2004 р.

4. Знайдіть суму всіх здобутих Україною медалей у 1996 р., 2004 р. і 2012 р., а потім у 2000 р., 2008 р. і 2016 р. Визначте, яка сума більша і на скільки більша.

§ 2. НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННОЮ. РІВНОСИЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

1. Нерівності зі змінною

Ситуація. Для шкільної їдальні потрібно закупити на тиждень 12 кг гречки. Для покупки виділено 400 грн.



qr.orioncentr.com.ua/kvmlv



Як визначити найбільшу ціну гречки, за якою можна придбати необхідну масу крупи?

Поміркуймо.



Нехай x — ціна гречки, тоді $12x$ — вартість гречки, яку необхідно придбати для їдальні на тиждень. За умовою задачі складемо її математичну модель: $12x \leq 400$. Оскільки x — змінна, то отримали *нерівність зі змінною*.

Припущення	Міркування	Висновок
Якщо $x = 30$, то	$12 \cdot 30 = 360$, $360 < 400$	число 30 <i>є розв'язком</i> даної нерівності
Якщо $x = 40$, то	$12 \cdot 40 > 400$, $480 > 400$	число 40 <i>не є розв'язком</i> даної нерівності

Інакше можна сказати: число 30 *задовольняє нерівність* $12x \leq 400$, а число 40 — не задовольняє її.

Запам'ятайте!

Розв'язком нерівності з однією змінною називається таке значення змінної, яке задовольняє дану нерівність.



Чи є число 30 єдиним розв'язком нерівності в ситуації про гречку?

Ні.



Нерівність $12x \leq 400$ задовольняють багато інших чисел. Серед них, наприклад: 0,01; 1; 2; 3; 33; 33,3; 33,33. Ці числа входять до *множини розв'язків цієї нерівності*, але не тільки вони. Множина розв'язків нерівності $12x \leq 400$ містить усі дійсні числа x такі, що $x \leq 33\frac{1}{3}$. Отже, найбільша ціна гречки, за якою можна придбати потрібну масу крупи, не має перевищувати 33 грн 33 к.

Запам'ятайте!

Розв'язати нерівність — означає знайти множину її розв'язків або ж показати, що розв'язків немає.



Чи існують нерівності, що не мають розв'язків?

Так.



Наприклад, нерівність $x^2 < -5$ не має розв'язків, оскільки для будь-якого дійсного числа x маємо $x^2 \geq 0$.

2. Рівносильні перетворення нерівностей

Пригадаємо, під час розв'язування рівнянь застосовують їх рівносильні перетворення, коли від заданого рівняння переходять до рівносильного йому рівняння, але більш простого.



Чи існують аналогічні рівносильні перетворення для нерівностей зі змінною?

Так.



Але ці перетворення мають свої особливості.

Запам'ятайте!

Дві нерівності називаються *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки або обидві не мають розв'язків.

Для прикладу розглянемо нерівності в таблиці 7.

Таблиця 7

Нерівності	Множина розв'язків нерівності	Висновок
$x - 4 > 0$	$x > 4$	Нерівності рівносильні
$x - 3 > 1$	$x > 4$	
$x^2 + 5 < 0$	Розв'язків немає	Нерівності рівносильні
$x^2 < -5$	Розв'язків немає	

Запам'ятайте!

Перетворення нерівності, які дають змогу з даної нерівності одержати рівносильну їй, називають *рівносильними* перетвореннями.

Рівносильні перетворення нерівностей ґрунтуються на властивостях числових нерівностей (табл. 8).

Рівносильне перетворення нерівності	Властивість
Якщо до (від) обох частин нерівності додати (відняти) одне й те саме число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.	якщо $a < b$, то $a \pm c < b \pm c$
Отже, рівносильними є нерівності: $a + b > c$ і $a > c - b$.	
Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.	якщо $a < b$ і $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$
Отже, рівносильними є нерівності: $a > b$ і $a \cdot c > b \cdot c$, де $c > 0$.	
Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний , то одержимо нерівність, рівносильну даній.	якщо $a < b$ і $c < 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$
Отже, рівносильними є нерівності: $a > b$ і $a \cdot c < b \cdot c$, де $c < 0$.	

Задача 1 Чи є рівносильними дані нерівності:

$$1) \frac{3x+4}{5} > 1 \text{ і } x > \frac{1}{3}; \quad 2) x^2 + y^2 < 0 \text{ і } (x+y)^2 \leq 0?$$

Розв'язання

1. Виконаємо рівносильні перетворення нерівності $\frac{3x+4}{5} > 1$.

Помножимо обидві частини нерівності на 5:

$$3x + 4 > 5.$$

Віднімемо від обох частин нерівності число 4:

$$3x > 1.$$

Поділимо обидві частини нерівності на 3:

$$x > \frac{1}{3}.$$

Оскільки ми застосували рівносильні перетворення нерівностей, то дані нерівності є рівносильними.

2. Проаналізуємо дані нерівності та їхні розв'язки.

Обґрунтування	Висновок
Оскільки $x^2 \geq 0$ і $y^2 \geq 0$ для будь-яких значень x і y , то	нерівність $x^2 + y^2 < 0$ не має розв'язків.
Будь-яка пара значень x і y , де $x = -y$, задовольняє нерівність $(x + y)^2 \leq 0$, тому	нерівність $(x + y)^2 \leq 0$ має безліч розв'язків.
Отже, дані нерівності не є рівносильними за означенням.	

3. Подвійні нерівності

qr.orioncentr.com.ua/lkiUM


Крім звичайних нерівностей зі змінними, під час розв'язування деяких завдань використовують *подвійні нерівності*.

Задача 2 Для закупівлі 10 м^2 плитки сім'я може виділити зі свого бюджету від 500 грн до 1000 грн. За якою ціною сім'я зможе купити плитку, не виходячи за межі виділеної суми?

Розв'язання Нехай x — ціна 1 м^2 плитки. Тоді подвійна нерівність $500 \leq 10x \leq 1000$ є математичною моделлю умови задачі. Застосуємо рівносильні перетворення до цієї нерівності:

$$\begin{aligned} 500 \leq 10x \leq 1000 & | :10, \\ 50 \leq x \leq 100. \end{aligned}$$

Отже, сім'я зможе купити плитку, ціна якої становить від 50 грн до 100 грн за 1 м^2 .

Задача 3 Оцініть з точністю до одиниць площу прямокутного трикутника з катетами $\sqrt{2}$ і $\sqrt{5}$.

Розв'язання Площу прямокутного трикутника знаходимо за формулою: $S = \frac{ab}{2}$. За умовою задачі, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, тому

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}. \text{ Очевидно, що } 3 < \sqrt{10} < 4, \text{ тоді } \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{4}{2}, \\ 1,5 &< \frac{\sqrt{10}}{2} < 2. \text{ З точністю до одиниць одержимо: } 1 < \frac{\sqrt{10}}{2} < 2. \end{aligned}$$

Задачі, аналогічні до задач 2 і 3, ще називають задачами на оцінювання значення якоїсь величини.



Рівносильні перетворення подвійних нерівностей здійснюють так само, як і звичайних нерівностей.

Дізнайтеся більше

Олена Степанівна Дубинчук (1919–1994) — одна з визначних педагогів-математиків України. Народилася на Вінниччині, у Ямполі. Закінчила механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Тараса Шевченка. Авторка численних підручників з математики. Її педагогічне кредо — всіма можливими засобами розвивати індивідуальність кожного учня, прищеплювати любов до математики, заохочувати до її вивчення.



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/CDnA0

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
нерівності зі змінною	inequalities with a variable	Ungleichungen mit einer Variablen	inégalités avec une variable

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади нерівностей зі змінними.
2. Що називається розв'язком нерівності зі змінною?
3. Що означає розв'язати нерівність зі змінною?
4. Які нерівності називають рівносильними?
5. Сформулюйте правила рівносильних перетворень нерівностей.
6. Наведіть приклади подвійних нерівностей.

Усне тренування

1. Врахувавши, що $25a = \frac{100a}{4}$, обчисліть:

$24 \cdot 25$; $48 \cdot 25$; $124 \cdot 25$; $172 \cdot 25$.

2. Врахувавши, що $(10k + 5)^2 = 100k(k + 1) + 25$, обчисліть:
 25^2 ; 35^2 ; 55^2 ; 75^2 ; 85^2 ; 115^2 .

Розв'яжіть задачі

107'. Назвіть будь-які три числа, що є розв'язками нерівності:

1) $x < 5$; 2) $x^2 > 1$; 3) $x \leq -0,1$; 4) $x^3 \geq -\frac{1}{2}$.

108'. Чи зміниться знак нерівності $2x < 5$, якщо:

- 1) додати до обох частин нерівності число -3 ;
- 2) помножити обидві частини нерівності на число -3 ;
- 3) помножити обидві частини нерівності на число $0,3$;
- 4) поділити обидві частини нерівності на число $-0,2$?

109'. Яка з нерівностей є рівносильною нерівності $x^2 + 1 \leq 2$:

1) $x^2 \leq 3$; 2) $x^2 \geq 1$; 3) $x^2 < 1$; 4) $x^2 \leq 1$; 5) $x^2 \leq -1$?

110'. Яка з нерівностей є рівносильною нерівності $1 \leq x - 1 \leq 2$:

1) $1 \leq x \leq 2$; 3) $0 \leq x \leq 1$;
2) $2 \leq x \leq 3$; 4) $-2 \leq x \leq -1$?

111'. Дано нерівність $x^2 - 5x + 4 \leq 0$. Чи є число a її розв'язком, якщо:

1) $a = 0$; 3) $a = 1$; 5) $a = 2$;
2) $a = -1$; 4) $a = 5$; 6) $a = 4$?

112'. Чи є число -1 розв'язком нерівності:



1) $x > -1$; 4) $x - 3 \leq 0$;
2) $x < 2$; 5) $x^2 + 2 > 0$;
3) $x \geq 5$; 6) $x^3 - 1 > 1$?



qr.orioncentr.com.ua/JVqfk

113'. Чи є множина дійсних чисел розв'язком нерівності:

1) $x^2 < -3$; 3) $x^2 \geq -5$; 5) $x^2 + 2 < 0$;
2) $x^2 < 2$; 4) $x^3 \leq 0$; 6) $0x^2 + 1 < 1$?

114'. Чи є число -2 розв'язком нерівності:



1) $x < 5$; 3) $x \geq 0$; 5) $x^2 + 1 > 0$;
2) $x > -2$; 4) $x + 1 \leq 0$;

115'. Чи є рівносильними нерівності:

1) $\frac{x}{3} < -2$ і $x > -6$; 2) $\frac{x+1}{-2} < 1$ і $x + 1 > -2$;

3) $\frac{5x^3}{-3} \leq 1$ і $x^3 \geq -0,6$;

5) $3x^2 - 5 < 1$ і $x^2 < 3$;

4) $1 - \frac{x}{2} < 1$ і $\frac{x}{2} < 0$;

6) $-4x^2 + 1 \leq -5$ і $-4x^2 \geq 6$?

116°. Чи є рівносильними нерівності:

1) $2x - 1 < -1$ і $x > 0$;

2) $\frac{x-1}{3} < -1$ і $x - 1 > -3$;

3) $\frac{2x^4}{-3} \leq 1$ і $x^4 \geq -1,5$?

**117°.** Дано: $5 \leq a \leq 8$. Оцініть

значення виразу:

1) $2a$; 3) $a - 2$;

2) $a + 2$; 4) $2 - a$.

qr.orioncentr.com.ua/g5OtZ**118°.** Дано: $3 \leq b \leq 5$. Оцініть значення виразу:

1) $2b$; 3) $\frac{b}{5}$;

2) $-3b$; 4) b^2 .

119°. Дано: $2 \leq x \leq 6$. Оцініть значення виразу:

1) $3x$; 3) $-3x$;

2) $x + 3$; 4) x^2 .

120. Чи є множина дійсних чисел розв'язком нерівності:

1) $\frac{x}{3} > -1$;

4) $(x-3)^2 \geq 0$;

2) $\frac{x^2}{-2} < 2$;

5) $x^2 + 2 > 0$;

3) $x^3 \leq -5$;

6) $(x^3 - 1)^2 > 1$?

121. Чи має додатні розв'язки нерівність:

1) $\frac{3x}{4} < -2$;

4) $(x-3)^2 \leq 0$;

2) $\frac{x^2}{5} < 0$;

5) $x^6 + 5 < 0$;

3) $x^3 > -5$;

6) $(x+1)^5 < -1,5$?

122. Чи є множина дійсних чисел розв'язком нерівності:

1) $x^2 - 1 < 0$;

3) $-5 - x^2 < 0$;

2) $3x^2 + 4 > 0$;

4) $4x^3 - 1 \leq 0$?

123. Чи є рівносильними нерівності:

1) $\frac{3x-1}{3} < -1$ і $x > -\frac{2}{3}$; 3) $\frac{-5x-1}{-4} < 4$ і $x < 3$?

2) $\frac{5x+1}{-3} < 3$ і $x > -2$;

124. Чи є рівносильними нерівності:



1) $\frac{2x-1}{3} < 1$ і $x < 2$; 3) $\frac{-2x+4}{-3} < 2$ і $x > 2$?

2) $\frac{3x+1}{-2} < 4$ і $x > -3$;

125. Дано: $0,5 \leq a \leq 3,2$. Оцініть значення виразу:

1) $2a - 1$; 3) $5a - 2$; 5) $3 - 2a$; 7) $\frac{4a+1}{3}$;

2) $3a + 2$; 4) $4 - 10a$; 6) $\frac{a-1}{2}$; 8) $\frac{1-3a}{4}$.

126. Дано: $1,2 \leq b \leq 2,5$. Оцініть значення виразу:



1) $3b - 2$; 2) $2b + 1$; 3) $3 - 10b$; 4) $\frac{1-4b}{5}$.

127. Дано: $-1 \leq a \leq 3$, $2 \leq b \leq 5$. Оцініть значення виразу:

1) $2a + b$; 4) $4b - 3a$; 7) $\frac{b-a}{3}$; 10) $3a - 2b$;

2) $3a + 2b$; 5) $\frac{a+b}{2}$; 8) $\frac{2b-3a}{5}$; 11) $(4a + 2b) : 11$;

3) $5a - 2b$; 6) $\frac{a-b}{2}$; 9) $(a + b)^2$; 12) $(4b - 3a) : 11$.

128. Дано: $-1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 4$. Оцініть значення виразу:



1) $2y + x$; 3) $y - 2x$; 5) $\frac{y-x}{4}$; 7) $(2x + 3y)^2$;

2) $4y - 3x$; 4) $\frac{x+y}{2}$; 6) $\frac{2x-3y}{5}$; 8) $(3x - 2y) : 2$.

129. Сторона квадрата a набуває значень: $3,5 \leq a \leq 4,5$. Оцініть периметр і площу квадрата.

130. Сторони прямокутника a і b набувають значень: $3,1 \leq a \leq 3,5$, $2,5 \leq b \leq 2,8$. Оцініть периметр і площу прямокутника.

131. Сторона куба a набуває значень: $2 \leq a \leq 3$. Оцініть периметр і площу однієї грані куба та його об'єм.



132*. Запишіть нерівність, що містить змінну під знаком модуля, у вигляді подвійної нерівності:

- | | |
|----------------------|--|
| 1) $ x \leq 3$; | 4) $\left \frac{x}{4}\right \leq 1$; |
| 2) $ x-5 \leq 1$; | 5) $\left 5-\frac{x}{3}\right \leq 1$; |
| 3) $ 2x+3 \leq 5$; | 6) $ 7-3x \leq 0,5$. |

133*. Доведіть, що за будь-яких a і b виконується нерівність:

- 1) $(a^2+9)(b^2+16) \geq 24ab$; 3) $(ab+1)(4ab+9) \geq 7ab$;
 2) $(a^2+25)(b^2+64) \geq 80ab$; 4) $(8ab+5)(2ab+5) \geq 10ab$.

Проявіть компетентність

134. На пачці клею для шпалер зазначено, що ним можна поклеїти від шести до дев'яти рулонів. Скільки пачок клею потрібно купити татові, якщо для першої кімнати він придбав 5 рулонів шпалер, для другої — 7 рулонів, а для третьої — 8 рулонів?

135. Сім'я з трьох осіб зібралася на відпочинок. Доби- ратися до місця призначення вони планували лі- таким. За правилами перевезення багажу, на борт літака кожний міг узяти вантаж масою не більш ніж 8 кг. У кожного члена сім'ї була своя валіза ма- сою 2,8 кг. Мама поклала у свою валізу 3 кг речей, тато — 2,5 кг, а донька — 2,7 кг. Вони ще хотіли взяти в подарунок друзям три сувеніри по 0,5 кг кожний і цукерки.

1. Чи помістяться всі три сувеніри в одну валізу? Якщо так, то чия це може бути валіза — мами, тата чи доньки?

2. Якщо кожний член сім'ї покладе у свою валізу по одному сувеніру, то по скільки кілограмів цуке- рок вони зможуть узяти?

3. Якщо лише мама й донька покладуть у свої валі- зи по одному сувеніру, то скільки кілограмів цуке- рок зможе взяти сім'я в такому випадку?

§ 3. ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

1. Що таке числовий проміжок

qr.orioncentr.com.ua/PXFd1



Ситуація. На уроці алгебри Андрій Петрович пояснював, що таке числовий проміжок. Ірина, Олексій і Сашко зголосилися допомогти йому і стали розв'язувати кожний свою нерівність (табл. 9).

Таблиця 9

Ірина	Олексій	Сашко
$ x^2 - 1 \leq 0$	$\frac{5}{3}x > 1$	$1,5 < -3x < 4,5$
Оскільки модуль будь-якого числа є числом невід'ємним, то розв'язками даної нерівності є лише числа -1 та 1 .	$\frac{5}{3}x > 1 \left \cdot \frac{3}{5} \right.$ $x > \frac{3}{5}$	$1,5 < -3x < 4,5 \left : (-3) \right.$ $-0,5 > x > -1,5$ $-1,5 < x < -0,5$
Тому $x_{1,2} = \pm 1$	$x > 0,6$	$-1,5 < x < -0,5$



Що спільного і що відмінного мають множини розв'язків даних нерівностей?

Поміркуймо (табл. 10).



Таблиця 10

Ірина	Олексій	Сашко
Множина розв'язків кожної нерівності є підмножиною дійсних чисел		
Ця підмножина містить лише два числа	Ця підмножина містить <i>усі</i> дійсні числа, більші за $0,6$	Ця підмножина містить <i>усі</i> дійсні числа, більші за $-1,5$ і менші від $-0,5$
Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$	Відповідь: $x \in (0,6; +\infty)$	Відповідь: $x \in (-1,5; -0,5)$

Відповіді Олексія й Сашка є *числовими проміжками*, а відповідь Ірини — двоелементною множиною.

Запам'ятайте!

Підмножину дійсних чисел, більших (менших) за дане число або тих, що містяться між двома числами (точками на координатній прямій), називають *числовим проміжком*.



Числовий проміжок $(0,6; +\infty)$ читають: «від 0,6 не включно до плюс нескінченності». Іноді в записі « $+\infty$ » знак « $+$ » опускають, але мають його на увазі.



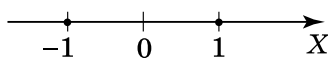
Якщо нерівність не має розв'язків, тобто множина її розв'язків є порожньою, то відповідь записують: $\emptyset$.

2. Зображення числових проміжків на координатній прямій

Ірина й Олексій зобразили на координатній прямій множини розв'язків своїх нерівностей (мал. 3, 4).

Ірина

$$x \in \{-1; 1\}$$



Мал. 3

Олексій

$$x \in (0,6; +\infty)$$



Мал. 4



Які особливості є в зображеннях на малюнках 3 і 4?

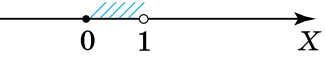
Є особливості у позначеннях чисел.



Числа 1 і -1 на малюнку 3 позначені зафарбованими кружечками. Так позначають числа, які належать множині розв'язків нерівності. Незафарбованим («виколотим») кружечком позначають число з числового проміжку, яке не належить множині розв'язків нерівності (наприклад, число 0,6 на малюнку 4).

Загалом, числові проміжки можуть містити свої кінці або ж не містити їх. Це позначають так, як показано в таблиці 11.

Таблиця 11

Приклад	Особливості числового проміжку	Зображення
$(1; 3)$	обидва кінці не належать проміжку	 $(1; 3)$
$[0; 2]$	обидва кінці належать проміжку	 $[0; 2]$
$[0; 1)$	лівий кінець належить проміжку, а правий — ні	 $[0; 1)$
$(-1; 2]$	правий кінець належить проміжку, а лівий — ні	 $(-1; 2]$

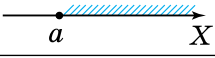


У записі числового проміжку ставлять:

- круглу дужку « $($ » або « $)$ », якщо проміжок **не містить** даний його кінець (на малюнку він позначається **«виколотим» кружечком**);
- квадратну дужку « $[$ » або « $]$ », якщо проміжок **містить** даний його кінець (на малюнку він позначається **зафарбованим кружечком**);
- біля « $+\infty$ » та « $-\infty$ » завжди ставлять круглу дужку, наприклад: $[-3; +\infty)$, $(-\infty; 5]$.

У таблиці 12 подано всі можливі варіанти числових проміжків (a, b — будь-які дійсні числа).

Таблиця 12

Нерівність	Числовий проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	

Нерівність	Числовий проміжок	Зображення
$x < b$	$(-\infty; b)$	
$x \leq b$	$(-\infty; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	

3. Об'єднання числових проміжків

qr.orioncentr.com.ua/vDj6Q



Множина розв'язків деяких нерівностей (або кількох нерівностей, які розглядають разом) може містити не один проміжок, а два й більше проміжків. Таку множину можна подати як об'єднання відповідних проміжків.

Запам'ятайте!

Об'єднанням числових проміжків називається така числова множина, яка містить усі числа кожного з проміжків і не містить інших чисел.



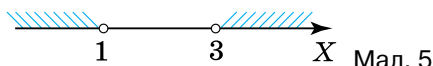
Об'єднання проміжків позначають знаком « $\cup$ ». Цьому символу відповідає логічний сполучник «або».

Задача 1 Знайдіть та позначте на координатній прямій об'єднання:

- 1) проміжків $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$;
- 2) проміжків $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$;
- 3) проміжків $(-\infty; 1]$ і $(1; +\infty)$;
- 4) проміжку $(-\infty; 1)$ і числа 3;
- 5) проміжку $(-\infty; 1)$ і числа 1;
- 6) проміжку $(3; +\infty)$ і порожньої множини.

Розв'язання 1. Об'єднанням даних числових проміжків (мал. 5) є множина:

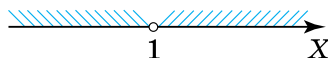
$$(-\infty; 1) \cup (3; +\infty).$$



Мал. 5

2. Об'єднанням даних числових проміжків (мал. 6) є множина:

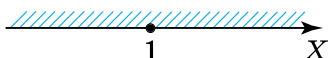
$$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$



Мал. 6

3. Об'єднанням даних числових проміжків (мал. 7) є множина: $(-\infty; 1] \cup (1; +\infty)$. Оскільки число 1 входить до першого проміжку, то в об'єднанні двох проміжків немає розриву в точці 1. Тому ця множина містить усі дійсні числа: $(-\infty; +\infty)$. Маємо:

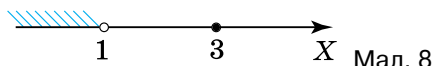
$$(-\infty; 1] \cup (1; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$



Мал. 7

4. Об'єднанням даного числового проміжку й числа 3 (мал. 8) є множина:

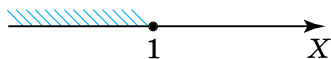
$$(-\infty; 1) \cup \{3\}.$$



Мал. 8

5. Об'єднанням даного числового проміжку й числа 1 (мал. 9) є множина: $(-\infty; 1) \cup \{1\}$. Одержану множину можна подати як один проміжок: $(-\infty; 1]$. Маємо:

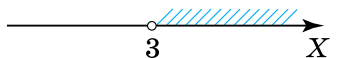
$$(-\infty; 1) \cup \{1\} = (-\infty; 1].$$



Мал. 9

6. Оскільки порожня множина не містить елементів, то об'єднанням даного числового проміжку й порожньої множини (мал. 10) є множина $(3; +\infty)$. Маємо:

$$(3; +\infty) \cup \emptyset = (3; +\infty).$$



Мал. 10



Об'єднання проміжків записують, починаючи з проміжку, що містить найменше з даних чисел.



Запис $x \in \emptyset$ не має змісту.

4. Переріз числових проміжків

qr.orioncentr.com.ua/d4MdN



Числовий проміжок $(-1,5; -0,5)$ містить ті і тільки ті дійсні числа, що одночасно входять до проміжків $(-\infty; -0,5)$ і $(-1,5; +\infty)$. Говорять, що числовий проміжок $(-1,5; -0,5)$ є перерізом числових проміжків $(-\infty; -0,5)$ і $(-1,5; +\infty)$.

Запам'ятайте!

Перерізом числових проміжків називається така числова множина, яка містить лише ті числа, що одночасно входять до кожного з проміжків, і не містить інших чисел.



Переріз множин позначають знаком « $\cap$ ». Цьому знаку відповідає логічний сполучник «і».

Задача 2

Знайдіть і позначте на координатній прямій переріз проміжків:

1) $(-\infty; 2]$ і $[0; +\infty)$;

3) $(-\infty; 3)$ і $(3; +\infty)$;

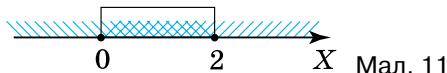
2) $(-\infty; 3]$ і $[3; +\infty)$;

4) $(-\infty; 2)$ і $[2; +\infty)$.

Розв'язання

1. Позначимо штриховкою з нахилом уліво числовий проміжок $(-\infty; 2]$, а штриховкою з нахилом управо — числовий проміжок $[0; +\infty)$ (мал. 11). Штриховки «перетнулися» на числовому проміжку $[0; 2]$. Отже, перерізом даних числових проміжків є числовий проміжок $[0; 2]$, тобто:

$$(-\infty; 2] \cap [0; +\infty) = [0; 2].$$



Мал. 11

2. Перерізом двох даних числових проміжків є множина, що складається лише з одного числа 3 (мал. 12). Можемо записати:

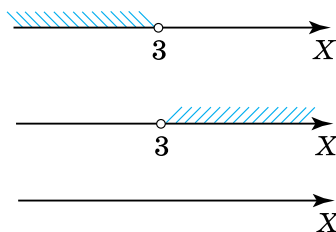
$$(-\infty; 3] \cap [3; +\infty) = \{3\}.$$



Мал. 12

3. Перерізом двох даних числових проміжків є порожня множина (мал. 13), тобто:

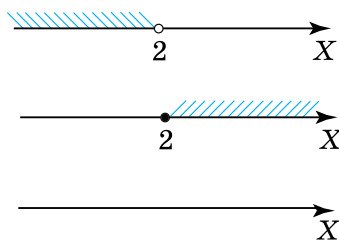
$$(-\infty; 3) \cap (3; +\infty) = \emptyset.$$



Мал. 13

4. Перерізом двох даних числових проміжків є порожня множина (мал. 14), тобто:

$$(-\infty; 2) \cap [2; +\infty) = \emptyset.$$



Мал. 14



Переріз проміжків записують у певному порядку, починаючи з проміжку, що містить найменше з даних чисел.

Дізнайтеся більше

1. Крім операцій об'єднання та перерізу числових множин, у теорії множин використовують ще й такі операції, як різниця множин та доповнення однієї множини до іншої. *Різницею множин* A і B називають *множину* C , яка складається з усіх елементів, що належать множині A й не належать множині B . Позначають: $A \setminus B$. Наприклад, знаходячи різницю множин $(-\infty; 2)$ і $\{0\}$, одержуємо: $(-\infty; 2) \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Якщо B — підмножина множини A , то різницю $A \setminus B$ називають *доповненням множини* B до множини A . Позначають: $\bar{A}$. У розглянутому прикладі маємо: множина $\bar{A} = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ є доповненням множини $B = \{0\}$ до множини $A = (-\infty; 2)$.

2. Бернард Больцано (1781–1848) —

чеський математик, філософ і теолог, автор першої строгої теорії дійсних чисел та один із засновників теорії множин. За життя Б. Больцано опублікував лише п'ять невеликих праць із математики. Вони значно випереджали науковий рівень того часу й не привернули увагу наукової громадськості. Тільки наприкінці XIX ст., коли ці ідеї незалежно перевідкрили Вейерштрасс і Дедекінд, історики виявили й заслужено оцінили твори Больцано.

**Словничок**
qr.orioncentr.com.ua/TwpwJ

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
числовий проміжок	numerical interval	Zahlen- intervall, f	intervalle numérique

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади числових проміжків.
2. Як зображають числові проміжки? Наведіть приклади.
3. У якому випадку в записі числового проміжку ставлять круглу дужку? Наведіть приклади.
4. У якому випадку в записі числового проміжку ставлять квадратну дужку? Наведіть приклади.
5. Сформулюйте означення об'єднання двох числових проміжків.
6. Як позначають об'єднання двох числових проміжків? Наведіть приклади.
7. Сформулюйте означення перерізу двох числових проміжків.
8. Як позначають переріз двох числових проміжків? Наведіть приклади.

Усне тренування

1. Обчисліть:

$$4 \cdot 0,8 \cdot 0,005; \quad 1,4 \cdot 0,07 \cdot 0,5; \quad \frac{5}{7} + \frac{2}{7} \cdot 0,7.$$

2. Яким числом — додатним чи від'ємним — є значення виразу:

$$-2 : 9^{24}; \quad (-2 : 9)^{16}; \quad 2 : (-9)^{17}; \quad -(2 : 9)^0?$$

$$3. \text{ Обчисліть: } (0,125)^6 \cdot 8^4; \quad (-0,25) \cdot 4^3; \quad 2^6 \cdot 0,5^3.$$

Розв'яжіть задачі

136'. Прочитайте запис:

$$1) x \in (1; +\infty);$$

$$4) x \in (-10; -5,4);$$

$$2) x \in [-3; 7];$$

$$5) x \in \left[2,5; 3\frac{1}{3}\right).$$

$$3) x \in (-\infty; 1,2);$$

137'. Чи правильно, що:

1) число 1 належить проміжку:

$$\text{а) } (1; +\infty); \quad \text{б) } [1; +\infty); \quad \text{в) } (-\infty; 1); \quad \text{г) } (-\infty; -1];$$

2) число -3 не належить проміжку:

$$\text{а) } [-3; 7]; \quad \text{б) } [-3; 7); \quad \text{в) } (-3; 7]; \quad \text{г) } (-3; 7);$$

3) число 7 належить проміжку:

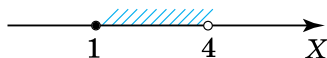
$$\text{а) } [-3; 7]; \quad \text{б) } [-3; 7); \quad \text{в) } (-3; 7]; \quad \text{г) } (-3; 7)?$$

138'. На якому з малюнків 15–18 зображено проміжок:

$$1) [1; 4]; \quad 2) [1; 4); \quad 3) (1; 4]; \quad 4) (1; 4)?$$



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17



Мал. 18

139'. Чи правильно записано дію знаходження об'єднання проміжків $(3; +\infty)$ і $(-\infty; 2]$:

$$1) (3; +\infty) + (-\infty; 2];$$

$$3) (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)?$$

$$2) (3; +\infty) \cup (-\infty; 2];$$

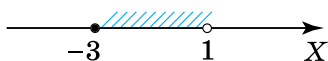
140'. Чи правильно записано дію знаходження перерізу проміжків $(-3; +\infty)$ і $(-\infty; 2]$:

$$1) (-3; +\infty) - (-\infty; 2];$$

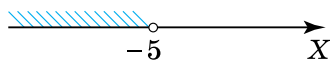
$$2) (-\infty; 2] \cup (-3; +\infty);$$

$$3) (-\infty; 2] \cap (-3; +\infty)?$$

141°. Запишіть проміжки, зображені на малюнках 19–22.



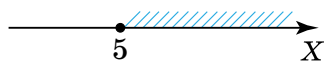
Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22

142°. Запишіть проміжки, зображені на малюнках 23, 24.



Мал. 23



Мал. 24

143°. Позначте на координатній прямій числовий проміжок:

- 1) $[1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1]$; 3) $(0; 5)$; 4) $[-3; 2]$.

Чи належить указаному проміжку число:

- а) 1; б) -1; в) 0; г) 3?

144°. На координатній прямій позначте числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівності:



- 1) $x > -\frac{2}{3}$; 5) $x \leq -0,5$;
 2) $x > 0$; 6) $x \geq 1,5$;
 3) $x < -4,5$; 7) $-1 < x \leq 3$;
 4) $0 < x < 5$; 8) $2 \leq x \leq 6$.

qr.orioncentr.com.ua/yeTxq

Запишіть одержаний числовий проміжок.

145°. На координатній прямій позначте числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівності:



- 1) $x > \frac{1}{3}$; 3) $x \leq -2$;
 2) $x < 0$; 4) $-2 \leq x \leq 2$.

Запишіть одержаний числовий проміжок.

146°. Чи належить проміжок $(0; 1)$ множині розв'язків нерівності:

- 1) $0 \leq x \leq 1$; 2) $x > 0$; 3) $x < 1$; 4) $0 < x < 1$?

147°. Чи належить проміжок $(-2; 0)$ множині розв'язків нерівності:



- 1) $-2 \leq x \leq 0$; 2) $x < 0$; 3) $x > -2$; 4) $-2 < x < 0$?

148°. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:

- 1) $(-1; 3)$; 2) $[-1; 3)$; 3) $[-1; 3]$; 4) $(-1; 3]$.

149°. Запишіть найбільше та найменше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(-1; 5)$; 2) $[-1; 6)$; 3) $[-1; 5]$; 4) $(-1; 6]$.

150°. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:



- 1) $(-2; 2)$; 3) $[-2; 3]$;
2) $[-2; 2)$; 4) $(-2; 3]$.

151°. Знайдіть і позначте на координатній прямій об'єднання числових проміжків:

- 1) $(-1; 4)$ і $(2; 11)$; 4) $(2; +\infty)$ і $(5; +\infty)$;
2) $(-1; 2)$ і $(-1; 7)$; 5) $(-\infty; -2)$ і $(-3; +\infty)$;
3) $(4; 7)$ і $(2; 13)$; 6) $(-\infty; -2)$ і $\{-2\}$.

152°. Скориставшись координатною прямою, знайдіть об'єднання числових проміжків:



- 1) $[-2; 3)$ і $(0; 2]$; 4) $[2; +\infty)$ і $(5; +\infty)$;
2) $[-2; 2]$ і $(0; 2)$; 5) $(-\infty; -1]$ і $[-3; +\infty)$;
3) $(4; 13]$ і $[-3; 6)$; 6) $\{-5\}$ і $[-2; +\infty)$.

qr.orioncentr.com.ua/mYTfE



153°. Знайдіть і позначте на координатній прямій об'єднання числових проміжків:



- 1) $[-1; 1]$ і $(-2; 3)$; 3) $(-\infty; -1]$ і $(-2; 1]$;
2) $[-5; 1)$ і $(-3; 2]$; 4) $\{-2\}$ і $(-2; 3)$.

154°. Позначте на координатній прямій і запишіть числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівностей:

- 1) $x \leq -0,5$ або $x > 5$; 3) $x > -3$ або $x > 5,1$;
2) $x \leq 2,5$ або $x < 4,5$; 4) $x > -1,4$ або $x \leq 7$.

155°. Позначте на координатній прямій і запишіть числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівностей:



- 1) $x \geq 4,7$ або $x > 6$; 3) $x \geq -1$ або $x \leq 1,5$;
2) $x \leq 5$ або $x < 7,5$; 4) $x \leq -3$ або $x \geq 7$.

156°. Знайдіть і позначте на координатній прямій переріз числових проміжків:

- 1) $(-2; 5)$ і $(3; 7)$; 4) $(2; 3)$ і $(-3; +\infty)$;
 2) $(-10; 12)$ і $(0; 6)$; 5) $(-\infty; -15)$ і $(-12; +\infty)$;
 3) $(-\infty; -2)$ і $(1; 8)$; 6) $(-\infty; 12)$ і $(5; +\infty)$.

157°. Скориставшись координатною прямою, знайдіть переріз числових проміжків:

- 1) $[-2; -1]$ і $[-1,5; 1]$; 3) $[-4,5; 1,5]$ і $[-7,2; +\infty)$;
 2) $(-7; 1]$ і $[-7,5; -2,1]$; 4) $(-\infty; \sqrt{1,8})$ і $[\sqrt{2}; +\infty)$.

158°. Знайдіть і позначте на координатній прямій переріз числових проміжків:



- 1) $[-2; 11]$ і $(0; 15)$; 3) $(-\infty; 2,4]$ і $[-2,4; +\infty)$;
 2) $[-6; -3]$ і $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -15)$ і $(-12; +\infty)$.

159°. Позначте на координатній прямій і запишіть числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівностей:

- 1) $x \leq -0,5$ і $x > 5$; 3) $x > -3$ і $x > 5,1$;
 2) $x \leq 2,5$ і $x < 4,5$; 4) $x > -1,4$ і $x \leq 7$.

160°. Позначте на координатній прямій і запишіть числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівностей:



- 1) $x \geq 4,7$ і $x > 6$; 3) $x \geq -1$ і $x \leq 1,5$;
 2) $x \leq 5$ і $x < 7,5$; 4) $x \leq -3$ і $x \geq 7$.

161. Запишіть усі дробу виду $\frac{*}{a}$, що належать проміжку $(2; 3,5)$, якщо:

- 1) $a = 2$; 2) $a = 3$; 3) $a = 4$; 4) $a = 5$.

162. Запишіть усі дробу виду $\frac{*}{b}$, що належать проміжку $(1,5; 3)$, якщо:



- 1) $b = 2$; 2) $b = 3$.

163. Укажіть два додатні та два від'ємні числа із проміжку:

- 1) $(-0,1; 0,1)$; 2) $(-0,2; 0,2)$; 3) $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$; 4) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

164. Для кожного значення a , що набуває лише цілих значень із проміжку $-1,2 < a < 2\frac{1}{5}$, запишіть числовий проміжок, який є множиною розв'язків подвійної нерівності $3a - 2 < x < 2a + 3$, та зобразіть його.

- 165.** Для кожного значення a , що набуває лише цілих значень із проміжку $-0,7 < a < 2\frac{2}{3}$, запишіть числовий



проміжок, який є множиною розв'язків подвійної нерівності $2a - 1 < x < 3a + 1$, та зобразіть його.

- 166.** Дано: $a < b < c$. Виконайте дію:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1) $(a; b) \cup (a; c);$ | 5) $(a; +\infty) \cup (b; c);$ |
| 2) $(a; b) \cap (a; c);$ | 6) $(a; +\infty) \cap (b; c);$ |
| 3) $(a; c) \cup (b; c);$ | 7) $(a; b) \cup (c; +\infty);$ |
| 4) $(a; c) \cap (b; c);$ | 8) $(-\infty; b) \cap (a; c).$ |

- 167.** Дано: $a < d < b < c$. Виконайте дію:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1) $(a; b) \cup (d; c);$ | 5) $(a; c) \cup (d; b);$ |
| 2) $(a; b) \cap (d; c);$ | 6) $(a; c) \cap (d; b);$ |
| 3) $(a; d) \cup (b; c);$ | 7) $(a; b) \cup (c; +\infty);$ |
| 4) $(a; d) \cap (b; c);$ | 8) $(-\infty; d) \cap (a; b).$ |

- 168.** Дано: $x < t < m < y$. Виконайте дію:



- 1) $(x; t) \cup (m; y);$
- 2) $(x; t) \cap (m; y);$
- 3) $(t; y) \cap (x; m);$
- 4) $(x; y) \cup (t; m).$

Запишіть результат у вигляді нерівності та позначте його на координатній прямій.

- 169*.** За якого найбільшого цілого значення a значення виразу $2a - 1$ належить проміжку:

- | | |
|--------------------|--|
| 1) $(1; 3);$ | 4) $(-3; 2,6];$ |
| 2) $[1; 3];$ | 5) $\left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{3}{4}\right];$ |
| 3) $(-0,1; 1,75);$ | 6) $\left(-\frac{5}{6}; 3\frac{3}{4}\right)?$ |

- 170*.** За якого найменшого цілого значення a значення виразу $1 - 2a$ належить проміжку:

- | | |
|--------------------|--|
| 1) $(1; 2);$ | 4) $(-3; 4];$ |
| 2) $[1; 2];$ | 5) $\left[-1\frac{2}{3}; 2\frac{3}{4}\right];$ |
| 3) $(-0,5; 1,75);$ | 6) $\left(-\frac{5}{6}; 3\frac{2}{3}\right)?$ |

171*. За якого найбільшого цілого значення b значення виразу $|1-5b|$ належить проміжку:

- 1) (1; 5); 3) (0; 1,5);
2) [1; 5]; 4) (0; 4]?

172*. Знайдіть усі цілі значення c такі, що значення виразу $|3c-2|$ не перевищує значення числового виразу

$$\sqrt{3\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{\frac{6}{31}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Проявіть компетентність

173. За умовами регіональної програми підтримки, щоб отримати дотацію, середня врожайність соняшника в господарстві має бути більшою, ніж 1,7 т з 1 га. Для укладення експортного контракту з новим партнером господарство повинно продемонструвати, що середня врожайність соняшника є не меншою, ніж 2,6 т з 1 га. Якою має бути врожайність соняшника (в тоннах з гектара), щоб господарство забезпечило виконання умов обох програм? Ознайомтеся з показниками врожайності по областях у 2024 році <https://superagronom.com/multimedia/infographics/95-urojay-sonyashniku-v-ukrayini-za-2024-rik-po-oblastyah> і спрогнозуйте, господарства з яких областей можуть претендувати на участь: а) в обох програмах; б) хоча б в одній із програм.



174. Швидкість одного автомобіля дорівнює x км/год, а швидкість іншого — y км/год. Швидкості автомобілей відрізняються не більш як на 15 км/год. Якщо вони виїдуть назустріч один одному з міст, що розташовані на відстані 350 км, то зустрінуться не менш ніж за 2 год. Складіть і запишіть математичну модель задачі.

§ 4. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. Лінійні нерівності

Ситуація. Марина та Іван проходять до школи більш ніж 6 кварталів (довжина 1 кварталу приблизно дорівнює 250 м). З якою середньою швидкістю їм потрібно йти, щоб встигнути дійти до школи за 20 хв?



qr.orioncentr.com.ua/DQftN



Як утворити математичну модель задачі?

Проаналізуймо умову.



Нехай x (м/хв) — середня швидкість руху Марини й Івана. Тоді $20x$ (м) — відстань, яку вони подолають за 20 хв, що за умовою задачі більше за $250 \cdot 6 = 1500$ (м). Звідси маємо: $20x > 1500$.

Отримали нерівність виду $ax > b$, або $ax - b > 0$. Нерівності такого виду називають лінійними, подібно до того, як рівняння виду $ax + b = 0$ називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Запам'ятайте!

Нерівність виду $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається лінійною нерівністю з однією змінною.

Якщо доданок b перенести з лівої частини нерівності у праву і позначити $-b = c$, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Тому лінійними також є нерівності:

$$ax < c, \quad ax > c, \quad ax \leq c, \quad ax \geq c.$$



Як розв'язати лінійну нерівність?

Шляхом рівносильних перетворень.



Задача 1 Розв'яжіть нерівність, яку отримали, аналізуючи вхідну ситуацію до параграфа: $20x > 1500$.

Розв'язання Виконаємо рівносильні перетворення нерівності:

$$\begin{aligned} 20x &> 1500, \\ x &> 1500 : 20, \\ x &> 75. \end{aligned}$$

Позначимо на координатній прямій проміжок, що є множиною розв'язків одержаної нерівності (мал. 25).



Мал. 25

Отже, $x \in (75; +\infty)$.

Задача 2 Розв'яжіть нерівність $\frac{x}{6} - \frac{x-1}{4} + \frac{x}{12} \leq 2$.

Розв'язання

Знайдемо НСК знаменників у лівій частині нерівності:

Помножимо обидві частини нерівності на 12 ($12 > 0$, тому знак нерівності не зміниться):

Розкриємо дужки:

Перенесемо число 3 у праву частину нерівності, змінивши його знак:

Зведемо подібні доданки в лівій частині нерівності:

Запишемо відповідь:

$$\text{НСК } (4; 6; 12) = 12.$$

$$2x - 3(x-1) + x \leq 24.$$

$$2x - 3x + 3 + x \leq 24.$$

$$2x - 3x + x \leq 24 - 3.$$

$$0 \cdot x \leq 21.$$

$$x \in (-\infty; +\infty), \text{ або } x \in R.$$

Оскільки нерівність $0 \cdot x \leq 21$ виконується за будь-якого значення x , то множина її розв'язків — уся числова пряма. Отже, і в початкової нерівності множина її розв'язків — уся числова пряма.

Задача 3 Розв'яжіть нерівність $5(2x - 1) - 2(3 + 5x) \leq -13$.

Розв'язання

Розкриємо дужки в лівій частині нерівності:

$$10x - 5 - 6 - 10x \leq -13.$$

Перенесемо доданки без змінної
у праву частину нерівності:

$$10x - 10x \leq -13 + 5 + 6.$$

Зведемо подібні доданки:

$$0 \cdot x \leq -2.$$

Запишемо відповідь:

$$\emptyset.$$

Оскільки нерівність $0 \cdot x \leq -2$ не виконується за жодного значення x , то множина її розв'язків — порожня. Отже, і початкова нерівність не має розв'язків.

2. Доведення нерівностей

qr.orioncentr.com.ua/tsTmP



У курсі алгебри 7 класу ви доводили тотожності. Пригадайте, які способи ви використовували для цього.



Чи можна ці способи застосувати
для доведення нерівностей?

Так.



Способи доведення нерівностей:

- 1) знайти різницю її правої та лівої частин і порівняти з нулем одержаний вираз;
- 2) рівносильними перетвореннями звести дану нерівність до очевидної нерівності;
- 3) використати відому або очевидну допоміжну нерівність.

Задача 4 Доведіть нерівність $a + \frac{1}{a} \geq 2$, якщо $a > 0$.

Розв'язання Знайдемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Оскільки за умовою $a > 0$, а вираз $(a-1)^2 \geq 0$ за будь-яких значень змінної a , то $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$. Отже, нерівність $a + \frac{1}{a} \geq 2$ справджується для будь-яких $a > 0$, що й треба було довести.

Задача 5 Доведіть нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$.

Розв'язання

Використаємо допоміжну нерівність $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, яка справджується для будь-яких невід'ємних чисел a і b .

Розкриємо за формулою квадрат різниці:

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Застосуємо рівносильні перетворення:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \mid : 2.$$

Отримали нерівність, яку вимагалось довести:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Цю нерівність називають *нерівністю Коші* на честь французького математика Огюстена Луї Коші (1789–1857).

Оскільки були виконані *рівносильні перетворення* допоміжної нерівності, яка є правильною для будь-яких $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то виконуватиметься й нерівність, яку треба було довести.

Вираз $\frac{a+b}{2}$ є середнім арифметичним чисел a і b , а вираз $\sqrt{ab}$ — їх середнім геометричним. Отже, нерівність Коші формулюють і по-іншому.



Середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного.

Під час доведення складніших нерівностей можна використовувати раніше доведені нерівності, наприклад нерівність Коші та нерівність, доведену в задачі 4.

Дізнайтеся більше

1. Огюстен Луї Коші (1789–1857) — видатний французький математик, член Паризької академії наук (1816). Усього за життя він опублікував понад 800 праць з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики тощо. Нерівність Коші є



однією з ланок «ланцюжка класичних нерівностей», що пов'язує чотири основні види середніх величин для набору додатних чисел. Цей ланцюжок встановлює співвідношення між середнім квадратичним

$$S = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}, \text{ середнім арифметичним } A = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

середнім геометричним $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$ та середнім гармонійним

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \text{ для додатних значень } x_1, \dots, x_n:$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

2. Розглянемо, як розв'язати найпростішу лінійну нерівність $ax > b$ з параметрами a і b .

Проаналізуємо різні випадки для параметрів a і b (табл. 13).

Таблиця 13

Значення a	Значення b	Розв'язання нерівності $ax > b$
$a = 0$	$b < 0$	$0 \cdot x > b$ виконується за будь-яких значень змінної x , тобто $x \in \mathbb{R}$
	$b = 0$	$0 \cdot x > b$ не виконується за жодних значень змінної x , тобто $\emptyset$
	$b > 0$	$0 \cdot x > b$ не виконується за жодних значень змінної x , тобто $\emptyset$
$a > 0$	b — будь-яке	$ax > b \mid : a,$ (знак нерівності не змінюємо) $x > \frac{b}{a}$. Отже, $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a < 0$	b — будь-яке	$ax > b \mid : a,$ (знак нерівності змінюємо) $x < \frac{b}{a}$. Отже, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$

Зі схемами розв'язування лінійних нерівностей з параметрами можна ознайомитися, перейшовши за посиланнями (табл. 14).

Таблиця 14

$ax > b,$ $a \in R, b \in R$	https://xmind.ai/share/KhslZ1Vr?xid=vW4tEV0w
$ax < b,$ $a \in R, b \in R$	https://xmind.ai/share/HOWuLLHa?xid=aw7ZkGJy
$ax \leq b,$ $a \in R, b \in R$	https://xmind.ai/share/wUsd82pb?xid=ak7N1Cjk
$ax \geq b,$ $a \in R, b \in R$	https://xmind.ai/share/Js8Yrd6g?xid=vVl1Wx7S

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/M7KHB

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
лінійна нерівність	linear inequality	lineare Ungleichung	inégalité linéaire

Пригадайте головне

1. Які нерівності називаються лінійними нерівностями з однією змінною? Наведіть приклади.
2. Як розв'язують лінійні нерівності з однією змінною?
3. Якими способами можна доводити нерівності?

Усне тренування

1. Знайдіть значення a , якщо графік функції $y = 6x - a$ проходить через точки: $A(0; 8)$, $B(-3; 0,5)$, $C(1; -2,4)$, $D(2; 18)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^3 - 27}{x - 3} = 0$; 2) $\frac{x + 2}{x^2 - 4} = 0$.

3. Обчисліть:

1) $(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 - 15$; 2) $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}}$.

Розв'яжіть задачі

175'. Чи правильно, що розв'язком нерівності $x > -3$ є проміжок:

- 1) $(-\infty; -3)$;
- 2) $(3; +\infty)$;
- 3) $(-3; +\infty)$;
- 4) $(-\infty; 3)$?

176'. Чи правильно, що розв'язком нерівності $2x \leq 3$ є проміжок:

- 1) $(-\infty; -1,5]$;
- 2) $[-1,5; +\infty)$;
- 3) $[1,5; +\infty)$;
- 4) $(-\infty; 1,5]$?

177'. Чи правильно, що розв'язком нерівності $-6 \leq 5x \leq 6,5$ є проміжок:

- 1) $[-1,3; -1,2]$;
- 2) $[-1,2; 1,3]$;
- 3) $[1,2; 1,3]$;
- 4) $[-1,3; 1,2]$?

178°. Розв'яжіть нерівність:



- 1) $3x > 6$;
- 2) $4x > 5$;
- 3) $5x > -10$;
- 4) $6x > -10$;
- 5) $-4x > 0$;
- 6) $-3x > 4$;
- 7) $2x < 8$;
- 8) $4x < 7$;
- 9) $6x < -18$;
- 10) $5x < -12$;
- 11) $-5x < 35$;
- 12) $-3x < 13$.

qr.orioncentr.com.ua/S0rKF



179°. Розв'яжіть нерівність:



- 1) $3x > 15$;
- 2) $5x > -14$;
- 3) $-4x > 13$;
- 4) $7x < 28$;
- 5) $9x < -25$;
- 6) $-11x < 0$.

180°. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $4x \geq 10$;
- 2) $8x \geq 5$;
- 3) $6x \geq -20$;
- 4) $7x \geq -35$;
- 5) $-3x \geq 39$;
- 6) $-4x \geq 19$;
- 7) $3x \leq 0$;
- 8) $4x \leq 28$;
- 9) $5x \leq -16$;
- 10) $3x \leq -19$;
- 11) $-2x \leq 9$;
- 12) $-3x \leq 14$.

181°. Розв'яжіть нерівність:



- 1) $5x \geq 11$;
- 2) $2x \geq -11$;
- 3) $-3x \geq 23$;
- 4) $3x \leq 21$;
- 5) $4x \leq -26$;
- 6) $-7x \leq 0$.

182°. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $0,01x \geq 1$; 5) $-1\frac{2}{7}x \geq 9$; 9) $0 \cdot x \geq 1$;
 2) $0,2x \leq 5$; 6) $2\frac{2}{3}x > 16$; 10) $0 \cdot y > 5$;
 3) $-0,3x \geq -3$; 7) $2,5x \leq 8$; 11) $0 \cdot t < -3$;
 4) $0,7x < -14$; 8) $1\frac{5}{8}x < -26$; 12) $0 \cdot x \leq 6$.

183°. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $0,1x < 3$; 3) $-2\frac{2}{7}x \leq 32$;
 2) $0,4x \geq 2$; 4) $3\frac{1}{3}x > -5$.

184°. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x + 3\frac{2}{3} > 0$; 3) $4\frac{5}{7} - x > 0$; 5) $x + 1\frac{1}{3} > 3$;
 2) $x - 2\frac{3}{7} < 0$; 4) $x - 1\frac{2}{7} < 3,5$; 6) $1\frac{5}{6} - x < 1,5$.

185°. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x + 1,6 > 0$; 3) $x + 2\frac{3}{8} > 4$;
 2) $3 - x < 1\frac{4}{7}$; 4) $3\frac{2}{9} - x \geq 0$.

186°. Чи є рівносильними нерівності:

- 1) $5x - 2 > 4x + 2$ і $x > 4$; 3) $3(x - 1) < 4x - 3$ і $x > 0$;
 2) $2x + 1 \leq 3x - 5$ і $x \leq 6$; 4) $5(x - 1) \geq 10$ і $x \leq 3$?

187°. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $3x - 2 > x + 1$;
 2) $2x - 1 > 3x - 7$;
 3) $1 - 4x > 2 - 3x$; 6) $x + 5 < 3 - 2x$;
 4) $1 + 3x > 3 - 4x$; 7) $6x - 5 < 7x + 11$;
 5) $2x - 5 < 4 - 3x$; 8) $4 - 5x < 3 - 7x$.

qr.orioncentr.com.ua/t7te3**188°.** Розв'яжіть нерівність:

- 1) $4x + 2 \leq 3x + 8$; 3) $5x - 2 \geq 3x - 4$;
 2) $3(1 + x) \geq 2x + 1$; 4) $2(1 - x) \geq 3x + 5$.

189°. За яких значень a набуває додатних значень вираз:

- 1) $2a + 3(2 - a)$; 2) $5a - (4a + 3)$; 3) $-2a - (6 - a)$?

190°. За яких значень b набуває від'ємних значень вираз:



1) $3b + 2(b - 2)$; 3) $-b - (5 - 2b)$?

2) $4b - (4 + 2b)$;

191. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 1$; 3) $1,5x - \frac{x}{4} > 8$; 5) $1,75x - \frac{3}{4} > \frac{3x}{5} - 1$;

2) $x - \frac{3x}{7} < 2$; 4) $\frac{3x}{2} - 4 < \frac{5x}{4} + 1$; 6) $\frac{x}{6} - 2 < \frac{5x}{12} + 1$.

192. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{2} + 1 \leq 0,5x - 1$; 3) $3\left(\frac{x}{3} - 1\right) + 1 \leq x - 2$;

2) $x - 1 < 2(1 - 0,5x)$; 4) $1 - \frac{3x}{4} < 0,25(4 - 3x)$.

193. Розв'яжіть нерівність:



1) $2,4x - \frac{x}{5} > 5$; 2) $\frac{2x}{3} - 3 < \frac{2x}{5} + 1$.

194. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} \leq \frac{x+2}{3} - x$; 3) $\frac{7+3x}{3} + \frac{x+1}{6} < x - \frac{7-3x}{2} + \frac{5x}{3}$;

2) $x + \frac{x+3}{2} - \frac{3x}{4} \geq \frac{3+2x}{8}$; 4) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-4}{2} > 1 - \frac{x}{4}$.

195. Розв'яжіть нерівність:



1) $x(x+2) \leq 3x + x^2 - 3$;

2) $2x(2-x) \geq 12 - 2x^2$;

3) $3x(10+5x) > 5(6x+3x^2) - 1$;

4) $2(1+x^2) < (2+2x)(x-1)$;

5) $(x-2)(x+3) - (x-1)(x+4) \geq 0$.

qr.orioncentr.com.ua/NZ209



196. Розв'яжіть нерівність:



1) $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} \leq 8$; 2) $(2x-1)(x+1) \geq (x-2)(3+2x)$.

197. Складіть нерівність виду $ax > b$, яка буде виконуватися за умови: 1) $x > 3$; 2) $x < -5$; 3) $x > -6$; 4) $x < 2$.

198. Складіть по три лінійні нерівності, розв'язком яких є числовий проміжок:



1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5]$.

199. Фермеру потрібно зібрати картоплю з поля, площа якого становить більш ніж 3 га. З якою середньою швидкістю (в гектарах за годину) повинна працювати картоплезбиральна машина, щоб завершити збір урожаю за 5 год?

200. Ширина прямокутника на 12 см менша за його довжину. Яке найменше ціле значення ширини прямокутника, якщо його периметр становить більш ніж 42 см?



201. Довжина прямокутника на 3 см більша за його ширину. Якою може бути довжина прямокутника, щоб його периметр становив менш ніж 96 см?

202. Плата за оренду приміщення складається з початкового внеску і плати за кожний місяць оренди. На скільки повних місяців можна орендувати приміщення, якщо максимальна сума, виділена на оренду, складає 45 000 грн, початковий внесок — 1000 грн, а плата за кожний місяць — 5000 грн?



203. Плата за фізіотерапевтичне лікування складається з плати за одноразове обстеження та плати за кожний сеанс. Скільки сеансів може відвідати пацієнт, якщо він може виділити на лікування не більше ніж 12 000 грн, вартість обстеження дорівнює 1500 грн, а плата за кожний сеанс — 800 грн?

204. Відомо, що $a > 10$. Доведіть, що:

1) $6a > 60$;

4) $2a + 17 > 37$;

2) $-3a < -30$;

5) $3 - \frac{a}{5} < 1$;

3) $\frac{a}{2} > 5$;

6) $20 - 2a > 100 - 10a$.

205. Доведіть нерівність:

1) $4a^2 + 1 \geq 4a$, якщо a — будь-яке число;

2) $a^2 - ab + b^2 \geq ab$, якщо a, b — будь-які числа;

3) $a^4 + 16 \geq 8a + 2a^3$, якщо a — будь-яке число.

206. Доведіть нерівність:

1) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$, якщо $a \neq 0$; 2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, якщо $ab > 0$;

$$3) \frac{a+2}{a} + \frac{a}{a+2} \geq 4, \text{ якщо } a > 0.$$

207. Доведіть нерівність:

$$1) a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \text{ якщо } a + b \geq 0;$$

$$2) (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4, \text{ якщо } a > 0, b > 0;$$

$$3) (a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2, \text{ якщо } a, b \text{ — будь-які числа};$$

$$4) a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3, \text{ якщо } a \geq b, b \geq 0.$$

208*. Доведіть нерівність:

$$1) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \text{ якщо } a, b, c \text{ — будь-які числа};$$

$$2) \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c, \text{ якщо } a > 0, b > 0, c > 0;$$

$$3) a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c), \text{ якщо } a, b, c \text{ — будь-які числа}.$$

209*. Розв'яжіть нерівність залежно від параметра a :

$$1) a + x < 2 - ax; \quad 3) a(x - 1) > x - 2;$$

$$2) 2(x - a) \leq ax - 4; \quad 4) \frac{x}{a} + \frac{1+3x}{2} > \frac{x+2}{4a}.$$

Проявіть компетентність

210. Сім'я Семеренків — тато, мама, син Андрій (школяр) і донька Настуня (дошкільниця) — вирішила у вихідні здійснити прогулянку на пароплаві поблизу Запоріжжя. Вартість квитка для дорослого — 80 грн. Діти від семи до 14 років катаються за півціни, а от для малечі віком до семи років прогулянка безкоштовна. Андрієві напередодні виповнилося 14 років, тому батьки вирішили запросити на прогулянку ще й кількох його однокласників / однокласниць. Із сімейного бюджету на квитки для подорожі було виділено 500 грн. Скількох однокласників / однокласниць зможе запросити на таку прогулянку Андрій, якщо його найкращому другові вже виповнилося 14 років, а інші однокласники / однокласниці молодші від нього?

§ 5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ



qr.orioncentr.com.ua/tl7HZ

1. Система лінійних нерівностей з однією змінною

Ситуація. Олексій мріє про новий спортивний велосипед, який коштує 7500 грн. Хлопець має 2500 грн заощаджень. Також він хоче, щоб після купівлі велосипеда в нього залишилося не менше ніж 300 грн на різні аксесуари (шолом, рукавички тощо). Батьки Олексія готові додати йому певну суму, але можуть виділити цього місяця від 3000 грн до 4000 грн включно.



Чи вистачить хлопцеві цих грошей?

Змоделюємо умову задачі.



Нехай x (грн) — сума, яку дадуть батьки Олексієві на велосипед. Тоді за умовою ситуації $2500 + x \geq 7500 + 300$ і $3000 \leq x \leq 4000$. Потрібно знайти ті значення змінної x , які б задовольнили ці дві умови одночасно, тобто знайти розв'язок системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2500 + x \geq 7500 + 300, \\ 3000 \leq x \leq 4000. \end{cases}$$

Запам'ятайте!

Розв'язком системи двох нерівностей з однією змінною є всі ті значення змінної, які одночасно задовольняють обидві нерівності.

Розв'язати систему двох нерівностей з однією змінною — означає знайти всі її розв'язки або показати, що розв'язків немає.

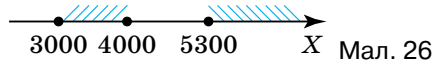
Розв'язуючи отриману в ситуації систему, другу нерівність залишаємо без змін, а першу послідовно перетворюємо:

$$\begin{cases} 2500 + x \geq 7500 + 300, \\ 3000 \leq x \leq 4000; \end{cases} \quad \begin{cases} 2500 + x \geq 7800, \\ 3000 \leq x \leq 4000; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 7800 - 2500, \\ 3000 \leq x \leq 4000; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5300, \\ 3000 \leq x \leq 4000. \end{cases}$$

Тепер знайдемо множину спільних розв'язків нерівностей, тобто переріз множин їхніх розв'язків (мал. 26).



Мал. 26

Як бачимо, спільних розв'язків нерівностей немає, тому система розв'язків не має. Записуємо відповідь: $\emptyset$.

Отже, грошей, які батьки можуть виділити на купівлю велосипеда цього місяця, Олексієві не вистачить.



Щоб розв'язати систему нерівностей, потрібно:

- 1) розв'язати кожну нерівність системи;
- 2) знайти переріз множин їхніх розв'язків.

Задача 1 Розв'яжіть систему нерівностей:

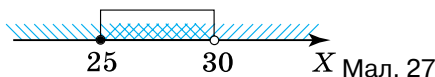
$$1) \begin{cases} 2x \geq 50, \\ 3x < 90; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ 3x - 12 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Розв'яжемо кожну нерівність системи:

$$\begin{cases} 2x \geq 50 : 2, & \begin{cases} x \geq 25, \\ x < 30. \end{cases} \\ 3x < 90 : 3; \end{cases}$$

Знайдемо переріз множин розв'язків нерівностей (мал. 27).



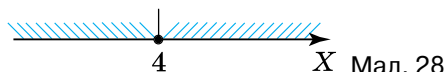
Мал. 27

Відповідь: $x \in [25; 30)$.

2. Розв'яжемо кожну нерівність системи:

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0, & \begin{cases} -x \geq -4 : (-1), & \begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq 4. \end{cases} \\ 3x - 12 \geq 0; & \begin{cases} 3x \geq 12 : 3; \end{cases} \end{cases}$$

Зобразимо множини їхніх розв'язків на координатній прямій (мал. 28).



Мал. 28

Спільним розв'язком двох нерівностей даної системи є лише одне число 4. Відповідь: $x \in \{4\}$.



Розв'язком системи може бути числовий проміжок, одне число або порожня множина.

Загалом, система нерівностей може містити дві, три і більше нерівностей.

2. Розв'язування лінійних нерівностей, що містять змінну під знаком модуля

Задача 2

Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| < 3$; 2) $|2x| \geq 5$; 3) $|x| > -1$; 4) $|x| \leq -2$.

qr.orioncentr.com.ua/gPmtg



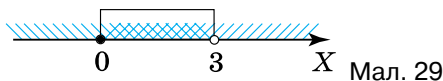
Розв'язання

1. Використовуючи означення модуля числа, запишемо дану нерівність у вигляді двох систем:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 3; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ -x < 3. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну систему окремо.

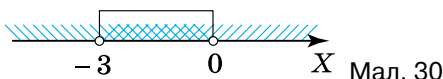
а) розв'язком першої системи є проміжок $[0; 3)$ (мал. 29);



Мал. 29

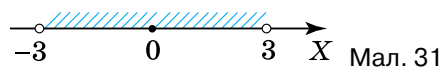
б) розв'яжемо другу систему: $\begin{cases} x < 0, \\ -x < 3; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x > -3. \end{cases}$

Розв'язком другої системи є проміжок $(-3; 0)$ (мал. 30).



Мал. 30

Оскільки системи нерівностей пов'язані логічним сполучником «або», то розв'язком початкової нерівності $|x| < 3$ є об'єднання проміжків, що є розв'язками двох одержаних систем (мал. 31).



Мал. 31

Відповідь: $x \in (-3; 3)$.

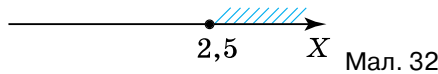
2. Скориставшись означенням модуля числа, запишемо дану нерівність у вигляді двох систем:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x \geq 5; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ -2x \geq 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну систему окремо.

а) розв'яжемо першу систему: $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x \geq 5; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2,5. \end{cases}$

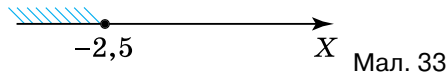
Розв'язком першої системи є проміжок $[2,5; +\infty)$ (мал. 32).



Мал. 32

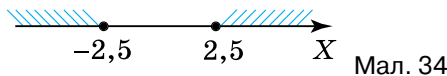
б) розв'яжемо другу систему: $\begin{cases} x < 0, \\ -2x \geq 5; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x \leq -2,5. \end{cases}$

Розв'язком другої системи є проміжок $(-\infty; -2,5]$ (мал. 33).



Мал. 33

Знайдемо об'єднання проміжків, що є розв'язками двох одержаних систем (мал. 34):



Мал. 34

Відповідь: $x \in (-\infty; -2,5] \cup [2,5; +\infty)$.

3. Оскільки $|x|$ за будь-яких значень змінної x є невід'ємним числом, то нерівність $|x| > -1$ виконується за будь-яких значень змінної x .

Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. Оскільки $|x| \geq 0$ за будь-яких значень змінної x , то нерівність $|x| \leq -2$ не виконується за жодних значень змінної x . Отже, дана нерівність не має розв'язків.

Відповідь: $\emptyset$.



Нерівність $|f(x)| < a$, де a — додатне число, рівносильна подвійній нерівності $-a < f(x) < a$, або ж системі

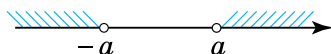
нерівностей $\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a; \end{cases}$ (мал. 35).



Мал. 35



Нерівність $|f(x)| > a$, де a — додатне число, рівносильна сукупності нерівностей $\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a; \end{cases}$ (мал. 36). Їх розглянемо в наступному параграфі.



Мал. 36

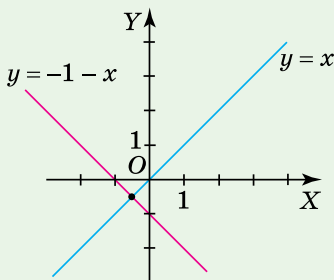
Дізнайтеся більше

Системи нерівностей, й особливо нерівностей з двома змінними, застосовують для аналітичного опису частин площини (областей, смуг тощо), а також відомих вам плоских геометричних фігур. Розглянемо приклади.

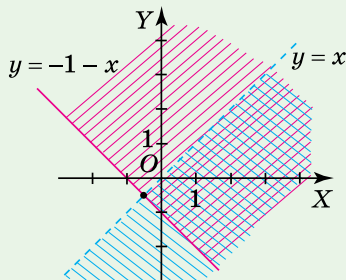
Задача 3 Знайдіть множину точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} y < x, \\ y \geq -1 - x. \end{cases}$

Розв'язання Застосуємо графічний спосіб. Для цього в одній системі координат побудуємо графіки лінійних функцій: $y = x$ і $y = -1 - x$ (мал. 37). Оскільки нерівність $y < x$ має строгий знак, то всі точки, що лежать на прямій $y = x$, не входять до шуканої множини. Точки прямої $y = -1 - x$ входять до шуканої області, оскільки нерівність $y \geq -1 - x$ має нестрогий знак.

Прямі $y = x$ та $y = -1 - x$ поділили площину на чотири області. Шукана множина точок розташована нижче від прямої $y = x$ та вище за пряму $y = -1 - x$. Переріз цих множин і є шуканою множиною (мал. 38).



Мал. 37



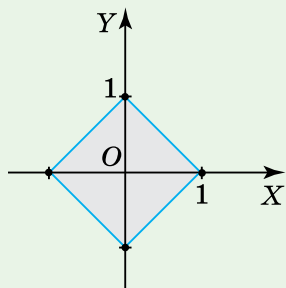
Мал. 38

Задача 4 Знайдіть множину точок площини, координати яких задовольняють нерівність: $|x| + |y| \leq 1$.

Розв'язання

Розкриємо кожний модуль за означенням та розглянемо всі можливі варіанти обмежень на значення змінних x і y . Одержимо чотири системи:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x + y \leq 1; \end{cases} & 3) \begin{cases} x < 0, y \geq 0, \\ -x + y \leq 1; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x \geq 0, y < 0, \\ x - y \leq 1; \end{cases} & 4) \begin{cases} x < 0, y < 0, \\ -x - y \leq 1. \end{cases} \end{array}$$



Мал. 39

Розв'язавши кожну систему графічним способом (аналогічно до задачі 3), одержимо шукану область (мал. 39).

Словничок
qr.orioncentr.com.ua/87bn4

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
система лінійних нерівностей	system of linear inequalities	System linearer Ungleichungen	système d'inéquations linéaires

Пригадайте головне

1. Наведіть приклад системи двох нерівностей з однією змінною.
2. Що називають розв'язком системи двох лінійних нерівностей з однією змінною?
3. Як розв'язати систему двох нерівностей з однією змінною?
4. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| < a$?
5. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| > a$?

Усне тренування

1. Обчисліть: $\sqrt{13^2 - 12^2}$; $\sqrt{37^2 - 27^2}$; $\sqrt{27^2 + 9^2}$.
2. Знайдіть значення одночлена $2,5x^2$, якщо $x = 4$; $0,2$; 0 ; -10 .
3. Обчисліть:
 - 1) $3^7 \cdot (3^3)^2 : 3^{-10}$;
 - 2) $5^{15} : (5^6)^3 : 5^{-15}$.

Розв'яжіть задачі

211'. Чи є число 2 розв'язком системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 1, \\ x \leq 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > -3, \\ x < 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \leq 4, \\ x > 2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3? \end{cases}$$

212'. Яке із чисел -1 ; 0 ; 1 є розв'язком системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > -1, \\ x > -3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 3, \\ x < 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \leq 1, \\ x > -1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -1? \end{cases}$$

213'. Назвіть два цілі числа, що є розв'язками системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 3, \\ x < 10; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \leq 2,5, \\ x > -1,5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

214°. Розв'яжіть систему нерівностей:



$$1) \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 0, \\ x > -2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \geq 3, \\ x < 7; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x \leq 1, \\ x < 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq -3; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x \geq 3, \\ x > 4; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} x \leq 2, \\ x < -3; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x \geq 0, \\ x > -2. \end{cases}$$



qr.orioncentr.com.ua/WVJcd

215°. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 6 < 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 4 \leq 0, \\ x + 4 \geq 0; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x - 2 < 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - 1 \leq 0, \\ 2 - x < 0; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x \geq 0, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

216°. Розв'яжіть систему нерівностей:



$$1) \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 4 \leq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2 - x \leq 0, \\ 5 - x \geq 0. \end{cases}$$

217°. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2x \geq 4, \\ 2x < 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x \leq -9, \\ -2x < 9; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 2x \leq -7, \\ -2x > 9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x \geq 3, \\ 4x < 10; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x \geq 0, \\ -2x > -4; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 2x \geq 0, \\ -2x < -5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -2x \leq 1, \\ 2x \geq -3; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} -5x \geq 0, \\ 3x > -12; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 4x \geq 0, \\ -4x < -8. \end{cases}$$

218°. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} -0,1x - 0,33 > x, \\ 2x - 0,1 > x; \end{cases} & 3) \begin{cases} 0,5y - 2 \leq 4, \\ 1 - 0,3y \geq 0,2y; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 4x - 0,2 < 5x, \\ 0,3x + 1 > 0,4x; \end{cases} & 4) \begin{cases} 7 - 0,4z \leq 0,3z, \\ 2z - 1 \geq 3. \end{cases} \end{array}$$

219°. Розв'яжіть систему нерівностей:

E

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3x \geq 18, \\ 2x < 11; \end{cases} & 3) \begin{cases} 2 - 3x < 5, \\ 0,1 - 0,2x > 0,4; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 4x \geq 2, \\ 4x < 6; \end{cases} & 4) \begin{cases} 9 - 0,5y \geq 0,5y, \\ 0,3y - 1 \geq 2. \end{cases} \end{array}$$

220°. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 1,5x + 4,5 \leq 0, \\ \frac{1}{3}x \geq -1; \end{cases} & 3) \begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{5}{6} < \frac{1}{3}, \\ 2x < 3; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} \frac{5}{6}y - 10 \leq 0, \\ \frac{y}{9} \geq 1\frac{1}{3}; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{2}{3}y - 2\frac{2}{3} \leq 0, \\ \frac{7y}{8} \geq 1\frac{11}{24}. \end{cases} \end{array}$$

221°. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 5x - 7 < 3x - 14, \\ 5 - 4x > 29 - 2x; \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x + 3 \leq 2x + 1, \\ -2 + 3x \leq 4x + 2; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 1 - 12y \leq 3y + 1, \\ 2 - 6y \geq 4 + 4y; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2 + 4y \geq 5y + 3, \\ 2 - 3y < 7 - 2y. \end{cases} \end{array}$$

222°. Розв'яжіть систему нерівностей:

E

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 1,5x - 7,5 \geq 0, \\ -\frac{2}{3}x > -4; \end{cases} & 2) \begin{cases} 3y - 10 \leq 5 - 2y, \\ 2y - 9 \geq 3y - 11. \end{cases} \end{array}$$

223°. Розв'яжіть подвійну нерівність:

L

$$\begin{array}{l} 1) 3 \leq x + 1 \leq 8; \\ 2) -3 < 2x + 1 < 3; \\ 3) -8 \leq 3x - 4 < 1; \\ 4) -4 < \frac{2x}{3} < 4; \\ 5) -2,5 \leq 1 - x < 7; \\ 6) -1 < \frac{4 - 5x}{6} \leq 9. \end{array}$$



qr.orioncentr.com.ua/czG4R

224°. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $2 \leq 2x + 1 \leq 6$; 3) $-3 \leq 19 - 5x < 7,5$;

2) $-6 < 5x - 1 < 9$; 4) $-11 < \frac{21-4x}{2} \leq 19$.

225°. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| \leq 4$; 5) $|x| > 3$;

2) $|-x| \leq 2,5$; 6) $|x| \geq -1$;

3) $|x| \leq -3$; 7) $|3x| > 6$;

4) $|2x| < 6$; 8) $-|-3x| \geq 5$.

qr.orioncentr.com.ua/oa2ze**226.** Розв'яжіть систему нерівностей:

1)
$$\begin{cases} 5(x-4)+1 \leq 7x+3, \\ 43-3(7+x) \geq 1+4x; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3(x+8) \geq 4(7-x), \\ (x+2)(x-5) > (x+3)(x-4); \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 5(x+1)-x \geq 2x+2, \\ 4(1+x)-2 \leq 2(2x+1)-x; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} (x+2)(x-6) \leq (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) > 7(2x-4). \end{cases}$$

227. Розв'яжіть систему нерівностей:

1)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{4} \leq 7, \\ 1 - \frac{x}{6} \geq 0; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x - \frac{x}{4} \geq 2, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} \geq 1; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{4} \geq x, \\ x - \frac{x-4}{5} > 1; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x - \frac{x-1}{2} > 1, \\ \frac{x}{3} \leq 5. \end{cases}$$

228. Розв'яжіть систему нерівностей:

1)
$$\begin{cases} 2(x-1)+2 \leq 3x+4, \\ 33-3(7+2x) \geq 2+4x; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x - \frac{x}{7} \geq 12, \\ \frac{x-3}{2} + \frac{x-2}{3} \geq 5. \end{cases}$$

229. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq \frac{x-3}{4} - x, \\ 1+x \geq 0,5x-4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{8x+1}{3} > \frac{4x+9}{2} - \frac{x-1}{3}, \\ \frac{5x-2}{3} < \frac{2x+13}{2} - \frac{x+2}{3}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{5x+7}{6} - \frac{3x}{4} < \frac{11x-7}{12}, \\ \frac{1-3x}{2} - \frac{1-4x}{3} \geq \frac{x}{6} - 1; \end{cases}$$

230. Розв'яжіть систему нерівностей:



$$1) \begin{cases} \frac{2x-1}{6} + \frac{x+2}{3} - \frac{x-8}{2} \geq x-1, \\ 2-2x \leq -0,5x+0,5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{3x-13}{4} \leq \frac{x-1}{4} - \frac{7}{8}, \\ \frac{x}{4} + \frac{3-2x}{3} \leq 2. \end{cases}$$

231. Знайдіть усі цілі числа, що є розв'язками системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 1-0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} \leq -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{2x-4}{5} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} \geq \frac{x+4}{7}. \end{cases}$$

232. Розв'яжіть нерівність:

$$1) |2x-1| \leq 3; \quad 3) |1-3x| \geq 7; \quad 5) 2-|2-x| \leq 12; \\ 2) 3|x-1| < 12; \quad 4) -2|x+1| < 8; \quad 6) 1+2|3-2x| > -1.$$

233. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{|x|+1}; \quad 3) y = 4 - \sqrt{|x+1|-3}; \\ 2) y = \sqrt{2-|x|}; \quad 4) y = \frac{2}{1+\sqrt{3-2|x-1|}}.$$

234. Розв'яжіть нерівність:



$$1) |x| \leq -1; \quad 3) |2-3x| \geq 5; \\ 2) |-x| \geq 3; \quad 4) -3|x-1| < 15.$$

235. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} |x-1| \leq 2, \\ |x-4| \geq 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} |x+5| \leq 3, \\ |x-1| \geq 4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} |2x+4| \leq 6, \\ 3-2x \geq -1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} |3x+1| \leq 10, \\ 4x+3 < 11. \end{cases}$$

236. Якщо на першу частину шляху, завдовжки 50 км, мотоцикліст витратить не більш ніж 2 год, то на другу його частину, завдовжки 90 км, їдучи з тією самою швидкістю, він зможе витратити більш ніж 3 год. З якою швидкістю потрібно їхати мотоциклістові?

237. На першу частину маршруту, яка становить 30 км, Петро може витратити не більш ніж 1 год. Другу частину маршруту, завдовжки 75 км, він має подолати, рухаючись з тією самою швидкістю, не менш ніж за 2 год. З якою швидкістю потрібно їхати Петрові, щоб дотриматись усіх цих умов?



238. Бригада збирачів полуниць планує зібрати ягоди за 6 год з поля площею від 1,5 га до 2 га включно. З якою середньою продуктивністю їм треба працювати?

239. Загальний об'єм деталі, яку потрібно надрукувати на 3D-принтері, становить орієнтовно від 864 см^3 до 1296 см^3 включно. Скільки годин працюватиме 3D-принтер, що друкує 120 мм^3 за секунду?



240*. За яких значень параметра a система нерівностей:

а) має розв'язки; б) не має розв'язків:

$$1) \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 5, \\ x > a; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \leq 5, \\ x > a; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x > 5, \\ x \leq a; \end{cases}$$

241*. Доведіть нерівність:

1) $|a+b| \leq |a|+|b|$, якщо a, b — будь-які числа;

2) $||a|-|b|| \leq |a-b|$, якщо a, b — будь-які числа.

Проявіть компетентність

242. У дідуся на дачі є чотири однакові бочки для води. В одну бочку вміщується менш ніж 10 відер води, а в усі чотири бочки разом — більш ніж 34 відра води. Скільки повних відер води вміщується в одну бочку?

243. Сорт лаванди «мрія» потребує специфічних кліматичних умов для отримання якісного врожаю з високим вмістом ефірної олії. Щоб рослина вчасно починала вегетацію, середньорічна температура

повітря в місці її вирощування має бути більшою за $7,5^{\circ}\text{C}$. З іншого боку, якщо середньорічна температура перевищує $9,5^{\circ}\text{C}$, це негативно впливає на якість цвітіння. Використавши довідкові дані (табл. 15), з'ясуйте, яка з наведених областей є найбільш кліматично придатною для вирощування цього сорту лаванди.

Таблиця 15

Області України	Середньорічна температура
Вінницька область	$8,3^{\circ}\text{C}$
Полтавська область	$8,0^{\circ}\text{C}$
Київська область	$8,6^{\circ}\text{C}$
Житомирська область	$7,4^{\circ}\text{C}$
Черкаська область	$8,5^{\circ}\text{C}$

- 244.** Щоб добре почуватися й мати гарні оцінки, Максимові потрібно дотримуватися порад лікаря: 1) спати не менше ніж 8 год на добу бо, якщо спати менше, мозок недостатньо відпочиває; 2) спати не більше ніж 10 год на добу, бо надлишок сну може викликати млявість; 3) спати більше ніж 7 год 30 хв на добу, щоб імунна система працювала на повну; 4) лягати не пізніше 22:30, щоб спрацьовував гормон росту. Яким є інтервал часу сну для Максима, що відповідає всім рекомендаціям лікаря?

§ 6. СУКУПНОСТІ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. Сукупність лінійних нерівностей з однією змінною



qr.orioncentr.com.ua/Jxl07

Ситуація. Андрій та Олеся вивчали кліматичні умови для успішного вирощування кавових дерев. Андрій дізнався, що для сорту «арабіка» потрібна середньорічна температура повітря не нижча від 18°C , але й не вища за 24°C . Олеся прочитала, що для сорту «робуста» сприятлива середньорічна температура має бути не меншою від 22°C і не більшою за 28°C .



За яких середньорічних температур можна вирощувати хоча б один із цих сортів кави?

Змоделюємо умову задачі.



Нехай T — сприятлива середньорічна температура повітря, тоді для сорту «арабіка»: $18 \leq T \leq 24$, а для сорту «робуста»: $22 \leq T \leq 28$. Потрібно знайти ті значення змінної T , які б задовольнили хоча б одну із цих двох умов, тобто знайти розв'язок *сукупності нерівностей*:

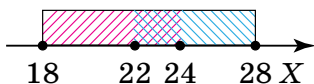
$$\begin{cases} 18 \leq T \leq 24, \\ 22 \leq T \leq 28. \end{cases}$$

Запам'ятайте!

Розв'язком сукупності двох нерівностей з однією змінною є всі ті значення змінної, які задовольняють хоча б одну з двох нерівностей.

Нерівності в сукупності об'єднані логічним сполучником «або», тому **розв'язком сукупності нерівностей** є об'єднання проміжків, що є їхніми розв'язками.

У ситуації, розглянутій на початку параграфа, розв'язком першої нерівності сукупності є проміжок $[18; 24]$, а другої — $[22; 28]$. Знайдемо об'єднання цих проміжків (мал. 40).



Мал. 40

Як бачимо, об'єднанням цих проміжків є проміжок $[18; 28]$. Отже, сприятливий температурний діапазон для вирощування хоча б одного із цих сортів кави — від 18°C до 28°C включно.



Щоб розв'язати сукупність нерівностей, потрібно:

- 1) розв'язати кожну нерівність сукупності;
- 2) знайти об'єднання множин їхніх розв'язків.

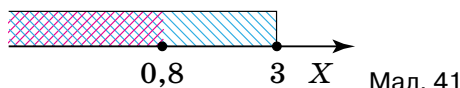
Задача 1 Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} 6-2x \geq 0, \\ 5x-4 \leq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x+2 > 2(x+6), \\ 4(x-1) \leq x+5. \end{cases}$$

Розв'язання 1. Розв'яжемо кожну нерівність сукупності:

$$\begin{cases} 6-2x \geq 0, \\ 5x-4 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x \geq -6, \\ 5x \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -6 : (-2), \\ x \leq 4 : 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3, \\ x \leq 0,8. \end{cases}$$

Знайдемо об'єднання множин розв'язків нерівностей (мал. 41).



Мал. 41

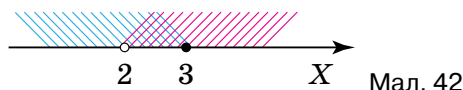
Отже, $x \in (-\infty; 3]$.

2. Розв'яжемо кожну нерівність сукупності:

$$\begin{cases} 7x+2 > 2(x+6), \\ 4(x-1) \leq x+5; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+2 > 2x+12, \\ 4x-4 \leq x+5; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x-2x > 12-2, \\ 4x-x \leq 5+4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 10, \\ 3x \leq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Знайдемо об'єднання множин розв'язків нерівностей (мал. 42).



Мал. 42

Об'єднанням множин розв'язків нерівностей даної сукупності є вся числова пряма. Отже, $x \in \mathbb{R}$.



За якої умови розв'язком сукупності нерівностей є порожня множина?

Якщо розв'язком кожної нерівності сукупності є порожня множина.



Розв'язком сукупності лінійних нерівностей може бути числовий проміжок, об'єднання числових проміжків або порожня множина.

Загалом, сукупність нерівностей може містити дві, три і більше нерівностей або навіть системи нерівностей.

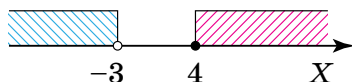
Задача 2 Розв'яжіть сукупність систем нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - 8 \geq 0, \\ 7x + 21 < 0, \\ 4 + 2(1 - 2x) < 6x, \\ 2 - 3(3 - 2x) < 8(2x - 1). \end{cases}$$

Розв'язання Розв'яжемо кожен нерівність у кожній із систем:

$$\begin{cases} 2x \geq 8, \\ 7x < -21, \\ 4 + 2 - 4x < 6x, \\ 2 - 9 + 6x < 16x - 8; \end{cases} \begin{cases} x \geq 4, \\ x < -3, \\ 10x > 6, \\ 10x > 1; \end{cases} \begin{cases} x \geq 4, \\ x < -3, \\ x > 0,6, \\ x > 0,1. \end{cases}$$

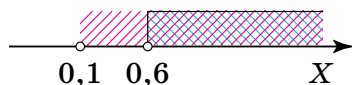
Знайдемо множину розв'язків першої системи (мал. 43).



Мал. 43

Отже, множина розв'язків цієї системи — порожня множина ($\emptyset$).

Знайдемо множину розв'язків другої системи (мал. 44).



Мал. 44

Отже, множина розв'язків цієї системи: $(0,6; +\infty)$.

Отримали сукупність: $\begin{cases} \emptyset, \\ x > 0,6. \end{cases}$

Знайдемо об'єднання множин розв'язків першої і другої систем: $(0,6; +\infty) \cup \emptyset = (0,6; +\infty)$. Отже, $x \in (0,6; +\infty)$.

2. Розв'язування лінійних нерівностей, що містять вираз під знаком модуля

Задача 3 Розв'яжіть нерівність:

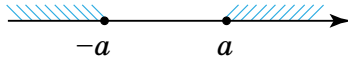
1) $|5x| - 8 > 2$; 2) $|x + 1| > x - 2$.

qr.orioncentr.com.ua/6wBKH



1. Дана нерівність рівносильна нерівності $|5x| > 10$.

Як було показано в попередньому параграфі, нерівність $|f(x)| > a$, де $a > 0$, рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases} \quad (\text{мал. 45}).$$


Мал. 45

Тому задана нерівність рівносильна сукупності нерівностей:

$$\begin{cases} 5x > 10, \\ 5x < -10; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x < -2. \end{cases}$$

Отже, $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

2. Спосіб 1. За означенням модуля маємо:

якщо $x + 1 \geq 0$, то $|x + 1| = x + 1$,

якщо $x + 1 < 0$, то $|x + 1| = -x - 1$.

Запишемо це як сукупність двох систем:

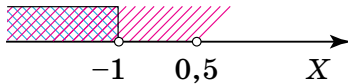
$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+1 > x-2, \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ 0 \cdot x > -3, \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x \in R, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0, \\ -x-1 > x-2; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ 2x < 1; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x < 0,5. \end{cases}$$

У першій системі одержали: $x \geq -1$, тому множина її розв'язків:

$$[-1; +\infty).$$

Знайдемо множину розв'язків другої системи (мал. 46).



Мал. 46

У другій системі одержали: $x < -1$, тому множина її розв'язків:

$$(-\infty; -1).$$

Подамо ці результати як сукупність:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x < -1. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї сукупності. Для цього знайдемо об'єднання множин розв'язків першої і другої систем:

$$(-\infty; -1) \cup [-1; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

Отже, $x \in R$.

Спосіб 2. Нерівність $|f(x)| > g(x)$ рівносильна сукупності нерівностей $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$

Доведіть це самостійно.

Тому нерівність $|x + 1| > x - 2$ рівносильна сукупності:

$$\begin{cases} x + 1 > x - 2, \\ x + 1 < -x + 2; \end{cases} \begin{cases} 1 > -2, \\ 2x < 1; \end{cases} \begin{cases} x \in R, \\ x < 0,5. \end{cases}$$

Розв'язком цієї сукупності є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Отже, $x \in R$.



- Нерівність $|f(x)| > g(x)$ рівносильна **сукупності** нерівностей: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$
- Нерівність $|f(x)| < g(x)$ рівносильна **системі** нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Дізнайтеся більше

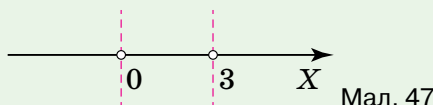
1. Сукупності нерівностей застосовують і в розв'язуванні нерівностей, що містять два і більше виразів під знаком модуля.

Задача 4 Розв'яжіть нерівність: $|x| + |x - 3| > 4$.

Розв'язання

1. Випишемо вирази, що стоять під знаком модуля, і знайдемо значення змінної, за яких значення цих виразів дорівнюють нулю: $x = 0$; $x - 3 = 0$, звідси $x = 3$.

2. Розбиваємо координатну пряму отриманими значеннями $x = 0$ і $x = 3$ на інтервали (мал. 47): $(-\infty; 0)$, $[0; 3)$, $[3; +\infty)$.



Мал. 47

3. Визначаємо знак виразів x і $x - 3$ на кожному з отриманих інтервалів. Потім розкриваємо модулі $|x|$ і $|x - 3|$ на кожному з інтервалів. Враховуємо, що в межах інтервалу лінійний вираз знак свого значення не змінює.

x	$-$	$-x$	$+$	x	$+$	x
$x - 3$	$-$	$-x + 3$	$-$	$-x + 3$	$+$	$x - 3$

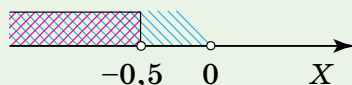
4. Записуємо сукупність систем та спрощуємо її:

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ -x - x + 3 > 4, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ -2x > 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x < -0,5, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < 3, \\ x - x + 3 > 4, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < 3, \\ 3 > 4, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < 3, \\ 3 > 4, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 3, \\ x + x - 3 > 4; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3, \\ 2x > 7; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3, \\ x > 3,5. \end{array} \right.$$

Знаходимо множину розв'язків першої системи (мал. 48).

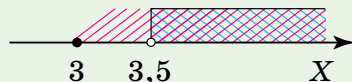


Мал. 48

Отже, множина розв'язків першої системи: $(-\infty; -0,5)$.

Множина розв'язків другої системи — порожня, оскільки нерівність $3 > 4$ не виконується за жодних умов.

Знаходимо множину розв'язків третьої системи (мал. 49).



Мал. 49

Отже, множина розв'язків третьої системи: $(3,5; +\infty)$.

Отримали сукупність: $\begin{cases} x < -0,5 \\ x > 3,5. \end{cases}$

Отже, $x \in (-\infty; -0,5) \cup (3,5; +\infty)$.

2. Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) — видатний український математик. Народився в с. Маліївка (нині Золотоніський район Черкаської обл.). Після навчання в Київському університеті здобував освіту в провідних університетах Європи, де слухав лекції О.-Л. Коші, Ж. Ліувілля та Серре. Переклав «Начала» Евкліда. Велике історіографічне значення має його праця «Історія математики: історичний нарис розвитку геометрії» (1883 р.), та дослідження «Історичний нарис розвитку аналітичної геометрії» (1884 р.).

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/BKNnR

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
сукупність лінійних нерівно- стей	set of linear inequalities	Menge linearer Ungle- ichungen	union d'inégalités linéaires

Пригадайте головне

1. Наведіть приклад сукупності двох нерівностей з однією змінною.
2. Що називають розв'язком сукупності двох лінійних нерівностей з однією змінною? Чи може сукупність лінійних нерівностей з однією змінною не мати розв'язків?
3. Як розв'язати сукупність двох нерівностей з однією змінною?
4. Як розв'язати нерівність виду $|f(x)| > g(x)$?
5. Як розв'язати нерівність виду $|f(x)| < g(x)$?

Усне тренування

1. Обчисліть: $3\frac{5}{8} - 8$; $1,6 - 3,7$; $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{16}$; $4\frac{2}{7} : 1\frac{1}{7}$.

2. Порівняйте: $1,95 - \frac{3}{5}$ і $1\frac{21}{25} - 0,45$; $\frac{1}{3} + 0,6$ і $0,8 - \frac{5}{15}$.

3. Подайте у вигляді десяткового дробу: $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{8}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{4}{25}$;

$\frac{19}{200}$; $-\frac{23}{50}$.

Розв'яжіть задачі

245'. Чи є число 5 розв'язком сукупності нерівностей:

1) $\begin{cases} -2x \geq 0, \\ 5x \leq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x \geq 0, \\ x \leq -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x \leq -1, \\ -4x \leq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq 20, \\ 5x \leq 3? \end{cases}$

246'. Яке із чисел -2 ; 0 ; 3 є розв'язком сукупності нерівностей:

1) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x < 15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x > -7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geq -13? \end{cases}$

247'. Назвіть два цілі числа, що є розв'язками сукупності нерівностей:

$$1) \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 0, \\ x \leq 10; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \leq -1, \\ x > -2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 20, \\ x \geq -6. \end{cases}$$

248°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:



$$1) \begin{cases} x \geq 5, \\ x < -2; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x \geq 3, \\ x > 8; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x > 5, \\ x < 5; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x \leq 5, \\ x < -2; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x > 15, \\ x \leq 0; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} x \geq 5, \\ x > 2; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 4; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x \leq 0, \\ x < -4. \end{cases}$$



qr.orioncentr.com.ua/Wfoh1

249°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} x+4 \geq 0, \\ x-2 < 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x-6 \leq 0, \\ x-3 \leq 0; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x+5 \leq 0, \\ 4-x < 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x+4 < 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2-x < 0; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ -2-x \geq 0. \end{cases}$$

250°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:



$$1) \begin{cases} x+8 < 0, \\ x-3 < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x+6 < 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 7-x > 0, \\ x+1 \leq 0. \end{cases}$$

251°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2x < 4, \\ 3x < -3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x \geq -9, \\ -4x < 60; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 7 > -x+3, \\ 3-2x > 10; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} -2x \leq 6, \\ 5x < -8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 6x-1 \geq 9, \\ -1 \geq -3x; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 8-2x < 0, \\ 5-4x \geq 2. \end{cases}$$

252°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2(x+3)-x+8 < 1, \\ 9x > 3(x+1)-1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0,5(2-x)-0,4x > 3, \\ -0,6(3x+1)-9x \leq 3x; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} -(x-2)+(x-1) \leq -4x, \\ 5x+4 \geq 12-3(x+1); \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 1,2(3-x)-0,8x \leq 3, \\ -2(1-4x)-5x \geq x. \end{cases}$$

253°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 4x < 12, \\ -x > -5; \end{cases} & 3) \begin{cases} 6,5x - 2 \leq 1,5x - 1, \\ 2 - 5x \geq x + 1,5; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} 0,3x \geq 6, \\ -10x > -0,5; \end{cases} & 4) \begin{cases} 6,5x - 2 \leq 1,5x - 1, \\ 2 \geq 5x - 2(1 - 2x). \end{cases}
 \end{array}$$

254°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$\begin{array}{llll}
 1) \begin{cases} \frac{3x}{5} < 1, \\ -\frac{x}{8} > 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{4x}{3} \geq 2, \\ \frac{6x}{5} > 1; \end{cases} & 3) \begin{cases} \frac{2+x}{6} \geq -1, \\ \frac{3-x}{4} \leq 7; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{7-2x}{3} \leq 0, \\ \frac{1+3x}{4} > 2. \end{cases}
 \end{array}$$

255°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} \frac{3x}{4} - x > 5, \\ 3x + 3 \leq 3(x - 2); \end{cases} & 3) \begin{cases} 2x + \frac{x}{3} \geq 7, \\ 4(1 + x) > x - 2; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} \frac{6x}{7} - x < -\frac{x}{7} + 5, \\ 8(x - 1) \leq -4 + 8x; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{2x-1}{5} - 3x < \frac{11x+1}{5}, \\ 5(x+1) - 6 \geq 2x - 0,8. \end{cases}
 \end{array}$$

256°. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} \frac{x}{3} \leq 0,1, \\ 3x - 0,2 > 1; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{1-6x}{7} > 1, \\ -2(x+1) + 1 \geq -2x; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \frac{x}{4} + 4 \leq 0,25x - 1, \\ 5(1-x^4) < (5x^2+5)(1-x^2); \end{cases} & 4) \begin{cases} x < 3, \\ \frac{2x+1}{2} - \frac{2-x}{7} > 1. \end{cases}
 \end{array}$$

257°. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll}
 1) |x| > 5; & 4) |-x| > -1; \\
 2) |x| > -5; & 5) |-2x| > -7; \\
 3) |-x| \geq 6; & 6) -|0,5x| \leq 2.
 \end{array}$$

qr.orioncentr.com.ua/sdzqd

**258°.** Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{llll}
 1) |2-x| > 2; & 3) |1-2x| \geq 3; & & \\
 2) |x+3| \geq -1; & 4) |5x+3| > 3,2; & 5) -|-2x+7| < -8.
 \end{array}$$

259°. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll}
 1) |x| > 7; & 3) |2x+9| \geq -3,6; \\
 2) |x-3| \geq 2; & 4) |-3x+4| > 1,6.
 \end{array}$$

260°. Розв'яжіть нерівність:

1) $|1+x| > 1-x$;

4) $|5x-3| > 3-2x$;

2) $6-3x < |x-3|$;

5) $|-x-7| > 6+8x$;

3) $|1+2x| \geq x+4$;

6) $-|-x+3| < -2x+1$.

261°. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| > 2-x$;

3) $|2x+9| \geq 7-3x$;

2) $|x-3| \geq 6x+5$;

4) $|2-3x| > x+1,6$.

262. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1)
$$\begin{cases} 2(x-4) + (x-2) \leq 7x+3, \\ 41-3(7+x) \geq 2+5x; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} (x-4)(x-2) > (x+3)(x-1), \\ 3(7-x) < 3(x+8); \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 6x^2 > (3x+3)(2x-1)+2, \\ 4(1-x)-0,3 < 2(x+0,8)-x; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} (x+1)(x-5) \leq (x+6)(x-4)+1, \\ -2(1-1,6x) < 8(2x+0,7). \end{cases}$$

263. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1)
$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{x}{3} \leq -3, \\ 1 - \frac{x}{6} \leq 0; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x + \frac{x+1}{3} > 2x-1, \\ \frac{2x-5}{8} \leq -3; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2 - \frac{x}{5} \geq x, \\ x - \frac{x-2}{5} > 1; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x - \frac{x}{3} \leq x-2, \\ \frac{x+1}{4} - \frac{x-1}{3} > 1. \end{cases}$$

264. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1)
$$\begin{cases} 0,8(x-3)-3,2 \leq 0,3(2-x), \\ x - \frac{x-4}{6} > 1,2; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2 > 5x - (2x-1), \\ \frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{6} \leq 2. \end{cases}$$

265. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{2} \leq -x + \frac{2x-1}{4}, \\ 1-x > 0,5x+2; \end{cases} 3) \begin{cases} \frac{6x+1}{7} > -\frac{3x+4}{2} - \frac{x-7}{14}, \\ \frac{2-5x}{5} - \frac{5-4x}{3} \leq \frac{2x+1}{6} - 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-8}{6} - \frac{3x}{8} > -\frac{12x+7}{12}, \\ \frac{1-3x}{2} - \frac{5-4x}{6} \leq \frac{x}{3} - x; \end{cases}$$

266. Розв'яжіть сукупність нерівностей:



$$1) \begin{cases} \frac{2x-1}{6} - 3 > -\frac{8x+3}{2}, \\ \frac{3x}{2} + \frac{5-4x}{6} \leq \frac{x}{5} + 3; \end{cases} 2) \begin{cases} \frac{3x-12}{4} - \frac{2x-1}{2} \leq -x - \frac{5x+1}{8}, \\ 2-1,5x > 0, 2x+0,3. \end{cases}$$

267. Знайдіть усі цілі числа, що не є розв'язками сукупності нерівностей:



$$1) \begin{cases} -\frac{x-5}{10} - \frac{x+1}{2} \leq -2, \\ 1-x \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-10}{10} + \frac{x+5}{2} \geq 7, \\ 7x+6 < 3x-14; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -\frac{x-11}{3} < \frac{x+1}{7} - 4, \\ 12-2x \geq 0. \end{cases}$$

qr.orioncentr.com.ua/yxgmN



268. Розв'яжіть сукупність систем нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2x+15 \geq 0, \\ x-(3x-1) < 0, \\ 3-4x < 2, \\ 2x-(5-x) < 10x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 7x+2 \leq 6x+3, \\ 6,5x-2 \geq 1,5x+2, \\ 2-3x \geq x+6, \\ 2x-(5-x) \leq 10x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x-\sqrt{8} < 0, \\ x+\sqrt{10} < 0, \\ 3x > \sqrt{12}, \\ \sqrt{2}-x > 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3(x+1)-x \leq 2(1-x), \\ -2 \geq 5x-(x+2), \\ 0,2(x-3)+0,2x \geq 6, \\ -2(1-4x)-5x \leq x. \end{cases}$$

269. Знайдіть числа, що не задовольняють нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) |2 - 3x| \leq 2; & 3) -2|x + 1| > 8; \\ 2) 3|2 - x| < 6; & 4) 5 - |x| \geq 3 + 2|x|. \end{array}$$

270. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 5 \leq |x + 1| \leq 9; & 4) 1 < \left| \frac{2x}{3} \right| < 2; \\ 2) -3 < |5x - 1| < 4; & 5) -0,3 \leq |1 - x| < 0; \\ 3) 2 \leq |3x - 4| < 10; & 6) -2 < \left| \frac{1 - 5x}{3} \right| \leq 7. \end{array}$$

271. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 1 \leq |x + 3| \leq 5; & 3) 3 \leq |10 - 5x| < 4,5; \\ 2) -1 < |7x - 1| < 6; & 4) 0,2 < \left| \frac{2 - 8x}{4} \right| \leq 0,6. \end{array}$$

272. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) x + |x| \leq -3; & 3) |5x - 4| - 7x \geq 1; \\ 2) x - |x| \leq 2; & 4) -3|2 - 0,5x| < 9 - 12x. \end{array}$$

273. Розв'яжіть нерівність:



$$\begin{array}{l} 1) 1 + |x - 4| > 2x; \\ 2) -2 + |x + 4| > 3x. \end{array}$$

274. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) (x - 4)(x - 5) > 0; & 3) (3x + 4)(2x + 3) \leq 0; \\ 2) \frac{x+1}{x-3} < 0; & 4) \frac{9-x}{x+6} \leq 0. \end{array}$$

275. Розв'яжіть нерівність:



$$1) (x - 1)(x + 1) > 0; \quad 2) \frac{x-2}{5-x} < 0.$$

276*. За яких значень параметра a розв'язком сукупності нерівностей є множина дійсних чисел:

$$1) \begin{cases} x < 2, \\ x > a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 2, \\ x \leq a; \end{cases}$$

277*. За яких значень параметра a найменше ціле число, що є розв'язком сукупності нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x > a \end{cases}$, дорівнює -3 ?

278*. За яких значень параметра b найбільше ціле число, що є розв'язком сукупності нерівностей $\begin{cases} x < 7, \\ x \leq b \end{cases}$, дорівнює 11 ?

279*. Доведіть, що:

а) за будь-яких значень $a < b$ кожна з нерівностей

$$(x-a)(x-b) > 0, \frac{x-a}{x-b} > 0, \frac{x-b}{x-a} > 0 \text{ рівносильна сукуп-}$$

$$\text{ності } \begin{cases} x < a, \\ x > b; \end{cases}$$

б) за будь-яких значень $a < b$ кожна із нерівностей

$$(x-a)(x-b) < 0, \frac{x-a}{x-b} < 0, \frac{x-b}{x-a} < 0 \text{ рівносильна систе-}$$

$$\text{мі } \begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$$

Проявіть компетентність

280. Мотоцикліст на першу частину шляху завдовжки 50 км може витратити не більш як 1,5 год, а на другу частину, завдовжки 90 км, рухаючись із тією самою швидкістю, може витратити більш ніж 4 год. З якою швидкістю може їхати мотоцикліст, якщо відомо, що виконалась одна із цих двох умов?

281. Водій вантажівки повинен доставити два вантажі. Доставка першого вантажу до складу, що розташований на відстані 120 км, має зайняти не більше як 2 год. Доставка другого вантажу до іншого складу, розташованого на відстані 150 км, може зайняти більш як 3 год. Якщо поїздка задовольняє хоча б одну із цих двох умов, то вона буде вважатися успішною. Врахуйте, що згідно з правилами дорожнього руху для даного типу доріг швидкість руху вантажівки не повинна перевищувати 90 км/год. З якою середньою швидкістю може рухатися вантажівка, щоб поїздка вважалася успішною й відповідала правилам дорожнього руху?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Що таке числова нерівність? Наведіть приклади.
2. У якому випадку число a називають більшим за число b ? А меншим від числа b ?
3. Наведіть приклади правильної / неправильної числової нерівності.
4. Наведіть приклади строгої / нестрогої числової нерівності.
5. Сформулюйте властивість транзитивності числових нерівностей.
6. Сформулюйте властивість про додавання одного й того самого числа до обох частин числової нерівності.
7. Сформулюйте властивість про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме додатне число.
8. Сформулюйте властивість про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме від'ємне число.
9. Сформулюйте властивість про додавання числових нерівностей.
10. Сформулюйте властивість про множення числових нерівностей.
11. Наведіть приклади нерівностей зі змінними.
12. Що називається розв'язком нерівності зі змінною?
13. Що означає — розв'язати нерівність зі змінною?
14. Які нерівності називають рівносильними?
15. Сформулюйте правила рівносильних перетворень нерівностей.
16. Наведіть приклади подвійних нерівностей.
17. Як зображають числові проміжки?
18. Сформулюйте означення об'єднання двох числових множин.
19. Сформулюйте означення перерізу двох числових множин.
20. Які нерівності називаються лінійними нерівностями з однією змінною? Наведіть приклади.
21. Як розв'язують лінійні нерівності з однією змінною?
22. Якими способами можна доводити нерівності?
23. Наведіть приклад системи двох нерівностей з однією змінною.
24. Наведіть приклад сукупності двох нерівностей з однією змінною.
25. Що називають розв'язком системи двох лінійних нерівностей з однією змінною?
26. Що називають розв'язком сукупності двох лінійних нерівностей з однією змінною?
27. Що означає розв'язати систему (сукупність) двох нерівностей з однією змінною?
28. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| < a$?
29. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| > a$?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1°. Якому з наведених у відповідях чисел може дорівнювати значення виразу $a - b$, якщо $a < b$?

А. 1,01.

Б. 0.

В. 0,11.

Г. -0,1.

- 2°. Яка з наведених у відповідях нерівностей не має розв'язків?

А. $x^3 < -1$.

Б. $|x| < 2$.

В. $|x| > -1$.

Г. $x^4 < -5$.

- 3°. Яке з наведених у відповідях чисел не є розв'язком сукупності $\begin{cases} x \geq 3, \\ x < -5 \end{cases}$?

А. 3.

Б. -5.

В. 17.

Г. -5,1.

4. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} -2x \geq 0, \\ 3x > -5. \end{cases}$

А. $\emptyset$.

В. $\left(-1\frac{2}{3}; 0\right]$.

Б. $\left[0; 1\frac{2}{3}\right)$.

Г. $[0; +\infty)$.

- 5*. Розв'яжіть нерівність: $|4x - 1| \leq 4x + 1$.

А. $\emptyset$.

Б. $[0; +\infty)$.

В. $(-\infty; 0]$.

Г. $(-\infty; +\infty)$.



Розділ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

У розділі дізнаєтесь:

- про властивості функцій;
- як побудувати графік функції за допомогою перетворень відомого графіка;
- що таке квадратична функція та які її властивості;
- що таке квадратна нерівність з однією змінною та як її розв'язувати;
- що таке система рівнянь із двома змінними та як її розв'язувати;
- що таке математична модель прикладної задачі;
- як розв'язувати задачі методом математичного моделювання;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці

§ 7. ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Ситуація. На уроці фізики вивчали рух струменя води фонтану (вода б'є вертикально вгору). Виявилось, що висота струменя води y (у метрах) у момент часу t (у секундах) описується функцією: $y = 6t - 4,9t^2$. В учнівства виникли запитання: Якої максимальної висоти досягає струмінь води цього фонтану? На якій висоті буде струмінь через 1 с після вильоту?



qr.orioncentr.com.ua/s96hN



Як отримати відповіді на ці запитання?

Треба дослідити властивості функції
 $y = 6t - 4,9t^2$.



Пригадаймо, що таке функція, та розгляньмо окремі її властивості.

1. Поняття функції

Запам'ятайте!

Правило, згідно з яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної, називається *функцією*.

Незалежну змінну називають *аргументом функції*, а залежну змінну — *функцією*. Наприклад, для функції $y = f(x)$ змінна x — це незалежна змінна (аргумент функції), змінна y — це залежна змінна (функція).

Множину всіх допустимих значень аргументу називають *областю визначення функції*, а множину всіх відповідних значень залежної змінної називають *областю значень функції*.



Область визначення та область значень функції $y = f(x)$ коротко позначають $D(y)$ і $E(y)$ або $D(f)$ і $E(f)$ відповідно.

Задача 1 Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^3 - x; 2) y = \sqrt{x-2}; 3) y = \frac{2}{x^2 - 4x}; 4) y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+1}.$$

Розв'язання

1. Вираз $x^3 - x$ має зміст

для всіх дійсних значень аргументу: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Вираз $\sqrt{x-2}$ має зміст тільки

тоді, коли

підкореневий вираз набуває невід'ємних значень:

$$x - 2 \geq 0,$$

$$x \geq 2.$$

$$D(y) = [2; +\infty).$$

3. Вираз $\frac{2}{x^2 - 4x}$ має зміст для всіх

дійсних значень аргументу, крім тих, які перетворюють знаменник на нуль:

$$x^2 - 4x \neq 0,$$

$$x(x - 4) \neq 0,$$

$$x \neq 0, x \neq 4.$$

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty).$$

4. Вираз $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+1}$ є сумою двох виразів.

Маємо систему:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x > 1. \end{cases}$$

$$x > 1.$$

$$D(y) = (1; +\infty).$$

Вираз $\sqrt{x+1}$ має зміст, якщо підкореневий вираз набуває невід'ємних значень.

Вираз $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ має зміст, якщо

підкореневий вираз набуває додатних значень.



Якщо вираз, що задає функцію:

- є многочленом, то область визначення функції є множиною всіх дійсних чисел;
- є дробово-раціональним виразом $\frac{g(x)}{h(x)}$, то область визначення функції є множиною всіх дійсних чисел, крім тих, для яких $h(x) = 0$;
- є виразом $\sqrt{g(x)}$, то область визначення функції є множиною всіх дійсних чисел, за яких підкореневий вираз набуває невід'ємних значень: $g(x) \geq 0$.

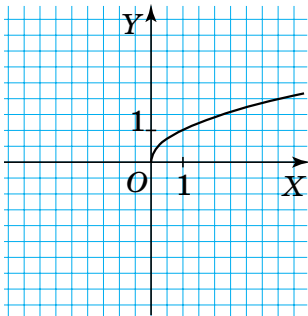
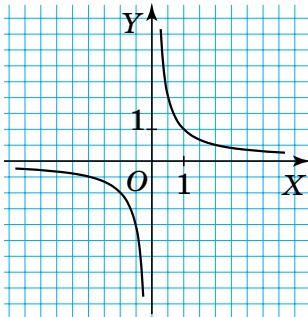
Щоб задати функцію, використовують такі способи: описовий, аналітичний, табличний, графічний. Функції задають переважно аналітично (формулою) або графічно.

У таблиці 16 подано функції $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, які ви вивчали в 7–8 класах. Графіки цих функцій мають відповідні назви (табл. 16).

Таблиця 16

Функція	Назва графіка функції	Графік функції
$y = kx + b$	Пряма	
$y = x^2$	Парабола	

Таблиця 16 (продовження)

Функція	Назва графіка функції	Графік функції
$y = \sqrt{x}$	Вітка параболи	
$y = \frac{1}{x}$	Гіпербола	

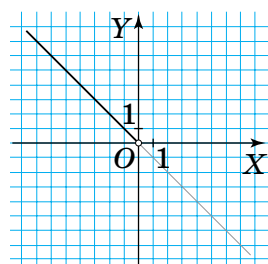
Задача 2 Функцію задано формулою $y = |x|$. Задайте її графічно.

Розв'язання $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Розкриємо модуль за означенням, тоді одержимо:

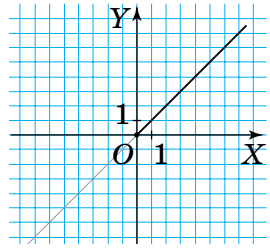
$$y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Першу частину графіка утворюють ті точки прямої $y = -x$, що побудовані для $x < 0$, тобто які розміщені ліворуч від осі ординат (мал. 50).



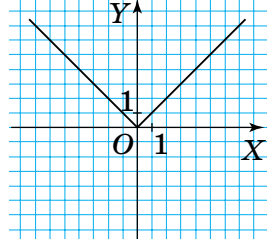
Мал. 50

Другу частину графіка утворюють ті точки прямої $y = x$, що побудовані для $x \geq 0$, тобто які розміщені праворуч від осі ординат (мал. 51).



Мал. 51

Остаточний графік функції $y = |x|$ зображено на малюнку 52.



Мал. 52

2. Нулі функції

Запам'ятайте!

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називається *нулем функції*.



Як знайти нулі функції?

Розглянемо приклади.



Задача 3 Знайдіть нулі функції $f(x) = x^2 + 6x$.

Розв'язання $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Значення функції має дорівнювати нулю, тому $f(x) = 0$, тобто:
Розв'яжемо одержане рівняння:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 0. \\ x(x + 6) &= 0, \\ x &= -6, x = 0. \end{aligned}$$

Отже, $x = -6$ і $x = 0$ — нулі функції $f(x) = x^2 + 6x$.

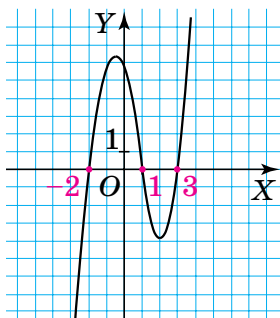


Щоб знайти нулі функції, яку задано формулою $y = f(x)$, потрібно знайти корені рівняння $f(x) = 0$.

Задача 4 Знайдіть нулі функції $y = f(x)$ (мал. 53).

Розв'язання Щоб знайти нулі функції, потрібно на графіку функції знайти точки його перетину з віссю абсцис. За малюнком 53 знаходимо **нули функції** (абсциси цих точок):

$$x = -2, x = 1, x = 3.$$



Мал. 53



Щоб знайти нулі функції, яку задано графічно, потрібно визначити абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис.



Чи завжди функція має нулі?

Ні. Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ нулів не має.



3. Проміжки знакосталості

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ (мал. 53).

На проміжках $(-2; 1)$ і $(3; +\infty)$ графік функції розміщений вище за вісь абсцис. Тому на цих проміжках **ординати** всіх точок графіка набувають лише **додатних значень**: $y > 0$ ($f(x) > 0$). Кажуть: функція набуває додатних значень, якщо $x \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)$.

На проміжках $(-\infty; -2)$ і $(1; 3)$ графік функції розміщений нижче від осі абсцис. Тому на цих проміжках **ординати** всіх точок графіка набувають лише **від'ємних значень**: $y < 0$ ($f(x) < 0$). Кажуть: функція набуває від'ємних значень, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$.

Запам'ятайте!

Проміжки з області визначення функції, на яких функція зберігає знак, називаються **проміжками знакосталості функції**.

Якщо функцію задано формулою $y = f(x)$, то проміжки знакосталості можна знайти, розв'язавши відповідні нерівності: $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$. Розглянемо приклад.

Задача 5 Знайдіть проміжки знакосталості функції $f(x) = 12 - 6x$.

Розв'язання $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

1. Знайдемо проміжки, на яких функція набуває додатних значень, тобто $f(x) > 0$:

$12 - 6x > 0$, звідси $x < 2$.
Отже, $f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; 2)$.

2. Знайдемо проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень, тобто $f(x) < 0$:

$12 - 6x < 0$, звідси $x > 2$.
Отже, $f(x) < 0$, якщо $x \in (2; +\infty)$.

Загалом, проміжками знакосталості функції $f(x) = 12 - 6x$ є проміжки: $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$.

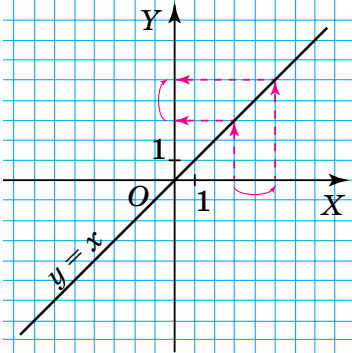
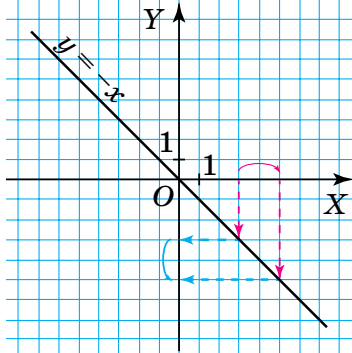
4. Проміжки зростання і спадання функції



Чим відрізняються властивості зростаючої та спадної функцій?



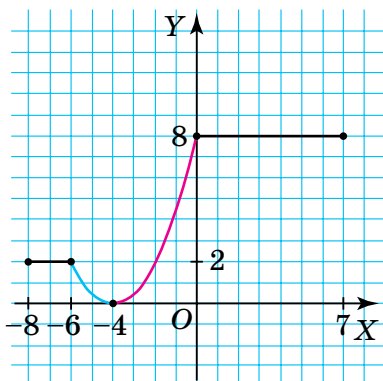
Поміркуймо.

Зростаюча функція	Спадна функція
Що більшими є значення аргументу, то більшими є відповідні значення функції (мал. 54)	Що більшими є значення аргументу, то меншими є відповідні значення функції (мал. 55)
	
Мал. 54	Мал. 55



Чи є зростаючою функція $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 56?

Ні.



Мал. 56

Ця функція не є зростаючою на всій області визначення. Проте на окремих її проміжках вона має такі властивості:

- функція $y = f(x)$ є **сталою** на проміжках $[-8; -6]$ і $[0; 7]$ (значення функції не змінюється зі зміною аргументу);
- функція $y = f(x)$ **спадає** на проміжку $[-6; -4]$;
- функція $y = f(x)$ **зростає** на проміжку $[-4; 0]$.



- Функція $y = f(x)$ **зростає** на проміжку $[a; b]$, якщо для будь-яких x_1 і x_2 , що належать цьому проміжку, з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.
- Функція $y = f(x)$ **спадає** на проміжку $[a; b]$, якщо для будь-яких x_1 і x_2 , що належать цьому проміжку, з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.



Як з'ясувати, за якої умови функція є зростаючою, а за якої — спадною?

Поміркуймо.



Розглянемо на прикладі лінійної функції $f(x) = kx + b$.

Областю визначення лінійної функції є множина дійсних чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з області визначення даної функції, для яких $x_2 > x_1$. Тоді $x_2 - x_1 > 0$.

Знайдемо для x_1 і x_2 відповідні значення функції:

$$f(x_1) = kx_1 + b, f(x_2) = kx_2 + b.$$

Дослідимо знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= kx_2 + b - (kx_1 + b) = \\ &= kx_2 + b - kx_1 - b = kx_2 - kx_1 = \\ &= k(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то:

- 1) $f(x_2) - f(x_1) > 0$ за умови, що $k > 0$;
- 2) $f(x_2) - f(x_1) < 0$ за умови, що $k < 0$.

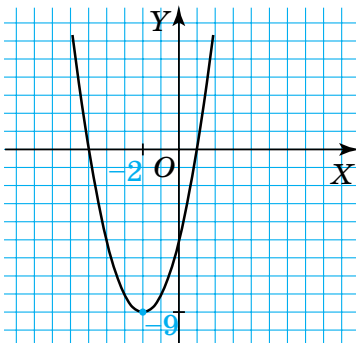


Лінійна функція $y = kx + b$:

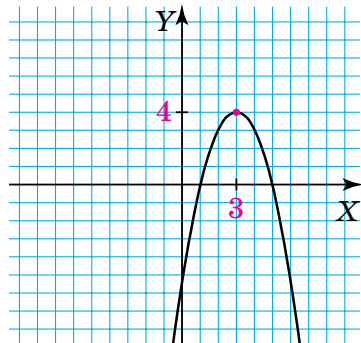
- є **зростаючою**, якщо $k > 0$;
- є **спадною**, якщо $k < 0$;
- є сталою, якщо $k = 0$.

5. Найбільше та найменше значення функції

Задача 6 Знайдіть найбільше та найменше значення функції за її графіком: 1) на малюнку 57; 2) на малюнку 58.



Мал. 57



Мал. 58

Розв'язання

Мал. 57	Мал. 58
$y_{\max}$ — не існує	$y_{\max} = 4$, якщо $x = 3$
$y_{\min} = -9$, якщо $x = -2$	$y_{\min}$ — не існує

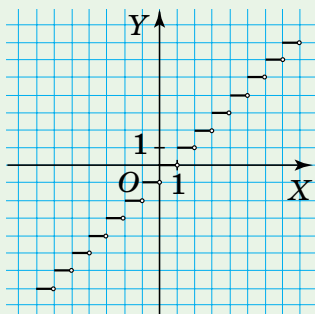
У старшій школі ви дізнаєтесь і про інші способи знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

Дізнайтеся більше

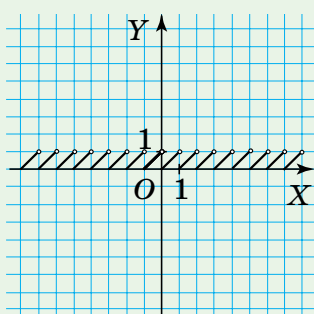
Цілою частиною числа x називають найбільше ціле число, яке не перевищує дане число x . Позначають: $[x]$. Наприклад, $[3,5] = 3$, $[-3,5] = -4$. **Дробовою частиною числа** x називають різницю $x - [x]$. Позначають: $\{x\}$. Наприклад, $\{3,5\} = 0,5$, $\{-3,5\} = 0,5$. Для будь-якого x :

$$x = [x] + \{x\}.$$

Відповідно розглядають функції $y = [x]$ (мал. 59) і $y = \{x\}$ (мал. 60).



Мал. 59



Мал. 60

Властивості функції $y = [x]$. Область визначення: $D(y) = R$. Область значень: $E(y) = Z$. Нулі функції: $x \in [0; 1)$. Проміжки знакосталості: $y < 0$, якщо $x < 0$; $y > 0$, якщо $x \geq 1$.

Властивості функції $y = \{x\}$. Область визначення: $D(y) = R$. Область значень: $E(y) = [0; 1)$. Нулі функції: $x \in Z$. Проміжки знакосталості: $y > 0$ для всіх x із області визначення, крім $x \in Z$.

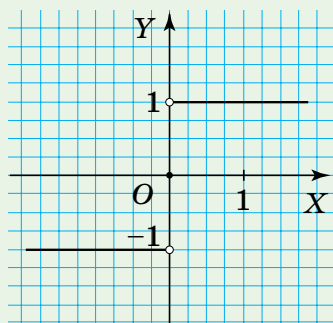
Розглядають також функції, праві частини яких є цілою чи дробовою частиною різних виразів, наприклад $y = [x^2]$, $y = \{2x\}$, $y = [-2x]$, $y = \{3x-1\}$.

Розглядають також Signum-функцію (функцію знака) — функцію, що визначається співвідношеннями (мал. 61):

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(5) = 1, \operatorname{sgn}(0) = 0, \operatorname{sgn}(-5) = -1.$$

Властивості функції $y = \operatorname{sgn}(x)$. Область визначення: $D(y) = R$. Область значень: $E(y) = \{-1; 0; 1\}$. Нулі функції: $x = 0$. Проміжки знакосталості: $y < 0$, якщо $x < 0$; $y > 0$, якщо $x > 0$.



Мал. 61

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/AaJwc

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
нулі функції	zeros of a funktion	Nullstellen einer Funktion	zéros d'une fonction

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення функції.
2. Що називають аргументом функції?
3. Що таке область визначення функції? А область значень?
4. Назвіть способи задання функцій.
5. Наведіть приклади відомих вам функцій.
6. Побудуйте графіки відомих вам функцій.
7. Що таке нуль функції? Що таке проміжки знакосталості?
8. Яка функція є спадною на деякому проміжку; зростаючою на деякому проміжку?
9. Поясніть, що таке найбільше та найменше значення функції.

Усне тренування

1. Обчисліть:

1) $-0,5 \cdot (-29) \cdot 2$;

4) $11 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{69}{44}\right)$;

2) $\frac{1}{5} \cdot (-0,79) \cdot 50$;

5) $-\frac{6}{7} \cdot (-1,2) \cdot 3\frac{1}{2}$;

3) $0,25 \cdot (-62) \cdot (-4)$;

6) $-\frac{3}{10} \cdot 49 \cdot 3\frac{1}{3}$.

2. Обчисліть значення виразу $6 - \frac{1}{x+1}$, якщо:

1) $x = -2$; 2) $x = -0,5$; 3) $x = -2,4$; 4) $x = \frac{1}{3}$.

3. Укажіть k і b для лінійної функції $y = kx + b$:

1) $y = 8$;

3) $y = 6 - x$;

5) $y = \frac{6+x}{3}$;

2) $y = -3x + 9$;

4) $y = \frac{x}{5} - 2$;

6) $y = \frac{3x-6}{2}$.

Розв'яжіть задачу

- 282'.** Прочитайте запис: 1) $y = f(x)$; 2) $s = g(t)$; 3) $v = h(s)$. Назвіть залежну й незалежну змінні.
- 283'.** Чи правильно, що областю визначення функції є множина:
1) усіх можливих значень аргументу;
2) усіх значень залежної змінної?
- 284'.** Чи правильно, що нулі функції є абсцисами точок перетину графіка функції з віссю абсцис?
- 285'.** Наведіть приклад функції, заданої аналітично.
- 286'.** Наведіть приклад функції, заданої графічно. Яка її область визначення та область значень?
- 287°.** Чи правильно, що точка $A(-2; 4)$ належить графіку функції:
1) $y = x^2$; 3) $y = \sqrt{x+18}$;
2) $y = x^2 + 2x - 10$; 4) $y = \frac{4}{x}$?
- 288°.** Чи правильно, що точка $A(1; -1)$ належить графіку функції:
1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 4x - 6$; 3) $y = \sqrt{x+8}$; 4) $y = \frac{1}{x}$?
- 289°.** Знайдіть значення функції $f(x) = x^2 - 5x$ для:
1) $x = -2$; 3) $x = 0$; 5) $x = 4$;
2) $x = -1$; 4) $x = 2$; 6) $x = 6$.
- 290°.** Заповніть таблицю 17, якщо $y = -2x^3 - 1$.

Таблиця 17

x	-2	-1	0	1	2
y					

- 291°.** Заповніть таблицю 18, якщо $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Таблиця 18

x	-3	-2	0	2
$f(x)$				

292°. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{x}{x-5};$$

$$6) y = \frac{x+10}{x^2+100};$$

$$2) y = x^2 + 4x;$$

$$7) y = \frac{x^2-x}{x^2-1};$$

$$3) y = \frac{x+2}{3};$$

$$8) y = x^3 + 4x^5;$$

$$4) y = -\frac{2}{3x};$$

$$9) y = \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x-5};$$

$$5) y = \frac{x+5}{x^2-100};$$

$$10) y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-8}.$$

293°. Знайдіть область визначення функції:



$$1) y = \frac{3x}{x+6};$$

$$5) y = \frac{x+1}{x^2+1};$$

$$2) y = -x^2 + 4x + 5;$$

$$6) y = \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x-4};$$

$$3) y = \frac{x+1}{x^2-25};$$

$$7) y = \frac{1}{(x-8)(x+1)};$$

$$4) y = \frac{x-5}{x^2+5x};$$

$$8) y = \frac{x+1}{x-8} \cdot \frac{x-8}{x+1}.$$

294°. Побудуйте графік функції:

$$1) y = 2;$$

$$3) y = 2x + 8;$$

$$5) y = \frac{2}{x};$$

$$2) y = -x + 4;$$

$$4) y = -3;$$

$$6) y = -\frac{2}{x}.$$

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції; 3) нулі функції; 4) проміжки знакосталості.

295°. Побудуйте графік функції:



$$1) y = 5; \quad 2) y = 7x; \quad 3) y = -x + 5; \quad 4) y = \frac{9}{x}.$$

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції; 3) нулі функції; 4) проміжки знакосталості.

296°. За малюнком 62 визначте:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; -1; 0; 1; 2;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює: 0; 2;

3) знак значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-1,5$; 0; $1,5$.

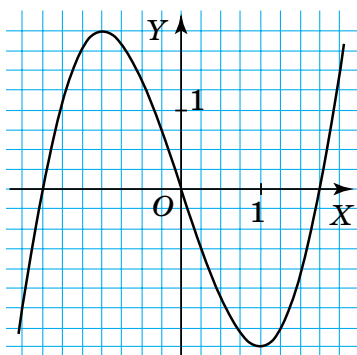
297°. За малюнком 63 визначте:



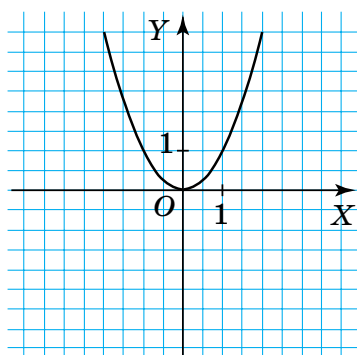
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2 ; -1 ; 0; 1; 2;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює: 0; 1;

3) знак значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-1,3$; $-0,5$; 0,1; $1,7$.



Мал. 62



Мал. 63

298°. За малюнком 62 порівняйте значення функції:

1) для $x = -1,1$ і $x = -0,4$; 3) для $x = -0,3$ і $x = 1,4$;

2) для $x = -1,2$ і $x = 1,2$; 4) для $x = 0$ і $x = 0,6$.

299°. За малюнком 63 порівняйте значення функції:

1) для $x = -1,7$ і $x = -0,9$; 3) для $x = -0,2$ і $x = 1,2$;

2) для $x = -1,3$ і $x = 1,3$; 4) для $x = -1$ і $x = 2$.

300°. Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 3x$; 2) $y = -8x$; 3) $y = 5 - x$; 4) $y = 10 - 9x$?

Відповідь поясніть.

301°. Зростаючою чи спадною є функція:



1) $y = x$; 2) $y = -2x - 4$; 3) $y = 8 - x$; 4) $y = 12 - 3x$?

Відповідь поясніть.

302°. Зростаючою чи спадною для $x > 0$ є функція:

1) $y = \frac{5}{x}$; 2) $y = -\frac{7}{x}$; 3) $y = \frac{10}{x}$; 4) $y = -\frac{12}{x}$?

303°. Зростаючою чи спадною для $x < 0$ є функція:

$$1) y = -\frac{3}{x}; \quad 2) y = \frac{4}{x}; \quad 3) y = \frac{15}{x}?$$

304°. Дано функцію $y = f(x)$, яка спадає на проміжку $(-\infty; 5]$ і зростає на проміжку $[5; +\infty)$. Порівняйте значення функції:

$$\begin{array}{lll} 1) f(0) \text{ і } f(1); & 3) f(-2) \text{ і } f(4); & 5) f(10) \text{ і } f(10,1); \\ 2) f(1) \text{ і } f(2); & 4) f(6) \text{ і } f(8); & 6) f(-8) \text{ і } f(5). \end{array}$$

305°. Дано функцію $y = f(x)$, яка спадає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $[6; +\infty)$, зростає на проміжку $[-1; 6]$. Порівняйте значення функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(0) \text{ і } f(4); & 3) f(-2) \text{ і } f(-4); \\ 2) f(1) \text{ і } f(2,5); & 4) f(10) \text{ і } f(11). \end{array}$$

306°. Для функції $y = |x|$ знайдіть:

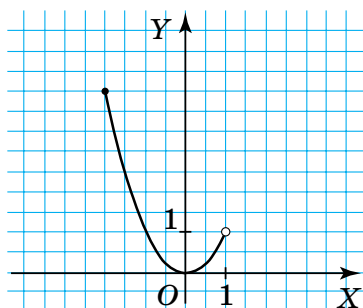
- 1) область визначення;
- 2) область значень;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання, проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції;
- 7) найбільше та найменше значення функції на проміжку $[-1; 4]$.

307°. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть:

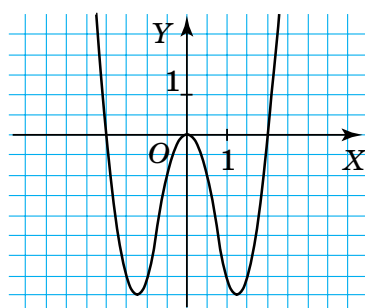
- 1) область визначення;
- 2) область значень;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання, проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції;
- 7) найбільше та найменше значення функції на проміжку $[1; 3]$.

308°. Скориставшись малюнками 64, 65, знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості функції;
- 5) проміжки зростання, проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції.



Мал. 64

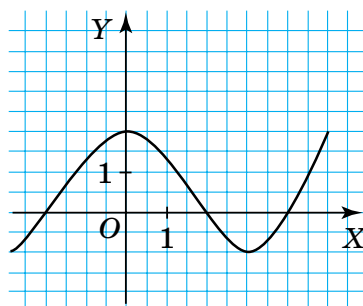


Мал. 65

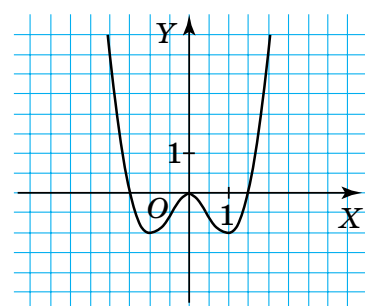
309. Скориставшись малюнками 66, 67, знайдіть:



- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання, проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції.



Мал. 66



Мал. 67

310. Заповніть таблицю 19, якщо

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{9}{x}, & \text{якщо } x \leq -3, \\ x^2 + 1, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ 5x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Таблиця 19

x	-9	-3	-2	0	1	2	4	8
$f(x)$								

311. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & \text{якщо } x \leq -4, \\ x+1, & \text{якщо } -4 < x < 4, \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$ Заповніть таблицю 20.

Таблиця 20

x	-6	-4	-3	0	1	4	9	16
$f(x)$								

312. Знайдіть область визначення функції:



1) $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$;

2) $y = x - \sqrt{x}$;

3) $y = \sqrt{x-4}$;

4) $y = -\sqrt{x-3}$;

5) $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$;

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$;

7) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;

8) $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{2x-1}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{6+x}} + \frac{5}{x+4}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x-5}} + \frac{5}{x^2-4}$;

11) $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{-x}$;

12) $y = \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-3}$;

13) $y = \sqrt{10-5x} - \sqrt{x}$;

14) $y = \frac{x+2}{\sqrt{|x|-1}} + \frac{3}{x^2-4}$.

qr.orioncentr.com.ua/GQUHx



313. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{x-7}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$;

2) $y = \sqrt{x-8} + \sqrt{10-x}$;

5) $y = \frac{x}{\sqrt{x+4}} + \sqrt{5x-1}$;

3) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1-x}$;

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x-9}} + \frac{5}{x^2-16}$.

314. Задайте формулою деяку функцію $y = f(x)$, якщо:

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; 3) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

2) $D(y) = (-5; +\infty)$; 4) $D(y) = [5; 8]$.

315. Задайте формулою деяку функцію $y = f(x)$, яка має область визначення:

- 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; 3) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
 2) $D(y) = (-\infty; 1)$; 4) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

316. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, для якої:

- 1) $D(y) = (2; 5)$, $E(y) = (4; 8)$;
 2) $D(y) = [-3; 7]$, $E(y) = [2; 5]$;
 3) $D(y) = [-1; 0]$, $E(y) = [-1; 0]$;
 4) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
 5) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 5)$.

317. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, для якої:

- 1) $D(y) = (1; 6)$, $E(y) = (2; 10)$;
 2) $D(y) = [-1; 1]$, $E(y) = [-1; 1]$.

318. Знайдіть нулі функції:

- 1) $y = x^2 + 4x - 5$; 7) $y = \sqrt{x^2 - 6}$;
 2) $y = x^2 + 9x + 16$; 8) $y = \frac{3-x}{x+3}$;
 3) $y = -x^2 + 4x + 5$; 9) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;
 4) $y = -x^2 + 9x$; 10) $y = \frac{x-2}{x^2 - 4}$;
 5) $y = 3x^2 - 12$; 11) $y = \frac{x^2 - 4}{x-2}$;
 6) $y = \sqrt{x-5}$; 12) $y = \frac{1}{(x-8)(x+1)}$.

319. Знайдіть нулі функції:



- 1) $y = x^2 + x - 2$; 3) $y = \sqrt{2x-9}$; 5) $y = \frac{x-3}{x^2-9}$;
 2) $y = -x^2 + 2x - 1$; 4) $y = \frac{x+6}{x-6}$; 6) $y = \frac{x-3}{x-3}$.

320. Задайте формулою деяку функцію, яка має нулі:

- 1) $x = -3$; 3) $x = -2$, $x = 2$;
 2) $x = 0$; 4) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

321. Задайте формулою деяку функцію, яка має нулі:

- 1) $x = 4$; 3) $x = -5$, $x = 5$;
 2) $x = 2$; 4) $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$.

322. Побудуйте графік деякої функції, яка має нулі:

- 1) $x = -2, x = -1$; 4) $x = -7, x = 8$;
 2) $x = 0$; 5) $x = 1, x = 2, x = 3$;
 3) $x = 2, x = 3$; 6) $x = -1, x = 0, x = 1$.

323. Побудуйте графік деякої функції, яка має нулі:

- 1) $x = -5, x = -4$; 2) $x = 1$; 3) $x = -2, x = 0, x = 1$.

324. Побудуйте графік деякої функції, яка зростає на проміжку $(-\infty; 3]$ і спадає на проміжку $[3; +\infty)$, а найбільше значення якої дорівнює 5.

325. Побудуйте графік деякої функції, яка зростає на проміжку $(-\infty; 8]$ і спадає на проміжку $[8; +\infty)$, а найбільше значення якої дорівнює 0.

326. Побудуйте графік функції:



$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ 5x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x^2}{x^3};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x+5}{x+5}.$$

qr.orioncentr.com.ua/rIX9r



Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання, проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції.

327. Побудуйте графік функції:

$$\text{а) } f(x) = |x-5|; \quad \text{в) } f(x) = |x-5| - x;$$

$$\text{б) } f(x) = |x-5| - 4; \quad \text{г) } f(x) = |x-5| + x.$$

Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання, проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції.

328. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, яка:

1) має нулі $x = -4$, $x = 0$, спадає на проміжку $(-\infty; -2]$ і зростає на проміжку $[-2; +\infty)$; має найменше значення, що дорівнює -5 ;

2) не має нулів, спадає на проміжках $(-\infty; -7]$ і $[-1; +\infty)$, зростає на проміжку $[-7; -1]$; областю значень функції є проміжок $[2; 7]$.

329. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, яка має нулі $x = 1$, $x = 3$, набуває додатних значень на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$ і від'ємних — на проміжку $(1; 3)$.

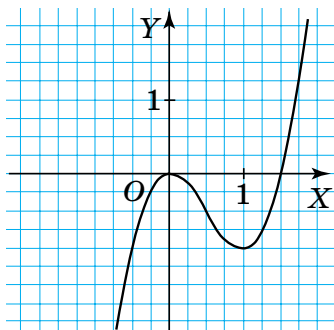


330. На малюнку 68 дано графік функції $y = f(x)$. За графіком з'ясуйте, скільки коренів має рівняння:

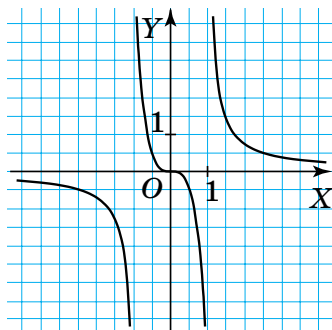
1) $f(x) = -1$; 4) $f(x) = x + 0,5$; 7) $f(x) = \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = x^2$; 5) $f(x) = -2x + 1$; 8) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

3) $f(x) = 0,5x$; 6) $f(x) = \sqrt{x}$;



Мал. 68



Мал. 69

331. На малюнку 69 дано графік функції $y = f(x)$. За графіком з'ясуйте, скільки коренів має рівняння:

1) $f(x) = 3$; 3) $f(x) = 2x$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$;

2) $f(x) = 0$; 4) $f(x) = 1 + x$; 6) $f(x) = -\frac{2}{x}$.

332. Знайдіть область визначення функції та область значень функції:

1) $y = -\sqrt{x^2}$; 3) $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x} + 5$;

2) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$; 4) $y = \frac{x-4}{x-4}$.

333*. Задайте формулою деяку функцію $y = f(x)$, яка:

- 1) має нуль $x = -1$, спадає на проміжку $(-\infty; 1]$ і зростає на проміжку $[1; +\infty)$; має найменше значення, що дорівнює -2 ;
- 2) не має нулів, спадає на проміжках $(-\infty; -10)$ і $[1; +\infty)$, зростає на проміжку $(-10; 1]$.

334*. Доведіть, що функція:

- 1) $f(x) = -\frac{2}{x}$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$;
- 2) $f(x) = \frac{4}{x}$ спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

335*. Доведіть, що на проміжку $[-1; 1]$ функція $y = -x^2 - 2x$ спадає.

336*. Скільки нулів має функція $y = \frac{3ax + 2 - a}{x - 1}$ залежно від значень параметра a ?

337*. Знайдіть нулі функції $y = x^4 - (a + 1)x^2 + a$ залежно від значень параметра a .

Проявіть компетентність

338. Залежність відстані, яку проїхав мотоцикліст, від часу задано формулою:

$$s = \begin{cases} 20t, & \text{якщо } 0 \leq t < 1, \\ 20, & \text{якщо } 1 \leq t < 3, \\ 50 - 10t, & \text{якщо } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Побудуйте графік даної функції та за графіком визначте її властивості.

§ 8. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Ситуація. Учні й учениці вирішили спроектувати дизайн подвір'я школи. Назар запропонував побудувати місток у вигляді параболи. Для цього він вирішив скласти рівняння параболи, що є моделлю містка.



qr.orioncentr.com.ua/vWVn9



Чи можна з параболи $y = x^2$ отримати потрібну параболу?



Розглянемо основні перетворення графіків функцій, зокрема параболи.

Так.

1. Побудова графіка функції $y = -f(x)$

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = -x^2$. Значення цих функцій за однакових значень аргументу є протилежними числами: x^2 і $-x^2$. Тому графіком функції $y = -x^2$ є парабола.

Щоб побудувати графік функції $y = -x^2$, можна діяти так:

1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок (мал. 70):

2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але протилежними ординатами:

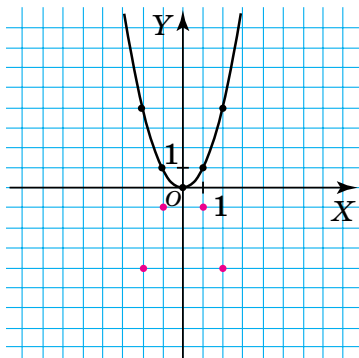
3) з'єднати їх плавною лінією:

$(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4);$

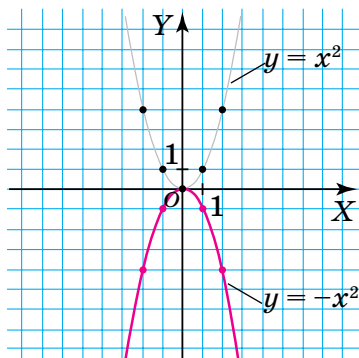
$(-2; -4), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (2; -4);$

малюнок 71.

Одержали параболу, вітки якої напрямлені вниз.

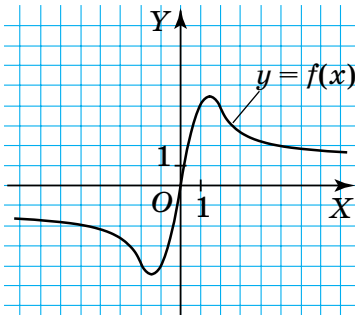


Мал. 70

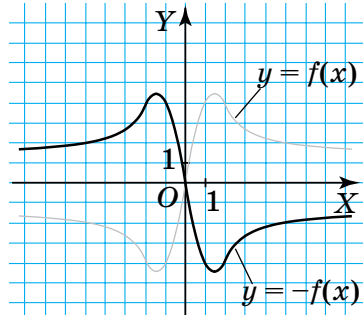


Мал. 71

Параболу $y = -x^2$ можна одержати з параболи $y = x^2$ її відображенням відносно осі OX . Так само можна будувати графік будь-якої функції $y = -f(x)$, якщо графік функції $y = f(x)$ є побудованим (мал. 72). Справді, за однакових значень аргументу значення функцій $f(x)$ і $-f(x)$ є протилежними числами (мал. 73).



Мал. 72



Мал. 73



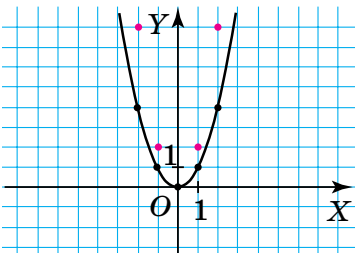
Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, можна графік функції $y = f(x)$ відобразити відносно осі OX .

2. Побудова графіка функції $y = af(x)$ ($a \neq 0$)

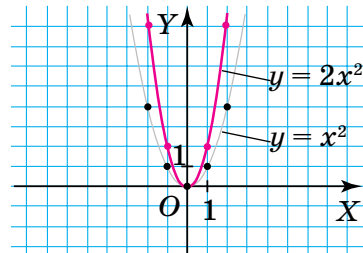
Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = 2x^2$. Значення функції $y = 2x^2$ за деякого ненульового значення x удвічі більше за відповідне значення функції $y = x^2$.

Щоб побудувати графік функції $y = 2x^2$, можна діяти так:

- 1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок (мал. 74):
 $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$,
 $(1; 1)$, $(2; 4)$;
- 2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але з більшими у 2 рази ординатами:
 $(-2; 8)$, $(-1; 2)$, $(0; 0)$,
 $(1; 2)$, $(2; 8)$;
- 3) з'єднати їх плавною лінією: малюнок 75.



Мал. 74



Мал. 75

Отже, графік функції $y = 2x^2$ одержали в результаті розтягування параболи $y = x^2$ уздовж осі ординат у 2 рази.

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = \frac{1}{2}x^2$.

Щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$, можна діяти так:

1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок (мал. 76):

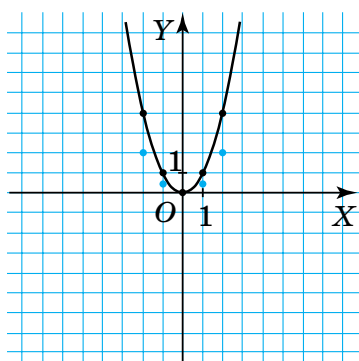
$(-2; 4), (-1; 1), (0; 0),$
 $(1; 1), (2; 4);$

2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але з меншими у 2 рази ординатами:

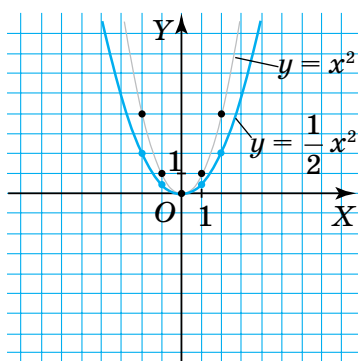
$(-2; 2), \left(-1; \frac{1}{2}\right), (0; 0),$
 $\left(1; \frac{1}{2}\right), (2; 2);$

3) з'єднати їх плавною лінією:

малюнок 77.



Мал. 76



Мал. 77

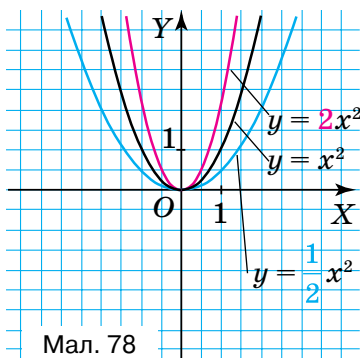
Отже, графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ одержали в результаті стискання параболи $y = x^2$ уздовж осі ординат у 2 рази.

На малюнку 78 зображено параболи $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.



Графіком функції $y = ax^2$ ($a \neq 1$) є парабола, яку одержано в результаті:

- **розтягування** параболи $y = x^2$ в $|a|$ разів уздовж осі ординат, якщо $|a| > 1$;
- **стискання** параболи $y = x^2$ в $\frac{1}{|a|}$ разів уздовж осі ординат, якщо $0 < |a| < 1$.



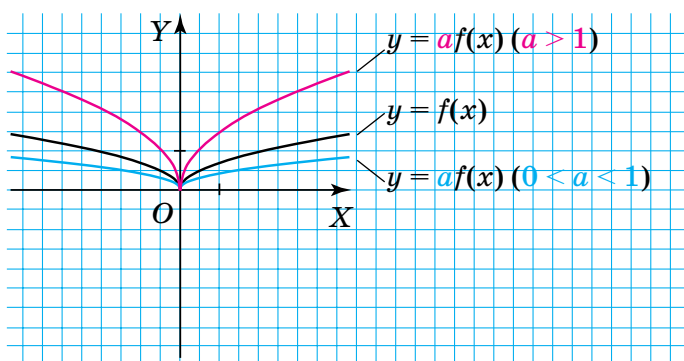
Мал. 78

- Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені **вниз**;
- якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені **вгору**;
- вершина параболи $y = ax^2$ — точка $(0; 0)$.



Графік функції $y = af(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (мал. 79) можна одержати перетворенням графіка функції $y = f(x)$ у результаті:

- **розтягування** графіка функції $y = f(x)$ в a разів уздовж осі ординат, якщо $a > 1$;
- **стискання** графіка функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ разів уздовж осі ординат, якщо $0 < a < 1$.



Мал. 79

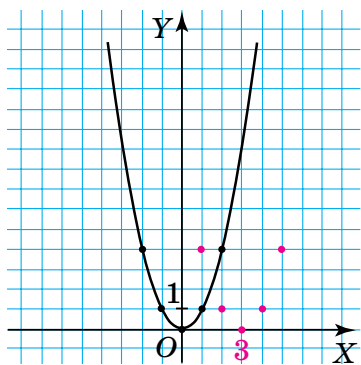
3. Побудова графіка функції $y = f(x - a)$

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = (x - 3)^2$. Кожному значенню функції $y = (x - 3)^2$ відповідатиме таке саме значення функції $y = x^2$, якщо аргумент функції $y = (x - 3)^2$ буде на 3 одиниці більшим, ніж відповідне значення аргументу функції $y = x^2$.

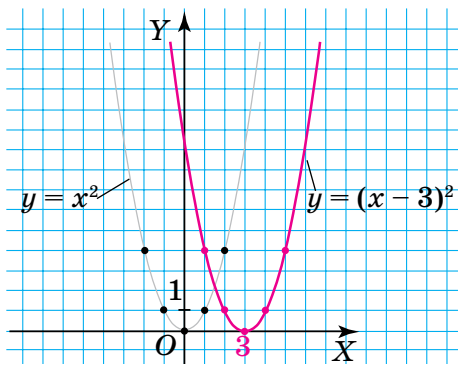
Щоб побудувати графік функції $y = (x - 3)^2$, можна діяти так:

- 1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок (мал. 80):
 $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$,
 $(1; 1)$, $(2; 4)$;
- 2) побудувати точки з такими самими ординатами, але з абсцисами, які на 3 одиниці більші:
 $(1; 4)$, $(2; 1)$, $(3; 0)$,
 $(4; 1)$, $(5; 4)$;
- 3) з'єднати їх плавною лінією:

малюнок 81.



Мал. 80



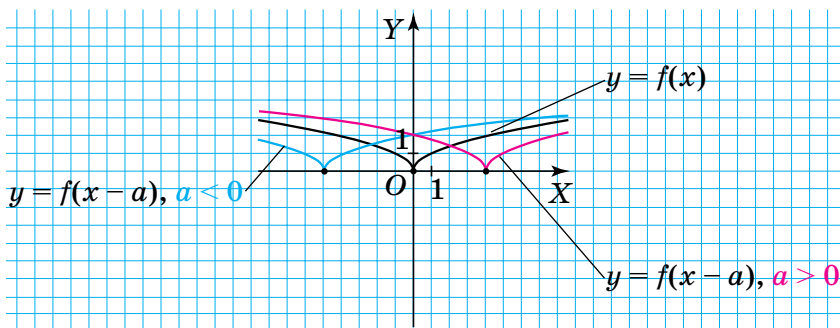
Мал. 81

Отже, графік функції $y = (x - 3)^2$ одержали в результаті переміщення параболи $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 3 одиниці праворуч.



Графік функції $y = f(x - a)$ (мал. 82) можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис:

- на a одиниць **праворуч**, якщо $a > 0$;
- на $|a|$ одиниць **ліворуч**, якщо $a < 0$.



Мал. 82

4. Побудова графіка функції $y = f(x) + b$

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = x^2 + 2$.

Значення функції $y = x^2 + 2$ за деякого значення аргументу на 2 більше, ніж значення функції $y = x^2$ за того самого значення аргументу.

Щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, можна діяти так:

1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок (мал. 83):

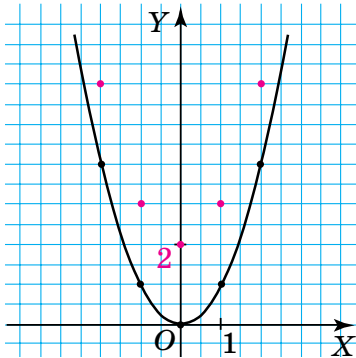
$(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$,
 $(1; 1)$, $(2; 4)$;

2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але з ординатами, які на 2 одиниці більші:

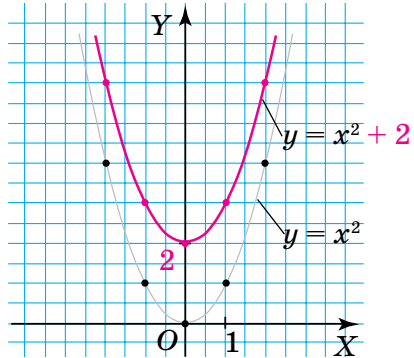
$(-2; 6)$, $(-1; 3)$, $(0; 2)$,
 $(1; 3)$, $(2; 6)$;

3) з'єднати їх плавною лінією:

малюнок 84.



Мал. 83



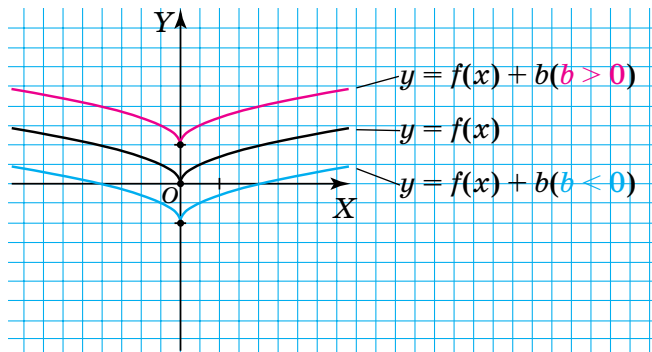
Мал. 84

Отже, графік функції $y = x^2 + 2$ одержали в результаті переміщення параболи $y = x^2$ вздовж осі ординат на 2 одиниці вгору.



Графік функції $y = f(x) + b$ (мал. 85) можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат:

- на b одиниць **вгору**, якщо $b > 0$;
- на $|b|$ одиниць **униз**, якщо $b < 0$.



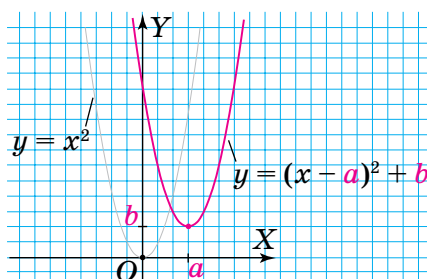
Мал. 85

5. Побудова графіка функції $y = f(x - a) + b$

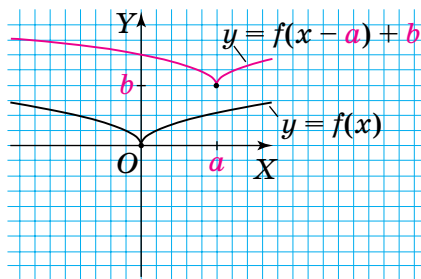
Об'єднавши результати попередніх двох пунктів, можемо сказати, що графіком функції $y = (x - a)^2 + b$ є парабола, яку одержимо внаслідок переміщення параболи $y = x^2$ на $|a|$ одиниць уздовж осі OX і на $|b|$ одиниць уздовж осі OY (мал. 86). Вершина параболи $y = (x - a)^2 + b$ має координати $(a; b)$.



Графік функції $y = f(x - a) + b$ можна одержати переміщенням графіка функції $y = f(x)$ на $|a|$ одиниць уздовж осі OX (праворуч, якщо $a > 0$, або ліворуч, якщо $a < 0$) і на $|b|$ одиниць уздовж осі OY (угору, якщо $b > 0$, або вниз, якщо $b < 0$) (мал. 87).



Мал. 86



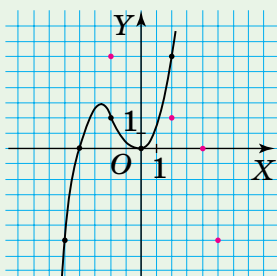
Мал. 87

Дізнайтеся більше

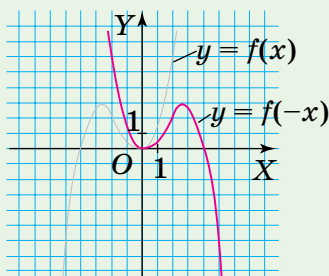
Як побудувати графік функції $y = f(-x)$?

Розглянемо функції $y = f(x)$ і $y = f(-x)$. Значення цих функцій є однаковими, якщо відповідні аргументи є протилежними числами. Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, потрібно:

- 1) на графіку функції $y = f(x)$ позначити кілька точок (мал. 88);
- 2) побудувати точки з такими самими ординатами і протилежними абсцисами та з'єднати їх плавною лінією (мал. 89).



Мал. 88



Мал. 89

Задача 1 Побудуйте графік функції $y = \frac{x-2}{x+3}$.

Розв'язання Подамо функцію $y = \frac{x-2}{x+3}$ у вигляді $y = \frac{k}{x-a} + b$.

Для цього зробимо такі перетворення виразу, що задає дану функцію:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+3} &= \frac{x+3-3-2}{x+3} = \frac{x+3-5}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{5}{x+3} = \\ &= 1 - \frac{5}{x+3} = \frac{-5}{x+3} + 1.\end{aligned}$$

Отже, задана функція набула вигляду: $y = \frac{-5}{x+3} + 1$. Графік цієї функції можна одержати внаслідок переміщення гіперболи $y = \frac{-5}{x}$ уздовж осі OX на 3 одиниці ліворуч і вздовж осі OY на 1 одиницю вгору.

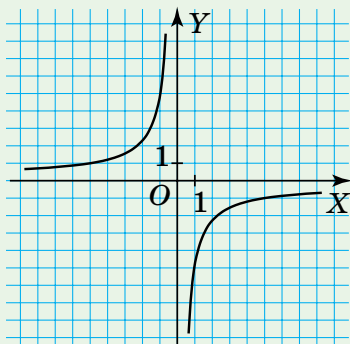
Побудову графіка функції виконаємо за поданою схемою.

1. Побудуємо гіперболу $y = \frac{-5}{x}$ (мал. 90). Для цього визначимо координати кількох її точок (табл. 21).

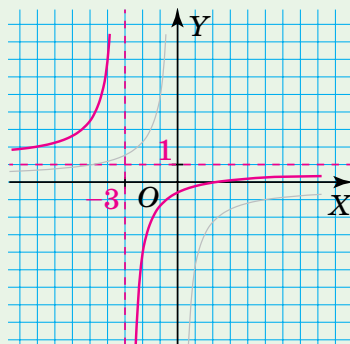
Таблиця 21

x	-5	-1	1	5
y	1	5	-5	-1

2. Перемістимо гіперболу $y = \frac{-5}{x}$ уздовж осі OX на 3 одиниці ліворуч і вздовж осі OY на 1 одиницю вгору (мал. 91).



Мал. 90



Мал. 91

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/gWgLK

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
перетворення графіка функції	transformation of the graph of a function	Transformation des Funktionsgraphen	transformation du graphique d'une fonction

Пригадайте головне

1. Як можна одержати графік функції $y = af(x)$ ($a \neq 0$), скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
2. Що є графіком функції $y = -x^2$; функції $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
3. Як можна одержати графік функції $y = f(x - a)$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
4. Як можна одержати графік функції $y = f(x) + b$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
5. Як можна одержати графік функції $y = f(x - a) + b$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?

Усне тренування

1. Магазин продав 250 зошитів у клітинку за ціною 10 грн. Податок становить 20 % від ціни реалізації. Визначте величину сплаченого податку.

2. Магазин продав 100 зошитів у лінійку за ціною 12 грн. Податок становить 20 % від ціни реалізації. Визначте величину сплаченого податку.

3. Додатне число x у три рази більше за число y . На скільки відсотків число x більше за число y ?

4. Дівчат у класі в чотири рази більше, ніж хлопців. На скільки відсотків дівчат більше за хлопців?

Розв'яжіть задачі

339'. Яке із тверджень є правильним:

- 1) графіком функції $y = ax^2$ ($a \neq 0$) є парабола;
- 2) вітки параболи $y = ax^2$ напрямлені вниз, якщо $a > 1$;
- 3) вітки параболи $y = ax^2$ напрямлені вниз, якщо $a < 0$?

340'. Яке із тверджень є правильним:

- 1) графік функції $y = f(x - 8)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на 8 одиниць ліворуч;
- 2) графік функції $y = f(x - 8)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на 8 одиниць праворуч;
- 3) графік функції $y = f(x - 8)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на 8 одиниць угору?

341'. Яке із тверджень є правильним:

- 1) графік функції $y = f(x) + 7$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на 7 одиниць угору;
- 2) графік функції $y = f(x) + 7$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на 7 одиниць праворуч;
- 3) графік функції $y = f(x) + 7$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на 7 одиниць униз?

342°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті стискання графіка функції $y = x^2$ уздовж осі ординат:

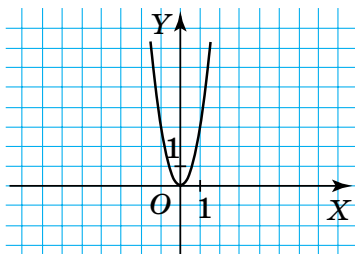
- 1) у 4 рази; 2) у 2 рази; 3) у 5 разів.

343°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано

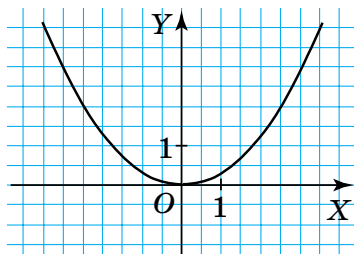


в результаті розтягування графіка функції $y = \sqrt{x}$ уздовж осі ординат: 1) у 2 рази; 2) у 6 разів.

344°. На малюнках 92, 93 зображено графіки функцій $y = ax^2$. Визначте коефіцієнт a .

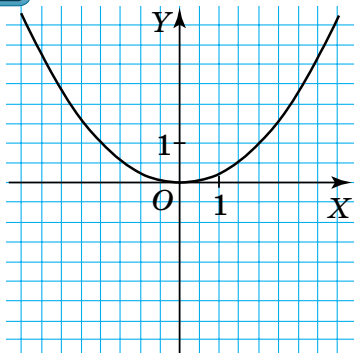


Мал. 92

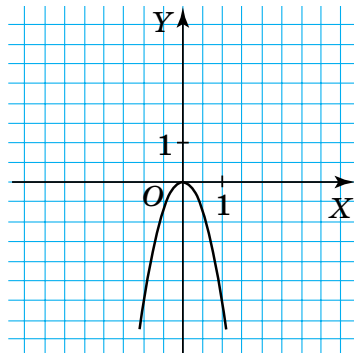


Мал. 93

345°. На малюнках 94, 95 зображено графіки функцій $y = ax^2$. Визначте коефіцієнт a .



Мал. 94



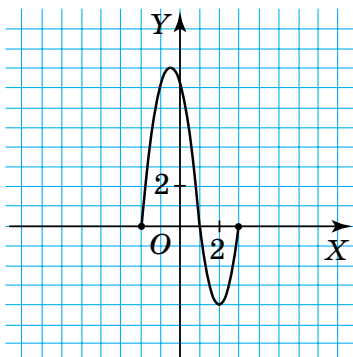
Мал. 95

346°. На малюнку 96 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-2; 3]$. Побудуйте графік функції:

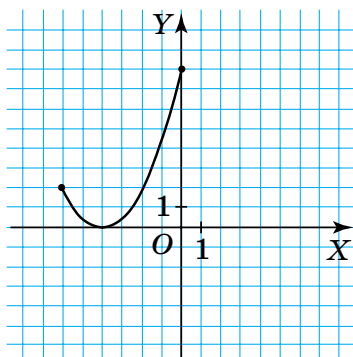
- 1) $y = \frac{1}{4}f(x)$;
- 2) $y = -f(x)$;
- 3) $y = -2f(x)$;
- 4) $y = -0,5f(x)$.

347°. На малюнку 97 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-6; 0]$. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{1}{2}f(x)$;
- 2) $y = -f(x)$.



Мал. 96



Мал. 97

- 348°.** Побудуйте графік функції $y = ax^2$, якщо $a = -1$. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 22.

Таблиця 22

Властивості	$y = x^2$	$y = -x^2$
область визначення функції		
область значень функції		
нулі функції		
$y < 0$		
$y > 0$		
проміжки зростання		
проміжки спадання		

- 349°.** Побудуйте графік функції $y = ax^2$, якщо $a = 2$. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 23.



Таблиця 23

Властивості	$y = x^2$	$y = 2x^2$
область визначення функції		
область значень функції		
нулі функції		
$y < 0$		
$y > 0$		
проміжки зростання		
проміжки спадання		

- 350°.** Побудуйте графік функції:



- 1) $y = 3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$;
 2) $y = -3x^2$; 5) $y = 5x^2$;
 3) $y = -\frac{1}{3}x^2$; 6) $y = -5x^2$.



qr.orioncentr.com.ua/biZu8

- 351°.** Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2\sqrt{x}$; 3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$;
 2) $y = -\sqrt{x}$; 4) $y = -2\sqrt{x}$.

352°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті переміщення графіка функції $y = |x|$ уздовж осі абсцис:

- 1) на 8 одиниць ліворуч; 3) на 23 одиниці ліворуч;
2) на 9 одиниць праворуч; 4) на 11 одиниць праворуч.

353°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті переміщення графіка функції $y = \sqrt{x}$ уздовж осі абсцис:

- 1) на 12 одиниць праворуч; 2) на 20 одиниць ліворуч.

354°. На малюнку 96 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-2; 3]$. Побудуйте графік функції: 1) $y = f(x + 3)$; 2) $y = f(x - 1)$.

355°. На малюнку 97 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-6; 0]$. Побудуйте графік функції: 1) $y = f(x + 2)$; 2) $y = f(x - 5)$.

356°. Побудуйте графік

функції:

- 1) $y = (x + 1)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$;
2) $y = (x - 1)^2$; 5) $y = (x + 7)^2$;
3) $y = (x + 5)^2$; 6) $y = (x - 7)^2$.

qr.orioncentr.com.ua/ot9F6



357°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt{x+2}$; 4) $y = \sqrt{x+1}$.

358°. Побудуйте графік функції $y = (x - a)^2$, якщо $a = -2$. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 24.

Таблиця 24

Властивості	$y = x^2$	$y = (x + 2)^2$
область визначення функції		
область значень функції		
нули функції		
$y < 0$		
$y > 0$		
проміжки зростання		
проміжки спадання		

- 359°.** Побудуйте графік функції $y = (x - a)^2$, якщо $a = 3$.
Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 25.



Таблиця 25

Властивості	$y = x^2$	$y = (x - 3)^2$
область визначення функції		
область значень функції		
нулі функції		
$y < 0$		
$y > 0$		
проміжки зростання		
проміжки спадання		

- 360°.** Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті переміщення графіка функції $y = |x|$ уздовж осі ординат:

- 1) на 4 одиниці вгору; 3) на 5 одиниць униз;
2) на 2 одиниці вниз; 4) на 12 одиниць угору.

- 361°.** Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті переміщення графіка функції $y = \sqrt{x}$ уздовж осі ординат:

- 1) на 2 одиниці вгору; 2) на 10 одиниць униз.

- 362°.** На малюнку 96 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-2; 3]$. Побудуйте графік функції: 1) $y = f(x) + 2$; 2) $y = f(x) - 1$.

- 363°.** На малюнку 97 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-6; 0]$. Побудуйте графік функції: 1) $y = f(x) + 4$; 2) $y = f(x) - 3$.

- 364°.** Побудуйте графік функції:



- 1) $y = x^2 + 3$; 4) $y = x^2 - 4$;
2) $y = x^2 - 3$; 5) $y = x^2 + 6$;
3) $y = x^2 + 4$; 6) $y = x^2 - 6$.

qr.orioncentr.com.ua/4GHqI



- 365°.** В одній системі координат побудуйте графіки функцій:



- 1) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$;
2) $y = \sqrt{x} - 1$; 4) $y = \sqrt{x} + 3$.

366°. Побудуйте графік функції $y = x^2 + a$, якщо $a = 1$.
Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 26.

Таблиця 26

Властивості	$y = x^2$	$y = x^2 + 1$
область визначення функції		
область значень функції		
нулі функції		
$y < 0$		
$y > 0$		
проміжки зростання		
проміжки спадання		

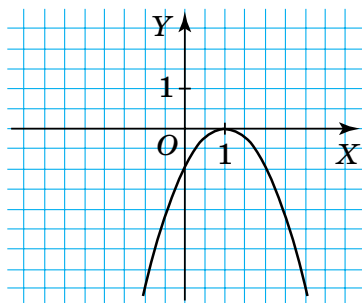
367°. Побудуйте графік функції $y = x^2 + a$, якщо $a = -4$.
Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 27.



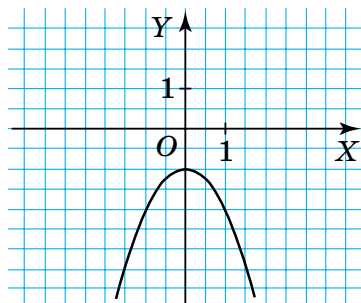
Таблиця 27

Властивості	$y = x^2$	$y = x^2 - 4$
область визначення функції		
область значень функції		
нулі функції		
$y < 0$		
$y > 0$		
проміжки зростання		
проміжки спадання		

368°. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 98, 99.

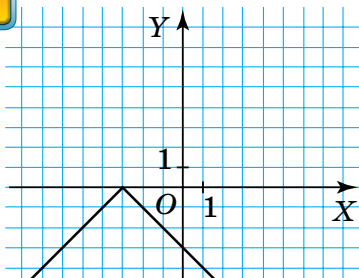


Мал. 98

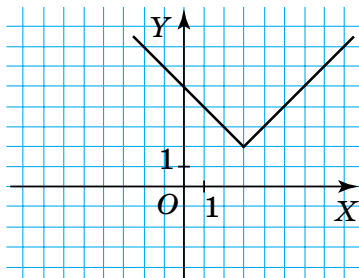


Мал. 99

369°. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 100, 101.



Мал. 100



Мал. 101

370°. Побудуйте графік функції:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $y = (x + 2)^2 + 4$; | 4) $y = (x - 2)^2 - 4$; |
| 2) $y = (x - 2)^2 + 4$; | 5) $y = (x + 1)^2 + 1$; |
| 3) $y = (x + 2)^2 - 4$; | 6) $y = (x - 7)^2 + 2$. |

Визначте координати вершини парабол.

371°. Побудуйте графік функції:



- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $y = (x + 1)^2 + 5$; | 3) $y = (x + 6)^2 - 3$; |
| 2) $y = (x - 1)^2 + 3$; | 4) $y = (x - 5)^2 - 8$. |

Визначте координати вершини парабол.

372°. Побудуйте графік функції:



1) $y = \sqrt{x - 1} + 1$;

2) $y = \sqrt{x + 3} - 5$;

3) $y = \sqrt{x - 5} + 2$;

4) $y = |x + 2| + 5$;

5) $y = |x - 2| - 5$;

6) $y = |x + 2| - 5$.

qr.orioncentr.com.ua/3QEZP



373°. Побудуйте графік функції $y = 3(x + 2)^2 - 5$. Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання; проміжки спадання.

374°. Побудуйте графік функції $y = (x - 3)^2 + 3$. Знайдіть:



- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості.

375°. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{x} + 1$; 2) $y = \frac{2}{x} + 2$; 3) $y = \frac{1}{x-3}$; 4) $y = \frac{1}{x+4} - 1$.

376°. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{x} + 3$; 2) $y = \frac{1}{x+3} - 2$.

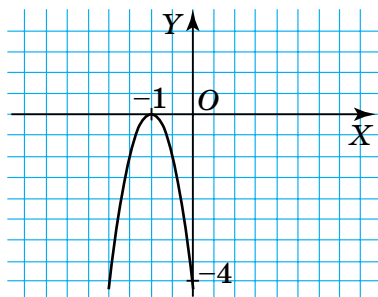
377. Функція $y = f(x)$ має нуль $x = -5$, $E(f) = [-4; 6]$. Знайдіть нуль функції та множину значень функції $y = 3f(x)$.

378. Дано функцію $f(x) = -x^2 + 2$. Для $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$ знайдіть значення функції:

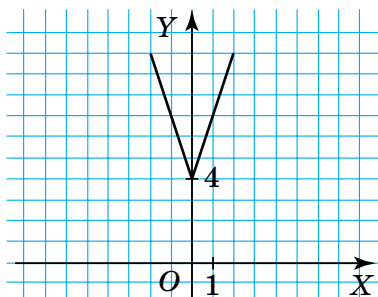


1) $y = f(x + 4)$; 2) $y = f(x - 2)$.

379. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 102, 103.

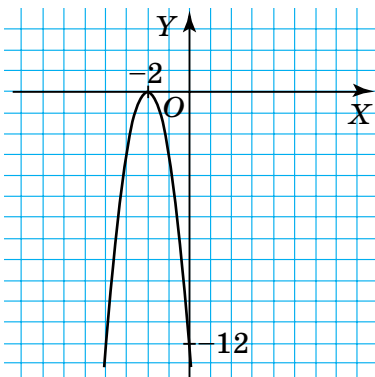


Мал. 102

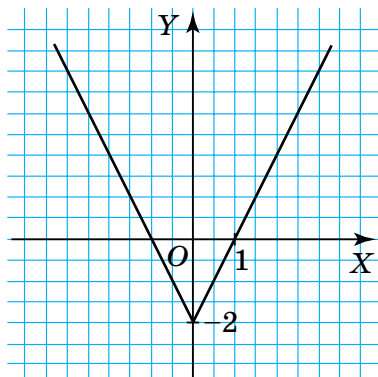


Мал. 103

380. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 104, 105.



Мал. 104



Мал. 105

381. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення вздовж осей координат параболи $y = x^2$ так, що її вершина має координати:

- 1) (4; 0); 3) (-9; 12); 5) (-5; 7);
2) (2; -10); 4) (-2; -7); 6) (-8; 0).

382. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення вздовж осей координат параболи $y = x^2$ так, що її вершина має координати:



- 1) (0; 3); 2) (3; -15); 3) (-1; 4); 4) (1; 17).

383. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = x^2$; 4) $y = -2(x - 1)^2$;
2) $y = 2x^2$; 5) $y = -2(x - 1)^2 + 3$.
3) $y = -2x^2$;

384. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = x^2$; 4) $y = -3(x + 4)^2$;
2) $y = 3x^2$; 5) $y = -3(x + 4)^2 - 2$.
3) $y = -3x^2$;

385. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4}$;
2) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; 4) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 2$.

386. Параболу $y = x^2$ переміщують уздовж осей координат. Задайте формулою функцію $y = f(x)$, яку одержано в результаті такого переміщення, якщо відомі її властивості: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = [-4; +\infty)$, $x = -1$, $x = 3$ — нулі функції.



qr.orioncentr.com.ua/Dknun

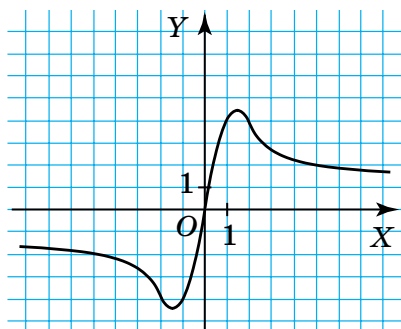


387. Задайте формулою функцію $y = f(x)$, яку одержано в результаті переміщення гіперболи $y = \frac{1}{x}$ уздовж осей координат так, щоб для цієї функції виконувалися умови:

- 1) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
 2) $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

388. На малюнку 106 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте схематично графік функції:

- 1) $y = -f(x + 3) - 1$; 2) $y = 2f(-x)$.



Мал. 106

389*. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення графіка функції $y = \sqrt{x+7} - 3$ на 2 одиниці вгору вздовж осі OY та на 3 одиниці праворуч уздовж осі OX . Побудуйте графік функції та знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання; проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції.

390*. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення графіка функції $y = 3|x+5| - 1$ на 2 одиниці вниз уздовж осі OY та на 2 одиниці праворуч уздовж осі OX . Побудуйте графік функції та знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) проміжки зростання; проміжки спадання;
- 6) найбільше та найменше значення функції.

391*. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x-2}{x}; \quad 2) y = \frac{x-1}{x+1}; \quad 3) y = \frac{x+4}{x-2}; \quad 4) y = \frac{2x+4}{x-7}.$$

392*. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2}{x^2 - x^3}; \quad 2) y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}; \quad 3) y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x}.$$

Проявіть компетентність

393. Земельний наділ має форму прямокутника, ширина x (у метрах) якого у 4 рази менша від довжини ($x \in [4; 10]$).



1. Запишіть функцію, що задає залежність площі ділянки від її ширини.
2. Побудуйте графік цієї функції та запишіть її властивості.
3. Запишіть функцію, що задає залежність периметра ділянки від її ширини.
4. Побудуйте графік цієї функції та запишіть її властивості.

§ 9. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

1. Квадратична функція та її область визначення



qr.orioncentr.com.ua/e50hE

Ситуація. Василь, маючи 16 м сітки для огорожі, вирішив загородити для курчат ділянку прямокутної форми найбільшої площі. Він міркував так: нехай x — ширина ділянки (у метрах), тоді $(8 - x)$ — довжина ділянки (у метрах), а площа ділянки — $S = x(8 - x)$, або $S = -x^2 + 8x$.



Як визначити ширину ділянки, за якої площа буде найбільшою?

Для цього треба дослідити отриману функцію.



Василь отримав функцію $S = -x^2 + 8x$, яка в математиці називається квадратичною функцією. Її можна подати у вигляді $S = -(x - 4)^2 + 16$. Вона набуває найбільшого значення, якщо $x = 4$. Отже, шукані розміри ділянки: 4×4 м.

Запам'ятайте!

Квадратичною функцією називається функція, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$.

$y = x^2 + 2x$, $y = x^2 + 2x + 3$, $y = -5x^2 + x + 4$ — приклади квадратичних функцій.

2. Графік квадратичної функції

Запам'ятайте!

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола.

Справді, вираз $ax^2 + bx + c$ можна звести до вигляду $a(x - x_0)^2 + y_0$ (див. фрагмент 2 в е-додатку), а графіком функції, що задається таким виразом, є парабола.



Як скористатися графіком функції $y = x^2$ для побудови графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$?

Треба виконати два кроки.



Спочатку у виразі $ax^2 + bx + c$ треба виділити повний квадрат: $a(x - x_0)^2 + y_0$, а потім виконати відповідні перетворення графіка функції $y = x^2$. Розглянемо приклад.

Задача 1 Побудуйте графік функції $y = 2x^2 + 4x + 5$.

Розв'язання

1. Виділимо квадрат двочлена у виразі, що задає дану функцію:

$$2x^2 + 4x + 5 = 2(x + 1)^2 + 3.$$

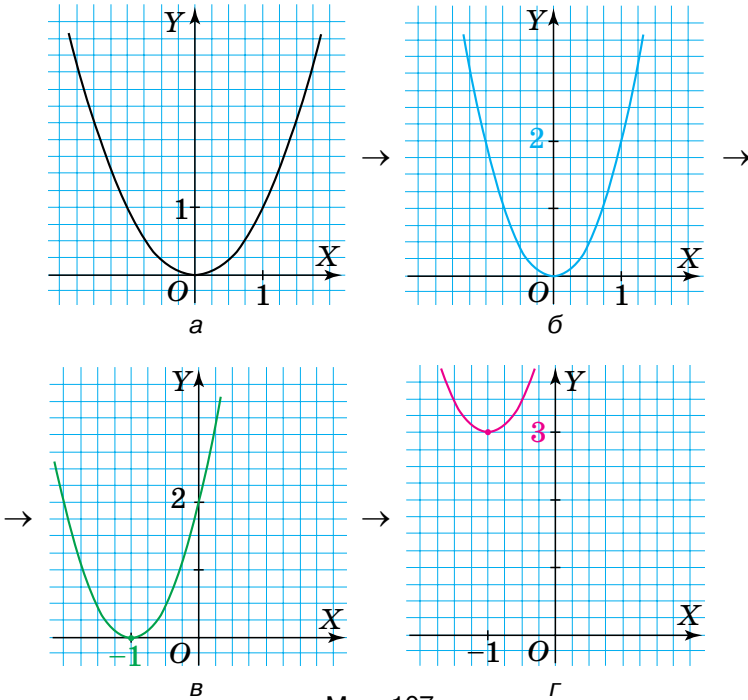
2. Графіком функції $y = 2(x + 1)^2 + 3$ є парабола, яку можна побудувати шляхом перетворень параболи $y = x^2$:

$$y = x^2 \text{ (мал. 107, а) } \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2x^2 \text{ — розтяг у 2 рази уздовж осі } OY \text{ (мал. 107, б) } \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2(x+1)^2 \text{ — переміщення на 1 од. ліворуч уздовж осі } OX \text{ (мал. 107, в) } \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2(x+1)^2 + 3 \text{ — переміщення на 3 од. вгору вздовж осі } OY \text{ (мал. 107, г).}$$



Мал. 107

За малюнком 107 також бачимо:

1) вітки параболи $y = 2x^2 + 4x + 5$ напрямлені вгору, оскільки $a = 2 > 0$;

2) вершина параболи $y = 2x^2 + 4x + 5$ має координати $(-1; 3)$. Їх легко визначити з рівності $y = 2(x+1)^2 + 3$, яку одержали, виділивши повний квадрат у виразі, що задає дану функцію.



Графік квадратичної функції $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ можна одержати такими перетвореннями параболи $y = x^2$:

$$y = x^2 \rightarrow y = ax^2 \rightarrow y = a(x - x_0)^2 \rightarrow y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

$(x_0; y_0)$ — координати вершини параболи $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

3. Схема побудови графіка квадратичної функції



Чи обов'язково для побудови графіка квадратичної функції виділяти повний квадрат у виразі, що задає функцію?

Ні.



Можна скористатися загальною схемою.



Схема побудови графіка квадратичної функції
 $y = ax^2 + bx + c$.

1. Визначити напрям віток:

- якщо $a > 0$, то вітки напрямлені вгору;
- якщо $a < 0$, то вітки напрямлені вниз.

2. Знайти координати вершини параболи $(x_0; y_0)$:

- абсциса вершини: $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- ордината вершини: $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ або $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

3. Знайти координати точок перетину параболи з осями координат:

- з віссю OX , тобто $(x_1; 0)$ і $(x_2; 0)$. Для цього накладають умову $y = 0$, тобто $ax^2 + bx + c = 0$. З неї знаходять x_1 і x_2 — нулі квадратичної функції;
- з віссю OY , тобто $(0; y)$. Для цього накладають умову $x = 0$, тоді одержують $y = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$, тобто $y = c$. Маємо точку $(0; c)$.

4. Знайти координати кількох інших точок параболи для більш точної побудови графіка. Зауважимо, що значення x доцільно вибирати близькими до значення x_0 .

5. Позначити одержані точки в системі координат і з'єднати їх плавною лінією.

Задача 2 Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 6x - 5$.

Розв'язання Графіком функції $y = -x^2 + 6x - 5$ є парабола. Для її побудови скористаємося схемою побудови графіка квадратичної функції.

1. Визначимо напрям віток параболи: $a = -1$, $a < 0$.

2. Знайдемо координати вершини параболи:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2}, x_0 = 3,$$

$$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4.$$

3. Знайдемо точки перетину графіка з осями координат:

— якщо $y = 0$, то $-x^2 + 6x - 5 = 0$, або $x^2 - 6x + 5 = 0$, звідси $x = 1$, $x = 5$;

— якщо $x = 0$, то $y = -5$.

4. Для більш точної побудови параболи знайдемо ще кілька допоміжних точок, наприклад для $x = 2$ і $x = 4$.

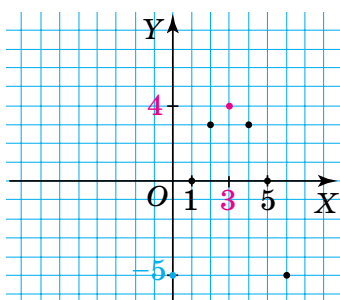
5. У системі координат позначимо точки (мал. 108) та з'єднаємо їх плавною лінією (мал. 109).

Вітки параболи напрямлені **вниз**.

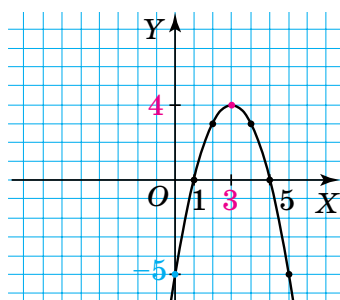
Точка **(3; 4)** — вершина параболи.

(0; -5) — точка перетину з **віссю ординат**.

x	2	4
y	3	3



Мал. 108



Мал. 109

Зауважимо, що для схематичної побудови графіка квадратичної функції достатньо виконати 1-й, 2-й і 5-й кроки.

4. Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.

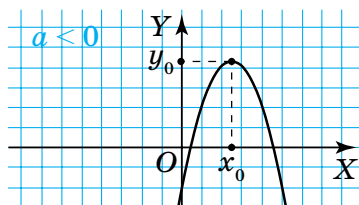


Як можна виявити властивості квадратичної функції?

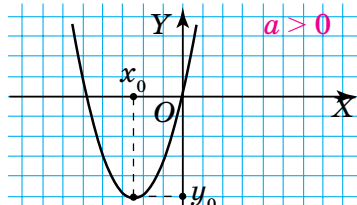
За її графіком.



Властивості квадратичної функції систематизуємо в таблиці 28, спираючись на малюнки 110, 111.



Мал. 110



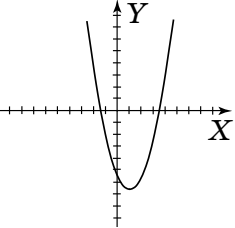
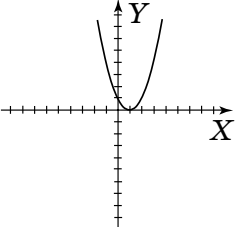
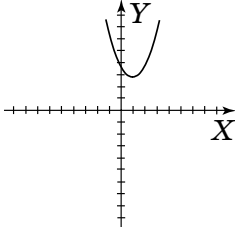
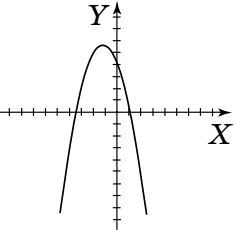
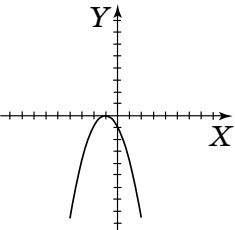
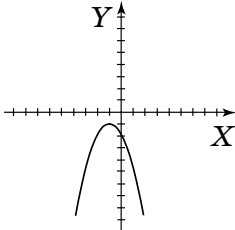
Мал. 111

Таблиця 28

		$a < 0$ (мал. 110)	$a > 0$ (мал. 111)
Область визначення функції		$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$
Область значень функції		$E(y) = (-\infty; y_0]$	$E(y) = [y_0; +\infty)$
Нулі функції		x_1, x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (якщо вони існують)	
Проміжки знакосталості	$f(x) < 0$	$(-\infty; +\infty)$, якщо $D < 0$; $(-\infty; x_0)$ і $(x_0; +\infty)$, якщо $D = 0$; $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; +\infty)$, якщо $D > 0$	$(x_1; x_2)$, якщо $D > 0$
	$f(x) > 0$	$(x_1; x_2)$, якщо $D > 0$	$(-\infty; +\infty)$, якщо $D < 0$; $(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, якщо $D = 0$; $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, якщо $D > 0$
Проміжки зростання		$(-\infty; x_0]$	$[x_0; +\infty)$
Проміжки спадання		$[x_0; +\infty)$	$(-\infty; x_0]$
Найбільше значення		y_0	Не існує
Найменше значення		Не існує	y_0

Узагалі, залежно від знака дискримінанта D та коефіцієнта a , маємо різні випадки розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ в системі координат відносно осі абсцис (табл. 29).

Таблиця 29

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Проміжки знакосталості квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ залежать від кількості нулів функції та коефіцієнта a (див. фрагмент 3 в е-додатку).



Кількість нулів функції $y = ax^2 + bx + c$ залежить від знака дискримінанта квадратного тричлена, що задає цю функцію:

- якщо $D < 0$, то $y = ax^2 + bx + c$ **не має нулів** функції; парабола не перетинає вісь абсцис;
- якщо $D = 0$, то $y = ax^2 + bx + c$ має **один нуль** функції $x_1 = x_2$; парабола дотикається до осі абсцис у точці $(x_1; 0)$;
- якщо $D > 0$, то $y = ax^2 + bx + c$ має **два нулі** функції x_1 і x_2 ; парабола перетинає вісь абсцис у точках $(x_1; 0)$ і $(x_2; 0)$.

Задача 3 Побудуйте графік функції $y = x^2 + 2x + 3$ та визначте її властивості.

Розв'язання Графіком квадратичної функції $y = x^2 + 2x + 3$ є парабола.

1. $a = 1, a > 0$.

2. $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2}, x_0 = -1$.

$y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$.

3. Якщо $y = 0$, то $x^2 + 2x + 3 = 0$.
 $D < 0$, тому рівняння не має коренів.

Якщо $x = 0$, то $y = 3$.

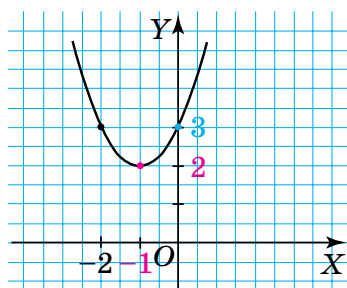
Вітки параболи
напрявлені вгору.

Точка $(-1; 2)$ — вершина
параболи.

Парабола не перетинає
вісь абсцис.

$(0; 3)$ — точка перетину
з віссю ординат.

4. У системі координат позначимо точки та з'єднаємо їх плавною лінією (мал. 112).



Мал. 112

Визначимо властивості функції $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Область визначення функції:

$(-\infty; +\infty)$.

Область значень функції:

$[2; +\infty)$.

Нулі функції:

нулів немає.

$f(x) > 0$, якщо

$x \in (-\infty; +\infty)$.

Проміжок зростання:

$[-1; +\infty)$.

Проміжок спадання:

$(-\infty; -1]$.

Найбільше значення функції:

не існує.

Найменше значення функції:

$y = 2$.

Дізнайтеся більше

У вас могло виникнути запитання: Як побудувати графік функції $y = ax^2 + b|x| + c$?

Ви знаєте, що $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

Тоді $y = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{якщо } x \geq 0, \\ ax^2 - bx + c, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

Для прикладу побудуємо графік функції $y = x^2 + 4|x| - 5$.

Розкривши модуль, одержимо $y = \begin{cases} x^2 + 4x - 5, & \text{якщо } x \geq 0, \\ x^2 - 4x - 5, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

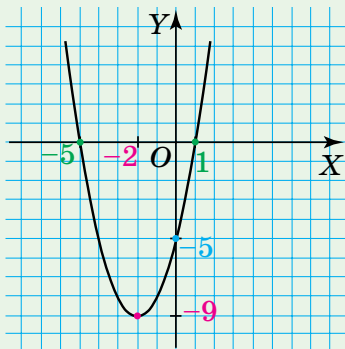
Це можна записати по-іншому:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5, \\ x \geq 0, \\ y = x^2 - 4x - 5, \\ x < 0. \end{cases}$$

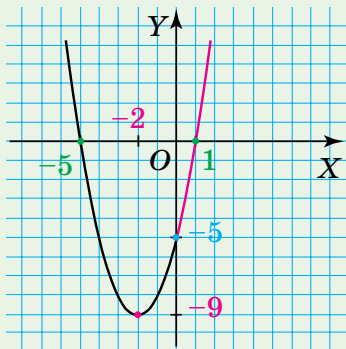
Побудуємо спочатку параболу $y = x^2 + 4x - 5$ ($x \geq 0$).

Вітки параболи напрямлені вгору. Її вершина має координати $x_0 = -2$, $y_0 = -9$.

Парабола перетинає осі координат у точках $(0; -5)$, $(1; 0)$, $(-5; 0)$. Цю параболу зображено на малюнку 113. Умову $x \geq 0$ задовольняють точки тієї частини параболи, яку виділено червоним кольором (мал. 114). Тобто та точка, яка лежить на осі ординат, і ті, які розміщені праворуч від неї.

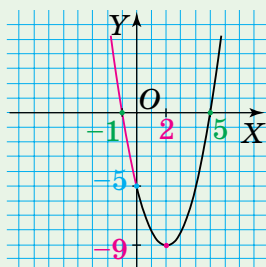


Мал. 113

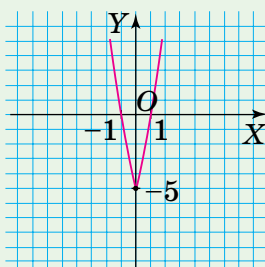


Мал. 114

Аналогічно міркуючи, будуємо параболу $y = x^2 - 4x - 5$ ($x < 0$) і беремо ту її частину, яка лежить ліворуч від осі ординат (мал. 115). Остаточний графік функції $y = x^2 + 4|x| - 5$ зображено на малюнку 116.



Мал. 115



Мал. 116

Так само міркуємо, будуючи графіки функцій $y = f(|x|)$:

1) функцію $y = f(|x|)$ записуємо у вигляді:

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$$

2) будуємо графік функції $y = f(x)$ і беремо ту його частину, яка відповідає $x \geq 0$;

3) будуємо графік функції $y = f(-x)$ і беремо ту його частину, яка відповідає $x < 0$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/EMGQ3

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
квадратична функція	quadratic function	quadratische Funktion	fonction quadratique

Пригадайте головне

1. Яка функція називається квадратичною?
2. Що є графіком квадратичної функції?
3. Яка область визначення функції $y = ax^2 + bx + c$?
4. Як визначити координати вершини параболи?
5. За якої умови вітки параболи напрямлені вгору; вниз?
6. Як визначити область значень квадратичної функції?
7. Як знайти нулі квадратичної функції?
8. За яких значень аргументу функція $y = ax^2 + bx + c$ зростає; спадає?
9. За яких значень аргументу функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних значень; від'ємних значень?

Усне тренування

1. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 4) $2x^2 - 10x - 5 = 0$;

2) $x^2 - 8x - 9 = 0$; 5) $4x^2 - 1 = 0$;

3) $-x^2 - x + 1 = 0$; 6) $x^2 + 4x = 0$.

2. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 + 4x = 0$; 3) $2x^2 - 3 = 0$;

2) $x^2 - 7x = 0$; 4) $4x^2 - 100 = 0$.

3. Обчисліть:

1) $0,4^3 \cdot 5^3$; 2) $121^2 : 1,1^2$; 3) $\frac{64^3}{8^4}$; 4) $\frac{108^5}{6^{10} \cdot 27^3}$.

Розв'яжіть задачі

394'. Яке із тверджень є правильним:

1) область визначення квадратичної функції — усі додатні числа;

2) область визначення квадратичної функції — усі числа, крім нуля;

3) область визначення квадратичної функції — усі числа;

4) область значень квадратичної функції — усі числа;

5) область значень квадратичної функції — число 0?

395'. Дано параболу $y = ax^2 + bx + c$. Яке із тверджень є правильним:

1) вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a > 0$;

2) вітки параболи напрямлені вниз, якщо $D < 0$?

396'. Дано квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Яке із тверджень є правильним:

1) квадратична функція має три нулі, якщо $a < 0$;

2) квадратична функція має два нулі за будь-яких коефіцієнтів a , b і c ;

3) квадратична функція не має нулів, якщо $b^2 - 4ac < 0$;

4) квадратична функція може мати не більш ніж два нулі?

397'. Чи є квадратичною дана функція:

1) $y = 9^2$; 3) $y = x^2$; 5) $y = x$;

2) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{x^2}$; 6) $y = x^2 x$;

7) $y = x^2 + x$;

9) $y = -x^2 + 2x^3$;

8) $y = 12 + x^2$;

10) $y = 9 - 7x + x^2$?

398°. Чи належить графіку функції $y = 3x^2 + 4x - 12$ точка:

1) $A(1; 7)$;

3) $C(0; -8)$;

5) $M(2; 8)$;

2) $B(-1; -19)$;

4) $D(0; -12)$;

6) $N(-3; 3)$?

399°. Чи належить графіку функції $y = x^2 - 5x + 7$ точка:



1) $K(1; 3)$;

3) $M(-1; 13)$;

2) $L(-2; 13)$;

4) $N(0; 7)$?

400°. Для функції $y = x^2 + 6x$ знайдіть:

1) значення функції, якщо $x = 0; -1; 3; -4$;

2) значення аргументу, якщо $y = 0; 7; 16$.

401°. Для функції $y = -x^2 + 2$ знайдіть:



1) значення функції, якщо $x = 0; -1; 3; -4$;

2) значення аргументу, якщо $y = 1; -2; -7$.

402°. Знайдіть точки параболи $y = x^2 + 7x - 7$, у яких відмінна від нуля абсциса дорівнює ординаті.

403°. Знайдіть точки параболи $y = -x^2 + 4x$, у яких відмінна від нуля абсциса вдвічі менша від ординати.

404°. Знайдіть точки параболи $y = x^2 + 5x - 3$, у яких абсциса втричі менша від ординати.

405°. У якої з парабол вітки напрямлені вгору:

1) $y = 2x^2 - x - 6$;

4) $y = -x - x^2$;

2) $y = -0,1x^2 - 6$;

5) $y = 2 + x^2 - x$;

3) $y = -x^2 + 12x$;

6) $y = -2 + 10x^2$?

406°. У якої з парабол вітки напрямлені вниз:

1) $y = -x^2 + x - 15$;

3) $y = -5x + x^2 - 7$;

2) $y = 2x^2 - x - 6$;

4) $y = -16 + x^2$?

407°. Знайдіть координати вершини параболи, виділивши повний квадрат:



1) $y = x^2 - 2x + 1$;

2) $y = x^2 + 10x$;

3) $y = x^2 + 24x + 120$;

4) $y = x^2 - 12x - 9$.

Які перетворення параболи $y = x^2$ треба виконати для побудови графіка даної квадратичної функції?



qr.orioncentr.com.ua/nKzfK

408°. Знайдіть координати вершини параболи, виділивши повний квадрат:

1) $y = x^2 - 4x + 4$; 2) $y = x^2 - 16x + 69$.

Укажіть, які перетворення параболи $y = x^2$ треба виконати для побудови графіка даної квадратичної функції.

409°. Знайдіть квадратичну функцію, яку отримано заданими перетвореннями параболи $y = x^2$:

1) переміщення на 2 од. ліворуч уздовж осі OX та на 4 од. вгору уздовж осі OY ;

2) переміщення на 6 од. праворуч уздовж осі OX та на 9 од. вниз уздовж осі OY ;

3) розтяг у 3 рази уздовж осі OY , переміщення на 10 од. ліворуч уздовж осі OX та на 10 од. вниз уздовж осі OY .

410°. Знайдіть квадратичну функцію, яку отримано заданими перетвореннями параболи $y = x^2$:



1) переміщення на 7 од. праворуч уздовж осі OX та на 7 од. вгору уздовж осі OY ;

2) переміщення на 2 од. ліворуч уздовж осі OX та на 2 од. вниз уздовж осі OY .

411°. Знайдіть координати $(x_0; y_0)$ вершини параболи за формулами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, якщо:

1) $y = x^2 - 4x$;

5) $y = x^2 + 12x - 3$;

2) $y = x^2 + 5x$;

6) $y = x^2 + 20x + 30$;

3) $y = -x^2 + 3$;

7) $y = -6x^2 - 18x + 1$;

4) $y = 10x^2 - 5$;

8) $y = 3x^2 - 24x + 5$.

412°. Знайдіть координати $(x_0; y_0)$ вершини параболи за формулами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, якщо:



1) $y = x^2 - 12x$;

4) $y = x^2 - 14x - 90$;

2) $y = -x^2 + 5$;

5) $y = x^2 + 2x + 1$;

3) $y = 8x^2 - 2$;

6) $y = -4x^2 - 16x + 7$.

413°. Знайдіть нулі квадратичної функції:

1) $y = x^2 + 4x - 5$;

5) $y = 2x^2 - 5x + 3$;

2) $y = x^2 - 7x - 8$;

6) $y = 4x^2 - 4x + 1$;

3) $y = -6x^2 - x + 1$;

7) $y = 4x^2 - x - 3$;

4) $y = 2x^2 - 11x + 5$;

8) $y = 5x^2 + 14x - 3$.

414°. Знайдіть координати точок перетину з осями координат парабол:

1) $y = x^2 - 4x$;

7) $y = x^2 - 4x + 8$;

2) $y = x^2 - 16$;

8) $y = x^2 + 15x - 16$;

3) $y = 9x^2 - 18x$;

9) $y = 4x^2 - 8x + 3$;

4) $y = 5x^2 - 20$;

10) $y = 4x^2 - 7x + 3$;

5) $y = x^2 + 11$;

11) $y = -6x^2 - x + 1$;

6) $y = 9x^2 + 36$;

12) $y = 2x^2 - 11x + 5$.

415°. Знайдіть координати точок перетину з осями координат парабол:



1) $y = x^2 - 9x$;

5) $y = x^2 - 8x + 16$;

2) $y = x^2 - 64$;

6) $y = x^2 + 25x + 100$;

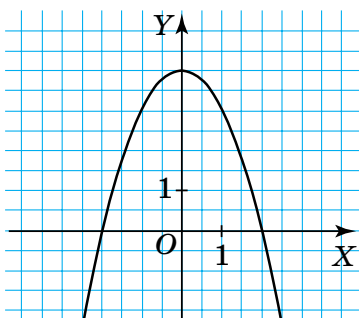
3) $y = x^2 + 2$;

7) $y = 2x^2 - 5x + 3$;

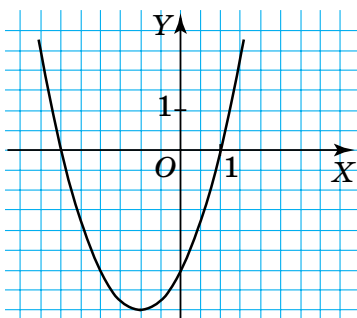
4) $y = 4x^2 - 16$;

8) $y = -3x^2 + 19x - 6$.

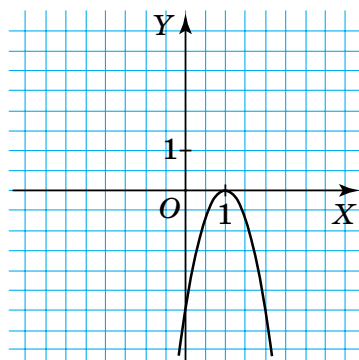
416°. На малюнках 117–120 зображено графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$. Для кожної з них визначте знаки коефіцієнта a й дискримінанта D .



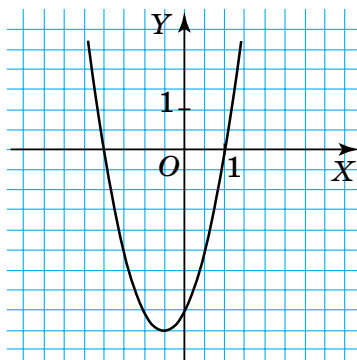
Мал. 117



Мал. 118



Мал. 119



Мал. 120

417°. Який вигляд має графік функції $y = ax^2 + bx + c$ за умови, що:

- 1) $a = 2, D = 18$; 3) $a = 7, D = -8$; 5) $a = 7, D = 49$;
2) $a = -3, D = 0$; 4) $a = 5, D = 0$; 6) $a = -8, D = -1$?

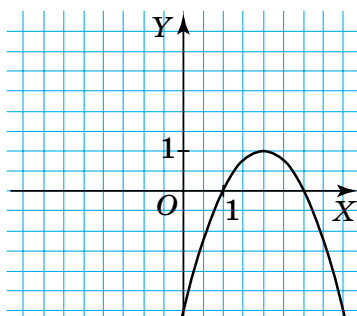
418°. Який вигляд має графік функції $y = ax^2 + bx + c$ за умови, що:



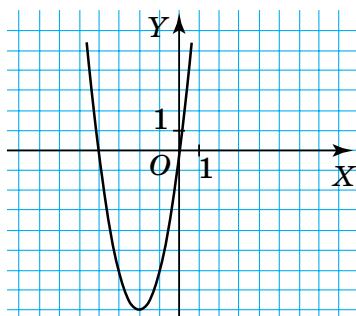
- 1) $a > 0, D > 0$; 3) $a > 0, D < 0$;
2) $a < 0, D < 0$; 4) $a < 0, D = 0$?

419°. За малюнками 121, 122 визначте:

- 1) координати вершини параболі;
2) область значень функції;
3) координати точок перетину параболі з осями координат.



Мал. 121

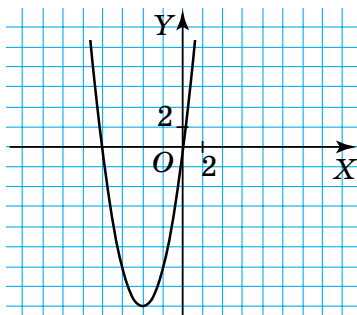


Мал. 122

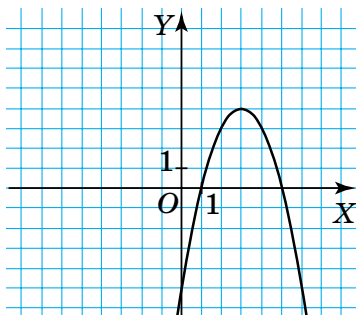
420°. За малюнками 123, 124 визначте:



- 1) координати вершини параболі;
2) область значень функції;
3) координати точок перетину параболі з осями координат.



Мал. 123



Мал. 124

421°. Знайдіть значення n і m , якщо дано нулі квадратичної функції $y = x^2 + mx + n$:

- 1) $x = 0, x = -1$; 3) $x = 2, x = -3$;
2) $x = -2, x = 2$; 4) $x = -0,5, x = -4$.

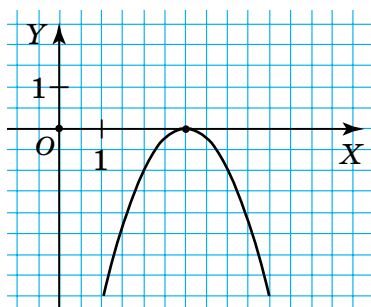
422°. Знайдіть значення p і q , якщо дано нулі квадратичної функції $y = x^2 + px + q$:



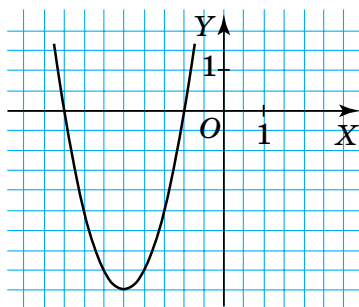
- 1) $x = 0, x = 9$; 2) $x = -5, x = 5$; 3) $x = 4, x = -3$.

423°. Скориставшись малюнком 125, порівняйте значення функції $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ для поданих значень аргументу:

- 1) $x = 3$ і $x = 5$; 3) $x = -2,7$ і $x = 0,9$;
2) $x = -1,5$ і $x = 5$; 4) $x = -2$ і $x = 3$.



Мал. 125



Мал. 126

424°. Скориставшись малюнком 126, порівняйте значення функції $f(x) = 2x^2 + 10x + 8$ для поданих значень аргументу:

- 1) $x = 0$ і $x = 1,5$; 2) $x = -2$ і $x = -5$; 3) $x = -1,2$ і $x = -1,4$.

425. Для функції $y = -x^2 + 3x + 5$ знайдіть:

- 1) значення функції, якщо $x = 0; -1; 0,5; 0,2$;
2) значення аргументу, якщо $y = 7; 5; 5,81$.

426. Для функції $y = 8x^2 + 2x - 1$ знайдіть:

- 1) значення функції, якщо $x = 0; -0,5; \frac{1}{4}$;
2) значення аргументу, якщо $y = 5; 9$.

427. Побудуйте шляхом перетворення графіка функції $y = x^2$ графік функції:

- 1) $y = x^2 - 6x$; 3) $y = x^2 - 4x + 8$; 5) $y = x^2 - 12x$;
2) $y = x^2 - 4x$; 4) $y = x^2 - 2x + 1$; 6) $y = -x^2 + 6x - 9$.

428. Побудуйте шляхом перетворення графіка функції



$y = x^2$ графік функції:

- 1) $y = x^2 - 8x$; 3) $y = x^2 + 2x$;
2) $y = x^2 - 6x + 8$; 4) $y = x^2 - 4x + 4$.

429. Побудуйте графік функції за схемою, наведеною у підручнику:



- 1) $y = x^2 - x - 2$;
2) $y = x^2 - 5x$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 1$;
4) $y = -2x^2 - 6x + 8$;
5) $y = -6x^2 - 12x$;
6) $y = 3x^2 + 2x - 5$.



qr.orioncentr.com.ua/4e20s

430. Побудуйте графік функції за схемою, наведеною у підручнику:

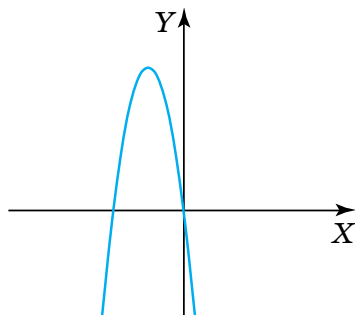
- 1) $y = x^2 - 4x + 5$;
2) $y = x^2 - 3x$;
3) $y = -x^2 + 2x$;
4) $y = 4x^2 - 4x + 3$.

431. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

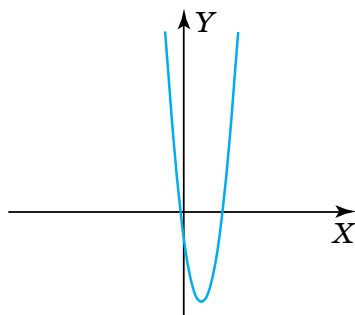
- 1) $f(x) = x^2 - 2x + 8$ і $g(x) = -x^2 + 8x - 4$;
2) $f(x) = x^2 - 2x$ і $g(x) = -x^2 + 2x$;
3) $f(x) = x^2 + 4$ і $g(x) = x^2 - 6x + 4$.

Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину.

432. Порівняйте з нулем коефіцієнти a , b і c функції $y = ax^2 + bx + c$ за малюнками 127, 128.

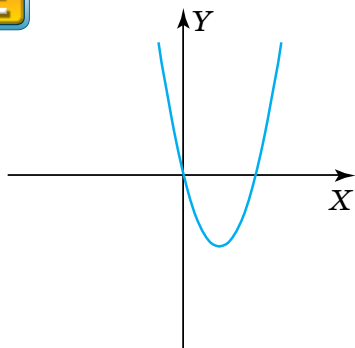


Мал. 127

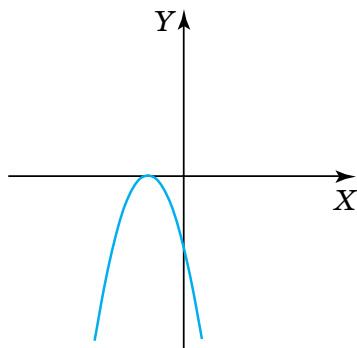


Мал. 128

433. Порівняйте з нулем коефіцієнти a , b і c функції $y = ax^2 + bx + c$ за малюнками 129, 130.



Мал. 129



Мал. 130

434. Який вигляд має графік функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

- 1) $a > 0, b < 0$ і $c < 0$; 3) $a > 0, b < 0$ і $c = 0$;
 2) $a > 0, b = 0$ і $c < 0$; 4) $a > 0, b > 0$ і $c > 0$?

435. Який вигляд має графік функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

- 1) $a > 0, b < 0$ і $c > 0$; 2) $a < 0, b > 0$ і $c = 0$?

436. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:



- 1) $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = 4$;
 2) $y = 2x^2 + 4x - 5$ і $y = x$;
 3) $y = x^2 - 4x$ і $y = -x^2 + 4x$.

Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину.

437. Побудуйте графік квадратичної функції:



- а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;
 б) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Визначте:

- 1) область визначення функції;
 2) область значень функції;
 3) нулі функції;
 4) проміжки знакосталості;
 5) найменше значення функції;
 6) проміжок зростання функції;
 7) проміжок спадання функції;
 8) найменше значення функції на відрізку $[-1; 2]$.

qr.orioncentr.com.ua/aAv6F



438. Побудуйте графік квадратичної функції:

а) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$;

б) $f(x) = -2x^2 - 10x - 8$.

Визначте:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості;
- 5) найбільше значення функції;
- 6) проміжок зростання функції;
- 7) проміжок спадання функції;
- 8) найбільше значення функції на відрізку $[-1; 0]$.

439. Побудуйте графік квадратичної функції:



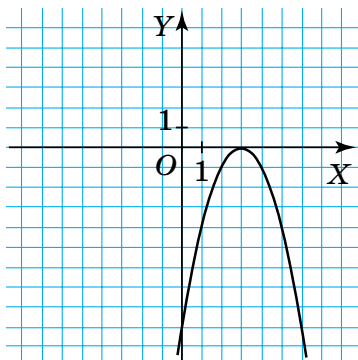
а) $f(x) = x^2 - 4x + 6$;

б) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

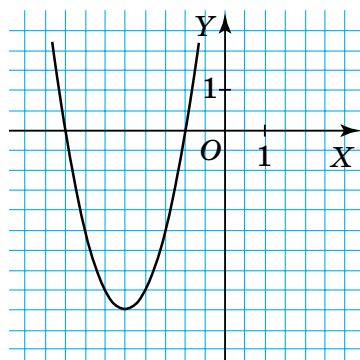
Визначте:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості функції;
- 5) проміжок спадання функції;
- 6) проміжок зростання функції;
- 7) найбільше значення функції;
- 8) найменше значення функції на відрізку $[1; 2]$.

440. На малюнках 131, 132 зображено графіки квадратичних функцій. Запишіть властивості квадратичної функції та задайте її формулою.

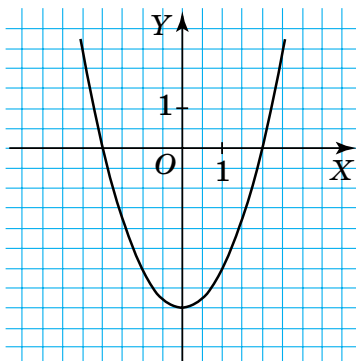


Мал. 131

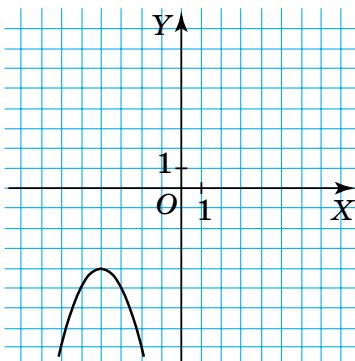


Мал. 132

- 441.** На малюнках 133, 134 зображено графіки квадратичних функцій. Запишіть властивості квадратичної функції та задайте її формулою.



Мал. 133



Мал. 134

- 442.** За яких значень параметра a парабола:
- 1) $y = x^2 + x + a$ не перетинає вісь абсцис;
 - 2) $y = x^2 + ax + 16$ дотикається до осі абсцис;
 - 3) $y = -ax^2 + x + 5$ проходить через точку $(-1; 2,5)$;
 - 4) $y = 5x^2 - 2x + a + 4$ перетинає вісь ординат у точці $(0; 4)$?
- 443.** За яких значень параметра m парабола:
- 1) $y = x^2 + x + m$ не перетинає вісь абсцис;
 - 2) $y = -x^2 + 2x + m$ дотикається до осі абсцис;
 - 3) $y = mx^2 + x + 4$ проходить через точку $(1; 9)$?
- 444.** Дано функцію $f(x) = -x^2 + 8x - 12$. Знайдіть значення x , за якого функція набуває:
- 1) найбільшого значення на проміжку $[-1; 6]$;
 - 2) найменшого значення на проміжку $[3; 6]$.
- 445.** Дано функцію $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$. Знайдіть значення x , за якого функція набуває:
- 1) найбільшого значення на проміжку $[-1; 3]$;
 - 2) найменшого значення на проміжку $[-1; 1]$.
- 446.** Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. Скориставшись графіком, порівняйте значення функції для поданих значень аргументу:
- 1) $x = 1$ і $x = 0,5$;
 - 2) $x = -1,5$ і $x = 1,5$;
 - 3) $x = -2$ і $x = 3$;
 - 4) $x = 2$ і $x = 4$.

447. Визначте коефіцієнти a , b і c функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) вітки параболи напрямлені вгору, вершина має координати $(2; 5)$ і парабола перетинає вісь ординат у точці $(0; 10)$;

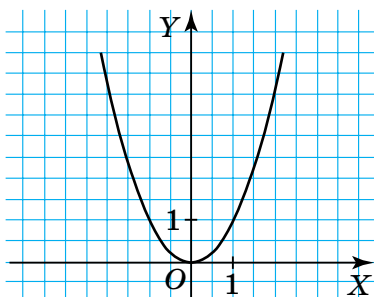
2) вершина має координати $(0; -1)$ і парабола перетинає вісь абсцис у точках $(1; 0)$ і $(-1; 0)$.

448. Визначте коефіцієнти b і c функції $y = x^2 + bx + c$, якщо вершина параболи має координати:

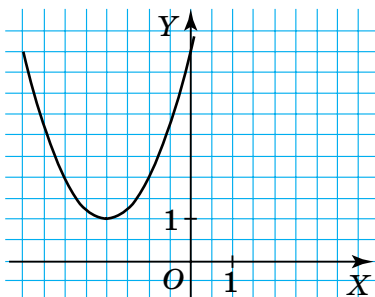
1) $(4; 0)$; 2) $(0; -5)$; 3) $(2; 2)$; 4) $(-1; 3)$.

449. Визначте коефіцієнти b і c функції $y = x^2 + bx + c$, якщо вершина параболи має координати: 1) $(5; 0)$; 2) $(4; -3)$.

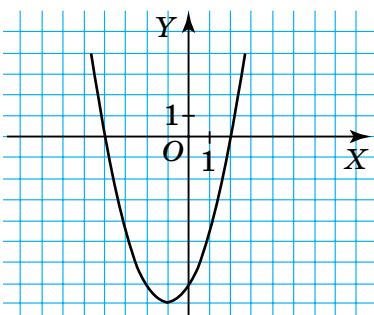
450. Скориставшись малюнками 135–138, знайдіть значення коефіцієнтів a , b і c функції $y = ax^2 + bx + c$.



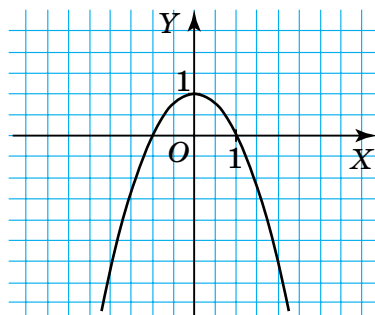
Мал. 135



Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138

451*. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість розв'язків рівняння:

1) $x^2 - 4 = a$;

3) $x^2 + 4x - 5 = a$;

2) $-x^2 + 8x = a$;

4) $-4x^2 + 12x - 3 = a$.

452*. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x + 1, \\ y = 3x^2 - 2x + 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = -x^2 + 2x - 1, \\ y = x^2 + 2x - 3. \end{cases}$$

453*. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^3 - 2x}{x}; \quad 3) y = \frac{2x^3 - 4x^2 + 5x}{x};$$

$$2) y = \frac{x^4 + 4x^3}{x^2}; \quad 4) y = \frac{x^3 + 8}{x + 2}.$$

454*. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 3x, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} -x^2 - 4x + 5, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2 + 4x - 5, & \text{якщо } x \geq -2; \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} x^2 + 2x - 6, & \text{якщо } x < -3, \\ 2x^2 + 12x + 15, & \text{якщо } x \geq -3; \end{cases}$$

$$4) y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{якщо } x \leq 2, \\ -x^2 + 4x - 5, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

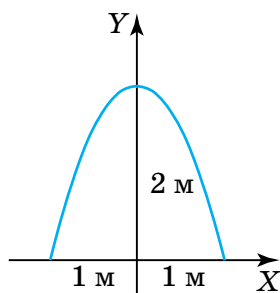
455*. Побудуйте графік функції:

$$1) y = x^2 + 5|x| - 6; \quad 3) y = x^2 + 6|x + 2| - 12;$$

$$2) y = 2x^2 - 4|x| + 2; \quad 4) y = x^2 + |x - 2|.$$

Проявіть компетентність

456. У кімнаті вирішили зробити арку у формі параболи (мал. 139). Для цього спочатку потрібно було побудувати її на папері. Складіть рівняння квадратичної функції, графіком якої є ця парабола. Побудуйте параболу (за одиничний відрізок, що відповідає 1 м, візьміть 1 см).



Мал. 139

§ 10. КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ

1. Поняття квадратної нерівності



qr.orioncentr.com.ua/Ces29

Ситуація. Марія хоче обгородити клумбу прямокутної форми, розміри якої виражаються натуральними числами. Для цього в неї є 16 м бордюрної стрічки. Площа клумби має бути більшою за 12 м^2 . Дівчина міркувала так: нехай x — ширина клумби, тоді $(8 - x)$ — її довжина, а $S = -x^2 + 8x$ — площа ділянки. Треба знайти всі натуральні числа, що задовольняють нерівність $-x^2 + 8x > 12$.



Чи правильно міркувала Марія?

Так.



Нерівність, отриману Марією, можна звести до вигляду $-x^2 + 8x - 12 > 0$. Це квадратна нерівність.

Запам'ятайте!

Квадратними нерівностями називаються нерівності виду:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

де x — змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$.

2. Розв'язування квадратної нерівності



Як знайти всі розв'язки квадратної нерівності?

Можна скористатися графіком відповідної квадратичної функції або його ескізом.



Задача 1 Розв'яжіть нерівність $x^2 - 4 < 0$.

Розв'язання

Ліва частина нерівності задає квадратичну функцію $y = x^2 - 4$. Розв'язати цю нерівність — означає знайти, для яких значень змінної x **значення** даної **функції** є **від'ємними**.

1. Знайдемо нулі функції:

$$x^2 - 4 = 0,$$

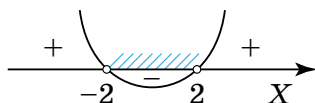
$$x = -2 \text{ і } x = 2.$$

Позначимо ці точки на осі абсцис.

2. Визначимо напрям віток:

$a > 0$, тому вітки параболи напрямлені вгору.

3. Розмістимо ескіз параболи відносно осі абсцис (мал. 140)



Мал. 140

та позначимо знаками «+» і «-» проміжки, де $y > 0$ і $y < 0$ відповідно.

4. За малюнком 140 визначаємо, що функція набуває від'ємних значень, якщо:

$$x \in (-2; 2).$$

Аналогічно можна встановити множини розв'язків ще й таких нерівностей:

$$x^2 - 4 > 0: x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty);$$

$$x^2 - 4 \leq 0: x \in [-2; 2];$$

$$x^2 - 4 \geq 0: x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

Переконайтесь у цьому самостійно.



Розв'язати квадратну нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ ($ax^2 + bx + c > 0$) графічним способом — означає знайти всі значення змінної x , для яких відповідні значення функції $y = ax^2 + bx + c$ є **від'ємними** (**додатними**).

Для цього потрібно:

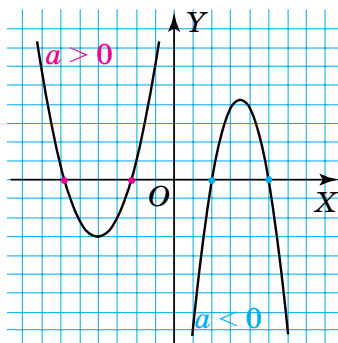
- 1) знайти нулі функції $y = ax^2 + bx + c$ і, якщо вони існують; позначити на осі абсцис відповідні точки;
- 2) врахувавши напрям віток, схематично побудувати параболу;
- 3) визначити, для яких значень змінної x функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває від'ємних (додатних) значень, та записати множину цих значень як числовий проміжок або як їх об'єднання.

На множині дійсних чисел квадратична функція може мати два нулі, один нуль або взагалі не мати нулів залежно від значення дискримінанта. Розглянемо ці випадки.

3. Квадратна нерівність, у якої дискримінант квадратного тричлена є додатним

Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має додатний дискримінант, то відповідна квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має два нулі. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ перетинає вісь OX у двох точках (мал. 141).

Випадок, коли $a > 0$, ми розглянули в задачі 1. Розглянемо випадок, коли $a < 0$.



Мал. 141

Задача 2 Розв'яжіть нерівність $-x^2 + 8x > 12$, яку мала розв'язати Марія.

Розв'язання

Запишемо дану нерівність так: $-x^2 + 8x - 12 > 0$.

Розглянемо відповідну квадратичну функцію $y = -x^2 + 8x - 12$. Множина розв'язків нерівності $-x^2 + 8x - 12 > 0$ — це множина значень змінної x , для яких значення функції $y = -x^2 + 8x - 12$ є додатними.

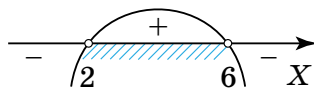
1. Знайдемо нулі функції:

$$-x^2 + 8x - 12 = 0, D = 16.$$

Оскільки $D > 0$, то функція має два нулі: $x = 2$ і $x = 6$.

Позначимо ці точки на осі абсцис.

2. Побудуємо схематично параболу (мал. 142), врахувавши, що її вітки напрямлені вниз.



Мал. 142

3. За малюнком 142 визначаємо, що функція набуває додатних значень ($y > 0$), якщо:

$$x \in (2; 6).$$

Оскільки x — натуральне число, то нерівність задовольняють лише $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$. Отже, клумба має розміри 3×5 м або 4×4 м.

Зауважимо, що нерівність $-x^2 + 8x - 12 > 0$ можна було б спочатку домножити на -1 і розв'язувати вже нерівність $x^2 - 8x + 12 < 0$.

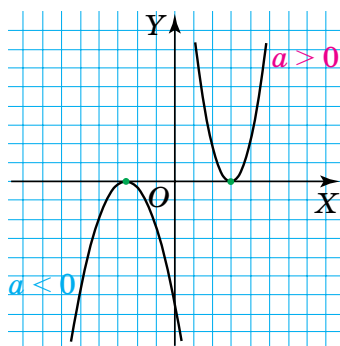


Якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) має два нулі x_1, x_2 , то:

- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ утворюють об'єднання проміжків: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ утворюють проміжок $(x_1; x_2)$.

4. Квадратна нерівність, у якої дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю

Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має дискримінант, що дорівнює нулю, то відповідна квадратична функція має один нуль функції. Тоді парабола $y = ax^2 + bx + c$ дотикається до осі OX (мал. 143).



Мал. 143

Задача 3 Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x + 1 > 0$.

Розв'язання

Розглянемо відповідну функцію $y = x^2 + 2x + 1$.

Множина розв'язків нерівності $x^2 + 2x + 1 > 0$ — це множина значень змінної x , для яких значення функції $y = x^2 + 2x + 1$ є додатними.

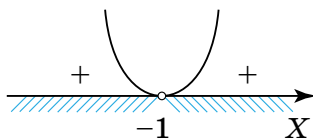
1. Знайдемо нулі функції: $x^2 + 2x + 1 = 0$, $D = 0$.

Функція має один нуль: $x = -1$. Позначимо цю точку на осі абсцис.

$a > 0$, тому вітки параболи напрямлені вгору.

2. Визначимо напрям віток:

3. Розмістимо ескіз параболи відносно осі абсцис (мал. 144) та позначимо знаком «+» проміжки, де $y > 0$.



Мал. 144

4. За малюнком 144 визначаємо, що функція набуває додатних значень ($y > 0$), якщо:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Отже, усі розв'язки нерівності утворюють об'єднання проміжків: $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.



Якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) має один нуль ($x_1 = x_2$), то:

- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ утворюють об'єднання проміжків $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$;
- нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ не має розв'язків.

Випадок, коли $a < 0$, можна звести до розглянутого випадку, коли $a > 0$, домноживши нерівність на -1 .

5. Квадратна нерівність, у якої дискримінант квадратного тричлена від'ємний

Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має від'ємний дискримінант, то відповідна квадратична функція не має нулів. Тоді парабола $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь OX (мал. 145).

Задача 4 Розв'яжіть нерівність $x^2 + x + 3 > 0$.

Розв'язання

Розглянемо відповідну квадратичну функцію $y = x^2 + x + 3$.

Множина розв'язків нерівності $x^2 + x + 3 > 0$ — це множина значень змінної x , для яких значення функції $y = x^2 + x + 3$ є додатними.

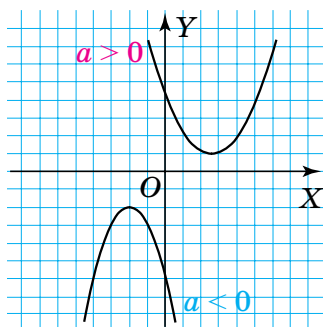
1. Знайдемо нулі функції:

$$x^2 + x + 3 = 0, D = -11.$$

Оскільки $D < 0$, то функція не має нулів.

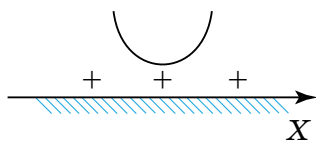
2. Визначимо напрям віток:

$a > 0$, тому вітки параболи направлені вгору.



Мал. 145

3. Розмістимо ескіз параболи відносно осі абсцис (мал. 146) та позначимо знаками «+» проміжки, де $y > 0$.



Мал. 146

4. За малюнком 146 визначаємо, що функція набуває тільки додатних значень ($y > 0$), якщо:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Отже, усі розв'язки нерівності утворюють проміжок $(-\infty; +\infty)$.



Якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) не має нулів, то:

- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ утворюють проміжок $(-\infty; +\infty)$;
- нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ не має розв'язків.

Випадок, коли $a < 0$, можна звести до розглянутого випадку, коли $a > 0$, домноживши нерівність на -1 .

6. Системи квадратних нерівностей

Задача 5 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ -4x^2 + 3x + 1 \leq 0. \end{cases}$

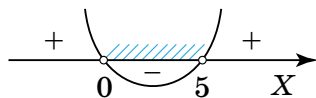
Розв'язання Розв'яжемо кожну з нерівностей, що входить до даної системи.

1. Розв'яжемо нерівність:

$$x^2 - 5x < 0.$$

Знайдемо нулі функції $y = x^2 - 5x$:
 $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$, $x = 0$ і $x = 5$.
 Побудуємо схематично параболу (мал. 147).

З малюнка 147 видно, що функція набуває від'ємних значень, якщо $x \in (0; 5)$.



Мал. 147

2. Розв'яжемо нерівність:

$$-4x^2 + 3x + 1 \leq 0.$$

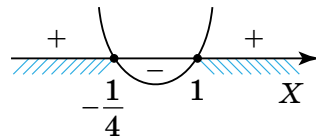
Домножимо її на -1 : $4x^2 - 3x - 1 \geq 0$.
Знайдемо нулі функції $y = 4x^2 - 3x - 1$:

$$x_1 = -\frac{1}{4} \text{ і } x_2 = 1.$$

Побудуємо схематично параболу (мал. 148).

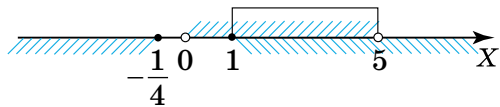
З малюнка 148 видно, що функція набуває невід'ємних значень, якщо

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty).$$



Мал. 148

3. Знайдемо спільні точки одержаних проміжків (мал. 149).



Мал. 149

Отже, множиною розв'язків системи нерівностей є проміжок $[1; 5)$.

Дізнайтеся більше

1. У XIX ст. Україна дала світові ще одного видатного математика — **Георгія Федосійовича Вороного** (1868–1908), який народився в селі Журавка на Чернігівщині.

Про неабиякі математичні здібності й серйозне захоплення математикою Вороного свідчить той факт, що перше своє дослідження він зробив у 16 років, будучи ще гімназистом. У 1884 р. видатний математик і педагог Володимир Петрович Єрмаков почав видавати «Журнал елементарної математики», у якому для дослідження була запропонована така тема:

«Розклад многочленів на множники, побудований на властивостях коренів квадратного рівняння». Як з'ясувалося, на вказану тему редакція одержала лише одну роботу, а саме від Г. Вороного,



і в 1885 р. в журналі була надрукована його перша стаття, у якій окрім розв'язання поставленої задачі наводилася значна кількість прикладів.

Наукова спадщина Г. Вороного складається із шести великих мемуарів, трьох статей з теорії чисел, семи повідомлень на з'їздах і конгресах та неопублікованих архівних матеріалів. Усі ці праці зібрані в тритомному виданні та прокоментовані відомими математиками. Ці роботи — справжня гордість української математики. Надбання Г. Вороного використовують у різноманітних дослідженнях від молекулярної біології до космосу, у комп'ютерній графіці, у проблемах розпізнавання образів, штучного інтелекту, екології, у радіаційній фізиці, космології, хімічній технології, фізичній хімії та інших науках, а також у моделюванні рельєфу, в аналізі руху і плануванні, у виявленні зіткнень, навігації та оминанні перешкод, в аналізі мережі тощо. У наші дні дослідження з діаграм Вороного проводять практично в усіх країнах Європи, у США, Канаді, у країнах Південної Америки, у Японії, Китаї, Гонконзі, Австралії, Новій Зеландії. У Сеулі (Корея) існує Дослідницький центр із діаграм Вороного.

2. Розглянемо приклад розв'язання квадратної нерівності з параметром.

Задача 6

Розв'яжіть нерівність $x^2 - ax + a - 1 \leq 0$ для всіх значень параметра a .

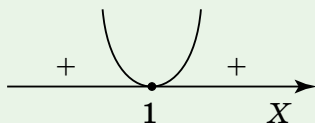
Розв'язання

Знайдемо нулі функції $y = x^2 - ax + a - 1$.

$$x^2 - ax + a - 1 = 0; D = (-a)^2 - 4 \cdot (a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2.$$

Можливі два випадки: 1) $D = 0$; 2) $D > 0$.

1. Нехай $D = 0$, тоді $a = 2$ і $y = x^2 - 2x + 1$. Графік функції $y = x^2 - 2x + 1$ дотикається до осі абсцис в точці $x = 1$ (мал. 150).



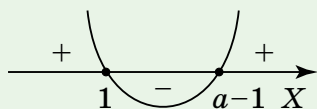
Мал. 150

Функція $y = x^2 - 2x + 1$ набуває недодатних значень, якщо $x = 1$.

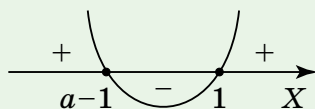
Отже, нерівність має розв'язок: $x = 1$, якщо $a = 2$.

2. Нехай $D > 0$, тоді $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ і $x_1 = a - 1$, $x_2 = 1$ — нулі функції.

Графік функції $y = x^2 - ax + a - 1$ перетинає вісь абсцис у двох точках. При цьому можливі два випадки: або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$.



Мал. 151



Мал. 152

Нехай $x_1 > x_2$, тоді $a \in (2; +\infty)$. Функція $y = x^2 - ax + a - 1$ набуває недодатних значень, якщо $x \in [1; a - 1]$ (мал. 151). Отже, усі розв'язки нерівності утворюють проміжок $[1; a - 1]$.

Нехай $x_1 < x_2$, тоді $a \in (-\infty; 2)$. Функція $y = x^2 - ax + a - 1$ набуває недодатних значень, якщо $x \in [a - 1; 1]$ (мал. 152). Отже, усі розв'язки нерівності утворюють проміжок $[a - 1; 1]$.

Отже, якщо $a = 2$, то $x = 1$; якщо $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in [a - 1; 1]$; якщо $a \in (2; +\infty)$, то $x \in [1; a - 1]$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/VjaXa

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
квадратна нерівність	quadratic inequality	quadratische Ungleichung	inégalité quadratique

Пригадайте головне

1. Яку нерівність називають квадратною?
2. Що називають розв'язком квадратної нерівності?
3. Що означає — розв'язати квадратну нерівність?
4. Які етапи розв'язування квадратної нерівності?

Усне тренування

1. Обчисліть:

1) $3 \cdot |-0,5|$;

3) $|-125| : |7 - 12|$;

2) $|-15| - |-15|$;

4) $\left| -\frac{7}{3} \right| \cdot \frac{3}{2} + |71| - |51|$.

2. Обчисліть:

1) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; 2) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; 3) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$; 4) $\sqrt{1\frac{27}{169}}$.

3. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{10}(\sqrt{14,4} - \sqrt{6,25}); \quad 3) (\sqrt{20} + 1)^2 + (\sqrt{20} - 1)^2;$$

$$2) \sqrt{37^2 - 12^2}; \quad 4) (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 2)^2.$$

Розв'яжіть задачі

457'. Чи правильно, що дана нерівність є квадратною:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - 5x + 6 > 0; & 4) 7 - 2x \geq 0; \\ 2) 3x^3 + 2x^2 - x < 0; & 5) \frac{4}{5}x - \frac{3}{7x^2} + 4x^3 < 0; \\ 3) \frac{1}{4x^2} + 9x - \frac{2}{5} > 0; & 6) x(7x + 5) \leq 0? \end{array}$$

458'. Чи існує така квадратна нерівність, яка не має розв'язків?

459'. Чи існує така квадратна нерівність, яка має:

- 1) тільки один розв'язок;
- 2) тільки два (різні) розв'язки;
- 3) безліч розв'язків?

460'. Чи правильно, що розв'язати квадратну нерівність — означає знайти:

- 1) хоча б один її розв'язок;
- 2) усі її розв'язки?

461'. Чи є число 3 розв'язком нерівності:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - 4x + 4 \geq 0; & 4) x^2 - 6x + 5 \geq 0; \\ 2) x^2 + 4x + 3 \leq 0; & 5) 8x^2 - 2x - 1 < 0; \\ 3) 5x^2 + 3x - 2 > 0; & 6) x^2 + 4x - 21 < 0? \end{array}$$

462'. Чи є число -1 розв'язком нерівності:

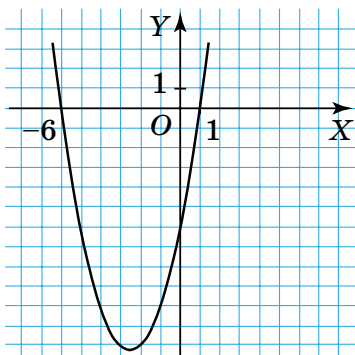
$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - x + 7 \geq 0; & 4) 6x^2 - x + 1 \geq 0; \\ 2) x^2 + 5x \leq 0; & 5) -x^2 - 5x - 5 < 0; \\ 3) x^2 + 6 > 0; & 6) -2x^2 + x - 8 < 0? \end{array}$$

463'. На малюнку 153 зображено параболу $y = x^2 + 5x - 6$. Запишіть множину розв'язків нерівності $x^2 + 5x - 6 < 0$.

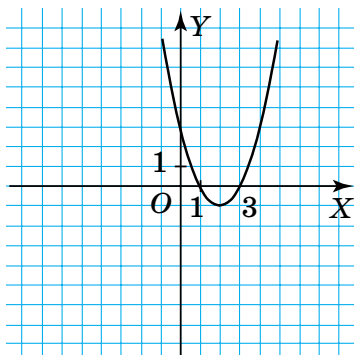


qr.orioncentr.com.ua/fP4sE

- 464°.** На малюнку 154 зображено параболу $y = x^2 - 4x + 3$.
E Запишіть множину розв'язків нерівності $x^2 - 4x + 3 < 0$.



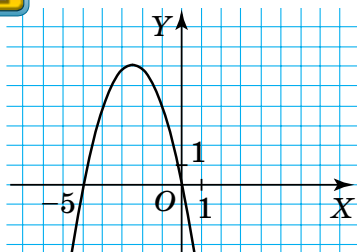
Мал. 153



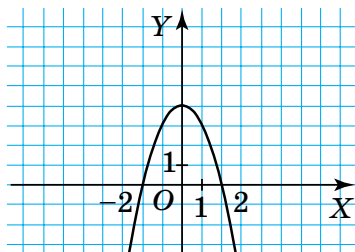
Мал. 154

- 465°.** На малюнку 155 зображено параболу $y = -x^2 - 5x$.
 Запишіть множину розв'язків нерівності $-x^2 - 5x \geq 0$.

- 466°.** На малюнку 156 зображено параболу $y = -x^2 + 4$.
E Запишіть множину розв'язків нерівності $-x^2 + 4 < 0$.



Мал. 155



Мал. 156

- 467°.** Розв'яжіть квадратну нерівність:

qr.orioncentr.com.ua/B83gu



- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 - 1 \leq 0$; | 6) $x^2 + 3 > 0$; |
| 2) $x^2 + 5x \geq 0$; | 7) $x^2 - 8x \leq 0$; |
| 3) $4x^2 + 1 > 0$; | 8) $x^2 - 4x > 0$; |
| 4) $x^2 - 16 \geq 0$; | 9) $25x^2 - 100 \geq 0$; |
| 5) $x^2 + 9 < 0$; | 10) $4x^2 - 8x < 0$. |



- 468°.** Розв'яжіть квадратну нерівність:



- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 25 \leq 0$; | 3) $x^2 - 6x > 0$; | 5) $x^2 + 4 < 0$; |
| 2) $-x^2 - 81 \geq 0$; | 4) $3x^2 - 6x \geq 0$; | 6) $-2x^2 - 4x \geq 0$. |

469°. Розв'яжіть квадратну

нерівність:

qr.orioncentr.com.ua/Bdseg

- 1) $x^2 + 3x - 18 > 0$; 9) $x^2 + 8x - 9 < 0$;
 2) $x^2 - 3x - 10 < 0$; 10) $x^2 - 10x + 21 \leq 0$;
 3) $x^2 - 4x - 12 \leq 0$; 11) $x^2 + 2x - 15 < 0$;
 4) $-x^2 + 10x - 24 \leq 0$; 12) $x^2 - 6x - 7 \geq 0$;
 5) $-x^2 - 4x + 5 < 0$; 13) $x^2 + 4x - 12 \leq 0$;
 6) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$; 14) $x^2 + 4x - 12 < 0$;
 7) $x^2 - 6x - 16 < 0$; 15) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$;
 8) $x^2 + 10x + 16 > 0$; 16) $x^2 - 3x - 40 > 0$.

470°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

- 1) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$; 5) $x^2 - 5x - 6 \geq 0$;
 2) $x^2 - 3x - 28 < 0$; 6) $-x^2 + 7x - 12 > 0$;
 3) $x^2 + 11x - 12 > 0$; 7) $-x^2 + 5x + 14 > 0$;
 4) $x^2 + x - 12 < 0$; 8) $x^2 + 7x - 8 \leq 0$.

471°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

- 1) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; 6) $x^2 - x + 9 > 0$;
 2) $x^2 - 12x + 36 < 0$; 7) $x^2 + x + 5 \leq 0$;
 3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 8) $x^2 - 2x + 16 < 0$;
 4) $16x^2 + 40x + 25 > 0$; 9) $x^2 + 4x + 6 \geq 0$;
 5) $-x^2 + 20x - 100 \geq 0$; 10) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

472°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

- 1) $x^2 + 8x + 16 > 0$; 4) $x^2 + 2x + 10 \geq 0$;
 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$; 5) $3x^2 - 5x + 3 < 0$;
 3) $-25x^2 + 30x - 9 \leq 0$; 6) $-x^2 + x - 12 \leq 0$.

473. Складіть квадратну нерівність за множиною її розв'язків:

- 1) $(-2; 0)$; 3) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$;
 2) $[-8; 8]$; 4) $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

474. Складіть квадратну нерівність за множиною її розв'язків:

- 1) $(0; 10)$; 3) $(-3; 5)$;
 2) $[-6; 6]$; 4) $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

475. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $6x \leq 8x^2 - 2$; 4) $3x - 5x^2 \geq 3x^2 + 2$;
 2) $3x^2 + 10 \leq -x^2 + 22x$; 5) $9x^2 < -2x^2 - 12x - 1$;
 3) $5x + 14 > x^2$; 6) $2y < 8y^2 - 1$.

476. Розв'яжіть нерівність:



1) $3x^2 + 9 > 2x^2 + 6x$;

2) $4x \leq -x^2 + 5$;

3) $6x^2 \geq 15x - 6$;

4) $2x^2 > -3x^2 - 3x + 2$.

477. Розв'яжіть нерівність:

1) $2x(3 - 4x) \geq -2$;

2) $y(y - 10) \leq -21$;

3) $x(x - 7) + 12 < 0$;

4) $y(y + 8) < 9$;

5) $2x(x + 5) > -8$;

6) $x(x + 4) \leq -3$.

478. Розв'яжіть нерівність:



1) $x(x - 6) < 16$;

2) $y(5y + 3) > 2$;

3) $2(x^2 + 1) + 5x \geq 0$;

4) $y(y - 10) \geq -24$.

479. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2x^2 + 1}{3} < \frac{3x + 5}{2}$;

2) $\frac{x^2 + 3x}{6} \geq \frac{4x - 2}{3}$;

3) $\frac{2x^2 + 3x}{4} \leq \frac{3x + 1}{2}$;

4) $\frac{5x^2 - x}{2} > x + 1$.

480. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 - 6}{2} < \frac{3x + 2}{4}$;

2) $\frac{y + 2y^2}{2} - \frac{y^2 - 6}{6} < \frac{2 - 3y}{4}$.

481. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності:



1) $x^2 + 8x < 0$;

2) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$;

3) $(2x - 3)(2 - 3x) > -4$;

4) $(x - 7)(x - 3) > 0$?



qr.orioncentr.com.ua/ZCJUN

482. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності:

1) $-x^2 + 7x + 8 > 0$;

3) $\frac{x^2 - 4}{5} < \frac{x - 2}{3}$?

2) $(x - 5)(x + 5) > -x^2 + 5x$;

483. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $x^2 - 15 \leq 0$;

2) $x^2 + 9x - 10 \leq 0$.

484. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $x^2 - 8 \leq 0$;

2) $x^2 + 12x - 13 \leq 0$.

485. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x справджується нерівність:

1) $x^2 + 8 > 0$;

2) $x^2 - 6x + 15 > 0$;

3) $2x^2 + 5x + 6 > 0$;

4) $-x^2 + x - 8 < 0$;

5) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$;

6) $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$.

486. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x справджується нерівність:

1) $x^2 - 3x + 11 > 0$;

2) $-x^2 + 2x - 10 < 0$;

3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

487. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x нерівність $x^2 - 2x + 6 < 0$ не має розв'язків.

488. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x нерівність $-5x^2 + 4x - 3 > 0$ не має розв'язків.

489. За яких значень змінної x значення виразу $x - 7$ більші за значення виразу $-x^2 - 5x - 9$?

490. За яких значень змінної x значення виразу $x^2 + 4$ більші за значення виразу $6x^2 - 6x + 5$?

491. За яких значень змінної x значення виразу $x(2x + 1)$ більші за значення виразу $3(x^2 + x - 1)$?

492. За яких значень змінної x значення виразу $x(x + 6)$ більші за значення виразу $2x - 3$?

493. Знайдіть область визначення функції:



1) $y = \sqrt{-x^2 + 8 + 2x}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 8}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$;

5) $y = \sqrt{4x^2 - 13x + 9}$;

3) $y = \sqrt{(x+2)(x+3)-2}$;

6) $y = \sqrt{3(x^2+1)-10x}$.



qr.orioncentr.com.ua/l4Nit

494. Знайдіть область визначення функції:



1) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$;

2) $y = \sqrt{-8x^2 + 6x + 2}$;

3) $y = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$.

495. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0, \\ x - 0,5 > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x \geq 1, \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 > x, \\ 4x > -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x^2 - 9 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 \geq 7x, \\ x^2 - 10x + 21 \geq 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 \geq 2x - 4, \\ x^2 > x. \end{cases}$

496. Розв'яжіть систему нерівностей:



$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x^2 - 25 < 0, \\ x - 2 \leq 0; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ x^2 - 16 > 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x^2 - 25 < 0, \\ x + 6 \leq 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x^2 - 16 < 0. \end{cases} \end{array}$$

497*. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} (x+1)^2 \geq x+7, \\ (x-2)^2 \geq x-8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x-2)^2 > x-2, \\ (x-1)^2 > x-1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ (x-5)(x+5) \geq 0. \end{cases}$$

498*. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{l} 1) x^2 - ax + 1 \leq 0; \\ 2) x^2 - (2a - 1)x + 4a - 6 > 0; \\ 3) ax^2 - (a-1)x - 1 \leq 0. \end{array}$$

499*. За якого значення параметра a рівняння $x^2 - (a-2)x + 0,25 = 0$ має розв'язки?

500*. За якого значення параметра a рівняння $x^2 - ax + 2a - 1,75 = 0$ має розв'язки?

501*. За якого значення параметра a нерівність $x^2 - (a+6)x + (a+5) \leq 0$ має три цілі розв'язки?

502*. За якого значення параметра a нерівність $x^2 - 2ax + a^2 - 1 \leq 0$ має три цілі розв'язки?

Проявіть компетентність

503. Площа ділянки, що має форму прямокутника, менша від 200 м^2 , але більша за 24 м^2 . Якою може бути довжина цієї ділянки, якщо її ширина на 10 м менша від довжини?

504. Площа кімнати, що має форму прямокутника, менша від 45 м^2 , але більша за 5 м^2 . Якою може бути ширина цієї кімнати, якщо її довжина на 4 м більша за ширину?



§ 11. СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

1. Поняття системи двох рівнянь із двома змінними

Ситуація. На своїй садовій ділянці Микола Петрович вирішив зробити дві доріжки прямокутної форми з квадратних плиток. Для облаштування першої доріжки він використав 12 таких плиток. Друга доріжка була більшою за розмірами: за шириною у ній було більше на 1 плитку, а за довжиною — на 4 плитки. Тому на її облаштування Микола Петрович використав 30 плиток.



qr.orioncentr.com.ua/z636h



Як знайти, скільки плиток за шириною й довжиною утворюють меншу доріжку?

Потрібно ввести дві невідомі величини.



Нехай x — кількість плиток за шириною першої доріжки, y — кількість плиток за довжиною першої доріжки.

Отже, маємо перше рівняння: $x \cdot y = 12$.

Кількість плиток за шириною другої доріжки дорівнює $x + 1$, а кількість плиток за її довжиною — $y + 4$.

Отже, маємо друге рівняння: $(x + 1) \cdot (y + 4) = 30$.

Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 12, \\ (x+1)(y+4) = 30. \end{cases}$$

Одержана *система рівнянь із двома змінними* описує зв'язок між кількостями плиток для доріжки, що можна укласти за її шириною та довжиною. Розв'язками цієї системи є дві пари чисел: (2; 6) і (1,5; 8). Умову задачі задовольняє лише пара (2; 6), оскільки кількість плиток є натуральним числом. Отже, меншу доріжку утворюють 2 плитки за її шириною й 6 плиток за її довжиною.



Якщо для опису зв'язку між двома змінними необхідні саме два рівняння, то складають систему двох рівнянь із двома змінними.

Запам'ятайте!

Розв'язком системи двох рівнянь із двома змінними називають таку пару чисел $(x; y)$, яка одночасно є розв'язком кожного рівняння системи.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або встановити, що розв'язків немає.



Які способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними вам відомі?

Графічний спосіб, спосіб підстановки, спосіб додавання.



Чи існують аналогічні способи для розв'язування систем, що містять рівняння другого степеня?

Так.



Систему рівнянь другого степеня з двома змінними можна розв'язати графічним способом, способом підстановки, способом додавання та іншими способами. Розглянемо деякі з них.

2. Графічний спосіб



Що називають графіком рівняння з двома змінними?

Множину точок координатної площини, координати яких перетворюють рівняння на правильну рівність, називають графіком рівняння з двома змінними.



Наприклад, графіком рівняння $2x - y = 3$ є пряма, графіком рівняння $x^2 - y = 0$ — парабола, графіком рівняння $xy = 4$ — гіпербола.

Задача 1 Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} x - y = -2, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання У кожному рівнянні виразимо y через x :

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Побудуємо графік кожного з рівнянь системи в одній системі координат.

Графіком рівняння $y = x + 2$ є пряма. Знайдемо координати двох її точок (табл. 30).

Таблиця 30

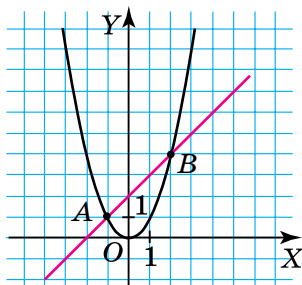
x	0	2
y	2	4

Графіком рівняння $y = x^2$ є парабола. Знайдемо координати кількох її точок (табл. 31).

Таблиця 31

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Знайдемо точки перетину цих графіків (мал. 157). Пряма і парабола перетинаються у двох точках $A(-1; 1)$ і $B(2; 4)$.



Мал. 157

Розв'язком даної системи рівнянь є дві пари чисел: $(-1; 1)$ і $(2; 4)$.



Щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними графічним способом, потрібно:

1) в одній системі координат побудувати графік кожного з рівнянь системи;

- 2) визначити координати точок перетину цих графіків, якщо це можливо;
- 3) записати кожну пару чисел, яка є розв'язком системи.

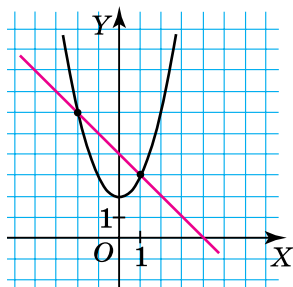


Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними?

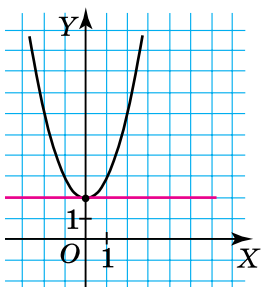
Це залежить від степенів рівнянь, що входять до системи.



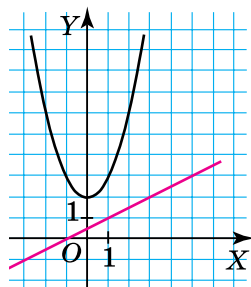
Наприклад, система, що містить рівняння першого й другого степенів, може мати два розв'язки (мал. 158), один розв'язок (мал. 159) або не мати розв'язків (мал. 160).



Мал. 158



Мал. 159



Мал. 160

3. Способи підстановки і додавання

Для розв'язування систем, що містять рівняння другого степеня, можна використовувати і спосіб підстановки.



qr.orioncentr.com.ua/aE1p0

Задача 2 Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 3x^2 + y^2 = 28. \end{cases}$$

Розв'язання У першому рівнянні виразимо y через x :

$$y = 3x - 2.$$

Одержаний вираз $3x - 2$ підставимо замість y в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} y = 3x - 2, \\ 3x^2 + (3x - 2)^2 = 28. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи, яке містить лише одну змінну x :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 28 &= 0, \\ 12x^2 - 12x - 24 &= 0, | : 12 \\ x^2 - x - 2 &= 0. \\ x_1 = 2 \text{ і } x_2 &= -1. \end{aligned}$$

У рівність $y = 3x - 2$ підставимо замість x знайдені корені 2 і -1 та обчислимо відповідні значення y .

Якщо $x_1 = 2$, то $y_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$;

якщо $x_2 = -1$, то $y_2 = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$.

Система рівнянь має два розв'язки: $(2; 4)$ і $(-1; -5)$.



Щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними способом підстановки, потрібно:

- 1) в одному з рівнянь системи виразити одну змінну через іншу;
- 2) підставити знайдений вираз в інше рівняння системи;
- 3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідне значення другої змінної для кожного одержаного розв'язку рівняння;
- 5) записати кожен пару чисел, яка є розв'язком системи.

Задача 3

Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язання

Помножимо друге рівняння системи на 2:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ 2xy = 30. \end{cases}$$

Додамо перше та друге рівняння системи:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 64.$$

Маємо: $(x + y)^2 = 64$. Отже, $x + y = 8$ або $x + y = -8$.

Отримаємо дві системи:
$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + y = -8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи способом підстановки, одержимо пари $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(-3; -5)$, $(-5; -3)$.

Отже, система має чотири розв'язки: $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(-3; -5)$, $(-5; -3)$.

4. Спосіб заміни змінних

Для розв'язування систем, що містять рівняння другого степеня, можна використовувати й особливий спосіб — спосіб заміни змінних.



qr.orioncentr.com.ua/9SZbo

Задача 4 Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + xy = 9, \\ x - y - xy = -1. \end{cases}$$

Розв'язання Якщо уважно придивитися до рівнянь системи, то можна побачити, що вирази $x - y$ і xy повторюються в кожному з рівнянь. Тому доцільно замінити ці вирази на нові змінні.

Заміна: $x - y = a$ і $xy = b$.

Зробивши ці заміни в початковій системі рівнянь, одержимо допоміжну систему рівнянь зі змінними a і b :

$$\begin{cases} a + b = 9, \\ a - b = -1. \end{cases}$$

$$a = 4 \text{ і } b = 5.$$

Повернемося до змінних x і y . Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо її способом підстановки: $x = y + 4$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x = y + 4, \\ (y + 4) \cdot y = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи: $y^2 + 4y - 5 = 0$,

$$y_1 = 1, y_2 = -5.$$

Тоді:

якщо $y_1 = 1$, то $x_1 = 1 + 4 = 5$,

якщо $y_2 = -5$, то $x_2 = -5 + 4 = -1$.

Отже, система рівнянь має два розв'язки: $(5; 1)$ і $(-1; -5)$.



Щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними способом заміни змінних, потрібно:

- 1) в одному або в обох рівняннях системи виявити вирази, які можна замінити іншими змінними та зробити відповідну заміну;
- 2) розв'язати допоміжну систему рівнянь з новими змінними;
- 3) підставити одержані розв'язки в початкову систему;
- 4) розв'язати одержану систему рівнянь;
- 5) записати кожну пару чисел, яка є розв'язком початкової системи.



Якщо рівняння містять вирази $x + y$, xy , $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, то можна зробити заміну: $x + y = a$, $xy = b$.



Систему трьох рівнянь із трьома змінними розв'язують тими самими методами, що й систему двох рівнянь із двома змінними, шляхом послідовного зменшення кількості змінних.

Дізнайтеся більше

Метод Гауса — класичний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, названий на честь німецького математика **Карла Фрідріха Гауса** (1377–1855). Цей метод передбачає поступове виключення змінних. Хоча нині даний метод повсюдно називають методом Гауса, він був відомим ще до К. Ф. Гауса. Уперше опис даного методу трапляється в китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах», який вважають енциклопедією знань давньокитайських математиків.



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/edtdC

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
система рівнянь	system of equations	Gleichungs- system, n	système d'équations

Пригадайте головне

1. Що таке система двох рівнянь із двома змінними?
2. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
3. Що означає — «розв'язати систему рівнянь із двома змінними»?
4. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними за допомогою графічного способу?
5. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними?
6. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом підстановки?
7. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом заміни змінних?

Усне тренування

1. Розв'яжіть рівняння: $x^2 = 16$; $x^2 = 6$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 + 9 = 0$.
2. Знайдіть значення виразу $0,5x^2 - 2x + 1$, якщо $x = 4$;
 -5 ; $\frac{1}{2}$; $0,8$.

3. Яке число треба записати замість *, щоб утворилася правильна рівність:

- 1) $(9 - *x + x^2) = (3 - x)^2$;
- 2) $(* + 8x + 4x^2) = (2 + *x)^2$;
- 3) $(* + 12y + y^2) = (* + y)^2$;
- 4) $(* + 5y)(* - 5y) = 16 - *y^2$?

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 4x + 10$ з осями координат.

Розв'яжіть задачі

- 505'. Чи правильно Тарас сформулював означення: «Розв'язком системи двох рівнянь із двома змінними називають таку пару чисел $(x; y)$, яка є розв'язком кожного рівняння системи»?
- 506'. Чи правильно сказала Катруся: «Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки»?
- 507'. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними, якщо вона містить:
 - 1) рівняння першого та другого степенів;
 - 2) обидва рівняння — другого степеня?

508°. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$ пара чисел:

1) (5; 1); 2) (4; 2)?

509°. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ пара чисел:

1) (4; 2); 2) (3; 1)?

510°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:



qr.orioncentr.com.ua/eHUt1



1) $\begin{cases} 2x - y = -3, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y = 8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 12, \\ 3x + 4y = 24. \end{cases}$

511°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:



1) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 8, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

512°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними способом підстановки:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2xy - y^2 = -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + 16 = 5xy; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 3y = -10, \\ xy - y^2 = -12; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x = 5 - y, \\ 3xy = 2x^2 + 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ y^2 - 4xy = -7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2y = 7 - x, \\ 2y^2 = 14 - xy; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2xy = y^2 - 13; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3y = -x - 2, \\ 2xy = 3y^2 - 5. \end{cases}$

513°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними способом підстановки:

1) $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ x^2 + xy = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x = y - 3, \\ 15x^2 = 2xy + 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y - 3x = 7, \\ x^2 + xy = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x = 2 - y, \\ 2x^2 - 44 = 3xy. \end{cases}$

514°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:



qr.orioncentr.com.ua/YTDV0



- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 68; \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} 2x = 6 + y, \\ 2x^2 + y^2 = 66; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 50; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 2 + y = 3x, \\ 3x^2 = 28 - y^2; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ | 7) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 6y; \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = xy + 19. \end{cases}$ |

515°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:



- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 + y^2 = 65; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ x^2 = 5 - y^2; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - 1 = y^2 - 4xy. \end{cases}$ |

516. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} x - y = -5, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x^2 - y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} (x-1)^2 - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4. \end{cases}$ |

517. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} (x+1)^2 - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ |
|--|---|

518. Розв'яжіть систему рівнянь:



qr.orioncentr.com.ua/ibpWL



- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 5; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} x - y - xy = -7, \\ x - y + xy = 13; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$ |

519. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} x+y=8, \\ xy=7; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 9x^2+y^2=34, \\ xy=5; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x+y-xy=1, \\ x+y+xy=5. \end{cases}$$

520. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2+y^2+xy=19; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=3, \\ 2x^2+2y^2+xy=12; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x^2+y^2-xy=7. \end{cases}$$

521. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2+y^2+xy=12; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x+y=5; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x-y-xy=-1, \\ x^2+y^2-xy=3; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x^3-y^3=28, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$$

522*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 9, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x+y} = -1, \\ \frac{x}{x+y} = -2; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36}; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \\ xy - \frac{x}{y} = 2. \end{cases}$$

523*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ xz=6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy=2, \\ yz=6, \\ xz=3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x+2y-z=5, \\ 3x-4y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=6; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} xy+xz=8, \\ yz+xy=9, \\ xz+yz=-7. \end{cases}$$

524*. Знайдіть усі значення параметра a , за яких система рівнянь має розв'язки:

$$1) \begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 2x + y = a, \\ x^2 - 2x + y^2 = 0. \end{cases}$$

525*. Знайдіть усі значення параметра a , за яких система:

$$1) \begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок;}$$

$$2) \begin{cases} y - |x| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має два розв'язки.}$$

Проявіть компетентність

526. Довжина паркану навколо прямокутної ділянки родини Петренків дорівнює 140 м. Площа ділянки дорівнює 1200 м^2 .



1. Знайдіть ширину ділянки.

2. Знайдіть довжину ділянки.

Садова ділянка містить такі зони: житлову, садово-городню й господарську зони та зону відпочинку.

3. Знайдіть площу житлової зони, якщо вона становить $\frac{1}{5}$ площі всієї ділянки.

4. Знайдіть площу господарської зони, якщо вона становить 50 % площі житлової зони.

5. Знайдіть площу зони відпочинку, якщо вона у 2 рази більша за площу садово-городньої зони.

§ 12. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

1. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель прикладної задачі



qr.orioncentr.com.ua/fy1IM

Ситуація. Учні й учениці аграрного ліцею «Зелена школа» взяли участь у проєкті з озеленення території. Вони висадили молоді яблуні на прямокутній ділянці саду, дотримуючись чіткого плану: у кожному ряду — однакова кількість дерев, а кількість рядів на 2 більша, ніж кількість дерев у кожному ряду. Скільки рядів у новому саду й по скільки дерев посаджено в кожному ряду, якщо всього висадили 255 дерев?



Як сформулювати умову й вимогу задачі мовою математики, тобто скласти математичну модель задачі?

Пригадаймо.



Математична модель — це опис деякого реального процесу засобами математики.

Складання математичної моделі задачі називають *математичним моделюванням*. Розв’язування задачі методом математичного моделювання містить *чотири етапи* (табл. 32).

Таблиця 32

I етап	Аналіз ситуації та систематизація даних	Дерев у ряду — ? Рядів — ?, на 2 більше Усього дерев — 255
II етап	Побудова математичної моделі	Нехай у саду посадили x рядів по y дерев у кожному ряду. За умовою, кількість рядів на 2 більша, ніж кількість дерев у ряду. Складаємо перше рівняння: $x - y = 2$. Також за умовою відомо, що всього посадили 255 дерев. Складаємо друге рівняння: $xy = 255$. Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 255. \end{cases}$

Таблиця 32 (продовження)

III етап	Робота з математичною моделлю	Розв'язуємо систему рівнянь методом підстановки: $\begin{cases} x = y + 2, \\ (y + 2) \cdot y = 255. \end{cases}$ Друге рівняння системи містить лише одну змінну y. Розв'яжемо його: $y^2 + 2y - 255 = 0,$ $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{-2 \pm 32}{2}.$ Звідси $y_1 = 15$ і $y_2 = -17$.
IV етап	Складання відповіді до задачі в термінах її сюжету	Аналізуємо отримані значення: якщо $y = 15$, то $x = y + 2 = 15 + 2 = 17$; $y_2 = -17$ не задовольняє умову задачі, бо кількість яблунь у ряду не може бути від'ємним числом. Отже, у саду посадили 17 рядів по 15 дерев у кожному ряду.

2. Задачі на рух

Для складання рівнянь математичної моделі задач на рух можна використовувати такі формули.

$$s = vt$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

qr.orioncentr.com.ua/gMbgg



Основні величини: s — відстань; v — швидкість; t — час.

Задача 1

Відстань від Черкас до Києва, що становить 180 км, автомобілем можна проїхати на 1 год швидше, ніж автобусом. Знайдіть швидкості автомобіля й автобуса, якщо відомо, що швидкість автомобіля на 30 км/год більша за швидкість автобуса.

Розв'язання

1. *Аналіз та систематизація даних* (табл. 33).

Таблиця 33

Вид транспорту	Швидкість	Відстань	Час
Автомобіль	?, на 30 км/год > 	180 км	?, на 1 год < 
Автобус	? 	180 км	? 

2. *Побудова математичної моделі.* Для побудови математичної моделі ситуації, яку розглядаємо, потрібно ввести змінні x і y .

Нехай x — швидкість автомобіля (у кілометрах за годину), а y — швидкість автобуса (у кілометрах за годину).

За умовою, швидкість автомобіля на 30 км/год більша за швидкість автобуса. Складаємо перше рівняння: $x - y = 30$.

Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 34.

Таблиця 34

Вид транспорту	v , км/год	s , км	t , год
Автомобіль	x	180	$\frac{180}{x}$, на 1 год < 
Автобус	y	180	$\frac{180}{y}$ 

За умовою, автомобіль долає шлях на 1 год швидше, ніж автобус. Складаємо друге рівняння: $\frac{180}{y} - \frac{180}{x} = 1$.

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 30, \\ \frac{180}{y} - \frac{180}{x} = 1. \end{cases}$$

3. *Робота з математичною моделлю:*

$$\begin{cases} x = y + 30, \\ \frac{180}{y} - \frac{180}{y + 30} = 1. \end{cases}$$

$$\frac{180}{y} - \frac{180}{y+30} - 1 = 0,$$

ОДЗ змінної: $y \neq 0, y \neq -30$.

$$\frac{180 \cdot (y+30) - 180 \cdot y - y \cdot (y+30)}{y(y+30)} = 0,$$

$$180(y+30) - 180y - y(y+30) = 0,$$

$$180y + 5400 - 180y - y^2 - 30y = 0,$$

$$y^2 + 30y - 5400 = 0,$$

$$y_1 = 60, y_2 = -90.$$

4. Складання відповіді до задачі.

Перевіркою встановлюємо, що обидва числа задовольняють ОДЗ змінної.

Якщо $y = 60$, то $x = y + 30 = 60 + 30 = 90$. Число -90 не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість автомобіля дорівнює 90 км/год, а швидкість автобуса — 60 км/год.



Чи є відмінності в складанні математичних моделей у задачах на рух річкою?



Ні. Рівняння складають за тими самими формулами, але зазвичай за x позначають власну швидкість об'єкта руху, а за y — швидкість течії.

3. Задачі на спільну роботу

qr.orioncentr.com.ua/qLE1b

У задачах на роботу описується певний вид діяльності: труби наповнюють басейн, селяни збирають урожай, будівельники будують щось тощо.



Для складання математичної моделі задач на роботу можна використовувати такі формули.

$$A = pt$$

$$p = \frac{A}{t}$$

$$t = \frac{A}{p}$$

Основні величини: A — обсяг роботи; p — продуктивність праці; t — час роботи.



Якщо в умові задачі не вказано обсяг роботи, то його приймають за число 1.

Задача 2 У дворі друзі встановили надувний басейн для літньої вечірки. Щоб швидше його наповнити, під'єднали дві труби, через які його можна наповнити за 2 год, якщо вони працюють одночасно. Відомо, що перша труба наповнює цей басейн на 3 год швидше, ніж друга, якщо працює окремо. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо?

Розв'язання

1. Аналіз та систематизація даних (табл. 35).

Таблиця 35

Труби	Продуктивність	Час	Обсяг роботи
Перша	?	?, на 3 год <—	1
Друга	?	? ←—	
Дві труби разом	?	2 год	

2. Побудова математичної моделі. Нехай x — час (у годинах) наповнення басейну через першу трубу, тоді y — час (у годинах) його заповнення через другу трубу.

За умовою, через першу трубу басейн може наповнитися на 3 год швидше, ніж через другу. Складаємо перше рівняння: $y - x = 3$.

Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 36. Обсяг роботи, що полягає в наповненні басейну, приймаємо за 1.

Таблиця 36

Труби	p	t одночасної роботи	A
Перша	$\frac{1}{x}$	2	$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{x} \\ \frac{2}{y} \end{array} \right\} 1$
Друга	$\frac{1}{y}$	2	

Складаємо друге рівняння: $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1$.

Одержали систему рівнянь:
$$\begin{cases} y - x = 3, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

3. *Робота з математичною моделлю.* Розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо дві пари чисел: $x = 3$, $y = 6$ та $x = -2$, $y = 1$.

4. *Складання відповіді до задачі.* Пара $x = -2$, $y = 1$ не задовольняє умову задачі. Тому вибираємо пару $x = 3$, $y = 6$. Отже, через першу трубу басейн можна наповнити за 3 год, а через другу — за 6 год.

4. Задачі на вартість

Для складання математичної моделі задач на вартість можна використовувати такі формули.

$$C = an$$

$$a = \frac{C}{n}$$

$$n = \frac{C}{a}$$

qr.orioncentr.com.ua/j7NI0



Основні величини: a — ціна деякого товару, n — його кількість, а C — вартість.

Задача 3 У суботу мама замовила фрукти через онлайн-супермаркет. Ціна 1 кг груш на 15 грн більша, ніж ціна 1 кг яблук. За груші мама заплатила 180 грн, а за яблука — 225 грн. Визначте ціну яблук і груш, якщо яблук мама купила на 2 кг більше, ніж груш.

Розв'язання

1. *Аналіз та систематизація даних* (табл. 37).

Таблиця 37

Фрукти	Ціна	Вартість	Кількість
Груші	?, на 15 грн > —	180 грн	? ← —
Яблука	? ← —	225 грн	?, на 2 кг > —

2. *Побудова математичної моделі.* Нехай x — ціна (у гривнях) груш, а y — ціна (у гривнях) яблук.

За умовою, 1 кг груш коштує на 15 грн більше, ніж 1 кг яблук.

Складаємо перше рівняння: $x - y = 15$.

Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 38.

Таблиця 38

Фрукти	a , грн	C , грн	n , кг
Груші	x	180	$\frac{180}{x}$ ←
Яблука	y	225	$\frac{225}{y}$, на 2 > —

За умовою, мама купила яблук на 2 кг більше, ніж груш.

Складаємо друге рівняння: $\frac{225}{y} - \frac{180}{x} = 2$.

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 15, \\ \frac{225}{y} - \frac{180}{x} = 2. \end{cases}$$

3. *Робота з математичною моделлю.* Розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо два розв'язки: $(60; 45)$ та $(-22,5; -37,5)$.

4. *Складання відповіді до задачі.* Пара $(-22,5; -37,5)$ не задовольняє умову задачі. Тому вибираємо розв'язок $(60; 45)$. Отже, один кілограм груш коштує 60 грн, а один кілограм яблук — 45 грн.



Чи можна для розв'язування розглянутих задач як математичні моделі використовувати не системи рівнянь, а рівняння?

Так.



Наприклад, для розв'язування задачі 3 можна ввести такі позначення: x — ціна яблук (у гривнях), а $(x + 15)$ — ціна груш (у гривнях). Одержимо рівняння: $\frac{225}{x} - \frac{180}{x+15} = 2$.

5. Геометричні задачі

qr.orioncentr.com.ua/zdsGP



Для розв'язування геометричних задач під час складання математичної моделі використовують означення та властивості геометричних фігур.

Задача 4 Прямокутну ділянку землі площею 4000 м^2 обнесено парканом, загальна довжина якого становить 260 м . Знайдіть довжину й ширину цієї ділянки.

Розв'язання

1. *Аналіз та систематизація даних.*

Довжина — ?

Ширина — ?

Площа — 4000 м^2

Периметр — 260 м

2. *Побудова математичної моделі.* Нехай x — довжина земельної ділянки (у метрах), а y — її ширина (у метрах).

За умовою, ділянка має форму прямокутника, площа якого дорівнює 4000 м^2 . Складаємо перше рівняння:

$$x \cdot y = 4000.$$

Ділянку обнесено парканом, загальна довжина якого становить 260 м , отже, периметр прямокутника дорівнює 260 м . Складаємо друге рівняння:

$$2(x + y) = 260.$$

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 4000, \\ 2(x + y) = 260. \end{cases}$$

3. *Робота з математичною моделлю.* Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 4000, \\ 2(x + y) = 260; \end{cases} : 2 \quad \begin{cases} xy = 4000, \\ x + y = 130; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 130 - y, \\ (130 - y)y = 4000; \end{cases}$$

$$130y - y^2 - 4000 = 0,$$

$$y^2 - 130y + 4000 = 0,$$

$$y_1 = 80, y_2 = 50.$$

Якщо $y_1 = 80$, то $x_1 = 130 - 80 = 50$;

якщо $y_2 = 50$, то $x_2 = 130 - 50 = 80$.

Отже, система рівнянь має два розв'язки: $(50; 80)$ і $(80; 50)$.

4. Складання відповіді до задачі.

У задачі необхідно було знайти довжину й ширину ділянки, що має форму прямокутника. За x прийнято довжину цієї ділянки, а за y — її ширину. Тому, за умовою задачі, обираємо пару $(80; 50)$.

Отже, довжина земельної ділянки дорівнює 80 м, а її ширина — 50 м.



- Якщо в задачі необхідно знайти пару чисел a і b , то таких пар може бути дві: a і b та b і a ;
- якщо за умовою задачі важливо, у якому порядку подавати знайдені числа, то із двох можливих пар чисел залишають одну пару, що задовольняє цю умову;
- якщо за умовою задачі неважливо, у якому порядку подавати знайдені числа, то можна залишити будь-яку з пар: або a і b , або b і a .

Дізнайтеся більше

Прикладна математика — це розділ математики, який займається розв'язуванням реальних задач із різних галузей: фізики, економіки, біології, техніки, інженерії, екології тощо. Вона використовує математичні методи для аналізу, прогнозування та оптимізації реальних процесів. Прикладна математика — це «мова», якою можна описати й вирішити практичні проблеми. Наприклад, обчислення витрат у бізнесі, оптимізація транспортних маршрутів, аналіз даних у медицині, розробка алгоритмів, які працюють у смартфонах, іграх чи ШІ. Фахівець з прикладної математики — це не просто «рахувальник», а архітектор, який знає, як за допомогою математики зробити роботу ефективнішою.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/w51qR

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
прикладна математика	applied mathematics	angewandte Mathematik	mathématiques appliquées

Пригадайте головне

1. Що таке математична модель?
2. Що таке математичне моделювання?
3. Назвіть етапи математичного моделювання.
4. Поясніть, як розв'язують задачі на рух.
5. Поясніть, як розв'язують задачі на роботу.
6. Поясніть, як розв'язують задачі на вартість.
7. Поясніть, як розв'язують геометричні задачі.

Усне тренування

1. Знайдіть невідомий член пропорції:

$$1) \frac{x}{0,5} = \frac{16}{5}; \quad 2) \frac{\sqrt{3}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}; \quad 3) x : \frac{1}{3} = 3 : 5.$$

2. Розв'яжіть задачі.

1. Велосипедист за 3 год проїхав 45 км. Яка його швидкість?

2. Автомобіль рухається зі швидкістю 90 км/год. Скільки кілометрів він проїде за 40 хв?

3. Автобус виїхав о 10:00 і рухався зі швидкістю 80 км/год. О котрій годині він буде за 180 км від початку шляху?

3. Дано числа 4 і 10. Знайдіть:

- 1) суму їх квадратів;
- 2) суму обернених до них чисел;
- 3) квадрат різниці цих чисел.

4. Знайдіть: 1) 10 % числа 225; 2) 25 % числа 800; 3) число, якщо його 30 % — це число 120.

5. Площа прямокутника дорівнює 60 см^2 , а одна його сторона — 5 см. Знайдіть:

- 1) іншу сторону прямокутника;
- 2) периметр прямокутника;
- 3) діагональ прямокутника.

Розв'яжіть задачі

527'. Розв'язуючи задачі на рух, за якою формулою знаходять:

- 1) пройденої відстані;
- 2) швидкість руху;
- 3) час на подолання відстані?

- 528'.** Розв'язуючи задачі на роботу, за якою формулою знаходять:
- 1) обсяг виконаної роботи;
 - 2) продуктивність праці;
 - 3) час роботи?
- 529'.** Розв'язуючи задачі на вартість, за якою формулою знаходять:
- 1) вартість покупки;
 - 2) ціну товару;
 - 3) кількість придбаного товару?
- 530'.** Складіть формулу для визначення:
- 1) часу руху автобуса, який проїхав 100 км зі швидкістю v км/год;
 - 2) швидкості велосипедиста, який проїхав s км за 2 год;
 - 3) відстані, яку проїхав поїзд за t год, рухаючись зі швидкістю 80 км/год.
- 531'.** Швидкість течії річки дорівнює 3 км/год. Складіть рівність для визначення часу руху катера, який проплив:
- 1) 36 км зі швидкістю v км/год за течією річки;
 - 2) s км зі швидкістю 15 км/год проти течії річки.
- 532'.** Складіть рівність для визначення:
- 1) обсягу виконаної за 2 год роботи з продуктивністю p ;
 - 2) продуктивності праці під час виготовлення 30 костюмів за t днів;
 - 3) часу роботи для виготовлення n деталей з продуктивністю p .
- 533'.** Складіть рівність для визначення:
- 1) вартості n кг яблук за ціною 38 грн за 1 кг;
 - 2) ціни зошита, якщо придбали 12 зошитів, витративши m грн;
 - 3) кількості придбаних тістечок за ціною a грн за штуку, якщо за них заплатили 112 грн.
- 534'.** Одне із чисел на 5 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їхній добуток дорівнює 150.
- 535'.** Одне із чисел на 3 менше від іншого. Знайдіть ці числа, якщо їхній добуток дорівнює 108.

- 536°.** Сума двох чисел дорівнює 27, а сума їхніх квадратів — 369. Знайдіть ці числа. Скільки відсотків становить менше число від більшого?



qr.orioncentr.com.ua/6AFof

- 537°.** Сума двох чисел дорівнює 24, а сума їхніх квадратів — 296. Знайдіть ці числа. Скільки відсотків становить більше число від меншого?



- 538°.** Сума двох чисел дорівнює 22. Якщо від квадрата першого числа відняти подвоєне друге число, то одержимо 124. Знайдіть ці числа.



- 539°.** Різниця двох чисел дорівнює 2. Якщо до потроєного меншого числа додати квадрат більшого числа, то одержимо 124. Знайдіть ці числа.



- 540°.** Із Києва до Житомира одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з автомобілів була на 10 км/год більшою за швидкість іншого, тому він прибув до Житомира на 20 хв раніше. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 140 км.



qr.orioncentr.com.ua/vNlaU

- 541°.** Із Черкас до Вінниці одночасно виїхали автобус й автомобіль. Швидкість автомобіля була на 30 км/год більшою за швидкість автобуса, тому він прибув до Вінниці на 2 год раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 360 км.



- 542°.** Із Харкова до Запоріжжя відправився рейсовий автобус. Автобус їхав зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж було заплановано за розкладом. Тому до Запоріжжя він прибув на 1 год раніше, ніж планував. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом, якщо відстань між містами дорівнює 300 км?

- 543°.** Із Полтави до Одеси відправився рейсовий автобус. Через негоду автобус їхав зі швидкістю, на 10 км/год

меншою, ніж було заплановано за розкладом. Тому до Одеси він прибув із запізненням на 1 год 20 хв. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом, якщо відстань між містами дорівнює 560 км?

544°. На навчальному виробництві учні технічного ліцею програмують двох роботів-майстрів для виконання замовлення на 140 деталей. Робот А працює швидше й виконує замовлення на 4 дні швидше, ніж робот В. Крім того, робот А виготовляє за день на 4 деталі більше, ніж робот В. Скільки деталей за день виготовляє робот В?

545°. Замовлення на 80 деталей перший робітник виконує на 3 год довше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє перший робітник, якщо другий робітник за 1 год виготовляє на 6 деталей більше?

546°. Петрик і Наталка готуються до шкільного STEM-фестивалю, де мають представити моделі дерев'яних корабликів, зроблених власноруч. Петрик може виготовити за



qr.orioncentr.com.ua/UcZDp

день на 2 моделі більше, ніж Наталка. Відомо, що для виготовлення 16 моделей Петрик витрачає на 4 дні менше, ніж Наталка. Скільки моделей корабликів за день виготовляє кожний з них?

547°. Тетянка й Миколка виготовляють новорічні прикраси для шкільної ялинки. Тетянка за 1 год може виготовити на 1 прикрасу менше, ніж Миколка. Відомо, що для виготовлення 12 прикрас Тетянка витрачає на 1 год більше, ніж Миколка. Скільки прикрас за годину виготовляє кожний з них?



548°. Мама заплатила за картоплю 60 грн, а за цибулю — 48 грн. Відомо, що ціна 1 кг цибулі на 8 грн більше, ніж ціна 1 кг карто-



qr.orioncentr.com.ua/U5Izj

плі. Визначте, скільки кілограмів картоплі й скільки кілограмів цибулі купила мама та за якою ціною, якщо картоплі вона купила на 1 кг більше, ніж цибулі.

- 549°.** За зошити в лінійку Тетянка заплатила 165 грн, а за зошити в клітинку — 240 грн. Ціна одного зошита в лінійку на 1 грн менша, ніж ціна одного зошита в клітинку. Визначте, скільки зошитів кожного виду купила Тетянка та за якою ціною, якщо зошитів у клітинку вона купила на 5 більше, ніж зошитів у лінійку.



- 550°.** Міська рада замовила благоустрій нового скверу прямокутної форми в центрі громади. За планом площа скверу дорівнює 6300 м^2 . Його мають повністю обгородити парканом завдовжки 320 м разом із вхідною брамою. Якими мають бути довжина і ширина скверу, щоб дотриматися цих вимог?

- 551°.** Спортмайданчик біля школи, площа якого становить 4000 м^2 , має прямокутну форму. Знайдіть довжину й ширину спортмайданчика, якщо довжина огорожі, включно із входом до майданчика, дорівнює 260 м.



- 552.** Якщо до $\frac{1}{2}$ першого натурального числа додати $\frac{1}{2}$ другого натурального числа, то одержимо 7, а якщо до $\frac{1}{4}$ квадрата першого числа додати $\frac{1}{5}$ квадрата другого, то одержимо 24. Знайдіть ці числа.

- 553.** Якщо до $\frac{1}{4}$ першого цілого числа додати $\frac{1}{3}$ другого цілого числа, то одержимо 3, а якщо до $\frac{1}{2}$ квадрата першого числа додати $\frac{1}{4}$ квадрата другого, то одержимо 17. Знайдіть ці числа.

- 554.** Адміністрація сучасного кінотеатру готується до прем'єри популярного фільму. У кінотеатрі є два зали для глядачів: великий і малий. У великому залі —

500 місць, а в малому — 300 місць. Кількість місць у кожному ряду обох залів однакова, проте в малому залі на 10 рядів менше, ніж у великому. Скільки рядів у великому залі, а скільки — у малому? Скільки місць у кожному ряду?

555. На двох ділянках рівними рядами посадили яблуні й груші: на першій — 300 яблунь, а на другій — 270 груш. Кількість дерев у кожному ряду однакова, проте на першій ділянці було висаджено на 2 ряди дерев більше, ніж на другій. Скільки рядів яблунь посадили на першій ділянці, а скільки — на другій? Скільки дерев у кожному ряду?

556. Мотоцикліст зі сталою швидкістю виїхав з Рівного до Луцька, відстань між якими дорівнює 70 км. Наступного дня він відправився назад. Половину шляху він проїхав зі швидкістю, з якою рухався напередодні. Потім зробив зупинку на 10 хв. Для того щоб прибути вчасно, на шляху, що лишився, він збільшив швидкість на 5 км/год. Знайдіть швидкість мотоцикліста на шляху з Рівного до Луцька. Упродовж якого часу він повернувся з Луцька до Рівного?

557. Автомобіль зі сталою швидкістю виїхав з Тернополя до Вінниці, відстань між якими дорівнює 240 км. Наступного дня він відправився назад. Половину шляху він проїхав зі швидкістю, з якою рухався напередодні. Потім зробив зупинку на 10 хв. Для того щоб прибути вчасно, на шляху, що залишився, він збільшив швидкість на 10 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля на шляху з Тернополя до Вінниці. Упродовж якого часу він був у дорозі?

558. Туристи за 1 год на автомобілі подолали відстань, на 40 км більшу, ніж за 4 год, рухаючись пішки. Відомо, що швидкість руху на автомобілі була у 12 разів більшою, ніж швидкість руху туристів. Знайдіть швидкість руху туристів пішки та швидкість їхнього руху на автомобілі. Яку відстань подолали туристи, рухаючись пішки?

559. За 4 год на автобусі туристи подолали ту саму відстань, що й за 3 год на потязі. Знайдіть швидкості автобуса й потяга, якщо за 1 год на потязі туристи проїжджали на 20 км більше, ніж на автобусі. Яку відстань подолали туристи, рухаючись на автобусі?



560. Катер проплив 20 км за течією річки за 1 год. Потім він повернувся до пункту відправлення, витративши на зворотний шлях 1 год 40 хв. Знайдіть швидкість катера й швидкість течії річки.

561. Моторний човен проплив проти течії річки 24 км за 2 год. Потім він повернувся до пункту відправлення, витративши на зворотний шлях 1,5 год. Знайдіть швидкість човна та швидкість течії річки.



562. Майстер має зробити 120 деталей. Якщо він буде виготовляти щодня на 2 деталі більше, ніж повинен, то закінчить роботу на 2 дні раніше. Скільки деталей за день має виготовляти майстер?

563. Кравчиня має пошити 30 суконь.



Якщо щодня вона буде шити на 1 сукню більше, ніж заплановано, то закінчить роботу на 5 днів раніше. Скільки суконь за день має шити кравчиня за планом?

564. Під час розпродажу Оля купила дві речі — куртку та рюкзак. На куртку була знижка 20 %, а на рюкзак — 10 %. З урахуванням знижок вона заплатила 2340 грн. Якби на обидва товари знижка становила 15 %, то вона заплатила б 2380 грн. Якою була початкова ціна куртки та рюкзака?



565. Андрій замовив в інтернет-магазині кепку й штани. На штани діяла знижка 25 %, а на кепку — 15 %. З урахуванням знижок він заплатив 1130 грн. Якби на обидва товари знижка становила 20 %, то він би заплатив 1160 грн. Якою була початкова ціна штанів і кепки?



- 566.** Периметр прямокутника дорівнює 46 см, а його площа — 120 см². Знайдіть діагональ прямокутника.



qr.orioncentr.com.ua/904M3



- 567.** Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а його площа — 48 см². Знайдіть діагональ прямокутника.



- 568*.** Богдан і Тарас поділили між собою 39 горіхів. Кількість горіхів, що дісталися Богданові, менша від подвоєної кількості горіхів, що дісталися Тарасові. Квадрат третьої частини горіхів, що дісталися Тарасові, менший від збільшеної на 1 кількості горіхів, що дісталися Богданові. Скільки горіхів одержав кожний хлопчик?

- 569*.** Двоє робітників одночасно розпочали роботу. Після 45 хв їхньої спільної роботи першого робітника перевели на іншу роботу, і другий робітник завершив роботу за 2 год 15 хв. За який час міг би виконати цю роботу кожний робітник, працюючи окремо, якщо відомо, що другому робітникові на її виконання потрібно на 1 год більше, ніж першому?

- 570*.** Відстань між містами A і B пасажирський потяг долає на 4 год швидше, ніж товарний. Якби пасажирський потяг витратив той час, який витратив товарний потяг на подолання шляху від A до B , то він проїхав би на 280 км більше, ніж товарний. Якби швидкість кожного потяга збільшили на 10 км/год, то пасажирський потяг пройшов би відстань від A до B на 2 год 55 хв швидше, ніж товарний. Знайдіть відстань між містами.

- 571*.** Два велосипедисти одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B , відстань між якими дорівнює 28 км. Через 1 год вони зустрілися й продовжили свій шлях без зупинки із тими самими швидкостями. Перший прибув у пункт B на 35 хв раніше, ніж другий у пункт A . Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.



Проявіть компетентність

572. Державний прапор України — стяг із двох рівновеликих горизонтальних смуг синього й жовтого кольорів. Ширина прапора відноситься до його довжини як $2 : 3$.



1. Знайдіть довжини сторін прапора, площа якого дорівнює $1,5 \text{ м}^2$, а периметр — 5 м .

2. Знайдіть розміри прапора, одна сторона якого дорівнює 60 см .

3. Якої максимальної висоти може бути прапор площею 6 м^2 , якщо сторони його відносяться як $2 : 3$, а довжина щогли — не більша ніж $2,5 \text{ м}$? (Вважайте, що висота прапора — це його менша сторона і вона не має перевищувати довжину щогли.)

573. На занятті в художній школі Тетяна виконала малюнок «Весняна мелодія», який відібрали для участі в конкурсі. За вимогами конкурсу Тетяна має наклеїти свій малюнок на білий папір так, щоб навколо малюнка була біла окантовка однакової ширини.

1. Знайдіть розміри малюнка, якщо його ширина на 5 см менша від довжини, а площа дорівнює 300 см^2 .

2. Знайдіть ширину окантовки, якщо площа малюнка з окантовкою дорівнює 1400 см^2 .

3. Чи зможе Тетяна використати для наклеювання аркуш паперу формату A2 з розмірами $420 \times 594 \text{ мм}$?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Сформулюйте означення функції.
2. Що називають аргументом функції?
3. Що таке область визначення функції?
4. Що таке область значень функції?
5. Назвіть способи задання функцій.
6. Наведіть приклади відомих вам функцій. Побудуйте їхні графіки.
7. Що таке нуль функції?
8. Що таке проміжки знакосталості?
9. Яка функція є зростаючою на деякому проміжку; спадною на деякому проміжку?
10. Як можна одержати графік функції $y = af(x)$ ($a \neq 0$), використавши графік функції $y = f(x)$?
11. Що є графіком функції $y = -x^2$? $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
12. Які властивості функції $y = -x^2$? $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
13. Як можна одержати графік функції $y = f(x - a)$, використавши графік функції $y = f(x)$?
14. Як можна одержати графік функції $y = f(x) + b$, використавши графік функції $y = f(x)$?
15. Як можна одержати графік функції $y = f(x - a) + b$, використавши графік функції $y = f(x)$?
16. Яка функція називається квадратичною?
17. Що є графіком квадратичної функції?
18. Яка область визначення функції $y = ax^2 + bx + c$?
19. Як визначити координати вершини параболи?
20. За якої умови вітки параболи напрямлені вгору; вниз?
21. Як визначити область значень квадратичної функції?
22. Скільки нулів може мати квадратична функція?
23. За яких значень аргументу функція $y = ax^2 + bx + c$ є зростаючою; спадною?
24. Яку нерівність називають квадратною? Як її розв'язати?
25. Що таке система двох рівнянь із двома змінними?
26. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
27. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними?
28. Які є способи розв'язування системи рівнянь із двома змінними?
29. Що таке математична модель?
30. Що таке математичне моделювання? Які його етапи?

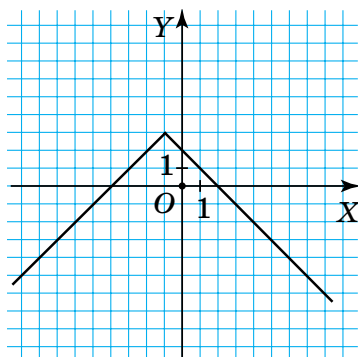
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 1

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

За малюнком 161 розв'яжіть задачі 1–2.

- 1'. Знайдіть область значень функції.

- А. $y \in (-\infty; +\infty)$.
 Б. $y \in (-4; 2)$.
 В. $y \in (-\infty; 3]$.
 Г. $y \in (-\infty; -1)$.



Мал. 161

- 2'. Знайдіть проміжок зростання функції.

- А. $x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.
 Б. $x \in (-\infty; -1]$.
 В. $x \in [-4; 2]$.
 Г. $x \in (-1; +\infty)$.

- 3'. Яка з наведених у відповідях квадратичних функцій не перетинає вісь абсцис?

- А. $y = -x^2 - 12x + 1$.
 Б. $y = x^2 - 12x$.
 В. $y = x^2 - 18$.
 Г. $y = x^2 - x + 1$.

4. Розв'яжіть квадратну нерівність $x^2 - 36 \leq 0$.

- А. $x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$.
 Б. $x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.
 В. $x \in [-6; 6]$.
 Г. $x \in (-6; 6)$.

- 5*. Визначте коефіцієнти b і c функції $y = x^2 + bx + c$, якщо вершина параболи має координати $(-2; 1)$.

- А. $b = -2$; $c = 1$.
 Б. $b = 2$; $c = -7$.
 В. $b = 4$; $c = 5$.
 Г. $b = -4$; $c = -11$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 2

- 1°. Яка пара чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - y^2 = 12? \end{cases}$

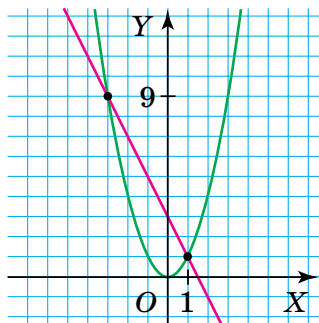
А. (5; 1).
 Б. (4; 2).
 В. (9; -3).
 Г. (-1; 6).

- 2°. Складіть формулу для визначення часу руху автомобіля, який проїхав 120 км зі швидкістю x км/год.

А. $120x$.
 Б. $\frac{x}{120}$.
 В. $120 + x$.
 Г. $\frac{120}{x}$.

- 3°. За малюнком розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y + 2x - 3 = 0. \end{cases}$

А. (1; 1).
 Б. (-3; 9).
 В. (1; 1); (-3; 9).
 Г. (1; 1); (3; 9).



4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x^2 + 2xy = 3. \end{cases}$

А. (-1; -1), (1,5; 0,25).
 Б. (3; -1).
 В. (3; 1).
 Г. (-1; 3), (1,5; 0,25).

- 5*. Площа прямокутника дорівнює 60 см², а його діагональ — 13 см. Знайдіть сторони прямокутника.

А. 3 см і 20 см.
 Б. 4 см і 15 см.
 В. 5 см і 12 см.
 Г. 2 см і 30 см.



Розділ 4. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

У розділі дізнаєтесь:

- які є послідовності чисел;
- що таке арифметична прогресія та геометрична прогресія;
- про властивості арифметичної та геометричної прогресій;
- як обчислити суму n перших членів арифметичної та геометричної прогресій;
- як записати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці

§ 13. ЩО ТАКЕ ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ

1. Поняття числової послідовності

Ситуація. У місті розпочато будівництво нового мікрорайону. За планом необхідно збудувати по п'ять будинків уздовж двох сторін нової вулиці. Забудовник має замовити металеві цифри, щоб пронумерувати ці будинки.



qr.orioncentr.com.ua/1vgal



Скільки металевих цифр необхідно замовити забудовнику?

Змоделюємо умову задачі.



Запишемо номери будинків, що побудують на цій вулиці. Одержимо таку *послідовність чисел*: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. Очевидно, що для нумерування цих будинків знадобиться 11 цифр.

Якщо будівництво буде продовжено, то послідовність чисел для нумерування будинків також буде продовжуватись:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12;....

Отримано нескінченний ряд чисел, у якому на кожному місці (під певним номером $n \in \mathbb{N}$) стоїть деяке число a_n . Така послідовність є нескінченною.

Запам'ятайте!

Якщо кожному натуральному числу n за деяким правилом поставити у відповідність дійсне число a_n , то одержимо *послідовність чисел* $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$, або *числову послідовність* (a_n) . Числа, що утворюють послідовність, називають *членами послідовності*.



Записують: $(a_n): a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$

Число a_1 називають першим членом даної послідовності; a_2 — другим членом; a_3 — третім членом тощо. Число a_n називають n -м членом послідовності (a_n) . Зауважимо, що член послідовності, що передує a_n , позначають a_{n-1} (його номер — $n - 1$), член послідовності, що йде за a_n , позначають a_{n+1} (його номер — $n + 1$).

Послідовності позначають малими буквами латинського алфавіту: (b_n) , (c_n) тощо. Наприклад:

$(a_n): 1; 2; 3; 4; \dots;$

$(b_n): 100; 50; 25; 12,5; \dots$



Які є види послідовностей?



Є зростаючі і спадні послідовності (табл. 39).

Таблиця 39

Назва	Характеристика	Приклад
Зростаюча	кожний член послідовності, крім першого, <i>більший</i> за попередній	$b_{n+1} > b_n$ $1; 4; 9; 16; \dots$
Спадна	кожний член послідовності, крім першого, <i>менший</i> за попередній	$c_{n+1} < c_n$ $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

Є такі послідовності, членами яких є одне число $(0; 0; \dots)$ або кілька чисел $(1; -1; 1; -1; \dots)$.

2. Способи задання числової послідовності



Що означає задати числову послідовність?

Звернімося до правила.



Запам'ятайте!

Задати числову послідовність — означає *вказати правило*, за яким можна обчислити її n -й член a_n для будь-якого натурального n .

Задати послідовність можна різними способами (табл. 40).

Таблиця 40

Через перелік членів послідовності	$(a_n): 3; 6; 9; 12; \dots$
Словесний опис	послідовність чисел, кратних числу 3
Формула n -го члена	$a_n = 3n, n \in \mathbb{N}$
Рекурентна формула	$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 3$

Задання послідовності формулою n -го члена або рекурентною формулою називають *аналітичним*.

Задача 1 Числову послідовність задано формулою $a_n = 2n + 1$. Знайдіть перші три члени цієї послідовності.

Розв'язання Застосуємо формулу $a_n = 2n + 1$, тоді:

якщо $n = 1$, то $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$;

якщо $n = 2$, то $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;

якщо $n = 3$, то $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Послідовність задано *рекурентною формулою*, якщо задано один або кілька перших її членів та формулу, що виражає наступний її член через один або кілька попередніх членів. Наприклад, послідовність Фібоначчі: 1; 1; 2; 3; 5; 8; Її рекурентна формула: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Задача 2 Послідовність (a_n) задано рекурентною формулою:

$$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 4. \text{ Знайдіть } a_5.$$

Розв'язання

За умовою, $a_1 = 3$. Застосуємо формулу $a_{n+1} = a_n + 4$:

$$a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7;$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 = 11;$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15;$$

$$a_5 = a_4 + 4 = 15 + 4 = 19.$$

Задача 3 Числову послідовність задано формулою $a_n = 10n - 5$. Знайдіть номер члена послідовності, який дорівнює 35.

Розв'язання

За умовою складаємо рівняння: $10n - 5 = 35$. Звідси $n = 4$. Отже, 35 — це 4-й член даної послідовності.



Щоб переконатися в тому, що деяке число є членом даної послідовності, достатньо знайти його номер.

Дізнайтеся більше

Послідовність Фібоначчі 1; 1; 2; 3; 5; 8;... названо на честь математика XIII ст. **Леонардо Фібоначчі** з Пізи (бл. 1170 – бл. 1250). У «Книзі абака» («Liber abacci») у 1202 р. Фібоначчі описав цю послідовність, хоча вона була відома задовго до цього ще в Стародавній Індії. Ця послідовність була розв'язком задачі про кроликів.



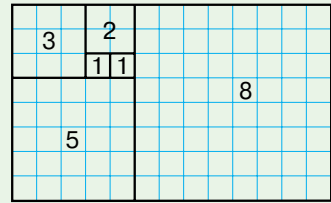
Задача 4 Дехто посадив пару кроликів у загін, оточений з усіх боків стіною. Скільки пар кроликів за рік може народити ця пара, якщо кожна пара кроликів кожного місяця, починаючи з другого місяця після свого народження, народжує одну пару?

Розв'язання

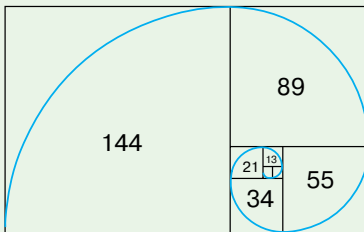
Кількість пар кроликів, які народяться за кожний із дванадцяти наступних місяців, буде такою: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144;.... Ця послідовність видатна тим, що відношення двох сусідніх її чисел прямує до числа, яке називають «золотим перері-

зом» $\left(\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$. Вона виникає в найрізноманітніших математичних

ситуаціях — комбінаторних, числових, геометричних. На малюнку 162 наведено побудову прямокутника із квадратів, у яких довжини сторін утворюють послідовність чисел Фібоначчі. Якщо провести плавну лінію через протилежні вершини цих квадратів, то одержимо спіраль Архімеда (мал. 163).



Мал. 162



Мал. 163



У природі числа Фібоначчі можна побачити в різних спіральних формах: лусочки на сосновій шишці (мал. 164), насіння в соняшнику (мал. 165); космічні туманності (мал. 166) тощо.



Мал. 164



Мал. 165



Мал. 166

Існує формула (формула Біне) для обчислення n -го члена послідовності Фібоначчі.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/mldKz

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
числова послідовність	numerical sequence	Zahlenfolge, f	suite numérique

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади числових послідовностей.
2. Як позначають числову послідовність?
3. Як позначають числа числової послідовності (a_n) ? Як називають $a_1; a_2; a_3; a_n$?
4. Як задають числову послідовність?
5. Наведіть приклад послідовності, заданої формулою n -го члена.
6. Наведіть приклад послідовності, заданої рекурентною формулою.
7. Поясніть, чому нескінченну послідовність вважають окремим прикладом функції.

Усне тренування

Знайдіть $f(2)$, $f(5)$, $f(-4)$, $f(0,3)$, якщо $f(n) = n^2 - 3n + 1$.

Розв'яжіть задачі

574'. Чи правильно, що даний набір чисел є числовою послідовністю:

1) 1; 2; 3; 4; 5;...; 2) 1; 3; 5; 7; 9;...; 3) 2; 4; 6; 8; 10;...?

Яке число буде наступним?

575'. Дано послідовність чисел (a_n) : 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13;... Назвіть:

1) перший член;

3) п'ятий член;

2) другий член;

4) восьмий член.

576°. Дано послідовність (b_n) : $b_1; b_2; b_3; b_4; \dots, b_n; \dots$. Який член послідовності:

1) йде за членом: $b_5; b_{10}; b_{99}; b_n; b_{n+5}; b_{n-1}$;

2) передує члену: $b_7; b_{50}; b_{100}; b_n; b_{n+7}; b_{n-3}$?

577°. Запишіть перші п'ять членів послідовності, заданої формулою n -го члена:



1) $x_n = 2n$;

4) $c_n = n^2 + 1$;

2) $y_n = 3n - 1$;

5) $a_n = (-1)^n$;

3) $x_n = \frac{n+1}{5}$;

6) $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

qr.orioncentr.com.ua/rb6kF



578°. Запишіть перші чотири члени послідовності, заданої формулою n -го члена:



1) $x_n = n + 1$;

2) $y_n = \frac{2}{n+3}$;

3) $a_n = -3^n$.

579°. Послідовність (c_n) задано рекурентною формулою:

$$c_1 = -2, c_{n+1} = c_n + 6,5. \text{ Знайдіть } c_4.$$

580°. Послідовність (d_n) задано рекурентною формулою:



$$d_1 = 3,5, d_{n+1} = d_n - 10,5. \text{ Знайдіть } d_5.$$

581°. Запишіть перші чотири члени послідовності (a_n) натуральних чисел, кратних числу 3. Для цієї послідовності вкажіть:

$$1) a_1; \quad 2) a_7; \quad 3) a_{100}; \quad 4) a_n.$$

582°. Запишіть кілька перших членів послідовності (b_n) натуральних чисел, кратних числу 5. Для цієї послідовності вкажіть:



$$1) b_{10}; \quad 2) b_n.$$

583°. Послідовність задано формулою $x_n = 7n - 2$. Чи є членом цієї послідовності число:

$$1) 33; \quad 2) 75; \quad 3) 107; \quad 4) 131?$$

Якщо так, то вкажіть номер цього члена.

584°. Послідовність задано формулою $y_n = 10 + 4n$. Чи є членом цієї послідовності число:

$$1) 50; \quad 2) 100?$$

Якщо так, то вкажіть номер цього члена.

585. Задайте дану послідовність: а) словесно; б) формулою n -го члена; в) рекурентною формулою:

$$\begin{array}{ll} 1) 10; 20; 30; \dots; & 3) 0,1; 0,05; 0,025; \dots; \\ 2) 5; 9; 13; 17 \dots; & 4) 12; 6; 3; \dots \end{array}$$

586. Послідовність задано формулою $c_n = (n + 5)(n - 2)$. Знайдіть n , якщо:

$$1) c_n = 260; \quad 2) c_n = 638.$$

587. Послідовність задано формулою $d_n = (n - 3)(n + 2)$. Знайдіть n , якщо: $d_n = 594$.



588. Перевірте, чи є дані числа членами послідовності:

$$1) \text{ числа } 6 \text{ і } 1, \text{ послідовність } (a_n), \text{ де } a_n = \frac{n^2 + 11}{n + 11};$$

$$2) \text{ числа } 5 \text{ і } 2, \text{ послідовність } (b_n), \text{ де } b_n = \frac{24 - n^2}{n}.$$

589*. Послідовність (c_n) задано рекурентною формулою:
 $c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$, $c_1 = 1$, $c_2 = -5$. Знайдіть c_5 .

590*. Знайдіть 4-й, 5-й і 6-й члени послідовності (a_n) , якщо:

$$1) (a_n) = \begin{cases} n^2, & \text{якщо } a \text{ — непарне,} \\ 5, & \text{якщо } a \text{ — парне;} \end{cases}$$

$$2) (a_n) = \begin{cases} 2n+1, & \text{якщо } a \text{ — непарне,} \\ 2n-1, & \text{якщо } a \text{ — парне.} \end{cases}$$

591*. Послідовність задано формулою $b_n = -3n + 5$. Запишіть $(n+1)$ -й, $(n-2)$ -й і $(n+4)$ -й члени цієї послідовності.

Проявіть компетентність

592. Для перевірки логічного аспекту мислення використовують завдання на числові послідовності. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, написавши два наступні члени цієї послідовності:

- 1) 2; 4; 6; 8; 10; ...;
- 2) 5; 10; 20; 40; ...;
- 3) 21; 19; 17; 15; ...;
- 4) 16; 25; 36; 49; ...;
- 5) 2; 5; 11; 23; 47; 95; ...

§ 14. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

1. Поняття арифметичної прогресії

Ситуація 1. Під час весняних канікул Тарас вирішив розв'язувати цікаві задачі з математики з понеділка по п'ятницю. За планом, який склав Тарас, у понеділок він мав розв'язати 5 задач, а кожного наступного дня — на 2 задачі більше, ніж за попередній.



qr.orioncentr.com.ua/bpbl0



Скільки задач розв'язував Тарас кожного дня, якщо він виконав усе, що запланував?

Змоделюємо умову задачі.



Якщо в понеділок Тарас розв'язав 5 задач, то:

$5 + 2 = 7$ (з.) — розв'язав у вівторок;

$7 + 2 = 9$ (з.) — розв'язав у середу;

$9 + 2 = 11$ (з.) — розв'язав у четвер;

$11 + 2 = 13$ (з.) — розв'язав у п'ятницю.

Одержимо послідовність чисел, яка показує кількість розв'язаних задач щодня з понеділка по п'ятницю:

5; 7; 9; 11; 13.



Чи є особливість у членів цієї послідовності?

Так.



Кожний член цієї послідовності, починаючи з другого, на 2 більший за попередній, тобто одержується шляхом додавання до попереднього члена числа 2. Така послідовність є прикладом скінченної *арифметичної прогресії*.

Якщо продовжити цю послідовність, то отримаємо послідовність, що є прикладом нескінченної арифметичної прогресії:

5; 7; 9; 11; 13; 15; 17;

Запам'ятайте!

Арифметичною прогресією називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, доданому з одним і тим самим числом.

Тобто послідовність (a_n) — арифметична прогресія, якщо для будь-якого натурального числа n виконується умова: $a_{n+1} = a_n + d$, де d — деяке число. Число d називають *різницею арифметичної прогресії*, оскільки виконується рівність: $a_{n+1} - a_n = d$. Наведемо приклади.

Якщо $a_1 = 1$, $d = 10$, то одержимо арифметичну прогресію:

1; 11; 21; 31; 41;

Якщо $a_1 = 7$, $d = -2$, то одержимо арифметичну прогресію:

7; 5; 3; 1; -1;

Якщо $a_1 = 5$, $d = 0$, то одержимо арифметичну прогресію:

5; 5; 5; 5; 5; ...

2. Формула n -го члена арифметичної прогресії

За допомогою рівності $a_{n+1} = a_n + d$ можна визначити будь-який член арифметичної прогресії через попередній її член. Проте такий спосіб не є зручним, якщо, наприклад, потрібно знайти a_{100} або a_{1000} .

Для знаходження будь-якого члена арифметичної прогресії існує спеціальна формула. Проведемо дослідження.

За означенням арифметичної прогресії:

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d; \dots$$

Простежується закономірність 1 (мал. 167):

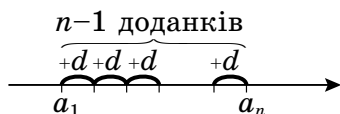
щоб знайти n -й член прогресії, потрібно до першого її члена $(n - 1)$ разів додати число d , тобто

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

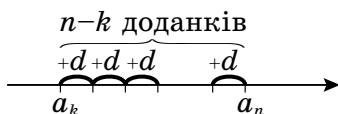
Також можна помітити ще й закономірність 2 (мал. 168):

щоб знайти n -й член прогресії, потрібно до k -го її члена $(n - k)$ разів додати число d , тобто

$$a_n = a_k + (n - k)d.$$



Мал. 167



Мал. 168

Запам'ятайте!

Формула n -го члена арифметичної прогресії

Нехай (a_n) — арифметична прогресія з різницею d . Тоді формула n -го члена має вигляд:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Задача 1 Послідовність (a_n) — арифметична прогресія, $a_1 = 2,5$, $d = 1,5$. Знайдіть a_{100} .

Розв'язання Застосуємо формулу n -го члена

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$a_{100} = a_1 + 99d = 2,5 + 99 \cdot 1,5 = 2,5 + 148,5 = 151.$$

Задача 2 Послідовність (a_n) — арифметична прогресія, $a_4 = 2,5$, $a_{15} = -19,5$. Знайдіть різницю арифметичної прогресії.

Розв'язання

Запишемо закономірність 2:

$$a_n = a_k + (n - k)d;$$

Підставимо значення a_4 і a_{15} з умови: $-19,5 = 2,5 + 11d$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\begin{aligned} 11d &= -22, \\ d &= -2. \end{aligned}$$

Отже, різниця даної арифметичної прогресії дорівнює -2 .

Задача 3 З'ясуйте, чи є число 30 членом арифметичної прогресії (a_n) : -20 ; -15 ; -10 ; -5 ;

Розв'язання Для даної арифметичної прогресії:

$$a_1 = -20 \text{ і } d = a_2 - a_1 = -15 - (-20) = 5.$$

Якщо число 30 є членом прогресії, то існує таке натуральне число n , яке відповідає номеру заданого члена прогресії. Застосуємо формулу n -го члена:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d; \\ 30 &= -20 + (n - 1) \cdot 5. \end{aligned}$$

Розв'яжемо рівняння: $-20 + 5n - 5 = 30$, $5n = 55$, $n = 11$.

Отже, число 30 є 11-м членом арифметичної прогресії (a_n) , або $a_{11} = 30$.

Задача 4 Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_7 = 36$ і $a_9 = 42$. Чому дорівнює a_8 ?

Розв'язання За формулою n -го члена арифметичної прогресії:

$$a_7 = a_1 + 6d \text{ і } a_9 = a_1 + 8d.$$

Оскільки, за умовою, обидві вимоги мають виконуватись одночасно, то одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_9 = a_1 + 8d. \end{cases}$$

Підставивши замість a_7 і a_9 їхні значення, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 36, \\ a_1 + 8d = 42. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо, що $a_1 = 18$ і $d = 3$.

Тоді $a_8 = a_1 + 7d = 18 + 7 \cdot 3 = 39$.



Чи можна задати арифметичну прогресію формулою $a_n = n(n - 2)$?

Ні.



Послідовність є арифметичною прогресією тоді і тільки тоді, коли $a_n = kn + b$, де k і b — деякі числа. Доведемо це.

Нехай (a_n) — арифметична прогресія. Перетворимо формулу її n -го члена: $a_n = a_1 + (n - 1)d = a_1 + nd - d = dn + (a_1 - d)$.

Позначимо $d = k$ і $(a_1 - d) = b$, тоді одержимо, що формула n -го члена арифметичної прогресії $a_n = kn + b$.

Доведемо обернене твердження. Нехай n -й член послідовності (a_n) задано формулою $a_n = kn + b$. Доведемо, що така послідовність є арифметичною прогресією. Для цього знайдемо різницю:

$$a_{n+1} - a_n = k(n + 1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k.$$

Різниця є сталою, тобто (a_n) — арифметична прогресія.

3. Властивість арифметичної прогресії

Свою назву арифметична прогресія одержала через властивість, яка виконується для всіх її членів, крім першого.



qr.orioncentr.com.ua/g8DTM

Запам'ятайте!**Властивість арифметичної прогресії**

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, є середнім арифметичним попереднього й наступного її членів, тобто:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n = 2, 3, \dots$$

Властивість можна довести. Для цього необхідно виразити члени a_{n-1} і a_{n+1} через a_n і d :

$$a_{n-1} = a_n - d, \quad a_{n+1} = a_n + d,$$

а потім знайти середнє арифметичне чисел a_{n-1} і a_{n+1} :

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

Цю властивість використовують для розв'язування задач. Наприклад, у задачі 4 відповідь на запитання можна одержати в інший спосіб — знайти a_8 як середнє арифметичне його сусідів $a_7 = 36$ і $a_9 = 42$, тобто

$$a_8 = \frac{36 + 42}{2} = 39.$$

4. Формула суми n перших членів арифметичної прогресії

Ви вже знаєте, що таке арифметична прогресія та як знайти її члени. А як знайти суму її n перших членів?

Ситуація 2. Якось на уроці арифметики учитель дав учням, серед яких був маленький Карл Гаус, завдання: відшукати суму всіх натуральних чисел від 1 до 100. Через кілька хвилин Карл розв'язав задачу.



qr.orioncentr.com.ua/NcmBI



Як, можливо, він міркував?
Як узагальнити ці міркування?

Звернімося до таблиці 41.



Таблиця 41

Можливі міркування у ситуації	Узагальнені міркування
Позначимо шукану суму через S	Позначимо суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) через S_n
Запишемо суму двома способами: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100,$ $S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$	Запишемо суму двома способами: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$ $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$
Додамо почленно ці дві рівності: $2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101$	Додамо почленно ці дві рівності: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$
У правій частині рівності одержали 100 доданків. Отже, $2S = 101 \cdot 100$. Звідси $S = 101 \cdot 50 = 5050$	У правій частині рівності одержали n пар чисел, сума чисел кожної пари дорівнює $(a_1 + a_n)$. Отже, $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$. Звідси $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Запам'ятайте!

Суму n перших членів арифметичної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Перетворимо дану формулу, використавши формулу n -го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Одержимо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Запам'ятайте!

Суму n перших членів арифметичної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Задача 5 Знайдіть суму дванадцяти членів арифметичної прогресії (a_n) : $-5; -4,5; -4; \dots$

Розв'язання У даній прогресії $a_1 = -5$, $d = a_2 - a_1 = -4,5 - (-5) = 0,5$.

Задачу можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1. Скористаємось формулою $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ для суми n перших членів арифметичної прогресії.

Знайдемо a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + 11d = -5 + 11 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Обчислимо суму
12-ти перших членів:

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{-5 + 0,5}{2} \cdot 12 = -27.$$

Спосіб 2. Скористаємось формулою суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d :

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n;$$

$$S_{12} = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = \frac{2 \cdot (-5) + 11 \cdot 0,5}{2} \cdot 12 = -27.$$

Дізнайтеся більше

Термін «прогресія» має латинське походження (від *progression* — рух вперед) і був уведений римським автором **Боецієм** (VI ст.). Цим терміном у математиці спочатку йменували будь-яку послідовність чисел, побудовану за законом, який дозволяє необмежено продовжувати цю послідовність. Назва «арифметична» — від грецького слова *arithmos* — число.

Задачі на арифметичну прогресію існували вже в Давньому Єгипті. Наприклад, в одному зі стародавніх папірусів математичного змісту — папірусі Рінда (XIX ст. до н. е.) — наведено таку задачу: «Тобі потрібно розділити 10 мір хліба між 10 особами так,

щоб різниця між кожною людиною та наступною за нею становила $\frac{1}{8}$ міри».

В античних математичних текстах зустрічаються твердження, які стосуються арифметичної прогресії. **Гипсікл Александрійський** (II ст. до н. е.) сформулював таке твердження: «В арифметичній прогресії з парним числом членів сума членів другої половини перевищує суму членів першої половини на число, кратне квадрату половини числа членів».

Нікомах із Герази (I ст. н. е.) склав трактат «Вступ до арифметики», який довгий час від пізньої античності й до середньовіччя був поширеним підручником з математики. Він пропонував таку задачу: «Якщо розбити ряд усіх непарних чисел на групи, у яких кількість членів буде зростати як ряд натуральних чисел, то сума членів кожної групи буде дорівнювати кубу кількості членів у ній».

Спробуйте самостійно розв'язати наведені задачі.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/vv4TH

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
арифметична прогресія	arithmetic progression	arithmetische Folge	suite arithmétique

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення арифметичної прогресії. Наведіть приклади арифметичних прогресій.
2. Запишіть формулу n -го члена арифметичної прогресії.
3. Сформулюйте властивість арифметичної прогресії.
4. Запишіть формулу суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і a_n .
5. Запишіть формулу суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d .

Усне тренування

1. Знаючи, що $f(x) = \frac{x^3 + 125}{x^3 - 125}$, обчисліть $f(7) - f(-7)$.

2. Упорядкуйте за зростанням числа: $\sqrt{27}$; $\sqrt[3]{-8}$; $(\sqrt{3})^2$.

3. Обчисліть: 5^{-2} ; $(-3)^{-4}$; 1^{-7} ; $(-0,2)^{-1}$; $-3,2^0$; $6^{-4} : 6^{-7}$.

4. Обчисліть: $2^{-1} - (-3)^{-2}$; $(0,1)^{-4} + (-0,2)^{-4}$; $(0,2)^{-2} + (0,5)^{-1}$.

5. Чи належить точка A графіку функції $f(x)$:

1) $A(2; 0)$, $f(x) = 5x + 1$; 2) $A(0; 1)$, $f(x) = 2x + 11$; 3) $A(1; 6)$, $f(x) = 5x + 1$?

Розв'яжіть задачі

593'. Чи правильно Дарина сформулювала означення: «Арифметичною прогресією називається послідовність, кожний член якої дорівнює попередньому члену, доданому з одним і тим самим числом»?

594'. Чи правильно, що для задання арифметичної прогресії достатньо знати:

- 1) два послідовні члени прогресії;
- 2) два перші члени прогресії?

595'. Чи правильно, що арифметична прогресія може мати:

- 1) скінченну кількість членів;
- 2) нескінченну кількість членів?

Наведіть приклади.

596'. Виберіть формулу для знаходження n -го члена арифметичної прогресії:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| 1) $a_n = a_1 + nd$; | 3) $a_n = a_1 + (n - 1)d$; |
| 2) $a_n = a_1 - nd$; | 4) $a_n = a_1 - (n - 1)d$. |

597'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і a_n :

- | | |
|--|--|
| 1) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{n} \cdot 2$; | 3) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{n - 1} \cdot n$; |
| 2) $S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$; | 4) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. |

598'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d :

- | | |
|---|--|
| 1) $S_n = \frac{2a_1 + nd}{2} \cdot n$; | 3) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{n} \cdot 2$; |
| 2) $S_n = \frac{a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$; | 4) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. |

599°. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

1) 3; 6; 9; 12; ...; 3) -12; 0; 12; 24; ...;

2) 4; 8; 16; 20; ...; 4) 50; 45; 40; 35; ...?

Для арифметичної прогресії назвіть її перший член і різницю.

600°. Запишіть перші п'ять членів арифметичної прогресії



(a_n) , якщо:

1) $a_1 = 5$ і $d = 8$;

2) $a_1 = 10$ і $d = -7$;

3) $a_1 = 0,2$ і $d = 5$;

4) $a_1 = 4,5$ і $d = -2$; 6) $a_1 = \frac{5}{7}$ і $d = -\frac{3}{14}$.

5) $a_1 = -1,5$ і $d = -0,4$;

qr.orioncentr.com.ua/fPxr3



601°. Запишіть перші п'ять членів арифметичної прогресії



(a_n) , якщо:

1) $a_1 = 12$ і $d = 8$;

3) $a_1 = 7,5$ і $d = -2,5$;

2) $a_1 = -5$ і $d = 15$;

4) $a_1 = \frac{5}{6}$ і $d = \frac{1}{12}$.

602°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія, перший член якої дорівнює a_1 , а різниця — d . Виразіть через a_1 і d :

1) a_{12} ;

3) a_{103} ;

5) a_k ;

2) a_{25} ;

4) a_{301} ;

6) a_{k+2} .

603°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія, перший член якої дорівнює a_1 , а різниця — d . Виразіть через a_1 і d :



1) a_{17} ;

2) a_{51} ;

3) a_{225} ;

4) a_{k-3} .

604°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть:

1) a_{11} , якщо $a_1 = 15$ і $d = 6$;

2) a_{36} , якщо $a_1 = -8$ і $d = 12$;

3) a_{51} , якщо $a_1 = 3,4$ і $d = 1,6$;

4) a_{101} , якщо $a_1 = -2,1$ і $d = -1,5$;

5) a_{25} , якщо $a_1 = -10$ і $d = \frac{2}{5}$;

6) a_{257} , якщо $a_1 = -5,4$ і $d = -\frac{3}{16}$.

605°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть:



- 1) a_{16} , якщо $a_1 = 9$ і $d = 22$;
- 2) a_{106} , якщо $a_1 = -24$ і $d = 8$;
- 3) a_{75} , якщо $a_1 = 12$ і $d = -0,5$;
- 4) a_{125} , якщо $a_1 = -20$ і $d = -\frac{5}{6}$.

606°. Знайдіть 48-й і n -й члени арифметичної прогресії:

- 1) (a_n) : 18; 27; ...;
- 2) (a_n) : 5, 4; 7; ...;
- 3) (a_n) : $-\frac{2}{15}$; $\frac{6}{15}$; ...;
- 4) (a_n) : -15, 2; -10, 1; ...;

607°. Знайдіть 31-й і n -й члени арифметичної прогресії:



- 1) (a_n) : -6; 12; ...;
- 2) (a_n) : 5; 2, 5; ...;

608°. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо:



- 1) $a_{16} = 5$ і $d = -3$;
- 2) $a_{29} = 490$ і $d = 18$;
- 3) $a_{13} = 1$ і $d = -\frac{1}{4}$;
- 4) $a_{43} = -10$ і $d = -0,2$.



qr.orioncentr.com.ua/L1pg9

609°. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо:



- 1) $a_{11} = 110$ і $d = -10$;
- 2) $a_{49} = 49$ і $d = -0,5$.

610°. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) $a_1 = 7$ і $a_{16} = 67$;
- 2) $a_1 = -4$ і $a_9 = 0$;
- 3) $a_2 = 0,5$ і $a_7 = 6,5$;
- 4) $a_6 = -10$ і $a_{31} = -20$.

611°. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:



- 1) $a_1 = 3$ і $a_{25} = 45$;
- 2) $a_5 = -14$ і $a_{17} = -9,2$.

612°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d , якщо:

- 1) $a_5 = 15$ і $a_7 = 27$;
- 2) $a_{11} = -15$ і $a_{13} = -7$;
- 3) $a_2 = -7$ і $a_7 = 18$;
- 4) $a_4 = 14$ і $a_9 = 1$.

613°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d , якщо:



- 1) $a_3 = 32$ і $a_5 = 44$;
- 2) $a_4 = -16$ і $a_7 = 8$.

614°. Знайдіть суму п'ятдесяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:



- 1) $a_1 = 20$ і $a_{50} = 200$;
2) $a_1 = -45,2$ і $a_{50} = -8,8$.



qr.orioncentr.com.ua/uunrg

615°. Знайдіть суму сорока перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 45$ і $a_{40} = -15$.

616°. Знайдіть суму вісімнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) (a_n) : 38; 35; 32; ...; 2) (a_n) : -16; -10; -4; ...

617°. Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо (a_n) : 10; 13; 16; ...



618. З'ясуйте, чи є членом арифметичної прогресії (a_n) : -20; -9; 2; ... число:
1) 101; 2) 144.

619. З'ясуйте, чи є членом арифметичної прогресії (a_n) : 44; 38; 32; ... число:



- 1) -22; 2) -42.

620. Скільки додатних членів має арифметична прогресія:

- 1) (a_n) : 4,4; 4,2; 4; ... ;
2) (a_n) : $20\frac{1}{4}$; $19\frac{3}{4}$; $19\frac{1}{4}$; ... ?

621. Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія:



- 1) (a_n) : -38; -36; -34; ... ; 2) (a_n) : -9; $-8\frac{1}{2}$; -8; ... ?

622. Між числами 12 і 36 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

623. Між числами -45 і 11 вставте сім таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

624. Між числами 2 і 42 вставте чотири такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.



625. Знайдіть перший член a_1 і різницю d арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

$$1) \begin{cases} a_1 + a_7 = 42, \\ a_{10} - a_3 = 21; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a_1 + a_6 = 10, \\ a_2 \cdot a_8 = -23. \end{cases}$$

626. Знайдіть перший член a_1 та різницю d арифметичної



прогресії (a_n) , якщо $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8, \\ a_2 \cdot a_7 = 75. \end{cases}$

627. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) $a_1 = 1; a_n = 20; n = 50;$
- 2) $a_1 = -1; a_n = -40; n = 20;$
- 3) $a_1 = 0,5; a_n = 25,5; n = 11;$
- 4) $a_1 = -38; a_n = -10; n = 15.$

628. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:



- 1) $a_1 = 0; a_n = 5; n = 11;$
- 2) $a_1 = -2; a_n = -60; n = 10.$

629. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) :

- 1) $(a_n): 9; 13; 17; \dots; n = 11;$
- 2) $(a_n): -3; 4; 11; \dots; n = 13;$
- 3) $(a_n): -9; -8,5; -8; \dots; n = 25;$
- 4) $(a_n): \frac{1}{3}; 1; 1\frac{2}{3}; \dots; n = 36.$

630. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) :



- 1) $(a_n): 5; 9; 13; \dots; n = 16;$ 2) $(a_n): \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; 1\frac{1}{6}; \dots; n = 31.$

631. Арифметичну прогресію



(a_n) задано формулою n -го члена. Знайдіть:

- 1) S_{20} , якщо $a_n = 4n + 5;$
- 2) S_{12} , якщо $a_n = -2,7n + 0,7.$

qr.orioncentr.com.ua/BtJdD



632. Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена. Знайдіть S_{25} , якщо $a_n = 12n - 2.$



633. Знайдіть суму:

- 1) усіх натуральних чисел, що не перевищують 200;
- 2) усіх парних чисел, що не перевищують 500;
- 3) усіх натуральних чисел від 15 до 150.

634. Знайдіть суму:



- 1) усіх натуральних чисел, що не перевищують 180;
- 2) усіх натуральних чисел від 20 до 120.

635. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d , якщо:

- 1) $a_7 = 21$ і $S_7 = 315$; 2) $a_{11} = 131$ і $S_{11} = 1221$.

636. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d , якщо $a_8 = -7$ і $S_8 = 28$.



637. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d , якщо:

- 1) $S_4 = 32$ і $S_6 = 60$; 2) $S_5 = 45$ і $S_{12} = -18$.

638. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d , якщо $S_5 = 65$ і $S_{10} = 380$.



639*. Сума чотирьох перших членів арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох наступних — 120. Знайдіть перший член і різницю цієї прогресії.

640*. Три числа утворюють арифметичну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 21, а сума їхніх квадратів дорівнює 197. Знайдіть два наступні члени цієї прогресії.

641*. Знайдіть суму:

- 1) усіх натуральних чисел, кратних числу 3, що не перевищують число 360;
- 2) усіх непарних чисел від 35 до 350.

642*. В арифметичній прогресії $a_2 + a_7 = 7$ і $a_6 + a_8 = 22$. Знайдіть $a_3 + a_7$.

643*. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2 + 6 + 10 + \dots + x = 288$;
- 2) $5 + 12 + 19 + \dots + y = 2225$;
- 3) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$;
- 4) $(y + 248) + (y + 243) + (y + 238) + \dots + (y + 3) = 6225$.

644*. Доведіть, що суми пар членів арифметичної прогресії рівні, якщо рівні суми їхніх номерів.

Проявіть компетентність

645. Дослідницька експедиція вивчає зміну температури повітря під час підйому в гори. Відомо, що на початку маршруту, біля підніжжя гори (на висоті 0 м), температура становила $+25^{\circ}\text{C}$. На кожні наступні 200 метрів підйому температура знижується на $1,2^{\circ}\text{C}$.

1. Задайте послідовність, що описує температуру повітря на кожних 200 м підйому.

2. Визначте, яка температура буде на висоті 1600 м над рівнем моря.

3. На якій висоті температура повітря опуститься до $+4,6^{\circ}\text{C}$?

646. Група учнів 9 класу вирішила підготуватися до щорічного змагання з програмування. Вони домовилися, що за перший день підготовки розв'яжуть 20 задач, а кожного наступного дня збільшуватимуть кількість розв'язаних задач на одне й те саме число. За 6-й день підготовки вони розв'язали 35 задач.

1. На скільки щоденно збільшувалася кількість розв'язаних учнями задач?

2. Скільки всього задач школярі розв'язали за перші 10 днів підготовки?

3. Скільки днів їм знадобиться, щоб розв'язати 440 задач?

§ 15. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

1. Поняття геометричної прогресії

Ви вже знаєте, що таке арифметична прогресія, умієте задавати її за допомогою першого члена й різниці, використовувате формули для знахо-



qr.orioncentr.com.ua/pvZBF

дження її елементів. Проте існує ще одна прогресія. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. Бактерії (*bacteria* від давньогрецького *βακτήριον* — паличка) є однією з основних груп живих організмів. Вони присутні у ґрунті, воді, повітрі та як симбіонти в інших організмах. У сприятливих умовах бактерії розмножуються так, що протягом визначеного часу кожна з них ділиться на дві (мал. 169).



Мал. 169

Для виконання проєкту з біології Дарина досліджує певний вид бактерій, кількість яких протягом однієї хвилини подвоюється. У чашку Петрі помістили 100 бактерій. Скільки бактерій стане в чашці через 5 хв?

Врахуємо, що протягом однієї хвилини кількість бактерій подвоюється. Тоді, якщо в чашку помістили 100 бактерій, то в ній стане:

$$100 \cdot 2 = 200 \text{ (бактерій)} \text{ — через 1 хв;}$$

$$200 \cdot 2 = 400 \text{ (бактерій)} \text{ — через 2 хв;}$$

$$400 \cdot 2 = 800 \text{ (бактерій)} \text{ — через 3 хв;}$$

$$800 \cdot 2 = 1600 \text{ (бактерій)} \text{ — через 4 хв;}$$

$$1600 \cdot 2 = 3200 \text{ (бактерій)} \text{ — через 5 хв.}$$

Одержимо послідовність чисел, яка показує кількість бактерій у чашці Петрі від початку дослідження до кінця п'ятої хвилини: 100, 200, 400, 800, 1600, 3200.

Кожний член цієї послідовності, починаючи з другого, одержується шляхом множення попереднього члена на 2. Така послідовність є прикладом *геометричної прогресії*, яка має скінченну кількість членів.

Послідовність можна продовжити:

$$100, 200, 400, 800, 1600, 3200, \text{6400, 12 800, ...}$$

Така послідовність є прикладом *нескінченної геометричної прогресії*.

Запам'ятайте!

Геометричною прогресією називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Тобто послідовність (b_n) — геометрична прогресія, якщо для будь-якого натурального числа n виконується умова:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

де q — деяке **відмінне від нуля** число, $b_1 \neq 0$.

З означення геометричної прогресії випливає, що відношення будь-якого її члена, починаючи з другого, до попереднього члена дорівнює q , тобто виконується рівність:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Число q називають *знаменником геометричної прогресії*. Наведемо приклади.

Якщо $b_1 = 1$, $b_2 = -8$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -8$.

Якщо $b_6 = 2,5$, $b_7 = 10$, то $q = \frac{b_7}{b_6} = \frac{10}{2,5} = 4$.



Як задати геометричну прогресію?

Достатньо задати її перший член і знаменник.



Наведемо приклади.

Якщо $b_1 = 1$, $q = 5$, то одержимо геометричну прогресію:

1, 5, 25, 125, ...

Якщо $b_1 = 2$, $q = -3$, то одержимо геометричну прогресію:

2, -6, 18, -54, ...

Якщо $b_1 = -10$, $q = -1$, то одержимо геометричну прогресію:

-10, 10, -10, 10, ...

2. Формула n -го члена геометричної прогресії

qr.orioncentr.com.ua/Rag93



За допомогою рівності $b_{n+1} = b_n \cdot q$ можна визначити будь-який член геометричної прогресії через попередній її член, проте, як і для арифметичної прогресії, можна застосовувати формулу n -го члена.

Виведемо формулу для знаходження будь-якого члена геометричної прогресії. За означенням геометричної прогресії:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 \cdot q; & b_4 &= b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3; \\ b_3 &= b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2; & b_5 &= b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4 \dots \end{aligned}$$

Простежується закономірність 1 (мал. 170): щоб знайти n -й член прогресії, потрібно перший її член $(n - 1)$ разів помножити на число q , тобто

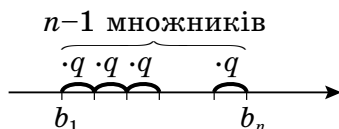
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Наприклад, $b_5 = b_1 \cdot q^4$, $b_8 = b_1 \cdot q^7$.

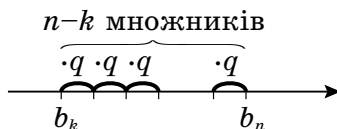
Також можна помітити ще й закономірність 2 (мал. 171): щоб знайти n -й член прогресії, можна k -й її член $(n - k)$ разів помножити на число q , тобто:

$$b_n = b_k \cdot q^{(n-k)}.$$

Наприклад, $b_{25} = b_5 \cdot q^{20}$, $b_8 = b_3 \cdot q^5$.



Мал. 170



Мал. 171

Запам'ятайте!

Формула n -го члена геометричної прогресії

Нехай (b_n) — геометрична прогресія зі знаменником q . Тоді формула n -го члена має вигляд:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формулу n -го члена геометричної прогресії використовують під час розв'язування задач.

Задача 1

Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, $b_1 = 27$, $q = \frac{1}{3}$. Знайдіть b_6 .

Розв'язання

Застосуємо формулу n -го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Задача 2

Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, $b_5 = 81$, $b_2 = 3$. Знайдіть знаменник геометричної прогресії.

Розв'язання

Запишемо закономірність 2: $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$:	$b_5 = b_2 \cdot q^3$.
Підставимо значення b_2 і b_5 з умови:	$81 = 3 \cdot q^3$.
Розв'яжемо отримане рівняння:	$q^3 = 27$;
	$q = 3$.

3. Властивість геометричної прогресії

qr.orioncentr.com.ua/ji7ZA



Свою назву геометрична прогресія одержала через властивість: якщо всі члени геометричної прогресії додатні, то будь-який її член, крім першого, є *середнім геометричним* попереднього та наступного членів, тобто:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \text{ де } n = 2, 3, \dots$$

Дану властивість можна узагальнити.

Запам'ятайте!**Властивість геометричної прогресії**

Квадрат члена геометричної прогресії є *добутком* попереднього та наступного її членів, тобто:

$$(b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n = 2, 3, \dots$$

Цю властивість використовують для розв'язування задач. Наприклад, b_3 можна знайти, знаючи його сусідів $b_2 = 1$ і $b_4 = \frac{1}{4}$, тобто:

$$(b_3)^2 = b_2 \cdot b_4, \quad (b_3)^2 = 1 \cdot \frac{1}{4},$$

$$b_3 = -\frac{1}{2} \text{ або } b_3 = \frac{1}{2}.$$

4. Формула суми n перших членів геометричної прогресії

qr.orioncentr.com.ua/GrVRh



Для геометричної прогресії, як і для арифметичної, є формули для знаходження суми n перших членів.

Запам'ятайте!

Формула суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ де } q \neq 1.$$

Виведення цієї формули можна розглянути, перейшовши за посиланням.

qr.orioncentr.com.ua/E25Yw



Задача 3 Послідовність (b_n) — геометрична

прогресія, $b_1 = 27$, $q = \frac{1}{3}$. Знайдіть S_5 .

Розв'язання

Застосуємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$:

$$S_5 = \frac{27 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{27 \cdot \left(\frac{1}{243} - 1 \right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot \left(-\frac{242}{243} \right)}{-\frac{2}{3}} = 40 \frac{1}{3}.$$

Дізнайтеся більше

1. Міхаель Штифель (близько 1487–1567) — німецький математик, який залишив помітний слід у розвитку алгебри. Його головна праця *Arithmetica integra* (Нюрнберг, 1544) містить розділ, у якому розглядаються прогресії та послідовності. У цій же книзі він уперше висловив ідею: зіставити геометричну й арифметичну прогресії. У подальшому розвиток цієї ідеї привів до розробки логарифмів, з якими ви ознайомитеся пізніше.



2. Для нескінченної геометричної прогресії (b_n) , у якій $|q| < 1$, можна знайти суму всіх її членів за формулою:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Наприклад, якщо $b_1 = 9$, $q = 0,5$, то суму всіх членів прогресії знаходять так:

$$S = \frac{9}{1-0,5} = \frac{9}{0,5} = 18.$$

3. За легендою, колись творець шахів — винахідник на ім'я Сета — показав свій винахід індійському цареві Шераму. Царю так сподобалася гра, що він надав винахіднику право самому вибирати винагороду.



Сета попросив царя видати йому за першу клітку шахівниці 1 зернину пшениці (за іншою версією — рису), за другу — 2 зернини, за третю — 4 зернини і т. д., подвоюючи кількість зернин на кожній наступній клітці. Цар, який не розбирався в математиці, швидко погодився, навіть дещо образившись на таку невисоку оцінку винаходу. Він наказав скарбнику підрахувати й видати винахідникові потрібну кількість зерна. Однак, коли через тиждень скарбник усе ще не зміг підрахувати, скільки потрібно зернин, він пояснив цареві причину такої затримки. За розрахунками, число зернин становить 18 446 744 073 709 551 615. Тому розплатитися неможливо, хіба тільки осушити моря й океани та засіяти весь простір пшеницею. В одиницях маси: якщо прийняти, що одне зернятко пшениці має масу 0,065 г, то загальна маса пшениці на шахівниці становитиме 1200 мільярдів тонн, або 1,2 трильйона тонн пшениці.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/KBLyM

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
геометрична прогресія	geometric progression	geometrische Folge	suite géométrique

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення геометричної прогресії. Наведіть приклади геометричної прогресії.
2. Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії.
3. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.
4. Запишіть формулу суми n перших членів геометричної прогресії.

Усне тренування

1. Обчисліть:

1) $\frac{2}{5} \cdot 0,6$;

3) $0,75 \cdot \frac{4}{9} \cdot 48$;

2) $1,25 \cdot 199 \cdot 0,8$;

4) $0,125 \cdot 77 \cdot 16$.

2. Обчисліть:

1) $8^3 : 16^2$; 2) $(1 - 0,5^3) \cdot 12$; 3) $\frac{1}{32} \cdot 2^7$; 4) $8^3 \cdot 2^{-10} \cdot 16$.

3. Три маляри з однаковою продуктивністю можуть пофарбувати дві альтанки за 6 год. За скільки годин можуть пофарбувати три альтанки два маляри?

4. Чотири однакові труби можуть наповнити басейн за 6 год. За скільки годин може наповнити басейн одна така труба? Яку частину басейну наповнять дві труби за 2 год?

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| = 10 - 4^2$; 2) $|x - 5| = 1$; 3) $7 + |-2x| = 1$; 4) $|3x - 5| = x$.

Розв'яжіть задачі

647'. Чи правильно Петро сформулював означення: «Геометричною прогресією називається послідовність, кожний член якої дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число»?

648'. Чи правильно, що для задання геометричної прогресії достатньо знати:

- 1) два послідовні члени прогресії;
- 2) два перші члени прогресії?

649'. Чи правильно, що геометрична прогресія може мати:

- 1) скінченну кількість членів;
- 2) нескінченну кількість членів?

Наведіть приклади.

650'. Виберіть формулу для знаходження n -го члена геометричної прогресії:

- 1) $b_n = b_1 \cdot q^{n+1}$; 2) $b_n = b_1 \cdot q^n$; 3) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; 4) $b_n = b_1 + q^{n-1}$.

651'. Яка з формул є правильною:

- 1) $(b_{n+1})^2 = b_{n-1} \cdot b_n$; 3) $(b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$;
- 2) $b_n = \sqrt{b_{n-1} + b_{n+1}}$; 4) $b_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$?

652'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q ($q \neq 1$):

- 1) $S_n = \frac{b_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$; 3) $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{1 - q}$;
- 2) $S_n = \frac{b_1(q^n - n)}{q - 1}$; 4) $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

653°. Чи є геометричною прогресією послідовність:

- 1) 3; 6; 12; ...; 3) -5; 5; -5; ...;
- 2) 4; -8; -16; ...; 4) 9; 27; 36; ...?

Для геометричної прогресії назвіть її перший член і знаменник.

654°. Чи є геометричною прогресією послідовність:

- 1) 4; 8; 12; ...; 2) -12; 12; -12; ...?

Для геометричної прогресії назвіть її перший член і знаменник.

655°. Запишіть перші чотири члени геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_1 = 5$ і $q = 2$; 4) $b_1 = -4$ і $q = 0,5$;
- 2) $b_1 = 10$ і $q = -3$; 5) $b_1 = 20$ і $q = \frac{1}{2}$;
- 3) $b_1 = -12$ і $q = -2$; 6) $b_1 = 3,6$ і $q = -\frac{1}{3}$.

656°. Запишіть перші п'ять членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:



1) $b_1 = 5$ і $q = 3$;

3) $b_1 = 2,5$ і $q = \frac{1}{5}$;

2) $b_1 = -10$ і $q = 2$;

4) $b_1 = 4,8$ і $q = -\frac{1}{2}$.

657°. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:



1) $b_3 = -\frac{2}{9}$, $b_2 = \frac{1}{18}$;

2) $b_{10} = \frac{14}{15}$, $b_9 = \frac{2}{3}$;

3) $b_{99} = 1,25$, $b_{100} = \frac{1}{4}$.



qr.orioncentr.com.ua/9sCYQ

658°. Знайдіть b_1 і q геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_n = 4 \cdot 3^{n+1}$;

2) $b_n = 4^{n+2}$.

659°. Знайдіть b_1 і q геометричної прогресії (b_n) , якщо:



1) $b_n = 5 \cdot 2^{n+2}$;

2) $b_n = 3^{n+3}$.

660°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, перший член якої дорівнює b_1 , а знаменник — q . Виразіть через b_1 і q :

1) b_8 ; 2) b_{12} ; 3) b_{52} ; 4) b_{200} ; 5) b_k ; 6) b_{k+2} .

661°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, перший член якої дорівнює b_1 , а знаменник — q . Виразіть через b_1 і q :

1) b_{15} ; 2) b_{26} ; 3) b_{11} ; 4) b_{k+1} .

662°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:



1) b_4 , якщо $b_1 = 3$ і $q = 10$;

2) b_7 , якщо $b_1 = -4$ і $q = \frac{1}{2}$;

3) b_5 , якщо $b_1 = 1$ і $q = -2$;

4) b_6 , якщо $b_1 = -3$ і $q = -\frac{1}{3}$;

5) b_9 , якщо $b_1 = -14$ і $q = -1$;

6) b_7 , якщо $b_1 = 27$ і $q = \sqrt{3}$.



qr.orioncentr.com.ua/xabNW

663°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:



- 1) b_4 , якщо $b_1 = 32$ і $q = \frac{1}{2}$; 3) b_5 , якщо $b_1 = 27$ і $q = -\frac{1}{3}$;
2) b_6 , якщо $b_1 = -24$ і $q = 2$; 4) b_9 , якщо $b_1 = -20$ і $q = 1$.

664°. Знайдіть 6-й і n -й члени геометричної прогресії:

- 1) (b_n) : 1; 3; ...; 3) (b_n) : $\frac{2}{7}$; -2; ...;
2) (b_n) : -5; 10; ...; 4) (b_n) : -16; -4; ...

665°. Знайдіть 5-й і n -й члени геометричної прогресії:



- 1) (b_n) : 6; 12; ...;
2) (b_n) : 44; -22; ...

666°. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_5 = 16$ і $q = -2$; 3) $b_{10} = 7$ і $q = 0,5$;
2) $b_7 = 1024$ і $q = 4$; 4) $b_6 = 3125$ і $q = -2\frac{1}{2}$.

667°. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо:



- 1) $b_5 = 20\,000$ і $q = -10$;
2) $b_6 = 0,32$ і $q = 0,2$.

668°. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_1 = 3$, $b_2 = -81$;
2) $b_1 = 80$, $b_5 = 5$.

669°. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_9 = 6$, $b_{12} = -48$; 2) $b_{16} = 64$, $b_{10} = 1$.

670°. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_7 = \frac{3}{5}$, $b_3 = 6000$; 2) $b_{21} = 216$, $b_{19} = 6$.

671°. Знайдіть восьмий член геометричної прогресії (b_n) , якщо:



- 1) $b_7 = 3$ і $b_9 = 27$;
2) $b_7 = -0,5$ і $b_9 = -8$.



qr.orioncentr.com.ua/Gh6eu

672°. Знайдіть десятий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_9 = -2$ і $b_{11} = -50$.



673°. Добуток другого та четвертого членів геометричної прогресії дорівнює 64. Визначте третій член цієї прогресії.

674°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо:

$$\begin{array}{ll} 1) b_3 = 16 \text{ і } b_5 = 256; & 3) b_2 = \frac{1}{2} \text{ і } b_4 = 16; \\ 2) b_4 = -2 \text{ і } b_6 = -18; & 4) b_3 = -27 \text{ і } b_5 = -1. \end{array}$$

675°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо:

$$1) b_2 = 6 \text{ і } b_4 = 54; \quad 2) b_4 = -3 \text{ і } b_6 = -81.$$

676°. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) b_1 = 5 \text{ і } b_6 = 160; \quad 2) b_1 = -0,6 \text{ і } b_5 = -48,6.$$

677°. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 1$ і $b_4 = -27$.

678°. Знайдіть суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) (b_n): 2; 6; 18; \dots; \quad 2) (b_n): -16; 8; -4; \dots$$

679°. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії, якщо $(b_n): -2; 4; -8; \dots$



680. З'ясуйте, чи є членом геометричної прогресії (b_n) : 150; 30; 6; ... число: 1) 1,2; 2) $\frac{4}{25}$.

681. З'ясуйте, чи є членом геометричної прогресії (b_n) : 3; 21; 147; ... число: 1) 1029; 2) 7200.

682. Знайдіть b_{10} геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) q = -0,2 \text{ і } b_{13} = -5; \quad 2) q = \frac{1}{3} \text{ і } b_{15} = \frac{1}{3}.$$

683. Знайдіть b_8 геометричної прогресії (b_n) , якщо:



$$1) q = -0,1 \text{ і } b_{11} = -9; \quad 2) q = \frac{2}{7} \text{ і } b_6 = 49.$$

684. Знайдіть номер члена геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$\begin{array}{l} 1) b_1 = 1, q = 2 \text{ і } b_n = 256; \\ 2) b_1 = 300, q = -0,1 \text{ і } b_n = 0,03. \end{array}$$

685. Знайдіть номер члена геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 20$, $q = 0,2$ і $b_n = 0,16$.

686. Між числами 9 і 243 вставте два такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.

687. Між числами 160 і 10 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.

688. Між числами 2 і 512 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.



689. Знайдіть чотири перші члени геометричної прогресії, якщо сума крайніх із цих членів дорівнює 27, а сума середніх — 18.

690. За якого значення x числа x , $-x - 10$ і $9x$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?



qr.orioncentr.com.ua/zW8mX

691. За якого значення x числа $2x + 3$, x і $x - 2$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?

692. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії, у якій перші три члени дорівнюють: $x + 1$, $3x - 2$ і $x - 0,5$.

693. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії, у якій перші три члени дорівнюють: $x + 8$, $3x + 14$ і $10x + 20$.



694. Знайдіть перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії (b_n) , якщо:



$$1) \begin{cases} b_7 - b_5 = 48, \\ b_5 + b_6 = 48; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} b_2 \cdot b_3 = -72, \\ b_1 \cdot b_2 = -18. \end{cases}$$



qr.orioncentr.com.ua/3fvnY

695. Знайдіть перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії (b_n) , якщо
$$\begin{cases} b_2 \cdot b_6 = 4, \\ b_1 \cdot b_4 = 32. \end{cases}$$



696. У геометричній прогресії (b_n) $b_3 \cdot b_5 = 72$. Знайдіть $b_1 \cdot b_7$.

697. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії:

1) (b_n) : 9; 18; 36;..., якщо $n = 8$;

2) (b_n) : 5; -10; 20;..., якщо $n = 7$;

3) (b_n) : $-\frac{2}{3}$; 2; -6; якщо $n = 4$;

4) (b_n) : $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$;..., якщо $n = 5$.

qr.orioncentr.com.ua/GhciT



698. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії:

1) (b_n) : 2; 6; 18;..., якщо $n = 5$;

2) (b_n) : 64; -32; 16;..., якщо $n = 6$.

699. Знайдіть суму шести членів геометричної прогресії (b_n) , починаючи з десятого, якщо:

1) $b_{14} \cdot b_{12} = 625$ і $b_{11} \cdot b_{13} = 25$;

2) $b_{10} \cdot b_{12} \cdot b_{14} = 27$ і $b_{12} + b_{13} = 9$.

700. Геометричну прогресію (b_n) задано формулою n -го члена. Знайдіть: 1) S_8 , якщо $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) S_5 , якщо $b_n = 5^{n-2}$.

701. Геометричну прогресію (b_n) задано формулою n -го члена. Знайдіть S_6 , якщо $b_n = -3 \cdot 2^{n+1}$.

702. Знайдіть суму:

1) $1 + 2 + 4 + \dots + 1024$; 2) $5 - 15 + 45 - \dots + 405$.

703. Знайдіть суму:

1) $1 - 2 + 4 - \dots + 256$; 2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512}$.

704. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо: 1) $b_3 = 20$ і $S_3 = 35$; 2) $b_3 = -44$ і $S_3 = -209$.

705. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо $b_3 = 45$ і $S_3 = 55,8$.

706. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо: 1) $S_3 = 7$ і $S_6 = 882$; 2) $S_4 = 30$ і $S_8 = 510$.

707. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо $S_3 = 28$ і $S_6 = 252$.

708. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_n = 2 \cdot 0,5^{n+1}$; 2) $b_n = 3^{n+2}$.

709. Знайдіть суму перших чотирьох членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_n = 2^{n+1}$.

710. $S_n = 2 \cdot 0,5^n$ — формула



суми перших n членів геометричної прогресії. Знайдіть:

- 1) перший член прогресії;
- 2) суму перших чотирьох членів прогресії;
- 3) четвертий член прогресії;
- 4) знаменник прогресії.

qr.orioncentr.com.ua/7hvt4



711. $S_n = 2^n$ — формула суми перших n членів геометричної прогресії. Знайдіть:

- 1) суму перших п'яти членів прогресії;
- 2) п'ятий член прогресії;
- 3) знаменник прогресії.

712*. Доведіть, що для будь-яких натуральних m і n ($m < n$) геометричної прогресії (b_n) , усі члени якої — додатні числа, виконується рівність: $b_{n-m} \cdot b_{m+n} = (b_n)^2$.

713*. Дано геометричну прогресію (b_n) . Знайдіть m , якщо $b_{31} \cdot b_{52} = b_m \cdot b_7$.

714*. Три числа утворюють геометричну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 63, а сума їхніх квадратів дорівнює 1701. Знайдіть два наступні члени цієї прогресії.

715*. Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 14, а сума їхніх квадратів дорівнює 84. Знайдіть три наступні члени цієї прогресії.

716*. Знайдіть чотири додатні числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три — геометричну прогресію, якщо сума перших трьох чисел дорівнює 12, а сума останніх трьох дорівнює 19.

717*. Сума трьох додатних чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 15. Якщо до цих чисел відповідно додати 1, 4 і 19, то нові три числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

718*. Розв'яжіть рівняння, за умови, що $|x| < 1$:

1) $x + x^2 + x^3 + \dots = 10$; 2) $x^2 + x^4 + x^6 + \dots = 4$.

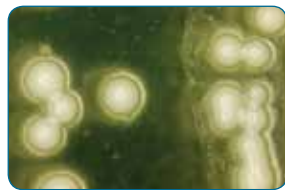
Проявіть компетентність

719. Компанія «Перспектива» у 2012 році почала інвестувати свої кошти в будівництво на території міста дитячих спортивних майданчиків, маючи капітал 50 000 грн. Кожного року, починаючи з 2013 року, компанія одержувала прибуток, що становив 20 % капіталу попереднього року. У 2014 році «Перспектива» розширила свої інвестиції та вклала 100 000 грн у створення велотреку за містом. Починаючи з 2015 року, прибуток за цією інвестицією становив 40 % попереднього капіталу.

1. Який прибуток одержала компанія за першу інвестицію на кінець 2017 року, якщо прибуток з обороту не вилучали?

2. Яка з інвестицій була більш прибутковою?

720. Дріжджі належать до групи одноклітинних грибів, що об'єднує близько 1500 видів. Деякі з їхніх видів використовують у домашньому господарстві або промисловості, наприклад для приготування хліба чи напоїв. Збільшення кількості дріжджових клітин відбувається завдяки поділу кожної клітини на дві частини.



1. У чашку Петрі помістили одну дріжджову клітину. Скільки клітин буде міститися в чашці після їх п'ятикратного поділу?

2. Скільки дріжджових клітин буде в чашці Петрі після їх десятикратного поділу, якщо спочатку було 6 клітин?

3. Скільки дріжджових клітин було в чашці Петрі спочатку, якщо після шестикратного поділу їх стало 320?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке числова послідовність? Наведіть приклади.
2. Як позначають числову послідовність?
3. Як називають a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_n ?
4. Як задають числову послідовність?
5. Як задати послідовність за допомогою формули n -го члена?
6. Як задати послідовність за допомогою рекурентної формули?
7. Сформулюйте означення арифметичної прогресії. Наведіть приклади.
8. Запишіть формулу n -го члена арифметичної прогресії.
9. Сформулюйте властивість арифметичної прогресії.
10. Запишіть формулу суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і a_n ; через a_1 і d .
11. Сформулюйте означення геометричної прогресії. Наведіть приклади.
12. Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії.
13. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.
14. Запишіть формулу суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q .

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1°. Знайдіть п'ятий член послідовності $x_n = 2n^2 - 1$.
 А. 51. Б. 49. В. 11. Г. 9.
- 2°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_{16} , якщо $a_1 = 8$ і $d = -5$.
 А. 88. Б. -72. В. 67. Г. -67.
- 3°. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_6 = 96$ і $q = -2$.
 А. -4. Б. -3. В. 4. Г. 3.
4. Знайдіть суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n) : 5; 12; 19; ...
 А. 432. Б. 216. В. 244. Г. 236.
- 5*. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть S_5 , якщо $b_3 = -12$ і $b_6 = 96$.
 А. 63. Б. -33. В. 33. Г. 15.



Розділ 5. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

У розділі дізнаєтесь:

- чим відрізняються складні відсотки від простих;
- як обчислювати складні відсотки;
- про комбінаторику та її основні задачі;
- як знаходити кількість варіантів комбінування деяких об'єктів;
- що таке випадкова подія, її частота та ймовірність;
- як обчислити частоту та ймовірність випадкової події;
- що вивчає статистика;
- про способи подання статистичних даних;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці

§ 16. ВІДСТОКОВІ РОЗРАХУНКИ

Ситуація. Уявіть, що ви працюєте в банку і пропонуєте клієнтові оформити депозит. Клієнт вкладає 20 000 грн під 10 % річних на 2 роки за умови, що відсотки капіталізуються, тобто нараховані за відсотковою ставкою гроші додаються автоматично до грошей основного депозиту.



qr.orioncentr.com.ua/xKCGY



Скільки грошей матиме на рахунок клієнт через рік?

22 000 грн.



Справді, $10\% = 0,1$, тому клієнт отримає $20\,000 \cdot 0,1 = 2\,000$ (грн) відсоткових грошей, а сума на рахунок дорівнюватиме 22 000 грн.



Скільки грошей матиме на рахунок вкладник через 2 роки?

24 200 грн.



Через рік банк нараховує 10 % вже на нову суму: 22 000 грн. Тому через 2 роки сума на рахунок становитиме $22\,000 + 0,1 \cdot 22\,000 = 22\,000 \cdot (1 + 0,1) = 24\,200$ (грн).

Тут ми маємо справу зі *складними відсотками*, оскільки в кінці 2-го року відсотки нараховуються не на початкову суму вкладу, а вже на нову суму, яка містить попередньо нараховані відсотки. У банківській справі такий процес називають *капіталізацією відсотків*.

За *простих відсотків* (без капіталізації) відсоткові гроші кожного разу нараховують тільки на початкову суму.



Як швидко обчислити суму, що буде на рахунку через 5 років?

За формулою складних відсотків.



Нехай A_0 — початкова сума вкладу, $p\%$ — річна відсоткова ставка, тоді через рік банк нарахує $A_0 \frac{p}{100}$ відсоткових грошей,

а сума вкладу дорівнюватиме $A_0 + A_0 \frac{p}{100} = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Ще через рік банк ще нарахує $A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100}$ відсоткових грошей,

а сума вкладу дорівнюватиме $A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) +$

$$+ A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \frac{p}{100} = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Міркуючи аналогічно, дійдемо висновку, що через n років сума вкладу дорівнюватиме $A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Запам'ятайте!

Формула розрахунку складних відсотків

$$A = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

де A — сума вкладу в кінці n -го року, A_0 — початкова сума вкладу, p — річна відсоткова ставка, n — термін вкладу в роках.

Тому через 5 років на рахунку буде:

$$20000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 32210,2 \text{ (грн)}.$$

Задача 1 Денис на електросамокаті рухається міською дорогою з певною швидкістю. Потрапивши на бруківку, він зменшує швидкість на 20 %, а на ділянці підйому — ще на 30 %. На скільки відсотків швидкість на ділянці підйому менша від початкової?

Розв'язання

Нехай початкова швидкість електросамоката — v_0 .

Знайдемо швидкість самоката на бруківці:

$$v_0 - v_0 \cdot \frac{20}{100} = v_0 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = v_0 \cdot 0,8.$$

Знайдемо швидкість самоката на ділянці підйому:

$$\begin{aligned} v_0 \cdot 0,8 \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) &= v_0 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = \\ &= 0,56 \cdot v_0. \end{aligned}$$

Знайдемо, на скільки відсотків зменшилася швидкість самоката:

$$\begin{aligned} v_0 - v_0 \cdot 0,56 &= 0,44 \cdot v_0. \\ \text{Отже, нова швидкість менша від} \\ \text{початкової на } 44 \%. \end{aligned}$$

Задача 2 Вкладник поклав у банк 16 000 грн на два різні рахунки. На перший рахунок банк нараховує 10 % річних, а на другий — 8 % річних. Через рік клієнт отримав 1400 грн відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?

Розв'язання

Нехай вкладник на перший рахунок поклав x грн, тоді на другий рахунок він поклав $(16\,000 - x)$ грн. Через рік сума на першому рахунку становитиме $1,1 \cdot x$ грн, а на другому — $1,08 \cdot (16\,000 - x)$ грн. Разом з грошима, нарахованими за відсотками, сума на двох рахунках становитиме $16\,000 + 1400 = 17\,400$ (грн). Маємо рівняння:

$$1,1x + 1,08 \cdot (16\,000 - x) = 17\,400,$$

$$1,1x + 17\,280 - 1,08x = 17\,400,$$

$$0,02x = 120,$$

$$x = 120 : 0,02,$$

$$x = 6000.$$

Отже, на перший рахунок вкладник поклав 6000 грн, а на другий — 10 000 грн.

Задача 3 Два роки тому клієнт поклав гроші на банківський депозит під 7 % річних. Сьогодні його вклад становить 11 449 грн. Визначте, який був початковий розмір вкладу та які виплати отримав клієнт за відсотками за цей час.

Розв'язання

За умовою задачі $A = 11\,449$ грн, $n = 2$, $p = 7$. Нехай $A_0 = x$, тоді за формулою складних відсотків отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned}x \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^2 &= 11\,449, \\x \cdot 1,07^2 &= 11\,449, \\x \cdot 1,1449 &= 11\,449, \\x &= 10\,000.\end{aligned}$$

Отже, початковий вклад становив 10 000 грн.

За відсотками клієнт отримав: $11\,449 - 10\,000 = 1449$ (грн).

Дізнайтеся більше

Формула складних відсотків має довгу й цікаву історію (табл. 42).

Таблиця 42

Давні часи	Вавилонські клинописні таблички містять записи про позики зерна та срібла з відсотками. Складних відсотків ще не знали, але розуміли принцип «гроші роблять гроші».
Середньовіччя (V–XV ст.)	У Європі стягувати відсотки було заборонено церквою (вважалося лихварством). Проте купці та торговці неофіційно користувалися ідеями, подібними до складних відсотків.
XVII ст.	У 1613 р. англійський математик Річард Бітт у книзі <i>Arithmetical Questions</i> вперше докладно описав розрахунок складних відсотків.
XX ст.	Альберт Ейнштейн (за легендою) назвав складні відсотки «восьмим чудом світу». Складні відсотки стають основою для економіки.
XXI ст.	Складні відсотки пояснюють не тільки зростання грошей, а й ріст населення, поширення вірусів, популярність у соцмережах.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/aglHW

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
складні відсотки	compound interest	Zinseszins, m	intérêts composés

Пригадайте головне

1. Як знайти відсоток числа?
2. Чим відрізняються прості відсотки від складних?
3. Що означає капіталізація відсотків?
4. Яка формула розрахунку складних відсотків?

Усне тренування

1. Обчисліть :

12 % числа 60; 15 % числа $\frac{7}{15}$;

4 % числа 1200; 120 % числа 40.

2. Обчисліть $0,2^2 - 1,2^2$; $(1 - 0,02)^2$; $(1 + 0,05)^2$; $(1 + 0,25)^3$.

Розв'яжіть задачі

- 721'.** Що означає «7 % річних»?
- 722'.** Визначте, який варіант оформлення депозиту на рік вигідніший:
1) нарахування 11 % річних із капіталізацією;
2) нарахування 11 % річних без капіталізації?
- 723'.** Визначте, який варіант оформлення депозиту на 2 роки вигідніший: 1) нарахування 8 % річних із капіталізацією; 2) нарахування 8 % річних без капіталізації?
- 724°.** Якщо на вклад 2000 грн нараховують 5 % річних, то який прибуток буде через рік?
- 725°.** Спортивний костюм коштував 900 грн. Скільки гривень буде коштувати костюм після зниження ціни на 15 %?

726°. Іграшка коштує 650 грн. Скільки гривень буде коштувати іграшка після зниження ціни на 6 % ?

727°. Банк щороку нараховує на вклад 8 % . Через рік вкладник отримав 5940 грн. Яка була сума вкладу?

728°. Фірма «Веселка» платить рекламним агентам 5 % вартості замовлення. На яку суму потрібно оформити замовлення, щоб заробити 2000 грн?

729°. Будівельна компанія здійснювала утеплення фасаду будинку вартістю 600 грн за 1 м². Після модернізації обладнання собівартість робіт зросла на 10 % . Але потім компанія отримала державну знижку 10 % . Скільки гривень тепер коштує утеплення фасаду будинку?

730°. Михайло збирав гроші на нові навушники, що коштували 1200 грн. На сайті магазину було зазначено, що набір опцій цієї моделі було розширено, тому ціна підвищилася на 20 % . Але магазин влаштував ярмарок і тому на всі моделі діє знижка 20 % . Скільки гривень коштуватимуть навушники на ярмарку?



731°. Вкладник поклав до банку 5000 грн під 10 % річних.



qr.orioncentr.com.ua/1aQXF



1. Яка сума буде на його рахунку через рік? Через 2 роки? Через 5 років?
2. Скільки відсоткових грошей матиме вкладник через рік? Через 2 роки? Через 5 років?

732°. Вкладник відкрив депозитний рахунок на 2000 грн під 8 % річних.



1. Яку суму отримає вкладник через рік? Через 3 роки?
2. Скільки відсоткових грошей нарахує банк за рік? За 3 роки?

733°. Студент із Полтави вирішив зробити внесок у фонд відбудови українських міст. Він поклав 10 000 грн на спеціальний рахунок під 11 % річних, щоб через кілька років ці кошти витратити на розвиток міста.

1. Якою стане сума внеску через 3 роки, якщо відсотки щороку додаються до основного капіталу?
2. Яку частину від загальної суми складатиме прибуток?

3. Як можна використовувати такі фінансові інструменти для підтримки економіки України?

734°. Марійка зі Львівщини вирішила підтримати українське військо й відкрила спеціальний депозит «Захисникам України». Вона внесла 12 000 грн під 12 % річних зі складними відсотками.



1. Якою стане сума внеску через 2 роки?

2. Яку суму прибутку отримає Марійка?

3. Чому важливо, щоб громадяни зробили внески у програми, що допомагають зміцнити незалежність і безпеку України?

735. Огірки містять 99 % води. У магазин завезли 1960 кг свіжих огірків, але в результаті неправильного зберігання вміст води в огірках знизився до 98 %. Скільки кілограмів огірків опинилось на прилавках?

736. Скільки літрів води потрібно додати до 12 л оцтової есенції (суміш оцту і води) із вмістом оцту 80 % для приготування столового оцту із вмістом води 94 %?



737. Під час підвищення кваліфікації зарплата фахівця з ІТ зросла на 20 %. Але під час кризи на ринку праці його зарплата знизилася на 50 % і стала становити 24 000 гривень. Якою була його зарплата до підвищення кваліфікації?

738. Магазин побутової техніки збільшив ціну холодильника на 10 % після додавання функції «розумне керування». На сезонному розпродажі ціна знизилася на 30 % і стала дорівнювати 14 630 грн. Якою була початкова ціна холодильника?



739. Електромобіль рухався автострадою з певною швидкістю. У населеному пункті він зменшив швидкість на 20 %, а на гірському серпантині — ще на 40 %. На скільки відсотків зменшилась його швидкість порівняно з початковою?

740. Дрон летів з певною швидкістю. Потрапивши в зону слабого зустрічного вітру, він зменшив швидкість на 10 %, а в зоні сильного вітру — ще на 30 %. На скільки відсотків його швидкість стала меншою за початкову?

741. Письменник отримав гонорар 130 000 грн і вирішив покласти ці гроші в



qr.orioncentr.com.ua/y9jEr



банк. Щоб зменшити ризик, він поділив усю суму на дві частини й поклав їх у два банки: у перший — під 8 % річних, а в другий — під 9 % річних. Через рік перший вклад приніс дохід, удвічі більший, ніж другий. Яку суму поклав письменник у кожний банк?

742. Дві картини загальною вартістю 30 000 грн продали на аукціоні з прибутком 40 %, причому від продажу однієї картини було отримано 25 % прибутку, а від продажу іншої — 50 %. Знайдіть вартість кожної картини.



743. Будівельна компанія інвестувала у великий проєкт 500 000 грн. Інвестиції зростають на 1,5 % щомісяця завдяки інвестиційній програмі. Обчисли за допомогою калькулятора, якою буде сума інвестицій через 5 років. Чим вигідні складні відсотки для довготривалих будівельних проєктів?

744. Населення міста Netvis у 2020 році становило 250 тис. осіб. Завдяки комфортним умовам життя кількість жителів у ньому щороку зростає на 3,2 %. Яким буде населення міста у 2030 році, якщо така тенденція збережеться? Для обчислень використайте калькулятор.

745. Вкладник поклав у банк 20 000 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк, якщо через два роки на рахунок виявилось 24 200 грн?

746. Населення міста за два роки зменшилося із 40 000 осіб до 37 636 осіб. Знайдіть середній щорічний відсоток зменшення населення в цьому місті.

747. Підприємство двічі за рік збільшувало випуск продукції на одне й те саме число відсотків. На скільки відсотків відбувалося збільшення випуску продукції кожного разу, якщо на початку року підприємство випускало 600 виробів, а в кінці року стало випускати 726 виробів?



- 748.** Ціну на комп'ютерну техніку підвищили на 44 %. Після цього в результаті двох послідовних знижень ціни на одне й те саме число відсотків ціна на комп'ютерну техніку стала на 19 % меншою від початкової. На скільки відсотків відбувалося зниження ціни кожного разу?
- 749.** Десять днів онлайн-магазин проводить акцію на ігрові ноутбуки: щодня ціна знижується на 8 %. На початку акції ноутбук коштував 25 000 грн.
1. Скільки гривень буде коштувати ноутбук через два дні акції?
 2. Іван має 15 000 грн. Через скільки днів він зможе купити ноутбук?
 3. Через скільки днів ціна ноутбука впаде більш ніж на 40 % від початкової?
- 750*.** Число 50 тричі збільшили на одне й те саме число відсотків, а потім зменшили на те саме число відсотків. У результаті отримали число 69,12. На скільки відсотків збільшували, а потім зменшували це число?
- 751*.** Банк нараховує 7 % річних. Знайдіть найменшу кількість років, протягом яких вклад зросте більш ніж на 20 %.

Проявіть компетентність

- 752.** Створіть групу з ваших однокласників і однокласниць та виберіть одну із запропонованих тем для опрацювання:
1. «Банківський вклад» (порівняння простих і складних відсотків).
 2. «Мрія» (накопичення на подорож або цінну річ).
 3. «Демографія» (як зростає чи зменшується кількість населення щороку).
 4. «Віруси» (як поширюється інфекція).
- Складіть 2–3 задачі з обраної теми, які потрібно розв'язувати з використанням формули складних відсотків. Розв'яжіть їх і презентуйте на уроці. Спробуйте мислити як економіст, підприємець чи науковець.

§ 17. ОСНОВНІ ПРАВИЛА КОМБІНАТОРИКИ

1. Правила додавання і множення

Ситуація. Іринка зайшла до кав'ярні після школи. Вона вирішила купити або десерт, або смузі, або обидва продукти. У кав'ярні десерт був п'яти видів, а смузі — трьох видів. Скількома способами Іринка може вибрати або один десерт, або один смузі? А обидва продукти?



qr.orioncentr.com.ua/KkVFU



Яке правило комбінаторики потрібно застосувати в кожному випадку?

Пригадаймо.



У кав'ярні є 5 видів десертів і 3 види смузі. Скількома способами можна вибрати:

один продукт:
або десерт, або смузі?

або, або

Правило додавання

$$5 + 3 = 8$$

два продукти:
і десерт, і смузі?

і, і

Правило множення

$$5 \cdot 3 = 15$$

Запам'ятайте!

Правило додавання

Якщо деякий елемент *A* можна вибрати з даної сукупності елементів *n* способами, а елемент *B* можна вибрати *m* способами, то вибрати **або** елемент *A*, **або** елемент *B* можна ***n + m*** способами.



Яке правило потрібно застосувати для вибору десерту зі смузі?

Пригадаймо.



Запам'ятайте!**Правило множення**

Якщо деякий елемент A можна вибрати з даної сукупності елементів n способами й після кожного такого вибору елемент B можна вибрати m способами, то вибрати i елемент A , i елемент B у вказаному порядку можна $n \cdot m$ способами.



Чи можна правило додавання та множення застосувати до більшої кількості елементів?



Так.



Якщо елементи $A_1, A_2, \dots, A_m$ можна вибрати з даної сукупності відповідно $n_1, n_2, \dots, n_m$ способами, то вибрати:

- **або** елемент $A_1, \dots$, **або** елемент A_m можна $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ способами;
- **набір елементів** $(A_1; \dots; A_m)$ можна вибрати $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ способами.



Множини елементів $A_1, A_2, \dots, A_m$ **не перетинаються**.

Задача 1

Скільки існує двоцифрових чисел, у яких перша цифра — непарна, а друга — менша від числа 6?

Розв'язання

Першою цифрою шуканого числа може бути будь-яка з п'яти непарних цифр. Незалежно від вибору цієї цифри другою цифрою шуканого числа може бути будь-яка з шести цифр від 0 до 5. Отже, за правилом множення, існує $5 \cdot 6 = 30$ двоцифрових чисел, що задовольняють умову.

Задача 2

Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 за умов, що цифри в числі є різними і непарні цифри стоять поруч?

Розв'язання

Умовно об'єднаємо цифри 3 і 5. Далі складемо число, що містить цифри 2, 4, 6 і пару (3; 5) — чотири елементи. Тоді, за правилом добутку, таких чисел маємо:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Врахуємо, що цифри 3 і 5 можна поміняти місцями між собою. Тоді чисел, що містять цифри 2, 4, 6 і пару (5; 3), також 24. Отже, загалом чисел $24 + 24 = 48$.

2. Факторіал



qr.orioncentr.com.ua/d0b5b

Задача 3 Скількома способами можна скласти у школі розклад уроків на один день із семи різних навчальних предметів?

Розв'язання На перший урок можна поставити один із семи навчальних предметів, на другий — один із шести предметів, на третій — один із п'яти і т. д.

Отже, маємо $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ способів, щоб скласти розклад.



У математиці добуток усіх натуральних чисел від числа 1 до числа n включно позначають $n!$ і називають *факторіалом* натурального числа n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Наприклад:

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2,$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7.$$



Зверніть увагу:

- приймають, що $0! = 1$;
- факторіал є визначеним тільки для цілих невід'ємних чисел;
- загальна кількість *перестановок* з n різних елементів (тобто способів комбінування, які складаються з n різних елементів і відрізняються лише порядком розміщення цих елементів) дорівнює $n!$

Задача 4 Скільки семицифрових чисел, що діляться на 25, можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8?

Розв'язання Якщо число ділиться на 25, то двома останніми цифрами в нашому випадку можуть бути лише 2 і 5. Таким чином, дві останні цифри визначаються єдиним способом. А перші п'ять цифр ми утворюємо із цифр, що

залишилися: 1, 3, 4, 6, 8. Вони різні і їх п'ять. Тому різних перестановок із п'яти цифр можна утворити $5! = 120$. Тож за поданою умовою можна утворити 120 семицифрових чисел.

3. Розв'язування комбінаторних задач

qr.orioncentr.com.ua/t9iyB



Чи є інші методи розв'язування комбінаторних задач?

Так.



Якщо кількість шуканих способів комбінування об'єктів невелика, то їх можна виписати методом перебору. Щоб перебрати всі шукані способи й не загубити якийсь із них, варто записувати проміжні результати в *таблиці* або можна створити *дерево можливих варіантів*.

Задача 5 Бібліотекар для створення кодів читацьких квитків вибрала букви А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, І, К. Код складається із двох букв: на першому місці стоїть голосна, а на другому — приголосна. Скільки різних кодів можна скласти за поданою умовою?

Чи вистачить цих кодів для кодування читацьких квитків для 30 учнів?

Розв'язання

Спосіб 1. Переберемо всі можливі варіанти комбінування за допомогою таблиці (табл. 43).

Таблиця 43

	Б	В	Г	Д	Ж	З	К
А	АБ	АВ	АГ	АД	АЖ	АЗ	АК
Е	ЕБ	ЕВ	ЕГ	ЕД	ЕЖ	ЕЗ	ЕК
І	ІБ	ІВ	ІГ	ІД	ІЖ	ІЗ	ІК

Із таблиці видно, що загалом склали 21 код. Тому для кодування 30 читацьких квитків цих кодів не вистачить.

Спосіб 2. Застосуємо правило множення.

Першою літерою шуканого коду може бути одна із трьох голосних літер, а другою літерою — одна із семи приголосних літер. Отже, маємо $3 \cdot 7 = 21$ (код).

Задача 6 Скільки існує шестицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

Розв'язання Замість того щоб рахувати кількість заданих шестицифрових чисел, визначимо кількість шестицифрових чисел, які не містять парних цифр. Непарних цифр — п'ять: 1, 3, 5, 7, 9. Оскільки цифри в числі можуть повторюватись, то кожен цифру можна вибрати одним із п'яти способів.

Загальна кількість шестицифрових чисел із непарними цифрами дорівнює:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625.$$

Загалом існує $9 \cdot 10^5 = 900\,000$ шестицифрових чисел.

Тому кількість шуканих чисел дорівнює:

$$900\,000 - 15\,625 = 884\,375.$$

Дізнайтеся більше

Кодування — це практичний спосіб застосування комбінаторики. Ще в часи визвольної боротьби (1917–1921) українські дипломати й військові в документах УНР використовували комбінаторні таблиці замість — кожній літері відповідає певна комбінація символів. Відомий український математик **Михайло Пилипович Кравчук** (1892–1942) розробляв методи, які сьогодні застосовуються в кодуванні та захисті інформації, у теорії імовірності, у цифровій обробці сигналів. Учні Кравчука працювали над створенням перших комп'ютерів у США, а його формули й сьогодні використовують у криптографії та ІТ.



Коли ви сьогодні рахуєте кількість способів скласти код із цифр, ви фактично йдете шляхом, який почав український учений понад 100 років тому.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/ZrMer

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
факторіал	factorial	Fakultät, f	factorielle

Пригадайте головне

1. Поясніть, які задачі називають комбінаторними.
2. Сформулюйте правило додавання для комбінаторних задач.
3. Сформулюйте правило множення для комбінаторних задач.
4. Що називають факторіалом натурального числа?

Усне тренування

1. Порівняйте числа:

$$5 \text{ і } \sqrt{28}; \quad 6 \text{ і } 2\sqrt{7}; \quad 3\sqrt{5} \text{ і } 5\sqrt{3}; \quad \sqrt{7} \text{ і } 2 + \sqrt{5}.$$

2. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a+ab}{a}; \quad 2) \frac{n^2-4}{n-2}; \quad 3) \frac{2b+6}{b^2-9}; \quad 4) \frac{x+5}{x^2+10x+25}.$$

3. Обчисліть:

$$1) \frac{9}{10} + 0,2; \quad 2) \left(\frac{1}{4} - 0,2 \right) \cdot 4; \quad 3) \left(0,75 + \frac{1}{8} \right) : 7.$$

Розв'яжіть задачі

- 753'.** Для якого правила комбінаторики справедливе твердження: «Якщо елемент a можна вибрати n способами, а елемент b — m способами, то елемент a або b можна вибрати $(m + n)$ способами»?
- 754'.** Чи правильно сформульовано правило множення для комбінаторних задач: «Якщо елемент a можна вибрати n способами, а елемент b — m способами, то пару $(a; b)$ можна вибрати $(m \cdot n)$ способами»? Якщо ні, то що потрібно зазначити?
- 755'.** Скількома способами з літер слова **МОВА** можна вибрати одну літеру?
- 756'.** У класі 10 хлопців і 15 дівчат. Скількома способами можна вибрати одного учня цього класу?
- 757'.** На ярмарку професій учень може отримати інформацію про майбутню спеціальність двома способами: послухати одну із п'яти лекцій від викладача університету або відвідати один із чотирьох майстер-класів від роботодавців. Скількома способами учень може отримати інформацію про майбутню спеціальність?

- 758°.** Учениця вирішила спробувати себе у волонтерстві. Їй запропонували або приєднатися до однієї з п'яти волонтерських акцій у школі (збирання книжок, прибирання території, допомога в плетінні сіток тощо), або долучитися до однієї з трьох міських волонтерських ініціатив (допомога літнім людям, робота в притулку для тварин, участь в екологічних акціях). Скількома способами учениця може здійснити свій вибір?
- 759°.** Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо всі цифри числа — різні? Скільки трицифрових чисел можна скласти із цих цифр?
- 760°.** Для чергування на різних поверхах школи вибирають двох дітей: одну дитину із 20 учнів 9-А класу й одну — із 25 учнів 9-Б класу. Скільки існує можливих способів формування різних пар чергових із двох дітей для чергування?
- 761°.** Самостійна робота з математики містить 2 завдання: перше — рівняння, а друге — задача. Скільки варіантів самостійної роботи з математики можна скласти із 7 різних рівнянь і 5 різних задач?
- 762°.** Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 5 і 6, якщо цифри числа різні й число є:
- 1) парним;
 - 2) кратним числа 5?
- 763°.** Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 6 і 7, якщо цифри числа різні й число є:
-  1) непарним;
- 2) кратним числа 3?
- 764°.** Скільки існує трицифрових чисел, у яких перша цифра — непарна, друга — парна, а третя — ділиться на 3?
- 765°.** Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких перша цифра — 5, друга — парна, третя — непарна, а четверта — цифра 0?
- 766°.** У класі навчається 25 учнів. Скільки існує способів вибору:

1) старости та його заступника;

2) двох чергових?

Поміркуй, чим схожі ці два завдання і чим різняться.

767°. У класі 13 хлопців і 12 дівчаток. Скільки існує способів вибору:



1) двох учнів для участі в конференції;

2) пари учнів (хлопець — дівчина) для участі у шкільному вечорі?

768°. У Львові відбувається фестиваль української музики. На сцені виступають



п'ять виконавців: гурт «Океан Ельзи», гурт «ДахаБраха», гурт «Казка», співачка Джамала та гурт «Бумбокс».

qr.orioncentr.com.ua/0lCo8



1. Скількома способами можна скласти порядок їхніх виступів?

2. Скільки є способів скласти програму, якщо гурт «Океан Ельзи» обов'язково відкриває концерт, а «Бумбокс» закриває?

3. Скільки є способів скласти програму, якщо «ДахаБраха» і «Казка» мають виступати один за одним (у будь-якому порядку)?

769°. До Дня вишиванки в шкільній галереї влаштували виставку — експонують 6 картин, кожна з орнаментом певного регіону: Поділля, Волині, Слобожанщини, Полтавщини, Гуцульщини, Києва.



1. Скількома способами можна розвісити картини в ряд?

2. Скільки є способів розміщення картин, якщо подільський і полтавський орнаменти обов'язково повинні висіти поруч?

3. Скільки є способів розміщення картин, якщо картина з гуцульським орнаментом має бути першою?

770°. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок із шести предметів?

771°. Скількома способами можна скласти список із п'яти дітей?

772°. Із цифр 0, 4, 6, 8 склали всі можливі трицифрові числа (цифри в числі можуть повторюватись). Скільки серед них:

- 1) діляться на 10; 3) більших за число 800;
2) менших від числа 650; 4) кратних числа 40?

773°. Із цифр 0, 5, 3, 9 склали всі можливі трицифрові числа (цифри в числі можуть повторюватись). Скільки серед них:



- 1) парних; 3) більших за число 900;
2) менших від числа 530; 4) кратних числа 25?

774. У ресторані «Смакота» можна вибрати 4 види супів, 6 видів основних страв та 5 видів напоїв. Крім того, є 3 види бізнес-ланчів, які включають суп, основну страву та напій. Скільки всього існує варіантів замовити суп, основну страву і напій у цьому ресторані, якщо страви з бізнес-ланчу не можна замовляти окремо?

775. У магазині продають 5 видів футболок, 7 видів брюк та 3 види курток. Крім того, там є 4 готові набори спортивних комплектів, до яких входять футболка, брюки та куртка. Скільки всього є способів придбати футболку, брюки та куртку, якщо речі з комплектів не можна купити окремо?



776. Обчисліть:



1) $5!$; 3) $5! - 4!$; 5) $\frac{6!}{6}$;

2) $7!$; 4) $2! + 3!$; 6) $\frac{7!}{5!}$.



qr.orioncentr.com.ua/pMWzh

777. Обчисліть:



1) $4!$; 2) $5! + 4!$; 3) $6! - 3!$; 4) $\frac{7!}{8!}$.

778. Оля точно пам'ятає, що у формулі сахарози поспіль ідуть літери С, Н, О і є три нижні індекси 12, 22 і 11, по одному біля кожної літери. Проте де саме стоять ці індекси, вона не пам'ятає. Намалюйте дерево можливих варіантів, за допомогою якого Оля знайде кількість шуканих способів комбінування букв і цифр. Чи можна знайти кількість наборів комбінування без дерева можливих варіантів?



779. Максим реєструється на освітній онлайн-платформі для участі в олімпіаді і має створити пароль. Пароль складається з п'яти символів: перші два символи — це літери латинського алфавіту (26 літер), а решта три — цифри (від 0 до 9).

qr.orioncentr.com.ua/4R3Kx



1. Скількома різними способами хлопець може створити пароль?
2. Скільки паролів містять різні літери і різні цифри?
3. Скільки паролів містять на першому місці літеру А?



780. Для входу в електронний щоденник школяр створює пароль із п'яти символів: перший символ — обов'язково літера (26 варіантів), а решта чотири — будь-які цифри (від 0 до 9).

1. Скількома способами можна скласти пароль?
2. Скільки паролів містять різні цифри?

781. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 4, 2, 3, 8 і 0, якщо на місці тисяч може стояти цифра 2 або цифра 3, а на місці десятків — цифра 2 або цифра 4?

782. Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких є хоча б одна парна цифра?

783. Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б один нуль?

784. Скільки існує шестицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна цифра 5?



785. У змаганні брало участь 8 команд. Кожна команда грала з усіма іншими командами одну гру. Скільки всього ігор було зіграно?

786. У змаганні брало участь n команд. Кожна команда грала з усіма іншими командами одну гру. Скільки всього ігор було зіграно?

787. Скільки діагоналей має опуклий 25-кутник?

788. Скільки діагоналей має опуклий n -кутник?

- 789.** Скількома способами можна поставити на шахову дошку білу і чорну тури, щоб вони не били одна одну?
- 790*.** Скількома способами можна поставити на шахову дошку білого і чорного королів, щоб вони не били один одного?
- 791*.** У функцію $y = ax^2 + bx + 4$ замість коефіцієнтів a і b випадковим чином підставляють числа із множини $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5\}$ і будують графік функції.
1. Скільки різних парабол можна побудувати?
 2. У скількох парабол вітки напрямлені вниз?
 3. Графіки скількох функцій розташовані симетрично відносно осі ординат?
- 792*.** Спростіть вираз:
- 1) $\frac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$;
 - 2) $\frac{1}{(n-2)!} - \frac{n^3-n}{(n+1)!}$.
- 793*.** Розв'яжіть рівняння в натуральних числах:
- 1) $6(n-1)! = (n+1)!;$
 - 2) $\frac{n!}{(n-2)!} = 20.$

Проявіть компетентність

- 794.** Гра «Кольорове доміно». Кожну клітинку прямокутної таблиці 2×3 учні двох команд по черзі зафарбовують у синій або жовтий колір. Після того як усі клітинки зафарбовані, за унікальний малюнок (відрізняється від попередніх) команда отримує 1 бал; якщо малюнок повторився, то бал не додається. Скільки всього існує варіантів зафарбувань таблиці?
- 795.** У школі є п'ять різних гуртків: шаховий, екологічний, малювання, робототехніки і волейбольна секція. Тобі запропонували кожного тижня записуватися в якийсь набір гуртків (можна й не вибирати жодного гуртка). При цьому набір гуртків щотижня відрізняється від усіх тих, які ти вибирав у попередні тижні. Чи вистачить навчального року, що триває 35 тижнів, для відвідування гуртків за такими правилами?

§ 18. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

1. Частота випадкової події

Ситуація. У деякому місті N епідеміолог (лікар, який вивчає причини, поширення та способи запобігання інфекційним хворобам серед населення) дослідив, що протягом місяця із 1000 школярів на застуду захворіли 80 дітей.



qr.orioncentr.com.ua/VTfoZ



Чи можна за цими даними визначити частоту захворювання на застуду серед дітей?

Так.



У даному дослідженні «учень захворів на застуду» — *випадкова* подія, яка відбувається чи не відбувається внаслідок проведення дослідження. *Частота* цієї події — це відношення кількості дітей, які захворіли, до загальної кількості дітей, що спостерігалися впродовж місяця:

$$\text{частота} = \frac{80}{1000} = 0,08.$$

Це число отримане в результаті аналізу спостережень лікаря. У таких випадках кажуть: «Ймовірність того, що випадково вибраний учень захворіє на застуду, дорівнює 0,08». Частота таких випадкових подій допомагає оцінити ризики, передбачити спалахи хвороби і розробити заходи профілактики.

Частота випадкової події — це важлива статистична характеристика, яку широко використовують на практиці.

Запам'ятайте!

Частотою випадкової події A називається відношення кількості появ події, яка нас цікавить, до загальної кількості випробувань (спостережень).



Щоб знайти частоту випадкової події, потрібно:

- 1) визначити подію, частоту якої потрібно знайти;
- 2) багаторазово повторити випробування (спостереження) або використати статистичні дані про його проведення;
- 3) обчислити кількість випробувань (спостережень) — n ;
- 4) обчислити кількість появ події, яка нас цікавить — m ;
- 5) обчислити частоту $\frac{m}{n}$.

Задача 1 Учні 9 класу провели випробування, яке полягає у підкиданні монети. Результати таких випробувань вони записали в таблицю 44.

Таблиця 44

Номер випробування	Кількість випадань герба	Кількість підкидань монети
1	6	10
2	47	100
3	99	200
Всього	152	310

Чому дорівнює частота випадання герба в кожному випробуванні та в загальному підсумку?

Розв'язання 1-ше випробування: $\text{частота} = \frac{6}{10} = 0,6$.

2-ге випробування: $\text{частота} = \frac{47}{100} = 0,47$.

3-тє випробування: $\text{частота} = \frac{99}{200} = 0,495$.

У трьох випробуваннях: $\text{частота} = \frac{152}{310} = 0,49$.



Частота випадкової події тим краще характеризує явище, чим більше випробувань (спостережень) проведено.



Чи можна стверджувати, що ймовірність випадкової події завжди дорівнює частоті цієї події?

Ні.



За наведеними даними в задачі 1 частота появи герба в кожному випробуванні різна. Але за великої кількості випробувань вона приблизно дорівнює 0,5, тому ймовірність «випадання герба» приблизно дорівнює 0,5.



Ймовірність випадкової події наближено дорівнює частоті цієї події, знайденій під час проведення великої кількості випробувань (спостережень).

2. Ймовірності випадкової події

qr.orioncentr.com.ua/Z3cFG



Для знаходження ймовірності деяких подій не обов'язково проводити випробування або спостереження. Якщо в результаті випробування поява кожної події є однаково можливою порівняно з іншими, то ймовірність події можна обчислювати за формулою.

Запам'ятайте!

Ймовірністю події A називається відношення числа m сприятливих для A елементарних подій випробування до числа n усіх рівноможливих у даному випробуванні елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$



Чи правильно, що кількість тих елементарних подій m , що сприяють появі даної події, завжди менша від загальної кількості елементарних подій n даного випробування?

Ні.



Справді, числа m і n можуть також дорівнювати одне одному. Наприклад, ймовірність достовірної події «поява від 1 до 6 очок» у результаті одного підкидання грального кубика дорівнює 1, оскільки $\frac{m}{n} = \frac{6}{6} = 1$.



Ймовірність випадкової події може набувати значень лише від 0 до 1.

Якщо подія A є *достовірною*, то $P(A) = 1$.

Якщо подія A є *неможливою*, то $P(A) = 0$.

Задача 2 З коробки, у якій лежать дві білі і дві чорні кульки, навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вийняли:

- 1) дві кульки одного кольору;
- 2) дві кульки різних кольорів?

Розв'язання 1. Подія A — «вийняли кульки одного кольору». Для визначення кількості можливих результатів випробування потрібно вважати, що всі кульки — різні. Для зручності пронумеруємо їх:

1	2	3	4
Б	Б	Ч	Ч

Загалом кількість можливих результатів вибору двох кульок — 6. Перерахуємо їх: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Тобто $n = 6$.

Для події A сприятливими є результати: 12 і 34, тобто $m = 2$.

$$\text{Ймовірність події } A: P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. Подія B — «вийняли кульки різних кольорів». Загалом кількість можливих результатів вибору двох кульок — 6, тобто $n = 6$.

Для події B сприятливими є результати: 13, 14, 23, 24, тобто $m = 4$.

$$\text{Ймовірність події } B: P(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Проаналізуємо результати, отримані в задачі 2:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$



Події A і B називають *протилежними*, а ймовірність події B можна обчислити за формулою: $P(B) = 1 - P(A)$.

Запам'ятайте!

Подію B називають протилежною до події A , якщо вона відбувається щоразу, коли не відбувається подія A , і навпаки.

Задача 3 У випадковому експерименті монету кидають тричі. Знайдіть ймовірність того, що «герб» випаде хоча б один раз.

Розв'язання Подія A — «герб випаде хоча б один раз».

Розглянемо подію B , протилежну до події A , — «герб не випаде жодного разу».

У результаті підкидання монети можливі такі елементарні події: ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ. Отже, $n = 8$.

«Герб» не випаде жодного разу лише в одному випадку — ЦЦЦ, тому $m = 1$.

Ймовірність події B дорівнює відношенню чисел m і n :

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8}. \text{ Тому ймовірність події } A \text{ дорівнює:}$$

$$1 - P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Задача 4 Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 випадковим чином утворили п'ятицифрове число з різними цифрами. Яка ймовірність того, що воно ділиться на 25?

Розв'язання Подія A — «утворили п'ятицифрове число, що ділиться на 25».

Загалом із цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна утворити $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ чисел. Тобто $n = 120$.

Якщо число ділиться на 25, то його дві останні цифри можуть утворювати лише число 25. Отже, дві останні цифри визначаються єдиним способом. А перші три цифри можна утворити із цифр, що залишилися: 1, 3, 4. Вони різні і їх є три. Тому чисел, що діляться на 25, можна утворити $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Тобто $m = 6$.

Ймовірність події A дорівнює відношенню чисел m і n :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

Дізнайтеся більше

Ймовірність — це мова, якою природа описує випадковість. Вона допомагає передбачити події, які неможливо знати наперед: погоду, результати виборів, успіх медичних препаратів чи навіть траєкторію частинок у квантовому світі. Завдяки ймовірності лікарі оцінюють ризики, метеорологи прогнозують дощ, а штучний інтелект «вчиться» приймати рішення на основі даних. У багатьох алгоритмах штучного інтелекту використовуються ймовірнісні моделі, наприклад: байєсівські мережі (Bayesian Networks) — моделі, що описують залежності між подіями; регресія (лінійна, логістична) — дає ймовірність належності до певного класу; генеративні моделі (як ChatGPT) — обчислюють, яке слово ймовірніше з'явиться далі у реченні. Першим, хто здійснив істотні дослідження в галузі штучного інтелекту був Алан Тюрінг. Сам термін «Artificial Intelligence» (штучний інтелект) офіційно запровадив Джон Маккарті у 1956 році на конференції в Дартмуті (США). А от українець **Олексій Григорович Івахненко** (1913–2007) почав першим у світі використовувати багатошарові нейронні мережі, які нині мають велике значення та широко застосовуються в системах штучного інтелекту.



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/n6Yq2

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ймовірність	probability	Wahrscheinlichkeit, f	probabilité

Пригадайте головне

1. Що таке частота випадкової події?
2. Яку подію називають достовірною?
3. Яку подію називають неможливою?
4. Як знайти ймовірність події?
5. Які події називають протилежними?
6. Яких значень може набувати ймовірність події?

Усне тренування

1. Обчисліть:

1) $8 \cdot 2^{-4}$; 2) $(-3)^{-2} \cdot 6$; 3) $(0,25)^{-2} : 16$; 4) $(1,75)^0 \cdot 0,01^{-2}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-1)^2 = 4$; 2) $x^2 + 5 = 1$; 3) $2x^3 - 5 = 11$; 4) $2x^2 + 2x = 0$.

3. Які із чисел 3, -3, 4, -4, π є розв'язками нерівностей:

1) $x < 4$; 2) $x^2 < 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $x^2 > 3$?

Розв'яжіть задачі

796'. Чи може частота події бути більшою за 1? Чому?**797'.** Наведіть приклади професій, у яких важливо вміти визначати частоту події.**798'.** Якщо двоє учнів проводять один і той самий експеримент, але отримують різні частоти, чи означає це, що хтось помилився? Обговоріть з однокласниками й однокласницями свою думку.**799'.** У ящику лежать 5 червоних і 3 зелені кульки. Навмання виймають одну кульку. Які з поданих подій є достовірними чи неможливими:

- 1) вийняли червону кульку;
- 2) вийняли білу кульку;
- 3) вийняли червону або зелену кульку;
- 4) вийняли зелену кульку?

800°. Гральний кубик підкинули 500 разів. Підраховали, що одне очко випало

88 разів, два очки — 67 разів, три очки — 78 разів, чотири очки — 97 разів, п'ять очок — 86 разів, а шість очок — 84 рази.

Обчисліть частоту появи події:

- 1) «випало 4 очки»; 2) «випало 6 очок»; 3) «випало число очок, що менше ніж 5»; 4) «випало число очок, що більше ніж 4».

801°. Метеоролог вивчає дані за останні 30 років і з'ясовує, що дощ у жовтні був 230 днів. Обчисліть частоту події «день жовтня був дощовий».qr.orioncentr.com.ua/VET4v

802°. Зі своїм однокласником (однокласницею) проведіть серії випробувань:



- 1) 40 підкидань грального кубика;
- 2) 100 підкидань грального кубика.

Запишіть для кожної серії результат випробування й обчисліть частоту появи події «випадає 6 очок».

Який висновок ви можете зробити?

803°. У лотереї розігрують 20 грошових призів і 5 речових. Усього було продано 5000 лотерейних білетів. Яка ймовірність того, що, придбавши один білет, ви:

- 1) виграє який-небудь приз;
- 2) виграє грошовий приз;
- 3) не виграє жодного призу?

804°. Зі скриньки, у якій містяться 10 зелених та 8 блакитних кульок, навмання вийнято одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька:



- 1) зелена; 2) блакитна; 3) червона?

805°. Оленка задумала просте двоцифрове число, менше від числа 25. Яка ймовірність того, що це число:

- 1) 13; 2) 18; 3) більше за 15; 4) непарне?

806°. Семен задумав складене двоцифрове число, менше від числа 27. Яка ймовірність того, що це число:



- 1) 8; 2) 15; 3) 19; 4) парне?

807°. На фабриці виготовляють постільну білизну. За день було пошито 250 комплектів, з яких 5 комплектів виявилися з прихованими дефектами. Знайдіть ймовірність того, що куплений у магазині комплект постільної білизни із цієї партії виявиться якісним.

808°. На завод привезли партію із 2000 деталей, з яких 50 деталей не відповідають стандарту. Визначте ймовірність того, що взята навмання деталь є стандартною.

809°. У скриньку помістили картки, що занумеровані двоцифровими числами,



причому використали всі двоцифрові числа. Яка ймовірність того, що на навмання обраній картці написано:

qr.orioncentr.com.ua/B7Mb0



- 1) парне число;
- 2) число, менше від десяти;
- 3) число, що ділиться на 10;
- 4) число, що складається з непарних цифр?

810°. У скриньку помістили кульки, що занумеровані двоцифровими числами, причому використали всі двоцифрові числа. Яка ймовірність того, що на навмання витягнутій кульці написано:



- 1) непарне число;
- 2) число, більше за 10 і менше від 36;
- 3) число, що є квадратом іншого цілого числа?

811. Уривок з вірша Т. Г. Шевченка містить 245 букв:

Думи мої, думи мої,	Там найдете щире серце
Квіти мої, діти!	І слово ласкаве,
Виростав вас, доглядав	Там найдете щирю правду,
вас —	А ще, може, й славу...
Де ж мені вас діти?..	Привітай же, моя ненько!
В Україну ідіть, діти!	Моя Україно!
В нашу Україну,	Моїх діток нерозумних,
Попідтинню, сиротами,	Як свою дитину.
А я тут загину.	

Підрахуйте частоту появи в тексті:

- 1) букви «а»; 2) букви «н»; 3) букви «я».

812. Випишіть зі щоденника всі свої оцінки з алгебри і геометрії. Обчисліть частоту отримання:

- 1) оцінки 5; 2) оцінки 8; 3) оцінки 12.

813. Під час опитування учнів та учениць 9 класу поставили запитання: «Які книжки ви читаете частіше — паперові чи електронні?» Відповідь «електронні» дали 28 осіб, що становить частоту 0,35. Скільки осіб брало участь в опитуванні?

814. Проведіть опитування серед учнів та учениць 9 класу про улюблену пору року. Обчисліть частоту появи відповіді «літо».

815. Із цифр 5, 9, 0 випадковим чином утворили трицифрове число. Цифри в числі можуть повторюватись. Яка ймовірність того, що утворене число є:

- 1) непарним;
- 2) числом, що ділиться на 10;
- 3) числом, більшим за 500?

816. Із цифр 2, 8, 0 випадковим чином утворили трицифрове число. Цифри в числі можуть повторюватись. Яка ймовірність того, що утворене число є:



- 1) парним;
- 2) числом, що ділиться на 5;
- 3) числом, меншим від числа 200?

817. Із цифр 5, 7, 9 випадковим чином утворили трицифрове число з різними цифрами. Яка ймовірність того, що воно є:

- 1) числом, що ділиться на 5;
- 2) числом, у якого перша цифра 7?

818. Із цифр 3, 6, 7 випадковим чином утворили трицифрове число з різними цифрами. Яка ймовірність того, що воно є:

- 1) парним числом; 2) числом, у якого остання цифра 3?

819. Одночасно підкидають два гральні кубики. Підрахуйте ймовірність події:



- 1) «на обох кубиках випаде 3 очки»;
- 2) «на обох кубиках випаде 6 очок»;
- 3) «сума очок на кубиках дорівнює 10»;
- 4) «сума очок на кубиках дорівнює 5».

qr.orioncentr.com.ua/Ve47I



820. Монету підкидають три рази. Яка ймовірність того, що:



- 1) «герб» випаде три рази;
- 2) «цифра» випаде хоча б один раз?

821. Підручник з математики розгорнули випадковим способом. Яка ймовірність того, що:

- 1) різниця номерів сторінок на розвороті дорівнює 0;
- 2) різниця номерів сторінок на розвороті дорівнює 1;
- 3) остання цифра суми номерів сторінок на розвороті є цифрою 3;
- 4) остання цифра добутку номерів сторінок на розвороті є цифрою 0?

822. Подруги Марія й Олена захопилися нумерологією.



1. Яка ймовірність того, що Марія й Олена народилися в один місяць?

2. Яка ймовірність того, що дівчата народилися в різні місяці?

823. Код електронного замка складається із чотирьох цифр (від 0 до 9). Знайдіть ймовірність того, що у випадково встановленому коді всі цифри різні.

824. Пароль складається із п'яти цифр. Знайдіть ймовірність того, що жодна цифра не є парною.

825. Номерний знак автомобіля складається із чотирьох цифр (від 0 до 9). Яка ймовірність того, що номер навання обраного автомобіля містить хоча б одну цифру 5?

826. Телефонний номер має сім цифр. Яка ймовірність того, що у номері трапиться хоча б одна цифра 0?

827*. З озера виловили 106 рибин, яких помітили і відпустили назад в озеро. Через тиждень повторили відлов риби й виловили 98 рибин, серед яких 6 рибин були поміченими. Поясніть, як цей результат дозволяє обчислити, скільки приблизно рибин є у водоймі.

828*. П'ять однокласників товаришують з першого класу. Яка ймовірність того, що принаймні два з них народилися в одному місяці?

829*. У випадковому експерименті кидають три гральні кубики. Знайдіть ймовірність того, що в сумі випаде:
1) 10 очок; 2) 15 очок; 3) 20 очок.

Проявіть компетентність

830. Виберіть навання одну сторінку з п'єси Івана Котляревського «Наталка Полтавка». Порахуйте на цій сторінці кількість букв «а», «о», «е», «і» та загальну кількість букв. Підрахуйте частоту появи вказаних букв у тексті. Знайдіть інформацію про частоту появи різних букв в українських текстах і порівняйте з отриманими даними.

§ 19. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ. СПОСОБИ ПОДАННЯ ДАНИХ ТА ЇХ ОБРОБКИ

1. Збирання статистичних даних. Генеральна сукупність і вибірка

Ситуація. На студії регіонального телебачення створюють шоу «Нове покоління». Перші випуски вже вийшли в ефір, але керівництво не знає, чи сподобалася передача глядачам і чи треба щось змінити для збільшення рейтингів.



qr.orioncentr.com.ua/UQvER



Як можна з'ясувати думку всіх телеглядачів?

Зібрати статистичні дані.



Статистика — наука про збирання, обробку й аналіз кількісних даних про найрізноманітніші масові явища та події навколишнього світу. Такі дані одержують під час проведення досліджень.

Першим етапом будь-якого дослідження є статистичне спостереження, тобто збирання інформації під час проведення масових спостережень, опитувань, експериментів.

Запам'ятайте!

Статистичне спостереження — це сплановане, науково організоване збирання статистичних даних про будь-яке масове явище або процес.

Наприклад, опитування в соціальних мережах, підрахунок кількості переглядів телепередачі.



Чи потрібно знати думку всіх глядачів для покращення програми?

Hi.



Найчастіше розглядають не всю сукупність явищ, об'єктів чи процесів, які хотіли б вивчити, а лише деяку їх частину. Таку частину, відібрану в особливий спосіб, називають *вибіркою*. Усю сукупність явищ або об'єктів, з якої роблять вибірку, називають *генеральною сукупністю*. Елементами генеральної сукупності можуть бути люди, неживі предмети, природні явища тощо. У кожному конкретному дослідженні генеральна сукупність залежить від тих цілей, які ставлять у дослідженні.



Кількість об'єктів генеральної сукупності та вибірки називають відповідно *обсягом генеральної сукупності* (N) та *обсягом вибірки* (n).

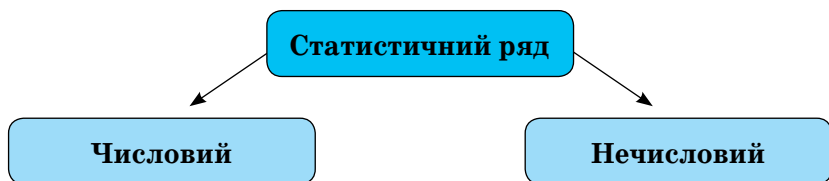
Наприклад, якщо для дослідження відібрали 2000 осіб із 20 млн глядачів, то обсяг вибірки $n = 2000$, а обсяг генеральної сукупності $N = 20\,000\,000$.



Вибірка має такі характеристики:

- якісну (способи побудови вибірки);
- кількісну (обсяг вибірки).

Перед початком статистичної обробки даних їх систематизують. Від людей, предметів або явищ переходять до рядів чисел. Із цієї точки зору вибіркою можна вважати набір даних (найчастіше числових), одержаних у результаті статистичного спостереження. Такий набір називають *статистичним рядом*.



Наприклад, вік респондентів — числовий ряд, а їхня стать або освіта — нечисловий ряд.



Як найчастіше подають зібрану інформацію?

У статистичному ряді або в таблиці.



Наприклад, щоб проаналізувати результати контрольної роботи з математики в 9-А класі, випишемо одержані учнями бали, тобто утворимо статистичний ряд балів:

8, 10, 4, 7, 8, 6, 5, 7, 11, 9, 10, 8, 6, 8, 9, 11, 8, 6, 7, 9, 11, 7, 9.

Обсяг цієї вибірки $n = 23$.

Для полегшення роботи з одержаними даними їх упорядковують.

Запам'ятайте!

Упорядкований за зростанням статистичний ряд називається *варіаційним рядом*.

Варіаційний ряд балів за контрольну роботу з математики в 9-А класі є таким:

4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11.

Проте якщо вибірка має великий обсяг, то зручніше використовувати *статистичні таблиці*. У таблицях дані подаються компактно, у зручній для порівняння й аналізу формі. Наприклад, у таблиці 45 подано бали, одержані за контрольну роботу, та відповідну кількість учнів, які одержали ці бали.

Таблиця 45

Бали	4	5	6	7	8	9	10	11
Кількість учнів	1	1	3	4	5	4	2	3

2. Чисельні характеристики вибірки

qr.orioncentr.com.ua/iJwtq



Як аналізують зібрану й систематизовану інформацію?



Використовують різні показники.



З деякими чисельними характеристиками вибірки ви вже знайомі із 7–8 класів, це — середнє значення і мода.



Позначають: $\bar{x}$ — середнє значення вибірки; Mo — мода вибірки.

Запам'ятайте!

Середнім значенням $\bar{x}$ вибірки $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають середнє арифметичне всіх членів даного ряду, тобто

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Визначимо середнє значення вибірки балів («середній бал») за контрольну роботу з математики в 9-А класі:

$$\bar{x} = \frac{4+5+6 \cdot 3+7 \cdot 4+8 \cdot 5+9 \cdot 4+10 \cdot 2+11 \cdot 3}{23} = 8.$$



Мода (Mo) вибірки — це значення вибірки, яке трапляється у варіаційному ряді найчастіше.

Визначимо моду для вибірки балів за контрольну роботу з математики в 9-А класі. За відповідним варіаційним рядом або за таблицею 45 можна побачити, що найчастіше трапляється значення «8 балів». Отже, $Mo = 8$.



Які ще характеристики вибірки існують?



Медіана вибірки.

Запам'ятайте!

Медіана вибірки — це число, яке «поділяє» упорядковану сукупність усіх значень вибірки на дві рівні частини.



Позначають: Me — медіана вибірки.

Медіана є таким числом варіаційного ряду, яке розміщується точно посередині цього ряду.

Визначимо медіану для вибірки балів за контрольну роботу з математики в 9-А класі:

4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10.

Обсяг даної вибірки є непарним числом: $n = 23$. Тому перед медіаною й після неї мають стояти по 11 чисел. У даному ряді таким є число 8. Отже, $Me = 8$.

Якщо вибірка містить парну кількість членів, то медіану визначають як півсуму двох її середніх значень. Наприклад, для вибірки, обсяг якої $n = 10$, одержуємо:

4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10,

$$\text{тому } Me = \frac{6+7}{2} = 6,5.$$

Задача 1 П'ять мережевих аптек пропонують вітамінно-мінеральний комплекс (30 таблеток) за цінами, поданими в таблиці 46.

Таблиця 46

«Народна аптека»	275,70 грн
«Бюджетна Аптека»	274,25 грн
«Аптека Медит-М»	282,16 грн
«Гала Аптека»	291,60 грн
«Мед-Сервіс»	292,00 грн

Яка середня ціна вітамінів у аптеках? Яка з аптек пропонує вітаміни за середньою ціною? Проаналізуйте результат.

Розв'язання Ціни вітамінно-мінерального комплексу утворюють варіаційний ряд:

274,25; 275,7; 282,16; 291,6; 292.

Середня ціна дорівнює:

$$\frac{274,25 + 275,7 + 282,16 + 291,6 + 292}{5} \approx 283,1.$$

За такою ціною жодна з аптек не пропонує вітаміни, проте аптека «Медит-М» пропонує вітамінний комплекс за ціною, близькою до середньої. 282,16 — це медіана вибірки. У даній задачі вона вказує на середню ціну.

Середнє значення вибірки, мода та медіана вибірки доповнюють одна одну і дають змогу точніше розібратися в даних, що вивчаються.

3. Способи подання даних

qr.orioncentr.com.ua/Jkke0



Як зручніше подавати зібрану статистичну інформацію?

Це залежить від обсягу й цілей.



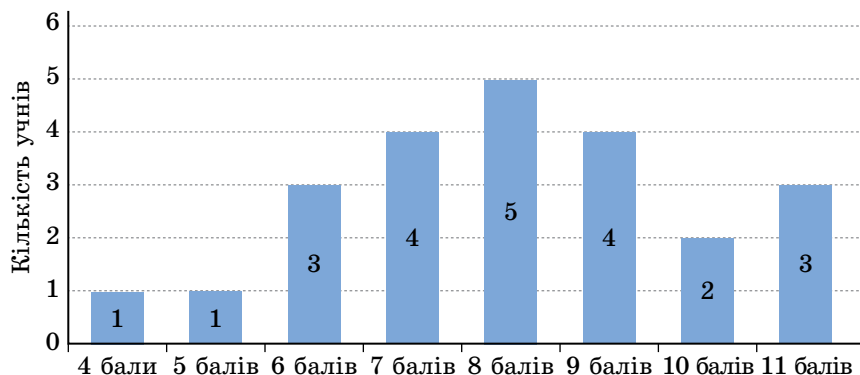
Якщо вибірка має великий обсяг, то зручніше використувати таблицю. Наприклад, у таблиці 45 подано бали, одержані за контрольну роботу, та відповідну кількість учнів, які одержали ці бали.

Для унаочнення статистичних даних використовують стовпчасті та кругові діаграми.



Діаграма — це графічне зображення, що наочно показує співвідношення будь-яких величин.

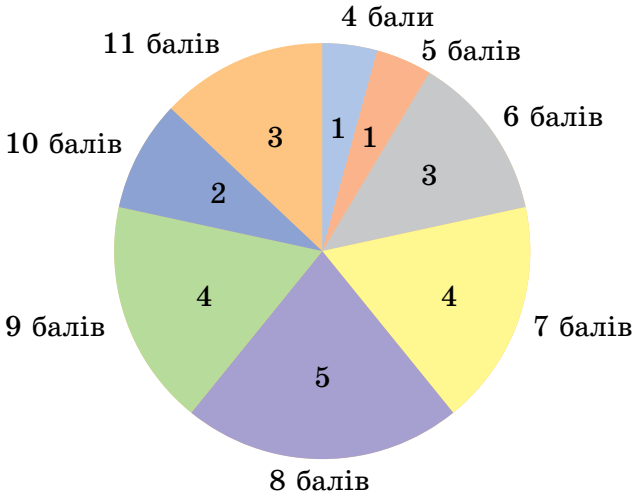
На *стовпчастій діаграмі* за горизонталлю відкладають різні значення однієї ознаки, а над кожним таким значенням малюють стовпчик, висота якого дорівнює відповідному значенню іншої ознаки. Такі діаграми особливо наочно показують кількісні співвідношення між величинами. Наприклад, стовпчасту діаграму за даними таблиці 45 наведено на малюнку 172.



Мал. 172

Стовпчасті діаграми, у яких немає розривів між стовпцями, у статистиці називають *гістограмами*.

Кругова діаграма являє собою круг, поділений на сектори пропорційно до значень досліджуваної ознаки. Щоб побудувати кругову діаграму, потрібно поділити все коло на дуги так, щоб їхні довжини (або відповідні їм центральні кути) перебували в тому самому відношенні, що й представлені на діаграмі величини. Наприклад, кругову діаграму за даними таблиці 45 подано на малюнку 173.



Мал. 173



Яка діаграма є кращою?

Залежить від цілей.

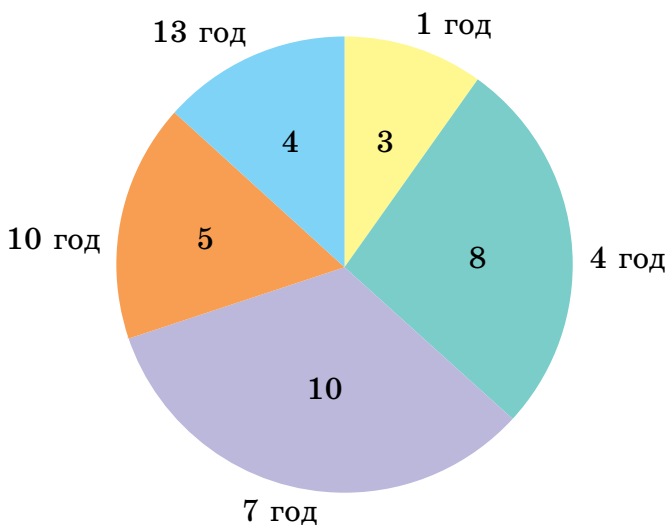


Найчастіше різні види діаграм взаємозамінні, а ті самі статистичні дані можна подати на різних діаграмах. Проте можна визначити, що стовпчасті діаграми зручно використовувати для порівняння абсолютних значень досліджуваної ознаки, а кругові діаграми — для випадків, коли потрібно показати, у якій пропорції ціле ділиться на частини.

Діаграми потрібно вміти не тільки правильно будувати, а й правильно читати, тобто сприймати укладену в них інформацію. Для цього необхідно визначити тип діаграми; з'ясувати, які величини на ній показані та скільки їх; що відкладено по кожній з осей; які обрано одиниці вимірювання; які умовні позначення використовували.

Задача 2 Учні й учениці 9 класу взяли участь в опитуванні: «Скільки годин на тиждень ти дивишся телепередачі?». Його результати подано у вигляді кругової діаграми (мал. 174). Знайдіть:

- 1) середню кількість годин, яку учні витрачають на перегляд телепередач;
 - 2) моду;
 - 3) медіану.
- Зробіть висновки.



Мал. 174

Розв'язання 1. Середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + 7 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 13 \cdot 4}{3 + 8 + 10 + 5 + 4} = \frac{207}{30} \approx 6,9.$$

Отже, у середньому на перегляд телепередач за тиждень учні витрачають 6,9 год.

2. $Mo = 7$ год.

3. Загалом в опитуванні взяли участь 30 учнів. Медіана — це середнє значення між 15-м і 16-м значеннями варіаційного ряду. 15-те і 16-те значення дорівнюють по 7 год, тому $Me = 7$ год.

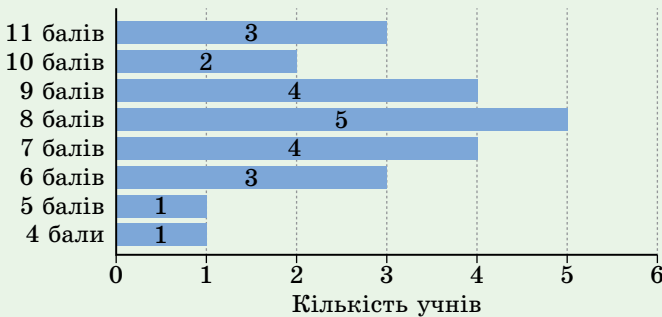
Отже, більшість учнів переглядають телепередачі приблизно 7 год на тиждень, що становить у середньому 1 год на день.

Дізнайтеся більше

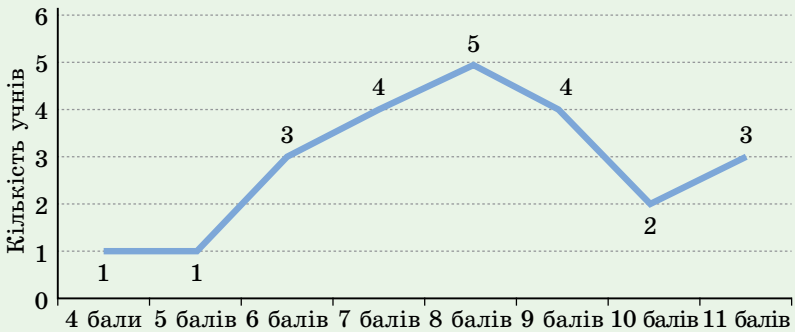
1. Математична статистика пов'язана з більш тонкими дослідженнями — оцінкою невідомих параметрів, перевіркою гіпотез, вивченням статистичних зв'язків і залежностей.

Крім того, у статистиці виділяють багато галузей, пов'язаних із тією сферою життя, з якої одержано статистичні дані. Економічна статистика вивчає зміни цін, попиту та пропозиції на товари, прогнозує зростання й падіння виробництва та споживання. Медична статистика вивчає ефективність різних ліків і методів лікування, ймовірність виникнення деякого захворювання залежно від віку, статі, спадковості, умов життя, шкідливих звичок людей, прогнозує поширення епідемій. Демографічна статистика вивчає народжуваність, чисельність населення, його склад (віковий, національний, професійний). А є ще статистика фінансова, податкова, біологічна, метеорологічна.

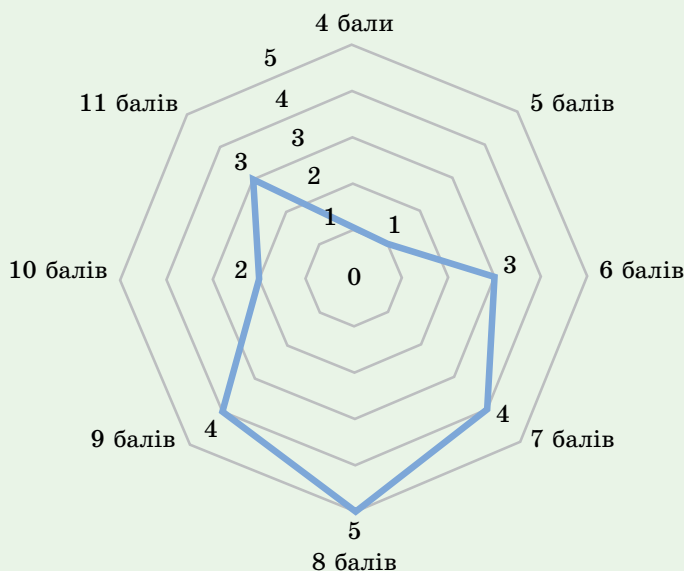
2. Крім стовпчастих і кругових діаграм, у статистиці використовують й інші способи графічного подання даних. Наприклад, дані таблиці 45 можна подати на лінійчатій діаграмі (мал. 175), графіку (мал. 176), пелюстковій діаграмі (мал. 177) тощо.



Мал. 175



Мал. 176



Мал. 177

Іншою основою для поділу на види способів графічного подання даних є їхній зміст. За цією основою їх поділяють на: діаграми порівняння, структурні діаграми, динамічні діаграми, графіки зв'язку, графіки контролю тощо.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/WRQbz

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
статистика	statistics	Statistik, f	statistiques

Пригадайте головне

1. Що досліджує статистика?
2. Що таке генеральна сукупність; вибірка?
3. Назвіть характеристики вибірки.
4. Що таке середнє значення вибірки?
5. Що таке мода вибірки?
6. Що таке медіана вибірки?
7. Які є способи подання даних?

Усне тренування

1. Знайдіть: 1) 20 % числа 240; 2) 75 % числа 64; 3) число, якщо його 30 % — це число 81.

2. Обчисліть: $0,5^2 - 1,5^2$; $(0,5 - 1,25)^2$;
 $(0,5 - 1,5)^2$; $(1 + 0,25)^3$.

3. Чи правильні твердження:

1) якщо $|x| < 5$, то $x < 5$; 3) якщо $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$, то $x > 3$;

2) якщо $x < 5$, то $|x| < 5$; 4) якщо $x^2 > -9$, то $x > 3$?

4. Сформулюйте основну властивість пропорції. Знайдіть x :

1) $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$; 2) $\frac{x-1}{2} = \frac{4}{x+1}$; 3) $\frac{x+3}{4} = \frac{9}{x+3}$; 4) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-5}{x+6}$.

Розв'яжіть задачі

831'. Чи має рацію Дмитро, стверджуючи, що:

- 1) «Вибірка — це генеральна сукупність»;
- 2) «Вибірка — це частина генеральної сукупності»;
- 3) «Вибірка — це частина генеральної сукупності, відібрана в спеціальний спосіб»?

832'. Чи правильно, що середнє значення вибірки — це:

- 1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
- 2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
- 3) число, яке «поділяє» вибірку на дві рівні частини?

833'. Чи правильно, що мода вибірки — це:

- 1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
- 2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
- 3) число, яке «поділяє» вибірку на дві рівні частини?

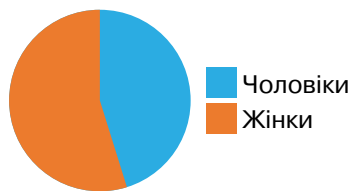
834'. Чи правильно, що медіана вибірки — це:

- 1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
- 2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
- 3) число, яке «поділяє» вибірку на дві рівні частини?

835'. Чи правильно, що для вибірки 1; 2; 3; 4; 5; 5; 6:

- 1) $Mo = 5$;
- 2) $Me = 5$;
- 3) $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{5}$?

836°. Кого, на вашу думку, в Україні більше — чоловіків чи жінок? Відповідь на це запитання можна знайти за малюнком 178. З'ясуйте, кого у вашій школі більше — хлопців чи дівчат.



Мал. 178

837°. Продавець записував масу кожного проданого кавуна з точністю до 0,5 кг. У нього вийшли такі дані (табл. 47).



qr.orioncentr.com.ua/7nuFP

Таблиця 47

8	5	6,5	7	9,5	10	11	8,5	8	6	7	8	9	10,5	11
6	7	8,5	9	10	8	12	11	10,5	6	12	11	9	6	10
5	9	8	11	10	7,5	8	10	9	8	7	10	11	8	6
8	12	7	8	9	6	7	9	8	8	6	10	12	8	11

1. Знайдіть обсяг цієї сукупності даних.
2. Знайдіть найбільший і найменший елемент ряду даних.
3. Яка частота елемента 8, елемента 10?
4. Наведіть приклад елемента, якого не може мати ця сукупність.

838°. Результати вимірювання зросту (у сантиметрах) дев'ятикласників записані в таблиці 48.



Таблиця 48

162	165	170	172	158	167	168	170	175	167
180	165	158	179	163	165	167	158	160	165
163	160	168	172	175	168	179	170	164	185
181	178	168	176	178	185	179	180	164	168
170	190	175	172	169	172	175	177	175	181

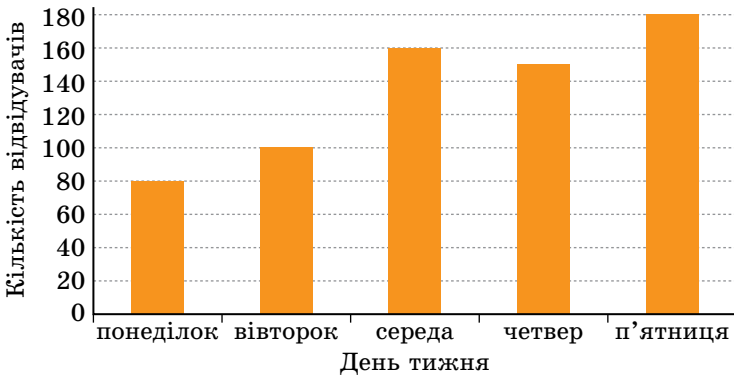
1. Знайдіть обсяг цього ряду даних.
2. Знайдіть найменший і найбільший елемент цієї сукупності даних.
3. Яка частота елемента 168; елемента 175?

839°. (ЗНО) На діаграмі (мал. 179) відображено кількість відвідувачів Музею води протягом одного робочого тижня (з вівторка до неділі). У який день тижня кількість відвідувачів була вдвічі більшою, ніж у попередній день?



Мал. 179

840°. На діаграмі (мал. 180) відображено кількість відвідувачів басейну протягом п'яти днів (з понеділка по п'ятницю). У який день тижня відвідувачів було вдвічі більше, ніж у понеділок?



Мал. 180

841°. Відповідно до системи АВ0, запропонованої на початку минулого століття К. Ландштейнером, виділяють чотири групи крові, які відрізняються за складом: 0 — перша; А — друга; В — третя; АВ — четверта. У таблиці 49 наведено дані розподілу населення України за групами крові.

Таблиця 49

0	A	B	AB
37 %	40 %	17 %	6 %

За даними таблиці 49 з'ясуйте:

- 1) яка група крові трапляється найчастіше;
- 2) яка група крові трапляється найрідше.

842°. Знайдіть середнє значення, моду та медіану ряду чисел: 2; 4; 2; 3; 4; 5; 5; 1; 6; 2; 4; 5; 6; 4.

843°. Знайдіть середнє значення, моду та медіану ряду чисел: 5; 2; 4; 2; 5; 3; 4; 5; 5; 6.



844°. У таблиці 50 наведено дані про кількість деталей, виготовлених робітниками за один робочий день.



qr.orioncentr.com.ua/dKkSs

Таблиця 50

Кількість деталей за день	18	19	20	21	22
Кількість робітників	2	10	8	4	1

За цими даними знайдіть:

- 1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

845°. У таблиці 51 наведено дані про віковий склад учасників шкільного хору.



Таблиця 51

Вік (роки)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість учасників	4	2	6	5	4	5	4	2	2	1

За цими даними знайдіть:

- 1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

846°. Під час проведення кожного з десяти дослідів виміряли рівень вологості повітря (табл. 52).

Таблиця 52

Вологість (%)	40	45	50	x
Кількість дослідів	3	2	4	1

Знайдіть x , якщо середня вологість повітря дорівнює 46,2 %.

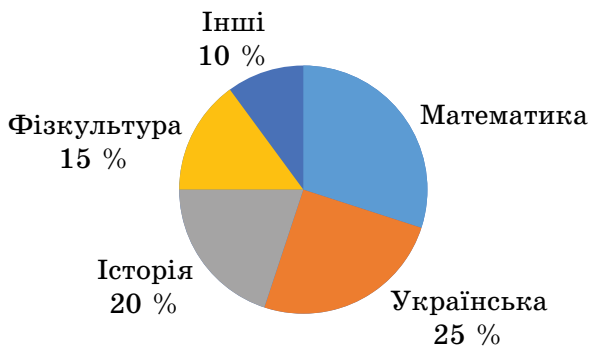
- 847°.** На п'яти фермах виміряли температуру молока перед охолодженням (табл. 53).

Таблиця 53

Температура (°C)	30	32	35	x
Кількість ферм	2	1	1	1

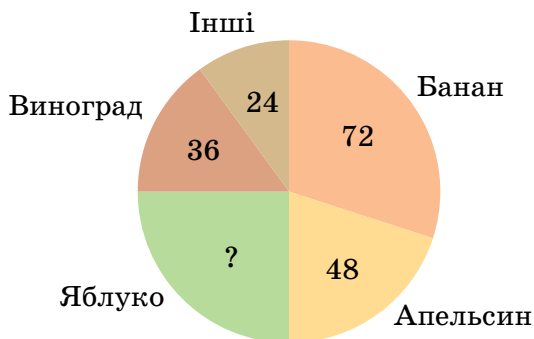
Знайдіть x , якщо середня температура становить 32°C.

- 848°.** На круговій діаграмі (мал. 181) показано результати опитування учнівства школи на тему: «Який твій улюблений шкільний предмет?». Скільки учнів взяли участь в опитуванні, якщо 36 із них назвали своїм улюбленим предметом математику?



Мал. 181

- 849°.** На круговій діаграмі (мал. 182) зображено результати опитування на тему: «Який ваш улюблений фрукт?». Скільки відсотків усіх опитаних обрали яблуко, якщо в опитуванні взяло участь 240 осіб?



Мал. 182

850. Дано варіаційний ряд чисел: 6; 7; 8; x ; 9; 10. За яких значень x :

- 1) мода буде дорівнювати 9;
- 2) медіана буде дорівнювати 8?

851. Дано варіаційний ряд чисел: 20; 21; y ; 23; 24; 26. За яких значень y :



- 1) мода буде дорівнювати 23;
- 2) медіана буде дорівнювати 22?

852. В інтернет-магазині продаються портативні колонки із вбудованими акумуляторами (в однаковій кількості кожної моделі) за цінами, поданими в таблиці 54.

Таблиця 54

Модель	Plasma	Canyon	JBL Grip	Anker	JBL Go	RZTK
Ціна, грн	1200	1500	3800	2500	1900	1600

1. Знайдіть середню ціну колонки в інтернет-магазині та медіану наведеного ряду даних.

2. Якою стане середня ціна колонки та медіана, якщо усі ціни будуть:

- 1) збільшені в 1,5 раза;
- 2) зменшені на 50 % ?

853. Розклад уроків визначає розпорядок роботи будь-якого навчального закладу. У кожній школі ця таблиця посідає головне місце. За розкладом уроків у своєму класі складіть статистичний ряд предметів, які вивчають у 9 класі. Визначте моду цього ряду. Побудуйте діаграму.

854. У таблиці 55 наведено результати навчальних досягнень учнівства 9-А класу за семестр із деяких предметів.



За даними таблиці: 1) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з алгебри; 2) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з геометрії;



qr.orioncentr.com.ua/hPzZY

3) побудуйте діаграму навчальних досягнень з алгебри та геометрії.

Таблиця 55

Учень	Алгебра	Геометрія	Фізика	Хімія
Антоненко В.	8	7	9	8
Бондаренко Е.	10	10	10	11
Василенко І.	5	4	6	5
Денисюк С.	9	8	7	7
Карась Д.	9	8	9	8
Коваленко О.	10	9	10	10
Левицька А.	7	6	7	7
Степанець М.	9	8	9	8
Ясінська К.	11	10	11	10

855. За даними таблиці 55: 1) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з фізики; 2) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з хімії; 3) побудуйте діаграму навчальних досягнень з фізики та хімії.



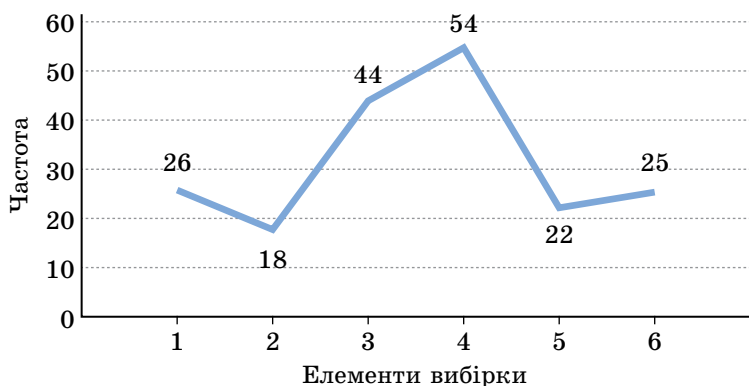
856. Під час озеленення міста 30 % площі парку відвели під кущі, 40 % залишку — під квіти, а решту — під дерева. Побудуйте кругову діаграму, що відображає розподіл площі.

857. У фруктовій суміші 20 % становлять яблука, 60 % решти — груші, а все інше — банани. Побудуйте кругову діаграму, що відображає склад суміші.

858. Статистичні дані подано у вигляді графіка (мал. 183). По осі абсцис відмічені елементи ряду, а по осі ординат — їхні частоти. За цими даними знайдіть:

- 1) обсяг вибірки;
- 2) моду вибірки;
- 3) середнє значення вибірки;
- 4) медіану вибірки.

Порівняйте свої відповіді з відповідями однокласника (однокласниці).



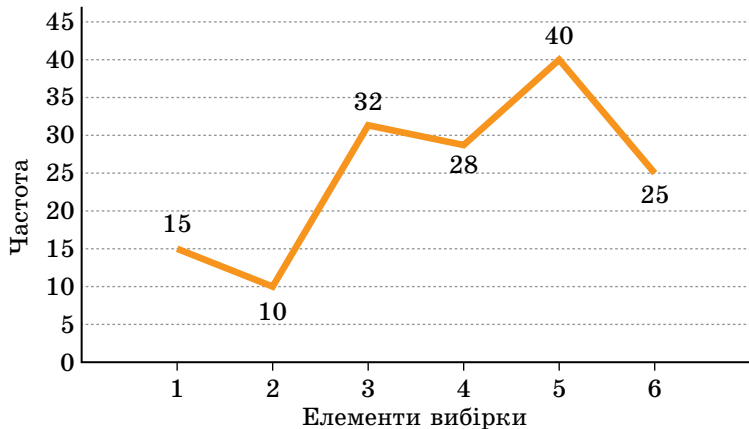
Мал. 183

859. Статистичні дані подано у вигляді графіка (мал. 184).



По осі абсцис відмічені елементи ряду, а по осі ординат — їхні частоти. За цими даними знайдіть:

- 1) обсяг вибірки;
- 2) моду вибірки;
- 3) середнє значення вибірки;
- 4) медіану вибірки.



Мал. 184

860*. Вибірку задано у вигляді таблиці (табл. 56).

Таблиця 56

Елементи вибірки	0	1	3	5	6
Частота	10	$2x$	$3x - 1$	5	$x + 5$

1. Виразіть через x обсяг вибірки.
2. Виразіть через x середнє значення вибірки.
3. Яких значень може набувати ціле число x , якщо модою вибірки є елемент 0?
4. Чи може мода вибірки дорівнювати числу 1?

861*. Виконайте завдання.

1. Запишіть ряд чисел, що складається з восьми різних елементів, у якому середнє арифметичне дорівнює медіані.
2. Запишіть ряд чисел, що складається із семи елементів, у якому середнє арифметичне дорівнює моді.
3. Запишіть ряд чисел, що складається з п'яти елементів, у якому медіана дорівнює моді.

Проявіть компетентність

862. Проведіть соціологічне опитування «Професії майбутнього очима учнів». Скористайтеся орієнтовним переліком запитань.

1. У якому класі ти навчаєшся?
2. Чи маєш ти уявлення про те, ким хочеш стати в майбутньому?
3. Яку сферу діяльності ти вважаєш найперспективнішою в майбутньому (ІТ, медицина, екологія, освіта, психологія, творчі спеціальності, будівництво й архітектура тощо)?
4. Які навички, на твою думку, будуть найважливішими в майбутньому?
5. Чи вважаєш ти, що сучасна школа допомагає підготуватися до майбутніх професій?
6. Чи відомі тобі професії, які ще не існують, але можуть з'явитися в майбутньому?
7. Яка професія, на твою думку, буде актуальною через 10–20 років?

Побудуйте кругову або стовпчасту діаграму за відповідями на запитання № 3. Знайдіть моду отриманих даних.



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 5**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Як знайти відсоток числа?
2. Чим відрізняються прості відсотки від складних?
3. Що означає капіталізація відсотків?
4. Яка формула розрахунку складних відсотків?
5. Що вивчає комбінаторика?
6. Поясніть, які задачі називають комбінаторними.
7. У чому суть способу перебору в розв'язуванні комбінаторних задач?
8. Сформулюйте правило додавання для комбінаторних задач.
9. Сформулюйте правило множення для комбінаторних задач.
10. Що називають факторіалом натурального числа?
11. Як обчислюють факторіал числа?
12. Де в комбінаториці використовують факторіал?
13. Яку подію називають випадковою?
14. Яку подію називають достовірною?
15. Яку подію називають неможливою?
16. Що таке частота випадкової події?
17. Що таке ймовірність події?
18. Як позначають ймовірність події?
19. Як знайти ймовірність події?
20. Яких значень може набувати ймовірність події?
21. Які події називають протилежними?
22. Що досліджує статистика?
23. Що таке генеральна сукупність; вибірка?
24. Назвіть характеристики вибірки.
25. Що таке середнє значення вибірки?
26. Що таке мода вибірки?
27. Що таке медіана вибірки?
28. Як обчислити середнє значення вибірки; моду вибірки; медіану вибірки?
29. Які є способи подання даних?
30. Для чого в статистиці використовують діаграми та графіки?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1°. У школі за рік використання пластикових пляшок скоротилося з 2500 до 1750 штук. На скільки відсотків зменшилося використання пластикових пляшок?
- А. На 30 % .
Б. На 40 % .
В. На 55 % .
Г. На 75 % .
- 2°. Учні й учениці 9-Б класу написали контрольну роботу з математики. Вони отримали такі оцінки: 7, 8, 8, 6, 10, 9, 8, 7, 11, 5, 8, 9. Знайдіть середній бал класу за результатами контрольної роботи.
- А. 7.
Б. 8.
В. 8,5.
Г. 9.
- 3°. Знайдіть моду і медіану ряду чисел: 15, 14, 13, 13, 14, 13, 16.
- А. 13 і 13.
Б. 13 і 14.
В. 14 і 14.
Г. 14 і 13.
4. Яка ймовірність того, що парне двоцифрове число буде ділитися на 8?
- А. $\frac{1}{3}$. В. $\frac{11}{45}$.
Б. $\frac{1}{4}$. Г. $\frac{1}{2}$.
- 5*. Скільки чотирицифрових парних чисел можна утворити із цифр 3, 6, 8, 9, 0, якщо всі цифри числа — різні?
- А. 36.
Б. 72.
В. 120.
Г. 60.



ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Розділ 2. Нерівності

qr.orioncentr.com.ua/cg8de



1. Відомо, що $x < y$. Порівняйте вирази:
1) $x + 12$ і $12 + y$; 3) $11 - 7x$ і $11 - 7y$;
2) $x - 6$ і $-6 + y$; 4) $-5x + 7$ і $7 - 5y$.
2. Порівняйте з нулем числа a і b , якщо відомо, що:
1) $a + 4 > 4 + b$ і $b > 2$; 3) $3a > 3b$ і $b > 6,1$;
2) $a - 2 < b - 2$ і $b < -7$; 4) $8 - a < -b + 8$ і $b > 1$.
3. Відомо, що $c > d$. Поставте замість зірочки знак $<$ або $>$, за якого є правильною нерівність:
1) $c + 13 * d + 13$; 3) $1,5c + 3 * 3 + 1,5d$;
2) $d - 9 * c - 9$; 4) $1 - d * 1 - c$.
4. Оцініть значення виразу:
1) $2a + 3b$, якщо $1 < a < 3$ і $-6 < b < -5$;
2) $0,25a - b$, якщо $0 < a < 4$ і $-1 < b < 0$;
3) $6b - a$, якщо $1,2 < a < 3$ і $0,4 < b < 5$;
4) $\frac{b}{3} - 2a$, якщо $0,3 < a < 0,4$ і $1,5 < b < 2,1$.
5. Відомо, що $1 < a < 3$ і $5 < b < 9$. Оцініть:
1) $a + 3b$; 3) $-4a + b$;
2) $a - b$; 4) $2ab$.
6. Доведіть нерівність:
1) $x^2 - 6x + 8 > (x - 7)(x + 1)$; 3) $(a + 3)^2 > 6a$;
2) $(b - 4)(b + 4) + 27 > 0$; 4) $c(c - 8) \geq -64$.
7. Розв'яжіть нерівність:
1) $x - 2 \leq 4(1 + x)$; 3) $5x - 2 \geq 3x - 4$;
2) $3(5 - x) \geq 1 + 2x$; 4) $2(13 - x) \leq 3x + 5$.
8. Розв'яжіть нерівність:
1) $8x(x - 5) + 5 > 8(x^2 - 10)$; 5) $\frac{5x - 1}{2} < \frac{2x + 1}{3}$;
2) $(y - 2)(y + 6) < y(y - 6)$; 6) $\frac{x - 21}{5} - \frac{3 - x}{3} > 0$.
3) $6x^3 - 3x(2x^2 + 4) + 49 \geq 0$;
4) $(x - 2)(x + 1) \leq (x - 2)^2 - 12$;

9. Розв'яжіть нерівність:



1) $4(x+1) + 5 > 4(2x+1)$;

2) $(x+6)(x-5) + 2 < x^2 - 2x$;

3) $3(x-1)^2 + 11x \geq x(3x-4)$;

4) $(x^2+2)(x^2-2) \leq x^4 - 12x$.

10. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{5} - 1}$;

3) $h(x) = \sqrt{\frac{7-2x}{3}} + 5$;

2) $g(x) = \sqrt{\frac{4x}{19} - x}$;

4) $f(x) = \sqrt{2x + \frac{x}{3}} - 7$.

11. Знайдіть область визначення функції:



1) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{5}} + 3$;

2) $f(x) = \sqrt{x - \frac{3x}{7}} + 6$.

12. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x < 4-x, \\ 0,5x < 1,6-0,3x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(y+1) + y(y-2) < y^2, \\ 2 > 5y - (2y+1); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8x+2 < 7x-1, \\ x+3,2 > 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 1,2(3-y) - 6 < 0,8y, \\ -2(1-4y) - y > 5y. \end{cases}$

13. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 5x-3 \leq 0, \\ \frac{2x-5}{2} \geq 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y-2 \leq 5y-8, \\ \frac{y+3}{6} \geq \frac{4-y}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-4x < 2, \\ \frac{2x-1}{4} > 2-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4-4y > 1+y, \\ \frac{2y-1}{6} + \frac{y+2}{3} > \frac{y-8}{2} + y-1. \end{cases}$

14. Розв'яжіть систему нерівностей:



1) $\begin{cases} 5+3x < 7-x, \\ 0,6x > 7,8-2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - \frac{x}{6} \geq 2, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} > 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x+2 < 9-x, \\ 6x > 3(x+1)-1; \end{cases}$

15. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{5x-1} + \sqrt{1-2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{8}} + \sqrt{\frac{x}{2}-1}$;

2) $g(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{\frac{3-x}{14}}$; 4) $f(x) = \sqrt{x - \frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3}}$.

16. Знайдіть область визначення функції:



1) $f(x) = \sqrt{2x-3} + \sqrt{5+6x}$; 2) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{9}} - x + \sqrt{\frac{x}{6}-2}$.

17. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $4 \leq x + 1 \leq 28$; 3) $-6 \leq 3x - 5 < 1$;

2) $-5 < 2x - 1 < 7$; 4) $-1 < \frac{2-5x}{4} \leq 8$.

18. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| < 3$; 3) $|x+1| < -1$; 5) $|2x| \leq x+3$;

2) $5|x-1| < 15$; 4) $|2+x| \geq -17$; 6) $|x-1| + 5x < 5$.

19. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1) $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2-x < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - 2x < \frac{3x+1}{2}, \\ 3(1-x) + 2(2-2x) > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x \geq -9, \\ -4x < 60; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6(x^2-1) - 6x(x+2) > 3, \\ 8x^2 - 4x(2x+1) \leq x. \end{cases}$

20. Розв'яжіть сукупність нерівностей:



1) $\begin{cases} 5,5x-2 \leq 0,5x-1, \\ 2-x \geq 5x+1,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - \frac{x-3}{4} - 2 < \frac{-x-1}{8}, \\ -(4-x) \leq 2(3+x). \end{cases}$

21. Розв'яжіть нерівність:

1) $|4-x| > 7$; 3) $|5-2x| \geq 1$; 5) $|-x-11| > 12$;

2) $|x+4| \geq -6$; 4) $|5x+1| > 2$; 6) $-|-2x+7| < -9$.

22. Розв'яжіть нерівність:



1) $|5-3x| > 8$; 3) $|2x+15| \geq 1$;

2) $|2x+42| \geq -1$; 4) $|1-6x| > 2$.

23. За яких значень параметра a не має розв'язків система

нерівностей $\begin{cases} 7-3x > 3-7x, \\ 1-x < a-2x \end{cases}$

Розділ 3. Квадратична функція

qr.orioncentr.com.ua/o5DHA


24. Знайдіть область визначення функції:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) $y = x$; | 6) $y = \sqrt{-x^2 + 5 - 4x}$; |
| 2) $y = x^2 + 8x^3$; | 7) $y = \sqrt{(x+2)(x-2) - 5}$; |
| 3) $y = \frac{x^2}{2x-5}$; | 8) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+10x}}$; |
| 4) $y = \frac{x}{x^2-16}$; | 9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}$; |
| 5) $y = x^2 + \sqrt{1-x}$; | 10) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-8}} + \frac{1}{\sqrt{10-x}}$. |

25. Знайдіть область визначення функції:



- | | |
|----------------------------|---|
| 1) $y = \frac{x+2}{x-4}$; | 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{x-5}$; |
| 2) $y = \sqrt{2x-1}$; | 4) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-25}$. |

26. Знайдіть нулі функції:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) $y = x - 9$; | 5) $y = \frac{x}{x+1}$; |
| 2) $y = -4x^2 + 4x - 1$; | 6) $y = \frac{x-4}{x^2-16}$; |
| 3) $y = x^2 + 9x - 10$; | 7) $y = \frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$; |
| 4) $y = \sqrt{5x-10}$; | 8) $y = \frac{5}{\sqrt{(x-3)(x+1)}}$. |

27. Знайдіть нулі функції:



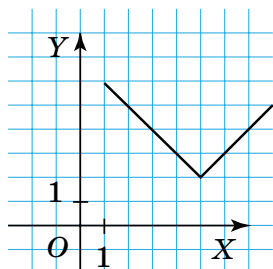
- | | |
|----------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = x^2 - 36$; | 3) $y = \sqrt{x^2 - 10}$; |
| 2) $y = 6x^2 - 4x$; | 4) $y = \frac{x^3 - 4x^2}{x-4}$. |

28. Скільки нулів має функція $y = \frac{(x+a)(x-2a)}{x-2}$ залежно від значення параметра a ?

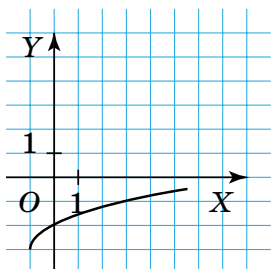
29. Задайте формулою функцію, якщо її графік отримано в результаті переміщення графіка функції $y = \frac{1}{x}$:

- 1) на 3 одиниці вгору вздовж осі OY ;
- 2) на 7 одиниць вниз уздовж осі OY ;
- 3) на 3 одиниці вниз уздовж осі OY та на 9 одиниць праворуч уздовж осі OX ;
- 4) на 9 одиниць ліворуч уздовж осі OX та на 1 одиницю вгору вздовж осі OY .

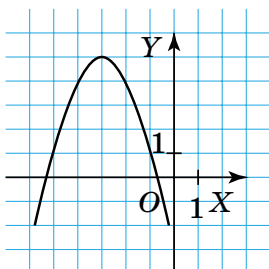
30. Задайте функцію, графік якої подано на малюнках 1–3.



Мал. 1

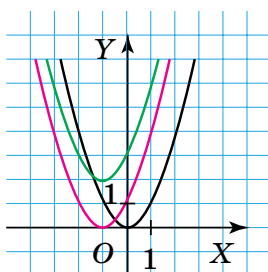


Мал. 2

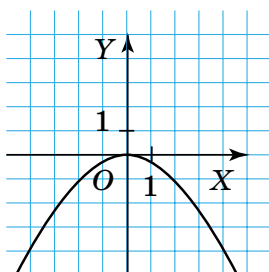


Мал. 3

31. Задайте функції, графіки яких подано на малюнку 4.



Мал. 4



Мал. 5

32. На малюнку 5 зображено графік функції $y = ax^2$. Визначте коефіцієнт a .

33. Побудуйте параболу:

- | | |
|--------------------------|---------------------------------------|
| 1) $y = (x + 5)^2$; | 7) $y = 0,5x^2 - 4$; |
| 2) $y = (x + 1)^2$; | 8) $y = 4 - (2x - 4)^2$; |
| 3) $y = x^2 + 2$; | 9) $y = -\frac{1}{9}(3x - 6)^2 + 1$; |
| 4) $y = (x - 1)^2 + 1$; | 10) $y = x^2 - 6x$; |
| 5) $y = (x + 2)^2 - 5$; | 11) $y = -x^2 + 2x$; |
| 6) $y = (1 - x)^2 - 2$; | 12) $y = x^2 - 4x + 3$; |

13) $y = -2x^2 + 4x - 2$;

15) $y = -3x^2 - 12x + 1$;

14) $y = x^2 - 6x + 5$;

16) $y = (x - 6)(-x + 2)$.

За малюнком визначте:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості функції;
- 5) проміжки зростання;
- 6) проміжки спадання;
- 7) найбільше і найменше значення функції.

34. Побудуйте параболу:



1) $y = (x - 4)^2$;

2) $y = x^2 - 4$;

3) $y = (x - 2)^2 + 6$;

4) $y = x^2 - 10x + 25$.

За малюнком визначте:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості функції;
- 5) проміжки зростання;
- 6) проміжки спадання;
- 7) найбільше і найменше значення функції.

35. Визначте коефіцієнти a і c функції $y = ax^2 + 2x + c$, якщо вершина параболи має координати:

- 1) $(-1; -1)$;
- 2) $(4; -6)$;
- 3) $(2; 3)$.

36. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x+8}$;

7) $y = \frac{3}{x} + 1$;

2) $y = -\sqrt{x-1} - 5$;

8) $y = \frac{3}{x-1} - 4$;

3) $y = 3\sqrt{x-2} + 2$;

9) $y = x^2 - 6|x| + 5$;

4) $y = |x| + 6$;

10) $y = x^2 + 6|x+1| + 3$;

5) $y = -|x+1| + 6$;

11) $y = \frac{x}{x^2 - x}$;

6) $y = -|-3 + x|$;

12) $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x-3}$.

37. Побудуйте графік функції:



1) $y = -\sqrt{x} - 3$;

3) $y = \frac{2}{x-1}$;

2) $y = |x - 3| - 1$;

4) $y = x^2 + |3x - 4|$.

38. На малюнку 6 подано графік функції $y = f(x)$ на проміжку $x \in [-5; 5]$. З'ясуйте, скільки розв'язків має рівняння:

1) $f(x) = 6$;

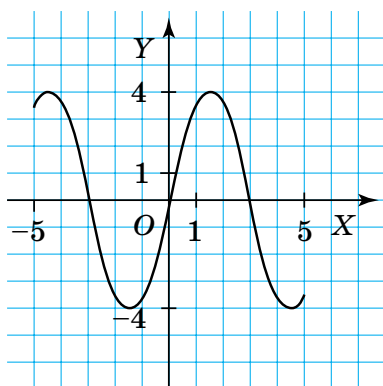
4) $f(x) = -x$;

2) $f(x) = x^2$;

5) $f(x) = |x|$;

3) $f(x) = 2x + 1$;

6) $f(x) = \frac{1}{x}$.



Мал. 6

39. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 \leq 225$;

8) $-2x^2 - x + 3 < 0$;

2) $x^2 + 9 \geq 0$;

9) $x^2 - 7x + 10 \leq 0$;

3) $4x^2 - 1 > 0$;

10) $x^2 + 3x - 10 < 0$;

4) $x^2 - 49 \geq 0$;

11) $-2x^2 + 3x - 1 \geq 0$;

5) $x^2 + 3x + 10 > 0$;

12) $(y + 3)^2 < 9$;

6) $x^2 - 2x + 8 < 0$;

13) $2(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 \geq 1$;

7) $-x^2 + 7x - 12 \leq 0$;

14) $\frac{5-x}{3} + \frac{x-1}{4} \geq \frac{(-x+1)x}{2}$.

40. Розв'яжіть нерівність:



1) $x^2 + 9x < 0$;

2) $x^2 - 9x + 14 \leq 0$;

3) $4x^2 - 3x - 1 \geq 0$;

4) $x(x + 2)^2 > x^3 - 4$.

41. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ 4x - 1 \leq 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - 25 < 0, \\ x^2 - 16 \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -x^2 \geq 2x, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 10 \geq 0. \end{cases}$$

42. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень x виконується нерівність:

$$1) x^2 + 5 > 0;$$

$$3) 2x^2 + x + 4 > 0;$$

$$2) x^2 - 3x + 12 > 0;$$

$$4) -x^2 + 2x - 7 < 0.$$

43. За яких значень параметра a нерівність $ax^2 + (2a - 3)x + a - 1 < 0$ не має розв'язків?

44. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

$$1) \begin{cases} x = y + 3, \\ xy = 4; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = (x - 1)^2, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2y + x = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y = 0, \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4. \end{cases}$$

45. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:



$$1) \begin{cases} x = y + 2, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = 1 - (x - 2)^2, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 + 4x + 4 = 2y; \end{cases}$$

46. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 4, \\ 4x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2, \\ x + y = -8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy + x^2 = 6; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y - x = 4, \\ \frac{x + y}{2} + \frac{1}{x} = 4. \end{cases}$$

47. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:



$$1) \begin{cases} 3x - y = 5, \\ 9x^2 - y^2 = 80; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 0, \\ xy + x^2 = 12; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

48. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

$$1) \begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2 y + xy^2 = 30; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ \frac{3x - y}{5} + \frac{4}{y} = 5. \end{cases}$$

49. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:



$$1) \begin{cases} x^2 - xy = 9, \\ y^2 - xy = 7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y + xy = 5, \\ x^2 y - xy^2 = 6; \end{cases}$$

50. У лікарні працюють два медичні асистенти — Петро та Софія. Вони вводять дані в нову електронну систему. Софія за 1 год опрацює на 4 записи менше, ніж Петро. Відомо, що для внесення 48 записів Софії потрібно на 1 год більше, ніж Петрові. Скільки записів за годину опрацює кожний із них?

51. Два волонтери — Андрій та Оксана — сортують пластикові пляшки для переробки. Оксана за 1 год сортує на 6 пляшок менше, ніж Андрій. Щоб відсортувати 72 пляшки, Оксані потрібно на 1 год більше, ніж Андрієві. Скільки пляшок за годину сортує кожний волонтер?

52. Із двох спортивних баз A і B , що розташовані на відстані 20 км одна від одної, одночасно назустріч один одному вирушили відповідно велосипедист і бігун. Вони зустрілися через 1 год після старту. Знайдіть швидкість кожного спортсмена, якщо велосипедист прибув до бази B на 3 год 45 хв раніше, ніж бігун до бази A .

53. Пішохід і велосипедист одночасно вирушили назустріч один одному з міст A і B , відстань між якими дорівнює 16 км, і зустрілися через годину після відправлення. Потім вони продовжили рух, причому велосипедист прибув до міста A на 2 год 40 хв раніше, ніж пішохід до міста B . Знайдіть швидкість пішохода й велосипедиста.

Розділ 4.

Числові послідовності

qr.orioncentr.com.ua/6PdAX


- 54.** Запишіть чотири перші члени послідовності:
- 1) (a_n) натуральних чисел, кратних числу 7; для цієї послідовності вкажіть:
 - а) a_1 ; б) a_7 ; в) a_{100} ; г) a_n ;
 - 2) (b_n) квадратів натуральних чисел, взятих у порядку зростання; для цієї послідовності вкажіть:
 - а) b_1 ; б) b_3 ; в) b_{20} ; г) b_n ;
 - 3) (c_n) натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2; для цієї послідовності вкажіть:
 - а) c_1 ; б) c_5 ; в) c_{13} ; г) c_n .
- 55.** Знайдіть другий, п'ятий, десятий члени послідовності, заданої формулою:
- 1) $x_n = n + 2$; 3) $c_n = n(n - 1)$;
 - 2) $y_n = n^2 + 5n$; 4) $b_n = (-1)^n \cdot n$.
- 56.** Послідовність задана рекурентною формулою:
- 1) $c_1 = -2$, $c_{n+1} = c_n + 1,5$; знайдіть c_2 , c_4 ;
 - 2) $c_1 = 4$, $c_{n+1} = 3c_n$; знайдіть c_3 , c_5 .
- 57.** Задайте подану послідовність: а) словесно; б) формулою n -го члена; в) рекурентною формулою:
- 1) 5; 10; 15;...;
 - 2) 6; 10; 14; 18...;
 - 3) 0,2; 0,1; 0,05;...;
 - 4) 24; 6; 1,5;....
- 58.** Запишіть перші п'ять членів послідовності:
- E**
- 1) (b_n) кубів натуральних чисел, взятих у порядку збільшення;
 - 2) (y_n) , заданої формулою $y_n = -5n^2 + n$;
 - 3) (y_n) , заданої рекурентно: $y_1 = 32$, $y_{n+1} = 0,5y_n + 1$.
- 59.** Перевірте, чи є членами послідовності:
- 1) $a_n = n^2 - 4n + 9$ числа 9, 69, 109;
 - 2) $b_n = n^2 - 2n + 3$ числа 3, 76, 103.
- 60.** Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:
- 1) $a_1 = 8$ і $a_{17} = 28$; 3) $a_2 = 0,5$ і $a_5 = 6,5$;
 - 2) $a_1 = -12$ і $a_9 = 0$; 4) $a_6 = -10$ і $a_{22} = -38$.

- 61.** Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_{16} = 18$ і $d = -3$;

3) $a_5 = 21$ і $a_9 = 13$;

2) $a_9 = 50$ і $d = 12$;

4) $a_{23} = -0,6$ і $a_{20} = -0,2$.

- 62.** Знайдіть різницю і перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:



1) $a_2 = 1$ і $a_{24} = 45$;

2) $a_5 = -34$ і $a_{13} = -10$.

- 63.** Скільки додатних членів має арифметична прогресія:

1) (a_n): 17,25; 14,75; ... ;

2) (a_n): 61; 47; ... ?

- 64.** Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n):

1) (a_n): 5; 13; ...; $n = 11$;

2) (a_n): $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$; ...; $n = 12$.

- 65.** Знайдіть суму:

1) усіх натуральних чисел, що не перевищують число 60;

2) усіх парних двоцифрових чисел.

- 66.** Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:



1) $a_1 = 8$ і $a_{17} = 28$;

2) $a_4 = 16$ і $a_{12} = 48$.

- 67.** Підприємець вклав гроші в бізнес. За перший місяць роботи його прибуток склав 3000 грн. За кожний наступний місяць прибуток зростав на фіксовану суму. Відомо, що загальний прибуток за 8 місяців учетверо більший за прибуток, отриманий за 10-й місяць. Знайдіть:

1) щомісячне зростання прибутку;

2) загальний прибуток за 12 місяців.

- 68.** Тіло вільно падає з певної висоти. Відомо, що за першу секунду воно долає відстань 5 м, а за кожну наступну – на 10 м більше, ніж за попередню.



1. Задайте послідовність, що описує відстань, яку долає тіло за кожну окрему секунду падіння.

2. Складіть формулу n -го члена цієї послідовності.

3. Визначте, яку відстань подолає тіло за сьому секунду падіння.

4. Знайдіть загальну висоту, з якої впало тіло, якщо його падіння тривало 10 с.

69. Дано геометричну прогресію (b_n) :

1) $5; 15; 45; \dots$;

2) $-0,25; 1; -4; \dots$

Знайдіть:

1) перший член прогресії;

2) знаменник прогресії;

3) восьмий член прогресії;

4) суму перших шести членів прогресії.

70. Дано геометричну прогресію (b_n) :



1) $b_1 = -4$ і $q = -2$;

2) $b_1 = 10$ і $q = \frac{1}{2}$.

Знайдіть: 1) b_2 ; 2) b_8 ; 3) S_4 .

71. Дано члени геометричної прогресії (b_n) :

1) $b_6 = -\frac{2}{9}$, $b_8 = -\frac{1}{18}$;

2) $b_6 = 8$, $b_8 = 128$.

Знайдіть: 1) b_7 ; 2) q ; 3) b_1 ; 4) S_4 .

72. Дано геометричну прогресію (b_n) :



1) $b_n = 5 \cdot 2^n$;

2) $b_n = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}^n$.

Знайдіть:

1) b_1 ; 2) b_4 ; 3) q ; 4) S_6 .

73. Між числами 3 і $-6\sqrt{2}$ вставте два такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.

74. За якого значення x числа $x + 1$, $3 - 3x$ і $5x - 1$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?

75. Знайдіть перший член b_1 і знаменник q геометричної



прогресії (b_n) , якщо
$$\begin{cases} b_4 - b_2 = 72, \\ b_2 + b_3 = 18. \end{cases}$$

76. Для геометричної прогресії (b_n) : $b_1 + b_4 = 168$, $b_3 + b_2 = 72$. Знайдіть: 1) b_1 ; 2) q ; 3) S_5 .

Розділ 5. Елементи стохастики

qr.orioncentr.com.ua/ahFgo



77. До розчину кислоти додали воду, після чого його концентрація зменшилася на 30 %. Після другого додавання води концентрація знизилася ще на 20 %. На скільки відсотків знизилася концентрація кислоти порівняно з початковою?
78. Перед поїздкою бак автомобіля було заповнено на 80 %. Під час поїздки витратили 40 % бензину. Який відсоток баку заповнено бензином наприкінці поїздки?
79. Два фермери здали на реалізацію зерно загальною вартістю 50 000 грн, після чого отримали прибуток 40 %. Від продажу зерна перший фермер отримав 25 % прибутку, а другий мав зерно вищого ґатунку, тому отримав 50 % прибутку. На яку суму здав зерно кожний фермер?
80. Двом бригадам потрібно відремонтувати дороги загальною довжиною 30 км, проте вони відремонтували на 36 % більше, ніж планували. При цьому перша бригада працювала з перевищенням плану на 30 %, а друга — на 45 %. Яку частину дороги планувала відремонтувати кожна бригада?
81. Для реконструкції школи громада отримала грант у розмірі 200 000 грн. Кошти поклали на рахунок під 8 % річних із капіталізацією, щоб через кілька років їх використати на ремонт. Якою буде сума гранту через 4 роки?
82. У невеликому місті проживало 50 000 осіб. Через економічні труднощі кількість населення за рік зменшилася на 4 %. Скільки осіб проживатиме в місті через 3 роки, якщо така тенденція збережеться?
83. У жителів країни N номер паспорта складається із шести цифр, а серія паспорта — із двох літер. У серії використовуються 32 літери, а в номері — усі цифри.

Скільки існує паспортів:

- 1) із серією АВ;
- 2) номер яких 112233;
- 3) номер яких починається з набору цифр 00;
- 4) номер яких містить хоча б одну парну цифру?

84. У країні X автомобільний номер складається із чотирьох цифр, а серія номера — із двох літер. У серії використовуються 28 літер, а в номері — усі цифри. Скільки існує номерів:



- 1) із серією FN ;
- 2) номер яких 9999;
- 3) номер яких закінчується набором цифр 55;
- 4) номер яких містить однакові цифри?

85. У шкільному фотоальбомі є 3 вільні місця для фотографій. Скількома способами можна розмістити 6 фотографій на вільні місця?

86. Обчисліть: 1) $(3! - 4!)^2$; 2) $5 \cdot 5!$; 3) $\frac{14!}{12!}$; 4) $\frac{2026!}{2027!}$.

87. Обчисліть: 1) $(3! - 2!)^3$; 2) $\frac{12!}{10!} - 11$.

88. Побудуйте опуклий n -кутник, якщо $n = 4; 5; 6$. Проведіть у цих многокутниках усі можливі діагоналі. Запишіть кількість діагоналей у кожному n -кутнику. Поясніть, чому кількість діагоналей обчислюється за формулою $\frac{n(n-3)}{2}$.

89. На колі позначили 8 точок. Скільки різних хорд з кінцями в цих точках можна побудувати?

90. Учні й учениці 9 класу з міста Черкаси досліджували, скільки людей приходять у вишиванках на щорічний День вишиванки. За три роки спостережень вони отримали такі результати (табл. 1):

Таблиця 1

Рік	Кількість опитаних	Кількість людей у вишиванках
2023	200	60

Таблиця 1 (продовження)

Рік	Кількість опитаних	Кількість людей у вишиванках
2024	250	90
2025	300	120

1. Обчисліть частоту появи події «випадково обрана людина була у вишиванці» для кожного року.

2. Зробіть висновок про те, чи зростає популярність Дня вишиванки серед жителів міста.

- 91.** У гімназії опитали учнів про те, чи сортують вони сміття вдома. Результати опитування подано в таблиці 2.

Таблиця 2

Клас	Кількість опитаних	Кількість тих, хто сортує сміття
9-А	30	12
9-Б	28	10
9-В	32	20

1. Обчисліть частоту події «випадково обраний учень сортує сміття» для кожного класу.

2. Зробіть висновок про те, який клас найактивніше дбає про довкілля.

- 92.** На виборах до молодіжної ради міста балотуються чотири кандидати: Андрій Андрійович, Богдан Борисович, Богдан Андрійович і Андрій Борисович. З них обирають одного кандидата. Яка ймовірність того, що:
- 1) до ради потрапить Андрій Борисович;
 - 2) обраний кандидат матиме ім'я Богдан;
 - 3) імена кандидата та його батька — однакові?

- 93.** На чемпіонаті з художньої гімнастики виступають 30 спортсменок. Серед них — 5 гімнасток з України і 3 гімнастки з Іспанії. Порядок виступів визначає жеребкування. Яка ймовірність того, що:



- 1) першою виступатиме гімнастка з Іспанії;
- 2) першою виступатиме гімнастка з України;
- 3) першими виступатимуть дві гімнастки з України?

94. Одночасно підкидають два гральні кубики. Підрахуйте ймовірність події:

- 1) «на обох кубиках випаде 5 очок»;
- 2) «на обох кубиках випаде парна кількість очок»;
- 3) «сума очок, що випаде на кубиках дорівнює 9»;
- 4) «сума очок, що випаде на кубиках, кратна числу 5».

95. У скриньку помістили картки, що занумеровані двоцифровими числами, причому використали всі двоцифрові числа. Яка ймовірність того, що на навмання обраній картці написано:



- 1) число 45;
- 2) число, що ділиться на 10;
- 3) число, що складається з однакових цифр;
- 4) число, що більше за 40 і менше від 55?

96. У функцію $y = \frac{k}{x}$ замість коефіцієнта k випадковим способом підставляють числа із множини $\{-4; -3; 1; 2; 3\}$ і будують графік функції. Яка ймовірність того, що графік гіперболи:

- 1) проходить через початок координат;
- 2) проходить через точку $(1; 2)$;
- 3) перетинає пряму $y = x$?

97. Результати дослідження записали в частотну таблицю (табл. 3), але пропустили одне число.

Таблиця 3

Елемент	5	12	20	24	28	32
Частота	2	5	5		4	3

1. Знайдіть пропущене число, якщо середнє арифметичне вибірки дорівнює 20,88.
2. Знайдіть моду отриманої вибірки.
3. Знайдіть медіану цієї вибірки.

98. Результати дослідження записали в частотну таблицю (табл. 4), але пропустили одне число.



Таблиця 4

Елемент	6	13	25	26		20
Частота	2	2	4	3	6	3

- 1. Знайдіть пропущене число, якщо середнє арифметичне вибірки дорівнює 18.
- 2. Знайдіть моду отриманої вибірки.
- 3. Знайдіть медіану цієї вибірки.

99. Розв’яжіть нерівність $1 \leq 2x - 5 \leq 14$. Знайдіть середнє арифметичне цілих розв’язків нерівності.

100. Розв’яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 6x - 9 < 3x + 7, \\ 2x + 1 \leq 4x + 5. \end{cases}$

Знайдіть середнє арифметичне цілих розв’язків системи нерівностей.

101. Статистика народжуваності в Україні показує тенденцію до зменшення (табл. 5). У 2024 році народжуваність досягла найнижчого рівня з початку незалежності країни. На противагу цьому, смертність залишається високою, що призводить до природного зменшення населення в Україні.

Таблиця 5

Рік	Народжуваність, тис. осіб
2020	299,1
2021	273,8
2022	206
2023	187,4
2024	176,7

Використавши функції діаграм у програмах Word або Excel, подайте дані таблиці у вигляді стовпчастих і кругових діаграм.

102. За підсумками 2024 року залізницями України було перевезено 174,93 млн т вантажів. Це на 26,5 млн т, або на 18 %, більше порівняно з 2023 роком. Знайдіть інформацію про обсяги перевезень вантажів залізницями України за 2021–2023 роки. Подайте дані у вигляді стовпчастих і кругових діаграм.



ПРОЄКТ 1. МІСІЯ — МАКСИМУМ ПРИБУТКУ

Ситуація. Ваша компанія «Оптимізатор прибутку» займається оптимізацією прибутків для молодих стартап-компаній. До вашої компанії звертаються молоді підприємці з метою отримати математично обґрунтовані рекомендації щодо оптимізації власного виробництва.

Роль. Ви — консультант-математик, який надає такі рекомендації, що враховують наявні обмеження виробництва компанії-замовника і забезпечують їй максимум прибутку (або мінімум витрат).

Продукт: презентація з рекомендаціями щодо оптимізації виробництва компанії-замовника.

Виконання проєкту

Крок 1. Ознайомтеся із замовленнями клієнтів за поданим планом:

- 1) які ресурси є в розпорядженні компанії клієнта;
- 2) які є обмеження для цих ресурсів;
- 3) яка мета клієнта.

Клієнт 1 (Компанія займається друком шкільного мерчу). Обладнання компанії дає змогу друкувати два основні продукти: футболки з простим логотипом та худі (світшоти) з повнокольоровим принтом. Є обмеження, які необхідно врахувати для отримання максимального прибутку. Прибуток становить 40 грн з кожної футболки і 90 грн з кожного худі. Для друкування компанія може використовувати лише 3 год роботи термопреса. На друк на одній футболці йде 3 хв, а на друк на одному худі — 8 хв. Для придбання фарби та плівки компанія може витратити максимум 5000 грн. Матеріали для футболки коштують 20 грн, а для худі — 50 грн. Щоб задовольнити асортимент, необхідно виготовити щонайменше 10 футболок та 5 худі. Визначте, скільки одиниць кожного товару потрібно виготовити для максимізації загального прибутку.

Клієнт 2 (GameDev — студія). Студія займається створенням мобільних ігор. Компанія планує випустити дві нові гри: просту 2D-головоломку та складний 3D-раннер. Ком-

панія має обмежені ресурси команди (людино-години) та обмеження на серверну пам'ять для розміщення ігор. Водночас вона очікує отримати прибуток у 1000 грн з кожної 2D-гри та 3000 грн з кожної 3D-гри (наприклад, за кожні 1000 завантажень). Ваш програміст має вільний ресурс часу: 80 людино-годин. На розробку однієї 2D-головоломки потрібно витратити в середньому 5 год, а на 3D-раннер — 10 год. Є обмеження для пам'яті сервера: можна використати максимум 45 Гб серверної пам'яті. 2D-гра займає 3 Гб, а 3D-гра — 5 Гб. Через велику складність 3D-раннерів ви вирішили, що кількість 2D-головоломок має бути не меншою, ніж кількість 3D-раннерів. Завдання: визначте оптимальну кількість кожного типу гри для максимізації загального прибутку.

Клієнт 3 (екокав'ярня «Здорові снеки»). Компанія відкриває невеликий стенд зі здоровими перекусами та напоями. Меню складається з двох основних позицій: злакові батончики та веганські смузі. Оскільки компанія дотримується принципів здорового харчування, то має суворі обмеження на інгредієнти (можна використати максимум 400 г цукру / підсолоджувачів на всю партію, один батончик містить 5 г цукру, один смузі — 10 г). Також є обмеження на час роботи обладнання. Час роботи блендера та печі за зміну становить не більш як 180 хв. На виготовлення одного батончика потрібно 2 хв, одного смузі — 4 хв. Очікується прибуток: 25 грн з кожного батончика і 35 грн з кожного смузі. Щоб задовольнити попит на «сухі» перекуси, кількість смузі не має перевищувати кількість батончиків. Завдання: знайдіть оптимальну кількість кожного продукту, яку потрібно виготовити, щоб максимізувати прибуток.

Крок 2. Ознайомтеся зі способом розв'язування задач на оптимізацію прибутку, обговоріть його. Завдання для колективного обговорення:

- 1) що являє собою математична аналітична модель обмежень;
- 2) що є математичною аналітичною моделлю запланованої мети;
- 3) яка графічна модель для системи лінійних нерівностей із двома змінними і для цільової функції;
- 4) які властивості у точок всередині отриманої області, поза нею, у вершин многокутника;

5) чому потрібно визначати значення цільової функції саме у вершинах отриманого багатокутника.

Крок 3. Створіть математичну аналітичну модель для аналізу ситуації:

1) систему лінійних нерівностей із двома змінними для моделювання обмежень вашого клієнта;

2) цільову функцію для моделювання його запланованої мети.

Крок 4. За допомогою графічного калькулятора Desmos (або Geogebra) створіть графічну модель для обмежень (область допустимих розв'язків — ОДР). Виконайте аналіз моделі за поданим планом:

1) знайдіть координати вершин ОДР (або в графічному калькуляторі, або розв'язуючи систему рівнянь);

2) обчисліть значення цільової функції (прибутку) у кожній вершині ОДР.

Скористайтеся таблицею 1.

Таблиця 1

Пряма 1, що обмежує ОДР	Пряма 2, що обмежує ОДР	Точка їх перетину	Обчислення прибутку в точці	Значення прибутку

Крок 5. Зробіть висновок про оптимальний план виробництва, що задовольняє мету клієнта і його обмеження.

Крок 6. Оформте свої рекомендації та обґрунтування до них у вигляді презентації або відео. Презентуйте свій продукт.





ПРОЄКТ 2. ПРОГРЕСІЇ ДОВКОЛА НАС

Ситуація. Микола шукає сенс у вивченні теми «Числові послідовності». Він вважає, що числові послідовності — суто абстрактні поняття, їм немає місця у повсякденні.

Роль. Ви — друзі Миколи, котрі хочуть його переконати в тому, що числові послідовності (арифметична і геометрична прогресії) вирують довкола нас. З цією метою ви досліджуєте життєві ситуації, пов'язані із числовими послідовностями, розробляєте їхній «математичний паспорт» (математичну модель), обґрунтовуєте його.

Продукт: «математичний паспорт» життєвої ситуації, презентація або постер, або інфографіка, або коротке відео для Миколи.

Виконання проєкту

Крок 1. Об'єднайтеся в групи, оберіть одну із життєвих ситуацій для аналізу й моделювання.

Ситуація 1 (кейс «Боргова пастка»). Сергій — друг Миколи — хоче купити нові навушники за 5000 грн. Він хоче запропонувати батькам звернутися за позикою в банк, який надає послугу «швидких грошей» під 2 % за день. Сергій вважає, що батьки заборгують всього 100 грн за день, що борг буде зростати лінійно (як арифметична прогресія) і тоді загальна сума переоплати складе 3000 грн.

Завдання:

- 1) поясніть, у чому помиляється Сергій;
- 2) обчисліть суму боргу через 30 днів;
- 3) підготуйте інфографіку, яка наочно покаже різницю між розрахунками Сергія (борг нараховується як арифметична прогресія) і реальною сумою боргу через 30 днів (борг нараховується як геометрична прогресія).

Ситуація 2 (кейс «Вірусний ефект»). Група учнів зняла для шкільного проєкту відеоролик. Вони опублікували його, і першого дня ним поділилися 10 осіб. Учні припускають, що кожна наступна «хвиля» репостів у 1,5 раза більша за попередню (тобто відео має «віральний коефіцієнт» $q = 1,5$).

Завдання:

1) опишіть за допомогою прогресії закономірність поширення відеоролика;

2) знайдіть, скільки осіб (приблизно) поділяться ним на 5-й та на 10-й «хвили» репостів, скільки загалом людей побачать відео за ці 10 «хвиль»;

3) порівняйте графіки поширення відео, якщо віральний коефіцієнт зменшиться з 1,5 до 1. Чи буде такий ролик вважатися «вірусним»?

Ситуація 3 (кейс «Фрактали»). Команда цифрових художників створює логотип на основі фрактала «Килим Серпінського». Вони почали із суцільного чорного квадрата площею 1 м^2 . На першому кроці (ітерації) квадрат поділили на 9 менших рівних квадратів і видалили центральний. На кожному наступному кроці ця дія повторюється з усіма чорними квадратами, що залишилися. Для створення логотипу було здійснено 5 ітерацій.

Завдання:

1) знайдіть площу фігури, що залишається після кожної ітерації, обґрунтуйте свої обчислення;

2) знайдіть площу фігури, що залишиться після п'яти ітерацій;

3) створіть візуальну модель (у GeoGebra, Desmos або просто намалуйте на постері), яка ілюструє ці 5 ітерацій.

Ситуація 4 (кейс «Біологічний експеримент»). На уроці біології учні досліджують придатність харчових продуктів. Учитель пояснив, що одна бактерія у сприятливих умовах (як у залишеному на столі бутерброді) ділиться навпіл кожні 20 хв. Учні починають свій експеримент о 12:00, і на зразку в цей момент вони, дивлячись у мікроскоп, нарахували 50 бактерій.

Завдання:

1) опишіть, за яким законом відбувається зростання кількості бактерій;

2) обчисліть, скільки бактерій буде на бутерброді о 15:00;

3) створіть графік або шкалу часу, яка покаже «вибухове» зростання кількості бактерій щогодини.

Крок 2. Додаткове дослідження.

Група 1. Змодельуйте ситуацію, коли батьки Сергія щоп'ятниці вносять у банк фіксований щотижневий платіж у розмірі 1000 грн для погашення боргу. Скільки тижнів знадобиться, щоб повністю погасити борг, і скільки гривень вони загалом переплатять банку порівняно з початковими 5000 грн позики.

Група 2. Поміркуйте, чому для стрімкого поширення відеоролика важливе значення коефіцієнта q ; як зміниться процес поширення відеоролика, якщо $q < 1$. Проілюструйте свої міркування за допомогою інфографіки.

Група 3. Поміркуйте, до якого числа прямує значення площі цього фрактала, якщо вирізування продовжувати нескінченно; проілюструйте свої міркування за допомогою графіка.

Група 4. Дослідіть поняття обмежувального фактора (наприклад, брак місця, їжі або накопичення відходів) у біології. Припустіть, що бутерброд є сприятливим середовищем для розмноження бактерій, допоки чисельність колонії не перевищує 150 000 бактерій. Через скільки годин і хвилин зростання колонії досягне цього показника? Створіть графік, який покаже, який вигляд має крива зростання колонії.

Крок 3. Запропонуйте деякі рекомендації життєвого характеру за результатами розгляду вашої ситуації.

Крок 4. Оформте «математичний паспорт» вашої ситуації у вигляді презентації або відео. Презентуйте свій продукт.





ДОДАТКИ

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \quad \frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C} \quad \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

ДІЇ З РАЦІОНАЛЬНИМИ ДРОБАМИ

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{C \cdot D} \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНИХ КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

$$\sqrt{a} \geq 0, \text{ якщо } a \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ якщо } a \geq 0$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, \text{ якщо } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ якщо } a \geq 0 \text{ і } b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ якщо } a \text{ — будь-яке число}$$

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

ТЕОРЕМА ВІЄТА

$$x^2 + px + q = 0 \quad x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$



ВІДПОВІДІ

РОЗДІЛ 1. ПОВТОРЕННЯ ЗА 8 КЛАС

Раціональні вирази

1. 1) x — будь-яке число, крім 0, 5, дріб нескоротний; 2) a — будь-яке число, крім 0, 1 і -1 , $\frac{a^2+1}{a^2-1}$; 3) x — будь-яке число, крім -2 і 2 , $\frac{x-2}{x+2}$; 4) x — будь-яке число, крім -3 і 3 , $\frac{x(x+3)}{(x^2+9)(x-3)}$; 5) b — будь-яке число, крім -6 і 3 , $\frac{b-4}{b+6}$; 6) y — будь-яке число, крім 1 і 2 , $y-3$.
2. 1) $-0,5$; 2) 6 ; 3) -4 або 0 ; 4) -4 або 4 ; 5) 1 ; 6) -5 або 5 . 3. 1) Наприклад, $x-1$; 2) наприклад, $x+1$; 3) наприклад, $x+\frac{1}{3}$; 4) наприклад, x^2-3x+1 ; 5) наприклад, $3x^2+2x+1$. 4. 1) $\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; 2) $\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$. 5. 1) $\frac{(2x-3y)(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3}$; 2) $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$; 3) звести неможливо; 4) звести неможливо. 6. 1) $\frac{x+2}{2}$; 2) $\frac{x^2-3x+9}{5x}$; 3) $\frac{c^2-1}{c^2+1}$; 4) $\frac{a-4}{a}$; 5) $\frac{b-3}{3}$; 6) $\frac{2y}{2-3y}$. 7. 1) $\frac{x+3y}{4xy}$; 2) $\frac{x-1}{7}$; 3) $\frac{x+5}{x-1}$; 4) $\frac{x-7}{x^2-x+1}$. 8. 1) $a+9$; 2) $\frac{b-8}{2}$; 3) $\frac{x^2+24x+5}{5x^2}$; 4) $\frac{5x}{x^2-1}$; 5) $\frac{d}{c}$; 6) $\frac{6b+5}{5-4b}$. 9. 1) $\frac{1}{x+2}$; 2) $\frac{y(y-x)}{x(y+x)}$; 3) $-\frac{y(x+2)}{4}$; 4) $\frac{4x^2(x-y)}{x+y}$; 5) $-y$; 6) $\frac{1-3y}{1+3y}$. 10. 1) $\frac{6}{6-a}$; 2) $\frac{x^2+3x+2}{x^2(x^2+x+1)}$. 11. 1) 6 ; 2) 8 ; 3) $2\frac{1}{3}$. 13. 1) $(-3; -1)$; 2) $(5; 3)$ і $(-1; -3)$; 3) $(8; 1)$ і $(2,5; -1,2)$; 4) $(5; 2)$ і $(\frac{2}{3}; -4,5)$. 14. 1) $a=0,25$, $b=-0,25$; 2) $a=1$, $b=-1$; 3) $a=-1$, $b=1$.

Степені

15. 1) x^{-1} ; 2) x^{-10} ; 4) $(0,2x)^{-2}$. 16. 1) x^{-5} ; 2) x^{16} ; 4) x^{-31} ; 6) x^{-28} . 17. 1) 6^{-5} ; 2) 2^{-4} ; 4) 450^4 . 18. 1) $\frac{1}{27}x^3y^{-3}$; 2) $x^{12}y^{-36}$; 3) $49x^{-2}m^6n^{-2}$.

19. 1) $\frac{1}{27}$; 2) 100; 4) $3\frac{8}{9}$; 5) 1,25; 6) 80; 7) 20 000 000.
 20. 1) $6,51 \cdot 10^2$; 2) $9,9 \cdot 10^{-2}$; 3) $2,05 \cdot 10^4$. 21. $4 \cdot 10^5$. 22. $1,29 \cdot 10^4$ г.
 23. 1) $4,9 \cdot 10^{-2}$, $5,9064 \cdot 10^{-4}$. 24. -2.

Квадратні корені. Дійсні числа

26. 1) Ні; 2) так; 3) так. 27. 1) Ні; 2) так; 3) так. 28.1) (2; 4), (-2; 4); 2) (-1; 1); 3) (0; 0), (1; 1). 29. 1) 8, 4; 2) 8, 0, 4; 3) 8, -5, (5), 0, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, 4; 4) π , $\sqrt{6}$; 5) 8, -5, (5), 0, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, π , 4, $\sqrt{6}$. 30. 1) $3\frac{1}{3}$; 2) $2\frac{1}{3}$; 4) 10; 5) 0; 6) $4\sqrt{2}$. 31. 1) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; 2) $5\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{a}$; 5) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$; 6) $2+\sqrt{3}$; 7) $\sqrt{5}-1$. 32. 1) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{180x}$; 4) $\sqrt{x^5}$; 6) $-\sqrt{x^3}$. 33. 1) $3\sqrt{0,1}$; 2) $6\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{2a^2}$. 34. 1) $x-2$; 2) $2x+10$; 3) $9-x$; 4) $2x^2+2$; 6) $-x-4$. 35. 1) $4\sqrt{5}$, ірраціональне число; 2) 0, раціональне число; 4) 4, раціональне число; 5) $25+4\sqrt{5}$, ірраціональне число; 7) $2\sqrt{3}$, ірраціональне число. 36. 1) $x=\pm 4$; 2) не має розв'язків; 3) $x=\pm 5$; 4) $x=\pm\sqrt{3}$; 5) $x=4$, $x=-6$; 6) $x=9$. 37. 1) $x=25$; 2) $x=1,21$; 3) не має розв'язків; 4) $x=5$. 38. 1) 1,5; 2) 2; 3) $2\frac{1}{3}$.

Квадратні рівняння

39. 1) $4i-2$; 2) $1i-7$; 3) $-3i+1,6$; 4) $-1i+\frac{1}{6}$. 40. 1) $4i+4$; 2) $-9i-3$; 3) коренів немає; 4) $9i+0,25$. 41. 1) $15i+1$; 2) $-10i-1$; 3) $6i-4$; 4) $1i-3$. 42. 1) $(x-4)(x-2)$; 2) $(x-2)(x+1)$; 3) $5\left(x-\frac{2}{5}\right)(x+1)$; 4) $-6\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)$. 43. 1) $(x-3)(x-1)$; 2) $(x-4)(x+2)$; 3) $7\left(x-\frac{2}{7}\right)(x+1)$; 4) $-(3x-2)^2$. 44. 1) $\frac{1}{2x+5}$; 2) $\frac{x-3}{x-1}$; 3) $\frac{x-1}{3x-1}$; 4) $\frac{x+8}{x+5}$. 45. 1) $7i+1$; 2) $2i-3$; 3) $\pm 1i \pm 7$; 4) $0i+1\frac{1}{3}$. 46. 1) $0,5i+0,5$; 2) $7i-4$; 3) $\pm\frac{1}{3}$; 4) $2i-3$. 47. 1) $-1i-27$; 3) $4i-2$. 48. 1) 1; 2) $5i-3$; 3) -1 ; 4) $-6i+5$. 50. 1) $4i+16$; 2) $32i+2$. 51. 40 км/год. 52. 3 год і 6 год. 53. 12 год і 6 год. 54. 36 м. 55. 36 см. 56. 1) ± 6 ; 2) таких значень параметра немає. 57. -1.

РОЗДІЛ 2. НЕРІВНОСТІ

§ 1. Числові нерівності та їх властивості

77. 1) Так; 3) так; 5) так. 78. 1) Ні; 2) так; 3) так. 81. 2,223 — найменше число, 3,32 — найбільше. 83. 1) a ; 3) $a = c$; 5) a ; 7) a ; 9) a . 84. 1) a ; 2) $a = b$; 3) a ; 4) a . 85. 1) Ні; 3) ні; 5) ні. 86. 1) Так; 3) ні; 5) ні. 87. 1) Ні; 3) так; 5) ні. 88. 1) B ; 3) B ; 5) A . 89. 1) N ; 3) N ; 5) N . 90. 1) D ; 3) C ; 5) C . 92. 1) $3a > 3b$; 2) $-5a < -5b$; 3) $0,1b < 0,1a$; 4) $\frac{2a}{3} > \frac{2b}{3}$; 5) $-\frac{4}{7}b > -\frac{4}{7}a$; 6) $\sqrt{3}a > \sqrt{3}b$. 93. 1) $m + 2 < 2 + n$; 2) $m - 5 < n - 5$; 3) $2m + 1 < 2n + 1$; 4) $-5m + 7 > 7 - 5n$. 94. 1) $3x - 1 < -1 + 3y$; 2) $-4y + 5 < 5 - 4x$. 96. 1) $<$; 2) $>$; 3) $>$; 4) $>$; 5) $>$; 6) $<$. 98. 1) $1 - 2n > -2n + 0,5$; 2) $3(2m - 1) < 2(2 + 3m)$. 102. 1) якщо $a > 0$, то $a^2 < ab$; якщо $a < 0$, то $a^2 > ab$. 104. 1) $-1 < \frac{1 - \sqrt{6}}{2} < 0$; 2) $-2 < \frac{1 - \sqrt{39}}{4} < -1$; 3) $6 < 2 + \sqrt{17} < 7$.

§ 2. Нерівності зі змінною. Рівносильні нерівності

111. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) так. 112. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. 113. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) ні. 114. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так. 115. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) ні. 116. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 117. 1) $10 \leq 2a \leq 16$; 2) $7 \leq a + 2 \leq 10$; 3) $3 \leq a - 2 \leq 6$; 4) $-6 \leq 2 - a \leq -3$. 118. 1) $6 \leq 2b \leq 10$; 2) $-15 \leq -3b \leq -9$; 3) $0,6 \leq \frac{b}{5} \leq 1$; 4) $9 \leq b^2 \leq 25$. 119. 1) $6 \leq 3x \leq 18$; 2) $5 \leq x + 3 \leq 9$; 3) $-18 \leq -3x \leq -6$; 4) $4 \leq x^2 \leq 36$. 120. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. 121. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) ні; 6) ні. 122. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. 123. 1) Ні; 2) так; 3) так. 124. 1) Так; 2) так; 3) ні. 125. 1) $0 \leq 2a - 1 \leq 5,4$; 2) $3,5 \leq 3a + 2 \leq 11,6$; 3) $0,5 \leq 5a - 2 \leq 14$; 4) $-28 \leq 4 - 10a \leq -1$; 5) $-3,4 \leq 3 - 2a \leq 2$. 126. 1) $1,6 \leq 3b - 2 \leq 5,5$; 3) $-22 \leq 3 - 10b \leq -9$. 127. 1) $0 \leq 2a + b \leq 11$; 3) $-15 \leq 5a - 2b \leq 11$; 5) $0,5 \leq \frac{a+b}{2} \leq 4$; 7) $-\frac{1}{3} \leq \frac{b-a}{3} \leq 2$; 9) $1 \leq (a+b)^2 \leq 64$; 11) $0 \leq \frac{4a+2b}{11} \leq 2$. 128. 1) $1 \leq 2y + x \leq 10$; 3) $-3 \leq y - 2x \leq 6$; 5) $-0,25 \leq \frac{y-x}{4} \leq 1,25$; 7) $1 \leq (2x+3y)^2 \leq 256$. 130. $11,2 \leq P \leq 12,6$; $7,75 \leq S \leq 9,8$. 132. 1) $-3 \leq x \leq 3$; 3) $-4 \leq x \leq 1$; 5) $12 \leq x \leq 18$. 134. 4 пачки.

§ 3. Числові проміжки

143. 1) а) Так; б) ні; в) ні; г) так; 2) а) ні; б) так; в) ні; г) ні; 3) а) так; б) ні; в) ні; г) так; 4) а) так; б) так; в) так; г) ні. 146. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. 147. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. 148. 1) 0; 1; 2; 2) -1; 0; 1; 2; 3) -1; 0; 1; 2; 3; 4) 0; 1; 2; 3. 149. 1) 4 і 0; 2) 5 і -1; 3) 5 і -1; 4) 6 і 0. 150. 1) -1; 0; 1; 2) -2; -1; 0; 1; 3) -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4) -1; 0; 1; 2; 3. 152. 1) $[-2; 3]$; 2) $[-2; 2]$; 3) $[-3; 13]$; 4) $[2; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $[-2; +\infty) \cup \{-5\}$. 153. 1) $(-2; 3]$; 2) $[-5; 2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $[-2; 3]$. 156. 1) $(3; 5)$; 2) $(0; 6)$; 3) $\emptyset$; 4) $(2; 3)$; 5) $\emptyset$; 6) $(5; 12)$. 157. 1) $[-1,5; -1]$; 2) $(-7; -2,1]$; 3) $[-4,5; 1,5]$; 4) $\emptyset$. 158. 1) $(0; 11]$; 2) $\emptyset$; 3) $[-2,4; 2,4]$; 4) $\emptyset$. 160. 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5]$; 3) $[-1; 1,5]$; 4) $\emptyset$. 161. 1) $\frac{5}{2}, \frac{6}{2}$; 3) $\frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{13}{4}$. 162. 1) $\frac{4}{2}, \frac{5}{2}$; 2) $\frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}$. 164. Якщо $a = -1$, то $x \in (-5; 1)$; якщо $a = 0$, то $x \in (-2; 3)$; якщо $a = 1$, то $x \in (1; 5)$; якщо $a = 2$, то $x \in (4; 7)$. 165. Якщо $a = 0$, то $x \in (-1; 1)$; якщо $a = 1$, то $x \in (1; 4)$; якщо $a = 2$, то $x \in (3; 7)$. 166. 1) $(a; c)$; 3) $(a; c)$; 5) $(a; +\infty)$; 7) $(a; b) \cup (c; +\infty)$. 167. 1) $(a; c)$; 3) $(a; d) \cup (b; c)$; 4) $\emptyset$; 5) $(a; c)$; 7) $(a; b) \cup (c; +\infty)$. 168. 1) $(x; t) \cup (m; y)$; 2) $\emptyset$; 3) $(t; m)$.

§ 4. Лінійні нерівності з однією змінною

178. 1) $x > 2$; 2) $x > 1,25$; 3) $x > -2$; 4) $x > -1\frac{2}{3}$; 5) $x < 0$; 6) $x < -1\frac{1}{3}$; 7) $x < 4$; 8) $x < 1,75$; 9) $x < -3$; 10) $x < -2,4$; 11) $x > -7$; 12) $x > -4\frac{1}{3}$. 179. 1) $x > 5$; 3) $x < -3,25$; 5) $x < -2\frac{7}{9}$. 180. 1) $x \geq 2,5$; 3) $x \geq -3\frac{1}{3}$; 5) $x \leq -13$; 7) $x \leq 0$; 9) $x \leq -3,2$; 11) $x \geq -4,5$. 181. 1) $x \geq 2,2$; 3) $x \leq -7\frac{2}{3}$; 5) $x \leq -6,5$. 182. 1) $x \geq 100$; 2) $x \leq 25$; 3) $x \leq 10$; 4) $x < -20$; 5) $x \leq -7$; 6) $x > 6$; 7) $x \leq 3,2$. 183. 1) $x < 30$; 3) $x \geq -14$. 184. 1) $x > -3\frac{2}{3}$; 3) $x < 4\frac{5}{7}$. 185. 1) $x > -1,6$; 2) $x > 1\frac{3}{7}$; 3) $x > 1\frac{5}{8}$. 186. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. 187. 1) $x > 1,5$; 3) $x < -1$; 5) $x < 1,8$; 7) $x > -16$. 188. 1) $x \leq 6$; 3) $x \geq -1$. 189. 1) $a < 6$; 3) $a < -6$. 190. 1) $b < 0,8$; 3) $b < 5$. 191. 1) $x > 1,2$; 3) $x > 6,4$; 5) $x > -\frac{5}{23}$. 192. 1) $\emptyset$; 3) $(-\infty; +\infty)$. 193. 1) $x > 2\frac{3}{11}$; 2) $x < 15$. 194. 1) $x \leq \frac{5}{11}$; 3) $x > 2$. 195. 1) $x \geq 3$;

2) $x \geq 3$; 3) x – будь-яке число; 4) $\emptyset$; 5) $x \leq -1$. **196.** 1) $x \leq 8$; 2) $x \geq -2,5$. **199.** Більше за 0,6 га/год. **200.** 5 см. **201.** Менше ніж 25,5 см. **202.** 8 місяців. **203.** 13 сеансів.

§ 5. Системи лінійних нерівностей з однією змінною

212. 1) 0; 1; 2) -1; 0; 3) 0; 1; 4) -1; 0; 1. **214.** 1) [1; 5); 3) [-3; 2]; 5) $(-\infty; 1]$; 7) $(-\infty; -3)$. **215.** 1) [2; 6); 3) [-4; 4]; 5) [-2; 3]. **216.** 1) [1; 4]; 3) [2; 5]. **217.** 1) [2; 2,5); 3) [-0,5; $+\infty$); 5) [0; 2]; 7) $(-\infty; -4,5]$; 9) (2; $+\infty$). **218.** 1) $\emptyset$; 3) $(-\infty; 2]$. **219.** 1) $\emptyset$; 2) [0,5; 1,5); 3) $\emptyset$; 4) $\emptyset$. **220.** 1) $\{-3\}$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **221.** 1) $(-\infty; -12)$; 3) [-4; -2]. **222.** 1) [5; 6); 2) $(-\infty; 2]$. **223.** 1) [2; 7]. **225.** 1) [-4; 4]; 3) $\emptyset$; 5) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **226.** 1) [-11; 3]; 3) [-1,5; 0]. **227.** 1) $(-\infty; 6]$; 3) $\left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **228.** 1) [-4; 1]; 2) [14; $+\infty$). **229.** 1) [-10; -1]; 3) (4,5; 6,5). **230.** 1) [1; 6,6]; 2) [-2,4; 4,25]. **231.** 1) 0; 1; 2) -1; 0; 1; 2; 3) 3; 4. **232.** 1) [-1; 2]; 3) $(-\infty; -2] \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; +\infty)$. **234.** 1) $\emptyset$; 2) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **235.** 1) $\{-1\}$; 3) [-5; 1]. **236.** [25; 30]. **237.** [30; 37,5]. **239.** [2; 3]. **240.** 1) а) $a \leq 5$; б) $a > 5$; 3) а) $a < 5$; б) $a \geq 5$. **242.** 9 відер.

§ 6. Сукупності лінійних нерівностей з однією змінною

248. 1) $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0] \cup (15; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) [3; $+\infty$); 6) $(-\infty; 5]$; 7) (2; $+\infty$); 8) $(-\infty; 0]$. **249.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 6]$; 5) $(-\infty; -5] \cup (4; +\infty)$. **250.** 1) $(-\infty; 3]$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 7)$. **251.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) (-15; $+\infty$); 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0,75] \cup (4; +\infty)$. **252.** 1) $(-\infty; -13) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -0,25] \cup [0,625; +\infty)$; 4) [0,3; $+\infty$). **253.** 1) $(-\infty; 5]$; 2) $(-\infty; 0,05) \cup [20; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0,2]$; 4) $\left(-\infty; \frac{4}{9}\right]$. **254.** 1) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$; 3) [-25; $+\infty$); 4) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. **255.** 1) $(-\infty; -20)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) (-2; $+\infty$); 4) $\left(-\frac{1}{12}; +\infty\right)$. **256.** 1) $(-\infty; 0,3] \cup (0,4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1)$. **257.** 1) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$. **258.** 1) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1,24) \cup (0,04; +\infty)$; 5) $(-\infty; -0,5) \cup$

- $\cup (7,5; +\infty)$. **259.** 1) $(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0,8) \cup \left(1\frac{13}{15}; +\infty\right)$. **260.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $(1,5; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{6}{7}; +\infty\right)$; 5) $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right)$; 6) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$. **261.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right]$; 3) $[-0,4; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0,1) \cup (1,8; +\infty)$. **262.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (0,42; +\infty)$; 4) $\left(-\frac{19}{32}; +\infty\right)$. **263.** 1) $[6; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2)$; 4) $(-\infty; -5) \cup [6; +\infty)$. **264.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 9,5]$. **265.** 1) $(-\infty; 2,75]$; 2) $[-2; +\infty)$; 3) $\left(-\frac{23}{34}; +\infty\right)$. **266.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; 1\frac{8}{11}\right]$. **267.** 1) 2 і 3; 2) $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; 3) $7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$. **269.** 1) $(-\infty; 0) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; 3) таких чисел немає; 4) $\left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$. **270.** 1) $[-10; -6] \cup [4; 8]$; 2) $(-0,6; 1)$; 3) $\left(-2; \frac{2}{3}\right] \cup \left[2; 4\frac{2}{3}\right)$. **271.** 1) $[-8; -4] \cup [-2; 2]$; 2) $\left(-\frac{5}{7}; 1\right)$; 3) $(1,1; 1,4) \cup [2,6; 2,9)$; 4) $[-0,05; 0,15) \cup (0,35; 0,55]$. **272.** 1) Розв'язків немає; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0,25]$; 4) $\left(-\infty; 1\frac{1}{9}\right)$. **273.** 1) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right)$; 2) $(-\infty; 1)$. **274.** 1) $(-\infty; 4) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-1; 3)$; 4) $(-\infty; -6) \cup [9; +\infty)$. **275.** 1) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 7. Функція та її властивості

- 287.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **288.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **289.** 1) 14; 2) 6; 3) 0; 4) -6 ; 5) -4 . **292.** 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 5) $(-\infty; -10) \cup (-10; 10) \cup (10; +\infty)$; 8) $(-\infty; +\infty)$. **293.** 1) $(-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$; 7) $(-\infty; -1) \cup (-1; 8) \cup (8; +\infty)$; 8) $(-\infty; -1) \cup (-1; 8) \cup (8; +\infty)$. **295.** 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = \{5\}$, нулів функція не має, $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$, нуль функції: $x = 0$, $y < 0$, якщо

$x \in (-\infty; 0)$, $y > 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$; 3) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$, нуль функції: $x = 5$, $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; 5)$, $y < 0$, якщо $x \in (5; +\infty)$; 4) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, нулів функція не має, $y > 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$ 297. 1) 4; 1; 0; 1; 4; 2) 0; -1 і 1; 3) $f(x) > 0$ для всіх даних значень аргументу. 300. 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) спадна; 4) спадна. 301. 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) спадна; 4) спадна. 303. 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) спадна. 305. 1) $f(0) < f(4)$; 2) $f(1) < f(2,5)$; 3) $f(-2) < f(-4)$; 4) $f(11) < f(10)$. 306. 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; 2) $E(y) = [0; +\infty)$; 3) $x = 0$; 4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. 308. Мал. 64: 1) $[-2; 1]$; 2) $[0; 4,5]$; 3) $x = 0$; 5) $[-2; 0]$ — проміжок спадання; $[0; 1]$ — проміжок зростання. 309. Мал. 66: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$; 4) $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 4)$; $y > 0$, якщо $x \in (-2; 2) \cup (4; +\infty)$; 5) $[0; 3]$ — проміжок спадання; $(-\infty; 0]$ і $[3; +\infty)$ — проміжки зростання; 6) найбільшого значення функції і найменшого значення функції не існує. 310. Таблиця 1.

Таблиця 1

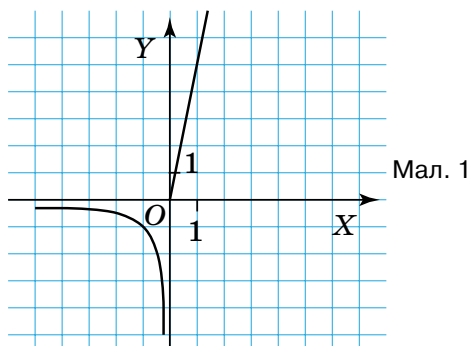
x	-9	-3	-2	0	1	2	4	8
$f(x)$	1	3	5	1	5	10	20	40

311. Таблиця 2.

Таблиця 2

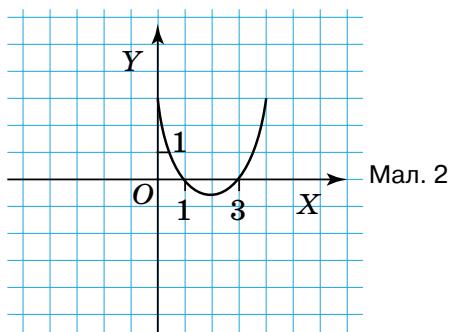
x	-6	-4	-3	0	1	4	9	16
$f(x)$	$\frac{6}{7}$	0,8	-2	1	2	-2	-3	-4

312. 1) $(1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$; 5) $\emptyset$; 6) $(1; +\infty)$; 7) $\emptyset$; 9) $(-6; -4) \cup (-4; +\infty)$; 11) $\{0\}$; 13) $[0; 2]$; 14) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. 313. 1) $[7; +\infty)$; 2) $[8; 10]$; 3) $\{1\}$; 4) $(-3; 3)$. 318. 1) $x = -5$, $x = 1$; 4) $x = 0$, $x = 9$; 5) $x = \pm 2$; 6) $x = 5$; 7) $x = \pm \sqrt{6}$; 8) $x = 3$; 11) $x = -2$. 319. 1) $x = -2$, $x = 1$; 2) $x = 1$; 3) $x = 4, 5$; 4) $x = -6$; 5) немає; 6) немає. 326. а) Мал. 1.



Мал. 1

1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $x = 0$; 4) $f(x) < 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) > 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0)$ — проміжок спадання; $[0; +\infty)$ — проміжок зростання; 6) найбільшого і найменшого значення функція не має. **329.** Мал. 2.



Мал. 2

§ 8. Перетворення графіків функцій

343. 1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = 6\sqrt{x}$. **345.** $a = 0,25$ (мал. 94), $a = -3$ (мал. 95). **348.** Таблиця 3.

Таблиця 3

Властивості	$y = x^2$	$y = -x^2$
область визначення функції	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
область значень функції	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
$y < 0$	—	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$y > 0$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—

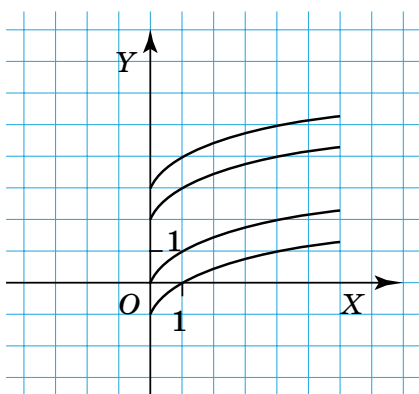
Властивості	$y = x^2$	$y = -x^2$
проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

353. 1) $y = \sqrt{x-12}$; 2) $y = \sqrt{x+20}$. 359. Таблиця 4.

Таблиця 4

Властивості	$y = x^2$	$y = (x-3)^2$
область визначення функції	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
область значень функції	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
нулі функції	$x = 0$	$x = 3$
$y < 0$	—	—
$y > 0$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 3]$
проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$[3; +\infty)$

361. 1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = \sqrt{x} - 10$. 365. Мал. 3.



Мал. 3

367. Таблиця 5.

Таблиця 5

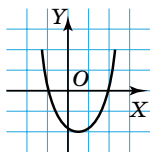
Властивості	$y = x^2$	$y = x^2 - 4$
область визначення функції	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
область значень функції	$[0; +\infty)$	$[-4; +\infty)$

Властивості	$y = x^2$	$y = x^2 - 4$
нулі функції	$x = 0$	$x = -2, x = 2$
$y < 0$	—	$(-2; 2)$
$y > 0$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0]$

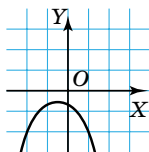
369. 1) $y = -|x+3|$; 2) $y = |x-3|+2$. **371.** 1) $(-1; 5)$; 2) $(1; 3)$; 3) $(-6; -3)$; 4) $(5; -8)$. **374.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[3; +\infty)$; 3) нулів немає; 4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$. **377.** $x = -5$, $E(f) = [-12; 18]$. **378.** 1) -2 ; -14 ; -62 ; 2) -14 ; -2 ; -2 . **382.** 1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = (x-3)^2 - 15$; 3) $y = (x+1)^2 + 4$; 4) $y = (x-1)^2 + 17$. **386.** $y = (x-1)^2 - 4$.

§ 9. Квадратична функція

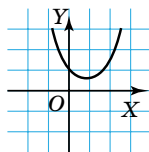
399. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так. **400.** 1) $x = 0$, $y = 0$; $x = -1$, $y = -5$; $x = 3$, $y = 27$; $x = -4$, $y = -8$; **401.** 1) $x = 0$, $y = 2$; $x = -1$, $y = 1$; $x = 3$, $y = -7$; $x = -4$, $y = -14$; 2) $y = 1$, $x = \pm 1$; $y = -2$; $x = \pm 2$; $y = -7$; $x = \pm 3$. **402.** $(1; 1)$, $(-7; -7)$. **403.** $(2; 4)$. **404.** $(1; 3)$; $(-3; -9)$. **405.** 1), 5), 6). **406.** 1). **407.** 1) $(1; 0)$, переміщення параболи $y = x^2$ на 1 од. праворуч уздовж осі OX ; 2) $(-5; -25)$, переміщення параболи $y = x^2$ на 5 од. ліворуч уздовж осі OX та на 25 од. вниз уздовж осі OY ; 4) $(6; -45)$, переміщення параболи $y = x^2$ на 6 од. праворуч уздовж осі OX та на 45 од. вниз уздовж осі OY . **410.** 1) $y = x^2 - 14x + 56$; 2) $y = x^2 + 4x + 2$. **411.** 1) $(2; -4)$; 2) $(-2,5; -6,25)$; 3) $(0; 3)$; 8) $(4; -43)$. **412.** 1) $(6; -36)$; 2) $(0; 5)$; 4) $(7; -139)$; 5) $(-1; 0)$; 6) $(-2; 23)$. **413.** 1) $x = -5$, $x = 1$; 2) $x = -1$, $x = 8$; 3) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$. **414.** 1) $(0; 0)$, $(4; 0)$; 11) $(-0,5; 0)$, $(\frac{1}{3}; 0)$, $(0; 1)$; 12) $(0,5; 0)$, $(5; 0)$, $(0; 5)$. **415.** 1) $(9; 0)$, $(0; 0)$; 2) $(-8; 0)$, $(8; 0)$, $(0; -64)$; 7) $(1; 0)$, $(1,5; 0)$, $(0; 3)$. **416.** Малюнок 117: $a < 0$, $D > 0$. Малюнок 118: $a > 0$, $D > 0$. **418.** 1) Мал. 4; 2) мал. 5; 3) мал. 6; 4) мал. 7.



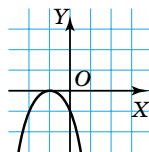
Мал. 4



Мал. 5

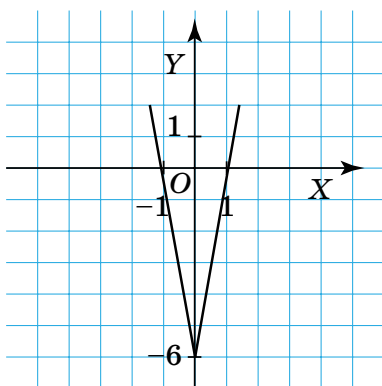


Мал. 6



Мал. 7

420. Малюнок 123: 1) $(-4; -16)$; 2) $[-16; +\infty)$; 3) $(0; 0), (-8; 0)$.
 422. 1) $p = -9, q = 0$; 2) $p = 0, q = -25$. 423. 1) $f(3) > f(5)$; 2) $f(-1,5) < f(5)$;
 3) $f(-2,7) < f(0,9)$; 4) $f(-2) < f(3)$. 424. 1) $f(0) < f(1,5)$; 2) $f(-2) < f(-5)$.
 428. 1) $y = (x - 4)^2 - 16$; 2) $y = (x - 3)^2 - 1$; 3) $y = (x + 1)^2 - 1$;
 4) $y = (x - 2)^2$. 429. 1) Вітки параболи напрямлені вгору, точка $(0,5; -2,25)$ — вершина параболи, $(-1; 0), (2; 0)$ — точки перетину з віссю абсцис, $(0; -2)$ — точка перетину з віссю ординат; 2) вітки параболи напрямлені вгору, точка $(2,5; -6,25)$ — вершина параболи, $(0; 0), (5; 0)$ — точки перетину з віссю абсцис. 432. Малюнок 127: $a < 0, b < 0, c = 0$; малюнок 128: $a > 0, b < 0, c < 0$. 433. Малюнок 129: $a > 0, b < 0, c = 0$; малюнок 130: $a < 0, b < 0, c < 0$. 436. 1) $(0; 4), (4; 4)$; 2) $(1; 1), (-2,5; -2,5)$; 3) $(0; 0), (4; 0)$. 437. а) 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $x = 3, x = -1$; 4) $f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; $f(x) < 0$, якщо $x \in (-1; 3)$; 5) -4 , якщо $x = 1$; 6) $[1; +\infty)$; 7) $(-\infty; 1]$; 8) -4 . 439. а) 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[2; +\infty)$; 3) немає; 4) $f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; 2]$; 6) $[2; +\infty)$; 7) найбільшого значення функції не існує; 8) 2. 441. Малюнок 133: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-4; +\infty)$; нулі функції: $x = -2, x = 2$; $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $y < 0$, якщо $x \in (-2; 2)$; найбільшого значення функції не існує; найменше значення функції дорівнює -4 ; функція зростає, якщо $x \in [0; +\infty)$; функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 0]$; $y = x^2 - 4$. 447. 1) $a = 1,25, b = -5, c = 10$. 448. 1) $b = -8, c = 16$; 2) $b = 0, c = -5$. 449. 1) $b = -10, c = 25$; 2) $b = -8, c = 13$. 450. Малюнок 135: $a = 1, b = 0, c = 0$. Малюнок 136: $a = 1, b = 4, c = 5$. 455. 1) Мал. 8.



Мал. 8

§ 10. Квадратна нерівність

462. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так; 5) так; 6) так. 463. $x \in (-6; 1)$.
 464. $x \in (1; 3)$. 466. $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 467. 1) $x \in [-1; 1]$;
 2) $x \in (-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; +\infty)$; 5) $\emptyset$. 468. 1) $x \in [-5; 5]$;
 2) $\emptyset$; 3) $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$; 4) $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; 5) $\emptyset$.
 469. 1) $x \in (-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$; 2) $x \in (-2; 5)$; 3) $x \in [-2; 6]$; 7) $x \in (-2; 8)$;
 10) $x \in [3; 7]$; 14) $x \in (-6; 2)$. 470. 1) $x \in [-3; -1]$; 5) $x \in (-\infty; -1] \cup$
 $\cup [6; +\infty)$; 8) $x \in [-8; 1]$. 471. 1) $x = 2$; 2) $\emptyset$; 3) $x \in (-\infty; +\infty)$;
 4) $x \in (-\infty; -1,25) \cup (-1,25; +\infty)$; 5) $x = 10$. 472. 1) $x \in (-\infty; -4) \cup$
 $\cup (-4; +\infty)$; 2) $x = 7$; 3) $x \in (-\infty; +\infty)$; 4) $x \in (-\infty; +\infty)$; 5) $\emptyset$.
 474. 1) $x^2 - 10x < 0$; 2) $x^2 - 36 \leq 0$; 3) $x^2 - 2x - 15 < 0$; 4) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$.
 476. 1) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 2) $x \in [-5; 1]$; 4) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.
 478. 1) $x \in (-2; 8)$; 2) $y \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$; 4) $y \in (-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$.
 480. 1) $x \in (-2; 3,5)$; 2) $\emptyset$. 481. 1) 7; 2) 5; 3) 1; 4) безліч. 482. 1) 8;
 2) безліч; 3) 2. 484. 1) 2; 2) 1. 490. $x \in \left(\frac{1}{5}; 1\right)$. 492. $x \in (-\infty; -3) \cup$
 $\cup (-1; +\infty)$. 493. 1) $x \in [-2; 4]$; 2) $x \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$;
 3) $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$; 4) $x \in (-\infty; +\infty)$; 5) $x \in (-\infty; 1] \cup$
 $\cup [2,25; +\infty)$. 494. 1) $x \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$; 2) $x \in [-0,25; 1]$.
 496. 1) $x \in (-5; 2]$; 2) $\emptyset$; 4) $x \in (-4; 0] \cup [2; 4)$. 497. 1) $x \in (-\infty; -3] \cup$
 $\cup [2; +\infty)$. 499. $a \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. 501. $a \in (-7; -6] \cup [-2; -1)$.
 503. (12; 20).

§ 11. Система двох рівнянь із двома змінними

510. 1) $(-1; 1)$, $(3; 9)$; 2) $(-2; -4)$, $(3; 1)$; 3) $(3; 2)$, $(-3; -2)$; 4) $(4; 3)$.
 511. 1) $(-2; 4)$, $(1; 1)$; 2) $(-2; -4)$, $(2; 4)$. 512. 1) $(1; -1)$, $(-1; -3)$;
 2) $(-4; 2)$, $(-1; 3)$; 3) $(2; 1)$, $\left(2\frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$; 4) $\left(\frac{2}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$, $(6; -1)$; 5) $(2; 2)$,
 $\left(1\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$; 6) $(1; 2)$, $\left(\frac{4}{11}; 3\frac{10}{11}\right)$; 7) $(3; 2)$; 8) $(1; -1)$, $\left(-3\frac{2}{3}; \frac{5}{9}\right)$.
 513. 1) $(2; 2)$, $(4; -2)$; 2) $(-2; 1)$, $(0,25; 7,75)$; 3) $(1; 5)$, $\left(-\frac{5}{11}; 2\frac{1}{11}\right)$;
 4) $(2; -6)$, $\left(-1\frac{4}{7}; 8\frac{2}{7}\right)$. 514. 1) $(-2; 8)$, $(8; -2)$; 2) $(-1; -7)$, $(7; 1)$;
 3) $(1; 3)$, $(3; -1)$; 4) $(-2; 1)$, $(2; -1)$; 5) $(-1; -8)$, $(5; 4)$; 6) $(-1; -5)$,
 $(2; 4)$; 7) $(0; 0)$, $(-2,4; 4,8)$; 8) $(4; -3)$, $(17; 10)$. 515. 1) $(1; 8)$, $(8; 1)$;
 2) $(-2; -5)$, $(5; 2)$; 3) $(-2; -1)$, $\left(2\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$; 4) $(1; 4)$, $(6,5; -1,5)$.

516. 1) $(-5; 0)$, $(0; 5)$; 2) $(1; 0)$, $(0; 1)$; 3) $(0; 1)$; 4) розв'язків немає.
517. 1) $(0; 4)$, $(4; 0)$; 2) $(-1; 0)$, $(0; 1)$. 518. 1) $(1; 4)$, $(4; 1)$; 2) $(-2; -9)$, $(9; 2)$; 3) $(-3; 1)$, $(1; -3)$, $(-1; 3)$, $(3; -1)$; 4) $(-2,5; -2)$, $(-1; -5)$, $(1; 5)$, $(2,5; 2)$; 5) $(-2; -5)$, $(5; 2)$; 6) $(1; 3)$, $(3; 1)$. 519. 1) $(1; 7)$, $(7; 1)$; 2) $(-3; -2)$, $(-2; -3)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$; 3) $\left(-1\frac{2}{3}; -3\right)$, $(-1; -5)$, $(1; 5)$, $\left(1\frac{2}{3}; 3\right)$; 4) $(1; 2)$, $(2; 1)$. 520. 1) $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})$, $(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$; 2) $(-4; -3)$, $(-4; 2)$, $(3; -3)$, $(3; 2)$; 3) $(1; 2)$, $(2; 1)$; 4) $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(2; 1)$, $(-2; -1)$; 5) $(2; 3)$; $(3; 2)$. 521. 1) $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}; \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$, $(-4; 2)$, $(2; -4)$; 2) $(-1; -2)$, $(-1; 1)$, $(2; 1)$; 3) $(1; 4)$, $(4; 1)$; 4) $(1; -3)$, $(3; -1)$. 522. 1) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; 2) $(2; 3)$, $(3; 2)$; 3) $(-2; 3)$, $(1; -1,5)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)$. 523. 1) $(2; -1; 3)$, $(-3; 4; -2)$; 2) $(-1; -2; -3)$, $(1; 2; 3)$; 3) $(2; 1; -1)$, $\left(2\frac{1}{15}; 1\frac{2}{15}; -\frac{2}{3}\right)$; 4) $(-4; -3; 1)$, $(4; 3; -1)$. 524. 1) $[8; +\infty)$; 2) $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$. 525. 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) $(-1; 1) \cup \{-\sqrt{2}\}$.
526. 1) 30 м; 2) 40 м; 3) 240 м²; 4) 120 м²; 5) 560 м².

§ 12. Прикладні задачі

534. 15 і 10 або -10 і -15. 535. 9 і 12 або -12 і -9. 536. 12 і 15; 80 %. 537. 10 і 14; 140 %. 538. 12 і 10 або -14 і 36. 539. 10 і 8 або -13 і -15. 540. 70 км/год, 60 км/год. 541. 60 км/год, 90 км/год. 542. 50 км/год. 543. 70 км/год. 544. 10 деталей. 545. 10 деталей. 546. 4 моделі і 2 моделі. 547. 3 прикраси і 4 прикраси. 548. 2,5 кг картоплі по 24 грн/кг, 1,5 кг цибулі по 32 грн/кг. 549. 20 зошитів по 12 грн і 15 зошитів по 11 грн. 550. 90 м і 70 м. 551. 80 м і 50 м. 552. 4 і 10. 553. 4 і 6. 554. 25 рядів, 15 рядів, 20 місць. 555. 20 рядів, 18 рядів, 15 дерев. 556. 30 км/год, 2 год 20 хв. 557. 80 км/год, 3 год. 558. 5 км/год, 60 км/год, 20 км. 559. 60 км/год, 80 км/год, 240 км. 560. 16 км/год і 4 км/год. 561. 14 км/год і 2 км/год. 562. 10 деталей. 563. 2 сукні. 564. 1800 грн і 1000 грн. 565. 1025 грн і 425 грн. 566. 17 см. 567. 10 см. 568. 25 горіхів і 14 горіхів. 569. 3 год і 4 год. 570. 700 км. 571. 16 км/год і 12 км/год. 572. 1) 1 м і 1,5 м; 2) 60 см і 90 см або 40 см і 60 см; 3) 2 м. 573. 1) 15 см і 20 см; 2) 10 см.

РОЗДІЛ 4. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 13. Що таке числова послідовність

577. 1) 2, 4, 6, 8, 10; 2) 2, 5, 8, 11, 14; 3) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1\frac{1}{5}$; 4) 2, 5, 10, 17, 26. 578. 1) 2, 3, 4, 5; 2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}$. 579. 17,5. 580. -38,5. 581. 1) 3; 2) 21; 3) 300; 4) $3n$. 582. 1) 50; 2) $5n$. 583. 1) Так, $n = 5$; 2) так, $n = 11$; 3) ні; 4) так, $n = 19$. 584. 1) Так, $n = 10$; 2) ні. 586. 1) 15; 2) 24. 587. 25. 589. -19. 590. 1) 5, 25, 5; 2) 7, 11, 11. 591. $-3n + 2$; $-3n + 11$; $-3n - 7$. 592. 1) 12, 14; 2) 80, 160; 3) 13, 11; 4) 64, 81; 5) 191, 383.

§ 14. Арифметична прогресія

599. 1) Так, 3 і 3; 2) ні; 3) так, -12 і 12; 4) так, 50 і -5. 600. 1) 5; 13; 21; 29; 37; 2) 10; 3; -4; -11; -18; 3) 0,2; 5,2; 10,2; 15,2; 20,2; 4) 4,5; 2,5; 0,5 -1,5; -3,5; 5) -1,5; -1,9; -2,3; -2,7; -3,1; 6) $\frac{5}{7}; \frac{1}{2}; \frac{2}{7}; \frac{1}{14}; -\frac{1}{7}$. 601. 1) 12; 20; 28; 36; 44; 2) -5; 10; 25; 40; 55; 3) 7,5; 5; 2,5; 0; -2,5; 4) $\frac{5}{6}; \frac{11}{12}; 1; 1\frac{1}{12}; 1\frac{1}{6}$. 604. 1) 75; 2) 412; 3) 83,4; 4) -152,1; 5) -0,4; 6) -53,4. 605. 1) 339; 2) 816; 3) -25; 4) $-123\frac{1}{3}$. 606. 1) 441; $9n + 9$; 2) 80,6; $1,6n + 3,8$; 3) $24\frac{14}{15}; \frac{8}{15}n - \frac{2}{3}$; 4) 224,5; $5,1n - 20,3$. 607. 1) 534; $18n - 24$; 2) -70; $-2,5n + 7,5$. 608. 1) 50; 2) -14; 3) 4; 4) -1,6. 609. 1) 210; 2) 73. 610. 1) 4; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1,2; 4) -0,4. 611. 1) 1,75; 2) 0,4. 612. 1) -9 і 6; 2) -55 і 4; 3) -12 і 5; 4) 21,8 і -2,6. 613. 1) 20 і 6; 2) -40 і 8. 614. 1) 5500; 2) -1350. 615. 600. 616. 1) 225; 2) 630. 617. 465. 618. 1) Так; 2) ні. 619. 1) Так; 2) ні. 620. 1) 22; 2) 41. 621. 1) 19; 2) 18. 622. 18, 24 і 30. 623. -38; -31; -24; -17; -10; -3; 4. 624. 10, 18, 26, 34. 625. 1) $a_1 = 12, d = 3$. 626. $a_1 = 3, d = 2$ або $a_1 = -17, d = 2$. 627. 1) 525; 2) -410; 3) 143; 4) -360. 628. 1) 27,5; 2) -310. 629. 1) 319; 2) 507; 3) -75; 4) 432. 630. 1) 560; 2) 170,5. 631. 1) 940; 2) -202,2. 632. 3850. 633. 1) 20 100; 2) 62 250; 3) 11 070. 634. 1) 16 290; 2) 6950. 635. 1) 69 і -8; 2) 91 і 4. 636. 14 і -3. 637. 1) 5 і 2; 2) 15 і -3. 638. -7 і 10. 639. 8 і 4. 640. 17 і 22 або -3 і -8. 645. 2) +15,4 °C; 3) 3400 м. 646. 1) На 3 задачі більше; 2) 335 задач; 3) 13 днів.

§ 15. Геометрична прогресія

653. 1) Так, 3 і 2; 2) ні. **654.** 2) так, -12 і -1 . **655.** 1) 5; 10; 20; 40; 2) 10; -30 ; 90; -270 ; 3) -12 ; 24; -48 ; 96; 4) -4 ; -2 ; -1 ; $-0,5$; 5) 20; 10; 5; 2,5. **656.** 1) 5; 15; 45; 135; 405; 2) -10 ; -20 ; -40 ; -80 ; -160 ; 3) 2,5; 0,5; 0,1; 0,02; 0,004; 4) 4,8; $-2,4$; 1,2; $-0,6$; 0,3. **657.** 1) -4 ; 2) 1,4. **659.** 1) 40, 2; 2) 81, 3. **662.** 1) 3000; 2) $-\frac{1}{16}$; 3) 16; 4) $\frac{1}{81}$; 5) -14 . **663.** 1) 4; 2) -768 ; 3) $\frac{1}{3}$; 4) -20 . **664.** 1) 243; 2) 160; 3) -4802 . **665.** 1) 96; 2) 2,75. **666.** 1) 1; 2) 0,25; 3) 3584; 4) -32 . **667.** 1) 2; 2) 1000. **671.** 1) 9 або -9 . **672.** 10, -10 . **674.** 2) $-\frac{2}{27}$ і 3 або $\frac{2}{27}$ і -3 . **676.** 1) 315. **677.** -20 . **678.** 1) 6560. **679.** 42. **682.** 1) 625. **685.** $n = 4$. **686.** 27, 81. **687.** 80, 40, 20 або -80 , 40, -20 . **688.** 8, 32, 128 або -8 , 32, -128 . **689.** 1) 3, 6, 12, 24 або 24, 12, 6, 3. **690.** 5, $-2,5$. **691.** 3, -2 . **693.** 150 або -850 . **694.** 1) 1 і 2; 2) 3 і -2 або -3 і -2 . **695.** 16 і 0,5 або -16 і 0,5. **696.** 72. **697.** 1) 2295; 2) 215. **698.** 1) 242. **701.** -756 . **702.** 1) 2047; 2) 305. **703.** 1) 171; 2) $\frac{255}{512}$. **705.** 1,8 і 5 або $64,8$ і $-\frac{5}{6}$. **709.** 60. **710.** 1) 1; 2) 0,125; 3) $-0,125$; 4) $-0,5$. **713.** 76. **714.** 72 і 144 або 4,5 і 2,25.

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

§ 16. Відсоткові розрахунки

724. 100 грн. **725.** 765 грн. **726.** 611 грн. **727.** 5500 грн. **728.** 40 000 грн. **729.** 594 грн за 1 м^2 . **730.** 1152 грн. **731.** 1) 5500 грн; 6050 грн; 8052,55 грн. 2) 500 грн; 1050 грн; 3052,55 грн. **732.** 1) 2160 грн; 2519,4 грн. 2) 160 грн; 519,4 грн. **733.** 1) 13676,31 грн; 2) $\approx 0,37$. **734.** 1) 15052,8 грн; 2) 3052,8 грн. **735.** 980 кг. **736.** 148 л. **737.** 40 000 грн. **738.** 19 000 грн. **739.** На 52 %. **740.** На 37 %. **741.** 90 000 грн, 40 000 грн. **742.** 12 000 грн, 18 000 грн. **743.** ≈ 538 642 грн. **744.** ≈ 343 тис. осіб. **745.** 10 %. **746.** 3 %. **747.** На 10 %. **748.** На 25 %. **749.** 1) 21 160 грн; 2) через 7 днів; 3) через 7 днів. **750.** На 20 %. **751.** 3 роки.

§ 17. Основні правила комбінаторики

757. 9. **758.** 8. **759.** 120; 60. **760.** 500. **761.** 35. **762.** 1) 4; 2) 2. **763.** 1) 2; 2) 6. **764.** 75. **765.** 25. **766.** 1) 600; 2) 300. **767.** 1) 300; 2) 156. **768.** 1) 120; 2) 6; 3) 48. **769.** 1) 720; 2) 240; 3) 120. **770.** 720.

771. 120. 772. 1) 12; 2) 24; 3) 15; 4) 9. 773. 1) 12; 2) 20; 3) 15; 4) 6.
 774. 123. 775. 109. 776. 1) 120; 2) 5040; 3) 96; 4) 8; 5) 120; 6) 42.
 777. 1) 24; 2) 144; 3) 714; 4) $\frac{1}{8}$. 778. 6. 779. 1) 676 000; 2) 468 000;
 3) 26 000. 780. 1) 260 000; 2) 131 040. 781. 400. 782. 8375.
 783. 30 951. 784. 427 608. 785. 28. 786. $\frac{n(n-1)}{2}$. 787. 275. 789. 3136.
 790. 3612. 791. 1) 100; 2) 50; 3) 0. 792. 1) $\frac{n-3}{n+4}$; 2) 0. 793. 1) 2; 2) 5.
 794. 64.

§ 18. Частота та ймовірність випадкової події

801. $\frac{23}{93}$. 803. 1) 0,005; 2) 0,004; 3) 0,995. 804. 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0.
 805. 1) $\frac{1}{5}$; 2) 0; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 1. 806. 1) 0; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 0; 4) $\frac{3}{4}$. 807. $\frac{49}{50}$.
 808. $\frac{39}{40}$. 809. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{5}{18}$. 810. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{1}{15}$.
 813. 80 осіб. 815. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{17}{18}$. 816. 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0. 817. 1) $\frac{1}{3}$;
 2) $\frac{1}{3}$. 818. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. 819. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{9}$. 820. 1) $\frac{1}{8}$;
 2) $\frac{7}{8}$. 821. 1) 0; 2) 1; 3) 0,2; 4) 0,4. 822. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{11}{12}$. 823. 0,504.
 824. $\frac{1}{32}$. 825. $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4$. 826. $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7$. 828. $\approx 0,618$. 829. 1) $\frac{1}{8}$;
 2) $\frac{5}{108}$; 3) 0.

§ 19. Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки

842. 3,8; 4; 4. 843. 4,1; 5; 4,5. 844. 1) 19,68; 2) 19; 3) 20.
 845. 1) 9,8; 2) 8; 3) 10. 846. 52. 847. 33. 848. 120 учн. 849. 25 %.
 850. 1) 9; 2) 8. 851. 1) 23; 2) 21. 858. 1) 189; 2) 4; 3) $\approx 3,5$; 4) 4.
 859. 1) 150; 2) 5; 3) 3,95; 4) 4. 860. 1) $6x + 19$; 3) 1; 2; 3; 4) ні.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Розділ 2. Нерівності

1. 1) $x + 12 < 12 + y$; 2) $x - 6 < -6 + y$; 3) $11 - 7x > 11 - 7y$;
 4) $-5x + 7 > 7 - 5y$. 2. 1) $a > 0, b > 0$; 2) $a < 0, b < 0$; 3) $a > 0, b > 0$;
 4) $a > 0, b > 0$. 3. 1) $>$; 2) $<$; 3) $>$; 4) $>$. 4. 1) $-16 < 2a + 3b < -9$;
 2) $0 < 0,25a - b < 2$; 3) $-0,6 < 6b - a < 28,8$; 4) $-0,3 < \frac{b}{3} - 2a < 0,1$.
 5. 1) $16 < a + 3b < 30$; 2) $-8 < a - b < -2$; 3) $-7 < -4a + b < 5$;
 4) $10 < 2ab < 54$. 7. 1) $[-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2,8]$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $[4,2; +\infty)$.
 8. 1) $\left[-\infty; 2\frac{1}{8}\right)$; 2) $(-\infty; 1,2)$; 3) $\left(-\infty; 4\frac{1}{12}\right]$; 4) $(-\infty; -2]$. 9. 1) $(-\infty; 1,25)$;
 2) $\left(-\infty; 9\frac{1}{3}\right)$; 3) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. 10. 1) $\left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; 0]$;
 3) $(-\infty; 3,5]$; 4) $[3; +\infty)$. 11. 1) $[0,5; +\infty)$; 2) $[-10,5; +\infty)$. 12. 1) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$;
 2) $\emptyset$; 3) $(-\infty; -3)$; 4) $(1; +\infty)$. 13. 1) $\emptyset$; 2) $(1,5; +\infty)$; 3) $[3; +\infty)$;
 4) $(-\infty; 0,6)$. 14. 1) $\emptyset$; 2) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$; 3) $(2,6; +\infty)$. 15. 1) $[0,2; 0,5]$; 2) $[0; 3]$;
 3) $[2; +\infty)$; 4) $[1,4; +\infty)$. 16. 1) $[1,5; +\infty)$; 2) $\emptyset$. 17. 1) $[3; 27]$; 2) $[-2; 4]$;
 3) $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$; 4) $(-6; 1,2]$. 18. 1) $(-3; 3)$; 2) $(-2; 4)$; 3) $\emptyset$; 4) $(-\infty; +\infty)$;
 5) $[-1; 3]$; 6) $(-\infty; 1)$. 19. 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-15; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$;
 4) $(-\infty; -0,75) \cup [0; +\infty)$. 20. 1) $(-\infty; 0,2)$; 2) $(-\infty; +\infty)$. 21. 1) $(-\infty; -3) \cup$
 $\cup (11; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -0,6) \cup$
 $\cup (0,2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -23) \cup (1; +\infty)$; 6) $(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$.
 22. 1) $(-\infty; -1) \cup \left(4\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -8] \cup [-7; +\infty)$;
 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup (0,5; +\infty)$. 23. $a \leq 0$.

Розділ 3. Квадратична функція

24. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$;
 6) $[-5; 1]$; 8) $(-\infty; -10) \cup (0; +\infty)$; 10) $(4; 10)$. 25. 1) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$;
 2) $[0,5; +\infty)$; 4) $(-5; 5) \cup (5; +\infty)$. 26. 1) $x = 9$; 2) $x = 0,5$; 3) $x = -10$;
 $x = 1$; 4) $x = 2$; 5) $x = 0$; 6) нулів немає; 7) нулів немає. 27. 1) $x = -6$;
 $x = 6$; 2) $x = 0, x = \frac{2}{3}$; 4) $x = 0$. 29. 1) $y = \frac{1}{x} + 3$; 2) $y = \frac{1}{x} - 7$;
 3) $y = \frac{1}{x-9} - 3$; 4) $y = \frac{1}{x+9} + 1$. 30. $y = |x-5| + 2$ (мал. 1); 2) $y = \sqrt{x+1} - 3$

- (мал. 2); 3) $y = -(x+3)^2 + 5$ (мал. 3). 32. $a = -\frac{1}{4}$. 33. 2. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $x = -1$; 4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 5) $[-1; +\infty)$; 6) $(-\infty; -1]$; 7) 0 — найменше значення функції; 10. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[-9; +\infty)$; 3) $x = 0, x = 6$; 4) $y < 0$, якщо $x \in (0; 6)$, $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$; 5) $[3; +\infty)$; 6) $(-\infty; 3]$; 7) -9 — найменше значення функції; 13. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$; 3) $x = 1$; 4) $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $[1; +\infty)$; 7) 0 — найбільше значення функції; 16. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 4]$; 3) $x = 2, x = 6$; 4) $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$, $y > 0$, якщо $x \in (2; 6)$; 5) $(-\infty; 4]$; 6) $[4; +\infty)$; 7) 4 — найбільше значення функції. 34. 3. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) немає; 4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$; 5) $[2; +\infty)$; 6) $(-\infty; 2]$; 7) 6 — найменше значення функції; 4. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $x = 5$; 4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; 5) $[5; +\infty)$; 6) $(-\infty; 5]$; 7) 0 — найменше значення функції. 35. 1) $a = 1, c = 0$; 3) $a = -\frac{1}{2}, c = 1$. 38. 1) Жодного; 2) два; 5) два. 39. 1) $x \in [-15; 15]$; 2) $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; -0,5) \cup (0,5; +\infty)$; 4) $x \in (-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$; 5) $x \in (-\infty; +\infty)$; 6) $\emptyset$; 7) $x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$; 9) $x \in [2; 5]$; 10) $x \in (-5; 2)$; 11) $x \in [0,5; 1]$; 12) $y \in (-6; 0)$. 40. 1) $x \in (-9; 0)$; 2) $x \in [2; 7]$; 3) $x \in (-\infty; -0,25] \cup [1; +\infty)$. 41. 1) $x \in \left[-2; \frac{1}{4}\right]$; 2) $\emptyset$; 4) $x \in [2; 7]$. 44. 1) $(-1; -4)$; $(4; 1)$; 2) $(-2; 1)$; $(2; -1)$; 3) $(2; 1)$; $(-1; 4)$; 4) немає розв'язків. 45. 1) $(4; 2)$; 2) $(0; 2)$; $(-2; 0)$; 3) $(0; -3)$; $(3; 0)$. 46. 1) $(3; 2)$; 2) $(2; 1)$; $(-2; -1)$; $(2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-2\sqrt{3}; \sqrt{3})$; 3) $(-4; -4)$; 4) $(1; 5)$. 47. 1) $(3,5; 5,5)$; 2) $(3; 1)$; $(-3; -1)$; $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$; 3) $(3; -3)$. 48. 1) $(2; 3)$; $(-2; -3)$; 2) $(2; 3)$; $(3; 2)$; $(5; 1)$; $(1; 5)$; 3) $(4; 1)$; $(1; 4)$; 4) $(6,5; -8)$; $(2; 1)$. 49. 1) $(2,25; -1,75)$; $(-2,25; 1,75)$; 2) $(-1; -3)$; $(3; 1)$; $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$; 3) $(2; 1)$; $(1; 2)$; $(-2; 1)$; $(1; -2)$. 50. 16 записів; 12 записів. 51. 24 пляшки; 18 пляшок. 52. 16 км/год; 4 км/год. 53. 4 км/год, 12 км/год.

Розділ 4. Числові послідовності

55. 1) 4; 7; 12; 2) 14; 50; 150; 3) 2; 20; 90; 4) 2; -5; 10. 56. 1) -0,5; 2,5; 2) 36; 324. 58. 1) 1; 8; 27; 64; 125; 2) -4; -18; -42; -76; -120. 59. 1) $a_4 = 9$; $a_{10} = 69$; 109 — не є членом послідовності; 2) так, ні, ні. 60. 1) 1,25; 2) 1,5; 3) 2; 4) -1,75. 61. 1) 63; 2) -46; 3) 29; 4) $2\frac{1}{3}$. 62. 1) $d = 2$; $a_1 = -1$; 2) $d = 3$; $a_1 = -46$. 63. 1) 7; 2) 5. 64. 1) 495; 2) 30,75. 65. 1) 1830; 2) 2430. 66. 1) 136,25; 2) 220. 67. 1) 1500; 2) 135 000. 68. 1) 5; 15; 25; 35; ...; 2) $a_n = 10n - 5$; 3) 65 м; 4) 500 м. 69. 1) $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_8 = 10935$, $S_6 = 1820$; 2) $b_1 = -0,25$, $q = -4$, $b_8 = 4096$, $S_6 = 204,75$. 70. 1) $b_2 = 8$, $b_8 = 512$, $S_4 = 20$; 2) $b_2 = 5$, $b_8 = \frac{5}{64}$, $S_4 = 18,75$. 71. 1) $b_7 = \frac{1}{9}$, $q = -\frac{1}{2}$, $b_1 = 7\frac{1}{9}$, $S_4 = 4\frac{4}{9}$ або $b_7 = -\frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = -7\frac{1}{9}$, $S_4 = -13\frac{1}{3}$. 72. 1) $b_1 = 10$, $b_4 = 80$, $q = 2$, $S_6 = 630$. 73. $-3\sqrt{2}$; 6. 74. 5 або 0,5. 75. $b_1 = 0,6$, $q = 5$.

Розділ 5. Елементи стохастики

77. На 44%. 78. 48 %. 79. 20 000 грн, 30 000 грн. 80. 18 км, 12 км. 81. 272 097,79 грн. 82. ≈ 44 237 осіб. 83. 1) 10^6 ; 2) 32^2 ; 3) $32^2 \cdot 10^4$; 4) $32^2 \cdot 10^6 - 32^2 \cdot 5^6$. 84. 1) 10^4 ; 2) 28^2 ; 3) $28^2 \cdot 10^2$; 4) $28^2 \times \times 10$. 85. 120. 86. 1) 324; 2) 600; 3) 182; 4) $\frac{1}{2027}$. 87. 1) 64; 2) 121. 89. 28. 92. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$. 93. 1) 0,1; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{2}{87}$. 94. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{7}{36}$. 95. 1) $\frac{1}{90}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{7}{45}$. 96. 1) 0; 2) 0,2; 3) 0,6. 97. 1) 6; 2) 24; 3) 24. 98. 1) 14; 2) 14; 3) 17. 99. 6. 100. 1,5.

ВІДПОВІДІ ДО ПРОЄКТУ 1

Крок 2.

- 1) система лінійних нерівностей із двома змінними;
- 2) цільова функція;
- 3) багатокутник з вершинами в точках перетину графіків.

Крок 3

2) *Клієнт 1*. Нехай x — кількість виготовлених футболок ($x \geq 0$), y — кількість худі ($y \geq 0$). Обмеження по часу: $3x + 8y \leq 180$; обмеження по бюджету: $20x + 50y \leq 5000$; мінімальний попит $x \geq 10$ і $y \geq 5$, цільова функція — функція прибутку: $P = 40x + + 90y \rightarrow \max$.

Клієнт 2. Нехай x — кількість створених 2D-головоломок, y — кількість 3D-раннерів. Обмеження часу роботи програміста: $5x + 10y \leq 80$, обмеження пам'яті сервера: $3x + 5y \leq 45$, обмеження для значень x і y : $x \geq 0$ і $y \geq 0$, цільова функція — функція прибутку: $P = 1000x + 3000y \rightarrow \max$.

Клієнт 3. Нехай x — кількість злакових батончиків, y — кількість веганських смузі. Обмеження по цукру: $5x + 10y \leq 400$; обмеження на час роботи обладнання: $2x + 4y \leq 180$; обмеження асортименту $x \geq y$, $x \geq 5$ і $y \geq 10$, цільова функція — функція прибутку: $P = 25x + 35y \rightarrow \max$.

Крок 5.

Клієнт 1. $x = 46$, $y = 5$ (46 футболок і 5 худі);

$P_{\max} = 2290$ грн.

Клієнт 2. $x = 0$, $y = 8$ (8 3D-раннерів); $P_{\max} = 24\,000$ грн.

Клієнт 3. $x = 60$, $y = 10$ (60 злакових батончиків і 10 веганських смузі); $P_{\max} = 1850$ грн.

Крок 6.

Клієнт 1. Потрібно врахувати, що в реальному світі не можна виготовити чверть худі. Розв'язком буде число, округлене з надлишком до цілих і таке, що залишається в межах ОДР.

ВІДПОВІДІ ДО ПРОЄКТУ 2

Крок 1.

Ситуація 1. 1) Сергій вважає, що 2 % нараховують лише на початкову суму (5000 грн) за моделлю простих відсотків. Натомість фінансові установи, що надають «швидкі гроші», зазвичай використовують модель складних відсотків. Це означає, що 2 % нараховують на поточну суму боргу, яка включає вже нараховані раніше відсотки; 2) $5000 \cdot 1,02^{30} \approx 5000 \cdot 1,81136 = 9056,81$ грн.

Ситуація 2. 1) $b_n = 10 \cdot 1,5^{n-1}$; 2) 50 осіб, 384 особи, 1133 особи.

Ситуація 3. 1) $S_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$; 2) $\approx 0,5549$ м².

Ситуація 4. 1) $b_n = 50 \cdot 2^n$, де n — кількість періодів подвоєння кількості бактерій; 2) $b_{10} = 50 \cdot 2^9 = 25\,600$ бактерій.



ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Вибірка 270

вибірки значення середнє 272

— медіана 272

— мода 272

— обсяг 270

випробування 258

властивість прогресії

арифметичної 211

— — геометричної 225

властивості рівносильності

нерівностей 19

Задача комбінаторна 247

Моделювання математичне 178

— математичного етапи 178

Нерівність зі змінною 27

— — — квадратна 151

— — — лінійна 51

— числова 17

нерівності множина розв'язків 28

— рівносильні 29

Правило додавання 247

— множення 248

події ймовірність 260

— частота 258

подія випадкова 258

послідовність чисел 200

— числова 200

— — зростаюча 200

— — спадна 200

послідовності член 200

прогресії арифметичної

різниця 207

— геометричної знаменник 223

прогресія арифметична 207

— геометрична 223

проміжків числових переріз 42

— — об'єднання 40

проміжок числовий 38

Ряд варіаційний 271

— статистичний 270

Система двох рівнянь із двома змінними 166

— нерівностей лінійних 62

системи нерівностей розв'язок 62

— рівнянь розв'язок 167

спостереження статистичне 269

сукупність генеральна 270

сукупність нерівностей лінійних 74

сукупності нерівностей

розв'язок 74

Формула n -го члена

послідовності 201

— — — прогресії арифметичної 208

— — — — геометричної 224

— рекурентна задання

послідовності 201

— суми n перших членів

прогресії арифметичної 212, 213

— — — — — геометричної 226

функції аргумент 90

— графіка перетворення 110

— нуль 93

— область визначення 90

— — значень 90

— проміжки знакосталості 94

функція 89

— квадратична 130



ЗМІСТ

<i>Дорогі учні й учениці</i>	3
Розділ 1. Повторення за 8 клас	5
Рациональні вирази.	5
Степені.	7
Квадратні корені. Дійсні числа	8
Квадратні рівняння	11
Елементи стохастики.	13
Розділ 2. Нерівності	16
§ 1. Числові нерівності та їх властивості	16
§ 2. Нерівності зі змінною. Рівносильні нерівності	27
§ 3. Числові проміжки	37
§ 4. Лінійні нерівності з однією змінною	51
§ 5. Системи лінійних нерівностей з однією змінною	62
§ 6. Сукупності лінійних нерівностей з однією змінною	73
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 2	87
Розділ 3. Квадратична функція	89
§ 7. Функція та її властивості.	89
§ 8. Перетворення графіків функцій	109
§ 9. Квадратична функція	129
§ 10. Квадратна нерівність	151
§ 11. Система двох рівнянь із двома змінними	166
§ 12. Прикладні задачі	178
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 3	196
Розділ 4. Числові послідовності	199
§ 13. Що таке числова послідовність.	199
§ 14. Арифметична прогресія.	206
§ 15. Геометрична прогресія	221
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 4	237
Розділ 5. Елементи стохастики	238
§ 16. Відсоткові розрахунки	238
§ 17. Основні правила комбінаторики.	247
§ 18. Частота та ймовірність випадкової події	258
§ 19. Початкові відомості про статистику.	269
Способи подання даних та їх обробки.	269
Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 5	288
Задачі і вправи для повторення.	290
Проекти.	307
Додатки	313
Відповіді	314
Предметний покажчик	334

Навчальне видання

**ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна
АКУЛЕНКО Ірина Анатоліївна
ДАНЬКО Олена Анатоліївна
КОЛОМІЄЦЬ Оксана Миколаївна
БОГАТИРЬОВА Ірина Миколаївна
СЕРДЮК Зоя Олексіївна**

АЛГЕБРА

**Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Головна редакторка *І. В. Красуцька*

Редакторка *І. В. Луценко*

Головна художниця *І. П. Медведовська*

Технічний редактор *Е. А. Авраменко*

Художня редакторка *К. В. Берсенєва*

Коректорка *Ю. О. Твердохліб*

Малюнки *О. В. Луценко*

Комп'ютерна графіка *О. І. Дядика*

Презентації та інтерактивні вправи *Л. М. Шабанова*

Карти знань *І. А. Акуленко*

В оформленні підручника використано фото з вільних джерел мережі «Інтернет»,
фотобанку *Shutterstock*

Бренди та ресурси зображуються лише з освітньою метою
та не є закликом до їх купівлі / відвідування

Формат 60×90 ¹/₁₆. Ум. друк. арк. 21,0 + 0,25 форзац.

Обл.-вид. арк. 18,9 + 0,35 форзац.

Зам. №

Тираж 27 310 пр.

ТОВ «Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»

Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.

Адреса видавництва: 03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелєва, 2

Віддруковано:

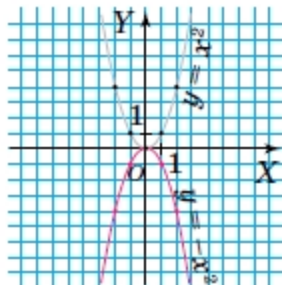
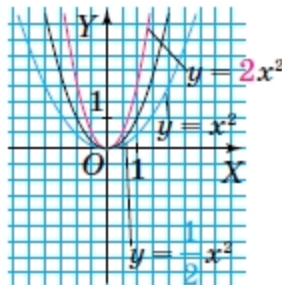
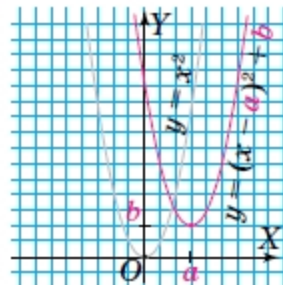
ТОВ «ВБ «Аванпост-Прим» вул. Дениса Монастирського, 3/3, м. Київ, 03035

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3843 від 22.07.2010 р.

ОБ'ЄДНАННЯ І ПЕРЕРІЗ ЧИСЛОВИХ ПРОМІЖКІВ

Об'єднання двох числових проміжків	Переріз двох числових проміжків
 $(-\infty; 2)$	 $(-\infty; 5]$
 $(5; +\infty)$	 $[2; +\infty)$
 $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$	 $(-\infty; 5] \cap [2; +\infty) = [2; 5]$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

$y = -f(x)$	$y = af(x), a \neq 0$	$y = f(x - a) + b$
		

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

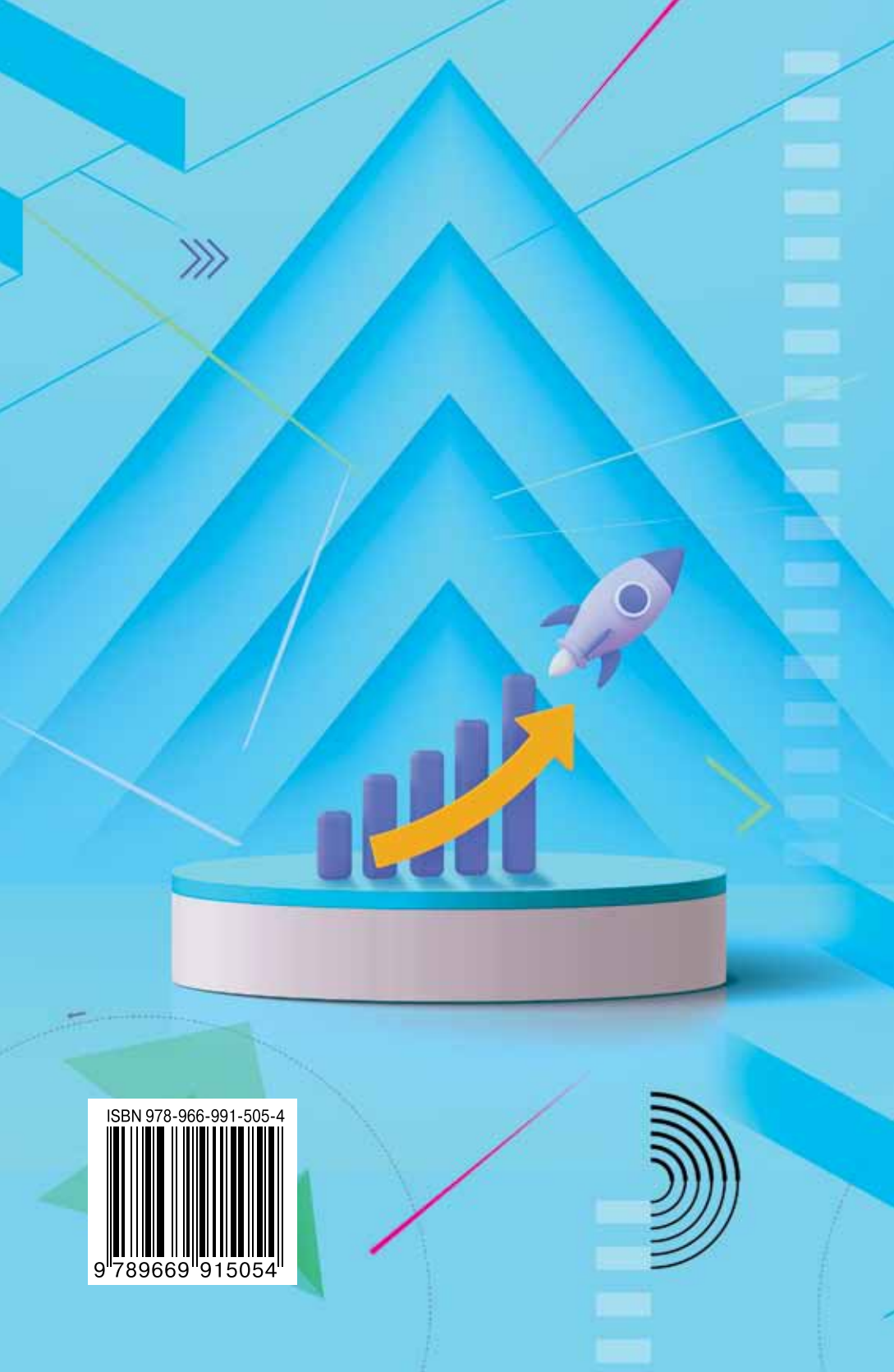
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

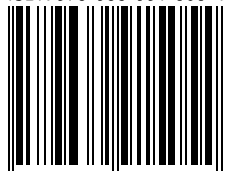
Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ

a^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
6	36	216	1296	7776	46656	279936			
7	49	343	2401	16807	117649				
8	64	512	4096	32768					
9	81	729	6561	59049					
10	100	1000	10000						



ISBN 978-966-991-505-4



9 789669 915054