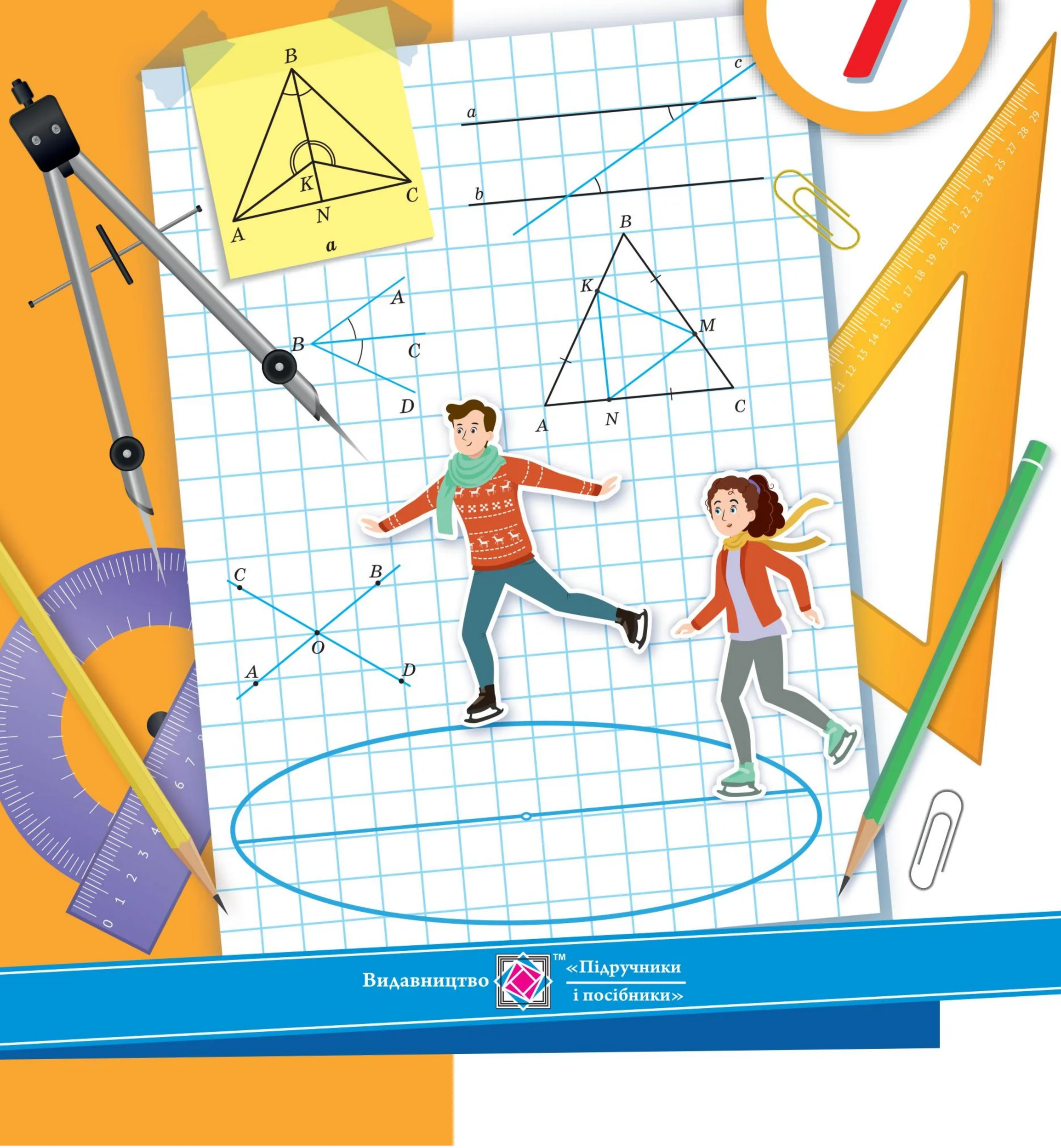
Лев Генденштейн
Галина Жемчужкіна

ГЕОМЕТРІЯ

У навчальних діалогах

7



Видавництво «Підручники і посібники»

НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ

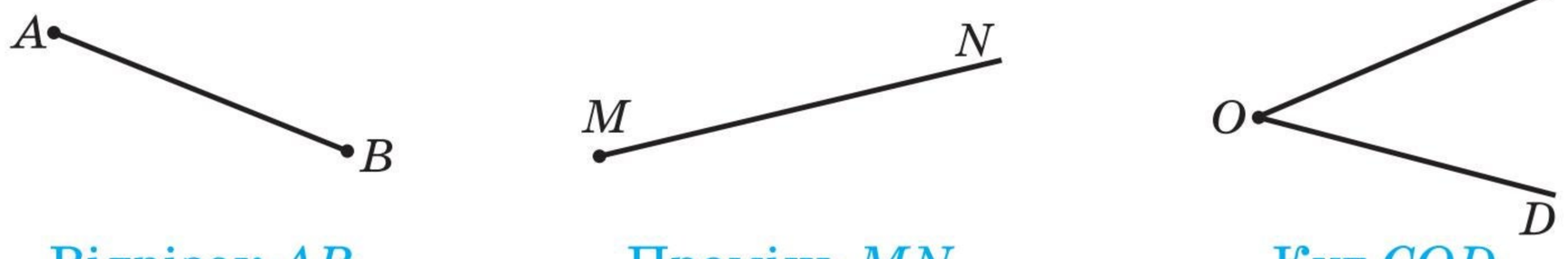
Точка і **пряма** — найпростіші геометричні фігури.

Через дві точки можна провести одну й лише одну пряму.
З трьох точок прямої одна і лише одна точка лежить між двома іншими.
Дві прямі перетинаються в одній точці.



Точка A Пряма a

Відрізком називають частину прямої, обмежену двома її точками.
Промінь — частина прямої, обмежена точкою з однієї сторони.
Кутом називають геометричну фігуру, яка складається з вершини і двох променів, що виходять із цієї точки.



Відрізок AB Промінь MN Кут COD

ВЛАСТИВОСТІ ВІДРІЗКА ТА КУТА

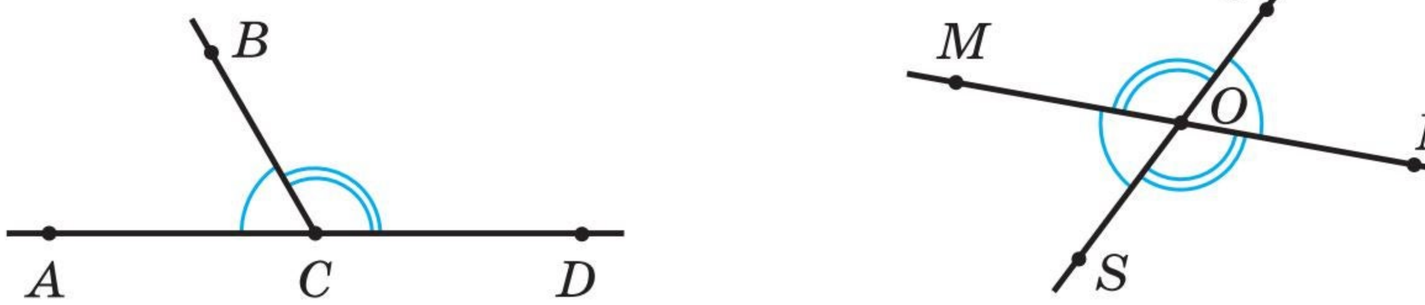
$AC = AB + BC$ $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$

СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

Кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші утворюють доповняльні промені, називають **суміжними** кутами.
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Два кути називають **вертикальними,** якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін другого кута.
Вертикальні кути рівні.

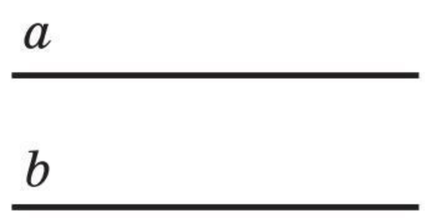
Суміжні кути Вертикальні кути



$\angle ACB + \angle BCD = 180°$ $\angle MOS = \angle PON,\ \angle MOP = \angle SON$

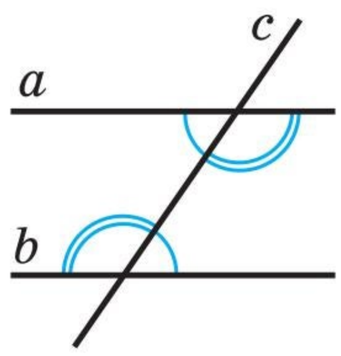
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Прямі, які лежать в одній площині й не перетинаються, називають **паралельними**.

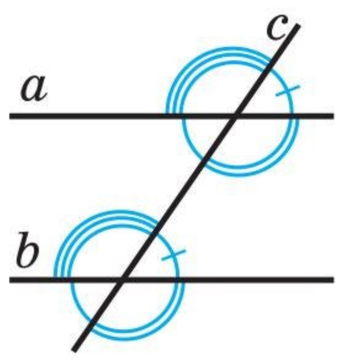


$a \parallel b$

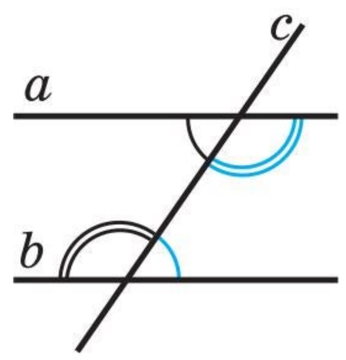
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ



Різносторонні кути рівні

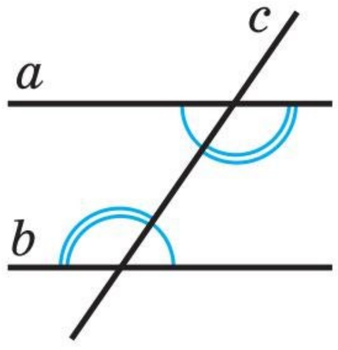


Відповідні кути рівні

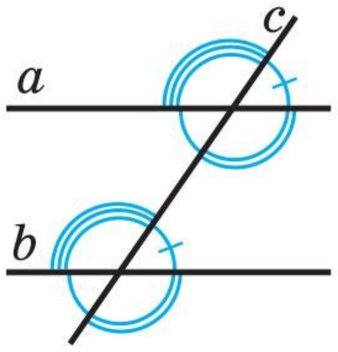


Сума односторонніх кутів дорівнює 180°

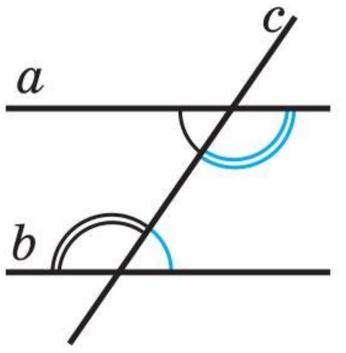
ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ



Різносторонні кути рівні



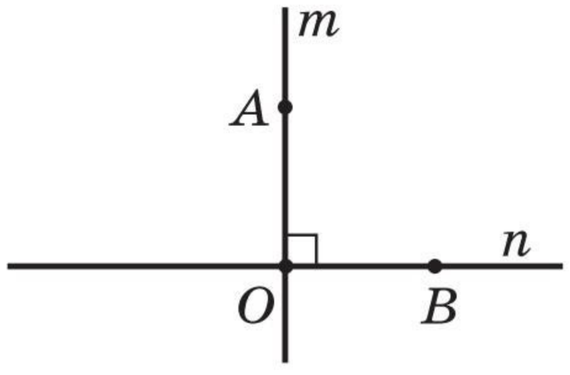
Відповідні кути рівні



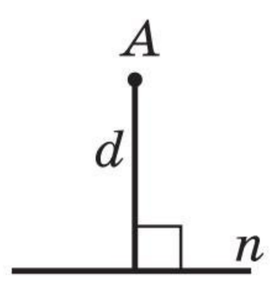
Сума односторонніх кутів дорівнює 180°

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

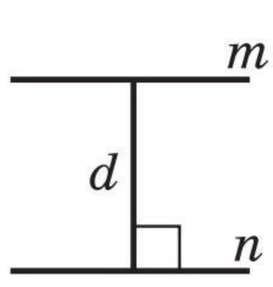
Прямі називають **перпендикулярними**, якщо кути, утворені при перетині цих прямих, є прямими.



$\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow m \perp n$



Відстань d від точки до прямої



Відстань d між паралельними прямими

Лев Генденштейн
Галина Жемчужкіна

ГЕОМЕТРІЯ

(у навчальних діалогах)

7 клас

Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2023

УДК 373.167.1:53
Г34

Підручник створено за модельною навчальною програмою «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Л. Е. Генденштейн, Г. В. Жемчужкіна)

Науковий редактор: *Євген Нелін*
Редагування: *Сергій Мартинюк*
Літературне редагування: *Оксана Давидова, Людмила Олійник, Маргарита Більчук, Любов Левчук*
Художнє оформлення: *Олена Демчак*
Дизайн обкладинки: *Олена Демчак*

Генденштейн Л.

Г34 Геометрія (у навчальних діалогах). 7 клас / Л. Генденштейн, Г. Жемчужкіна. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2023. — 244 с.

ISBN 978-966-07-4197-3

Курс геометрії 7-го класу поданий у навчальних діалогах вчителів та учнів. У ньому послідовно реалізовано дослідницький підхід до вивчення геометрії. Це значно підвищує мотивацію учнів та вчить їх розв'язувати задачі.

Для учнів 7-го класу та вчителів математики.

УДК 373.167.1:53

© Генденштейн Л. Е., Жемчужкіна Г. В., 2023
ISBN 978-966-07-4197-3 © Видавництво «Підручники і посібники», оригінал-макет, 2023

ОСОБЛИВОСТІ ЦІЄЇ КНИЖКИ. ЯК ЇЇ МОЖНА ВИКОРИСТОВУВАТИ?

Розкажи мені — і я забуду.
Покажи мені — і я запам'ятаю.
Залучи мене — і я навчуся!
Конфуцій (VI ст. до н.е.)

Найголовніше —
не переставати ставити запитання.
Альберт Ейнштейн (XX ст.)

Навчальні діалоги — ефективна форма навчання мислення.

Курс геометрії 7 класу розроблено відповідно до вимог Державного стандарту базової середньої освіти. Матеріал подано у формі бесід (діалогів) учителів математики **У**стима Григоровича або **У**ляни Петрівни (**У**) з їхніми учнями **Ф**едором (**Ф**) та **К**атериною (**К**). Коли Федір і Катерина *ставлять запитання*, вчителі пропонують їм навідні запитання, щоб вони змогли *знайти відповіді самостійно*.

У книжці наведено багато навчальних діалогів (не лише між учителями і учнями, а й між самими учнями!), які є однією з найрезультативніших форм навчання мислення. Учитель / учителька може творчо змінювати та розвивати ці діалоги залежно від рівня підготовленості учнів класу.

Дослідницький підхід до навчання — один з найпродуктивніших способів навчитися розв'язувати задачі.

Відповідно до сучасних вимог у цій книжці послідовно реалізовується дослідницький підхід до навчання. Для проведення уроків пропонується багато завдань дослідницького характеру, наприклад, до фігури, поданої у вигляді рисунка чи словесного опису, поставити запитання, а потім знайти відповіді на свої запитання. Це сприяє свідомому опануванню курсу та є ефективним засобом навчитися розв'язувати задачі, підвищує мотивацію та стресостійкість школярів під час вивчення геометрії. Так, побачивши нову задачу, учень / учениця часто губиться і не знає, з чого почати розв'язування. Ця невизначеність формує негативне ставлення до предмета, а під час контрольних та самостійних робіт породжує паніку, яка блокує навіть уже добре засвоєні знання. Значною мірою це зумовлено тим, що увагу учень / учениця фіксує саме на запитанні задачі й не звертає належної уваги на її умову. Проте лише в умові задачі є ключі до її розв'язання!

Щоб навчити учнів розв'язувати задачі, потрібно привчити їх одразу перемикати увагу з пошуку негайної відповіді на запитання задачі до *дослідження умови*. Саме це і є сенсом дослідницького підходу.

Остання глава книжки «Не святі горщики ліплять» пропонує додаткові матеріали для проєктно-дослідницьких робіт.

Три рівні складності, навчальні завдання та завдання для контролю.

Видання пропонує завдання трьох рівнів складності, що допоможе як тим, у кого є проблеми з вивченням геометрії в школі,

так і тим, хто претендує на участь і перемогу в математичних олімпіадах. Прості задачі позначені однією зірочкою, а важчі — двома або трьома.

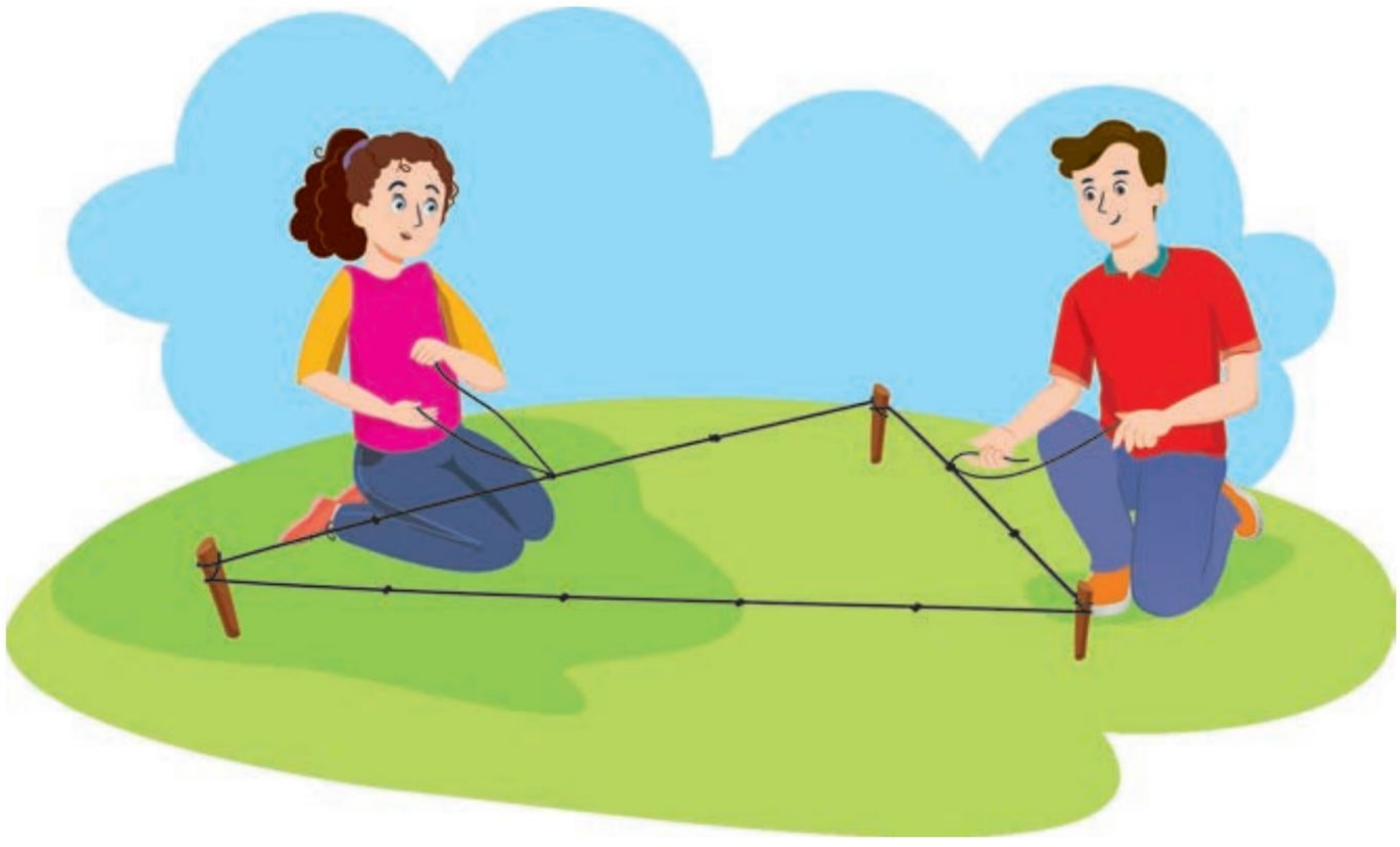
До деяких задач внизу сторінки наведені «Поради» (вони позначені значком ☞). Скориставшись порадою, легше впоратися із задачею, яка здається важкою. Правильність розв'язків можна перевірити в главі «Відповіді та розв'язки».

Видання пропонує багато навчальних завдань, виконуючи які, учень / учениця здійснює нехай незначні, але власні відкриття.

Багато завдань для контролю зібрано в розділах «Трирівневі завдання для домашніх та самостійних робіт», якими завершуються всі глави. Ці завдання пропонують учням проявити начебто «подвійну» самостійність: учень / учениця доповнює завдання і тим самим стає його співавтором /співавторкою.

Бажаємо успіхів у вивченні геометрії — красивої та мудрої науки, найкращої у світі школи мислення.

ЩО ТАКЕ ГЕОМЕТРІЯ І ДЛЯ ЧОГО ЇЇ ВИВЧАТИ?



Слово «геометрія» походить від *грецьких слів* «гео» (земля) і «метр» (вимірювати) і означає «землемірство». Походження цього слова пов'язане зі *Стародавнім Єгиптом*. Річка Ніл під час повені вкривала береги шаром родючого мулу, змиваючи межі між ділянками хліборобів. Щоб відновити їх, потрібно було знати і застосовувати властивості геометричних фігур — наприклад, уміти будувати прямі кути за допомогою «єгипетського трикутника» (трикутника, сторони якого відносяться як 3:4:5). Людей, обізнаних з цим, давні греки називали геометрами, тобто «землемірами».

Хоча стародавні єгиптяни знали багато властивостей геометричних фігур і вміли використовувати їх (приклади — їхні знамениті піраміди), геометрія як наука народилася в Стародавній Греції, тому що давньогрецькі вчені винайшли спосіб обґрунтувати властивості геометричних фігур за допомогою міркувань.

У третьому столітті до нашої ери давньогрецький учений Евклід написав книжку «Начала», у якій він зібрав відо-



Евклід
(бл. 325–265 до н.е.)

мості про основні властивості геометричних фігур, а також навів міркування, за допомогою яких чимало з цих властивостей можна довести.

Відтоді геометрію вважають найкращою школою мислення — тому її і вивчають у школах більше двох тисяч років.

Вивчення геометрії допоможе вам, яку професію ви не обрали б: адже для успіху в будь-якій справі потрібно вміти добре думати. До того ж вивчати геометрію дуже цікаво.

Ми почнемо з вивчення геометричних фігур на площині (цей розділ геометрії називають планіметрією). Уявлення про площину дають дзеркало, плесо спокійного озера, поверхня столу, аркуш паперу.

Вивчати геометрію разом з вами будуть ваші однолітки Катерина і Федір, а допомагати їм буде їхній учитель Устим Григорович або вчителька Уляна Петрівна.



Федір любить **фантазувати**, а **К**атерина любить **критикувати** і вимагати доказів. Доповнюючи одне одного, Федір і Катерина інтуїтивно фактично застосовують науковий метод пізнання. Він полягає в тому, що спочатку висловлюють *припущення* (*гіпотезу*) про деяку закономірність (а для цього потрібна *фантазія*), потім це припущення *доводять* (у математиці за допомогою *міркувань*, а в природничих науках — в експерименті). А для цього необхідно *критично мислити*.

Долучайтеся до діалогів Катерини, Федора і учителів — перегортайте сторінку: на вас чекають цікаві відкриття!

ГЛАВА 1. ТОЧКИ І ПРЯМІ



1. ГЕОМЕТРИЧНІ ТОЧКИ І ГЕОМЕТРИЧНІ ПРЯМІ

У: Найпростіші геометричні фігури — це *точки* і *прямі лінії* (називатимемо їх просто *прямими*). Точки позначають великими латинськими буквами, а прямі — маленькими латинськими.

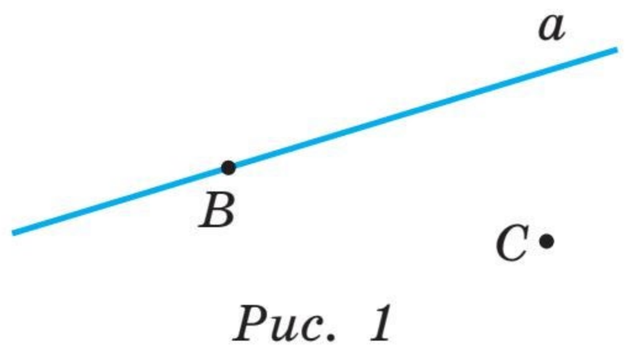


Рис. 1

На рисунку 1 зображено пряму a і дві точки: B і C. Точка B лежить на прямій a, а точка C не належить цій прямій.

Ф: Точки і прямі такі прості! Справді — *найпростіші*!

У: Однак не такі вже вони й прості! Наприклад, *геометричну* точку слід уявляти собі *нескінченно малою*.

К: Ніби її поставили дуже гострим олівцем?

У: *Нескінченно* гострим! А геометричну пряму слід уявляти собі *нескінченно тонкою* і *нескінченно довгою* — вона простягається необмежено в обидва боки. Ви можете собі це уявити?

Ф: Навіть у голові трохи паморочиться...

К: Але навіщо вивчати *уявні* нескінченно малі точки і нескінченно тонкі, нескінченно довгі прямі? Чи не краще вивчати «справжні точки», поставлені олівцем на папері, і «справжні прямі», проведені олівцем під лінійку?

У: Ці «справжні точки» *різні*: їхні форма і розміри залежать від того, наскільки гостро заточений олівець, твердий він або м'який, як ним натиснули, гладкий папір чи шорсткий.

А «справжні прямі» не зовсім прямі, тому що немає абсолютно прямих лінійок. Крім того, будь-яка «справжня пряма» має якусь довжину і товщину. Тому для «справжніх точок» і «справжніх прямих» не можна встановити загальних закономірностей, справедливих для геометричних точок і геометричних прямих.

К: Але чи справедливі ці закономірності для «справжніх точок» і «справжніх прямих»?

У: Вони справедливі настільки, наскільки можна знехтувати розмірами «справжніх точок», а також шириною «справжніх прямих» і тим, що вони не ідеально прямі й не нескінченні. Наприклад, закономірності, справедливі для геометричних точок і прямих, використовують у кресленнях, проєктуванні й будівництві різних споруд. Надалі, кажучи про точки і прямі, матимемо на увазі геометричні точки і геометричні прямі.

Основна властивість точок і прямих полягає в тому, що

через будь-які дві точки можна провести одну і лише одну пряму (рис. 2).

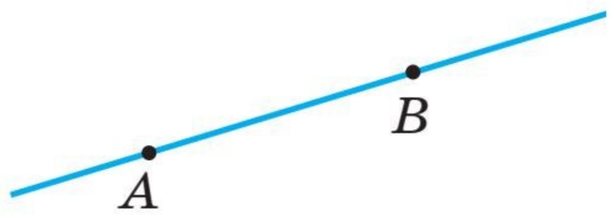


Рис. 2

Звідси випливає, що дві *різні прямі* не можуть мати двох спільних точки. Але через одну точку можна провести безліч прямих. Спільну точку двох або кількох прямих називають *точкою перетину цих прямих*.

Будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини. Наприклад, точки B і D на рисунку 3 лежать у різних півплощинах відносно прямої a.

1.1.* Які точки на рисунку 3 лежать в одній півплощині з точкою D відносно прямої a?

Ф: Чи можна пряму позначити двома її точками?

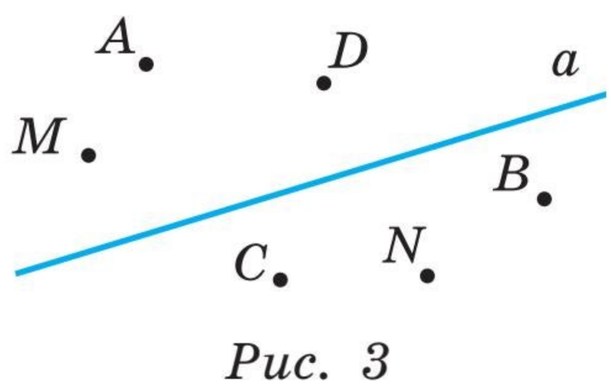


Рис. 3

У: Часто так і роблять: наприклад, пряму на рисунку 2 можна позначити AB або BA.

1.2.* Проведіть пряму, позначте на ній точки K і M.

а) Позначте точку N, яка не лежить на прямій KM.

б) Проведіть прямі KN і MN.

в) Скільки прямих проходить через кожну позначену точку?

Подібне завдання

1.3.* Проведіть у зошиті три прямі, що перетинаються *попарно* (це означає, що в кожній точці перетину перетинаються лише дві прямі).
а) Скільки точок перетину прямих?
б) Позначте всі точки перетину прямих.
в) Запишіть позначення всіх прямих.

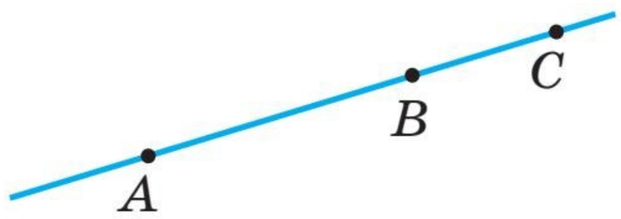


Рис. 4

У: Задамо тепер на прямій *три* точки (рис. 4).
Зверніть увагу:

якщо на прямій задано три точки, то одна і лише одна з них розташована *між* двома іншими.

Ф: Мені здається, якщо на *будь-якій лінії* задано три точки, то тільки одна з них лежатиме між двома іншими!

К: А ось і ні!

1.4.** Наведіть приклад лінії, для якої не можна стверджувати, що одна і лише одна із заданих на цій лінії трьох точок лежить між двома іншими.

1.5.* Запишіть усі можливі позначення прямої на рисунку 4, використовуючи позначені точки.

1.6.* Проведіть пряму MK.
а) Позначте на ній точку N між точками M і K.
б) Позначте на прямій точку P так, щоб точка K містилась між точками P і N.

Подібні завдання (1.7 – 1.8)

1.7.* Проведіть пряму і позначте на ній точку B.
а) Позначте на цій самій прямій точки C і D так, щоб вони містились по різні боки від точки B.
б) Позначте на цій самій прямій точку K так, щоб точка B була між точками C і K, а точка K — між точками C і D.

1.8.* Укажіть на рисунку 5:
а) точку перетину прямих b і c;
б) точку перетину прямих k і c;

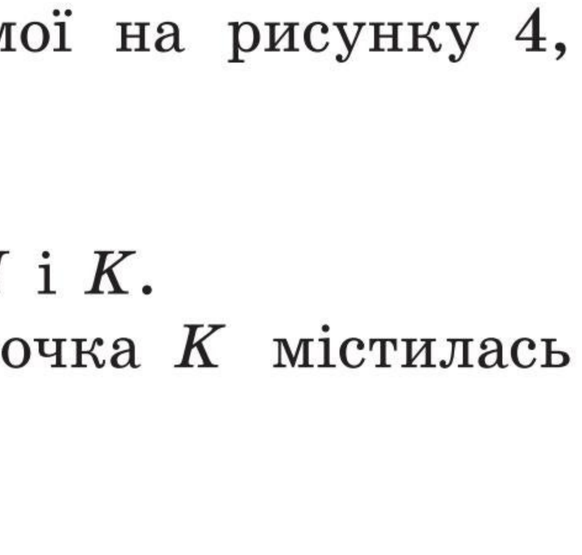


Рис. 5

1.4. Розгляньте, наприклад, три точки на колі.

1.5. Зауважте, що позначення прямої можна записувати в *довільному* порядку точок.

в) позначені точки, що лежать на прямій c, але не належать прямій k;
г) позначені точки, що належать прямій k, але не належать прямій b;
д) позначені точки, між якими на прямій k лежить точка C.
Запишіть позначення кожної прямої за допомогою заданих точок.

Як перевірити прямизну?

Ф: Здається, що за допомогою моєї лінійки можна провести *дві* різні прямі через дві точки: для цього мені знадобилося лише перевернути лінійку (рис. 6, *а*, *б*).

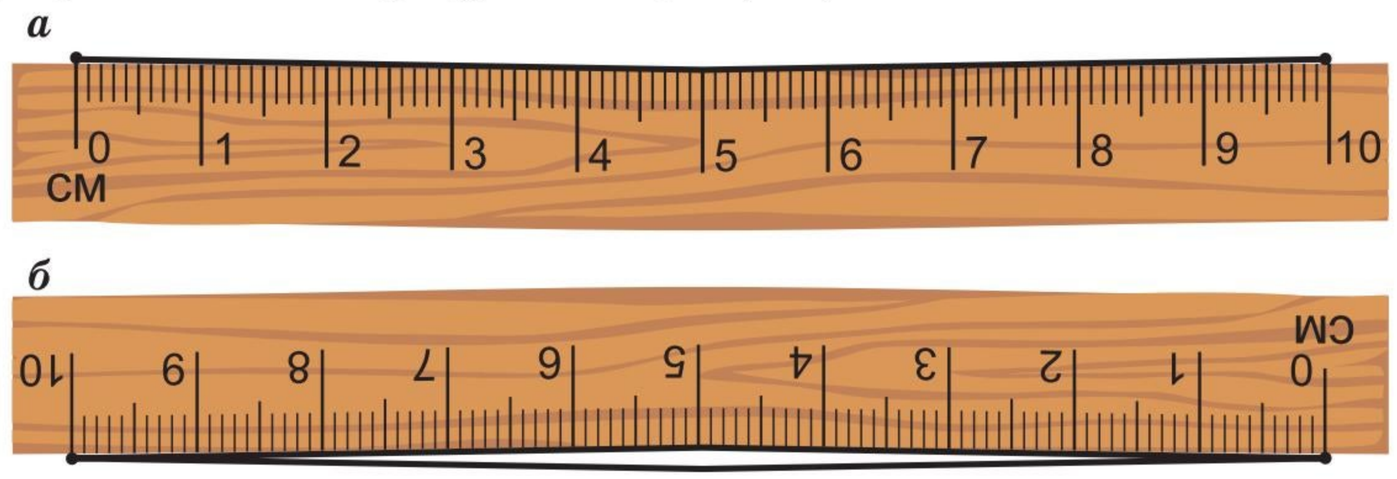


Рис. 6

У: Це означає, що ваша лінійка трохи вигнута. Щоб перевірити прямизну лінійки, подивіться *вздовж* неї (рис. 7). Цей спосіб перевірки прямизни зумовлений тим, що світло поширюється вздовж прямої.



Рис. 7

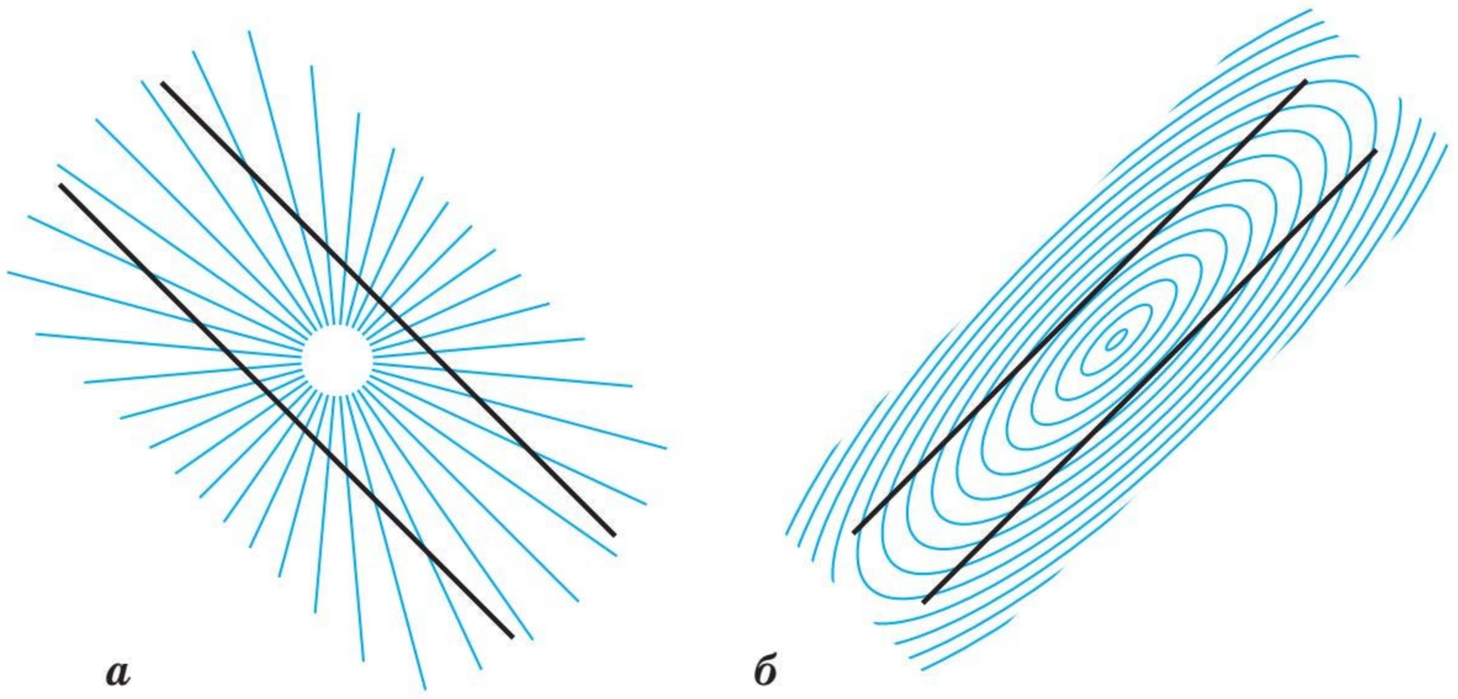


Рис. 8

1.9.* Перевірте прямизну вашої лінійки, краю обкладинки книжки, краю столу. До яких ще предметів можна застосувати цей спосіб перевірки прямизни?

1.10.* На рис. 8 показано, як можна перевірити, чи розміщені стовпи вздовж однієї прямої. Обґрунтуйте цей спосіб перевірки.

1.11.* Чи є чорні лінії на рисунках 9, *а*, *б* прямими лініями? Як перевірити ваше припущення?



а *б*

Рис. 9

Теореми й аксіоми

У: Спробуйте тепер *довести* за допомогою міркувань, що

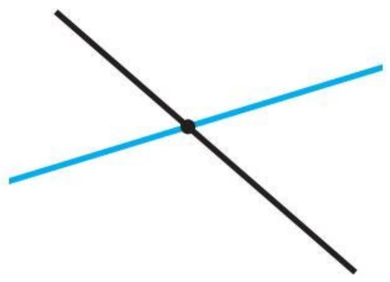


Рис. 10

дві прямі можуть перетинатися лише в одній точці (рис. 10).

Ф: Поміркуймо. Припустимо, що у двох різних прямих є *дві* спільні точки. Тоді це означало б, що через ці *дві* точки можна провести *дві* різні прямі...

К: ... А це суперечить основній властивості точок і прямих! Тому дві різні прямі не можуть мати двох спільних точок, отже, якщо дві прямі перетинаються, то лише в одній точці!

У: Правильно. Ось ви й довели першу *теорему*.

Теорема — це твердження, справедливість якого *доводять за допомогою міркувань*.

Слово «теорема» походить від грецького слова, що означає «розглядаю, вдивляюсь».

Під час доведення ви скористалися основною властивістю точок і прямих, яку прийняли *без доведення*.

1.11. Підніміть книжку і подивіться вздовж чорних ліній.

Твердження, справедливість якого приймають *без доведення*, називають *аксіомою*.

Це слово у перекладі з грецької означає «беззаперечне».

Основна властивість точок і прямих (те, що через будь-які дві точки можна провести *одну* і *лише* одну пряму) є прикладом аксіоми.

Пам'ятайте: для доведення нових теорем можна використовувати лише аксіоми і доведені раніше теореми.

1.12.* Накресліть дві прямі, що перетинаються, і позначте на них три точки так, щоб за їх допомогою можна було позначити *кожну* пряму. Запишіть позначення цих прямих. Яка точка є в позначенні кожної прямої?

Подібне завдання

1.13.* Накресліть три прямі, що перетинаються в одній точці. Позначте на рисунку найменшу кількість точок, за допомогою яких можна позначити кожну пряму. Чи є при цьому точки, що розміщені між двома іншими на одній з цих прямих?

Доведення від супротивного

У: Для доведення теореми про те, що дві прямі можуть перетинатися лише в одній точці, ви скористалися *методом доведення від супротивного*.

Ви *припустили*, що дві прямі мають дві спільні точки, і за допомогою міркувань довели, що це припущення призводить до *суперечності*. Отже, справедливим є припущення, *протилежне* тому, яке ви зробили, а це означає, що дві різні прямі не можуть мати *дві* спільні точки. Отже, прямі можуть перетинатися лише в *одній* точці.

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

У: Дві прямі на площині можуть не перетинатися, тобто не мати *жодної* спільної точки.

Прямі, які лежать в одній площині й не перетинаються, називають *паралельними* (рис. 11).

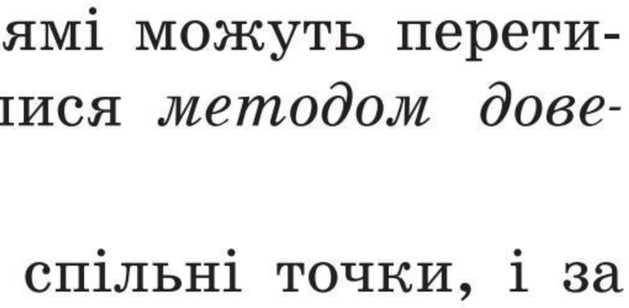


Рис. 11

1.13. Позначте точку перетину прямих і ще по одній точці на кожній прямій.

Їх паралельність позначають значком $\|$: $a \| b$.

К: А як проводити паралельні прямі на рисунку?

У: Невдовзі ви навчитеся це робити — і навіть кількома способами. А поки як паралельні лінії можна використовувати лінії клітинок у зошиті (рис. 12).

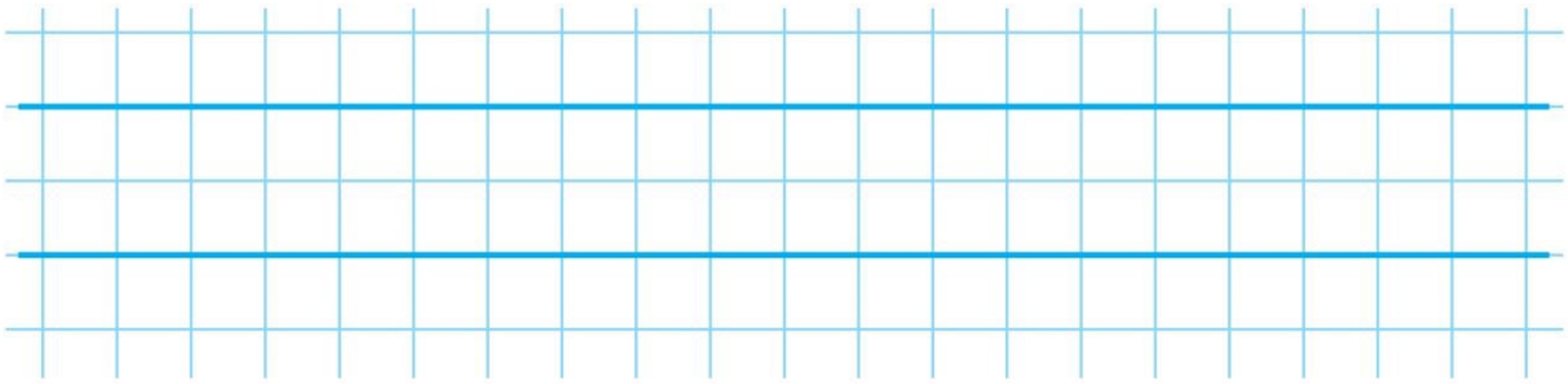


Рис. 12

Аксіома паралельних прямих

У: Ось одна з найважливіших аксіом геометрії:

через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести *одну і лише одну* пряму, паралельну даній (рис. 13).

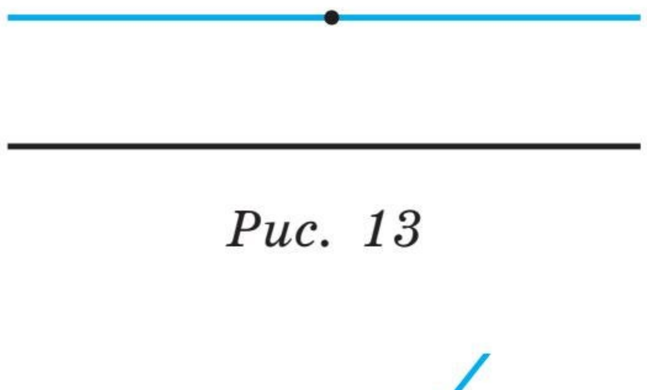


Рис. 13

1.14.** Скористайтеся аксіомою паралельних прямих, щоб довести *теорему*:

якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу (рис. 14).

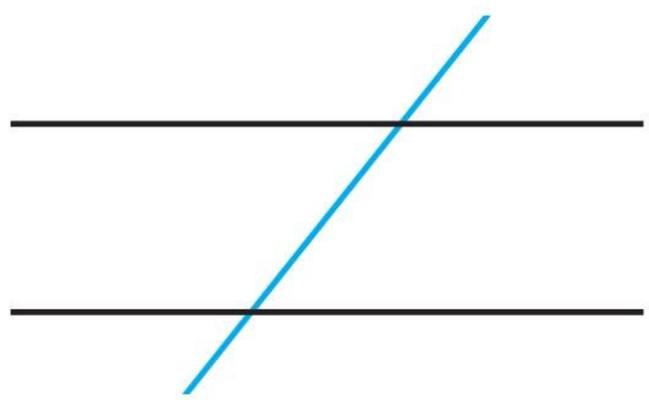


Рис. 14

1.15.** Доведіть теорему:

якщо пряма паралельна одній з двох паралельних прямих, то вона паралельна й другій (рис. 15).

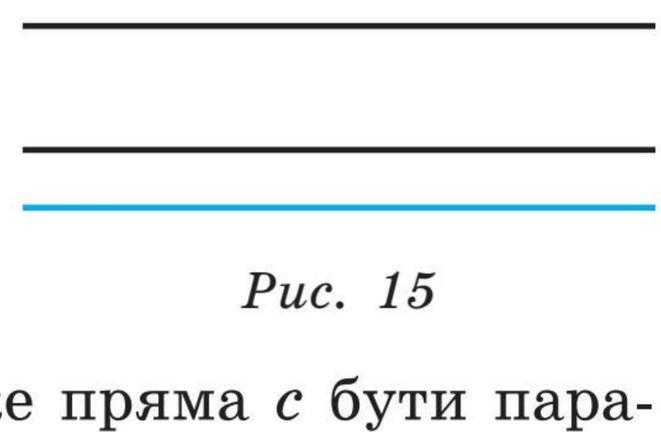


Рис. 15

1.16.** Прямі a і b перетинаються. Чи може пряма c бути паралельною до *обох* цих прямих? Обґрунтуйте свою відповідь.

1.14. Скористайтеся методом доведення від супротивного.

1.15. Скористайтеся методом доведення від супротивного і аксіомою паралельних прямих.

1.16. Скористайтеся методом доведення від супротивного і аксіомою паралельних прямих.

1.17.** Накресліть *усі* можливі варіанти взаємного розміщення трьох прямих на площині.

1.18.** Прямі a і b перетинаються. Як розміщена пряма c відносно цих прямих, якщо загальна кількість точок перетину прямих: а) 1; б) 2; в) 3?

1.19.*** Накресліть *усі* можливі варіанти взаємного розміщення чотирьох прямих на площині.

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЯ?

Використовуючи рис. 16, сформулюйте основні твердження глави (означення, аксіоми, теореми). Можна сформулювати кілька тверджень (по одному під час кожного піднесення руки). Перемоги (і заохочувального бала на розсуд учителя / учительки) удостоюють того / ту учня / учениці, після якого / якої ніхто не зміг нічого додати протягом, наприклад, хвилини.

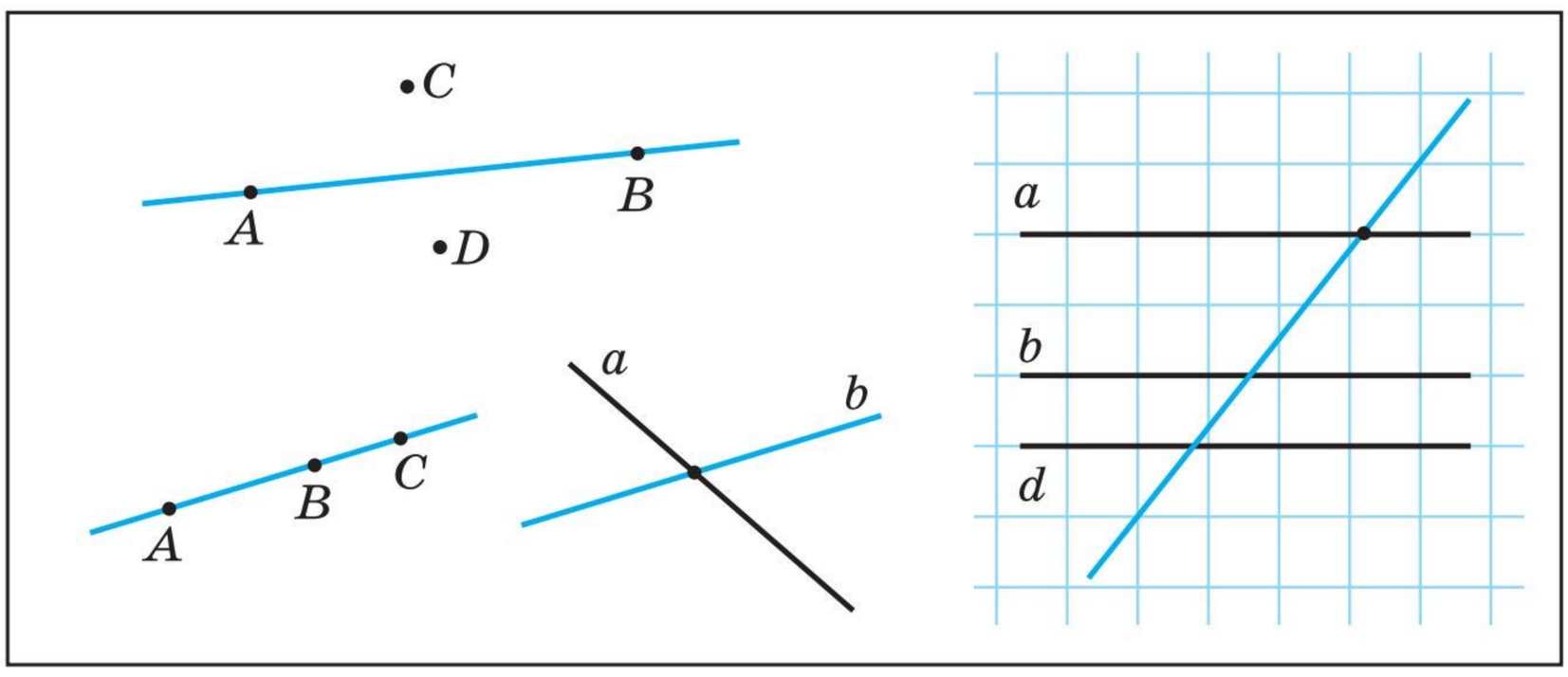


Рис. 16

1.17. Зручно розглянути спочатку випадки, коли серед трьох прямих є паралельні, а потім — коли паралельних прямих немає.

3. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

У: Найкращий спосіб навчитися розв'язувати задачі — *самому / самій* ставити запитання до умови задачі та знаходити відповіді на них. При цьому ви поступово здобуватимете «приховану» в умові інформацію і незабаром знайдете відповідь на запитання задачі, оскільки ця відповідь теж є одним з елементів інформації, «прихованої» в умові задачі. Щоб здобути цю інформацію, використовуйте *означення, аксіоми і теореми*.

Перенесіть у зошити рис. 17. Які завдання щодо позначення точок і прямих можна поставити за ним?

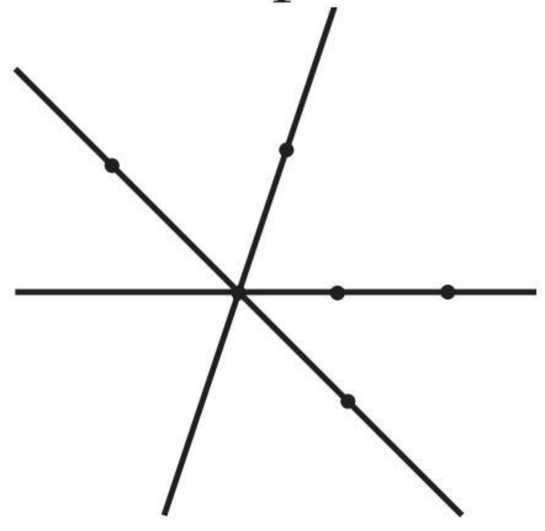


Рис. 17

Ф: Позначте цю точку A, яка належить трьом прямим.

1.20.* Розв'яжіть задачу Федора.

К: Відомо, що деяка задана на рис. 17 точка лежить на зображеній на цьому рисунку прямій між точками A і E. Позначте цю точку D, потім позначте точку E, а пряму, на якій лежать точки A, D, E, позначте k.

1.21.* Розв'яжіть запропоновану Катериною задачу.

Ф: Позначте дві ще не позначені вами на рисунку прямі буквами m і n, якщо відомо, що точка A лежить на прямій m між двома іншими позначеними вами точками.

1.22.* Розв'яжіть запропоновану Федором задачу.

К: Знайдіть на рисунку точку, що лежить на прямій n, але не лежить на прямих m і k. Позначте цю точку C.

1.23.* Розв'яжіть запропоновану Катериною задачу.

Ф: Які дві задані на рисунку точки лежать по один бік від прямої k? Позначте буквою B ту з цих точок, яка ще не позначена.

1.24.* Розв'яжіть запропоновану Федором задачу.

К: Яка із заданих на рисунку точок ще не позначена? Позначте її F.

1.25.* Розв'яжіть запропоновану Катериною задачу.

К: Наступну фігуру для постановки питань запропоную я. Прямі a і b перетинаються. Точка K лежить лише на прямій a, точка P лежить тільки на прямій b, а точка M розташована так, що будь-яку з двох прямих a і b можна позначити за допомогою двох зі згаданих трьох точок. Які запитання можна поставити?

Ф: Спочатку зробимо рисунок. Прямі a і b перетинаються... З точками K і P все зрозуміло, а ось де розмістити точку M?

1.26.* Дайте відповідь на запитання Федора.

Ф: Чи лежить якась одна з трьох позначених точок між двома іншими на одній з заданих прямих?

1.27.* Дайте відповідь на запитання Федора.

Ф: Де потрібно розмістити точку N, щоб точка M містилась між двома іншими позначеними точками на прямій b?

1.28.* Дайте відповідь на запитання Федора.

Ф: Тепер моя черга пропонувати фігуру. Ось її опис. Прямі a і b паралельні. Точки M і P лежать на прямій a, а точка K не належить жодній з даних прямих.

1.29.** Які запитання можна поставити до запропонованого Федором опису фігури? Дайте відповіді на свої запитання.

К: Ставмо запитання *разом*!

Ф: Якщо ви будете лише *читачем*, то навряд чи навчитеся *розв'язувати задачі*!

У: Поставте запитання до опису наступних кількох фігур і дайте відповіді на свої запитання.

1.30.** Накресліть паралельні прямі a і b і позначте точку N, яка не лежить на жодній з даних прямих. Проведіть через точку N пряму, що перетинає пряму a, і позначте всі точки перетину прямих. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

1.31.** На площині позначені точки M, N, K, P. Відомо, що MN і NK — різні позначення однієї прямої, а MK і KP позначають різні прямі. Виконайте відповідний рисунок. Які запитання до нього можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

1.27. Немає трьох позначених на одній прямій точок.

1.29. Наприклад: чи паралельні прямі MP і b? Чи належить точка K прямій PM? Чи паралельні прямі KP і b?

1.30. Наприклад: які прямі на рисунку перетинаються? Яка точка розташована між двома іншими на одній прямій? Чи залежить відповідь на попереднє запитання від того, де розташована точка N?

1.31. Наприклад: які три з чотирьох позначених точок лежать на одній прямій? Чи достатньо даних, щоб вказати, яка з цих трьох точок лежить між двома іншими? Скільки прямих можна провести через задані 4 точки? Чи є серед цих прямих паралельні?

Подібні завдання (1.32–1.33)

1.32.** Розташуйте точки A, B, C і D так, щоб AB і AC позначали ту саму пряму, а BC і AD — різні прямі. Які запитання можна поставити до цього рисунка? Дайте відповіді на свої запитання.

1.33.** Позначте на прямій точки A, B, C і D так, щоб точка D лежала між точками A і B, а точка C лежала між точками D і B. Які запитання можна поставити до цього рисунка? Дайте відповіді на свої запитання.

1.34.*** Зобразіть чотири прямі, що попарно перетинаються, позначте всі точки перетину прямих. Які запитання можна поставити до цього рисунка? Дайте відповіді на свої запитання.

ТРИРІВНЕВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНІХ ТА САМОСТІЙНИХ РОБІТ

(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C.
Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

1.35.* Проведіть пряму. Позначте на ній три точки.

а) Запишіть, які дві точки розташовані по один бік від третьої.

б) Запишіть усі можливі позначення прямої за допомогою позначених точок.

1.36.* Проведіть три прямі, що попарно перетинаються.

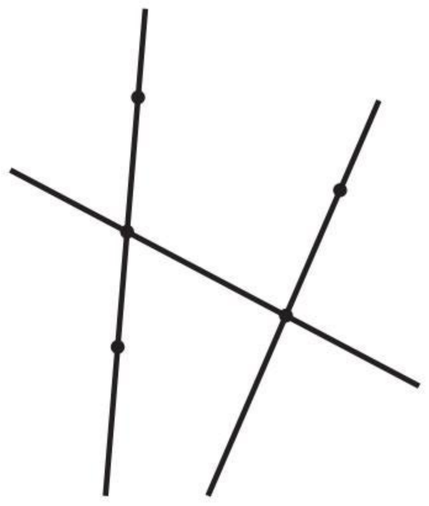
а) Позначте прямі малими латинськими літерами, а точки перетину прямих — великими латинськими літерами.

б) Запишіть позначення кожної з проведених прямих за допомогою позначених точок.

в) Укажіть відповідності між двома різними позначеннями тієї самої прямої.

1.37.* Позначте прямі малими латинськими літерами, а точки перетину прямих — великими латинськими літерами.

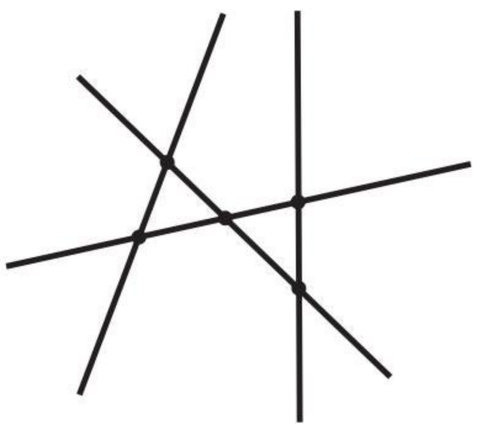
а) Запишіть позначення точок, які належать двом прямим.



1.34. Наприклад: скільки точок перетину лежить на кожній прямій? Скільки всього є точок перетину? Чи на кожній прямій є точка, розташована між двома іншими? Скільки ще прямих можна провести через задані точки?

б) Запишіть позначення точки, яка лежить на прямій між двома позначеними точками.

1.48.* Позначте прямі малими латинськими літерами, а точки перетину прямих — великими латинськими літерами.



а) Запишіть позначення точки, яка лежить на прямій між двома іншими позначеними точками, і вкажіть ці точки.

б) Запишіть по одному позначенню кожної прямої за допомогою позначених точок. Укажіть відповідності між двома різними позначеннями тієї самої прямої.

Паралельні прямі

1.39.** Накресліть три прямі, якщо відомо, що є лише дві точки перетину цих прямих. Позначте всі прямі й запишіть паралельність прямих.

1.40.** Накресліть усі можливі варіанти взаємного розташування чотирьох прямих за умови, що серед них нема паралельних.

1.41.** На рисунку дві прямі паралельні. Позначте прямі й зображені точки.



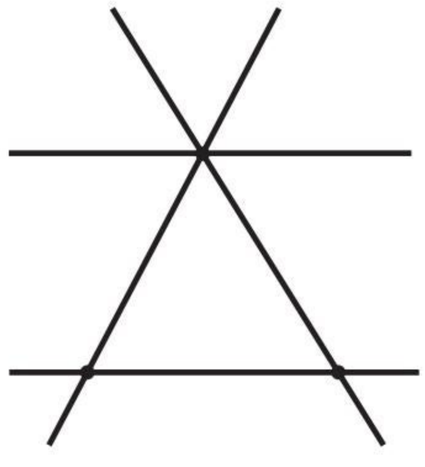
а) Запишіть паралельність прямих.

б) Запишіть позначення точок, що належать лише одній із зображених прямих.

в) Запишіть позначення точок, що належать зображеним прямим.

г) Запишіть позначення пари точок, що лежать у різних півплощинах відносно прямої, що перетинає дві інші прямі.

1.42.* На рисунку дві прямі паралельні. Позначте прямі й зображені точки.



а) Запишіть паралельність прямих.

б) Запишіть позначення точки, яка належить найбільшому числу зображених прямих.

в) Позначте ще одну точку, яка лежить між двома позначеними точками на одній із двох паралельних прямих. Запишіть позначення цих трьох точок у тому порядку, як вони розташовані на прямій.

МАРИНА СЕРГІЇВНА В'ЯЗОВСЬКА



(нар. 1984)

Українка, яка розв'язала задачу століть.

Народилася Марина В'язовська в Києві в родині інженерів. У дитинстві захоплювалася науковою фантастикою. Навчалася в Київському природничо-науковому ліцеї, демонструвала високі результати на учнівських олімпіадах з математики.

Навчалася на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, згодом закінчила аспірантуру та захистила кандидатську дисертацію в Інституті математики НАН України.

Відомою на весь світ Марина В'язовська стала завдяки розв'язанню знаменитої задачі про пакування куль у багатовимірному просторі. Цікавим є походження цієї задачі: вона виникла як задача про укладання гарматних ядер. Її не змогли розв'язати протягом кількох століть навіть такі видатні вчені, як німець Йоганн Кеплер та англієць Ісаак Ньютон. Тому її доєднав до свого знаменитого списку невирішених математичних задач один з найвідоміших математиків XX ст. німець Давид Гільберт.

Саме цю задачу і розв'язала Марина В'язовська у 2016 році! За це вона удостоєна однієї з найпрестижніших у світі математики нагород — Медалі Філдса, та у співавторстві з іншими математиками — премії Салема.

ОЛЕКСІЙ ВАСИЛЬОВИЧ ПОГОРЄЛОВ

(1919–2002)

Легенда геометрії.



Коли Олексій ще навчався на фізико-математичному факультеті Харківського державного університету (тепер ім. В. Н. Каразіна), найбільше за все він захоплювався геометрією. Його наукові праці стосуються основ геометрії, а також її застосування в різноманітних галузях — наприклад, у фізиці.

О. В. Погорєлов — автор широко відомих підручників з усіх розділів геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів та ВНЗ. Його підручники вирізняються оригінальністю викладу, математичною строгістю і водночас доступністю.

ОЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ СМОГОРЖЕВСЬКИЙ

(1896–1969)

Видатний математик і педагог.



Народився у Вінницькій області. Працював учителем математики в сільських школах Вінниччини, а згодом — у Київському політехнічному інституті.

Наукові дослідження Олександра Степановича в галузі геометрії, зокрема в теорії геометричних побудов, набули всесвітнього визнання.

Смогоржевському належить понад 95 наукових праць, з них 9 монографій і підручники з основ геометрії та теорії геометричних побудов для університетів і педагогічних інститутів, науково-популярні твори з математики.

ГЛАВА 2. ПРОМЕНІ, КУТИ І ВІДРІЗКИ



1. ПРОМЕНІ

У: Позначимо на прямій будь-яку точку (рис. 1). Вона поділить пряму на дві частини. Кожну з них називають *променем*.

Рис. 1

Точка, що ділить пряму на два промені, належить *обом* променям. Її називають *початком* кожного з них. А два промені, на які точка ділить пряму, називають *доповняльними*, оскільки кожний з них доповнює інший промінь до прямої.

2.1.* А як ви вважаєте: чому промінь назвали «променем»?

У: Промінь, як і пряму, можна позначити однією маленькою латинською буквою. Наприклад, на рис. 2 зображено промінь a. Але частіше промінь позначають двома великими латинськими літерами. При цьому *перша літера позначає початок променя*, а друга — будь-яку іншу його точку: наприклад, на рис. 3 зображено промінь BC.

2.1. Промінь світла поширюється в пустоті по прямій.
(Надалі слово «Порада» ми опускатимемо.)



Рис. 2

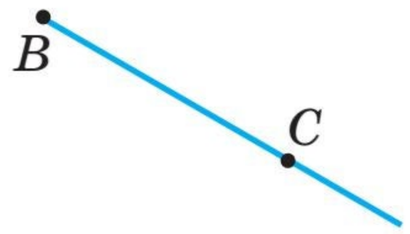


Рис. 3

2.2.* Чим відрізняються промені AB і BA на рис. 4?

2.3.** Розгляньте рисунок 5.

а) Скільки всього променів зображено на рисунку?

б) Які промені можна позначити заданими на рисунку точками?

в) Які з цих променів можна позначити двома способами?

г) Скільки на рисунку пар доповняльних променів? Яку пару доповняльних променів можна позначити заданими точками?



Рис. 4

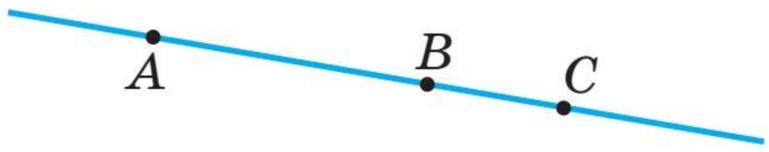


Рис. 5

Подібні завдання (2.4–2.5)

2.4.** На прямій задано 4 точки. Скільки променів утворилось?

2.5.*** На прямій задано n точок. Скільки променів утворилось?

У: Промені, що лежать на паралельних прямих, називають *паралельними*.

2.6.* Чи можуть перетинатися два паралельні промені?

2.7.* Чи обов'язково перетинаються два непаралельні промені? Зробіть рисунок, що підтверджує вашу відповідь.

2. КУТИ

У: Два промені, що виходять з однієї точки, утворюють *кут* (рис. 6). Ці промені називають *сторонами кута*, а їх спільний початок — *вершиною кута*.

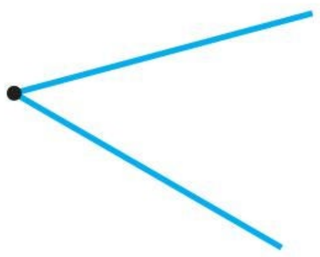


Рис. 6

На рисунку кут позначають зазвичай однією чи кількома дужками, а у вершині кута як правило не ставлять точку.

2.2. Зауважте, що перша буква в позначенні променя відповідає його початку.

2.4. Скористайтеся тим, що кожна точка є початком двох доповняльних променів.

Для запису кута використовують позначення $\angle$.

Позначають кути у різний спосіб (рис. 7): наприклад, $\angle ab$ і $\angle ABC$ позначені променями — сторонами кута, $\angle B$ позначений вершиною кута, $\angle 1$ позначений цифрою, а останній кут на цьому рисунку позначений грецькою літерою «альфа».

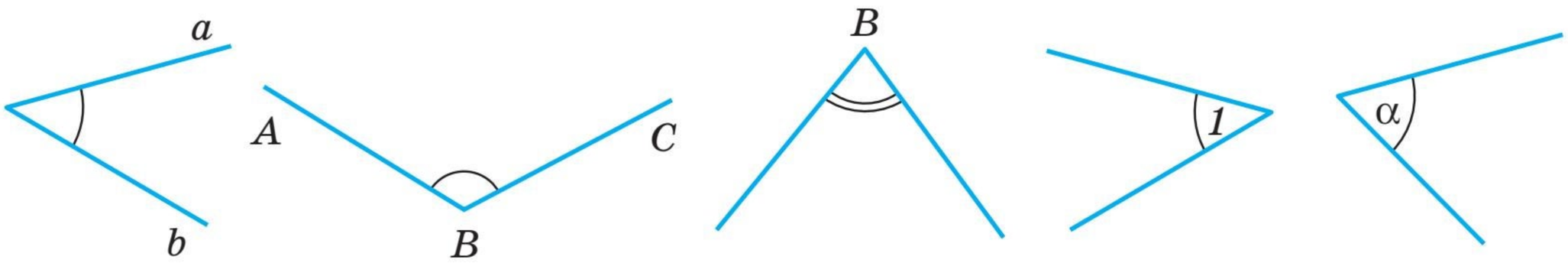


Рис. 7

Доповняльні промені утворюють кут, який називають *розгорнутим*. Наприклад, на рисунку 8 зображено розгорнутий кут ABC.



Рис. 8

ПОРІВНЯННЯ І ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

У: Як можна визначити, чи рівні два кути, зображені на рис. 9?

Ф: Я вирізав обидва кути і наклав один кут на другий (рис. 10). При цьому кути *сумістились* — значить, вони .

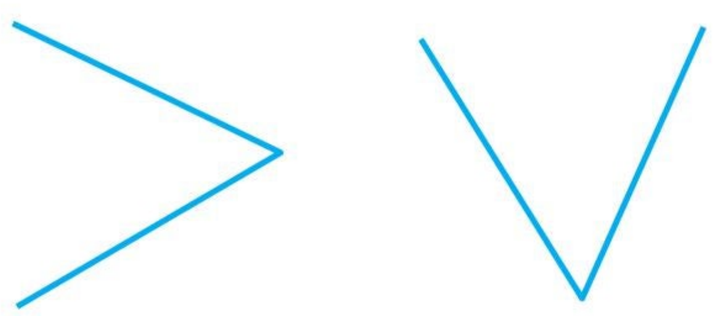


Рис. 9

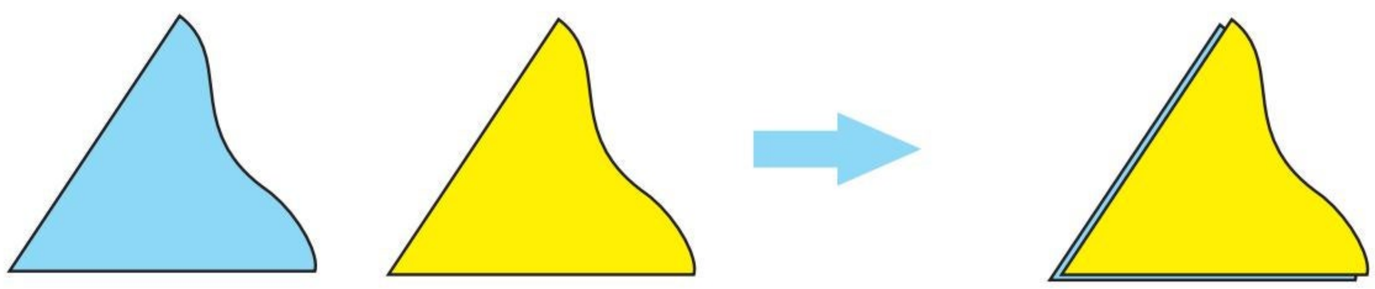


Рис. 10

У: Чудова ідея! Запропонований вами спосіб порівняння можна застосувати до *будь-яких* геометричних фігур.

Дві геометричні фігури рівні, якщо їх можна сумістити накладанням.

Розглянемо тепер *нерівні* кути. Які кути зображено на рисунку 11, і який з них найбільший?

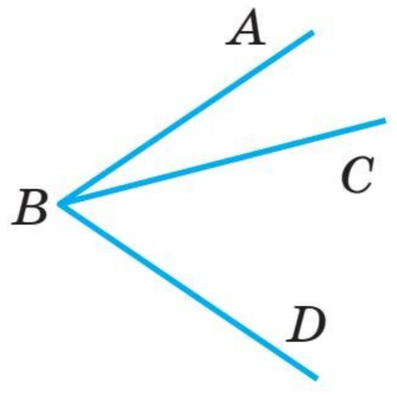


Рис. 11

К: На рисунку 11 зображено три кути: ABD, ABC і CBD. Найбільший кут ABD, оскільки кожний з кутів ABC і CBD становить частину кута ABD.

У: Правильно. А як визначити, який з кутів ABC і CBD більший?

Ф: Накладанням. Зараз я їх виріжу...

К: Невже щоразу для порівняння кутів доведеться їх вирізати? На що тоді перетворяться наші зошити?

Ф: Кути не потрібно вирізати і накладати: їх можна *виміряти* і після цього порівняти *результати вимірювань*! Адже ми вже вміємо вимірювати кути транспортиром. Ось як можна виміряти, наприклад, кут ABC (рис. 12).

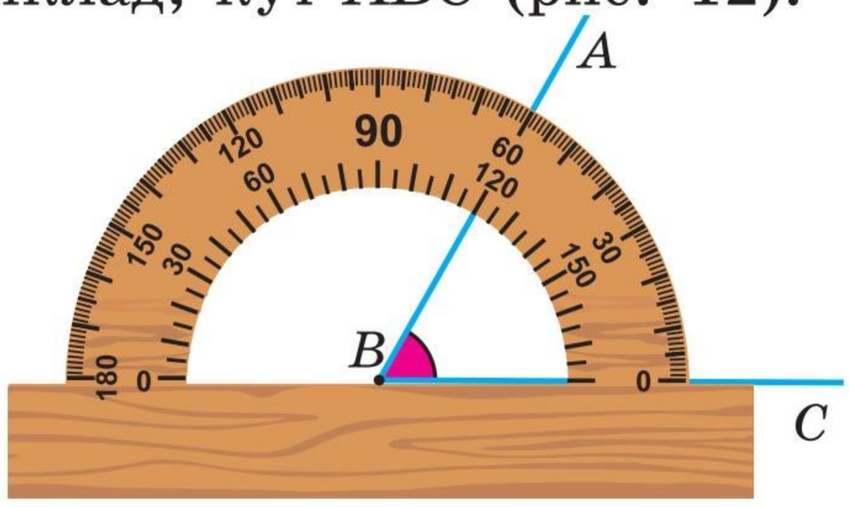


Рис. 12

У: Гарна ідея! Нагадаю, що за одиницю вимірювання кута приймають один *градус* — він становить $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута.

У запису градуси позначають маленьким кружечком: наприклад, розгорнутий кут дорівнює 180°. Можна сказати й так: «градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°».

Щоб порівняти два кути, достатньо порівняти їхні *градусні міри*.

2.8.* Чому дорівнює кут ABC на рисунку 12? У скільки разів цей кут менший від розгорнутого?

К: За допомогою транспортира я відклала від променя AB кут BAC, що дорівнює 45° (рис. 13).

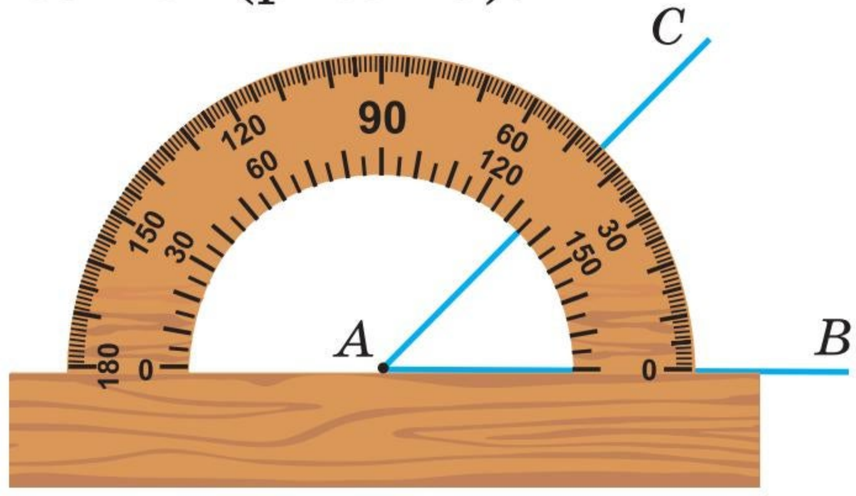


Рис. 13

Ф: Від променя AB можна відкласти й *інший* кут BAD, що дорівнює 45°! Ось як це можна зробити (рис. 14).

У: Ви маєте рацію. Але кути BAC і BAD відкладені в *різні півплощини* від прямої AB. А від даного променя в *дану* півплощину можна відкласти *один і лише один* кут, що дорівнює заданому нерозгорнутому куту.

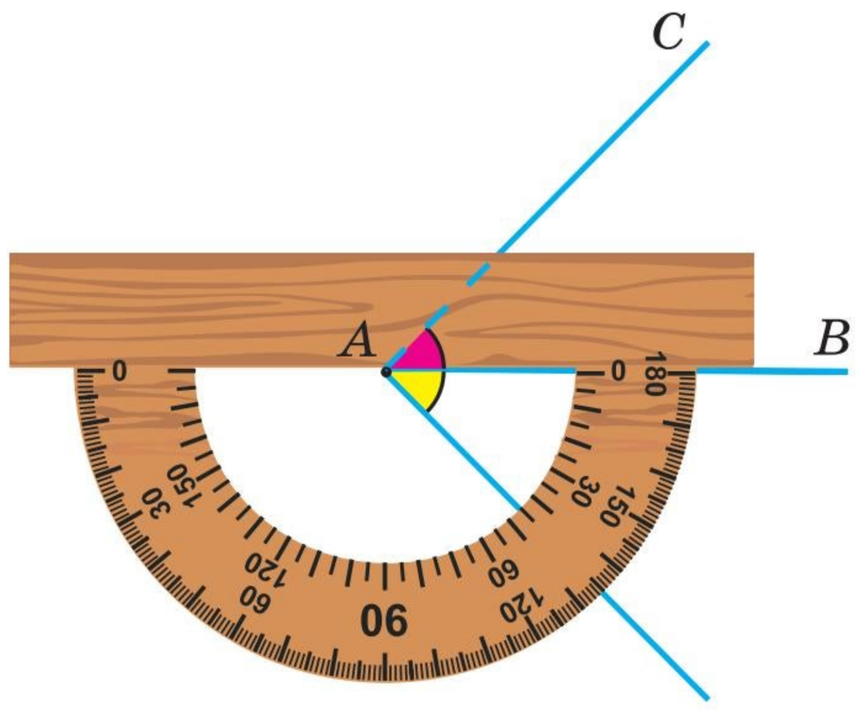
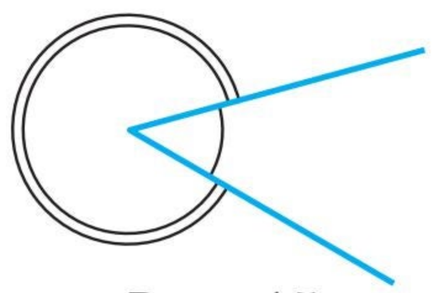
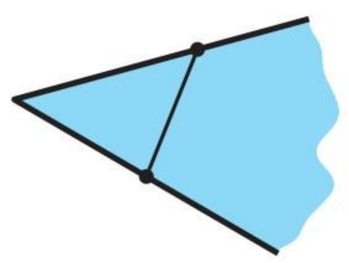


Рис. 14

К: Мені здається, що два промені, які виходять з однієї точки, утворюють не один, а *два* кути (рис. 15). І якщо ці кути не рівні, то один з них менший від розгорнутого, а другий — більший.

У: Ви знову маєте рацію. Але поки що ми розглядатимемо кути, *які не більші від розгорнутого*. З'єднаємо відрізком будь-які дві точки на сторонах кута, меншого від розгорнутого (рис. 16). Ту частину площини, у якій лежить цей відрізок, називають *внутрішньою* областю кута. На рисунку 16 внутрішня область кута виділена кольором. Кажуть також, що всі точки внутрішньої області кута лежать *між його сторонами*. Якщо накласти один із двох нерівних кутів на другий так, щоб сторона одного кута сумістилася зі стороною другого, до того ж щоб кути лежали в одній півплощині відносно прямої, на якій лежать суміщені сторони, то друга сторона *меншого* кута лежатиме у внутрішній області *більшого* кута.


Рис. 15


Рис. 16

2.9.* Накресліть кут ABC, менший від розгорнутого, і проведіть через його вершину пряму, що не проходить через внутрішню область кута ABC і не містить сторону кута.

а) Скільки кутів, менших від розгорнутого, утворилось на рисунку?

б) Запишіть позначення для всіх цих кутів, відмітивши і позначивши на рисунку необхідні для цього точки.

Подібне завдання

2.10.* Накресліть кут ABC, менший від розгорнутого, і проведіть через його вершину пряму, що проходить через внутрішню область кута.

а) Скільки утворилося кутів, менших від розгорнутого?
б) Запишіть позначення всіх кутів, відмітивши і позначивши на рисунку необхідні для цього точки.

Додавання кутів

У: Проведемо з вершини B кута ABC промінь BD у внутрішній області кута (рис. 17). Цей промінь розділить кут ABC на кути ABD і DBC.

Вимірявши ці кути, ми виявимо, що $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.

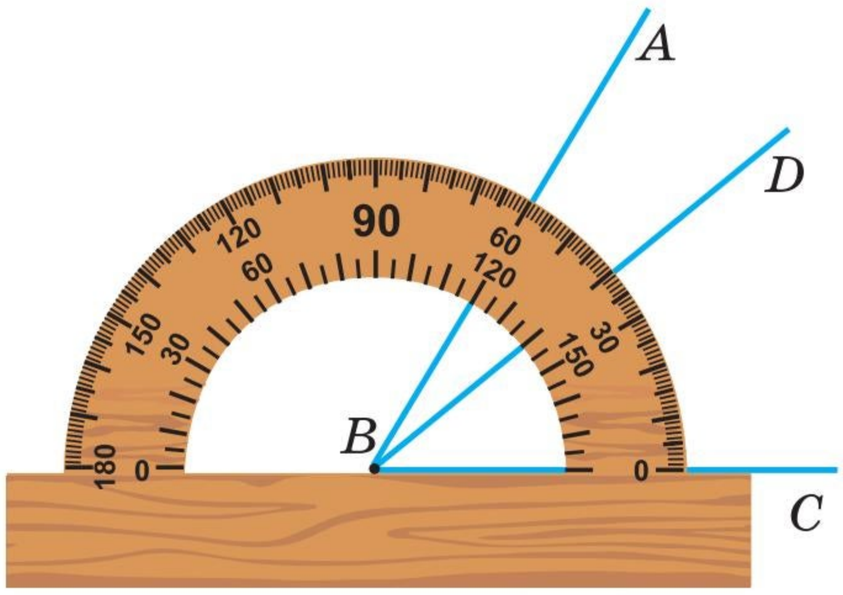


Рис. 17

Це означає, що

градусна міра кута, поділеного на два кути, дорівнює сумі градусних мір цих кутів.

Із записаної вище рівності випливає, що
$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$.

2.11.* Сума двох кутів дорівнює розгорнутому куту, до того ж перший з цих кутів удвічі більший від другого. Чому дорівнюють дані кути?

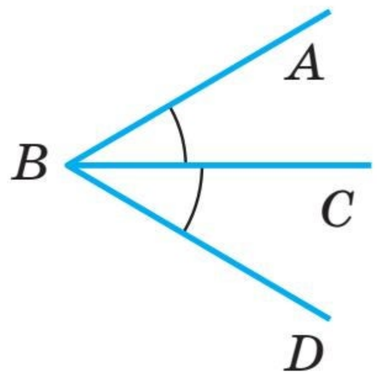


Рис. 18

У: Промінь, який ділить кут на два рівні кути, називають *бісектрисою* цього кута (рис. 18) (від латинського «розріз надвоє»).

Рівні кути на рисунках позначають *однаковими* дужками (вони можуть бути одинарними, подвійними тощо).

2.12.* Виріжте з аркуша паперу кут, не більший від розгорнутого. Не використовуючи жодних креслярських інструментів, побудуйте бісектрису цього кута. Відтак побудуйте бісектриси кутів, на які ця бісектриса поділила вирізаний вами кут.

2.13. Побудуйте кут AOB, що дорівнює 80°.

а)* Розділіть побудований вами кут на кути 50° і 30°. Побудуйте бісектриси кожного з цих кутів. Виміряйте кут між цими бісектрисами.

б)** Кут розділили на два кути і провели бісектриси цих кутів. Доведіть, що кут між цими бісектрисами дорівнює половині початкового кута.

2.12. Складіть вирізаний з паперу кут навпіл так, щоб сторони кута сумістились.

Подібні завдання (2.14–2.16)

2.14.** На рис. 19 $\angle AOC = 80°$, а $\angle EOC = 50°$. Промені OB і OD — бісектриси даних кутів.
а) Чому дорівнює $\angle AOE$?
б) Чому дорівнює кут між бісектрисами кутів AOC і EOC?

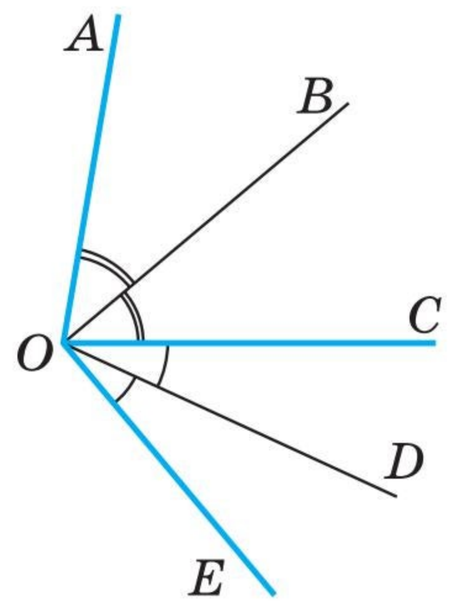


Рис. 19

2.15.** На рис. 20 AM і AN — бісектриси кутів BAC і CAD, відповідно. Перенесіть рисунок до зошита. Задайте самостійно градусні міри двох нерівних кутів на цьому рисунку і запишіть їх. Обчисліть і запишіть градусні міри решти кутів.

2.16.** З вершини кута ABC між його сторонами провели промінь BK. Кут між бісектрисами утворених кутів дорівнює 40°.
а) Чому дорівнює кут ABC?
б) Чому дорівнюють утворені кути, якщо перший з них: утричі більший від другого; на 60° більший від другого?

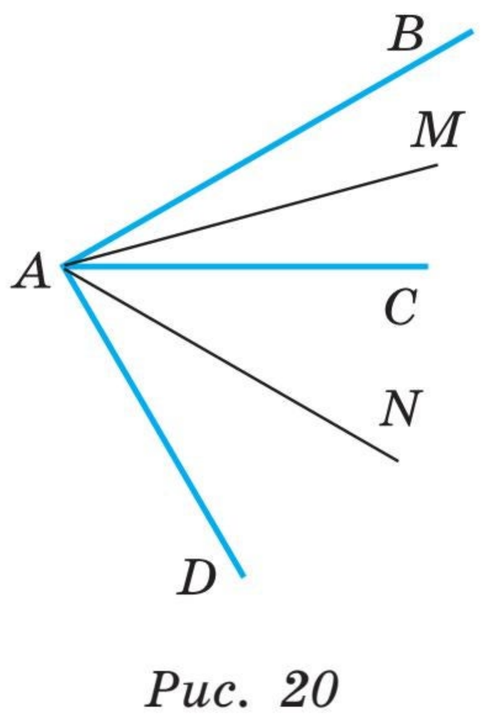


Рис. 20

2.17.** Відомо, що $\angle ABD = 80°$, $\angle CBD = 30°$, промінь BC лежить усередині кута ABD. Промені BM і BN — бісектриси кутів ABD і CBD відповідно. Зробіть рисунок.
а) Знайдіть кут MBN.
б) Доведіть, що $\angle MBN = \dfrac{\angle ABD - \angle CBD}{2}$.

Подібне завдання

2.18.** Кут між бісектрисами кутів ABC і CBD дорівнює 50°, до того ж промінь BD лежить усередині кута ABC.
а) Чому дорівнює різниця кутів ABC і CBD?
Чому дорівнюють ці кути, якщо:
б) їхні градусні міри відносяться як 3 : 1?
в) другий становить 20 % від першого?

Прямий, гострий і тупий кути

2.19.* Проведіть бісектрису розгорнутого кута. Чому дорівнюють утворені кути?

2.15. Скористайтеся тим, що кути MAC і CAN дорівнюють половинам кутів BAC і CAD відповідно.

У: Кут, що дорівнює 90°, тобто *половині розгорнутого кута*, називають *прямим кутом* і позначають спеціальним значком (рис. 21).



Рис. 21

2.20.* Розгляньтеся довкола: де ви помітили прямі кути?

У: Кут, менший від 90°, називають *гострим кутом* (рис. 22, *а*), а кут, більший від 90°, але менший від розгорнутого, — *тупим* (рис. 22, *б*).

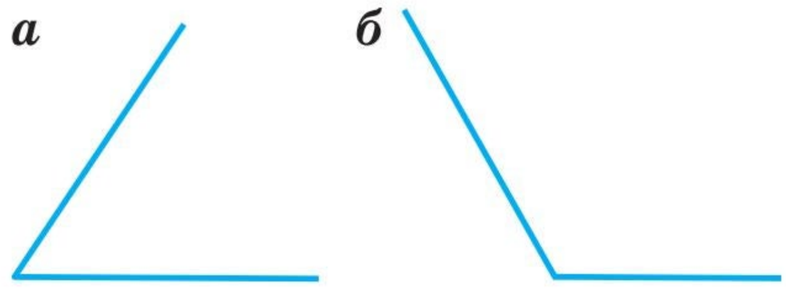


Рис. 22

2.21.* У куті, меншому від розгорнутого, провели бісектрису. Чи можуть серед утворених кутів бути гострі кути? Прямі кути? Тупі кути?

2.22.** Накресліть кут AOB, що дорівнює 140°.

а) Проведіть промінь OM так, щоб кут AOM дорівнював 30°.

б) Чому дорівнює кут BOM?

в) Чи можна провести промінь ON так, щоб кут AON також дорівнював 30°, але промені OM і ON не збігалися? Якщо можна, то чому дорівнює кут MON? Підтвердьте вашу відповідь рисунком.

Подібне завдання

2.23.* Накресліть кут MON, що дорівнює 35°.

а) Скількома способами можна провести промінь OK так, щоб кут KOM дорівнював 50°?

б) Чому в кожному випадку дорівнюватиме кут KON?

3. СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

Суміжні кути

У: Що ви можете сказати про кути ACB і BCD, зображені на рисунку 23?

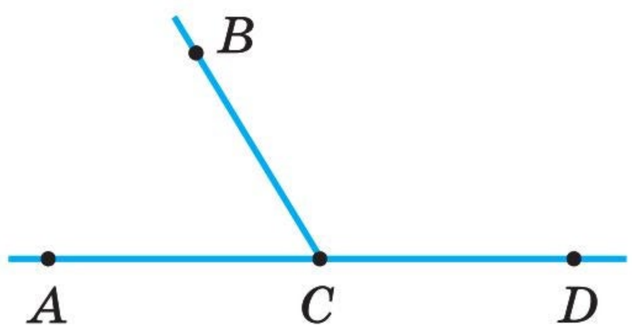


Рис. 23

К: У кутів ACB і BCD сторона CB — спільна, а сторони CA і CD утворюють розгорнутий кут.

Ф: Тому сума кутів ACB і BCD дорівнює 180°.

У: Кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші утворюють розгорнутий кут, називають *суміжними* кутами.
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

2.20. Погляньте на стіни, стелю, меблі, книжки, зошити...

2.24.* Один із суміжних кутів удвічі більший від другого. Чому дорівнюють ці кути?

Подібні завдання (2.25–2.26)

2.25.* Один із суміжних кутів на 40° більший від другого. Чому дорівнюють ці кути?

2.26.** Один із двох кутів у 4 рази і на 108° більший від другого.
а) Чи можуть ці кути бути суміжними?
б) Чи обов'язково ці кути є суміжними?

2.27.* Чому дорівнює кут між бісектрисами суміжних кутів?

Подібні завдання (2.28–2.30)

2.28.* Бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні.
а) Чому дорівнює сума кутів AOB і BOC?
б) Чи є ці кути суміжними?

2.29.* Бісектриси суміжних кутів утворюють рівні кути з їхньою спільною стороною. Чому дорівнюють дані суміжні кути?

2.30.* З точки O прямої AC провели промінь OB. Яку інформацію можна отримати, якщо:
а) $\angle AOB = 120°$;
б) $\angle BOC = 70°$;
в) $\angle AOB = \frac{2}{5}\angle AOC$;
г) $\angle BOC : \angle AOB = 2 : 7$;
д) $\angle BOC$ менший від $\angle AOB$ на 30°;
е) $\angle BOC = \frac{2}{3}\angle AOB$?

Вертикальні кути

У: Розгляньмо кути, що утворюються при перетині двох прямих (рис. 24). Що ви можете сказати про ці кути?

Ф: Мені здається, що при цьому утворюються дві пари *рівних* кутів: $\angle AOC = \angle DOB$, $\angle COB = \angle DOA$.

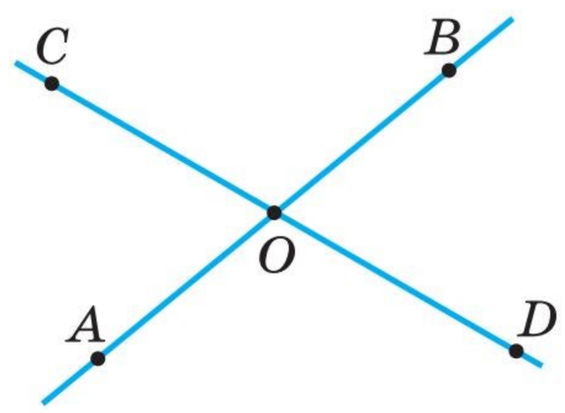


Рис. 24

К: Це ще потрібно довести!

У: Звісно. Але спочатку дамо означення цим кутам.

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін другого кута.

2.31.* Доведіть, що вертикальні кути рівні.

2.29. Доведіть, що в цьому випадку суміжні кути рівні.

2.31. Скористайтеся тим, що кожний з двох вертикальних кутів є суміжним з тим самим кутом.

2.32.* Чому дорівнює кут між бісектрисами вертикальних кутів?

Подібні завдання (2.33–2.34)

2.33.* Накресліть дві прямі, що перетинаються, і проведіть бісектриси всіх утворених кутів. Знайдіть:
а) усі рівні кути;
б) усі доповняльні промені;
в) усі перпендикулярні прямі.

2.34.* Накресліть кут. Відтак накресліть усі кути, суміжні з ним. Чи утворилися при цьому вертикальні кути? Позначте на рисунку рівність цих кутів.

2.35.** Чому дорівнюють усі кути, утворені при перетині двох прямих, якщо один з цих кутів утричі більший від іншого?

Подібне завдання

2.36.** Чому дорівнюють усі кути, утворені при перетині двох прямих, якщо:
а) сума двох з цих кутів дорівнює 60°;
б) різниця двох з цих кутів дорівнює 40°;
в) найбільший з утворених кутів на 50° більший від найменшого;
г) сума двох вертикальних кутів дорівнює куту, суміжному з одним з них?

Перший із семи мудреців

У: Теорему про вертикальні кути вважають однією з перших теорем, доведених давніми греками. Легенда приписує доведення цієї теореми Фалесові, який жив в VI столітті до нашої ери в місті Мілеті — тому цього вченого називали Фалесом Мілетським.

Сучасники вважали Фалеса наймудрішим з наймудріших — зокрема тому, що він першим зміг передбачити сонячне затемнення. Це затемнення сталося 28 травня 585 року до н. е. під час битви між стародавніми державами Лідією і Мідією. Темрява, що раптово настала серед сонячного дня, так приголомшила воїнів, що вони припинили бій.

Коли стародавні греки вирішили подарувати наймудрішому золоту чашу, вони піднесли її Фалесові. Але справжній мудрець — скромна людина, тому Фалес передав чашу іншому мудрецеві, якого вважав більш гідним. Той передав чашу третьому мудрецеві, і так чаша, обійшовши сімох мудреців,

повернулась до Фалеса. Мудреці, що пустили золоту чашу по колу, увійшли в історію як «сім мудреців»: вони визнавали мудрість один одного.

Використовуючи свої знання в геометрії, Фалес здогадався, як вимірювати висоту давньоєгипетських пірамід. Для цього він чекав моменту, коли довжина його власної тіні дорівнювала його зросту.

2.37.* Як висота піраміди пов'язана з довжиною її тіні в момент, коли довжина тіні людини дорівнює її зросту?

Перпендикулярні прямі

У: Прямі називають *перпендикулярними*, якщо кути, утворені при перетині цих прямих, є прямими (рис. 25, *а*).

Перпендикулярність прямих записують за допомогою спеціального значка: наприклад, $AB \perp CD$.

На рисунках перпендикулярні прямі креслять за допомогою косинця (рис. 25, *б*).

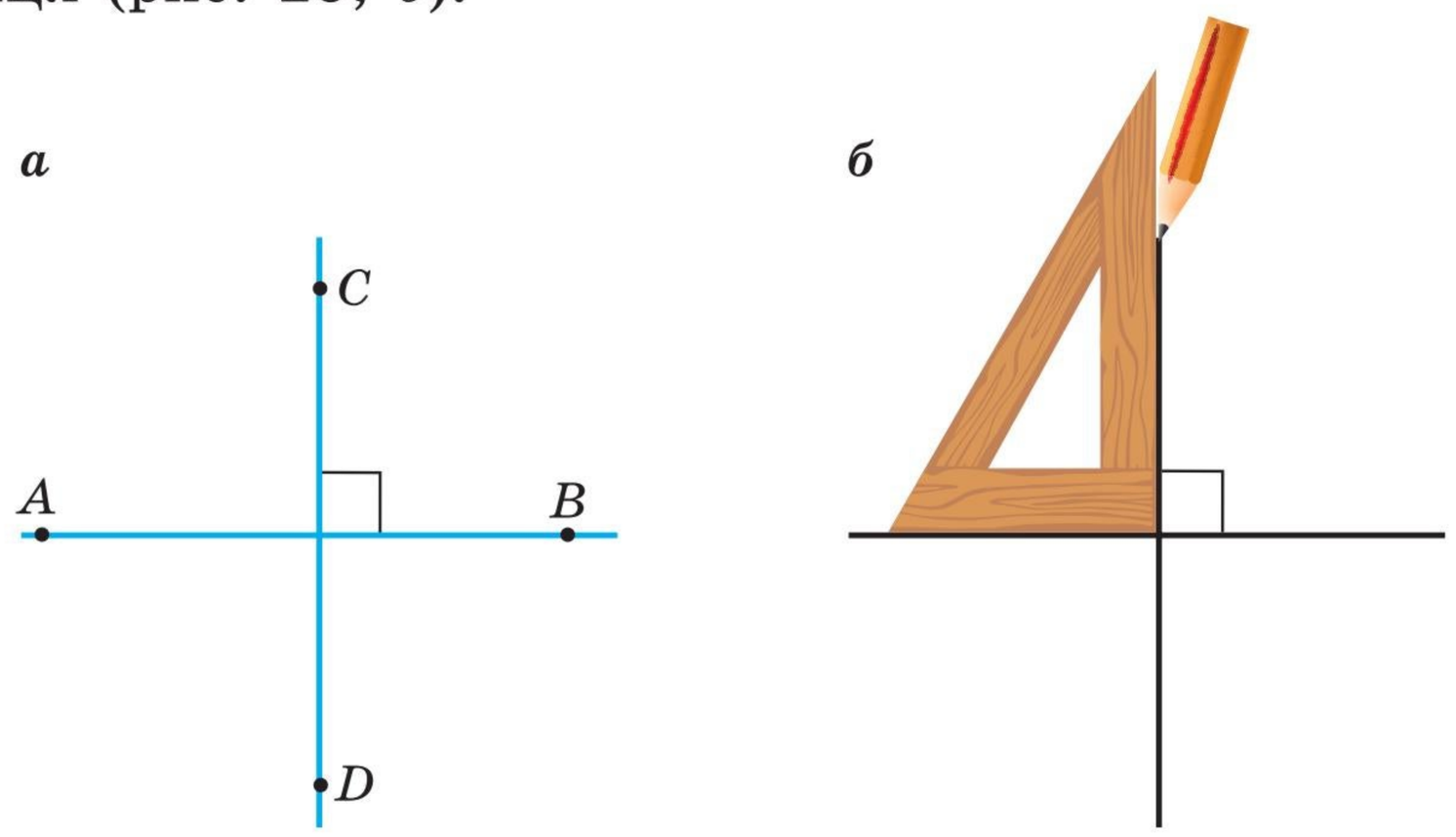


Рис. 25

Ф: Щоб провести перпендикулярні прямі, можна використовувати також лінії клітинок у зошиті, оскільки вони перпендикулярні одна одній!

2.38.* Усі кути, утворені при перетині двох прямих, рівні. Чому дорівнюють ці кути?

2.39.* Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, є прямим. Чому дорівнюють решта кутів?

2.40.** Три прямі перетинаються в одній точці, до того ж дві з них перпендикулярні. Найменший з утворених кутів дорівнює 15°. Виконайте рисунок і знайдіть усі кути на ньому.

Кут між двома прямими

К: При перетині двох прямих утворюється 4 кути. Який з них називають *кутом між прямими*?

У: Якщо при перетині прямих утворюються рівні кути, то ці прямі перпендикулярні, тому кут між ними дорівнює 90°. Якщо ж кути, утворені при перетині двох прямих, не рівні, то кутом між прямими називають будь-який з двох рівних *менших* кутів.

2.41.** Три прямі a, b і c перетинаються попарно, до того ж $a \perp b$, кут між прямими b і c дорівнює 30°, а між прямими a і c — 60°. Зробіть рисунок і знайдіть усі кути на ньому.

2.42.** Три прямі перетинаються в одній точці. Одна з прямих утворює кути 50° і 40° із двома іншими прямими. Виконайте рисунок і позначте на ньому прямі. Яку інформацію можна отримати?

2.43.* Один з кутів на рис. 26 на 60° більший від іншого.

а) Чому дорівнює кут між прямими AD і BC?

б) Запишіть можливі позначення кута між цими прямими.

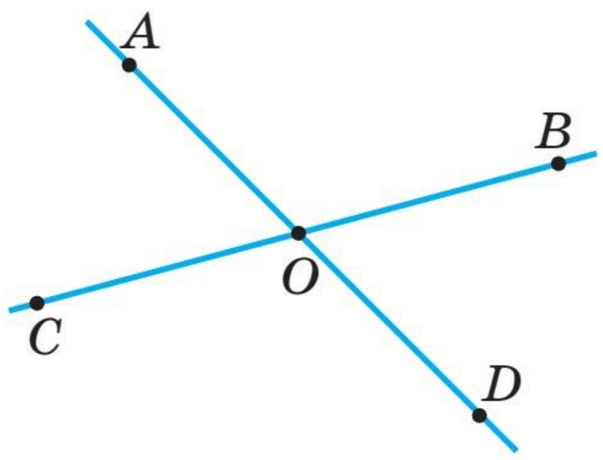


Рис. 26

Подібні завдання (2.44–2.45)

2.44.* Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, у 4 рази більший від іншого. Чому дорівнює кут між даними прямими?

2.45.** Чому дорівнює кут між прямими, що перетинаються, якщо:

а) сума двох з утворених кутів дорівнює 50°;

б) сума двох з утворених кутів дорівнює 200°;

в) різниця двох з утворених кутів дорівнює 50°;

г) сума трьох з утворених кутів дорівнює 250°;

д) кут між бісектрисами двох утворених кутів дорівнює 90°?

2.42. Наприклад, можна знайти: усі кути на рисунку; рівні кути; скільки утворилося прямих кутів; перпендикулярні прямі.

4. ВІДРІЗКИ

Відрізок. Порівняння і вимірювання відрізків

У: Частину прямої, обмежену двома її точками, називають *відрізком* (рис. 27).

Точки, що обмежують відрізок, належать відрізку. Їх називають *кінцями відрізка*. Усі інші точки відрізка називають *внутрішніми* точками. Наприклад, зображений на рис. 27 відрізок можна позначити AB або BA.



Рис. 27



Рис. 28

Відрізки рівні, якщо їх можна накласти один на другий так, що кінці відрізків збігатимуться.

Які відрізки зображені на рис. 28? Який із них найбільший?

К: На рисунку 28 зображено відрізки AB, AC і BC. Найбільшим є відрізок AB, оскільки відрізки AC і BC є його *частинами*.

У: Правильно. Те, що відрізок AB більший за відрізок AC, записують так: $AB > AC$.

Ф: Відрізки можна порівнювати за допомогою вимірювань, використовуючи лінійку з поділками.

У: Як ви вже знаєте, в Міжнародній системі одиниць (СІ) одиницею довжини є *1 метр* (скорочено 1 м). Для рисунків у зошиті зручно використовувати *1 сантиметр* (1 см), що дорівнює одній сотій долі метра, і *1 міліметр* (1 мм), що дорівнює одній десятій долі сантиметра (рис. 29).

Відстанню між двома точками називають довжину відрізка з кінцями в цих точках.

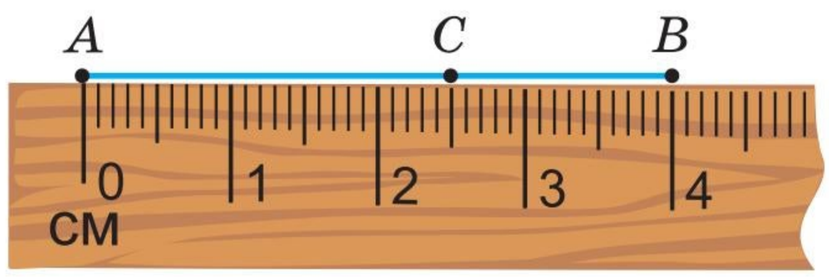


Рис. 29

Довжину відрізка позначають так само, як і сам відрізок. Вимірявши довжини відрізків AC, CB і AB на рисунку 29, отримаємо: $AC + CB = AB$.

Це показує, що

внутрішня точка відрізка ділить його на два відрізки, сума довжин яких дорівнює довжині даного відрізка.

2.46.** Як провести під лінійку відрізок, довжина якого *більша від* довжини лінійки? Наприклад, за допомогою лінійки завдовжки 10 см проведіть відрізок завдовжки 20 см.

2.47.* Розгляньте рис. 30.



Рис. 30

а) Скільки відрізків зображено на рисунку? Виміряйте всі відрізки і запишіть, чому дорівнює довжина кожного з них.

б) Який з відрізків найменший? Найбільший?

в) Запишіть рівності/нерівності для всіх п'яти пар відрізків.

г) Довжини яких відрізків дорівнюють сумам довжин інших відрізків? Запишіть відповідні співвідношення для довжин відрізків.

2.48.** Точка K лежить на відрізку MN, що дорівнює 18 см. Знайдіть довжини відрізків MK і KN, якщо:

а) MK на 6 см більший, ніж KN;

б) MK в 5 разів менший, ніж KN;

в) $MK : KN = 4 : 5$; г) $MK = \frac{2}{7} KN$.

2.49.** Позначте на площині 5 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожну пару точок з'єднайте відрізком. Скільки утворилося відрізків? Як визначити кількість відрізків, не підраховуючи їх?

Подібне завдання

2.50.** На площині задали n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і кожну пару точок з'єднали відрізком. Скільки утворилося відрізків?

Середина відрізка

У: Точку, яка ділить відрізок на два *рівні* відрізки, називають *серединою* відрізка (рис. 31).



Рис. 31

Рівні відрізки зручно відкладати на прямій за допомогою циркуля, не міняючи його розхил (рис. 32). Рівні відрізки позначають на рисунку однаковими невеликими штрихами: одинарними, подвійними тощо.

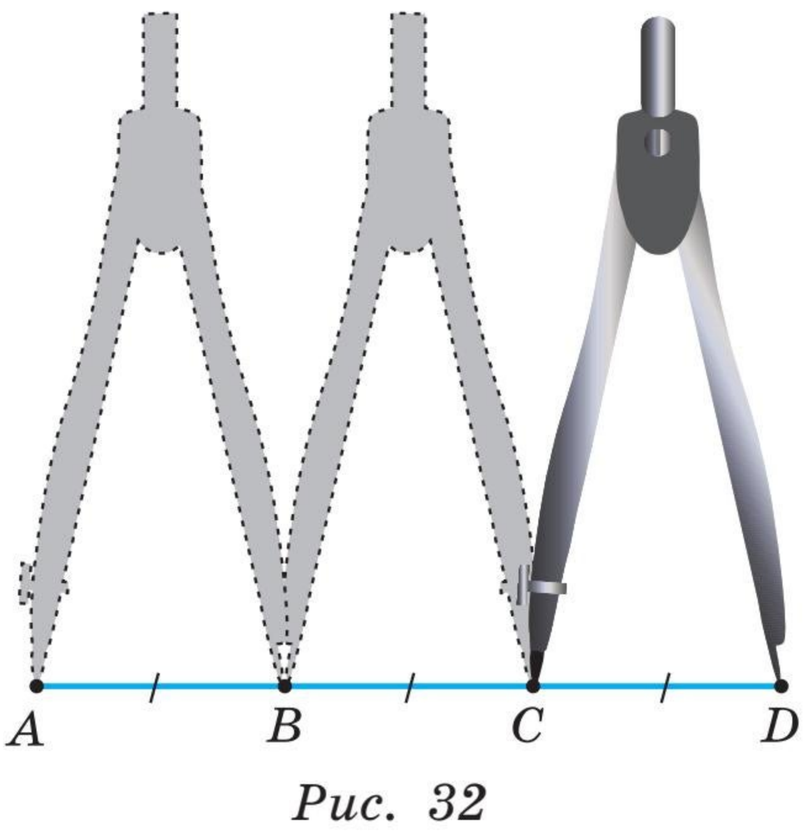


Рис. 32

2.46. Скористайтеся тим, що через дві точки можна провести тільки одну пряму.

2.47. а) На рисунку 6 відрізків.

2.51.* Розгляньте рис. 32.

а) Скільки відрізків зображено на цьому рисунку?

б) Скільки на цьому рисунку пар *рівних* відрізків?

в) Які точки є серединами зображених відрізків?

2.52.* Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 33). Який з них вам здається більшим? Перевірте себе, скориставшись циркулем. Який висновок можна зробити із цього досвіду?

2.53.** Накресліть у зошиті відрізок AB завдовжки 6 см.

а) Позначте на цьому відрізку довільну точку C. Виміряйте довжини відрізків AC і CB.

б) Знайдіть середини відрізків AC і CB і позначте їх M і N.

в) Виміряйте довжину відрізка MN. Яке припущення можна зробити?

г) *Доведіть*, що відстань між серединами двох відрізків, на які ділиться точкою даний відрізок, дорівнює половині довжини даного відрізка.

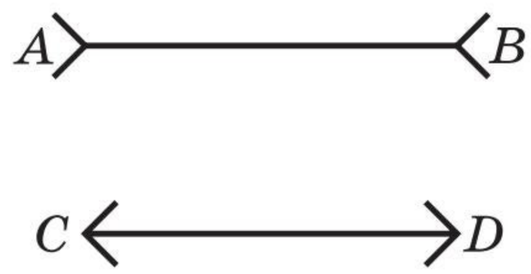


Рис. 33

Подібні завдання (2.54–2.57)

2.54.** Точка M розташована на прямій між точками K і N. Відстань між серединами відрізків KM і MN дорівнює 4 см, а довжини цих відрізків відносяться як 1 : 3.

а) Чому дорівнює довжина відрізка KN?

б) Чому дорівнюють довжини відрізків KM і MN?

2.55.*** Відрізок завдовжки a розділили на n рівних відрізків.

а) Чому дорівнює відстань між серединами сусідніх відрізків?

б) Чому дорівнює відстань між серединами крайніх відрізків?

2.56.*** Відрізок завдовжки 7 см розділили на три нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 4 см, до того ж один з цих відрізків удвічі більший від другого. Яку інформацію звідси можна отримати?

2.57. Відрізок завдовжки a розділили на три відрізки, до того ж відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює b.

а)** Чому дорівнює довжина середнього відрізка?

б)*** Чому дорівнюють довжини всіх відрізків, якщо серед них є два рівні? Розгляньте всі можливі варіанти.

2.56. Можна дізнатись довжини всіх відрізків.

Паралельні й перпендикулярні відрізки. Перпендикуляр до прямої

У: Відрізки, що лежать на паралельних прямих, називають *паралельними*. Позначають $AB \parallel CD$. Відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, називають *перпендикулярними* ($AB \perp CD$).

2.58.* Чи можуть паралельні відрізки перетинатися? Обґрунтуйте.

2.59.* Чи можуть перпендикулярні відрізки не перетинатися? Виконайте рисунок, що підтверджує вашу відповідь.

У: *Перпендикуляром* до прямої називають відрізок, перпендикулярний до цієї прямої, один з кінців якого лежить на даній прямій (рис. 34).

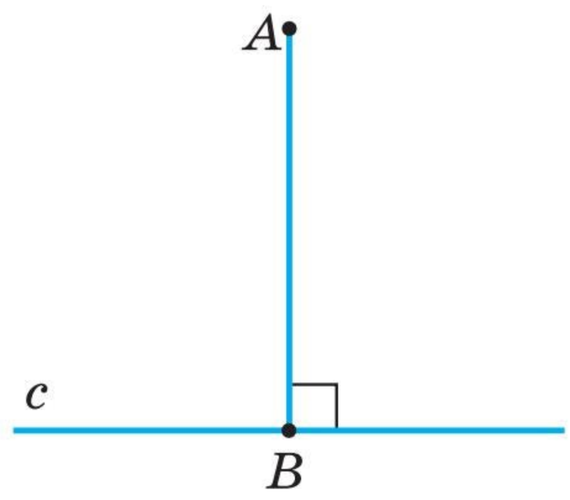


Рис. 34

Кінець перпендикуляра до прямої, що лежить на цій прямій, називають *основою перпендикуляра*. Наприклад, на рис. 34 основою перпендикуляра AB до прямої c є точка B.

2.60.** Запишіть позначення всіх прямих і перпендикулярів до них на рис. 35.

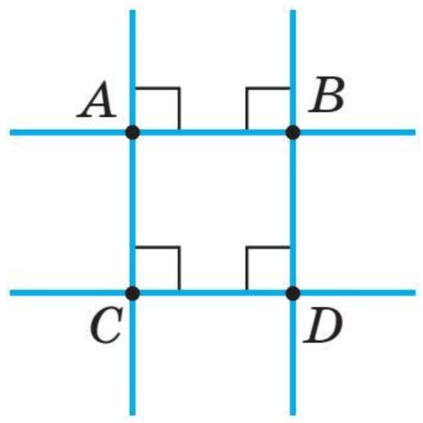


Рис. 35

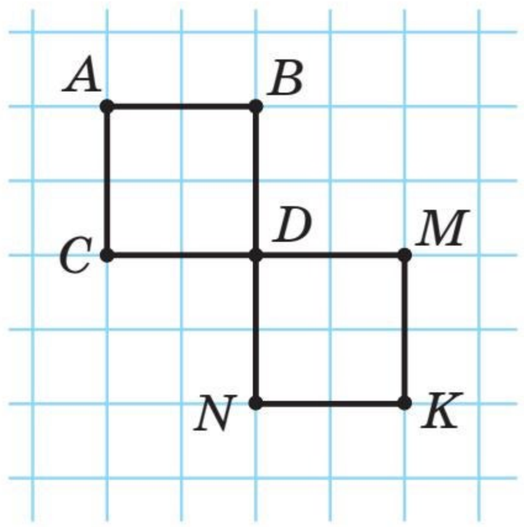


Рис. 36

2.61.** Які запитання можна поставити за рис. 36? Дайте відповіді на свої запитання.

2.60. Один з восьми можливих прикладів: AC — перпендикуляр до прямої CD.

2.61. Наприклад: які відрізки рівні? Які відрізки паралельні? Які відрізки перпендикулярні? Які відрізки є перпендикулярами до яких прямих?

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЯ?

Учням пропонують, використовуючи рис. 37, сформулювати основні твердження глави (означення, аксіоми, теореми). Кожен / кожна може сформулювати кілька тверджень (по одному під час кожного піднесення руки). Перемоги (і заохочувального бала на розсуд учителя / учительки) удостоюють того / ту учня / учениці, після якого / якої ніхто не зміг нічого додати протягом, наприклад, пів хвилини.

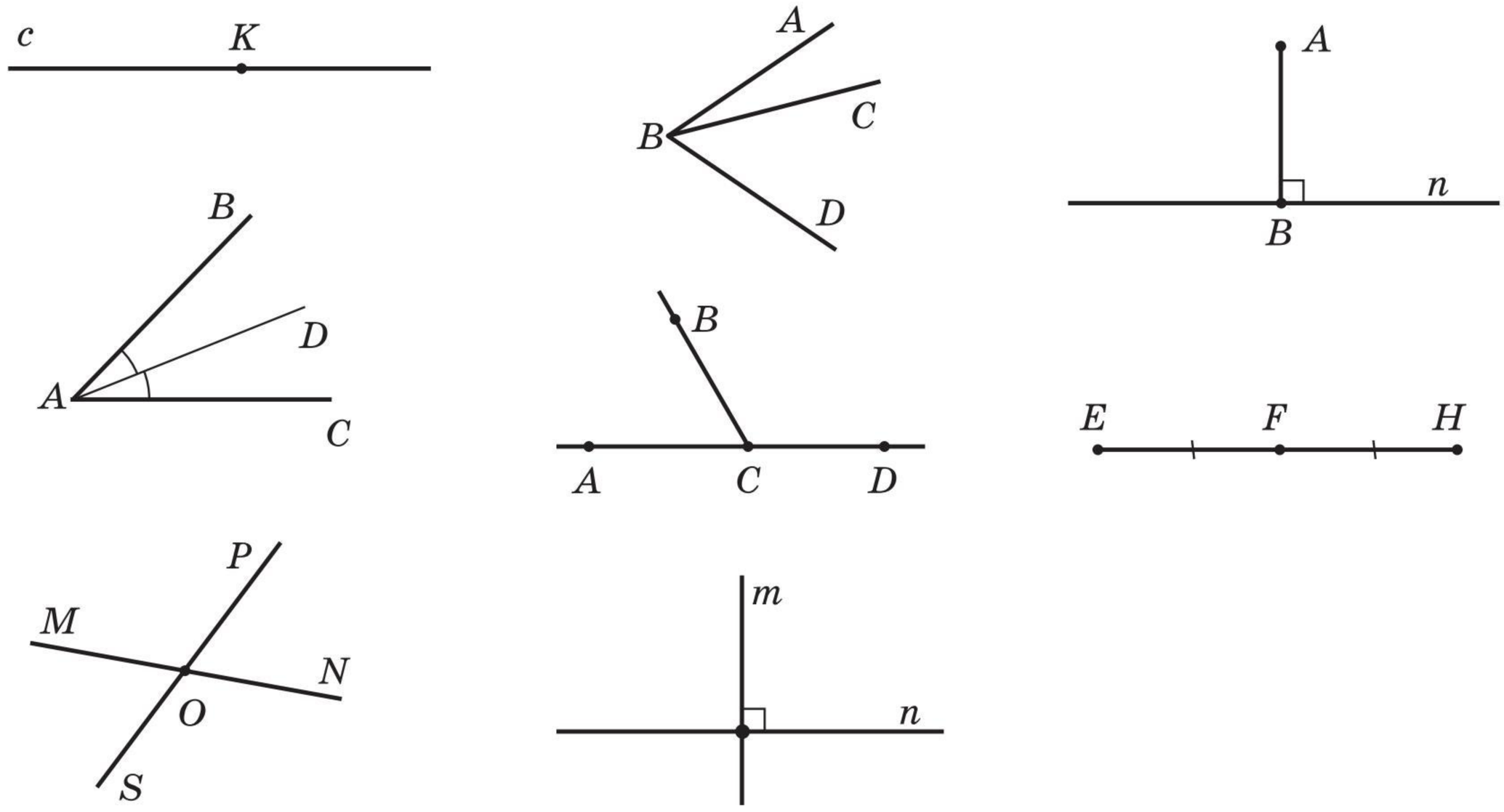


Рис. 37

5. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

У: Які запитання можна поставити за рис. 38?

К: Чому дорівнює кожний із шести позначених кутів на рис. 38?

2.62.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Які зображені на рис. 38 промені є бісектрисами кутів, зображених на рисунку?

2.63.* Дайте відповідь на Федорове запитання.

К: Скільки на рис. 38 прямих кутів?

2.64.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

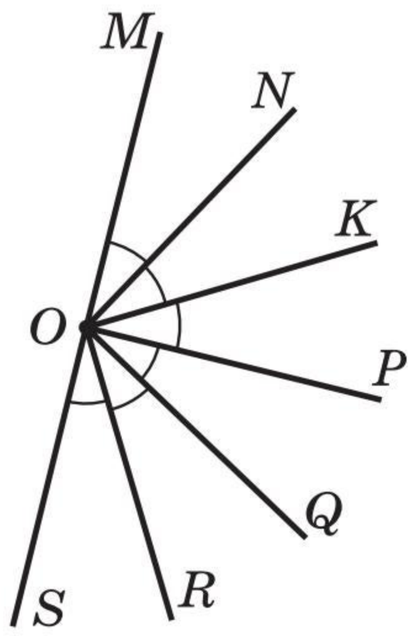


Рис. 38

2.62. Скористайтеся рівністю позначених кутів і тим, що кут MOS розгорнутий.

2.63 Зауважте, що деякі промені є бісектрисами більш ніж одного кута.

Ф: Які кути на рис. 38 дорівнюють 60°? 120°? 150°?

2.65.* Дайте відповідь на Федорове запитання.

У: Які запитання можна поставити до рис. 39?

К: Які кути на рис. 39 є вертикальними?

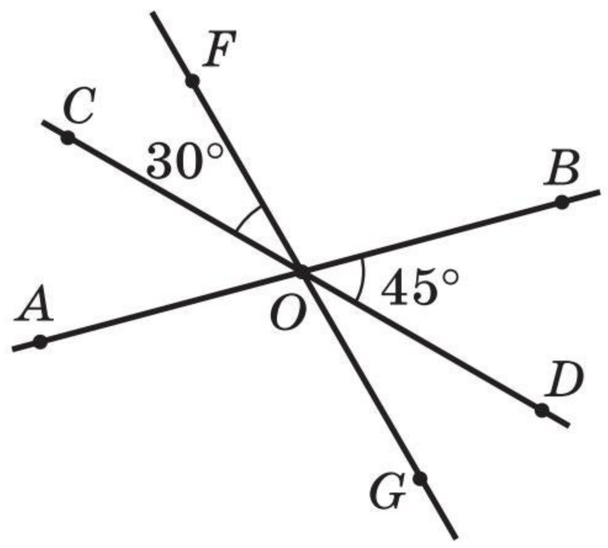


Рис. 39

2.66.* Дайте відповідь на запитання Христини.

Ф: Чому дорівнюють кути DOG, COA, AOF, BOG на рис. 39?

2.67.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Які кути на рис. 39 суміжні?

2.68.* Дайте відповідь на запитання Катерини. Назвіть усі пари суміжних кутів.

2.69.* Які ще кути можна знайти на рисунку 39? Запишіть, чому дорівнюють ці кути.

У: Яку інформацію можна отримати з рис. 40?



Рис. 40

К: На рис. 40 є рівні відрізки.

2.70.* Які рівні відрізки є на рис. 40?

Ф: На рис. 40 позначено точки, що є серединами деяких відрізків.

2.71.* Які позначені точки є серединами відрізків, зображених на рис. 40? Запишіть позначення точок і відповідних відрізків.

К: Можна записати співвідношення між довжинами відрізків, зображених на рис. 40.

2.72.** Запишіть якомога більше співвідношень між довжинами відрізків, зображених на рис. 40.

У: Які запитання можна поставити за рис. 41?

К: Чому дорівнює кут COD на рис. 41?

2.73.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Які промені є бісектрисами позначених кутів на рис. 41?

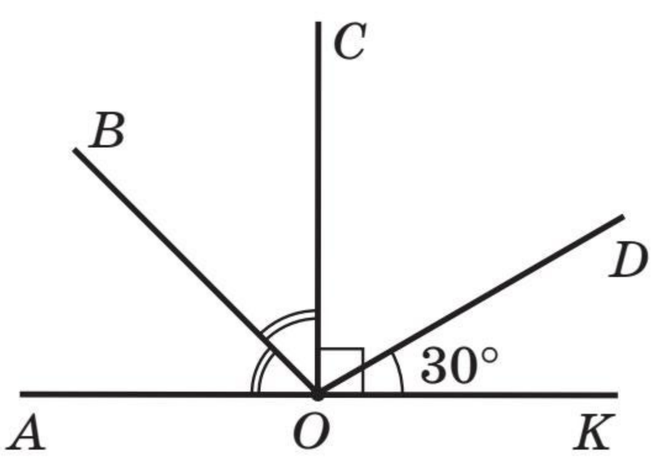


Рис. 41

2.74.* Дайте відповідь на Федорове запитання.

2.66. Зверніть увагу, наприклад, на те, що кути AOF і BOG є вертикальними.

2.72. Зауважте, наприклад, що $AB + CD = BC + DK$.

2.73. Скористайтеся тим, що на рис. позначено прямий кут COK.

К: Чому дорівнюють кути AOB і BOC на рис. 41?

2.75.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнюють кути AOD, BOD і BOK на рис. 41?

2.76.* Дайте відповідь на Федорове запитання.

Подібні завдання (2.77–2.78)

2.77.* На рис. 42 $\angle AKB = 20°$, $\angle EKD = 15°$, $\angle AKF = 100°$. Які запитання можна поставити? Дайте на них відповіді.

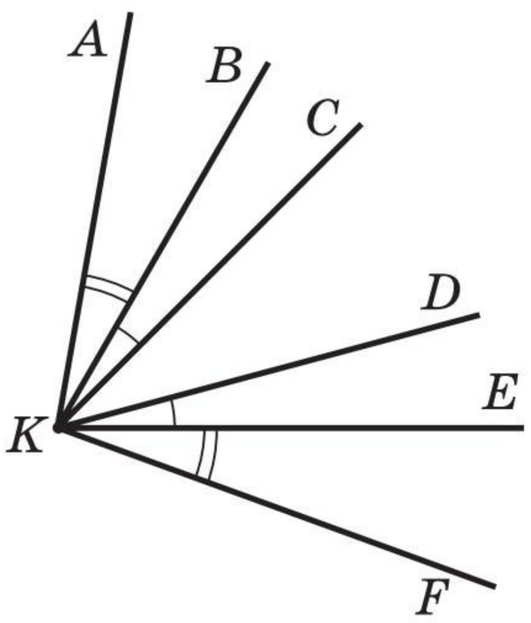


Рис. 42

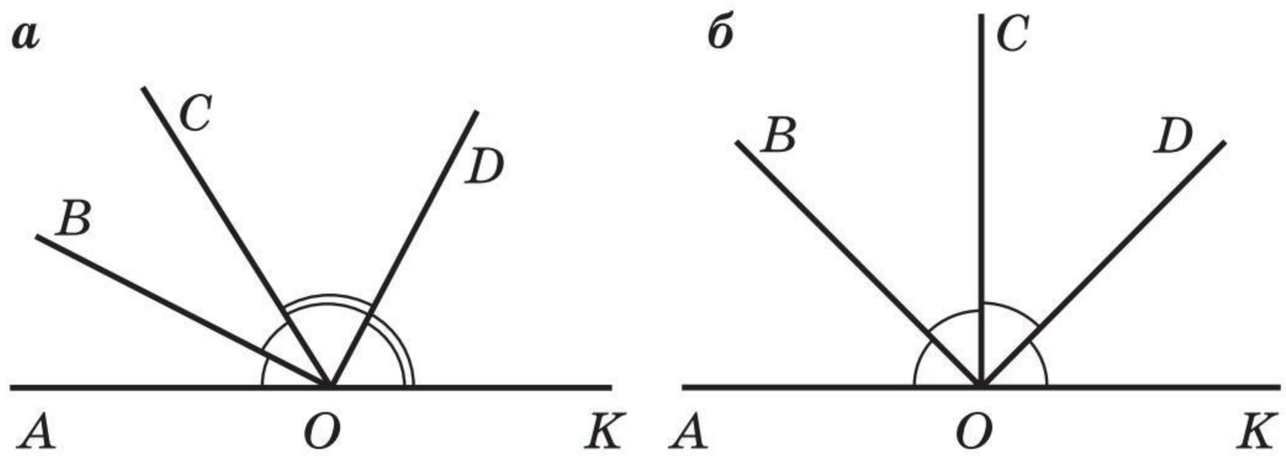


Рис. 43

2.78.* Які запитання можна поставити за кожним з рисунків 43 *а*, 43 *б*? Дайте відповіді на свої запитання.

2.79.* Три прямі перетинаються в одній точці. При цьому найменші з утворених кутів дорівнюють 20° і 70°. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

Подібне завдання

2.80.* Прямі a, b, c, d перетинаються в одній точці. При цьому $a \perp b$, $c \perp d$, кут між прямими a і c дорівнює 30°. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

2.81.** Промінь BC ділить кут ABD, що дорівнює 88°, на два кути так, що кут ABC втричі більший від кута CBD. BK — бісектриса кута CBD, BF — промінь, доповняльний до променя BK. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

1.75. Скористайтеся тим, що на рисунку позначені прямий і рівні кути.

Подібне завдання

2.82.** Суміжні кути ABC і ABD відносяться як 5 : 7. Промені BK і BM — бісектриси цих кутів. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на ці запитання.

2.83.* Які запитання можна поставити за рис. 44? Дайте відповіді на свої запитання.



Рис. 44

Подібні завдання (2.84–2.87)

2.84.* Відрізки $AB = 15$ см, $AD = 12$ см, $CB = 6$ см, до того ж точка C розташована між точками A і D, а точка D — між точками C і B. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

2.85.* Точки P і K лежать на відрізку MN, до того ж $MN = 16$ см, $MP = 4$ см, K — середина відрізка MN. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на них.

2.86.** Точка B розташована на відрізку AC. Відстань між серединами відрізків AB і BC дорівнює 6 см, а відстань між серединами відрізків AB і AC — 2 см. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

2.87.*** Відрізок завдовжки 12 см розділили на три відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 9 см, найменший із трьох відрізків утричі менший від найбільшого. Виконайте рисунок. Які запитання можна поставити? Дайте відповіді на свої запитання.

ТРИРІВНЕВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНІХ ТА САМОСТІЙНИХ РОБІТ

(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C. Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

Промені й кути

2.88.* Позначте на рисунку зображені точки.



а) Використовуючи позначені точки, запишіть позначення двох променів на рисунку і вкажіть, напрямлені ці промені однаково чи протилежно.

б) Зобразіть на рисунку і позначте будь-яку точку, що належить деяким двом променям.

2.89.** Позначте на рисунку зображені точки. Використовуючи позначені точки, запишіть:

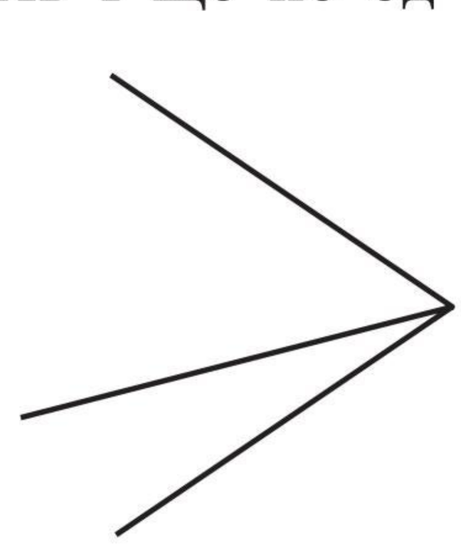


а) позначення будь-яких двох променів, напрямлених однаково;
б) позначення будь-яких двох променів, напрямлених протилежно;
в) позначення двох променів, що мають лише одну спільну точку;
г) позначення будь-яких двох променів, що мають безліч спільних точок;
д) позначення двох променів, не що мають спільних точок;
е) різні позначення променів, які можна позначити трьома способами за допомогою позначених точок.

2.90.* Зобразіть на прямій 3 точки і позначте їх. Запишіть за допомогою цих точок позначення двох променів, що мають лише одну спільну точку.

2.91.* Зобразіть на прямій 3 точки і позначте їх. Запишіть за допомогою цих точок позначення двох променів, що мають безліч спільних точок.

2.92.* Позначте на рисунку спільну вершину кутів і ще по одній точці на кожному промені.



а) Запишіть позначення всіх зображених променів.
б) Запишіть позначення всіх кутів на рисунку, які менші від розгорнутого.
в) Запишіть всі співвідношення (рівності й нерівності) для кутів на рисунку.

2.93.* Накресліть кут і промінь, який ділить його на два кути. Позначте вершину кута і ще по одній точці на кожному промені.
а) Запишіть позначення всіх зображених променів.
б) Запишіть позначення всіх кутів на рисунку, які менші від розгорнутого.
в) Запишіть всі співвідношення (рівності й нерівності) для кутів на рисунку.

2.94.** Накресліть два нерівні кути, що мають спільну сторону і розташовані по різні боки від неї.
а) Виміряйте градусні міри цих двох кутів і запишіть їх.
б) Проведіть бісектриси цих двох кутів.

в) Знайдіть і запишіть на рисунку градусну міру кута між бісектрисами.

2.95.*** Кут між бісектрисами гострого і тупого кутів, що мають спільну сторону, дорівнює 70°.

а) Зобразіть можливі розташування цих кутів відносно їх спільної сторони.

б) Наведіть 4 приклади можливих значень кутів.

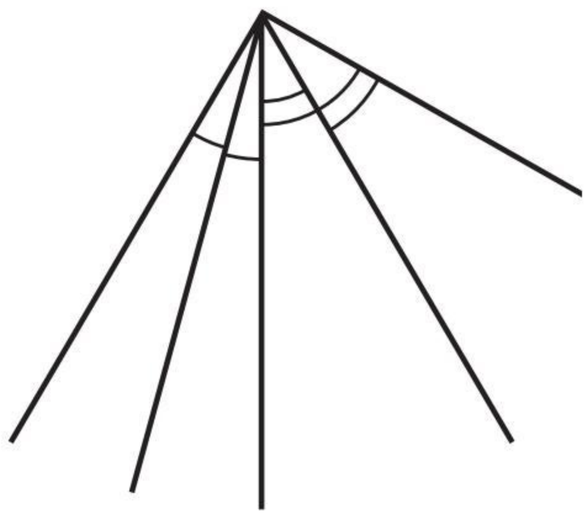
2.96.** Середнє арифметичне градусних мір двох кутів дорівнює 110°.

а) Чи можуть ці обидва кути бути гострими?

б) Чи можуть ці обидва кути бути тупими?

в) Чому можуть дорівнювати ці кути? Наведіть 3 приклади.

2.97.** Позначте на рисунку спільну вершину всіх кутів і ще по одній точці на кожному промені.

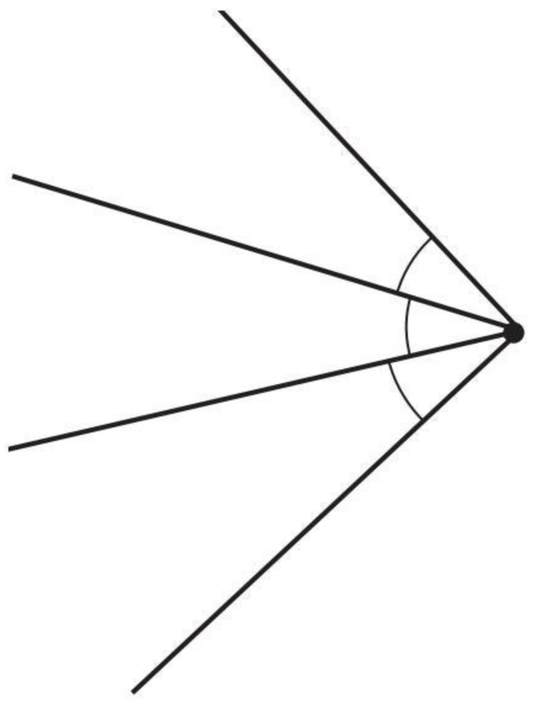


а) Знайдіть промені, які є бісектрисами кутів на рисунку. Запишіть позначення цих кутів і їх бісектрис.

б) Задайте самі градусну міру кута між знайденими бісектрисами, запишіть її на рисунку.

в) Знайдіть і запишіть градусну міру найбільшого кута.

2.98.** Позначте спільну вершину всіх кутів і ще по одній точці на кожному промені. Найменший кут на рисунку дорівнює 30°.

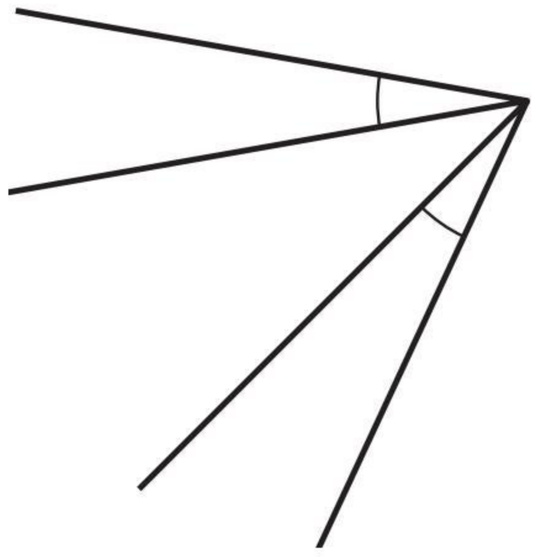


а) Знайдіть промені, які є бісектрисами зображених на рисунку кутів. Запишіть позначення цих кутів і їх бісектрис.

б) Позначте на рисунку прямий кут і запишіть його позначення.

в) Запишіть позначення всіх кутів, що дорівнюють 60°.

2.99.** Позначте на рисунку вершину кута і ще по одній точці на кожному промені.



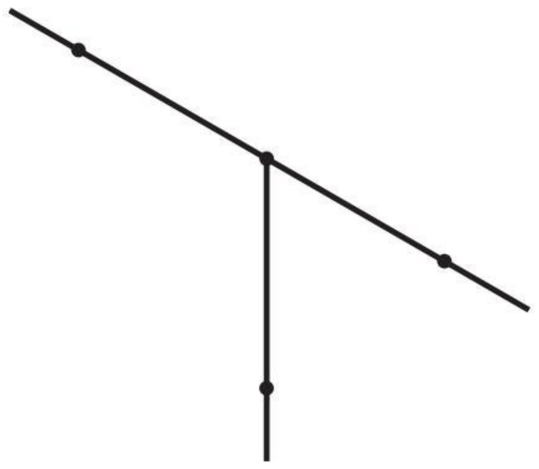
а) Запишіть позначення всіх пар рівних кутів.

б) Запишіть всі співвідношення (рівності й нерівності) для кутів на рисунку.

в) Виміряйте і запишіть на рисунку градусні міри двох кутів, знаючи які, можна знайти решту кутів. Знайдіть і запишіть градусні міри цих кутів.

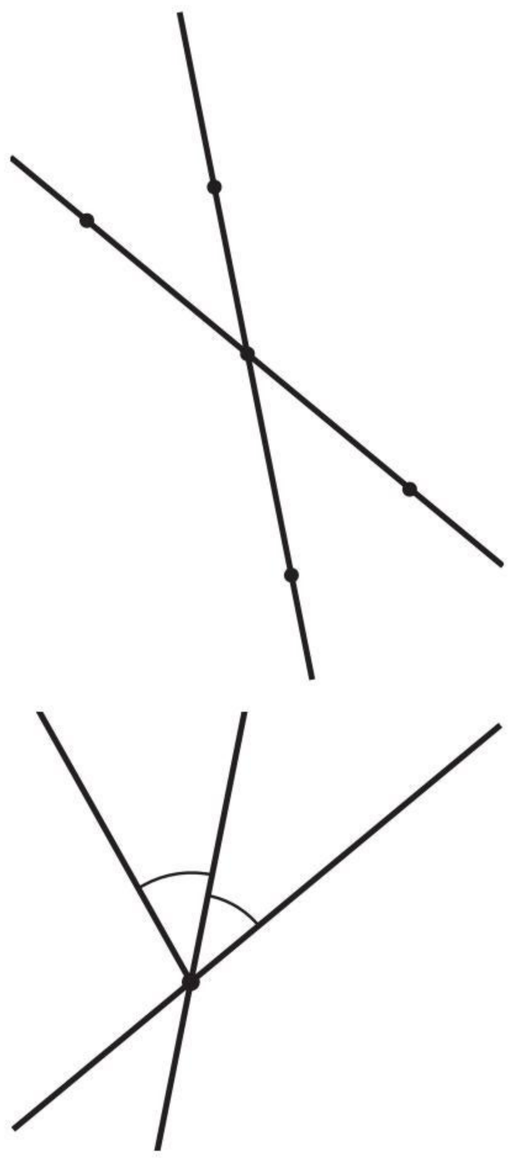
Суміжні й вертикальні кути

2.100.* Позначте на рисунку зображені точки.
а) Запишіть усі співвідношення (рівності й нерівності) для кутів на рисунку.
б) Виміряйте самостійно градусну міру одного кута на рисунку і запишіть її. Знайдіть і запишіть градусну міру другого кута.



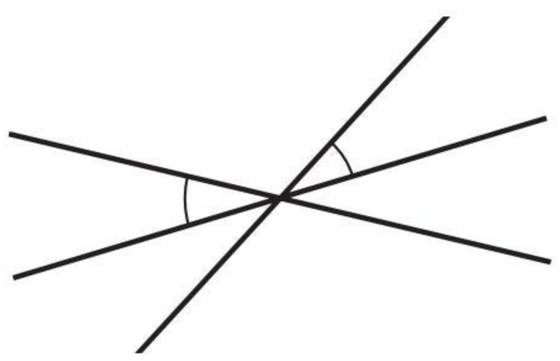
2.101.* Накресліть суміжні кути. Виміряйте самостійно градусну міру одного із цих кутів і запишіть на рисунку. Знайдіть і запишіть градусну міру другого кута.

2.102.* Позначте зображені на рисунку точки.
а) Запишіть співвідношення для всіх пар суміжних кутів.
б) Запишіть співвідношення для всіх пар вертикальних кутів.
в) Виміряйте самостійно градусну міру одного кута на рисунку і запишіть її.
г) Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.



2.103.** Задайте самостійно градусну міру одного із позначених рівних кутів і запишіть її на рисунку. Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.

2.104.* Перемістіть рисунок до зошита та задайте самостійно градусну міру одного із позначених рівних кутів і запишіть її на рисунку. Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.



2.105.* Градусна міра одного із суміжних кутів кратна 7. Запишіть можливі значення градусних мір цих суміжних кутів. Наведіть 3 приклади.

2.106.* Градусна міра одного із суміжних кутів кратна 9. Запишіть можливі значення градусних мір цих суміжних кутів. Наведіть 3 приклади.

2.107.** Один із суміжних кутів на b градусів більший від іншого.
а) Виразіть градусні міри цих кутів через $b°$.
б) Задайте самостійно значення b і запишіть його. Знайдіть градусні міри обох кутів.

2.108.* Накресліть дві прямі, що перетинаються. Виміряйте самостійно градусну міру одного з утворених кутів і запишіть її на рисунку. Знайдіть решту кутів.

2.109.** Запишіть довільне натуральне число b. Прийміть, що один із кутів, утворених при перетині двох прямих, в b разів більший від другого. Знайдіть усі кути.

2.110.** Запишіть довільне натуральне число $b \leqslant 170$. Прийміть, що сума двох із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює b градусів. Знайдіть усі кути.

2.111.* Запишіть довільне натуральне число b, яке більше від 100, але менше від 170. Нехай один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює b градусів. Знайдіть, чому дорівнює кут між прямими.

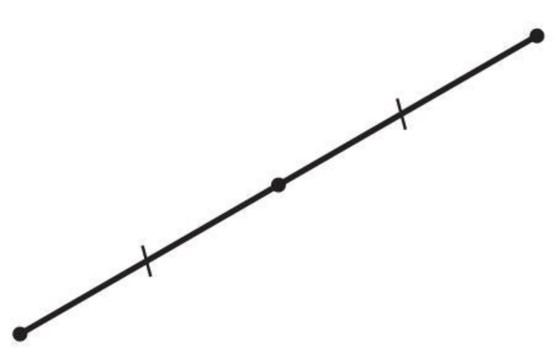
2.112.** Запишіть два довільні натуральні числа a і b, кожне з яких не більше від 39. Нехай одна із трьох прямих, що перетинаються в одній точці, утворює з двома іншими кути, що дорівнюють відповідно a і b градусів. Знайдіть усі кути.

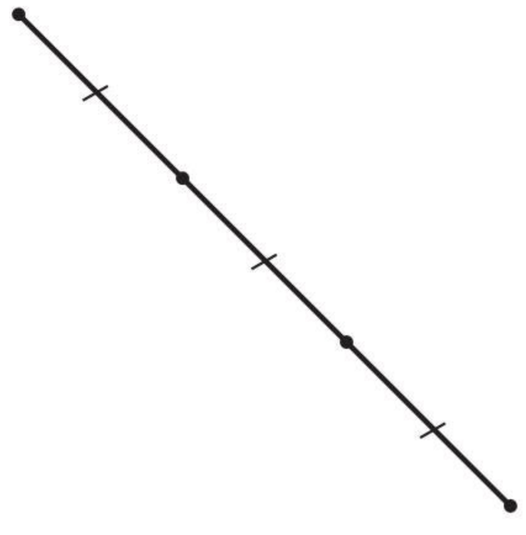
Відрізки

2.113.* Позначте зображені точки.
а) Запишіть позначення всіх відрізків на рисунку.
б) Запишіть позначення: найменшого відрізка; найбільшого відрізка.
в) Запишіть нерівності для довжин усіх відрізків.
г) Запишіть рівність для довжин відрізків.



2.114.* Позначте зображені на рисунку точки.
а) Запишіть позначення всіх відрізків на рисунку.
б) Запишіть рівності для довжин відрізків.
в) Яка точка є серединою відрізка? Запишіть позначення цього відрізка і його середини.





2.115.* Позначте зображені на рисунку точки.
а) Запишіть позначення всіх відрізків на рисунку.
б) Знайдіть рівні відрізки. Запишіть рівності для довжин відрізків.
в) Які точки є серединами відрізків? Запишіть позначення цих відрізків і їхніх середин.

2.116.** Запишіть довільне натуральне число a. Нехай відрізок завдовжки a см розділили на два відрізки, один з яких удвічі більший від другого. Знайдіть довжини цих відрізків.

2.117.** Запишіть довільне натуральне число a. Нехай відрізок завдовжки a см розділили на два відрізки, один з яких на 2 см більший від другого. Знайдіть довжини цих відрізків.

2.118.** Запишіть довільні натуральні числа a і n. Нехай відрізок завдовжки a см розділили на два відрізки, один із яких в n разів більший від другого. Знайдіть довжини цих відрізків.

2.119.** Запишіть довільні натуральні числа m і n ($m > n$). Нехай відрізок завдовжки m см розділили на два відрізки, один з яких на n см більший від другого. Знайдіть довжини цих відрізків.

2.120.** Позначте 4 точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Позначте ці точки. З'єднайте всі позначені точки відрізками. Якщо якісь відрізки перетинаються, позначте точки їх перетину.
а) Запишіть позначення всіх відрізків на рисунку.
б) Вкажіть відрізки, які перетинаються.

2.121.* Накресліть відрізок. Позначте його кінці й середину.
а) Позначте середину одного з утворених відрізків.
б) Запишіть усі співвідношення для довжин відрізків.

2.122.** Запишіть довільне додатне число b. Нехай точка ділить деякий відрізок на два відрізки, відстань між серединами яких дорівнює b см. Знайдіть довжину цього відрізка.

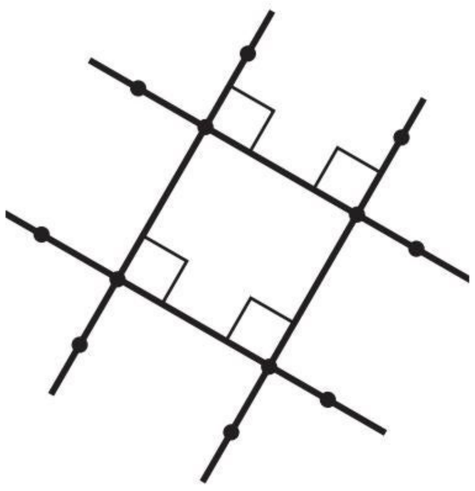
2.123.** Точка ділить деякий відрізок на два відрізки, відстань між серединами яких дорівнює 7 см. Якими можуть бути довжини всіх трьох відрізків? Наведіть 3 приклади.

2.124.*** Відрізок завдовжки 10 см розділили на 3 відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 8 см. Якими можуть бути довжини всіх трьох відрізків? Наведіть 3 приклади.

2.125.* Позначте зображені на рисунку точки.

а) Позначте на рисунку всі прямі кути.

б) Запишіть чотири пари суміжних кутів.



2.126.** Накресліть 4 відрізки так, щоб серед них було дві пари паралельних відрізків, 4 пари перпендикулярних відрізків і 4 точки перетину відрізків. Позначте кінці всіх відрізків і точки їх перетину.

а) Позначте на рисунку всі прямі кути.

б) Запишіть позначення всіх пар суміжних кутів.

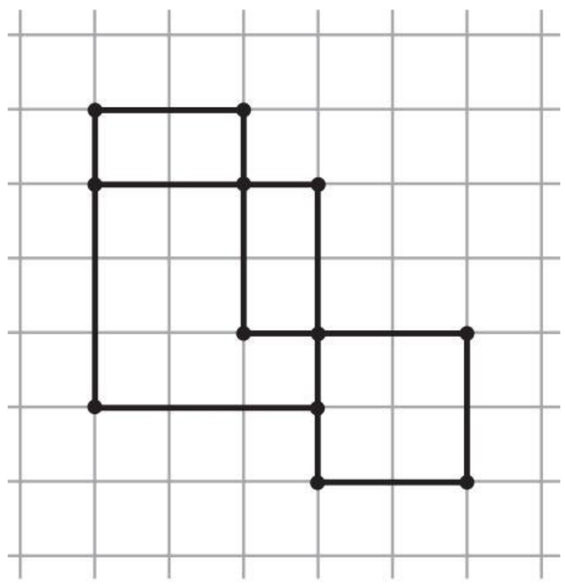
2.127.** Накресліть відрізок і розділіть його на 4 рівних відрізки. Позначте кінці відрізка і позначені на ньому точки. Запишіть всі співвідношення між відрізками на рисунку.

2.128.* Позначте всі зображені на рисунку точки.

а) Запишіть 8 пар рівних відрізків.

б) Запишіть 8 пар перпендикулярних відрізків.

в) Запишіть 8 пар паралельних відрізків.



2.129.** З точки на прямій провели два промені, які не лежать на цій прямій і розташовані в одній півплощині відносно неї. Один з утворених кутів дорівнює 27°. Якими можуть бути решта кутів? Наведіть 3 приклади.

2.130.** Три прямі перетинаються в одній точці. При цьому один з утворених кутів дорівнює 45°. Якими можуть бути решта кутів? Нарисуйте 3 приклади.



МИХАЙЛО ПИЛИПОВИЧ КРАВЧУК

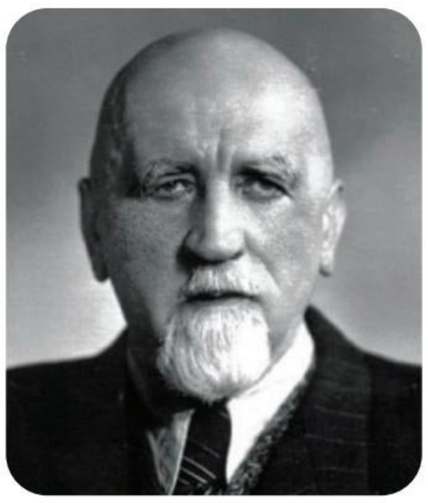
(1892–1942)

Корифей української математики.

Народився М. Кравчук на Волині. Закінчив Луцьку гімназію із золотою медаллю і вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету.

Михайло Пилипович викладав різні математичні курси в багатьох вищих і середніх навчальних закладах м. Києва. Вільно володіючи кількома мовами, він підтримував наукові й особисті дружні стосунки з відомими математиками світу — Жаком Адамаром, Давидом Гільбертом, Ріхардом Курантом та ін. Академік М. П. Кравчук брав найактивнішу участь у створенні української наукової термінології та запровадженні наукової мови в математичну галузь.

«Моя любов — Україна і математика», — ці слова викарбувано на гранітному постаменті пам'ятника Михайлові Пилиповичу, встановленого біля Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут».



МИРОН ОНУФРІЙОВИЧ ЗАРИЦЬКИЙ

(1889–1961)

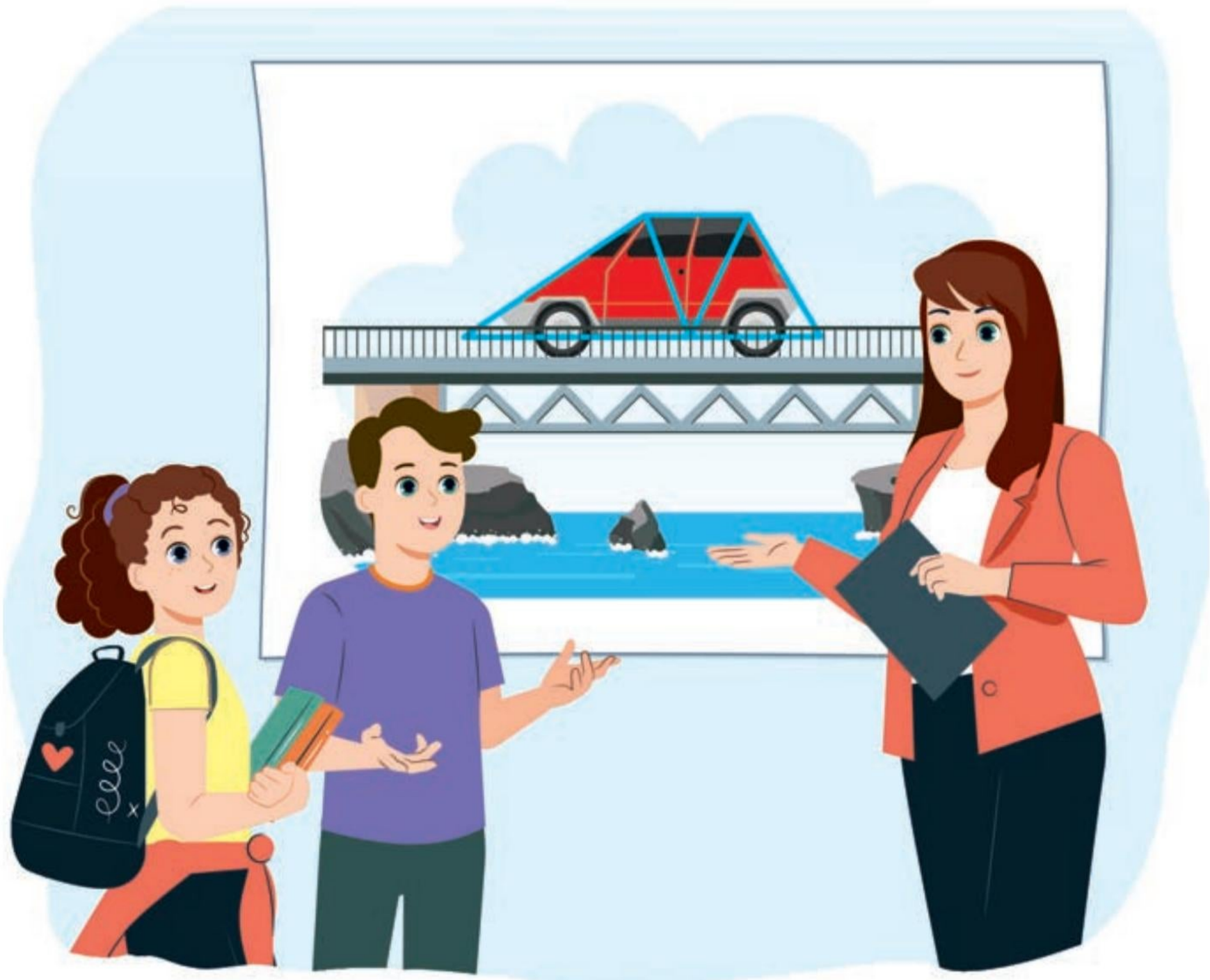
Фундатор української математичної культури.

Народився Мирон Зарицький на Тернопільщині. Закінчивши гімназію, вступив до Віденського університету, а через рік перейшов до Львівського. Тут він освоював математичні та фізичні дисципліни, а також самотужки вивчав французьку мову.

Після закінчення університету Мирон Зарицький став дійсним членом Наукового Товариства ім. Т. Шевченка, де працювали відомі на той час українські математики: В. Й. Левицький та М. А. Чайковський. Їхні наукові розробки відповідали рівню світової математичної тогочасної науки.

Мирон Онуфрійович був великим знавцем історії математики, особливо античної, читав курси лекцій з історії математики у Львівському університеті. Також він був непереверше-ним педагогом: студенти називали професора М. О. Зарицького «поетом формул».

ГЛАВА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТРИКУТНИКА. РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



1. ТРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

У: Особливо важлива фігура в геометрії — *трикутник*.

Ф: З трикутниками ми вже знайомі: з'єднаємо будь-які три точки відрізками — і утвориться трикутник (рис. 1). Точки називають *вершинами* трикутника, а відрізки — його *сторонами*.

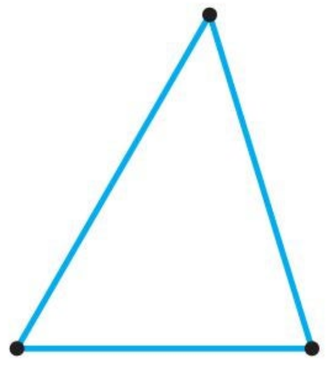


Рис. 1

У: Ви вважаєте, що *будь-які* точки можуть бути вершинами трикутника? Чи можна, наприклад, взяти точки, зображені на рис. 2?

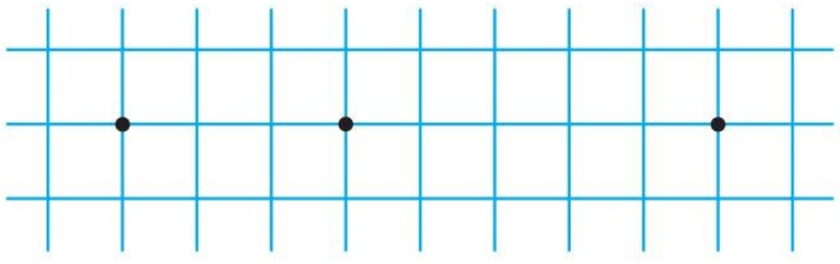


Рис. 2

К: Не можна, оскільки всі вершини трикутника не лежать на одній прямій.

У: Правильно.

Трикутник складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що з'єднують ці точки.

Часто вважають, що трикутник містить також частину площини, обмежену його сторонами. Точки, що лежать у цій частині площини, ми називатимемо точками, що лежать *усередині* трикутника.

Трикутник в запису позначають спеціальним значком з позначенням трьох його вершин: наприклад, ΔABC (рис. 3). На рисунках точки у вершинах трикутника зазвичай не ставлять.

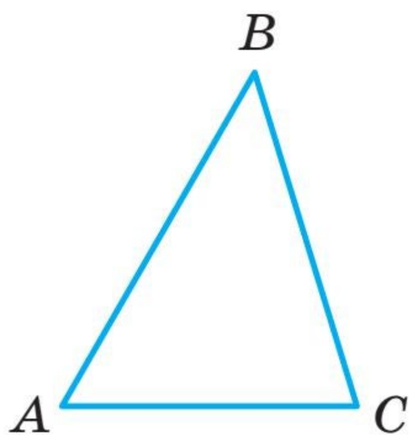


Рис. 3

Кути трикутника — це кути, утворені променями, на яких лежать його сторони. Наприклад, один з кутів трикутника на рисунку 3 можна позначити як $\angle A$ або $\angle CAB$.

3.1.* Запишіть позначення всіх сторін і всіх кутів трикутника, зображеного на рисунку 3.

Ф: А чи можна зображений на рисунку 3 трикутник позначити як ΔBAC чи ΔCAB?

У: Поки йдеться про *один* трикутник, порядок букв в його позначенні не має значення.

К: А якщо не про один, то має?

У: Хай це поки залишиться загадкою. Невдовзі ми її розгадаємо. А поки навчимося знаходити всі трикутники на рисунку.

3.2.* Накресліть трикутник ABC і з'єднайте відрізками вершину B з точками K і M на стороні AC. Скільки трикутників одержали на рисунку? Запишіть позначення всіх трикутників.

Подібні завдання (3.3–3.10)

3.3.* Накресліть трикутник і позначте його вершини. Проведіть в ньому три відрізки так, щоб утворилося якомога більше трикутників. Позначте кінці відрізків і запишіть позначення всіх утворених трикутників.

3.4.* Запишіть позначення всіх трикутників на рис. 4.

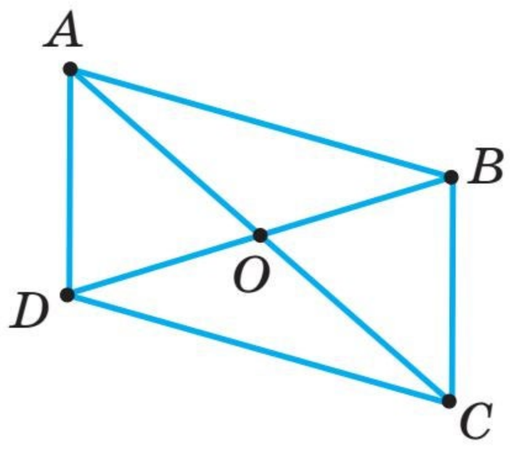


Рис. 4

3.5.* Позначте 4 точки так, щоб жодні 3 з них не лежали на одній прямій. З'єднайте кожну пару точок відрізками. Якщо ці відрізки перетинаються, позначте точку їх перетину. Позначте всі точки і запишіть позначення всіх трикутників на рисунку. Чи залежить кількість утворених трикутників від розташування початкових точок?

3.6.* Накресліть пряму m і позначте на ній три точки A, B, C. Позначте точки K і N, які не лежать на прямій m. З'єднайте кожну пару точок відрізками. Скільки утворилося трикутників з вершинами в позначених точках? Запишіть позначення всіх трикутників.

У: Протилежною до вершини трикутника називають сторону, якій ця вершина не належить. Наприклад, стороною, протилежною до вершини A в трикутнику ABC, є BC.

3.7.* Яка сторона трикутника ABC протилежна до:
а) вершини B; б) вершини C?

К: А вершиною, протилежною стороні трикутника, називають вершину, що не належить цій стороні?

У: Правильно.

3.8.* Яка вершина трикутника ABC протилежна до:
а) сторони AB; б) сторони BC; в) сторони AC?

3.9.** Нарисуйте трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні (зробіть схематичний рисунок від руки).
а) Скільки всього трикутників утворилося на рисунку?
б) Позначте точки так, щоб за їх допомогою можна було записати позначення всіх трикутників на рисунку. Запишіть ці позначення.

3.10.** Нарисуйте трикутник ABC і проведіть пряму, що паралельна стороні BC і не має жодної спільної точки з даним трикутником (виконайте рисунок від руки). Чи може ця пря-

3.6. Можна знайти спочатку, у скількох трикутників дві вершини лежать на прямій m. Потім — у скількох трикутників тільки одна вершина лежить на прямій m. Зауважте, що прямій MN може належати одна з точок A, B чи C.

3.10. Скористайтеся аксіомою паралельних прямих.

ма бути паралельною стороні AB чи стороні AC? Обґрунтуйте свою відповідь.

Елементи трикутника

У: Шість *основних елементів* трикутника — три сторони і три кути. Ознайомимося з деякими іншими елементами трикутника.

Медіани

Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

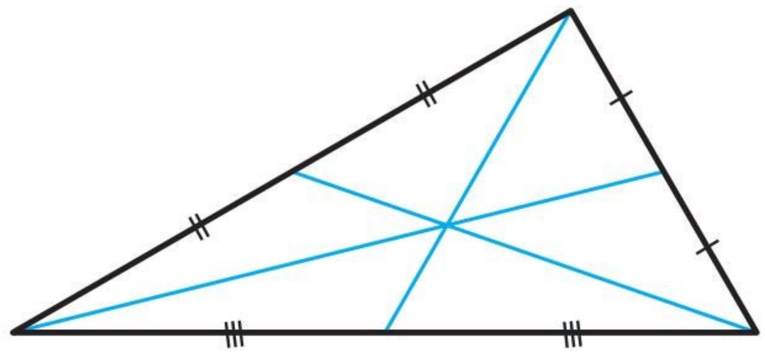


Рис. 5

На рисунку 5 зображені три медіани трикутника. Усі вони лежать усередині трикутника.

Ф: На рисунку 5 усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці. Чи буде так для будь-якого трикутника?

У: Ви дуже спостережливі. Так, це справедливо для будь-якого трикутника. Але доведемо ми це лише в наступному навчальному році.

3.11.* Виріжте з паперу трикутник. Складаючи папір і не використовуючи жодних креслярських інструментів, побудуйте медіани трикутника. Якщо ви виконали завдання правильно, то всі вони перетнуться в одній точці.

3.12.* Накресліть трикутник і, використовуючи лінійку з поділками, побудуйте всі його медіани. Якщо ви виконали завдання правильно, то всі вони перетнуться в одній точці.

Бісектриси

У: *Бісектрисою* трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні.

На рис. 6 зображені три бісектриси трикутника. Усі вони лежать усередині трикутника.

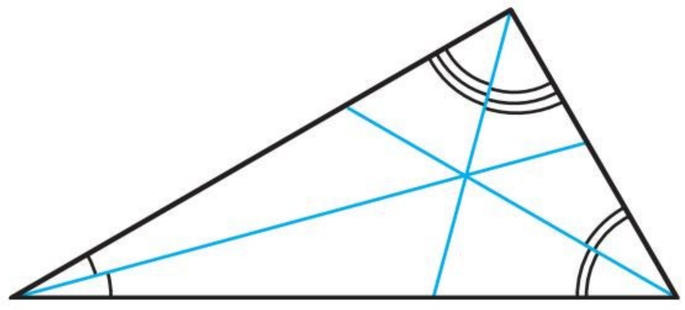


Рис. 6

Ф: І теж перетинаються в одній точці?

У: Так.

Медіана. Походить від латинського слова, що означає «середня».

К: І доводити це ми будемо теж у наступному класі?

У: Ні, це ми доведемо вже цього навчального року — щоправда, ближче до його закінчення.

3.13.* Виріжте з паперу трикутник. Складаючи папір і не використовуючи жодних креслярських інструментів, побудуйте бісектриси трикутника. Якщо ви виконали завдання правильно, то всі вони перетнуться в одній точці.

3.14.* Накресліть трикутник і, використовуючи транспортир, побудуйте бісектриси всіх його кутів. Якщо ви виконали завдання правильно, то всі вони перетнуться в одній точці.

Висоти

У: *Висотою* трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, на якій лежить протилежна сторона трикутника.

На рис. 7, *а–в* зображено три висоти трьох різних трикутників. Як бачите, у деяких трикутників всі висоти («*червоні» відрізки*) лежать усередині трикутника (*рис. 7а*), але є й такі трикутники, у яких дві висоти або збігаються зі сторонами трикутника (*рис. 7б*), або лежать поза трикутником (*рис. 7в*).

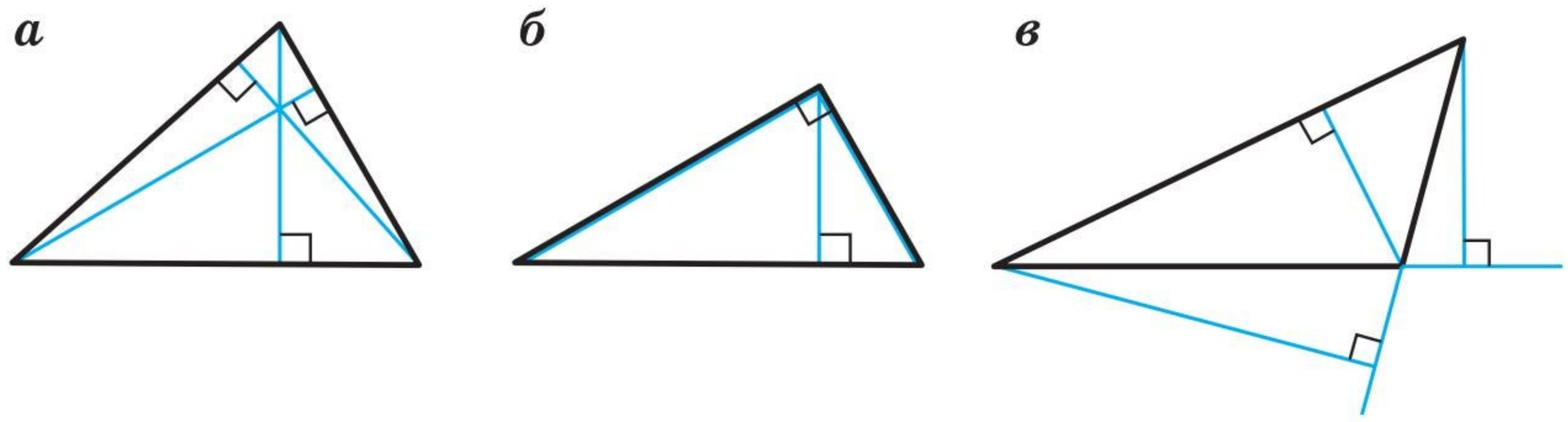


Рис. 7

Ф: Якщо всі три висоти лежать усередині трикутника, то вони завжди перетинаються в одній точці?

У: Так.

К: А якщо дві висоти лежать поза трикутником?

Надалі колір фігур позначатимемо скороченням до першої букви на́зви кольору: *писатимемо* (*ж*) *трикутником*.

У: Тоді *продовження* трьох висот перетинаються в одній (*зеленій — з*) точці (рис. 8).

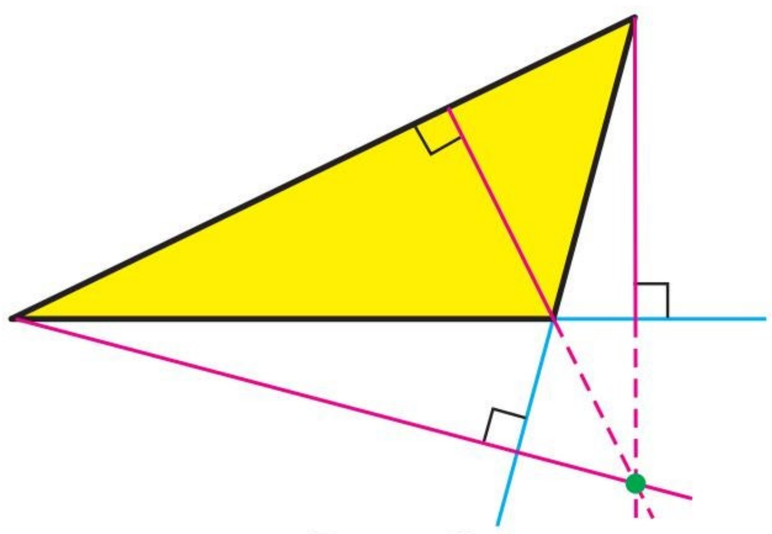


Рис. 8

К: Ну, це вже точно ми будемо доводити в наступному класі!

У: Ні, ми доведемо це раніше.

Ф: Значить, у цьому класі?

К: О, ти вже навчився робити висновки за допомогою міркувань.

3.15.* Накресліть трикутник і, використовуючи косинець, побудуйте всі його висоти. Якщо ви виконали завдання правильно, то всі вони (або їх продовження) перетнуться в одній точці.

Периметр трикутника

У: *Периметром* трикутника називають суму довжин його сторін.

3.16.* Периметр трикутника дорівнює 20 см. Перша сторона цього трикутника удвічі більша від другої і дорівнює третій стороні. Чому дорівнюють сторони трикутника?

Подібні завдання (3.17–3.19)

3.17.** Периметр трикутника дорівнює 27 см. Одна зі сторін дорівнює середньому арифметичному двох інших сторін. Чому дорівнює ця сторона?

3.18.** Про трикутник KNM відомо, що відношення сторін $KN : NM : KM = 4 : 8 : 10$, а сума сторін KN і NM більша від сторони KM на 6 см.

а) Чому дорівнюють сторони трикутника?

б) Чому дорівнює периметр трикутника?

3.19.** Про трикутник MNK відомо, що $MN + NK = 15$ см, $MN = 0{,}75MK$, $NK = 0{,}5MK$.

а) Чому дорівнюють сторони трикутника?

б) Чому дорівнює периметр трикутника?

2. РІВНІ ТРИКУТНИКИ

У: Рівні трикутники — як і будь-які рівні фігури — можна сумістити накладанням.

Наприклад, трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC на рисунку 9 рівні.

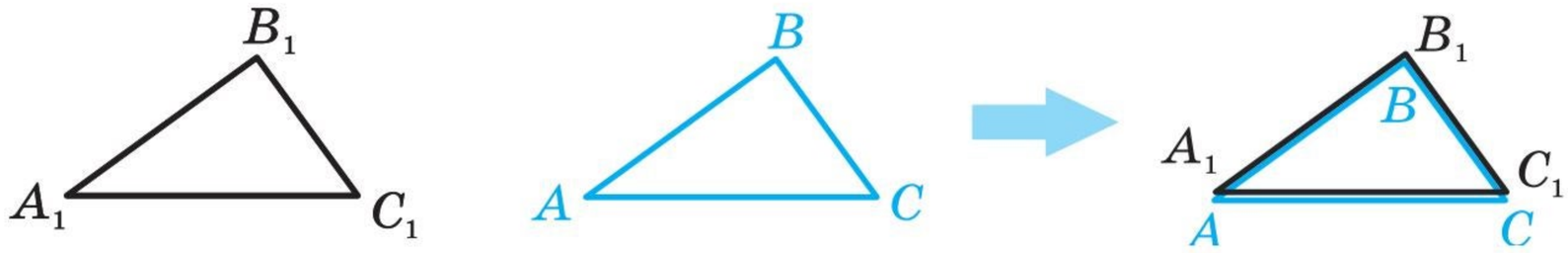


Рис. 9

Зверніть увагу, у запису *рівності* трикутників $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ *порядок букв у позначенні трикутників важливий.*

Наведений запис означає, що при накладанні цих трикутників вершина A_1 суміщається з вершиною A, вершина B_1 — з вершиною B, а вершина C_1 — з вершиною C.

Називатимемо вершини A і A_1, B і B_1, C і C_1 *відповідними*.

Ф: Тоді рівність цих самих трикутників можна записати й так: $\Delta B_1C_1A_1 = \Delta BCA$.

3.20.* Чи згодні ви з Федором?

3.21.** Відомо, що $\Delta ABC = \Delta MNK$, а $\Delta BAC = \Delta PSQ$. Запишіть рівність трикутника з вершинами в точках Q, P, S і другого трикутника з вершинами в точках M, K, N.

Властивості рівних трикутників

У: *Якщо* нам *дано*, що трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC рівні, *то* що звідси випливає?

Ф: Рівними є сторони трикутників, які суміщаються при накладанні:

$$A_1B_1 = AB;\ B_1C_1 = BC;\ A_1C_1 = AC.$$

Я позначив рівні сторони однаковими штрихами (рис. 10).

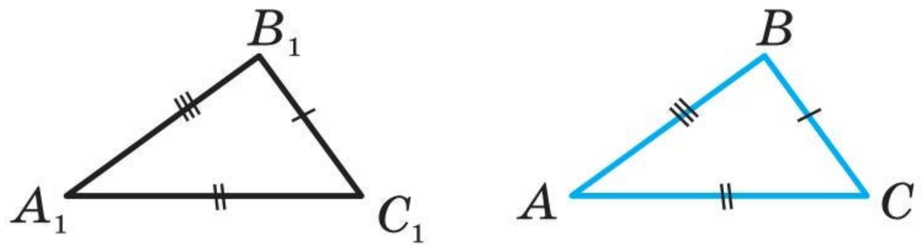


Рис. 10

У: Ці сторони також називають *відповідними*.

К: *Кути* трикутників, які суміщаються при накладанні, також *рівні*:

$$\angle A_1 = \angle A;\ \angle B_1 = \angle B;\ \angle C_1 = \angle C.$$

Я позначила рівні кути однаковими дужками (рис. 11).

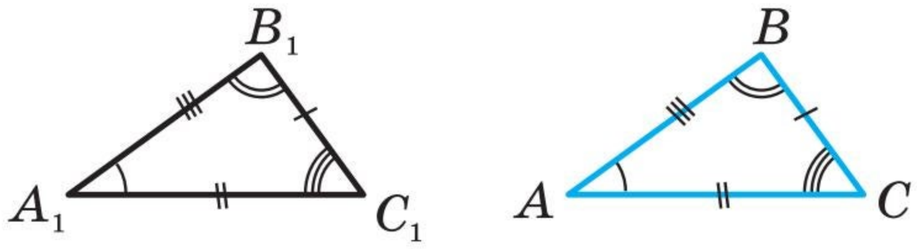


Рис. 11

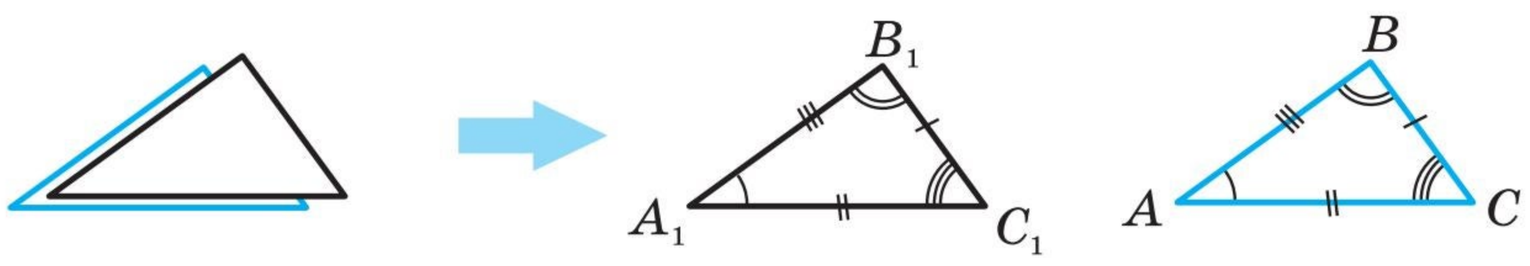
У: Ці кути теж називають *відповідними*.
Отже, *основні властивості* рівних трикутників:

якщо два трикутники рівні, то їх відповідні сторони рівні й відповідні кути рівні.

К: Отже, для рівних трикутників справедливі *шість* рівностей: три для сторін і ще три для кутів.

У: Подамо властивості рівних трикутників у вигляді схеми (рис. 12); стрілка замінює слово «випливає»:

Властивості рівних трикутників



$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

$A_1B_1 = AB,\ B_1C_1 = BC,\ A_1C_1 = AC,$
$\angle A_1 = \angle A,\ \angle B_1 = \angle B,\ \angle C_1 = \angle C$

Рис. 12

3.22.* Відомо, що $\Delta ABD = \Delta MNK$. Запишіть:
а) рівності відповідних кутів цих трикутників.
б) рівності відповідних сторін цих трикутників.

Подібні завдання (3.23–3.24)

3.23.* Трикутник ASP дорівнює трикутнику з вершинами в точках F, K, N. Відомо, що $\angle S = \angle N$, $\angle P = \angle F$. Запишіть рівність трикутників.

3.24.* Трикутник BKL дорівнює трикутнику з вершинами в точках C, D, M. Відомо, що $BK = CM$, $KL = CD$. Запишіть рівність трикутників.

У: При порівнянні фігур за допомогою суміщення їх можна перевертати в просторі. Наприклад, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ на рис. 13 рівні, оскільки після перевертання одного з них у просторі він суміститься з другим при накладанні.

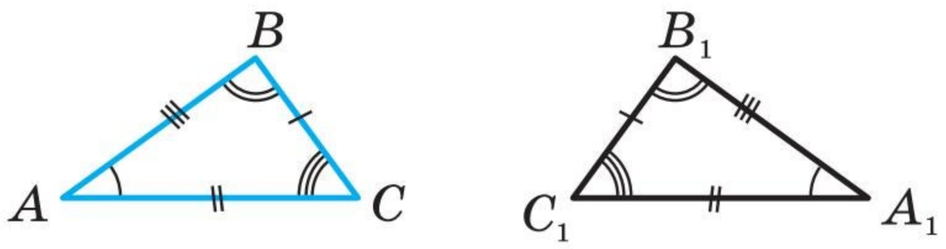


Рис. 13

3. ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У: Моя вам добра порада: під час розв'язання задач з геометрії і дослідження геометричних фігур насамперед *шукайте рівні трикутники*! Вони ваші надійні помічники.

К: А як установити, що два трикутники рівні? Невже тільки накладанням?

Ф: Можна *виміряти* три сторони і три кути цих двох трикутників. Якщо виміряні шість величин відповідно рівні, то трикутники рівні.

У: Гарна ідея! Але, виявляється, рівність двох трикутників можна встановити за рівністю лише *трьох* відповідних елементів. Потрібно лише правильно вибрати ці елементи.
Доведемо, наприклад, що

якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Нехай, наприклад, для трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC (рис. 14) виконуються рівності:
$A_1B_1 = AB$; $A_1C_1 = AC$; $\angle A_1 = \angle A$.

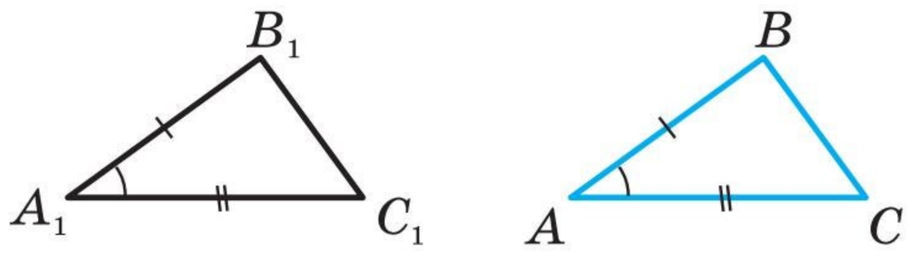


Рис. 14

Спробуйте довести, що ці трикутники рівні, накладаючи *подумки* один трикутник на другий.

Ф: Рівні кути A і A_1 можна сумістити накладанням...

К: Причому накладати ці кути будемо так, щоб сторона A_1B_1 містилась із *рівною* їй стороною AB, а сторона A_1C_1 — з *рівною* їй стороною AC. Тоді точка B_1 суміститься з точкою B, а точка C_1 — з точкою C.

Ф: А тоді й сторона B_1C_1 суміститься зі стороною BC, тобто трикутники сумістяться *повністю* — значить, вони рівні!

У: Ви довели зараз *першу ознаку рівності трикутників*.

К: Подамо її у вигляді схеми (рис. 15):

Перша ознака рівності трикутників

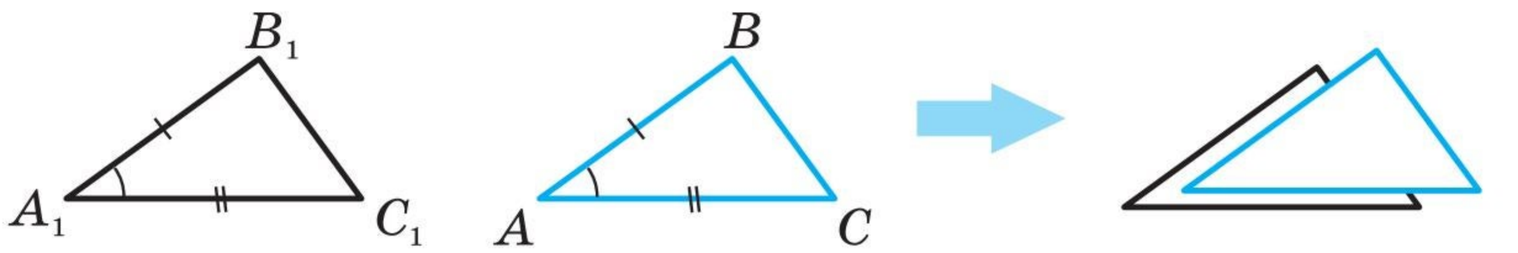


Рис. 15

Ф: Додамо сюди ще *властивості* рівних трикутників і отримаємо (рис. 16):

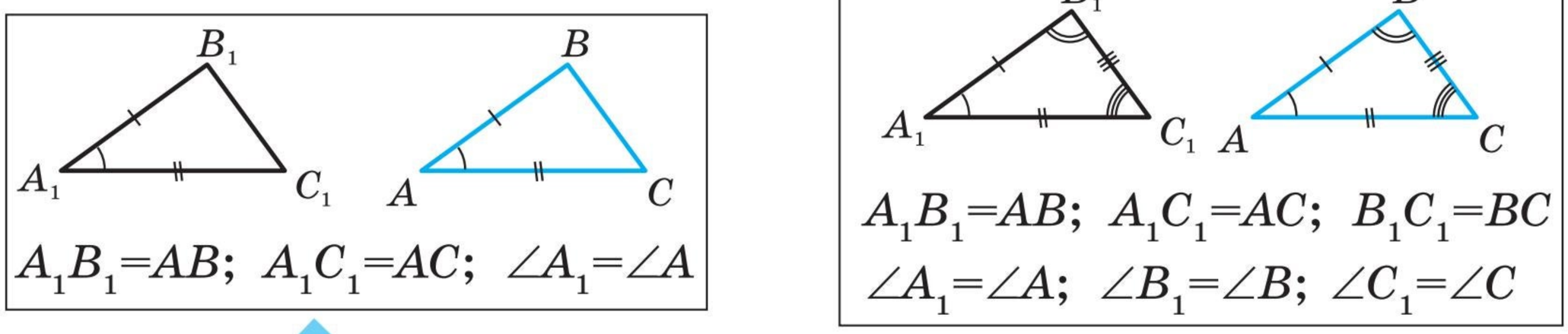


Рис. 16

У: Чудова схема! Вона наочно показує, як з *трьох* рівностей можна отримати *шість*, тобто отримати «приховану» інформацію.

К: Якщо цю ознаку рівності трикутників ви назвали *першою*, значить, є і *друга*?

Ф: Ти вже навчилась отримувати приховану інформацію.

У: Є і друга ознака, і навіть третя. Невдовзі ми до них дійдемо.

3.25.* Про трикутники ABC і KMN відомо: $\angle A = \angle M$; $AB = NM$; $CA = MK$. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників? Обґрунтуйте.

К: Чи можна стверджувати, що два трикутники рівні, якщо в них відповідно рівні дві сторони і кут *не* між ними?

3.26.** Дайте відповідь на запитання Катерини. Виконайте рисунок, що пояснює вашу відповідь.

У: Під час виконання попереднього завдання ви помітили, що для доведення *неправильності* твердження достатньо навести *один* приклад, що суперечить цьому твердженню. Такий приклад називають *контрприкладом*.

3.27.* Про трикутники ABC і KMN відомо: $\angle A = \angle K$; $AB = KM$; $CA = NM$. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників? Обґрунтуйте свою відповідь.

4. ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

К: Ви обіцяли розповісти про інші ознаки рівності трикутників.

У: Виконую обіцянку. Доведемо, що

якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Нехай, наприклад, для двох трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC, які зображені на рисунку 17, виконуються рівності:

$$A_1C_1 = AC;\ \angle A_1 = \angle A;\ \angle C_1 = \angle C.$$

Рівність трикутників можна й у цьому разі довести за допомогою уявного накладання.

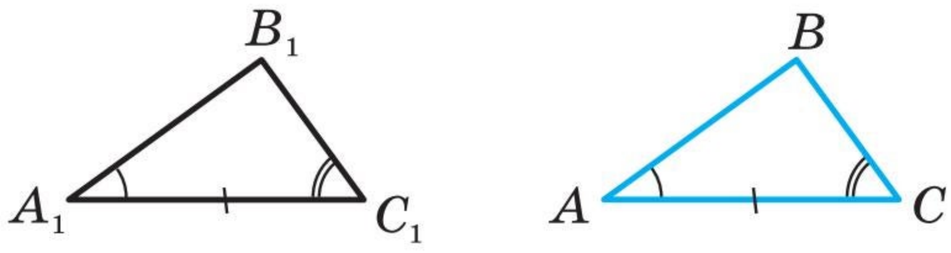


Рис. 17

К: Перше, що спадає на думку, — сумістити в уяві рівні сторони A_1C_1 і AC...

Ф: Причому так, щоб кут A_1 сумістився з рівним йому кутом A, а кут C_1 — з рівним йому кутом C! Тоді вершина B_1 суміститься з вершиною B, оскільки дві прямі можуть перетнутися лише в *одній точці*.

К: При цьому сумістяться *всі три* вершини трикутників ABC і $A_1B_1C_1$...

Ф: Тобто трикутники *сумістяться повністю* — отже, вони *рівні*!

У: Ви довели зараз *другу ознаку рівності трикутників*.

К: Подамо і її у вигляді схеми (рис. 18).

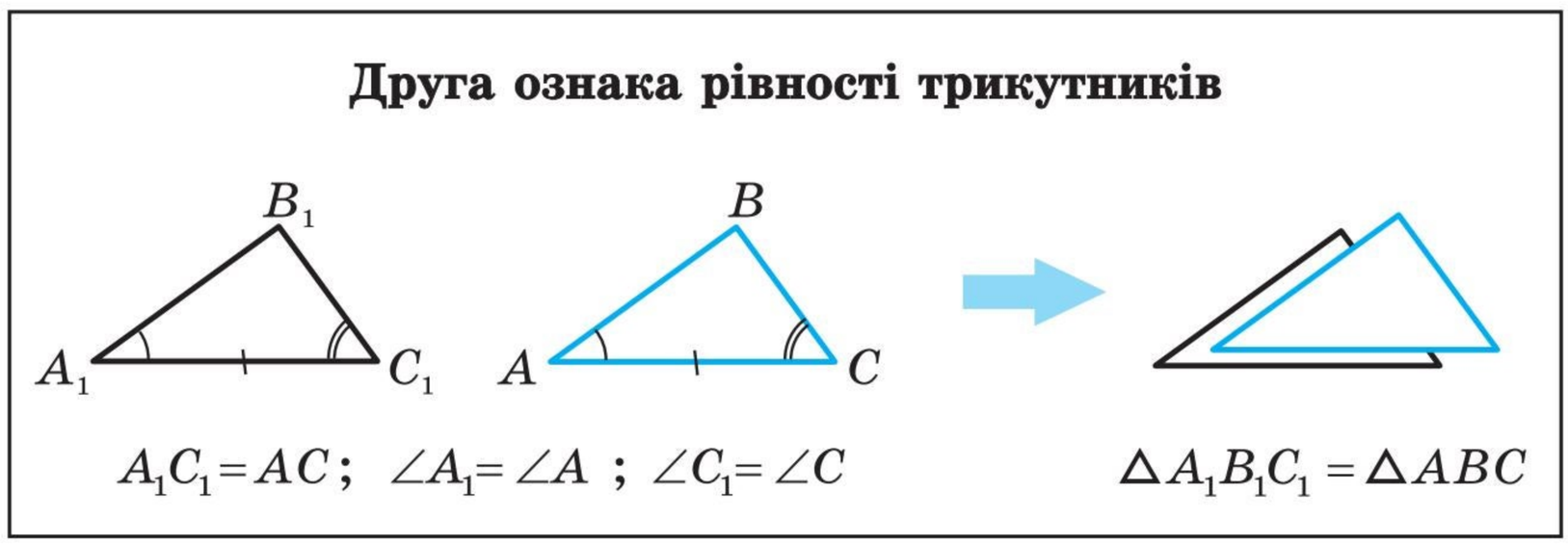


Рис. 18

Ф: Подамо другу ознаку рівності трикутників також із властивостями рівних трикутників (рис. 19).

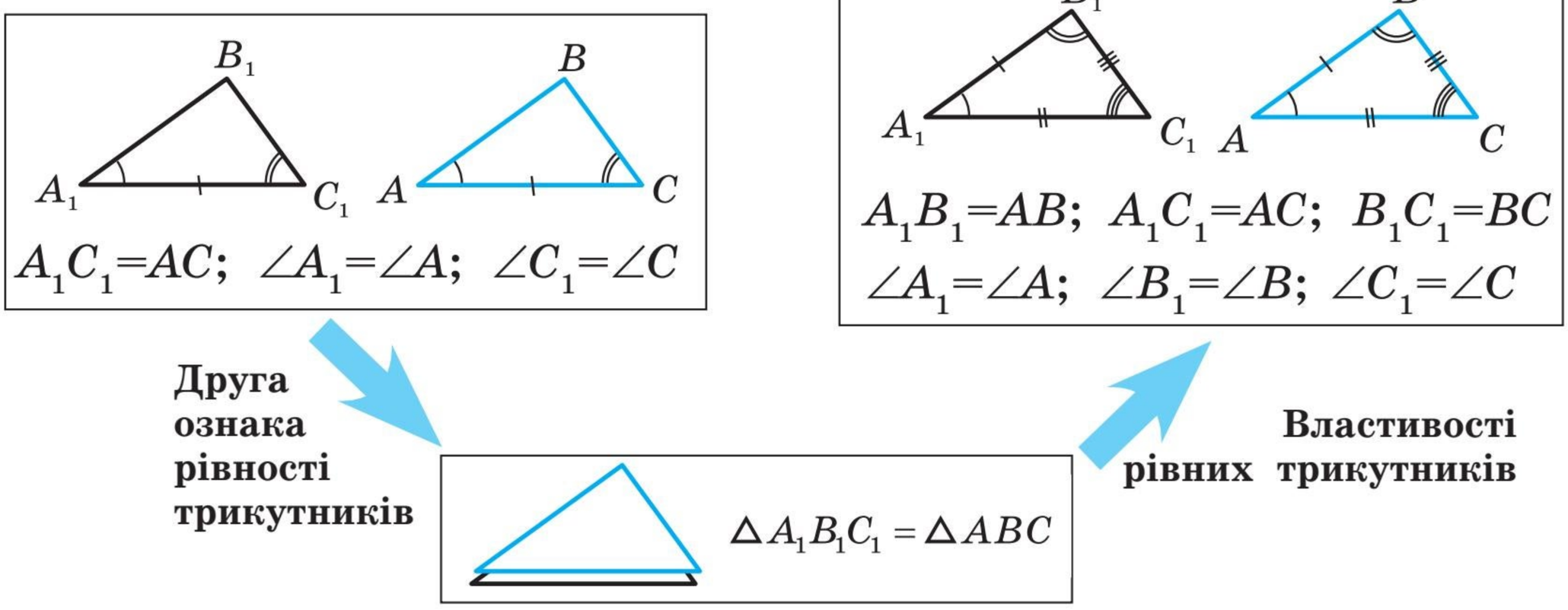


Рис. 19

ОТРИМУЄМО «ПРИХОВАНУ» ІНФОРМАЦІЮ В КІЛЬКА КРОКІВ

У: Під час розв'язування більш-менш важких (і тому цікавих!) задач ми зазвичай *отримуємо нову інформацію із вже отриманої*, тобто ніби «здійснюємо розкопки» у два і навіть три «яруси».

Розгляньмо приклад. Чинитимемо як і раніше: висловлюємо припущення і *доводимо* їх.

3.28.* Рівність яких трикутників на рис. 20 можна довести, використовуючи безпосередню інформацію, що міститься на рисунку?

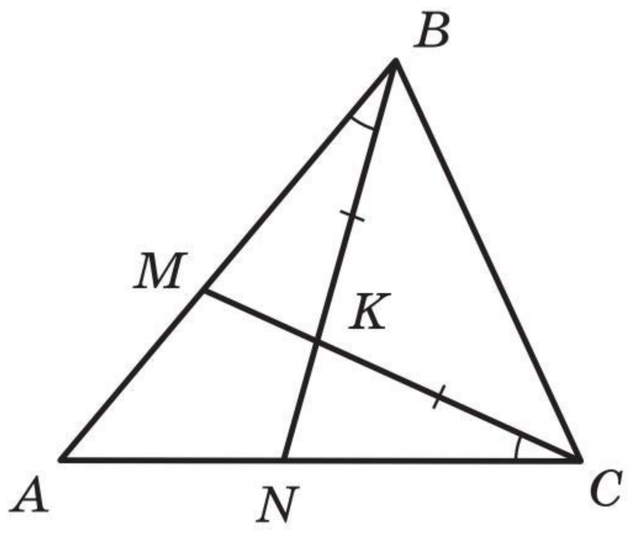


Рис. 20

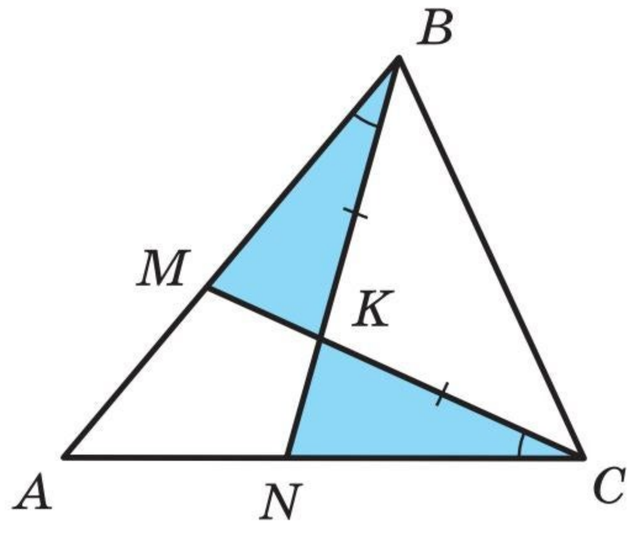


Рис. 21

У: Виділимо тепер на рисунку кольором трикутники, рівність яких ви довели (рис. 21). А тепер скористайтеся властивостями рівних трикутників, щоб позначити рівні відрізки і рівні кути у цих рівних трикутниках. Спробуйте використати ці рівності для отримання нової інформації.

Ф: Можна довести, що $\Delta NBC = \Delta MCB$ на рис. 21 за першою ознакою рівності трикутників.

3.29.* Чи погоджуєтесь ви з Федором? Обґрунтуйте свою відповідь.

К: Можна довести також, що $\Delta ABN = \Delta ACM$ на рис. 21 за другою ознакою рівності трикутників.

3.30.** Чи згодні ви з Катериною? Обґрунтуйте свою відповідь.

Ф: А яка *третя* ознака рівності трикутників?

У: Два трикутники рівні, якщо рівні всі їх відповідні сторони.

К: Це можна довести, накладаючи в уяві відповідно рівні сторони трикутників одна на одну?

У: Ні, не можна. Річ у тім, що цього разу ми не можемо стверджувати, що сторони накладуться одна на одну, оскільки не задано, що дані трикутники мають рівні кути. Тому для доведення третьої ознаки рівності трикутників нам потрібно ще дещо дізнатися.

3.31.** На бісектрисі кута A позначте точку B, а на сторонах цього кута — точки C і D так, що $\angle CBA = \angle DBA$. Проведіть відрізки CB і DB.

а) Позначте на рисунку всю інформацію з умови.

б) Знайдіть на рисунку рівні трикутники і запишіть рівність трикутників зі стислим обґрунтуванням.

3.29. Скористайтеся тим, що $MC = NB$ і $\angle BMC = \angle BNC$.

3.30. Скористайтеся тим, що кути, суміжні з відповідно рівними кутами, також рівні.

Подібне завдання

3.32.** Через точку A, що лежить на бісектрисі кута B, проведіть пряму, що перпендикулярна до бісектриси і перетинає сторони кута в точках C і D (виконайте рисунок від руки).

а) Позначте на рисунку всю інформацію з умови.

б) Знайдіть на рисунку рівні трикутники і запишіть рівність трикутників зі стислим обґрунтуванням.

3.33.** Для трикутників ABC, KMN і SRP відомо: $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = \angle N = \angle S$; $MN = 8$ см, $NK = 4$ см, $\angle M = \angle R$; $SR = 8$ см.

а) Знайдіть трикутники, рівні за I ознакою рівності трикутників. Обґрунтуйте. Запишіть рівність цих трикутників.

б) Знайдіть трикутники, рівні за II ознакою рівності трикутників. Обґрунтуйте. Запишіть рівність цих трикутників.

в) Чи є рівними трикутники ABC і SPR? Обґрунтуйте.

г) Які невідомі сторони трикутників можна знайти, використовуючи властивості рівних трикутників?

Подібні завдання (3.34–3.37)

3.34.** Для трикутників ABC, KMN і SRP відомо: $AB = 6$ см, $\angle A = \angle K = \angle S$, $\angle B = \angle M$; $NK = 10{,}4$ см, $MK = 6$ см; $SR = 6$ см, $SP = 10{,}4$ см.

а) Знайдіть трикутники, рівні за I ознакою рівності трикутників. Обґрунтуйте. Запишіть рівність цих трикутників.

б) Знайдіть трикутники, рівні за II ознакою рівності трикутників. Обґрунтуйте. Запишіть рівність цих трикутників.

в) Чи є рівними трикутники ABC і SPR? Обґрунтуйте.

г) Які невідомі сторони трикутників можна знайти, використовуючи властивості рівних трикутників?

3.35.** Для трикутників ABC, KMN і SRP відомо: $AB = 9{,}8$ см, $AC = 13{,}3$ см, $BC = 11{,}9$ см, $\angle A = \angle N = \angle R$; $MN = 9{,}8$ см, $NK = 13{,}3$ см, $\angle M = \angle P$; $RP = 9{,}8$ см.

а) Знайдіть трикутники, рівні за I ознакою рівності трикутників. Обґрунтуйте. Запишіть рівність цих трикутників.

б) Знайдіть трикутники, рівні за II ознакою рівності трикутників. Обґрунтуйте. Запишіть рівність цих трикутників.

в) Чи є рівними трикутники ABC і SPR? Обґрунтуйте.

г) Які невідомі сторони трикутників можна знайти, використовуючи властивості рівних трикутників?

3.36.** Для трикутників ABC, KMN і SRP відомо: $AB = c$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; $MN = a$, $MK = c$, $\angle M = \beta$, $\angle N = \gamma$; $SP = c$, $SR = b$, $\angle S = \alpha$, $\angle P = \beta$. Яку інформацію звідси можна отримати?

3.37.** Для трикутників ABC, KMN і FEH відомо: $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$; $MN = b$, $MK = a$, $\angle K = \beta$, $\angle M = \gamma$; $EH = a$, $FH = b$, $\angle F = \alpha$, $\angle H = \gamma$. Яку інформацію звідси можна отримати?

3.38.** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, до того ж $AO = OB$, $\angle CAO = \angle OBD$. Відрізок MN проходить через точку O, а його кінці M і N лежать на відрізках AC і BD відповідно.

а) Виконайте рисунок і позначте на ньому всю інформацію.
б) Чи є точка O серединою відрізка CD? Обґрунтуйте.
в) Чи є точка O серединою відрізка MN? Обґрунтуйте.
г) Нехай точка M — середина відрізка AC. Чи є в такому випадку точка N серединою відрізка BD? Обґрунтуйте.

Подібне завдання

3.39.** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = CO$ і $BO = DO$, до того ж $AO < OB$. Прямі AD і BC перетинаються в точці K.

а) Виконайте рисунок і позначте на ньому всю інформацію.
б) Чи є рівними трикутники AOD і COB? Обґрунтуйте.
в) Запишіть пари рівних відрізків і пари рівних кутів, які можна знайти, використовуючи властивості рівних трикутників.
г) Чи є рівними відрізки AB і CD? Чи є рівними кути OAK і OCK? Обґрунтуйте свою відповідь.
д) Чи є рівними трикутники CDK і ABK? Обґрунтуйте.
е) Чи є промінь KO бісектрисою кута DKB? Обґрунтуйте.

Додаткові властивості рівних трикутників і ознаки рівності трикутників

У: Крім уже відомих основних властивостей рівних трикутників і ознак їх рівності є й інші — назвемо їх додатковими. Доведемо тут деякі з них. Але майте на увазі: в контрольних роботах і на іспитах додаткові властивості рівних трикутників і ознаки їх рівності потрібно щоразу *доводити*.

3.40.** Доведіть, що в рівних трикутників медіани, проведені до відповідно рівних сторін, рівні.

3.41.** Доведіть: у рівних трикутників бісектриси відповідно рівних кутів рівні.

3.42.** Доведіть: якщо сторона, кут, що прилягає до неї, і бісектриса цього кута одного трикутника відповідно дорівнюють стороні, куту, що прилягає до неї, і бісектрисі цього кута другого трикутника, то ці трикутники рівні.

3.43.** Доведіть: якщо кут, бісектриса цього кута і кут, який бісектриса утворює з протилежною стороною одного трикутника, відповідно дорівнюють куту, бісектрисі цього кута і куту, який бісектриса утворює з протилежною стороною другого трикутника, то ці трикутники рівні.

3.44.** Доведіть: якщо висота і два кути, на які вона ділить кут одного трикутника, відповідно дорівнюють висоті й двом кутам, на які вона ділить кут другого трикутника, то ці трикутники рівні.

3.45.** Доведіть: якщо висота і відрізки, на які основа висоти ділить сторону одного трикутника, відповідно дорівнюють

3.40. Скористайтеся властивостями рівних трикутників і I ознакою рівності.

3.41. Скористайтеся властивостями рівних трикутників і II ознакою рівності.

3.42. Нехай AD і A_1D_1 — бісектриси трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, до того ж $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $AD = A_1D_1$. Щоб довести рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, достатньо довести, що $\angle C = \angle C_1$: тоді дані трикутники рівні за II ознакою рівності. Щоб довести, що $\angle C = \angle C_1$, достатньо довести, що трикутники DAC і $D_1A_1C_1$ рівні. Для цього скористайтеся I ознакою рівності трикутників.

3.43. Нехай AD і A_1D_1 — бісектриси трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, до того ж $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle D = \angle D_1$. Щоб довести рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, достатньо довести, що $\angle B = \angle B_1$: тоді дані трикутники рівні за II ознакою рівності. Щоб довести, що $\angle B = \angle B_1$, достатньо довести, що трикутники DAB і $D_1A_1B_1$ рівні. Для цього скористайтеся II ознакою рівності.

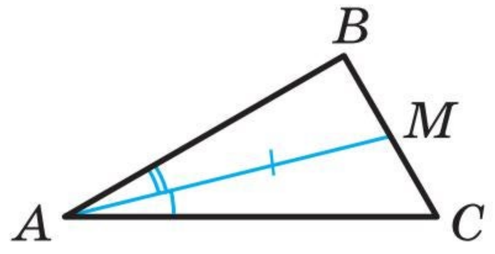
3.44. Нехай BH і B_1H_1 — висоти трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, до того ж $BH = B_1H_1$, $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$, $\angle CBH = \angle C_1B_1H_1$. Щоб довести рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, достатньо довести, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$: тоді дані трикутники рівні за I ознакою рівності трикутників. Щоб довести, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, достатньо довести, що $\Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$ і $\Delta CBH = \Delta C_1B_1H_1$. Для цього скористайтеся II ознакою рівності трикутників.

3.45. Нехай BH і B_1H_1 — висоти трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, до того ж $BH = B_1H_1$, $AH = A_1H_1$, $CH = C_1H_1$. Щоб довести рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, достатньо довести, наприклад, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$: тоді дані трикутники рівні за I ознакою рівності трикутників. Щоб довести це, достатньо довести, що $\Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$ і $\Delta CBH = \Delta C_1B_1H_1$. Для цього скористайтеся I ознакою рівності трикутників.

висоті й відрізкам, на які основа висоти ділить сторону другого трикутника, то ці трикутники рівні.

У: Наступну додаткову ознаку рівності трикутників довести трохи важче:

якщо медіана і два кути, на які вона ділить кут одного трикутника, відповідно дорівнюють медіані й двом кутам, на які вона ділить кут другого трикутника, то ці трикутники рівні (рис. 22).



Щоб довести рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ на рисунку 22, доведемо спочатку, що $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а потім скористаємося першою ознакою рівності трикутників.

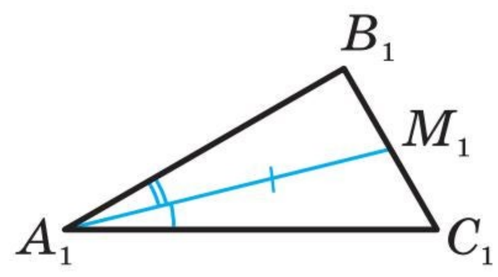


Рис. 22

К: Але для цього потрібно ще довести рівність кутів між відповідно рівними сторонами.

Ф: Це випливає з того, що два кути, на які медіана ділить кут одного трикутника, відповідно дорівнюють двом кутам, на які медіана ділить кут другого трикутника. Значить, і суми цих кутів теж рівні.

У: А тепер найважче: щоб довести, що $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, скористаємося так званим «подвоєнням медіани». Продовжимо відрізки AM і A_1M_1 до точок K і K_1 відповідно так, що $MK = AM$, $M_1K_1 = A_1M_1$, і проведемо відрізки KB і K_1B_1, KC і K_1C_1 (рис. 23).

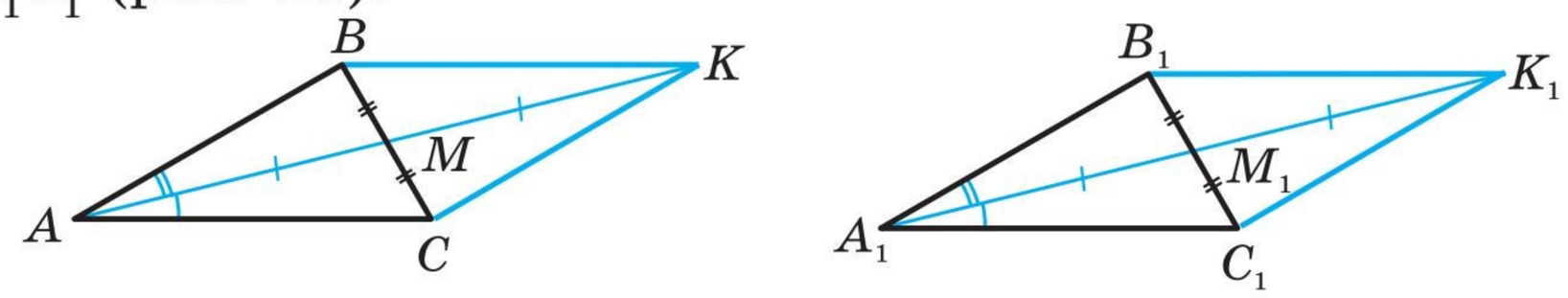


Рис. 23

Ф: Нам уже траплялася така фігура: тут багато пар рівних трикутників.

3.46.** Використовуючи рівності трикутників на рис. 23, доведіть, що $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЯ?

Учням пропонують, використовуючи рис. 24, сформулювати основні твердження глави (означення, аксіоми, теореми). Кожний /

3.46. Скористайтеся властивістю вертикальних кутів, а також першою і другою ознаками рівності трикутників.

кожна може сформулювати кілька тверджень (по одному під час кожного піднесення руки). Перемоги (і заохочувального бала на розсуд учителя / учительки) удостоюють того / ту учня / учениці, після якого / якої ніхто не зміг нічого додати протягом, наприклад, пів хвилини.

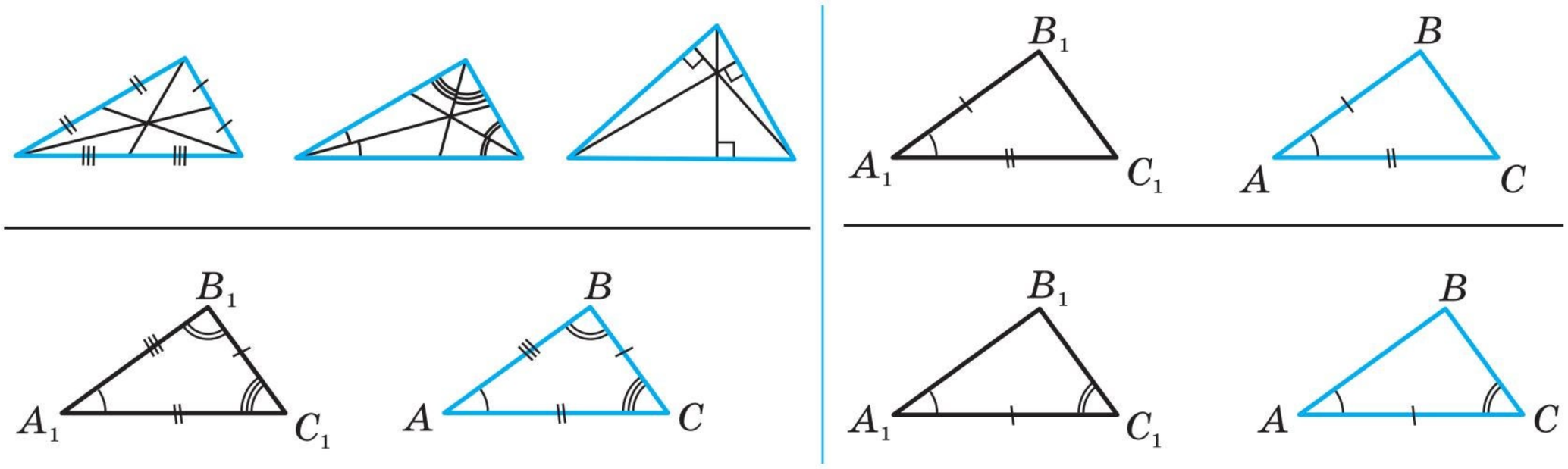


Рис. 24

5. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

У: Які запитання можна поставити за рис. 25?

Ф: Чи є рівними трикутники, виділені кольором на рис. 26?

3.47.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є рівними «білі» трикутники на рис. 26?

3.48.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

У: Скористаємося тепер властивостями рівних трикутників на рис. 25: позначимо в рівних трикутниках рівні сторони рівним числом штрихів, а рівні кути — дужками з рівним числом дуг на них (рис. 27).

Ф: На рис. 27 є ще дві пари рівних трикутників!

3.49.* Знайдіть на рис. 27 дві пари рівних трикутників, у яких немає вершини в точці O.

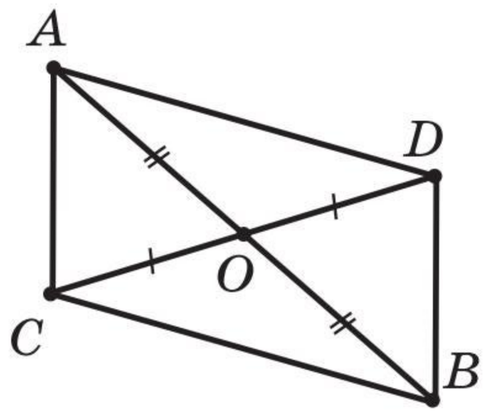


Рис. 25

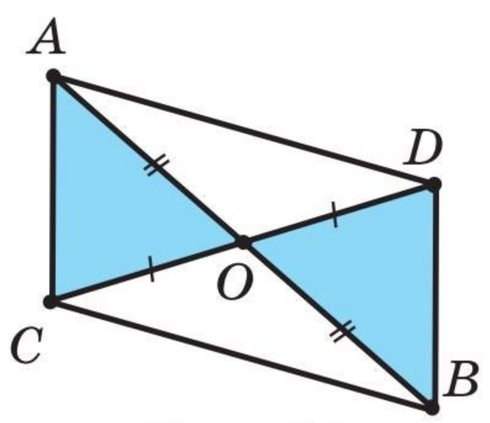


Рис. 26

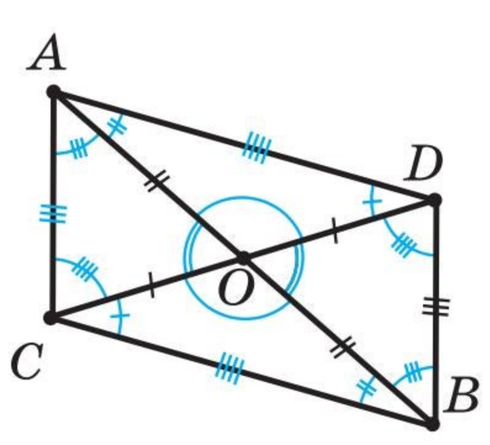


Рис. 27

3.49. Трикутники CAD і DBC, а також трикутники ACB і BDA мають по дві відповідно рівні сторони і рівному куту між ними.

3.50.** Доповнивши рис. 28, складіть задачі, для розв'язання яких потрібно використовувати:
а) першу ознаку рівності трикутників;
б) другу ознаку рівності трикутників.

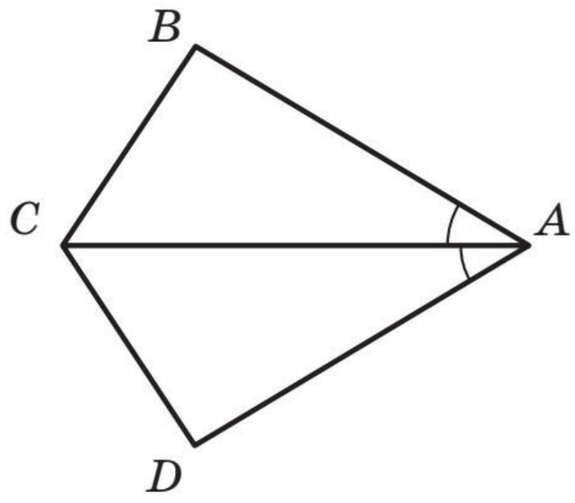


Рис. 28

Подібне завдання

3.51.** Доповнивши рис. 29, складіть задачі, для розв'язання яких потрібно використовувати:
а) першу ознаку рівності трикутників;
б) другу ознаку рівності трикутників.

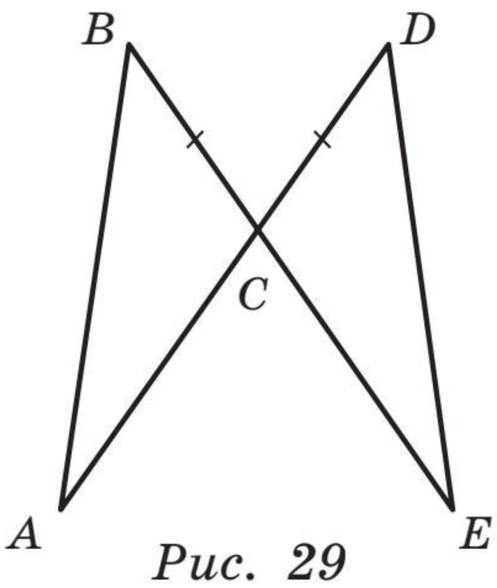


Рис. 29

3.52.** Які запитання можна поставити за кожним з рис. 30? Дайте відповіді на ці запитання.

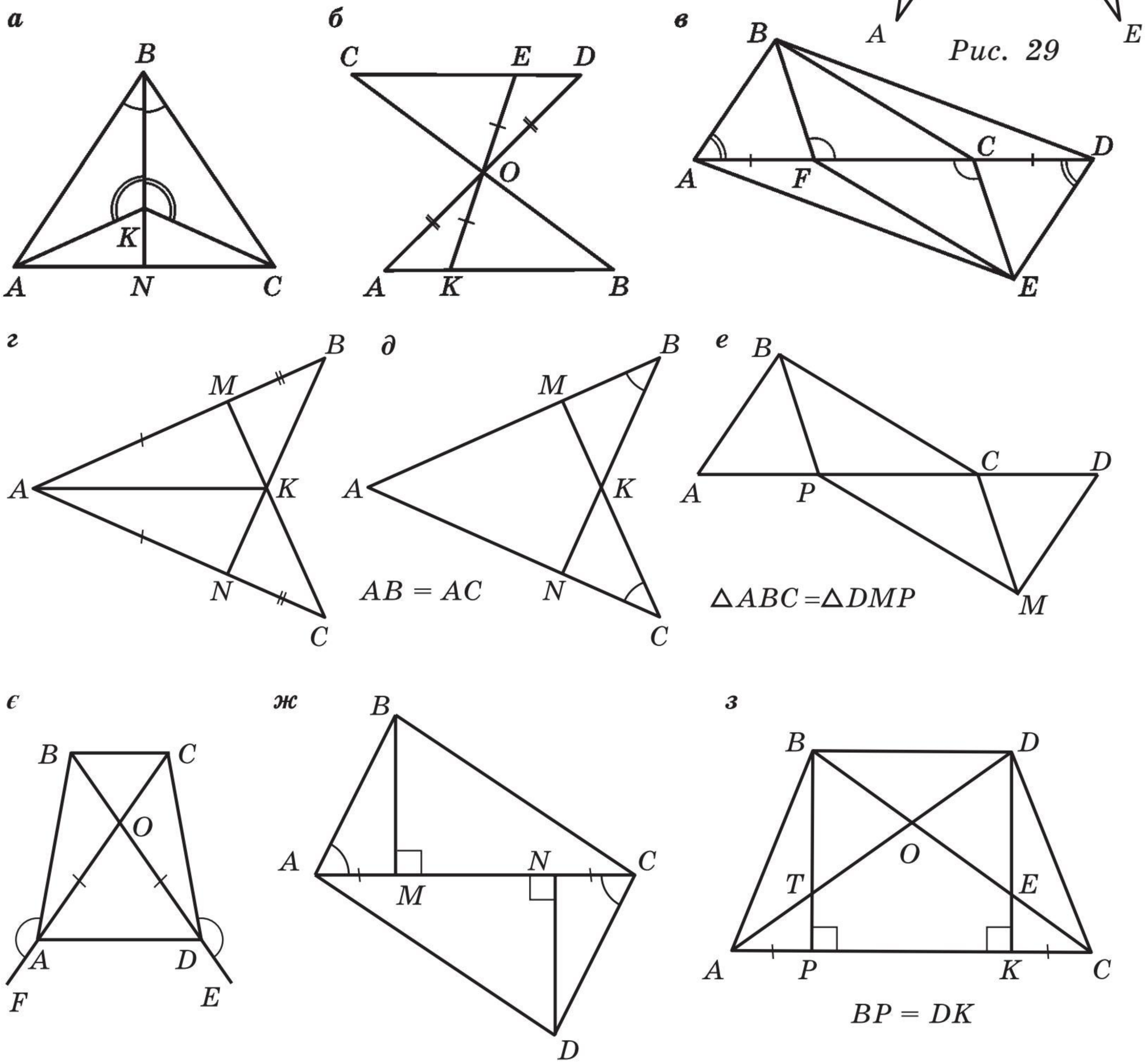


Рис. 30

3.53.** Два дерева A і B розташовані на протилежних берегах озера (рис. 31). Використовуючи подану на рисунку побудову, напишіть стислу інструкцію, як знайти відстань між деревами.

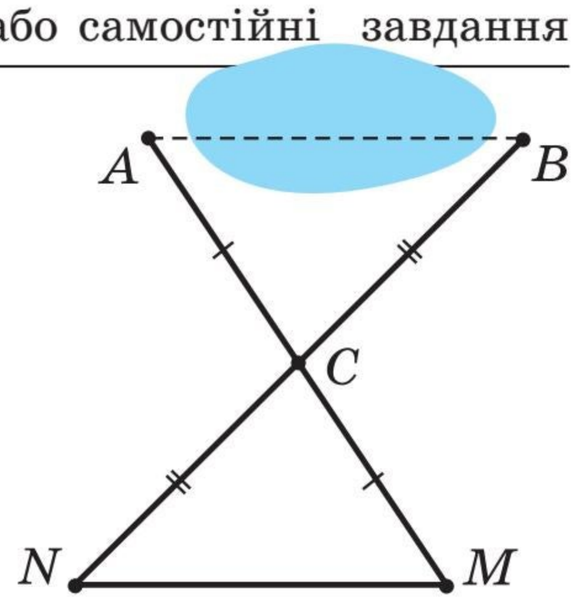


Рис. 31

3.54.** Два дерева A і B розташовані на протилежних берегах річки (рис. 32). Використовуючи подану на рисунку побудову, напишіть стислу інструкцію, як знайти відстань між деревами.

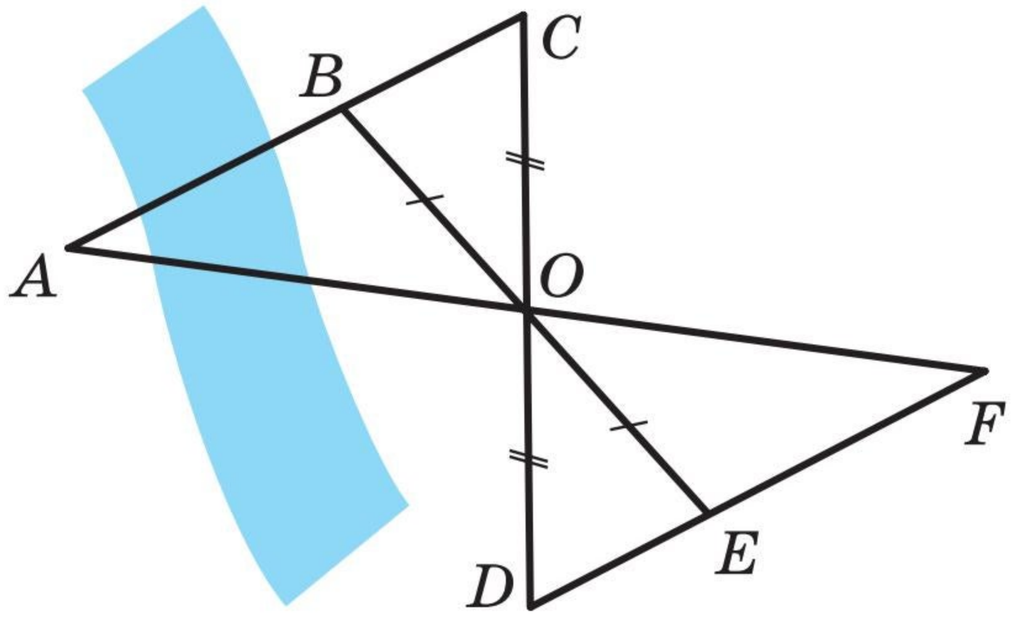


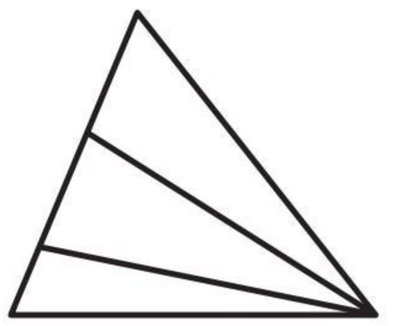
Рис. 32

ТРИРІВНЕВІ ДОМАШНІ АБО САМОСТІЙНІ ЗАВДАННЯ

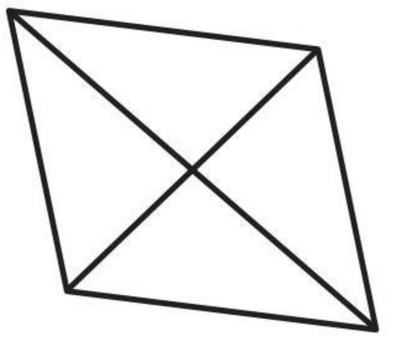
(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C.
Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

Трикутник і його елементи. Рівні трикутники

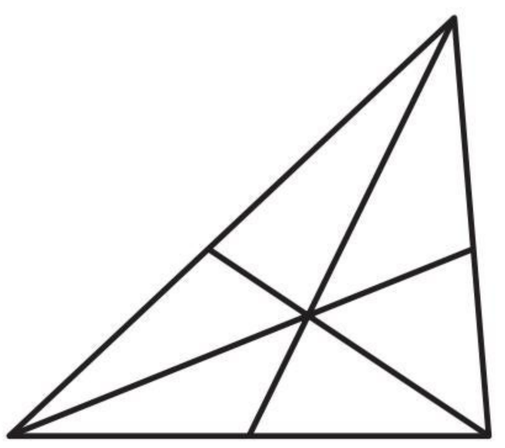
3.55.* Позначте кінці всіх відрізків на рисунку. Запишіть позначення...
а) всіх трикутників.
б) пар трикутників, що мають спільний кут.
в) пар трикутників, що мають спільну сторону.



3.56.* Позначте на рисунку кінці всіх відрізків і точку їх перетину. Запишіть позначення...
а) всіх трикутників;
б) пар трикутників, що мають спільний кут;
в) пар трикутників, що мають спільну сторону.



3.57.** Позначте кінці всіх відрізків на рисунку. Запишіть позначення...
а) всіх трикутників на рисунку;
б) пар трикутників, що мають спільний кут;
в) пар трикутників, що мають спільну сторону.



3.53. Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників.

3.54. Скористайтеся першою і другою ознаками рівності трикутників.

3.58.*** Накресліть трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну до сторони, протилежної цій вершині. Позначте вершини трикутника і точки перетину проведених прямих. Запишіть позначення...

а) всіх трикутників на рисунку;

б) пар трикутників, що мають спільну сторону;

в) пар трикутників, що мають спільний кут.

3.59.** Накресліть трикутник і проведіть у ньому медіану. Позначте вершини трикутника і медіану.

а) Позначте на рисунку рівні відрізки. Запишіть рівність цих відрізків.

б) Запишіть позначення пар трикутників зі спільним кутом.

в) Запишіть позначення пар трикутників, що мають дві рівні сторони.

3.60.** Накресліть трикутник і проведіть у ньому бісектрису. Позначте вершини трикутника і бісектрису.

а) Позначте на рисунку рівні кути. Запишіть рівність цих кутів.

б) Запишіть позначення пар трикутників зі спільною стороною.

в) Запишіть позначення пар трикутників, що мають по одному рівному куту і одній рівній стороні.

3.61.** Накресліть гострокутний трикутник і проведіть у ньому висоту. Позначте вершини трикутника і кінець висоти.

а) Позначте на рисунку прямі кути.

б) Запишіть позначення пар трикутників зі спільною стороною.

в) Запишіть позначення пар трикутників, що мають по одному рівному куту і одній рівній стороні.

3.62.* Запишіть довільне додатне число b, більше від 12. Приймiть, що периметр трикутника дорівнює b см, причому всі його сторони рівні. Знайдіть сторони трикутника.

Перша і друга ознаки рівності трикутників

3.63.* Накресліть два відрізки, які точкою перетину діляться навпіл. Позначте кінці відрізків і точку їх перетину.

а) З'єднайте відрізками кінці накреслених відрізків.

б) Запишіть позначення всіх трикутників на рисунку.

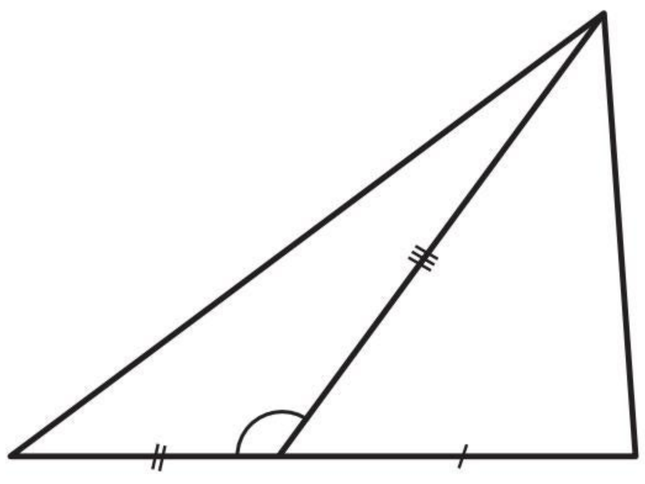
в) Знайдіть пари трикутників, рівних за першою ознакою рівності трикутників. Запишіть рівності трикутників.

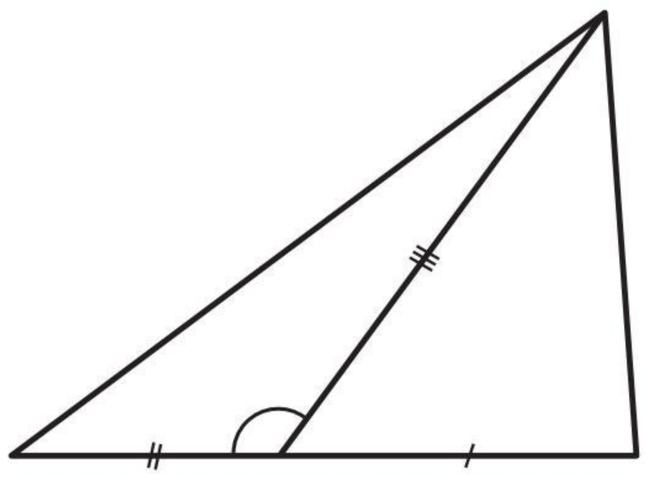
3.64.** Позначте кінці всіх відрізків на кожному рисунку.

а) Знайдіть трикутники, рівні за першою ознакою рівності трикутників відповідно до рисунка. Запишіть рівність цих трикутників.

б) Знайдіть трикутники, рівність яких за першою ознакою рівності трикутників можна обґрунтувати за допомогою теореми про суміжні кути. Запишіть рівність цих трикутників.

в) Знайдіть ще пару трикутників, рівних за першою ознакою рівності трикутників. Запишіть рівність цих трикутників.





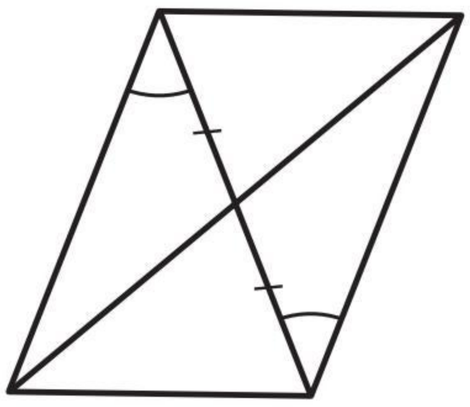
3.65.** Накресліть кут, проведіть його бісектрису і позначте на ній будь-яку точку.

а) Проведіть через позначену точку пряму, перпендикулярну до бісектриси, і позначте точки перетину цієї прямої зі сторонами кута.

б) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівність трикутників.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

3.66.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

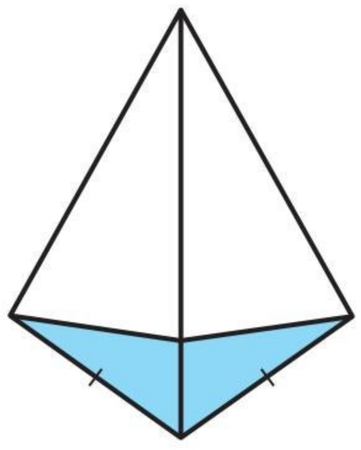


а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

3.67.** Зафарбовані на рисунку трикутники рівні. Позначте кінці всіх відрізків.

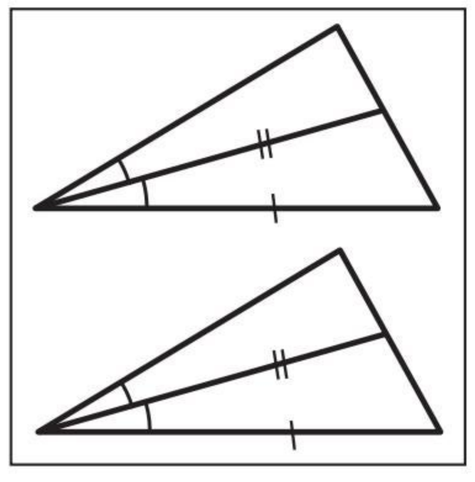


а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

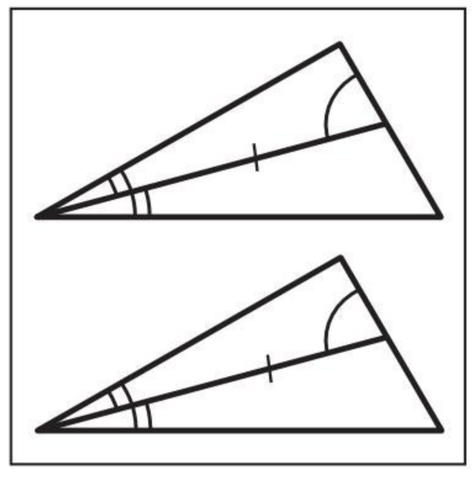
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

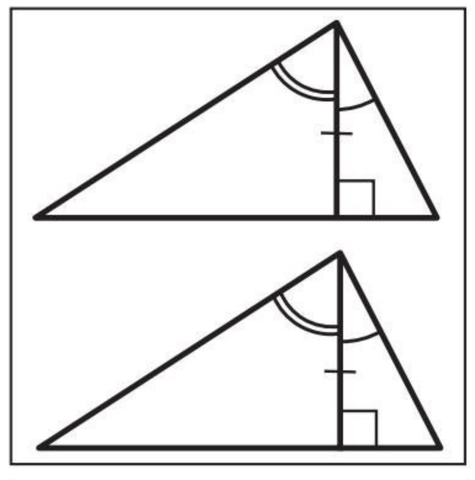
3.68.** Позначте кінці всіх відрізків на рисунку.
а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.



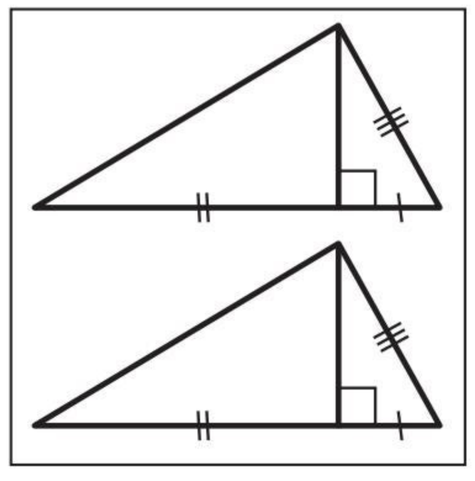
3.69.** Позначте кінці всіх відрізків на рисунку.
а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.



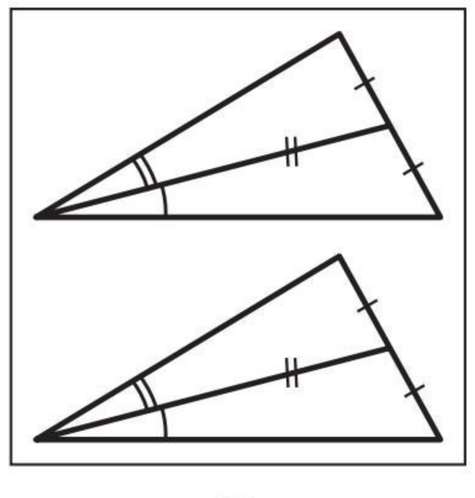
3.70.** Позначте кінці всіх відрізків на рисунку.
а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.



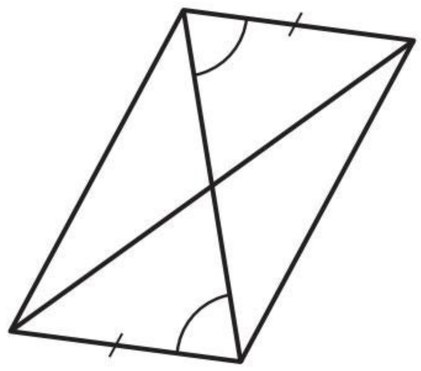
3.71.** Позначте кінці всіх відрізків на рисунку.
а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.



3.72.*** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.
а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.



3.73.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.
а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

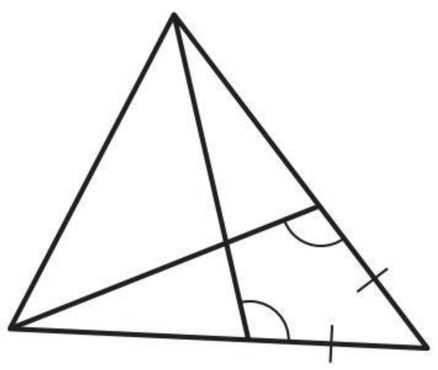


3.74.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.

а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

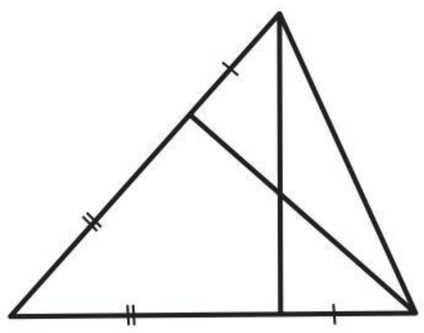


3.75.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.

а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

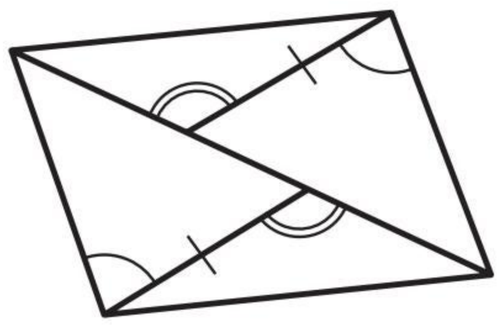


3.76.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.

а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

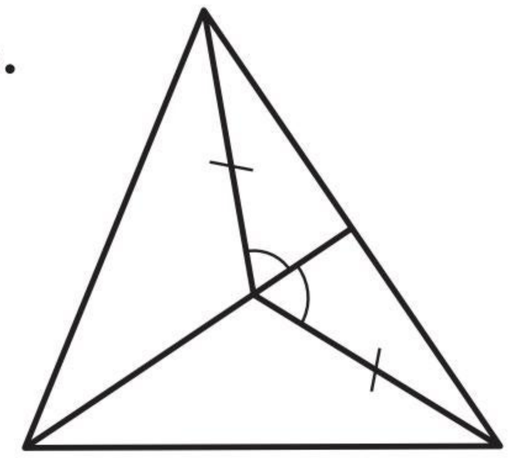


3.77.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.

а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

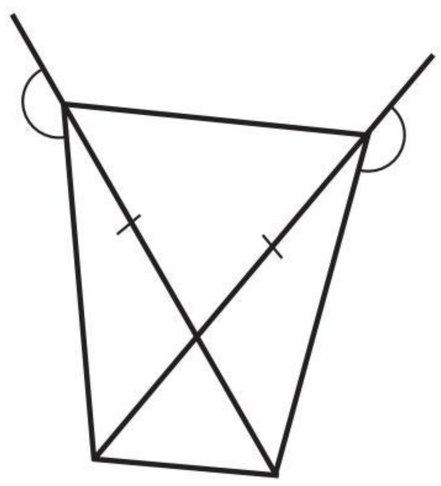


3.78.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.

а) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.



Видатні українські математики



МИКОЛА АНДРІЙОВИЧ ЧАЙКОВСЬКИЙ

(1887–1970)

Математик, який випередив свій час на століття.

Народився Микола Чайковський у Тернопільській області. Математикою почав цікавитися вже в молодших класах. Закінчив Віденський університет. Тривалий час викладав математику в середніх школах і приватних гімназіях Галичини. Читав лекції в Кам'янець-Подільському та Львівському університетах.

«Я можу з великою гордістю сказати, — згадував Микола Чайковський пізніше, — що був другим, хто викладав вищу математику українською мовою; першим був Михайло Пилипович Кравчук у Києві...».

Поряд з науковими дослідженнями з математики Чайковський приділяв багато уваги питанням української наукової, зокрема математичної, термінології, а також підготовці підручників з математики українською мовою.

ВЕНІАМІН ФЕДОРОВИЧ КАГАН

(1869–1953)

Математик, педагог, просвітник.



Веніамін Каган закінчив фізико-математичний факультет Київського університету. Працюючи в Одеському університеті, брав участь у заснуванні фізико-математичного інституту, де працював професором і завідувачем першої кафедри геометрії.

Основними напрямами наукової діяльності В. Ф. Кагана є основи геометрії, неевклідова геометрія, диференціальна геометрія і топологія. Ще в часи студентства він зацікавився неевклідовою геометрією. Розробив свою систему аксіом евклідового простору, яка дозволяла доводити теореми шляхом логічного міркування, не використовуючи наочність.

Веніамін Федорович образно казав, що легше було б зупинити Сонце, ніж змінити суму кутів трикутника.

ГЕОРГІЙ ФЕОДОСІЙОВИЧ ВОРОНИЙ



(1868–1908)

Математик, який випередив свій час на століття.

Георгій Феодосійович Вороний народився в Чернігівській області. Був професором кількох університетів, зокрема Варшавського. Досліджував заповнення площини і простору рівними фігурами. Колеги вважали його творцем геометричної теорії чисел. Г. Вороний проникав у сутність проблем і досягав успіху завдяки застосуванню нових методів. Найголовніша особливість його творчості — гармонійне поєднання талантів геометра та аналітика. Його дослідження згодом знайшли застосування в багатьох галузях прикладних наук: кристалографії, фізиці, астрономії, хімії, мікробіології, комп'ютерній графіці, проблемах штучного інтелекту, проблемах розпізнавання образів, медицині.



МИХАЙЛО ЄГОРОВИЧ ВАЩЕНКО-ЗАХАРЧЕНКО

(1825–1912)

Видатний педагог та історик математики.

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко народився на Полтавщині. Навчався в Києві та Парижі, став професором Київського університету. Досліджував історію розвитку геометрії, написав кілька посібників з геометрії, переклав із грецької «Основи Евкліда», додавши пояснювальний вступ і вагомі тлумачення, у яких також розглянув основні питання неевклідової геометрії.

Михайло Єгорович написав «Історію математики», яка містить історичний нарис розвитку геометрії. Сприяв розвитку математичної освіти в Україні.

Наукова школа Михайла Єгоровича стала міцною основою української математичної науки.

ГЛАВА 4. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК



1. ЗНАЙОМСТВО З РІВНОБЕДРЕНИМ ТРИКУТНИКОМ

У: Сьогодні ми розглянемо окремий важливий вид трикутників — рівнобедрений трикутник.

Рівнобедреним називають трикутник, у якого дві сторони рівні.

Ви невдовзі переконаєтеся, що рівнобедрені трикутники — вірні помічники в дослідженні геометричних фігур і розв'язуванні задач. Зокрема, рівнобедрені трикутники допоможуть нам довести третю ознаку рівності трикутників.

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними* сторонами, а третю сторону — *основою*.

На рис. 1 зображено рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і BC й основою AC.

Записуючи позначення рівнобедреного трикутника, потрібно вказувати також його основу або бічні сторони.

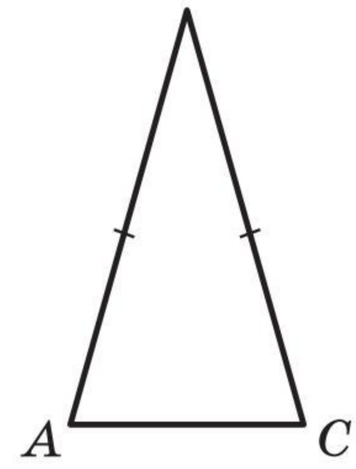


Рис. 1

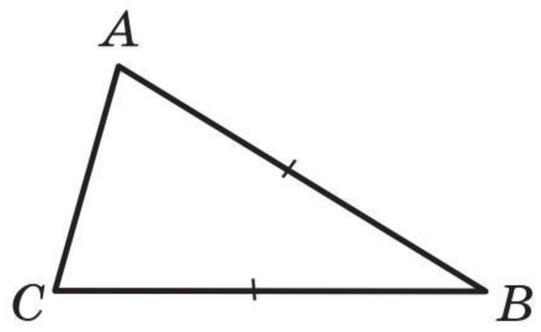


Рис. 2

Ф: А якщо покласти трикутник, зображений на рис. 1, «на бік» (рис. 2), чи залишиться він рівнобедреним?

У: Так, залишиться: якщо дві сторони трикутника рівні, то він *за означенням* є рівнобедреним, а його *рівні* сторони називають *бічними* — незалежно від того, як розташований трикутник.

4.1.* Які сторони рівнобедреного трикутника, зображеного на рисунку 2, є бічними? Нарисуйте схематично три-чотири різні положення того самого рівнобедреного трикутника і позначте на рисунках рівні сторони.

4.2.* Скільки рівнобедрених трикутників на рисунку 3? Запишіть позначення цих трикутників із указанням основи або бічних сторін.

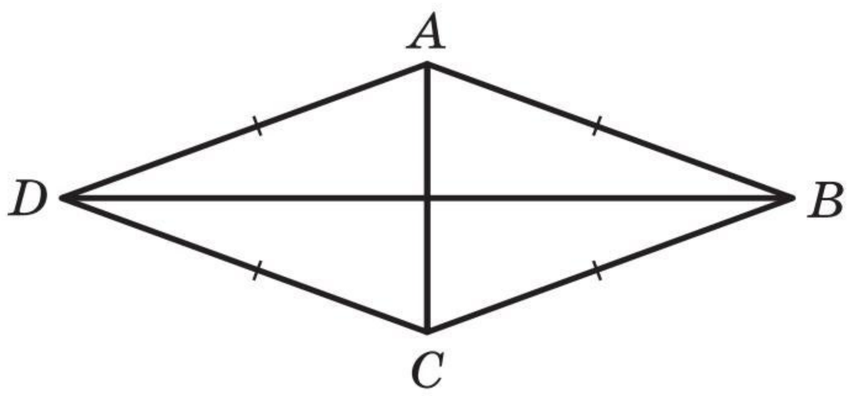


Рис. 3

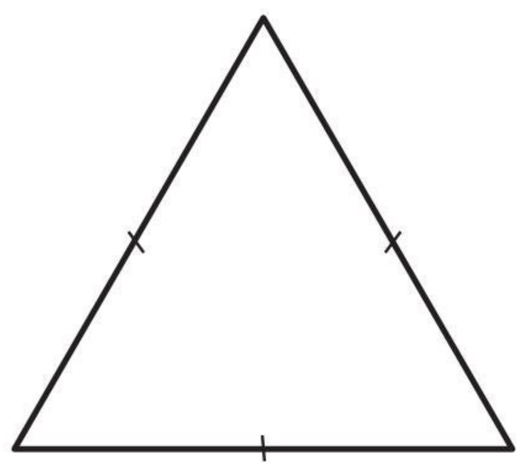
4.3.** Накресліть відрізки AB і CD рівної довжини, які перетинаються в точці O і нею обидва діляться навпіл. Доповніть цей рисунок так, щоб на ньому з'явились 4 рівнобедрені трикутники. Запишіть позначення цих трикутників із указанням основи або бічних сторін.

Ф: А як називають трикутник, у якого рівних сторін немає?

У: Трикутник, у якого довжини всіх сторін різні, називають *різностороннім*.

К: А як називають трикутник, у якого всі сторони рівні?

У: Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім* (рис. 4).


Рис. 4

4.4.* Перевірте свій окомір. Нарисуйте від руки *рівносторонній* трикутник. Відтак, використовуючи циркуль, перевірте, чи справді цей трикутник рівносторонній.

К: Чи можна вважати рівносторонній трикутник рівнобедреним?

У: Так, ми вважатимемо рівносторонній трикутник особливим видом рівнобедреного.

Ф: Тоді в рівностороннього трикутника будь-які дві сторони — бічні, і будь-яка його сторона — основа.

У: Так і є.

2. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У: Виріжте з паперу рівнобедрений трикутник і складіть його так, щоб *рівні* бічні сторони наклались одна на одну (рис. 5). Який висновок можна зробити з цього досліду?

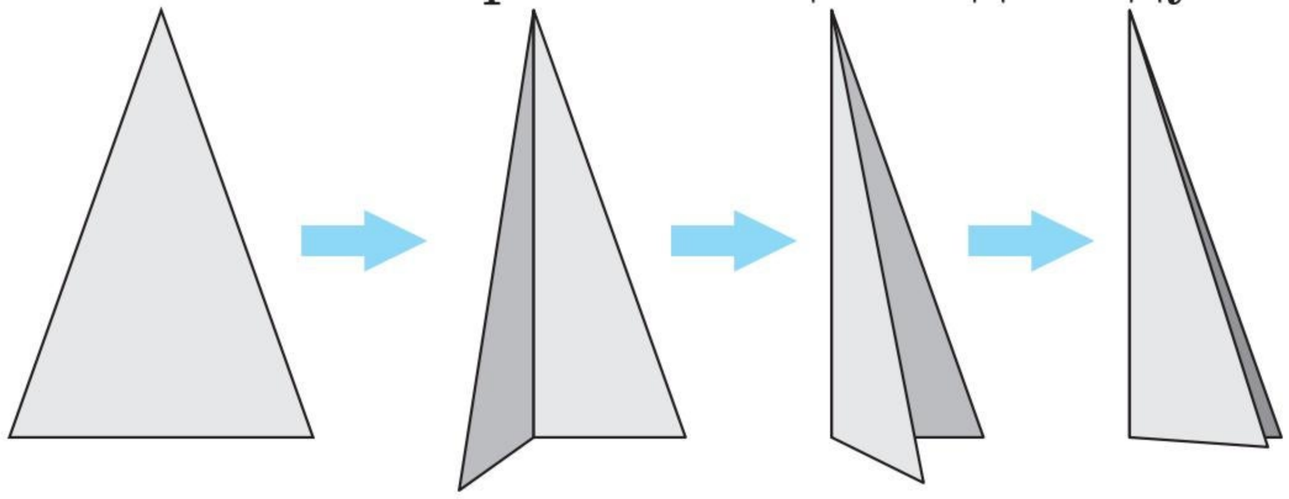


Рис. 5

Ф: Цей дослід показав, що рівнобедрений трикутник *можна поділити на два рівні трикутники*: адже вони сумістилися при накладанні.

У: А що можна сказати про лінію згину на рис. 5?

К: Вона розділила кут трикутника на два рівні кути, оскільки вони сумістились при накладанні. Значить, лінія згину — бісектриса протилежного до основи кута.

У: Зробимо тепер відповідний до нашого досліду рисунок. Проведемо в рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC бісектрису BD (рис. 6).

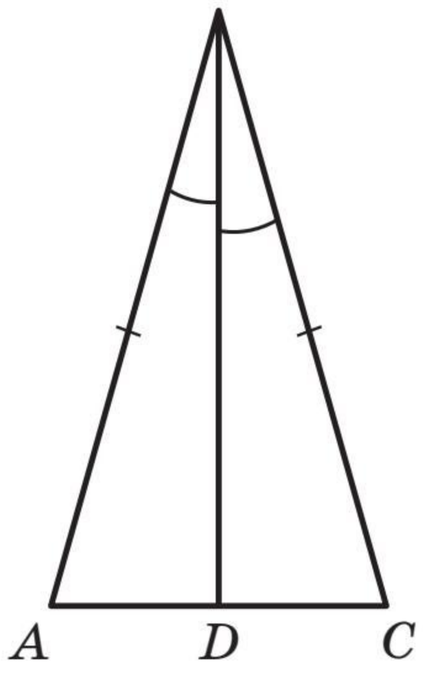


Рис. 6

4.5.* Доведіть рівність трикутників ABD і CBD.

У: Отже, бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівні трикутники.

Скористайтеся тепер *властивостями* рівних трикутників.

Ф: У рівних трикутників всі відповідні сторони рівні й всі відповідні кути рівні (рис. 7).

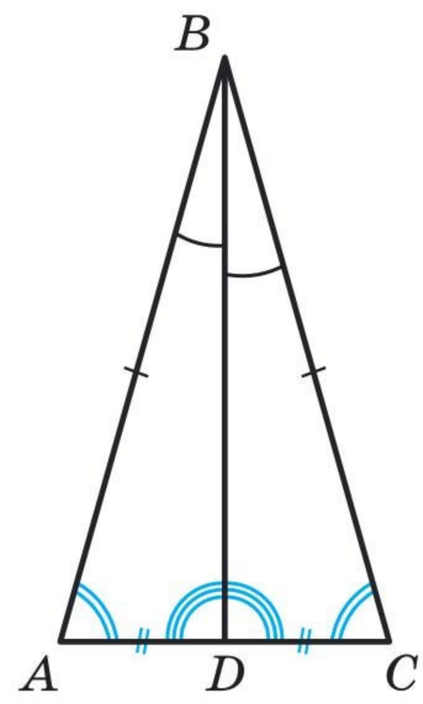


Рис. 7

У: Правильно. Які висновки про властивості рівнобедреного трикутника можна зробити з рис. 7?

К: Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Ф: *Бісектриса*, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є також *медіаною*.

К: Я ще дещо помітила. Кути ADB і CDB — *суміжні*, тому їх сума дорівнює 180°. А оскільки ці кути *рівні*, то кожний з них — *прямий* (рис. 8). Отже, *бісектриса*, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є також і *висотою*!

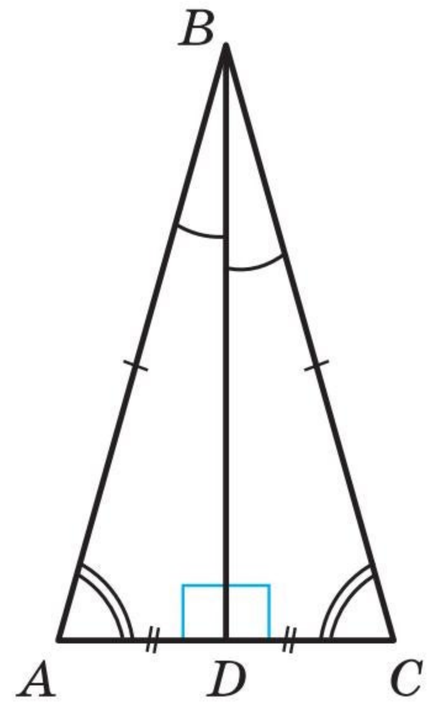


Рис. 8

У: Зобразимо все, про що ми дізналися, у вигляді схеми (рис. 9).

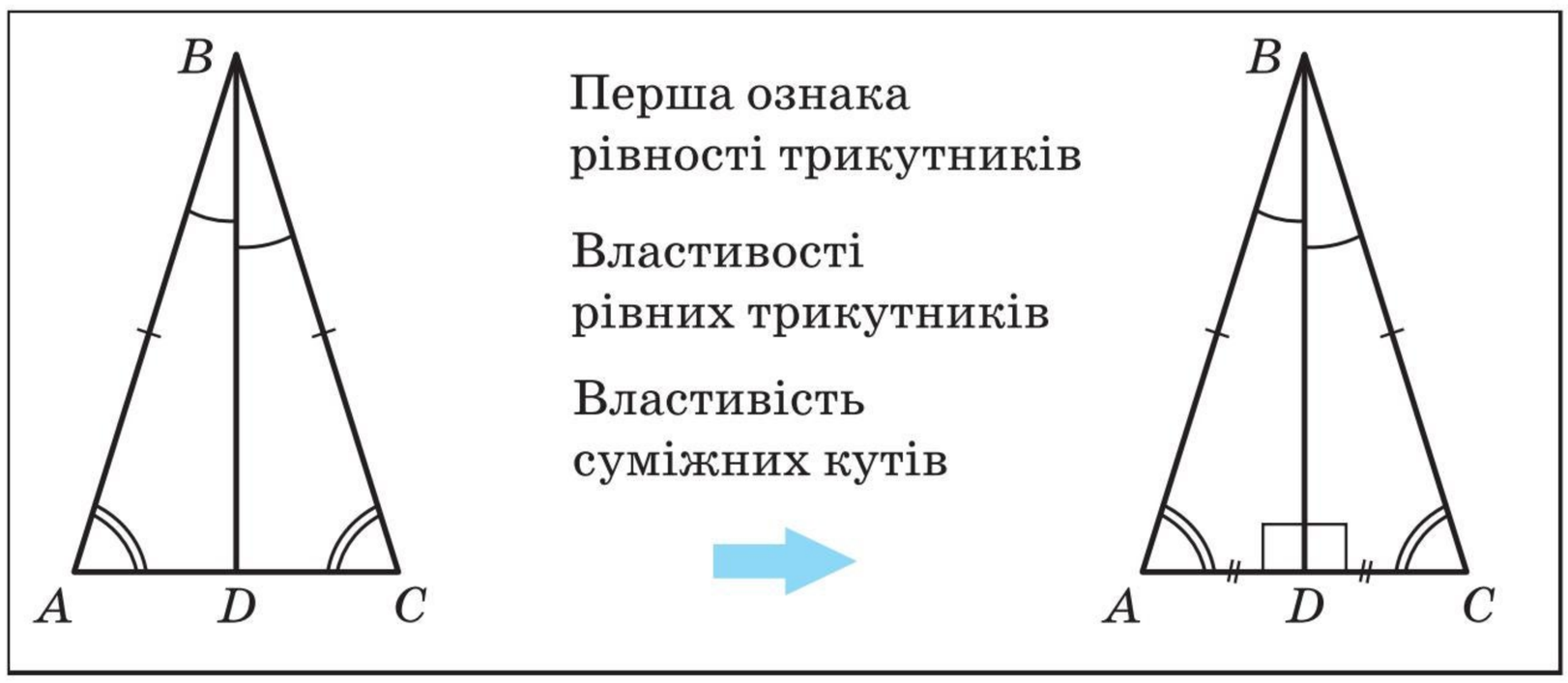


Рис. 9

Зображена на рисунку 9 схема ілюструє *властивості рівнобедреного трикутника*:

- кути при основі рівнобедреного трикутника рівні;
- бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, збігається з медіаною;
- бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, збігається з висотою.

К: Якщо медіана і висота, проведені до основи, збігаються з бісектрисою, то вони збігаються і *одна з одною*. Тому можна стверджувати:

- медіана рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, збігається з висотою і бісектрисою.

4.6.* Кут між медіаною, проведеною до основи рівнобедреного трикутника, і однією з його бічних сторін дорівнює 28°. Чому дорівнює кут між цією медіаною і другою бічною стороною?

Подібні завдання (4.7–4.10)

4.7.* Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 10 см. Вона ділить основу на відрізки, один з яких завдовжки 6 см. Яку інформацію звідси можна отримати?

4.8.** Медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 22 см, а кут при вершині, протилежній основі, дорівнює 40°. Яку інформацію звідси можна отримати?

4.9.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведена медіана BD. Відомо, що $\angle ABC = 120°$, $\angle BAC = 30°$. Чому дорівнюють кути трикутника CBD?

4.10.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC медіана BM утворює зі стороною BC кут 25°.

а) Чому дорівнює кут між бісектрисою кута B і стороною AC?

б) Чому дорівнює кут ABC?

4.11.** Медіана трикутника ділить його на два трикутники, периметри яких рівні. Яку інформацію звідси можна отримати?

4.12.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведена бісектриса BD. Периметр трикутника ABC дорівнює 20 см, а периметр трикутника ABD — 15 см. Чому дорівнює висота трикутника ABC, проведена до основи?

Подібне завдання

4.13.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC бічна сторона дорівнює 13 см, а висота BH — 12 см. Периметр трикутника ABH дорівнює 30 см. Чому дорівнює AC?

4.6. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є також його бісектрисою.

4.7. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, збігається з медіаною і бісектрисою.

4.9. Скористайтеся тим, що медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є також бісектрисою і висотою.

4.11. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений, до того ж медіана проведена до основи.

4.12. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є також медіаною і висотою. Тому периметр трикутника ABD дорівнює половині периметра трикутника ABC плюс довжина висоти, проведеної до основи AC.

Властивості рівностороннього трикутника

4.14.* Доведіть: якщо трикутник рівносторонній, то:

а) усі його кути рівні;

б) бісектриса, медіана і висота, проведені з будь-якої вершини, збігаються;

в) усі бісектриси рівні;

г) усі медіани рівні;

д) усі висоти рівні.

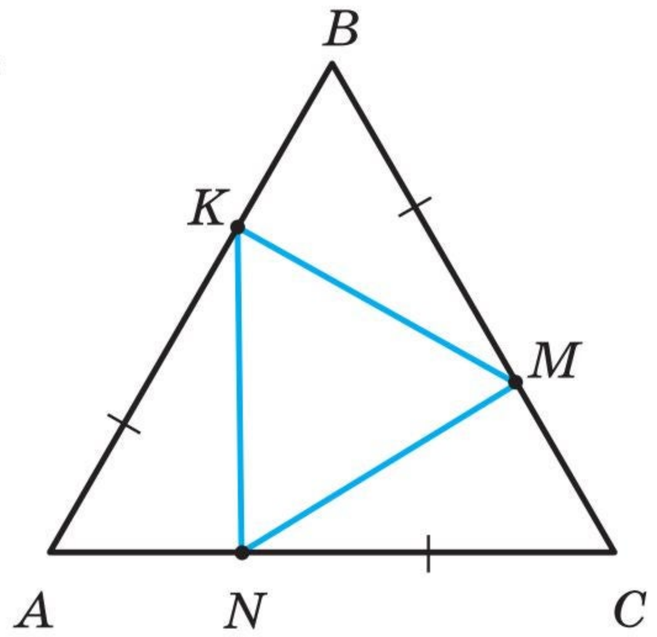


Рис. 10

4.15.** На сторонах рівностороннього трикутника ABC відмітили точки M, N, K так, що $AK = BM = CN$ (рис. 10). Чи є трикутник MNK також рівностороннім? Обґрунтуйте свою відповідь.

Подібне завдання

4.16.** На продовженнях сторін рівностороннього трикутника ABC відмітили точки K, M, N так, що $AM = BK = CN$ (рис. 11). Чи є трикутник KNM також рівностороннім? Обґрунтуйте свою відповідь.

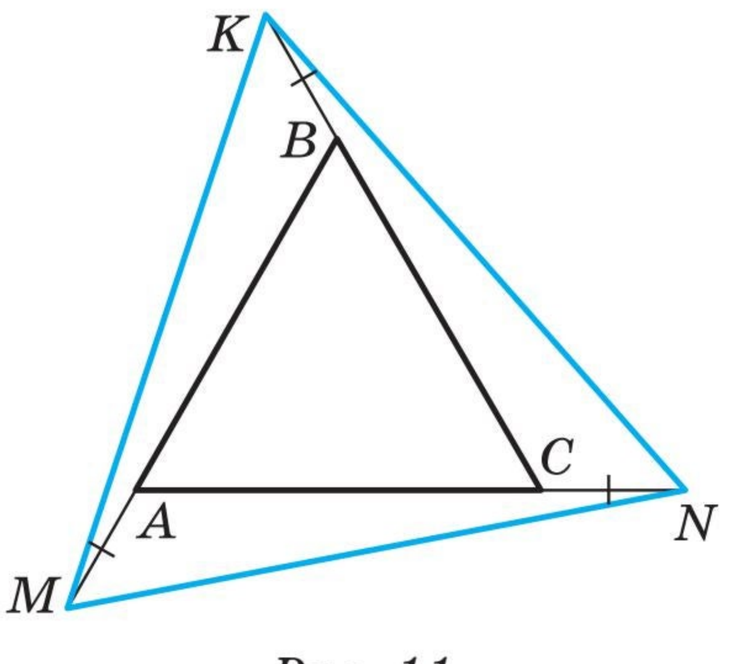


Рис. 11

4.17.** Вершини трикутника позначені A, B, C.

а) Доведіть: якщо $\Delta ABC = \Delta CBA$, то трикутник ABC рівнобедрений. Які його сторони є бічними?

б) Доведіть: якщо $\Delta ABC = \Delta BCA$, то трикутник ABC рівносторонній.

Додаткові властивості рівнобедреного трикутника

У: Ми довели основні властивості рівнобедреного трикутника: кути при основі рівні; бісектриса, медіана і висота, проведені до основи, збігаються. Крім цього, у рівнобедреного трикутника є й інші властивості — назвемо їх додатковими. Доведемо тут деякі з них. Зауважу: у контрольних роботах і на іспитах, у процесі розв'язування задач, можна, не наводячи доведень, застосовувати тільки *основні* властивості рівнобедреного трикутника. Додаткові ж властивості треба щоразу *доводити*.

4.15. Скористайтеся тим, що всі кути рівностороннього трикутника рівні, а також першою ознакою рівності трикутників.

4.18.** Доведіть: бісектриси кутів рівнобедреного трикутника рівні.

Подібне завдання

4.19.** Доведіть: медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

Деякі ознаки рівності рівнобедрених трикутників

У: Доведені нами раніше перша і друга ознаки рівності трикутників можна застосувати до будь-яких трикутників. Для рівнобедрених же трикутників можна довести деякі додаткові ознаки рівності, використовуючи те, що в цих трикутників дві сторони рівні за означенням. Тому для встановлення рівності двох *рівнобедрених* трикутників часто досить рівності не трьох, а лише *двох* певних елементів цих трикутників.

4.20.* Доведіть: якщо бічна сторона і кут між бічними сторонами одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють бічній стороні й куту між бічними сторонами другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники рівні.

4.21.* Доведіть: якщо основа і кут при основі одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники рівні.

4.22.** Доведіть: якщо основа і проведена до неї медіана (бісектриса чи висота) одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й проведеній до неї медіані (бісектрисі чи висоті) другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники рівні.

4.18 Скористайтеся тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, а також другою ознакою рівності трикутників.

4.19. Скористайтеся тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, а також першою ознакою рівності трикутників.

4.20. Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників.

4.21. Скористайтеся тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, і другою ознакою рівності трикутників.

4.22. Скористайтеся тим, що в рівнобедреному трикутнику медіана, висота і бісектриса, проведені до основи, збігаються, а також першою ознакою рівності трикутників.

4.23.** Доведіть: якщо кут між бічними сторонами і медіана (бісектриса чи висота), проведена з вершини цього кута одного рівнобедреного трикутника рівні куту між бічними сторонами і висоті (медіані чи бісектрисі), проведеній з вершини цього кута другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники рівні.

3. ОЗНАКИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Навіщо потрібні ознаки рівнобедреного трикутника?

У: Щоб використовувати властивості рівнобедреного трикутника, потрібно спочатку переконатися, що трикутник, який розглядають, дійсно *рівнобедрений*. Якщо це явно не задано, то потрібно скористатися *ознаками* рівнобедреного трикутника.

Два кути рівні

У: Доведемо, що

якщо два кути трикутника рівні, то він рівнобедрений, причому проти рівних кутів лежать рівні сторони (рис. 12).

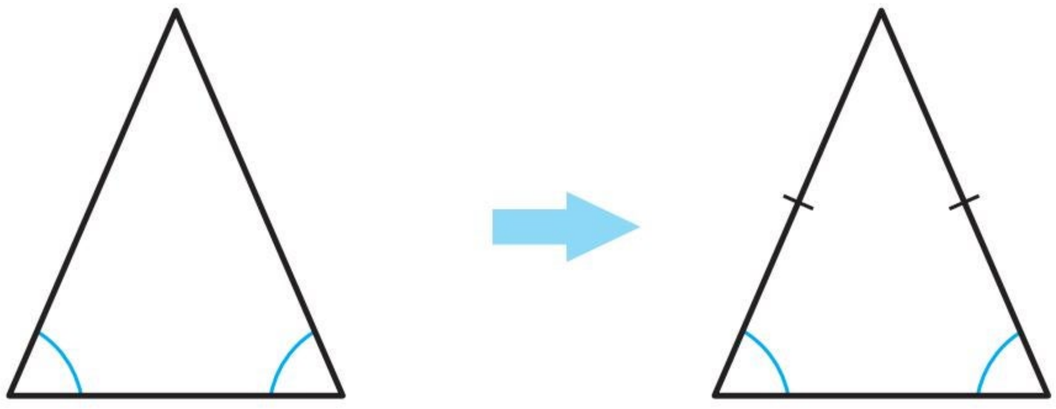


Рис. 12

Нехай, наприклад, кути A і C трикутника ABC рівні (рис. 13).

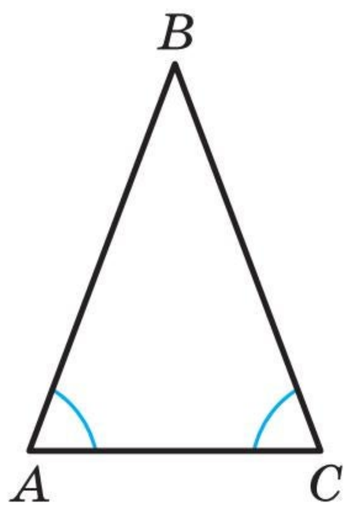


Рис. 13

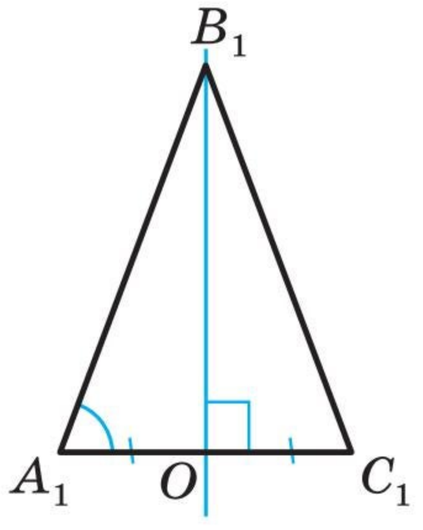


Рис. 14

Побудуємо трикутник $A_1B_1C_1$, рівний трикутнику ABC, і доведемо, що трикутник $A_1B_1C_1$ рівнобедрений. Звідси випливатиме, що трикутник ABC також рівнобедрений.

4.23. Скористайтеся тим, що в рівнобедреному трикутнику медіана, висота і бісектриса, проведені до основи, збігаються, а також другою ознакою рівності трикутників.

Для побудови трикутника $A_1B_1C_1$ побудуємо спочатку відрізок A_1C_1, рівний AC. Далі відкладемо від початку променя A_1C_1 кут A і позначимо B_1 — точку перетину сторони цього кута з прямою, що перпендикулярна до відрізка A_1C_1 і проходить через його середину O (рис. 14). Проведемо відрізки A_1B_1 і B_1C_1. Трикутники A_1OB_1 і C_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, по-перше, що трикутник $A_1B_1C_1$ рівнобедрений, а по-друге, що він дорівнює трикутнику ABC за другою ознакою рівності трикутників ($A_1C_1 = AC$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$).

Взаємно обернені теореми

У: Порівняємо щойно доведені нами властивість і ознаку рівнобедреного трикутника. Для наочності сформулюємо ці дві теореми подібно.

1) Властивість рівнобедреного трикутника: ***якщо*** дві сторони трикутника рівні (трикутник рівнобедрений), ***то*** два кути, що лежать проти цих сторін, рівні.

2) Ознака рівнобедреного трикутника: ***якщо*** два кути трикутника рівні, ***то*** дві сторони, що лежать проти цих кутів, рівні (тобто трикутник рівнобедрений).

Що *спільного* у формулюванні цих теорем?

К: Обидві теореми складаються з двох частин: перша починається зі слова «якщо», а друга — зі слова «то».

У: Правильно! Кожна теорема складається з двох частин: *умови* і *висновку*. В умові йдеться про те, що *дано*, а у висновку — що *потрібно довести*.

Будь-яку теорему завжди можна сформулювати так, щоб умова починалась зі слова «якщо», а висновок — зі слова «то». Зобразимо структуру теореми у вигляді схеми (рис. 15):

Структура теореми

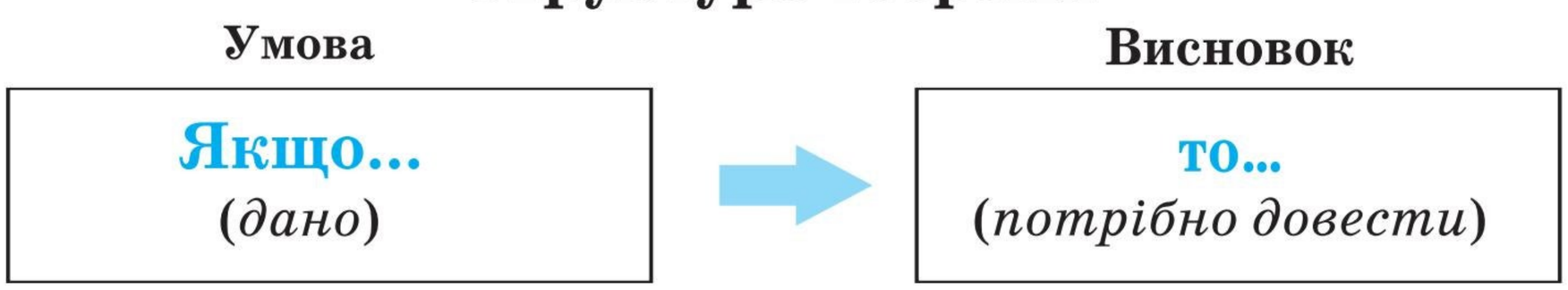


Рис. 15

Ця схема наочно показує, що *кожна теорема дозволяє за допомогою міркувань отримувати деяку інформацію*:

використовуючи те, що *дано*, ми дізнаємося *те*, що *потрібно довести*. У цьому і полягає цінність теорем.

4.24.* Що є умовою і що — висновком у теоремі про *властивість* рівнобедреного трикутника?

4.25.* Що є умовою і що — висновком у теоремі про *ознаку* рівнобедреного трикутника?

Ф: Властивість і ознака рівнобедреного трикутника дуже схожі: у кожній з цих теорем ідеться про дві рівні сторони і два рівні кути трикутника.

У: Погоджуюсь. Тому зверніть увагу на те, чим ці теореми *відрізняються* одна від одної.

К: У цих теоремах *умова і висновок міняються ролями*: умова першої теореми є висновком другої, а умова другої є висновком першої.

У: Правильно. Такі теореми називають взаємно *оберненими*.

Ф: Подамо і це у вигляді схеми (рис. 16):

Властивість рівнобедреного трикутника

Якщо		… то
дві сторони трикутника рівні…	→	два кути трикутника рівні.

Ознака рівнобедреного трикутника

Якщо		… то
два кути трикутника рівні…	→	дві сторони трикутника рівні.

Рис. 16

К: А чи для кожної теореми є обернена до неї?

У: Відповідь на це питання ви знайдете, коли виконаєте наступне завдання.

4.26.* Сформулюйте твердження, обернене до теореми про вертикальні кути: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні». Чи справедливе таке твердження?

У: Цей приклад показує, що не всяке твердження, обернене до теореми, є істинним, тобто теж є теоремою. Нагадаю, що теоремою називають твердження, справедливість якого доводять за допомогою міркувань, а це означає, що теорема — твердження істинне.

Ф: А для інших теорем про властивості рівнобедреного трикутника є обернені теореми, які є ознаками рівнобедреного трикутника?

У: Це ми зараз і розглянемо.

Медіана збігається з висотою

4.27.* Доведіть:

якщо одна з медіан трикутника збігається з висотою, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник рівнобедрений (рис. 17).

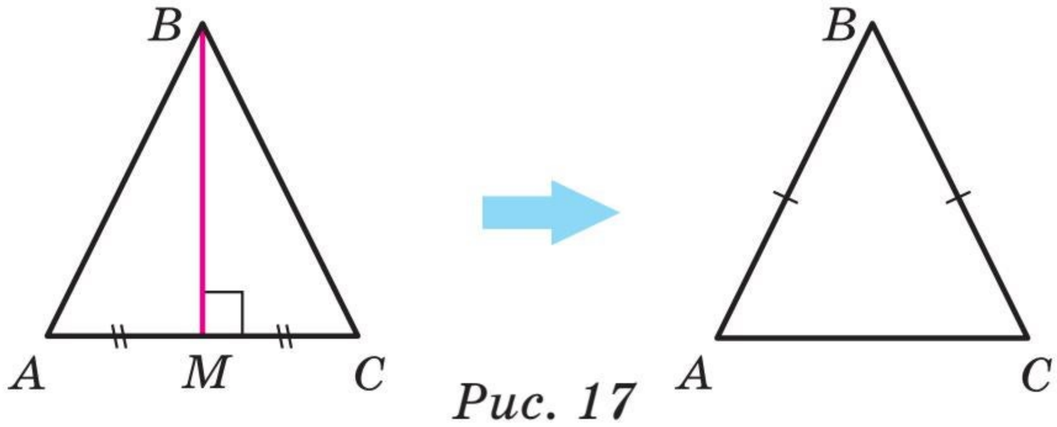


Рис. 17

Бісектриса збігається з висотою

4.28.* Доведіть:

якщо одна з бісектрис трикутника збігається з висотою, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник рівнобедрений (рис. 18).

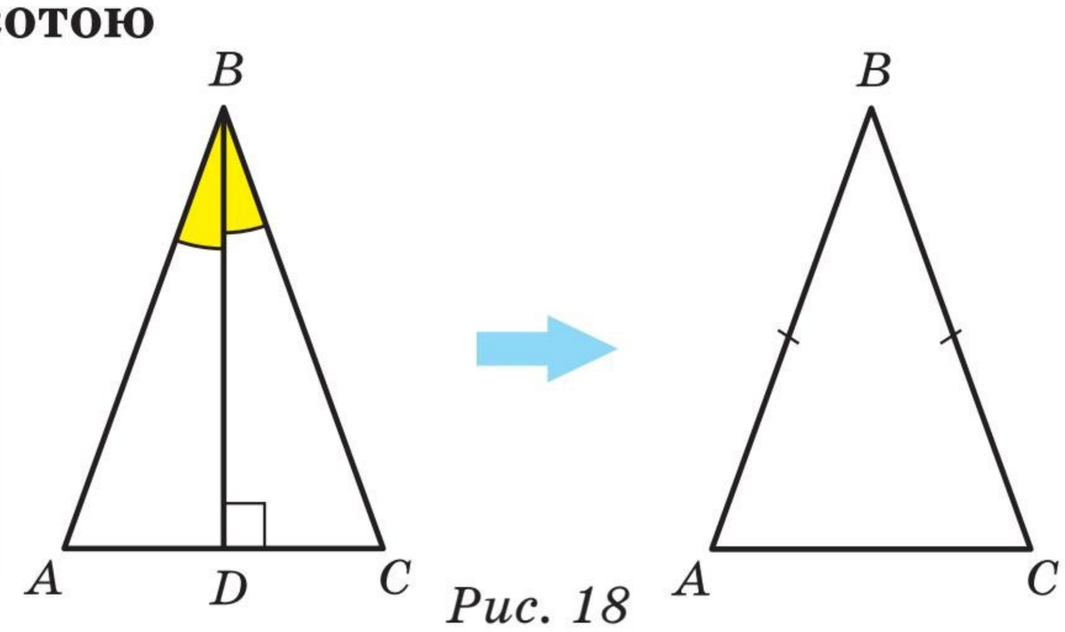


Рис. 18

Медіана збігається з бісектрисою

У: Доведіть:

якщо одна з медіан трикутника збігається з бісектрисою, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник рівнобедрений (рис. 19).

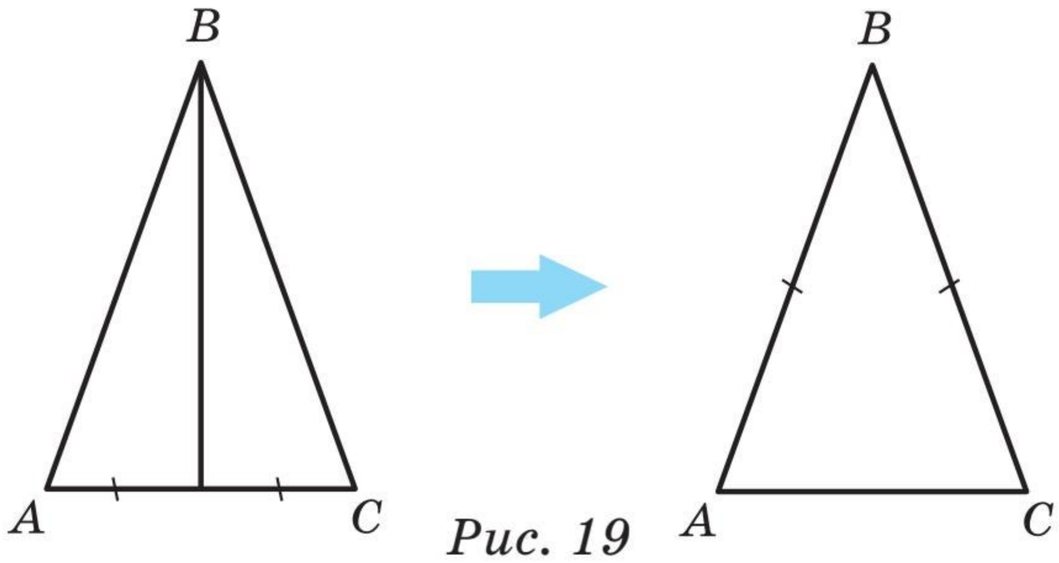


Рис. 19

Цю ознаку рівнобедреного трикутника довести важче.

Нехай медіана BM трикутника ABC збігається з його бісектрисою (рис. 20). Щоб довести, що $AB = BC$, достатньо довести рівність трикутників AMB і CMB.

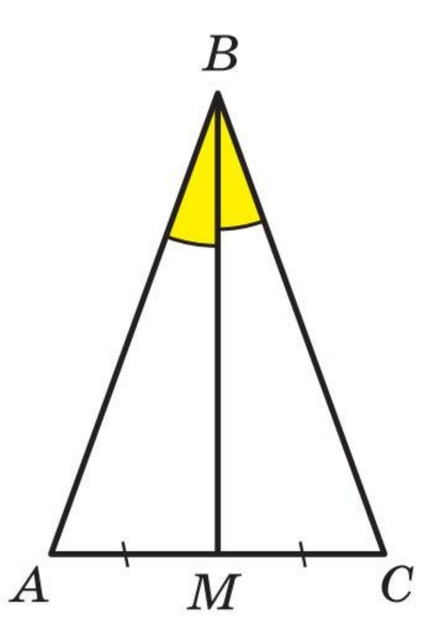


Рис. 20

У цьому нам допоможе «*подвоєння медіани*». Продовжимо медіану BM до точки N так, щоб виконувалась рівність $MN = BM$, і з'єднаємо відрізком точки A і N (рис. 21).

4.29.** Доведіть: трикутник AMN (ж — «жовтий») на рис. 21 дорівнює як трикутнику CMB (б — «блакитний»), так і трикутнику AMB (ч — «червоний»).

З рівностей $\Delta AMN = \Delta CMB$ (ж = б — «жовтий» трикутник дорівнює «блакитному») і (б = ч) $\Delta AMN = \Delta AMB$ випливає, що (ч = ж) $\Delta AMB = \Delta CMB$. А звідси випливає, що $AB = BC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

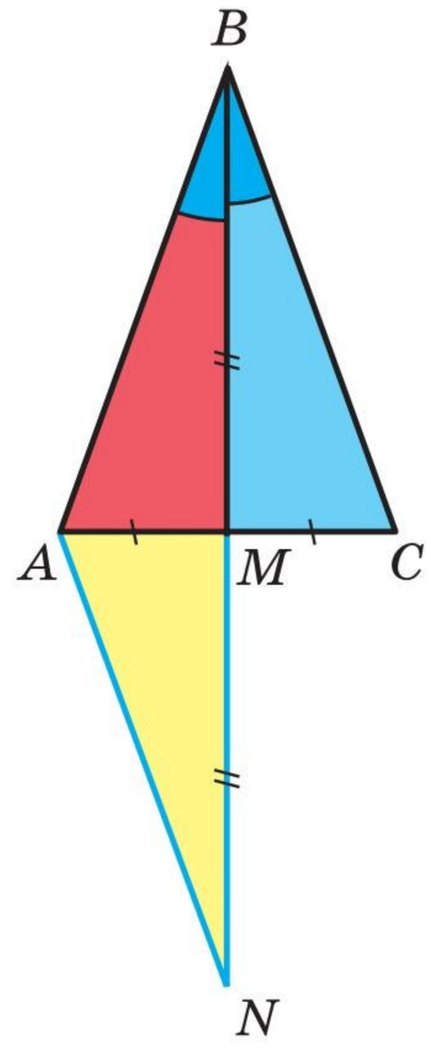


Рис. 21

4.30.** У трикутнику ABC висота BH ділить сторону AC навпіл. Бісектриса кута A дорівнює 15 см, а бісектриса кута B — 12 см. Яку інформацію звідси можна отримати?

Ознаки рівностороннього трикутника

4.31.* Доведіть: трикутник є рівностороннім, якщо виконана хоча б одна з таких умов:

а) всі кути трикутника рівні;

б) дві медіани трикутника збігаються з висотами, проведеними з тих самих вершин;

в) дві медіани трикутника збігаються з бісектрисами, проведеними з тих самих вершин;

г) дві бісектриси трикутника збігаються з висотами, проведеними з тих самих вершин.

4.29. Для доведення рівності $\Delta AMN = \Delta CMB$ (ж=б) скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. Використовуючи цю рівність трикутників і вже доведену ознаку рівнобедреного трикутника, можна довести, що трикутник NAB — рівнобедрений. Відтак, використовуючи властивості рівнобедреного трикутника, можна довести, що $\Delta AMN = \Delta AMB$ за другою ознакою рівності трикутників.

4.30. Скористайтеся властивостями й ознаками рівнобедреного трикутника.

4.31. Скористайтеся ознаками рівнобедреного трикутника.

4. «ПАСПОРТ» РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У: Подамо у вигляді схеми все, що ми дізналися про рівнобедрений трикутник (рис. 22).

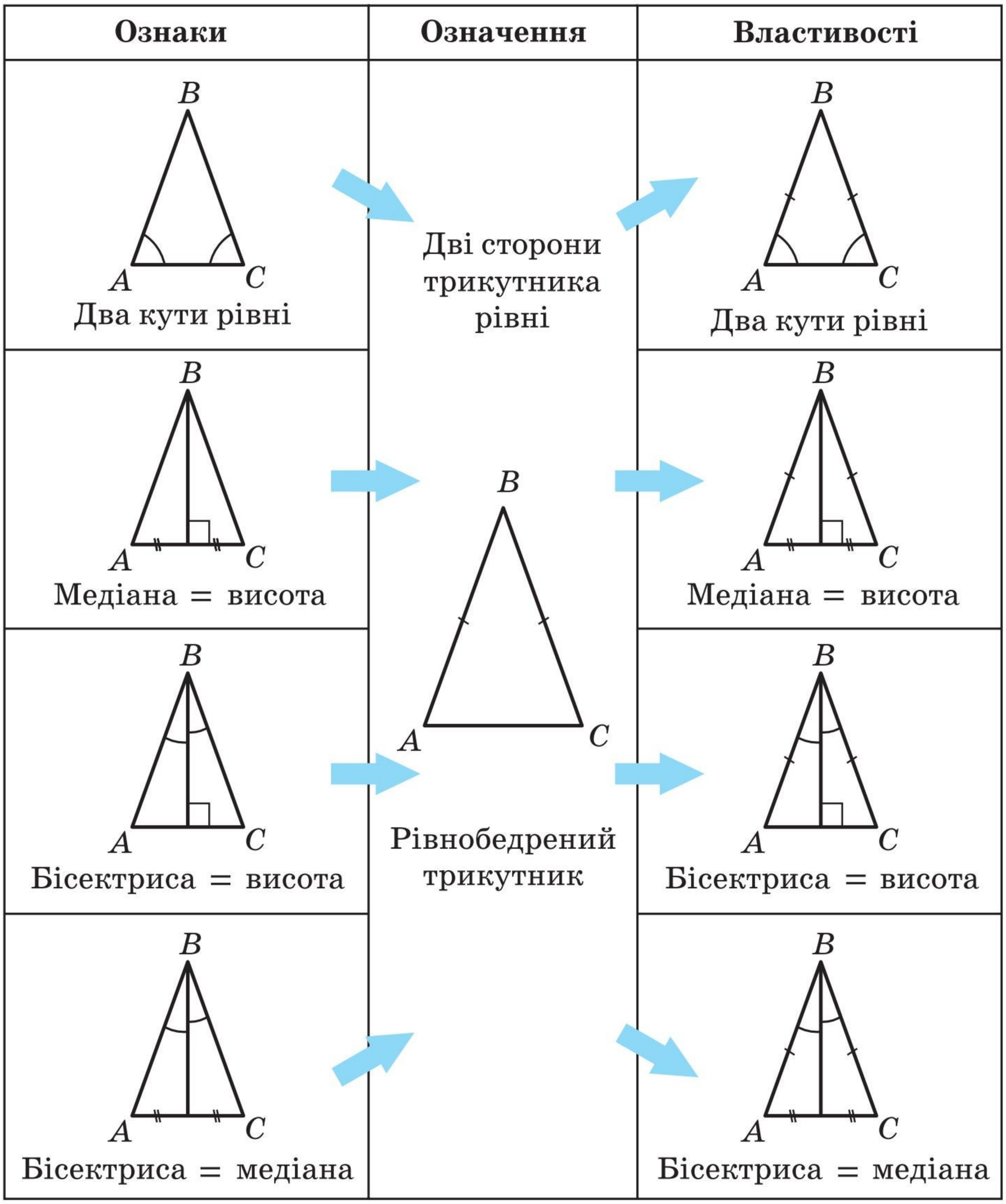


Рис. 22

К: Назвемо нашу схему «паспортом» рівнобедреного трикутника.

4.32.* У трикутнику KMN кути K і N рівні. Бісектриса якого кута трикутника перпендикулярна до протилежної сторони?

4.32. Скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника за двома кутами і властивістю бісектриси рівнобедреного трикутника, проведеної до основи.

4.33.** Чи є трикутник з вершинами в серединах сторін рівностороннього трикутника також рівностороннім? Обґрунтуйте свою відповідь.

4.34.** Про трикутник ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle A = \angle B$. Чи є цей трикутник рівностороннім? Обґрунтуйте.

4.35.** Бісектриса BD трикутника ABC перпендикулярна до сторони AC. Периметр трикутника дорівнює 42 см, а $AD = 5$ см. Чому дорівнюють усі сторони даного трикутника?

Подібне завдання

4.36.** Медіана BM трикутника ABC ділить кут ABC навпіл. Периметр трикутника ABM дорівнює 42 см, а висота BH — 7 см. Чому дорівнює периметр трикутника ABC?

4.37.* Яку інформацію можна отримати з рисунка 23?

Подібне завдання

4.38.* Яку інформацію можна отримати з рисунка 24?

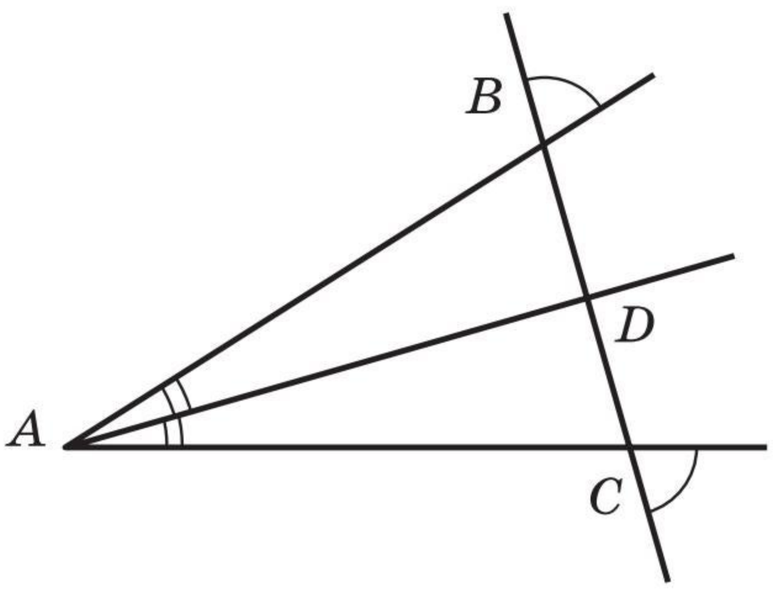


Рис. 23

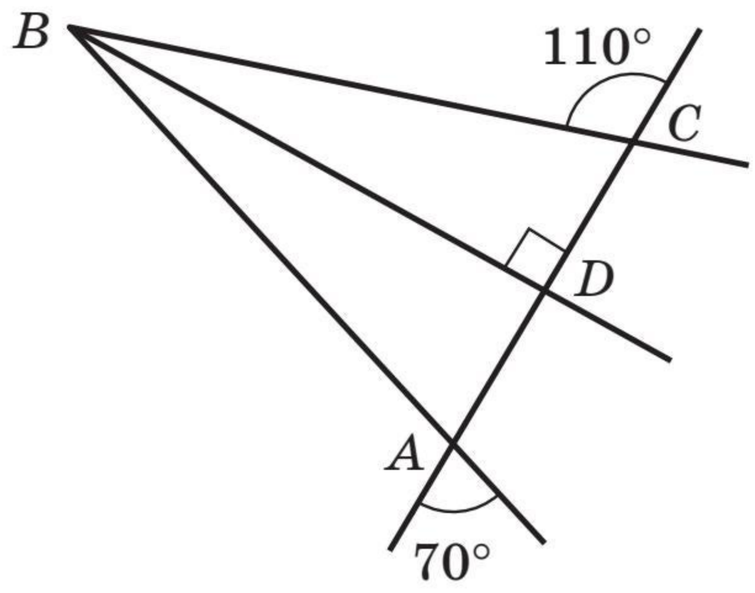


Рис. 24

4.39.** Про трикутник ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см. На стороні AB позначили точки K і M так, що $AK = KM = MB$. При цьому виявилось, що $CM \perp AB$ і $\angle AKC = 114°$.

а) Чому дорівнює периметр трикутника KBC?

б) Чому дорівнює кут ABC?

4.40.** Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і BC і позначте на цих сторонах відповідно точки M і N так, щоб виконувалась рівність $BM = BN$. Проведіть відрізки AN, CM і MN. Знайдіть усі пари утворених рівних трикутників і всі рівнобедрені трикутники.

4.33. Скористайтеся властивістю кутів рівностороннього трикутника, першою ознакою рівності трикутників і властивостями рівних трикутників.

4.34. Скористайтеся ознакою про рівність двох кутів рівнобедреного трикутника.

4.37. Знайдіть рівнобедрений трикутник і скористайтеся його властивостями.

Подібні завдання (4.41–4.44)

4.41.** Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і BC. Проведіть бісектриси AD і CF. Проведіть відрізок DF. Знайдіть усі пари рівних трикутників, а також рівнобедрені трикутники.

4.42.** Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і BC. Проведіть медіани AK і CL. Проведіть відрізок KL. Знайдіть усі пари рівних трикутників, а також рівнобедрені трикутники.

4.43.** У рівнобедреному трикутнику ABC з прямим кутом B і основою AC проведена медіана BM. Точка D — середина AB, $\angle AMD = 45°$. Знайдіть усі пари рівних трикутників, а також рівнобедрені й прямокутні трикутники.

4.44.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведена бісектриса BD. На сторонах BA і BC позначили точки M і N відповідно так, що $\angle MDA = \angle NDC$, і провели відрізки DN, DM і MN. Знайдіть усі пари рівних трикутників, а також рівнобедрені та прямокутні трикутники.

4.45.*** Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до теореми «якщо трикутник рівнобедрений, то його можна поділити на два рівні трикутники».

5. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У: Ось ми і добрались, нарешті, до третьої ознаки рівності трикутників. Доведемо:

якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Нехай для трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC (рис. 25) виконуються рівності:

$A_1B_1 = AB$; $B_1C_1 = BC$; $A_1C_1 = AC$.

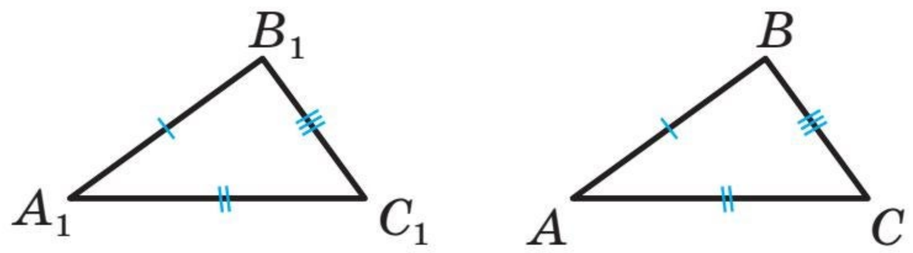


Рис. 25

У цьому випадку довести рівність трикутників за допомогою «уявного накладання» — як ми це робили при доведенні першої і другої ознак рівності трикутників — ми не зможемо.

4.45. Обернена теорема: «Якщо трикутник можна поділити на два рівні трикутники, то він рівнобедрений». При доведенні цієї теореми скористайтеся властивостями рівних трикутників, а також тим, що вершини трикутника не лежать на одній прямій.

Ф: А що нам заважає накладати одна на одну відповідно рівні сторони?

У: Річ у тім, що цього разу в умові теореми не йдеться про рівність *кутів* трикутників. Тому не можна стверджувати, що при накладанні однієї пари рівних сторін трикутників інші пари їх рівних сторін будуть лежати на тих самих променях.

К: Мені здається, що все одно потрібно починати з накладання рівних сторін...

У: Ми так і зробимо, але цього разу накладемо відповідно рівні сторони AC і A_1C_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершини B і B_1 лежали по *різні* боки від прямої AC.

Ф: Тоді можливі три випадки, я їх зобразив на рис. 26, *а–в*.

У: Правильно. Як ви гадаєте, для якого випадку легше довести рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$?

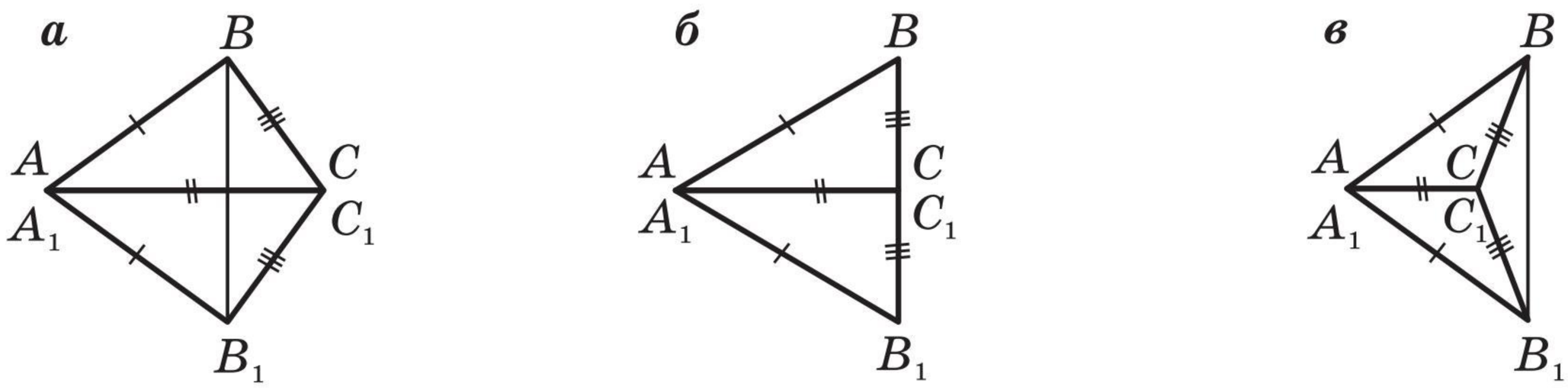


Рис. 26

Ф: Мені здається, для випадку, зображеного на рис. 26, *б*. Оскільки трикутник B_1AB рівнобедрений, то кути B і B_1 при його основі рівні. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними).

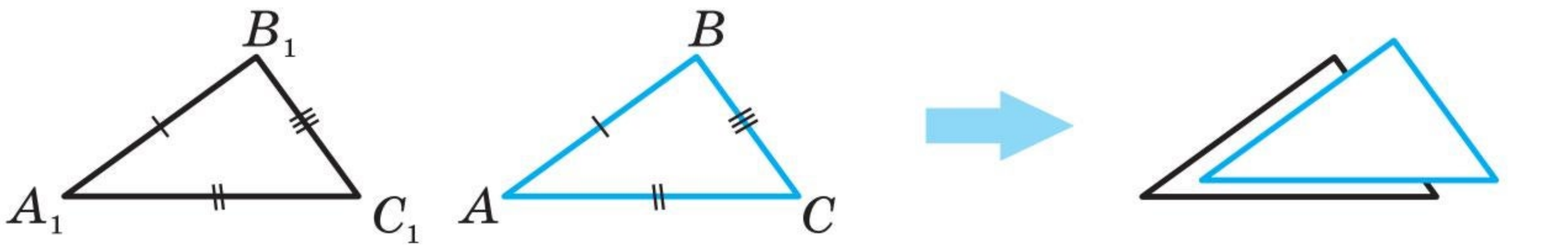
У: Погоджуюсь. Для випадків, зображених на рисунках 26, *а* і 26, *в*, можна скористатися такими самими міркуваннями.

4.46.* Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ на рисунках 26, *а* і 26, *в* рівні.

К: Подамо третю ознаку рівності трикутників також у вигляді схеми (рис. 27).

4.46. Скористайтеся тим, що трикутники B_1AB і B_1CB — рівнобедрені, а також тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Третя ознака рівності трикутників

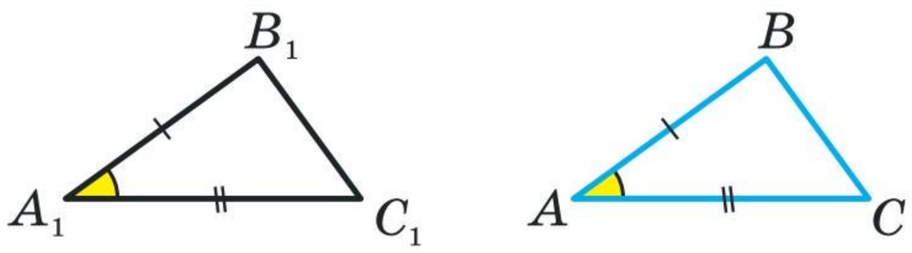


$A_1B_1 = AB;\ A_1C_1 = AC;\ B_1C_1 = BC$ $\quad \triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$

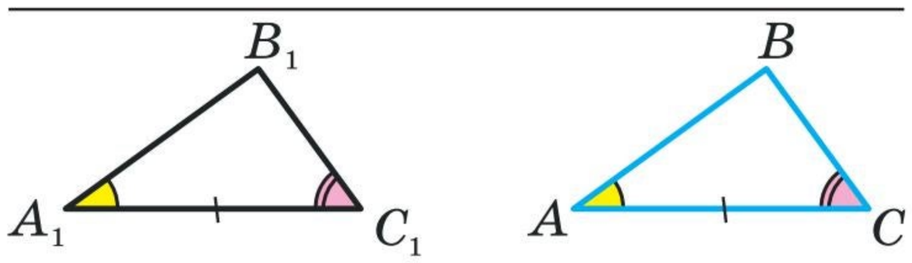
Рис. 27

Ф: Отже, тепер можна подати усі три ознаки рівності трикутників і додати властивості рівних трикутників (рис. 28).

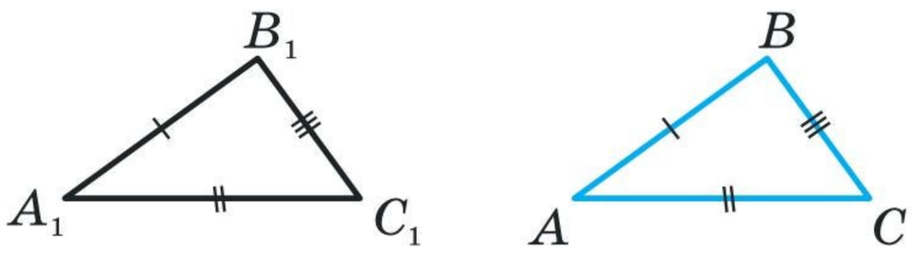
Три ознаки рівності трикутників



$A_1B_1 = AB;\ A_1C_1 = AC;\ \angle A_1 = \angle A$

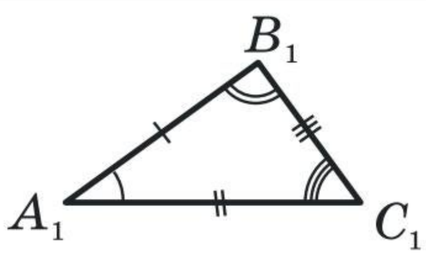


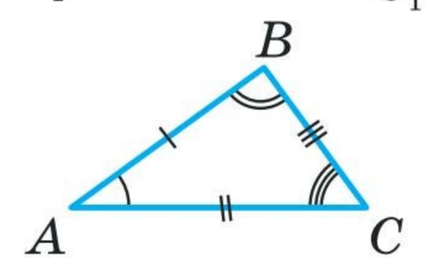
$A_1C_1 = AC;\ \angle A_1 = \angle A;\ \angle C_1 = \angle C$



$A_1B_1 = AB;\ A_1C_1 = AC;\ B_1C_1 = BC$

Властивості рівних трикутників





$A_1B_1 = AB;$
$A_1C_1 = AC;$
$B_1C_1 = BC;$
$\angle A_1 = \angle A;$
$\angle B_1 = \angle B;$
$\angle C_1 = \angle C$

Трикутники, які суміщаються накладанням, називають рівними



$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$

Рис. 28

4.47.** Яку інформацію можна отримати з рисунка 29?

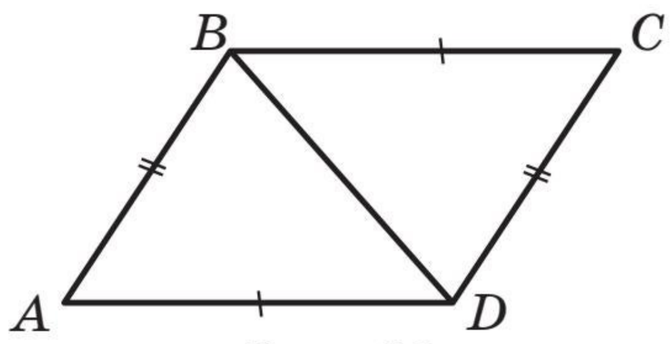


Рис. 29

4.47. Скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників і властивостями рівних трикутників.

4.48.* Сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого рівностороннього трикутника. Чи рівні ці трикутники?

4.49.** Чи є рівними рівнобедрені трикутники, якщо основа і периметр одного трикутника відповідно дорівнюють основі й периметру другого трикутника?

4.50.*** Чи є рівними рівнобедрені трикутники, якщо бічна сторона і медіана, проведена до цієї сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють бічній стороні й медіані, проведеній до цієї сторони, другого трикутника?

4.51.*** Чи є рівними трикутники, якщо дві сторони і медіана, що лежить між ними, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані, що лежить між ними, другого трикутника?

Трикутник — жорстка фігура

У: З'єднаємо кінці двох твердих стержнів так, щоб стержні могли вільно повертатися навколо точки їх з'єднання (таке з'єднання називають *шарнірним*). Чи матиме така конструкція стержнів *постійну* форму?

К: Ні, оскільки кут між стержнями можна довільно міняти (рис. 30).



Рис. 30

У: Правильно. А тепер — також шарнірно — з'єднаємо кінці *трьох* стержнів (рис. 31). Ми отримаємо *трикутник* зі стержнів. Чи можна змінити форму такої конструкції?

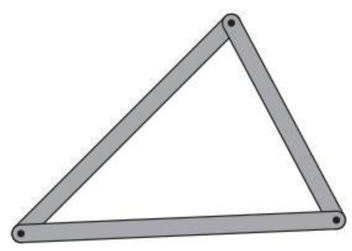


Рис. 31

4.48. Скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників.

4.49. Скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників.

4.50. Розгляньте трикутник, сторонами якого є бічна сторона даного рівнобедреного трикутника, медіана, проведена до бічної сторони, і половина бічної сторони. Далі скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників, щоб довести, що у двох даних трикутників рівні кути між бічними сторонами. Відтак скористайтеся першою ознакою рівності трикутників, щоб довести рівність даних трикутників.

4.51. Скористайтеся «подвоєнням медіани», а також третьою ознакою рівності трикутників.

Ф: Я думаю, що не можна. Якщо, звісно, не ламати стержні.

К: Чому?

Ф: Якщо можна було б змінити форму цієї конструкції, *не змінюючи довжини стержнів*, то вийшов би *інший трикутник з такими самими сторонами* — але це суперечить третій ознаці рівності трикутників.

У: Правильно. Тому кажуть, що *трикутник — жорстка фігура*. Жорсткість трикутника широко використовують у будівництві та інженерній справі.

6. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ І ЛІНІЙКИ

У: Сьогодні ми почнемо будувати геометричні фігури, використовуючи *лише* циркуль і лінійку без поділок. За їх допомогою ми зможемо, наприклад, розділити відрізок *навпіл*, а також побудувати перпендикуляр до відрізка.

К: Без лінійки з поділками і без косинця?

У: Без!

Серединний перпендикуляр до відрізка

У: «Чарівною паличкою» наших побудов буде той чудовий факт, що бісектриса, висота і медіана, проведені до основи рівнобедреного трикутника, *збігаються* (рис. 32).

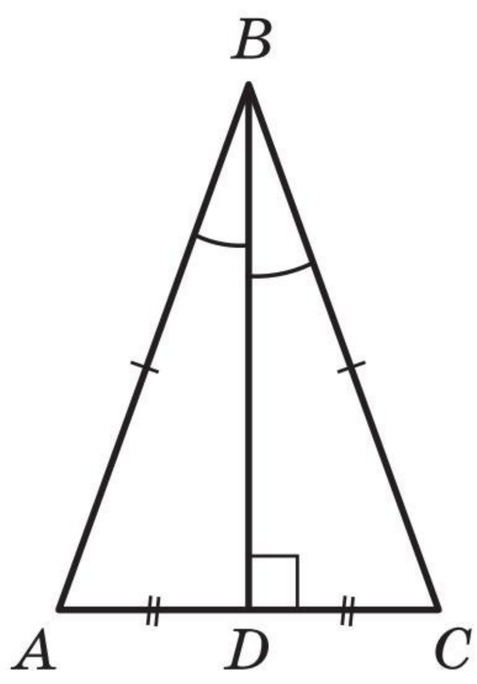


Рис. 32

К: А як можна використовувати цей чудовий факт?

У: Якщо ми побудуємо *будь-який* з цих трьох відрізків (медіану, висоту чи бісектрису), то тим самим ми *водночас побудуємо і два інші відрізки*.

Ф: Це і правда чудово!

У: Для наших побудов буде корисним нове поняття.

Пряму, що перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину, називають *серединним перпендикуляром* до цього відрізка.

На рисунку 33 зображений серединний перпендикуляр d до відрізка AC.

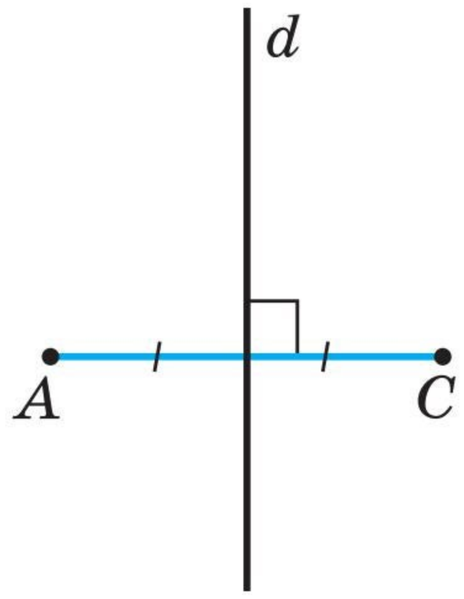


Рис. 33

4.52.* Доведіть: бісектриса, висота і медіана рівнобедреного трикутника, проведені до його основи, лежать на серединному перпендикулярі до основи трикутника.

У: Ось дві *взаємно обернені* теореми про серединний перпендикуляр.

4.53.* Доведіть:

якщо точка лежить на серединному перпендикулярі до відрізка, то вона рівновіддалена від його кінців, тобто розташована на рівних відстанях від них (рис. 34).

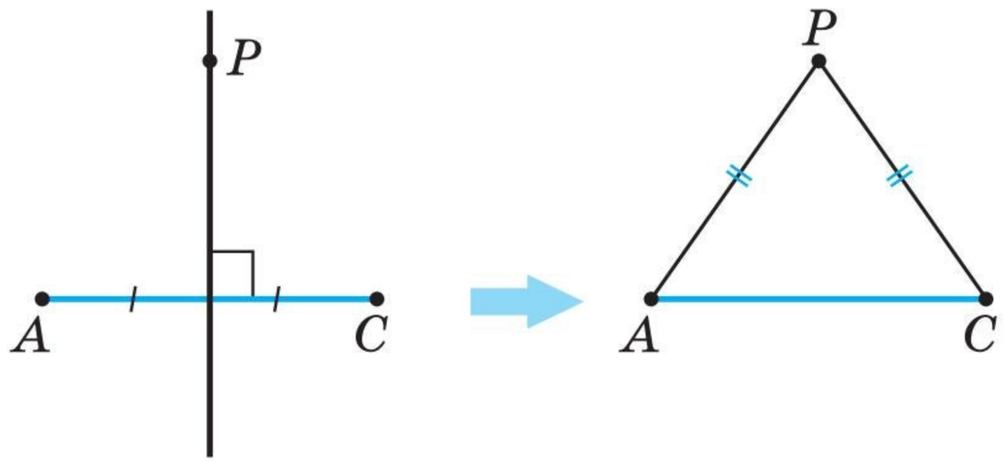


Рис. 34

4.54.* Доведіть:

якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка (розташована на рівних відстанях від них), то вона лежить на серединному перпендикулярі до цього відрізка (рис. 35).

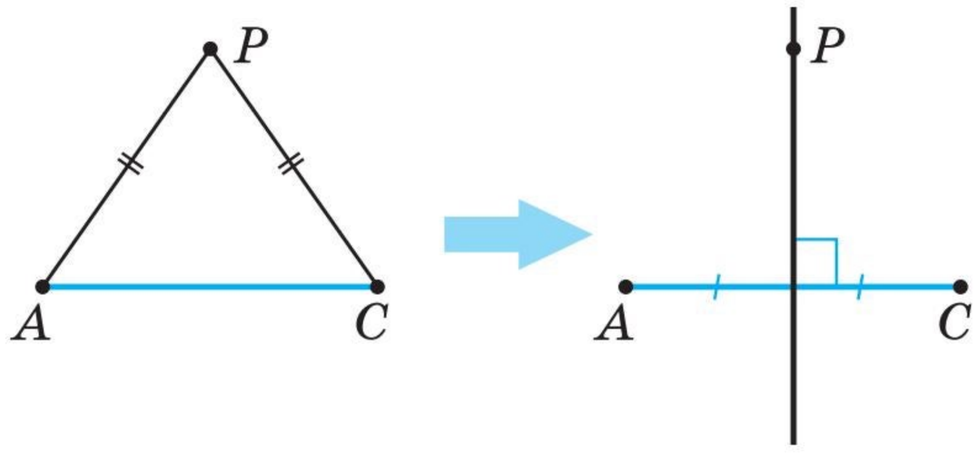


Рис. 35

Як побудувати серединний перпендикуляр до даного відрізка?

К: А як *побудувати* серединний перпендикуляр до відрізка?

У: Нехай нам потрібно побудувати серединний перпендикуляр до відрізка AB (рис. 36).



Рис. 36

4.52. Скористайтеся тим, що медіана проходить через середину основи, висота перпендикулярна до основи, а бісектриса збігається з медіаною і висотою.

4.53. Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників або однією з ознак рівнобедреного трикутника.

4.54. Скористайтеся тим, що медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є також його висотою.

Почнемо з того, що проведемо циркулем дуги кіл радіуса AB з центрами в точках A і B (рис. 37). Точки перетину цих кіл позначимо C і D...

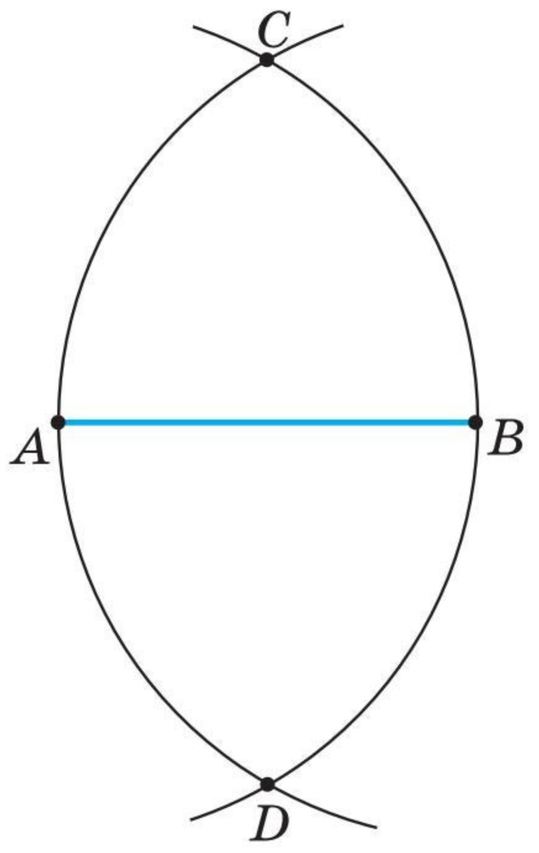


Рис. 37

Ф: Мені здається, що серединний перпендикуляр до відрізка AB — це пряма CD!

К: Це можна довести! Проведемо пряму CD і відрізки AC, BC, AD, BD (рис. 38). Ці відрізки мають *однакову довжину*, що дорівнює AB.

4.55.* Доведіть: пряма CD на рисунку 38 — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

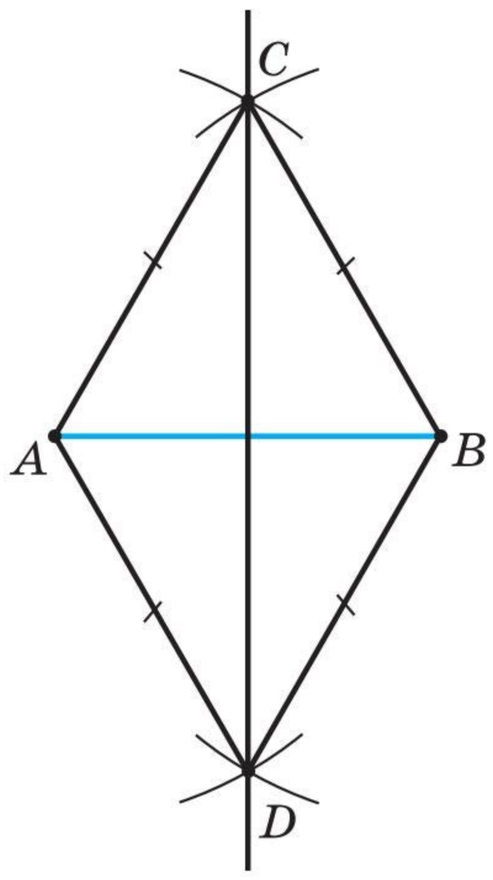


Рис. 38

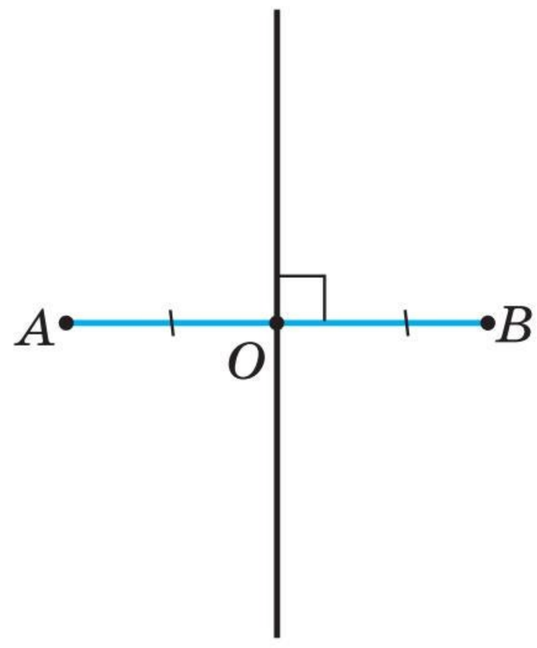


Рис. 39

К: Побудувавши серединний перпендикуляр до відрізка, ми тим самим знайшли і його середину. Позначимо її O (рис. 39).

Як побудувати пряму, що перпендикулярна до даної прямої і проходить через задану точку?

У: Розглянемо спочатку випадок, коли задана точка A не лежить на даній прямій m. На рисунках 40, *а–в* подані етапи цієї побудови.

4.56.* Опишіть зображені на рисунках 40, *а–в* етапи побудови прямої, яка перпендикулярна до прямої m і проходить через

4.55. Скористайтеся тим, що трикутники DAC і DBC рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а також тим, що бісектриса рівнобедреного трикутника (наприклад, трикутника ACB) збігається з медіаною і висотою.

4.56. Див. побудову серединного перпендикуляра.

точку A, що не лежить на цій прямій. Обґрунтуйте запропоновану побудову.

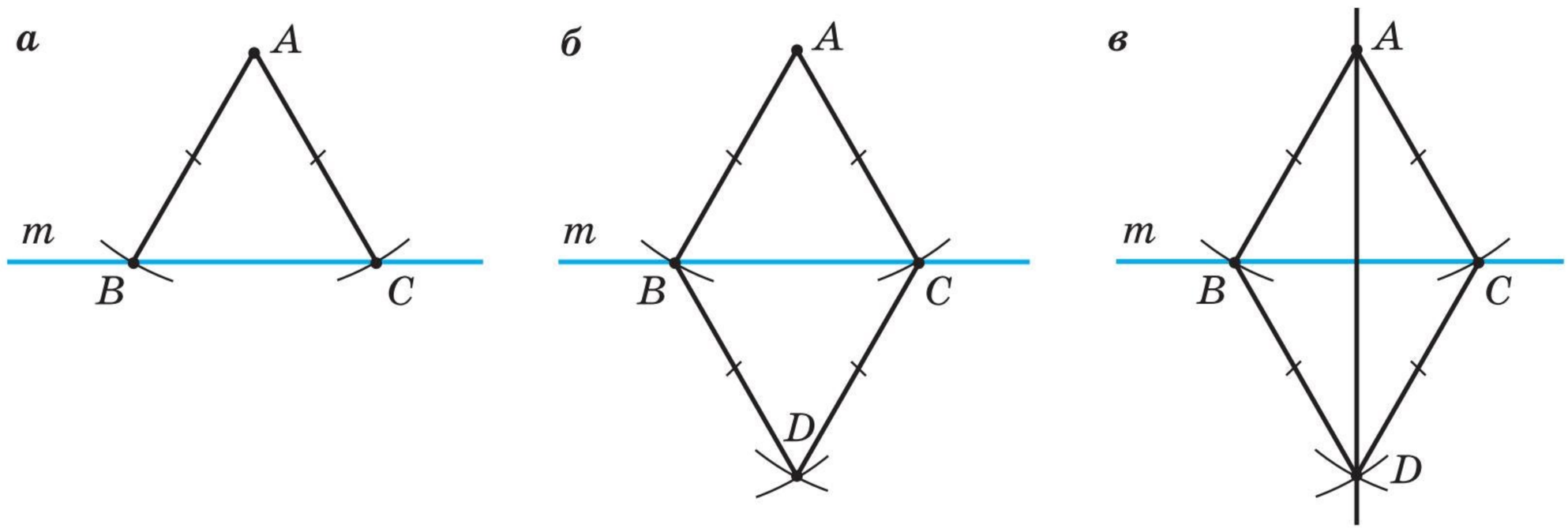


Рис. 40

У: Побудуємо тепер пряму, що перпендикулярна до прямої m і проходить через точку A на цій прямій.

4.57.* Опишіть зображені на рисунках 41, *а–в* етапи побудови прямої, що перпендикулярна до прямої m і проходить через точку A на цій прямій. Обґрунтуйте запропоновану побудову.

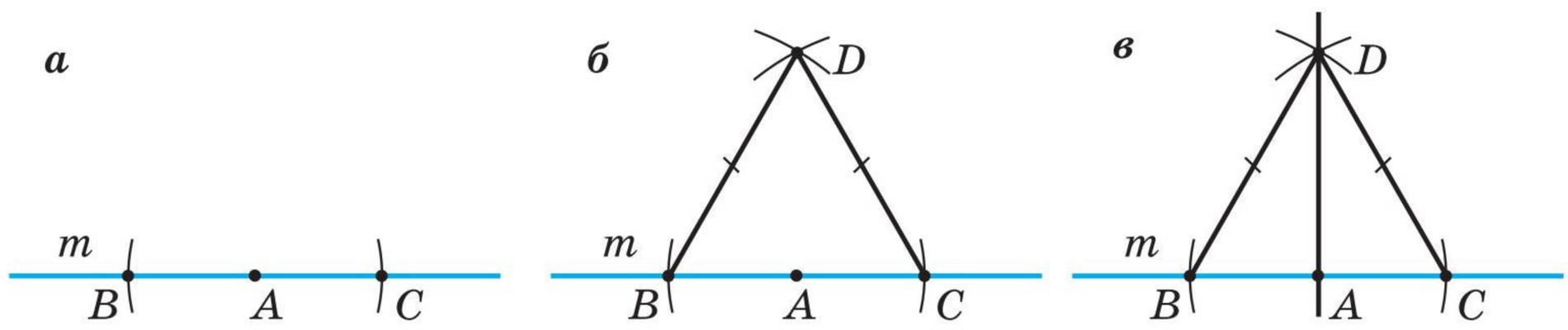


Рис. 41

Як побудувати бісектрису кута?

4.58.* Опишіть етапи побудови бісектриси кута A (рис. 42, *а–в*). Обґрунтуйте запропоновану побудову.

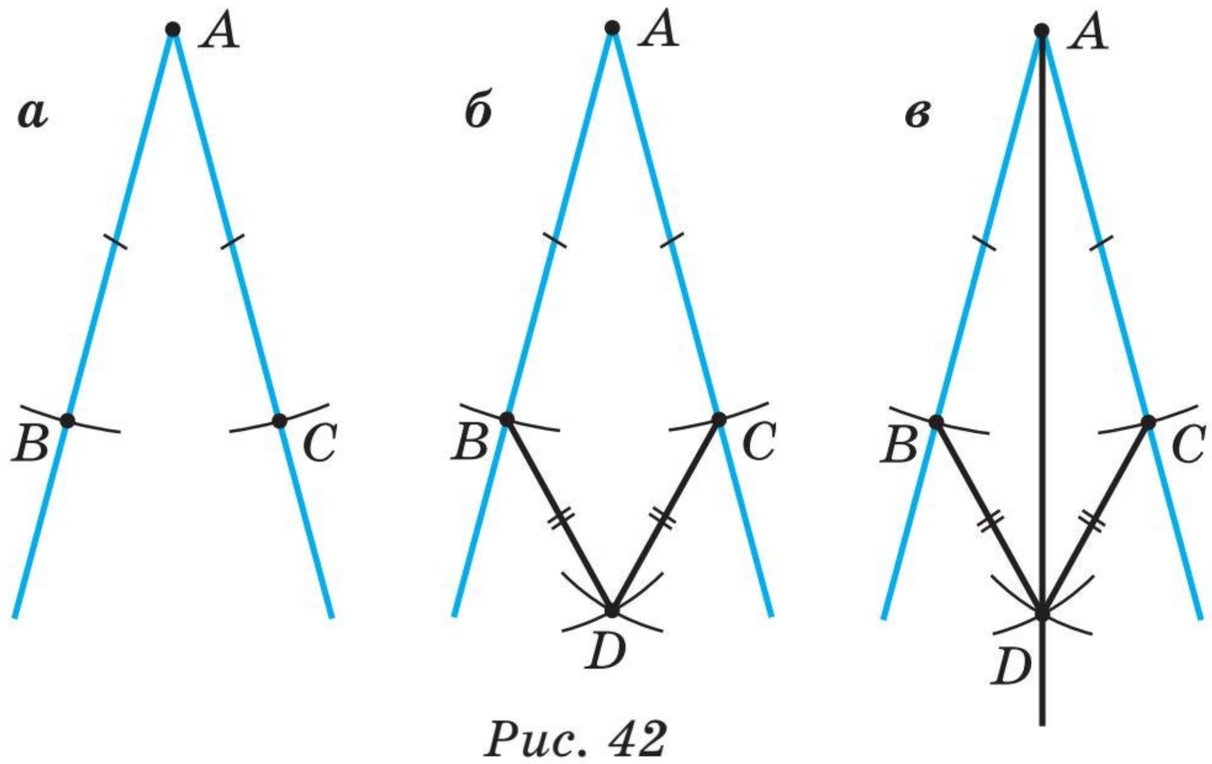


Рис. 42

4.57. Спочатку накресліть дві дуги кола *однакового* радіуса з центром у точці A і позначте точки B і C перетину цих дуг з прямою m (рис. 41, *а*). Далі — аналогічно побудові серединного перпендикуляра до відрізка BC.

4.58. Скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників.

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЬ?

Використовуючи рис. 43, сформулюйте основні твердження глави. Кожний / кожна може сформулювати кілька тверджень (по одному під час кожного піднесення руки). Перемоги (і заохочувального бала на розсуд учителя / учительки) удостоюють того / ту учня / учениці, після якого / якої ніхто не зміг нічого додати протягом, наприклад, пів хвилини.

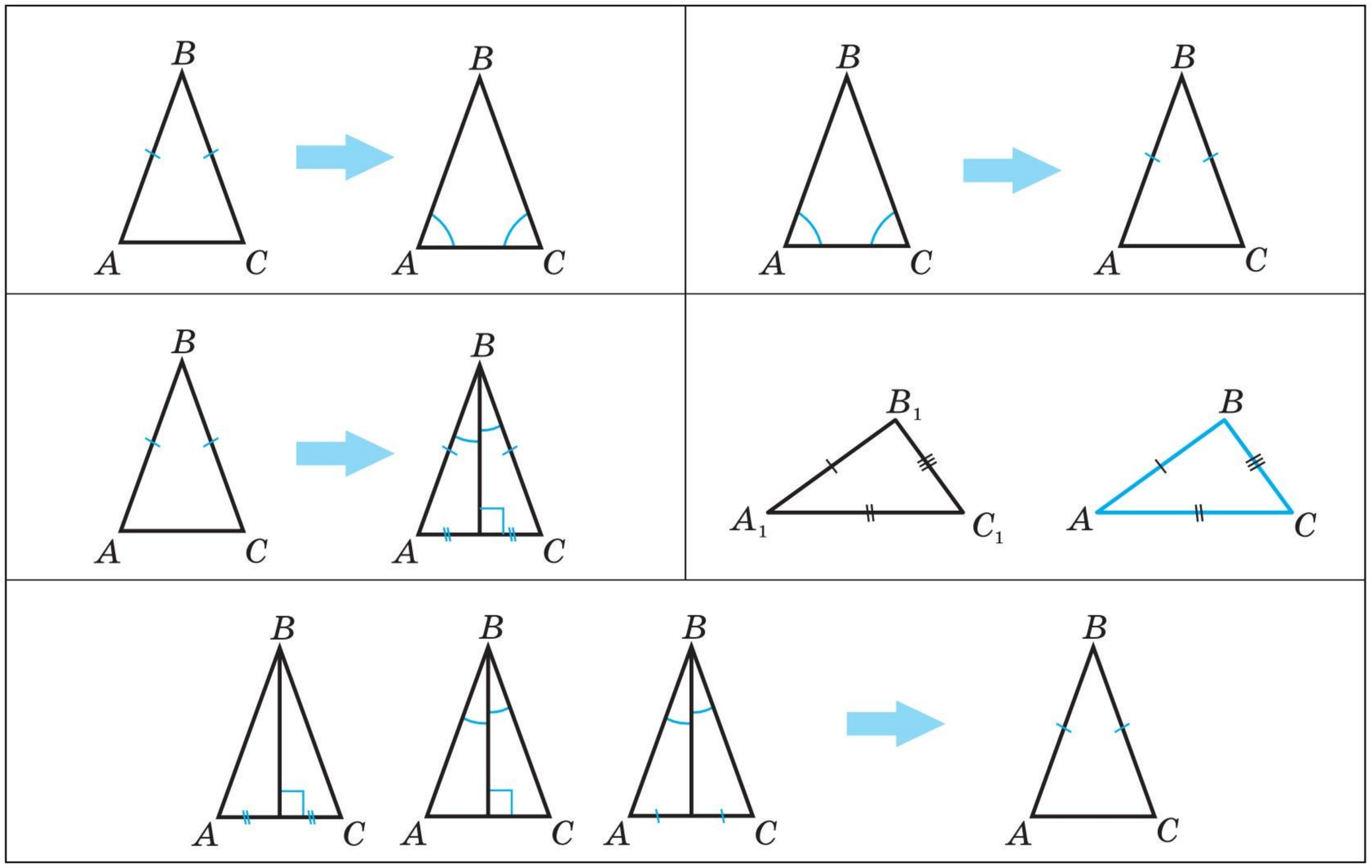


Рис. 43

7. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

У: Які запитання можна поставити за рис. 44?

К: Чи є рівними трикутники (ж) ACF і BCF на рис. 44?

4.59.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є трикутники ACB і AFB на рис. 44 рівнобедреними?

4.60.* Дайте відповідь на запитання Федора.

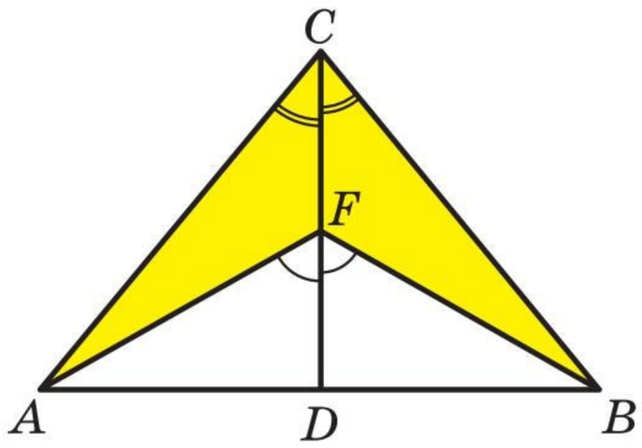


Рис. 44

4.59. Скористайтеся тим, що кути, суміжні з рівними кутами, так само рівні, а також другою ознакою рівності трикутників.

4.60. Скористайтеся рівністю трикутників ACF і BCF (ж).

К: Чи є рівними відрізки AD і BD на рисунку 44?

4.61.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є на рисунку 44 перпендикулярні відрізки?

4.62.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Які ще дві пари рівних трикутників є на рисунку 44?

4.63.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

У: Пропоную такий рисунок. У трикутнику ABC бісектриса AD і медіана BM перпендикулярні (рис. 45). Крім того, $DM \perp AC$. Які запитання тут можна поставити?

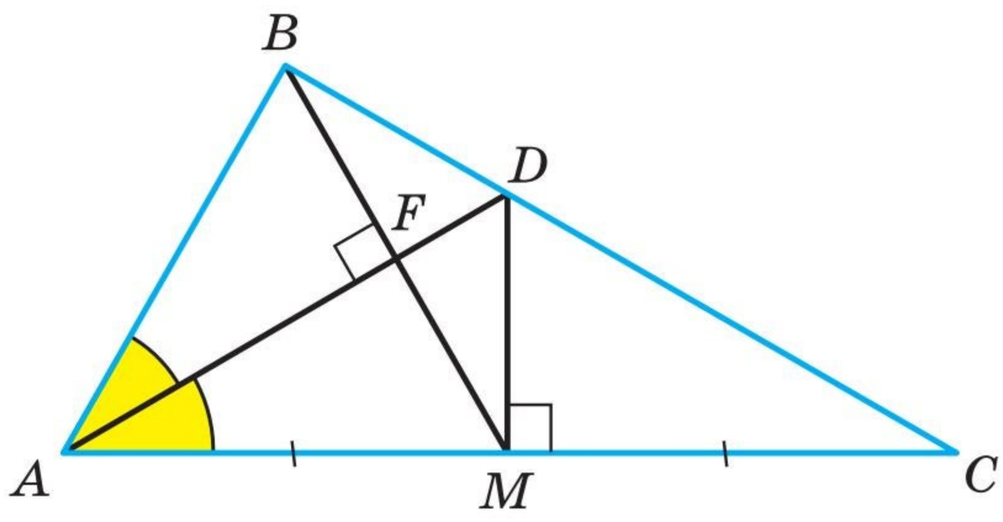


Рис. 45

Ф: Чи є на рисунку 45 рівнобедрені трикутники?

К: І якщо є, то скільки їх?

4.64.** Дайте відповідь на запитання Федора і Катерини.

К: Позначимо на рисунку рівні сторони і кути (рис. 46).

Ф: Чому дорівнює кожний з кутів BDA, ADM і MDC на рисунку 46?

4.65.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнює кут ABC на рисунку 46?

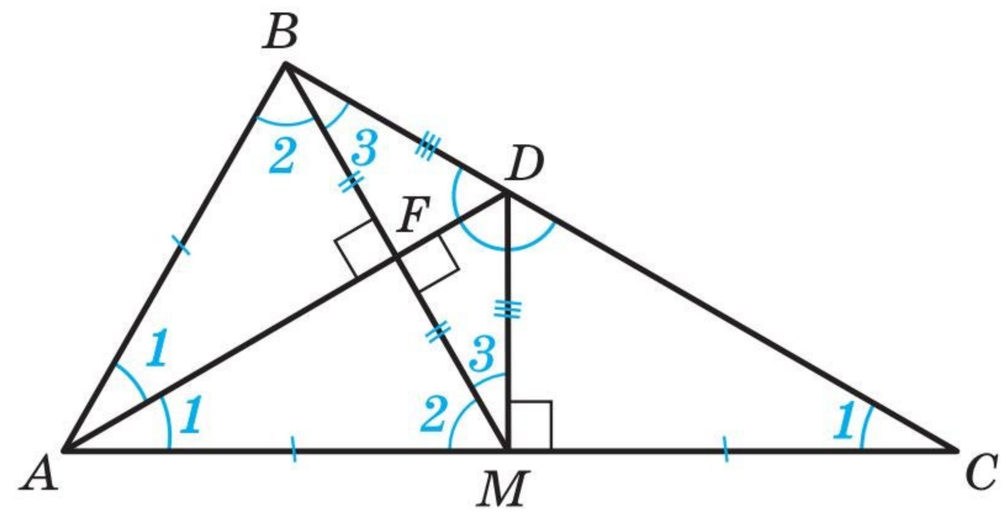


Рис. 46

4.66.*** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Секрет розв'язання важких задач

К: Якщо б до рисунка 45 відразу поставили запитання: чому дорівнює кут ABC, то дати відповідь на нього було б непросто...

4.61. Скористайтеся тим, що бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є також медіаною.

4.62. Скористайтеся тим, що бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є також висотою.

4.63. Розгляньте трикутники ACD і BCD, а також трикутники AFD і BFD.

4.64. Скористайтеся ознаками рівнобедреного трикутника. Три пари.

4.66. Доведіть спочатку, що трикутники ABD і AMD рівні, і скористайтесь тим, що $DM \perp AC$.

У: Я підводжу вас до важливого висновку: щоб розв'язати важку задачу, потрібно не намагатися знайти пряму відповідь на поставлене в задачі запитання, а почати *досліджувати* умову задачі. Знаходячи знайомі фігури за їх ознаками і використовуючи їх властивості, ми *розширюємо область відомого*, отримуючи все більше і більше інформації, прихованої в умові. І в розширену область відомого досить скоро потрапить і відповідь на поставлене запитання: це ж просто один з елементів інформації, прихованої в умові.

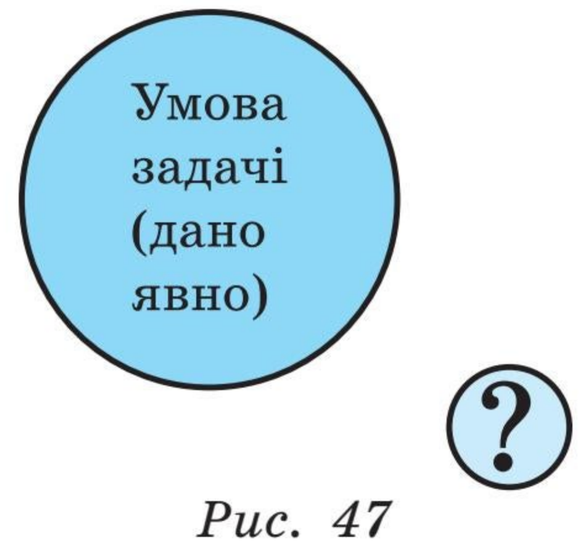


Рис. 47

Ф: Якщо задача важка, то запитання задачі зазвичай далеко «в стороні» від умови (рис. 47)...

К: І тому не видно зв'язку між умовою задачі та запитанням!

У: Справді, якщо задача важка, то в першому шарі отриманої інформації відповіді на запитання задачі зазвичай немає (рис. 48).

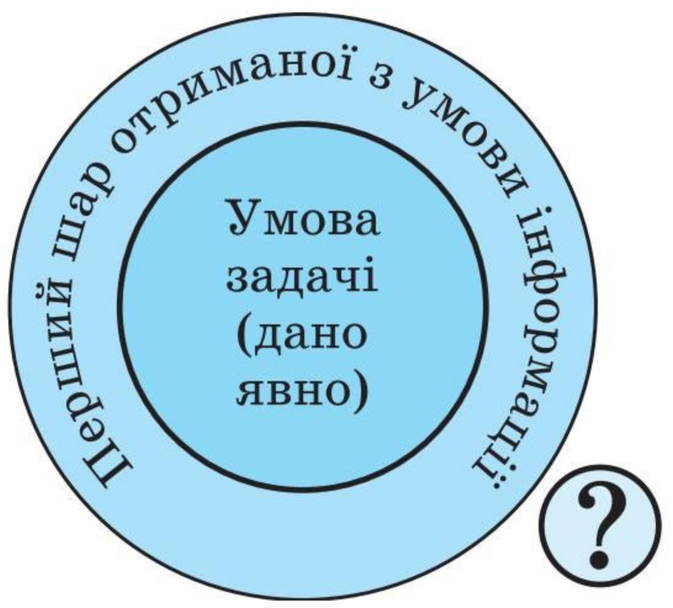


Рис. 48

Але якщо *продовжувати розширяти область відомого*, використовуючи в тому числі й *вже отриману* інформацію, то врешті-решт відповідь на запитання задачі потрапить в область відомого. Розкрию вам секрет: відповіді на запитання більшості важких шкільних задач містяться у другому або максимум третьому шарі отриманої інформації (рис. 49).



Рис. 49

Як народжуються задачі?

У: Використовуючи отриману з умови приховану інформацію, можна *ставити нові* запитання до *тієї самої* умови (рис. 50). Так народжуються *нові* задачі.

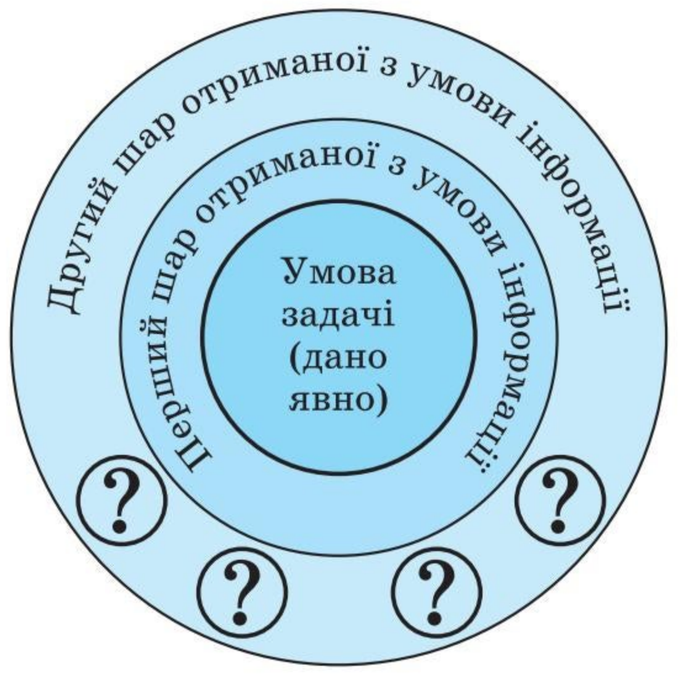


Рис. 50

Ф: Спробуймо!

У: Добре. Які запитання можна поставити за рис. 51?

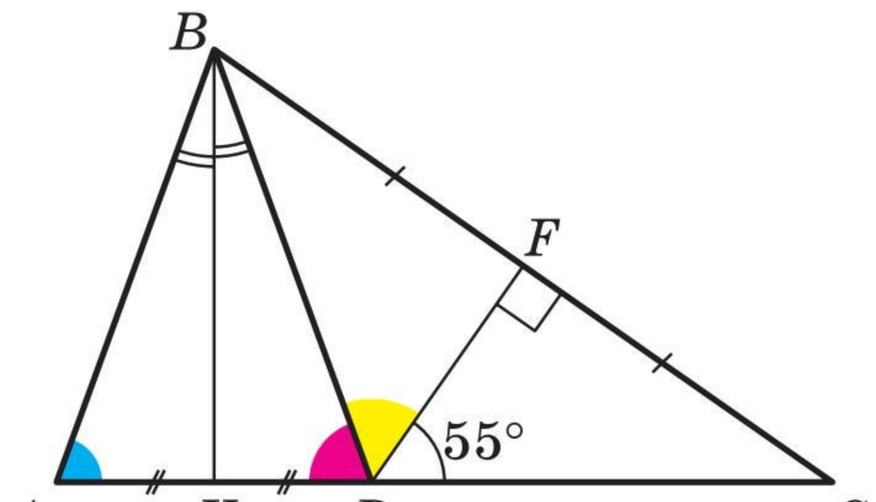


Рис. 51

К: Чому дорівнює кут BDF (ж) на рис. 51?

4.67.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнює кут BDA (ч) на рис. 51?

4.68.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнює кут BAD (б) на рис. 51?

4.69.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

4.70.** Яку інформацію можна отримати за кожним з рисунків 52, *а*–*в*?

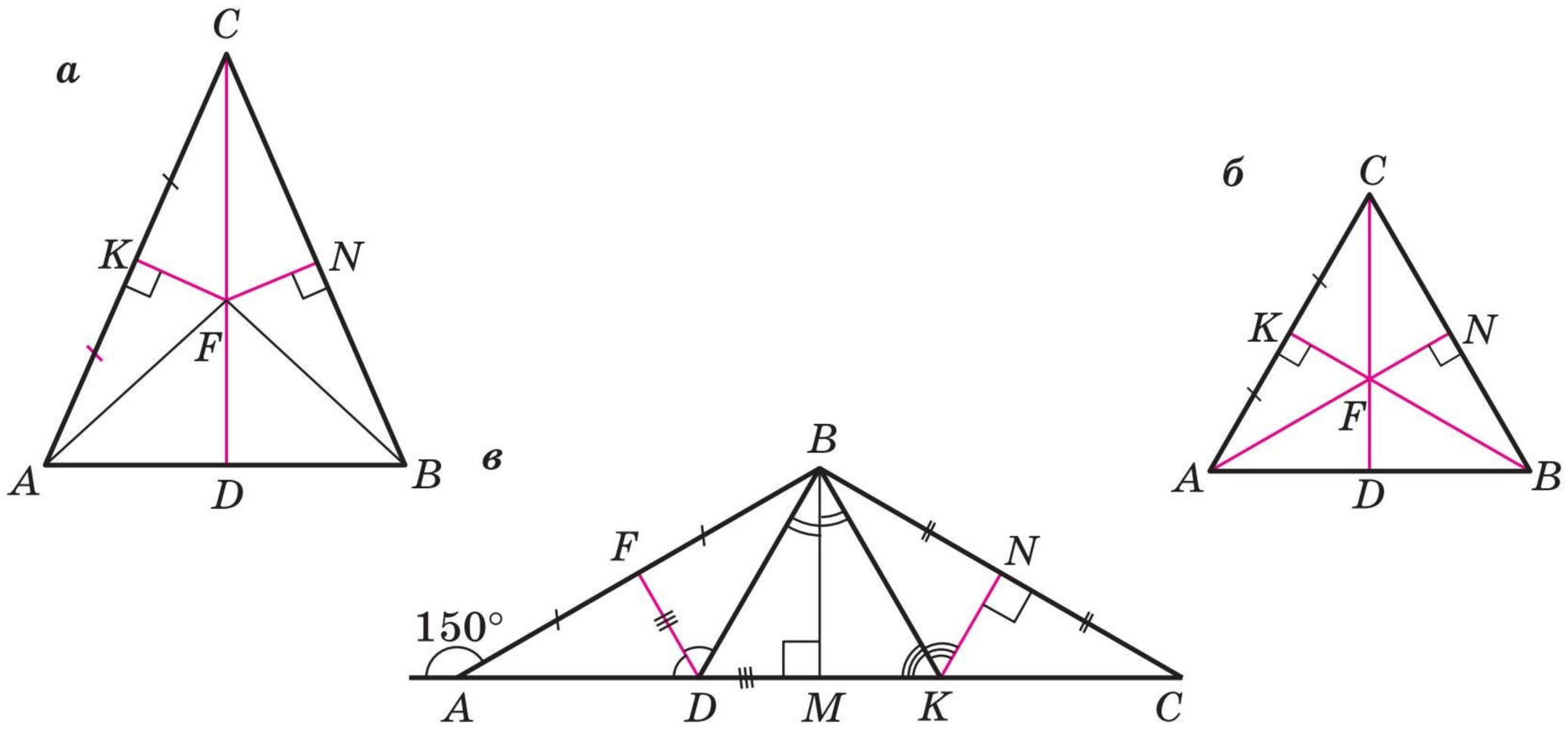


Рис. 52

4.67. Скористайтеся тим, що DF — одночасно висота і медіана трикутника BDC.

4.68. Скористайтеся тим, що кут ADC — розгорнутий.

4.69. Скористайтеся тим, що BK — бісектриса і медіана трикутника ABD, а потім властивістю рівнобедреного трикутника.

4.70. Зверніть увагу: на рис. 52, *б* точки A, F і N належать прямій.

4.71.** Яку інформацію можна отримати за кожним з рисунків 53, *а–б*?

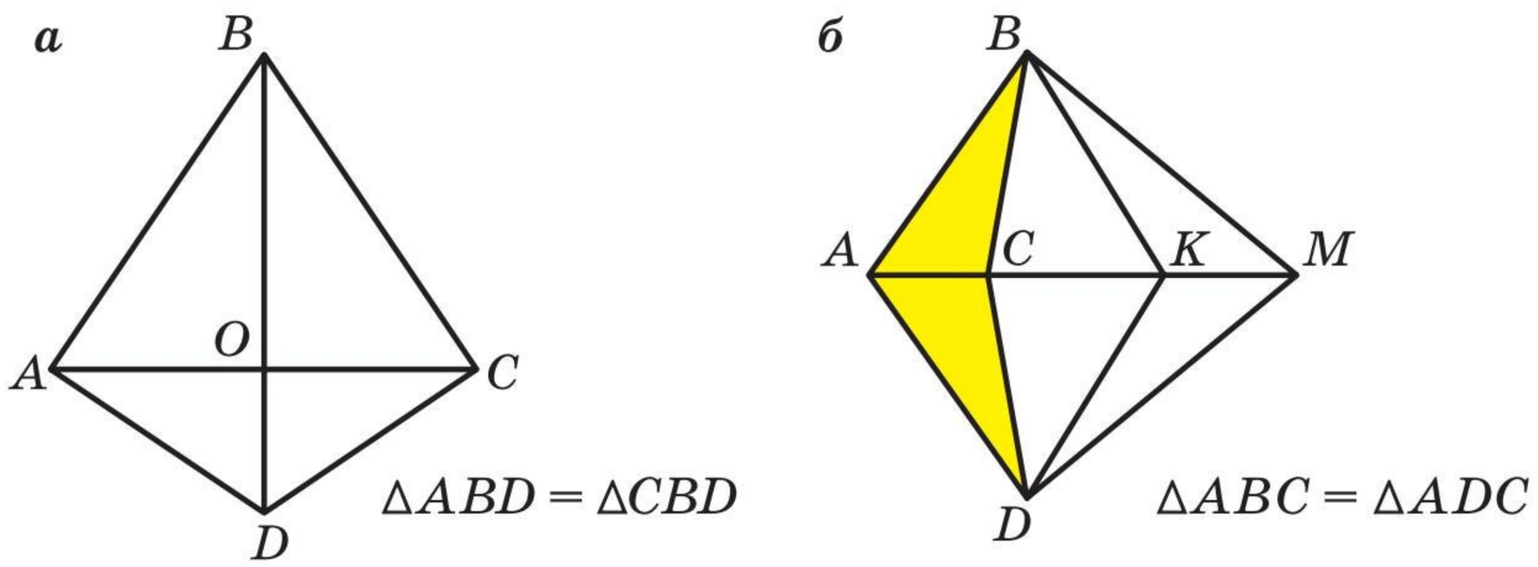


Рис. 53

4.72.** Яку інформацію можна отримати за кожним з рисунків 54, *а–б*?

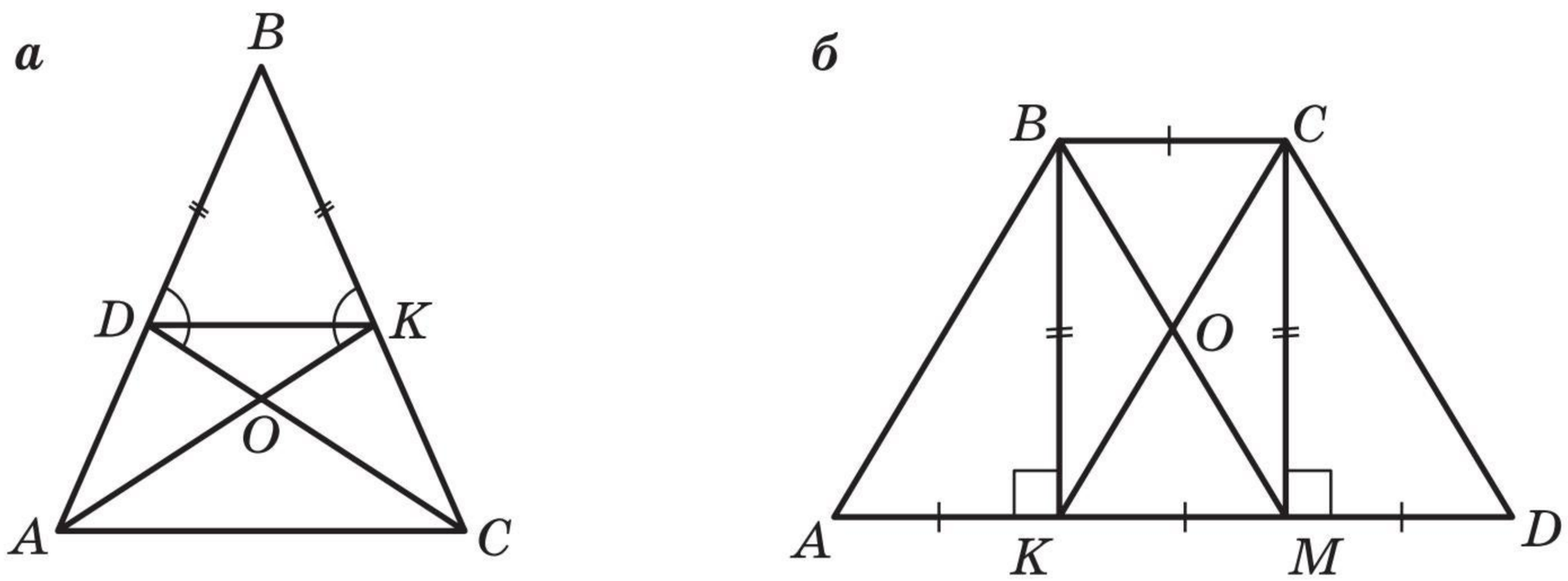


Рис. 54

4.73.** Накресліть три різносторонні трикутники, у першому з яких усі кути гострі, у другому — один кут прямий, а в третьому — один кут тупий. За допомогою циркуля і лінійки без поділок побудуйте:

а) усі бісектриси кожного трикутника;

б) серединні перпендикуляри до всіх сторін кожного трикутника;

в) усі медіани кожного трикутника;

г) усі висоти кожного трикутника.

4.73. Перевірка правильності побудови: усі бісектриси мають перетнутися в одній точці, усі медіани мають перетнутися в одній точці, усі висоти чи їх продовження мають перетнутися в одній точці, усі серединні перпендикуляри мають перетнутися в одній точці.

4.74.*** Накресліть довільний кут A і позначте довільну точку B всередині цього кута (рис. 55). За допомогою циркуля і лінійки без поділок побудуйте пряму, яка проходить через точку B і перетинає сторони кута A під однаковими кутами.

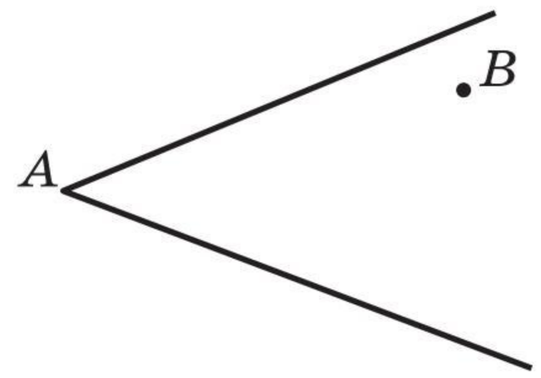


Рис. 55

4.75.*** На рисунках 56, *а–б* схематично зображені невеликі селища A і B, а також пряма залізниця. Перенесіть рисунки в зошит і знайдіть для кожного випадку графічно: де потрібно побудувати залізничну станцію C так, щоб вона містилась на рівних відстанях від селищ A і B?

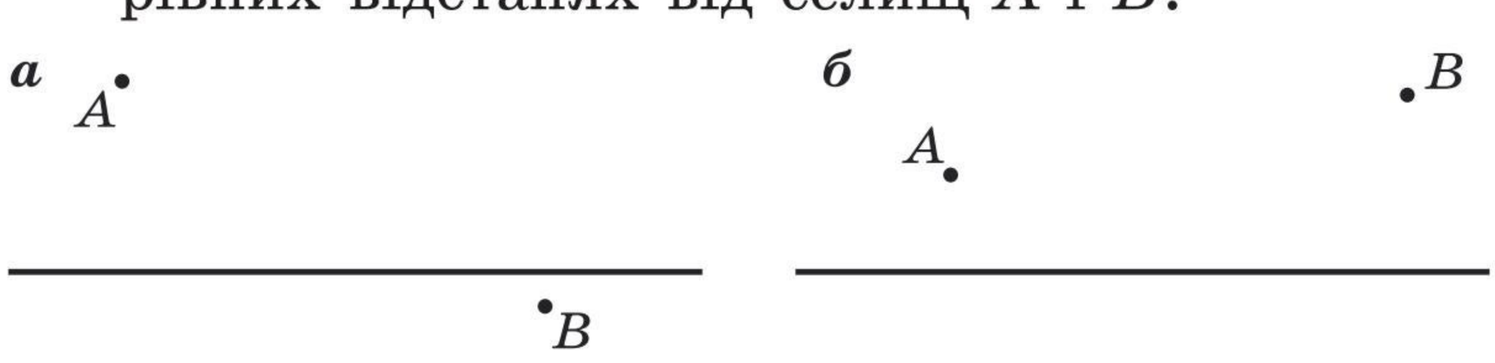


Рис. 56

4.76.*** На рис. 57 схематично зображені три міста B, C, D. Перенесіть рисунки в зошит і визначте графічно: де потрібно побудувати аеропорт A так, щоб він був розташований на рівних відстанях від всіх трьох міст?

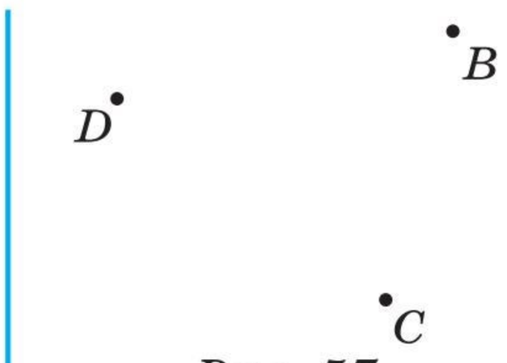


Рис. 57

ТРИРІВНЕВІ ДОМАШНІ АБО САМОСТІЙНІ ЗАВДАННЯ

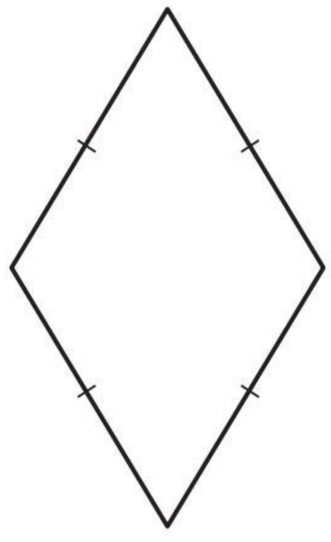
(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C.
Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

Властивості рівнобедреного трикутника

4.77.*** Позначте кінці відрізків на рисунку.

а) Проведіть ще два відрізки так, щоб утворились 4 рівнобедрених трикутники. Позначте точку перетину відрізків.

б) Запишіть позначення всіх утворених рівнобедрених трикутників із зазначенням основи або бічних сторін кожного трикутника.



4.74. Побудуйте спочатку бісектрису AD кута A, а відтак проведіть перпендикуляр до AD, що проходить через точку B. Доведіть, що він і буде шуканою прямою.

4.75. Скористайтеся тим, що всі точки, рівновіддалені від двох заданих точок, лежать на серединному перпендикулярі до відрізка з кінцями в цих точках.

4.76. Скористайтеся тим, що всі точки, рівновіддалені від двох заданих точок, лежать на серединному перпендикулярі до відрізка з кінцями в цих точках.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.
г) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
д) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

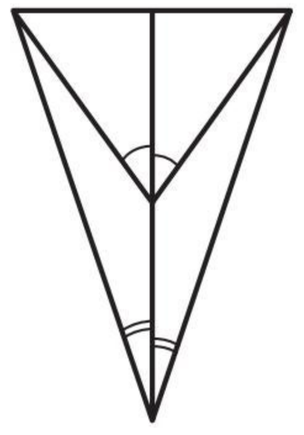
4.78.** Накресліть відрізки однакової довжини, які перетинаються і діляться точкою перетину навпіл. Позначте кінці відрізків і точку їх перетину.
а) Доповніть цей рисунок так, щоб на ньому утворились 4 рівнобедрених трикутники.
б) Запишіть позначення всіх утворених рівнобедрених трикутників із зазначенням бічних сторін.
в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.
г) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

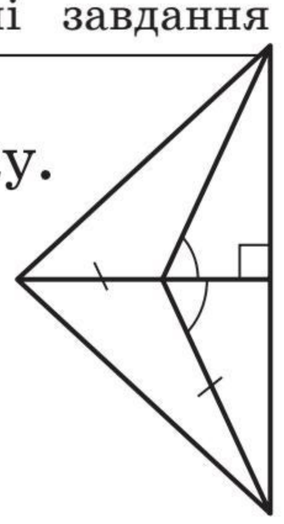
4.79.** Накресліть рівнобедрений трикутник і проведіть у ньому бісектрису кута, протилежного основі. Позначте вершини трикутника та бісектрису.
а) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.
б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
в) Позначте прямі кути.
г) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівність трикутників.

4.80.* Накресліть рівнобедрений трикутник і позначте його вершини.
а) Позначте рівні кути. Запишіть рівність кутів.
б) Розділіть накреслений трикутник на два рівні трикутники. Запишіть рівність цих трикутників.
в) Позначте прямі кути. Запишіть перпендикулярність відрізків.

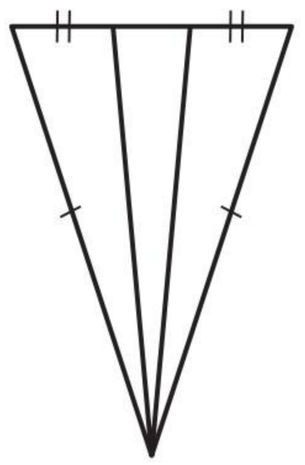
4.81.** Запишіть два довільні додатні числа a і b, таких, що $a > b$. Прийміть, що бічна сторона даного рівнобедреного трикутника дорівнює a см, а бісектриса, проведена до основи, ділить його на дві частини, довжина однієї з яких дорівнює b см.
а) Знайдіть довжину основи даного трикутника.
б) Знайдіть периметр даного трикутника.

4.82. Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.

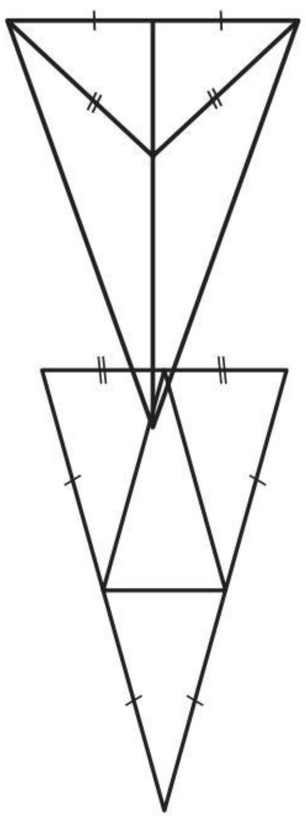




4.88.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи.



4.83.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.



4.84.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.

4.85.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи.

Ознаки рівнобедреного трикутника

4.86.** Накресліть трикутник, у якому два кути рівні. Позначте рівні кути.
а) Проведіть бісектрису, перпендикулярну до сторони, до якої вона проведена. Позначте трикутник і бісектрису.
б) Позначте прямі кути.
в) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
г) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівність трикутників.

4.87.** Накресліть схематично трикутник і одну з його бісектрис, якщо відомо, що вона перпендикулярна стороні, до якої вона проведена. Позначте вершини трикутника та бісектрису.
а) Позначте прямі кути.
б) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.
в) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
г) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівність трикутників.

4.88.*** На аркуші в клітинку позначте 4 точки у вузлах клітинок так, щоб після з'єднання їх п'ятьма відрізками утворились 2 нерівні рівнобедрені трикутники зі спільною основою, яка лежить на лінії клітинок. Позначте зображені точки.

а) Позначте рівні відрізки.

б) Запишіть позначення рівнобедрених трикутників із зазначенням основи.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

4.89.** На аркуші в клітинку позначте 3 точки у вузлах клітинок так, щоб після з'єднання їх відрізками утворився рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого лежать на лініях клітинок. Позначте зображені точки.

а) Позначте рівні відрізки.

б) Запишіть позначення рівнобедреного трикутника із зазначенням основи.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

г) Позначте прямий кут.

4.90.*** На аркуші в клітинку позначте 4 точки у вузлах клітинок так, щоб після з'єднання їх п'ятьма відрізками утворились 2 рівнобедрені трикутники, основи яких не лежать на лініях клітинок. Позначте зображені точки.

а) Позначте рівні відрізки.

б) Запишіть позначення рівнобедрених трикутників із зазначенням основи.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

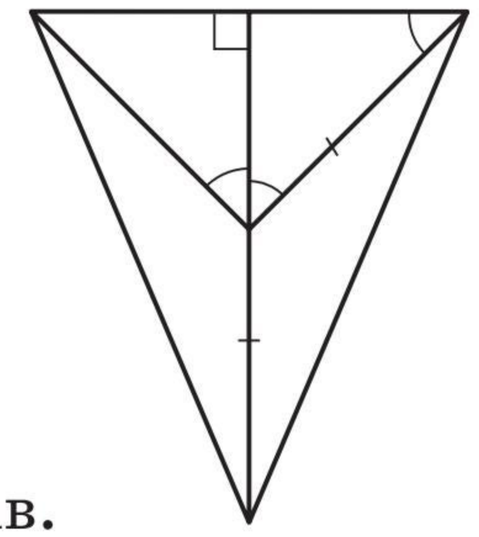
4.91.*** На аркуші в клітинку позначте 3 точки у вузлах клітинок так, щоб після з'єднання їх відрізками утворився рівнобедрений трикутник, основа якого не лежить на лінії клітинок, а середина основи збігається з одним із вузлів клітинок. З'єднайте точки відрізками.

а) Використовуючи фон із клітинок, проведіть бісектрису до основи трикутника. Позначте вершини трикутника і кінець бісектриси.

б) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

г) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівність трикутників.



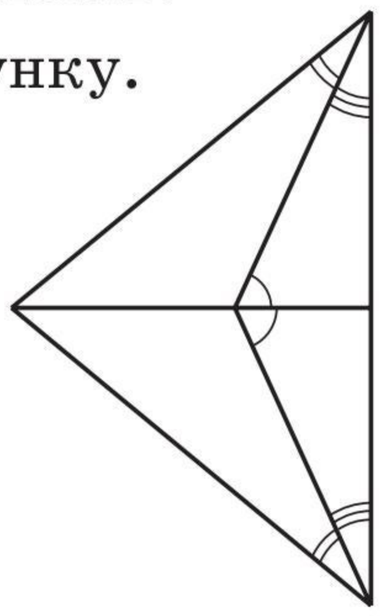
4.92.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Знайдіть рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням основи.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

г) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.



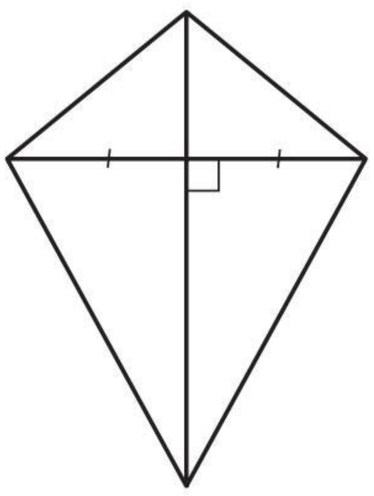
4.93.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Знайдіть рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

г) Позначте прямі кути. Запишіть перпендикулярність відрізків.



4.94.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

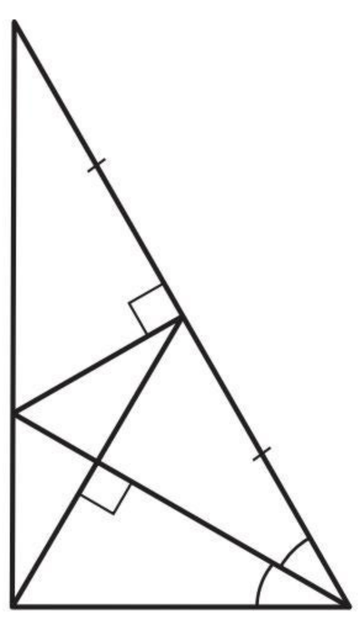
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням основи.

в) Позначте рівні кути. Запишіть рівності кутів.

4.95.** Накресліть рівнобедрений трикутник і проведіть у ньому медіани до бічних сторін. Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Знайдіть утворений рівнобедрений трикутник. Запишіть його позначення із зазначенням основи.

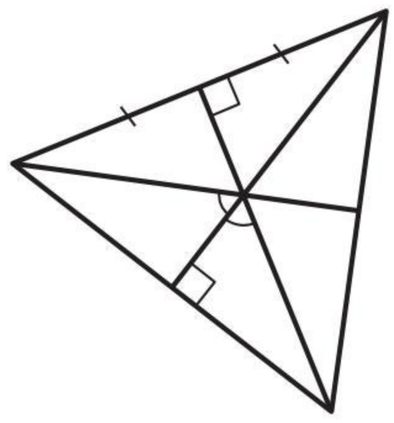


4.96.*** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.

б) Знайдіть рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.

4.97.*** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.



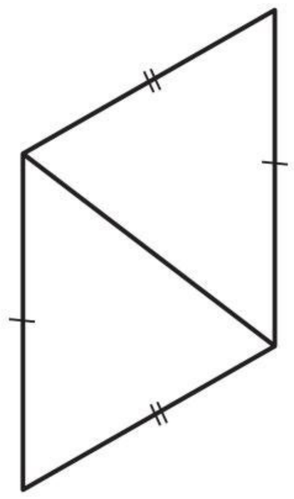
а) Знайдіть пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.

б) Знайдіть рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.

в) Знайдіть рівносторонній трикутник і запишіть його позначення.

Третя ознака рівності трикутників

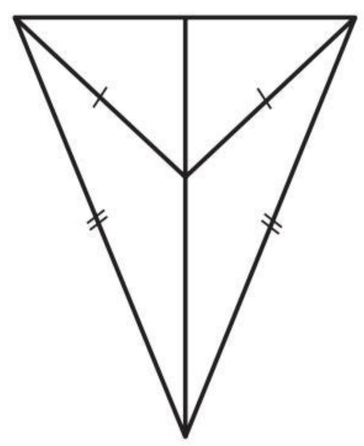
4.98.* Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.



а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте пари рівних кутів. Запишіть рівності кутів.

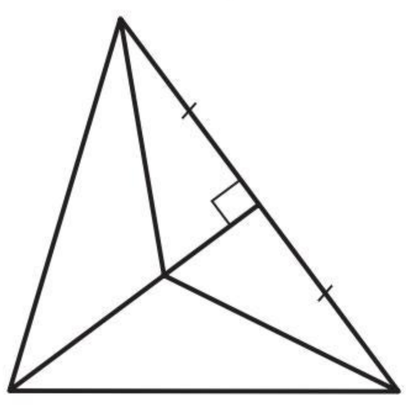
4.99.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.



а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте пари рівних кутів. Запишіть рівності кутів.

4.100.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.



а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте пари рівних кутів. Запишіть рівності кутів.

4.101.** Позначте на рисунку кінці всіх відрізків.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте пари рівних кутів. Запишіть рівності кутів.

ГЛАВА 5. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ



1. ГІПОТЕЗА ПРО СУМУ КУТІВ ТРИКУТНИКА

У: Зараз ми дізнаємося про трикутник дещо нове й важливе. Виріжте який-небудь трикутник із цупкого паперу.

К: *Будь-який*?

У: *Будь-який*, але вирізайте трикутник акуратно за лініями, проведеними під лінійку.

К і **Ф:** Ось наш трикутник (рис. 1).

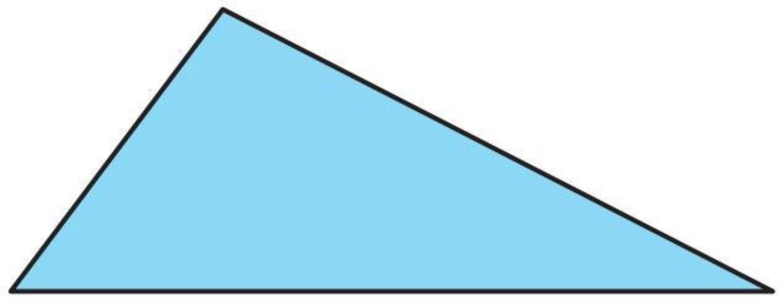


Рис. 1

У: Позначте тепер кути трикутника різними дужками й відріжте всі кути за дугами кіл.

К і **Ф:** Ось що в нас вийшло (рис. 2).

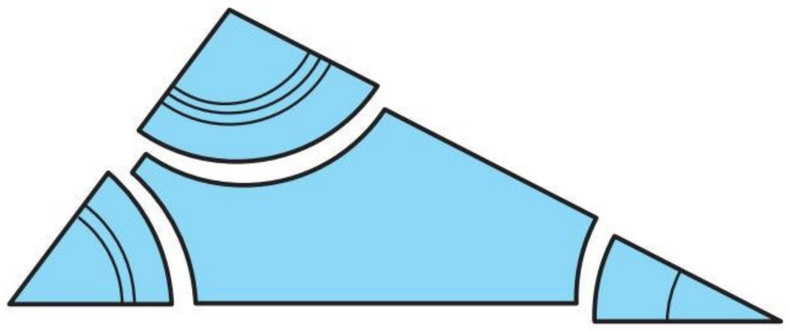


Рис. 2

У: А тепер прикладіть відрізані кути трикутника один до одного так, щоб їх вершини збіглися. Що ви помітили?

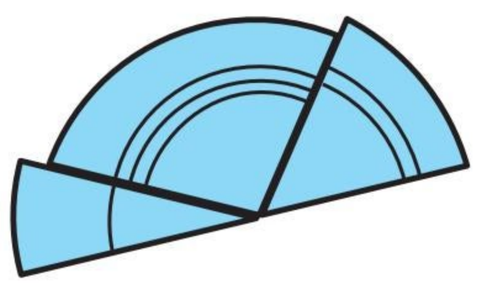


Рис. 3

Ф: Сума трьох кутів цього трикутника дорівнює розгорнутому куту (рис. 3)!

К: Наш дослід показує, що сума кутів *цього* трикутника дорівнює розгорнутому куту. Але чи справедливо це для *будь-якого* трикутника?

Ф: Невже ми *випадково* вирізали такий чудовий трикутник? Чи, може, сума кутів *будь-якого* трикутника дорівнює розгорнутому куту?

К: Якщо так, то це потрібно *довести*. Але як?

У: Щоб у вас народилась ідея доведення, виріжмо три довільні *рівні* трикутники, позначимо в них відповідно рівні кути й

прикладемо трикутники один до одного, як показано на рис. 4. Що тепер можна помітити?

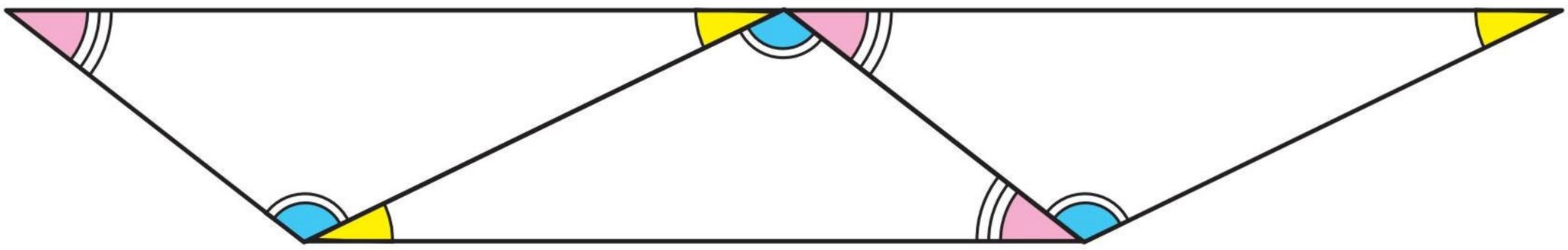


Рис. 4

Ф: Цей дослід також наводить на думку, що сума кутів трикутника дорівнює розгорнутому куту.

К: Мені здається, що сторони «середнього» трикутника *паралельні* до сторін «крайніх» трикутників.

5.1.* Перенесіть рис. 4 в зошит і позначте пари сторін трикутників, які, на ваш погляд, паралельні.

Ф: Мені здається, що паралельність сторін трикутників пов'язана з тим, що сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.

У: Так і є! Тому ознайомимося з паралельними прямими ближче.

2. РІВНІСТЬ РІЗНОСТОРОННІХ КУТІВ — ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ І ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

Рівність різносторонніх кутів — ознака паралельності прямих

У: Почнемо з того, що розглянемо дві прямі, що лежать в одній площині, і третю пряму, яка їх перетинає.

Пряму, що перетинає дві прямі в різних точках, називають *січною* цих прямих.

На рисунках 5 пряма c — *січна* прямих a і b.

Позначені пари кутів при січній називають *різносторонніми*.

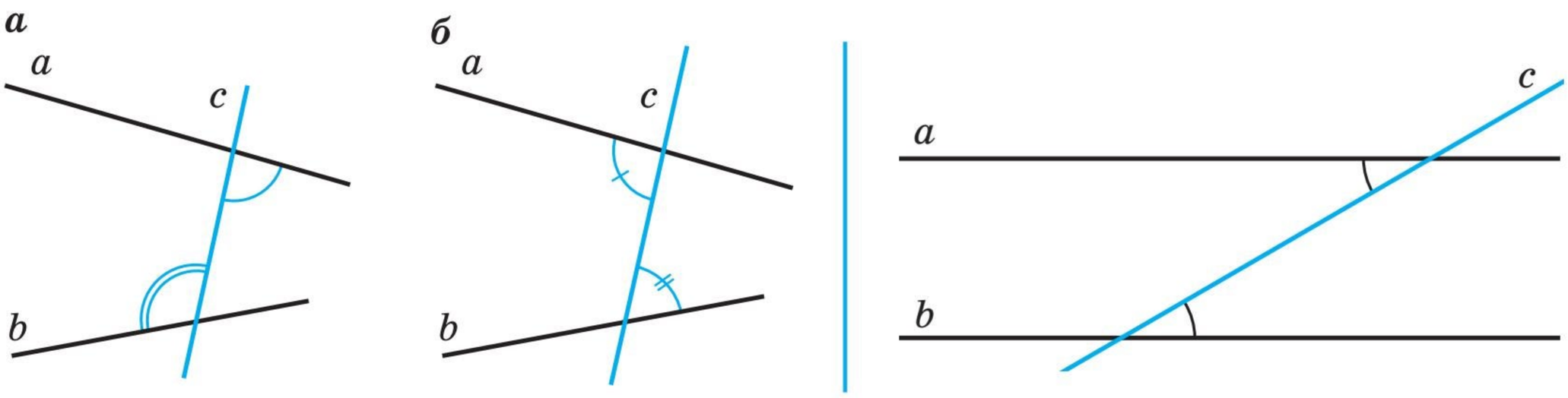


Рис. 5 *Рис. 6*

Особливо цікавим є випадок, коли різносторонні кути *рівні* (рис. 6).

Ф: Мені здається, я здогадуюсь чому: у цьому випадку прямі a і b *паралельні*!

К: Це ще потрібно *довести*!

У: Доведемо це спочатку для випадку, коли різносторонні кути — *прямі*, тобто січна *с перпендикулярна* до обох прямих a і b (рис. 7).

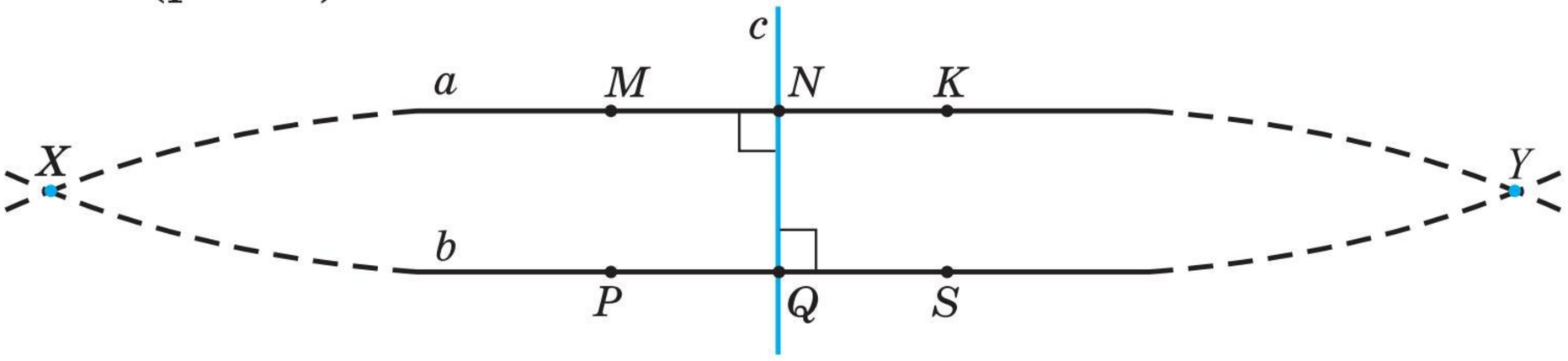


Рис. 7

Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b *не* паралельні, тобто перетинаються. Нехай, наприклад, вони перетинаються в точці X, що міститься *ліворуч*.

Перегнемо уявно рис. 7 по прямій c. Оскільки прямі a і b перпендикулярні до прямої c, промені NM і QP накладуться відповідно на промені NK і QS, тому точка X перетину променів NM і QP накладеться на точку перетину променів NK і QS, розташовану по *інший* бік від прямої c, — позначимо цю точку Y. Отже, припустивши, що прямі a і b не паралельні, ми доходимо висновку, що тоді вони мають перетнутися у *двох* точках — X і Y.

К: Але це суперечить...

5.2.* Чому суперечить висновок про те, що прямі a і b мають перетнутися у *двох* точках?

У: Отож припущення, що прямі a і b не паралельні, призводить до суперечності з аксіомою про те, що через дві точки можна провести лише *одну* пряму. Отже,

якщо дві прямі перпендикулярні до третьої, то вони паралельні.

Нехай тепер січна PQ перетинає прямі a і b, до того ж різносторонні кути рівні, але не є прямими кутами (рис. 8). Доведемо, що й у цьому випадку $a \parallel b$. Проведемо через середину O відрізка PQ пряму KL, *перпендикулярну* до прямої a.

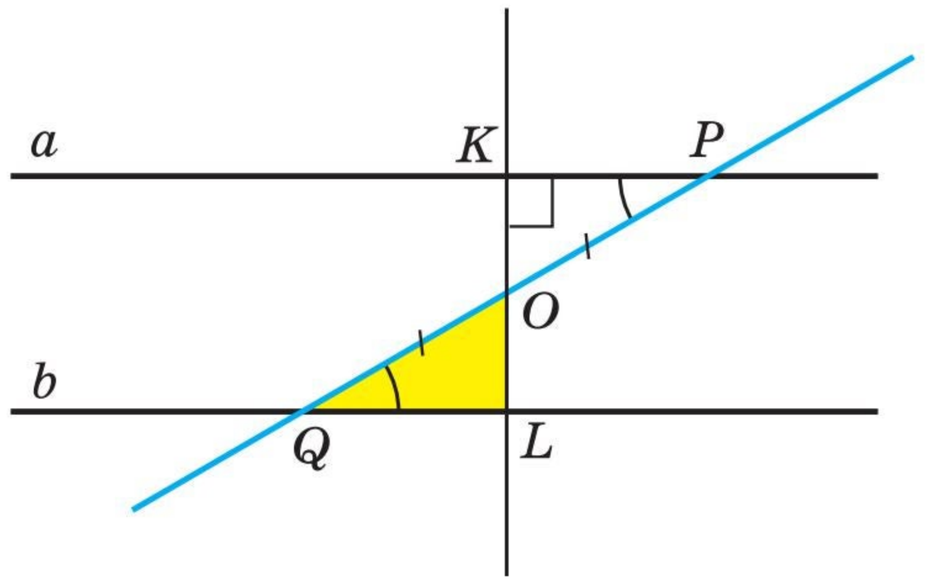


Рис. 8

Ф: Якщо тепер довести, що пряма KL перпендикулярна також і до прямої b, то звідси випливатиме, що $a \parallel b$, оскільки ми вже довели, що дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.

К: А щоб довести, що $b \perp KL$, достатньо довести, що трикутник OLQ (ж) прямокутний.

Ф: Для цього достатньо довести, що трикутники OKP і OLQ рівні.

5.3.* Чи згодні ви з Федором? Якщо так, то доведіть рівність трикутників OKP і OLQ на рисунку 8.

У: Отже, ми довели ознаку паралельності прямих:

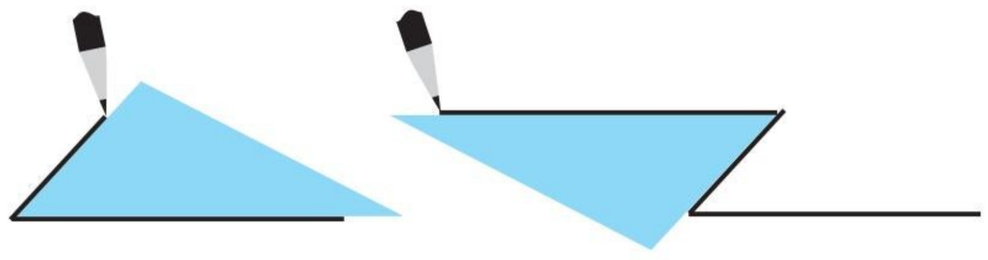
якщо при перетині двох прямих січною різносторонні кути рівні, то ці прямі паралельні.

5.4.** Виріжте з картону *довільний* трикутник і побудуйте за його допомогою паралельні прямі на аркуші паперу без клітинок. Обґрунтуйте свою побудову.

5.5.** Накресліть відрізки AB і CD, які перетинаються і точкою перетину O діляться навпіл. Проведіть відрізки AC, CB, BD і DA. Чи є на рисунку паралельні відрізки? Запишіть паралельність відрізків.

5.3. Якщо трикутник дорівнює прямокутному трикутнику, то він також є прямокутним. Скористайтеся властивістю вертикальних кутів і другою ознакою рівності трикутників.

5.4. Див. рис. Можна використати будь-який кут трикутника.



5.5. Знайдіть на рисунку рівні трикутники та скористайтеся ознакою паралельності прямих.

5.6.** Знайдіть на кожному з рис. 9 усі паралельні прямі. Запишіть паралельність прямих.

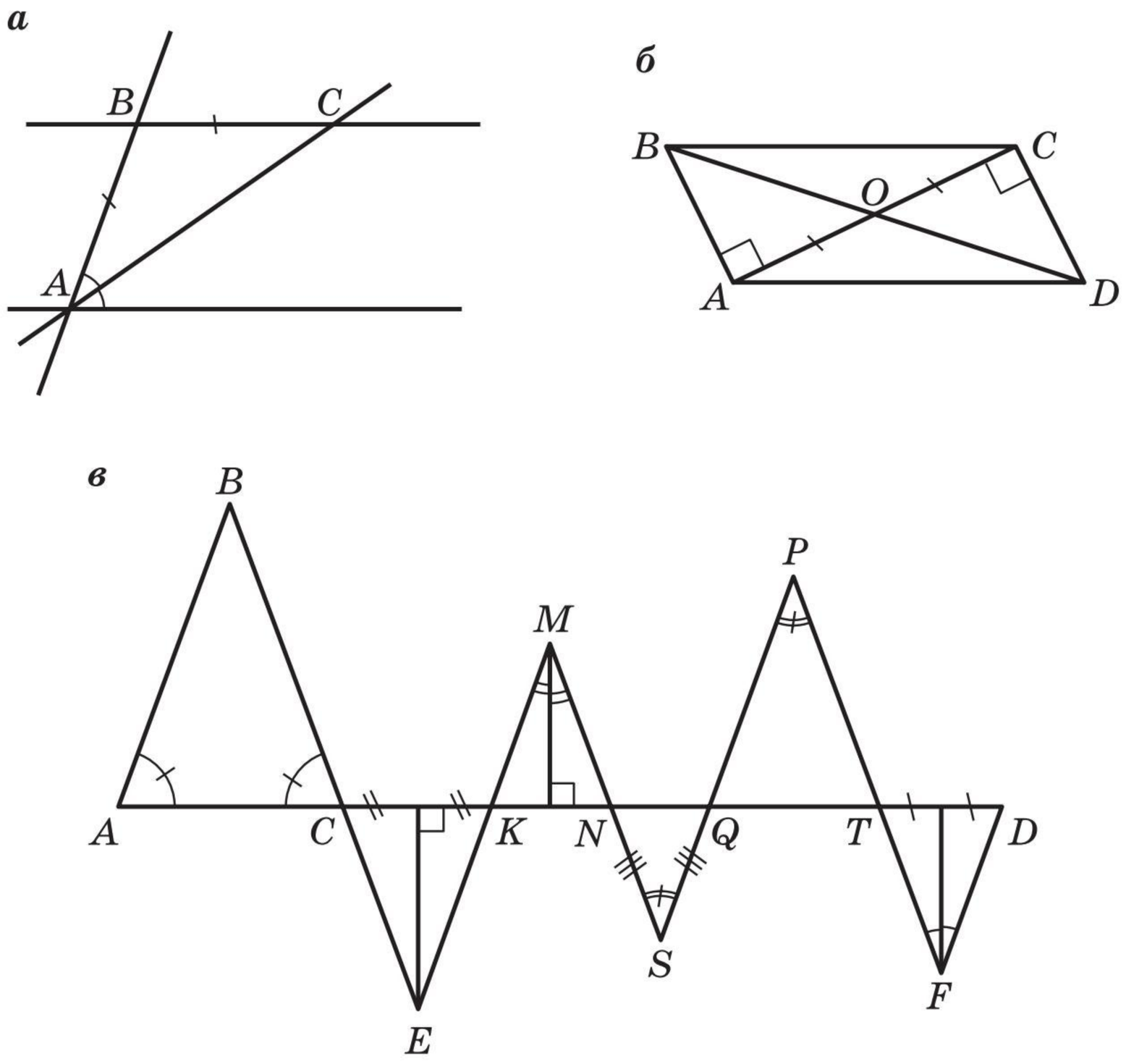


Рис. 9

Рівність різносторонніх кутів — властивість паралельних прямих

У: Довівши будь-яку теорему, математик ставить собі запитання: чи справедлива теорема, *обернена* до доведеної? Сформулюйте й доведіть теорему, обернену до доведеної нами *ознаки* паралельності прямих.

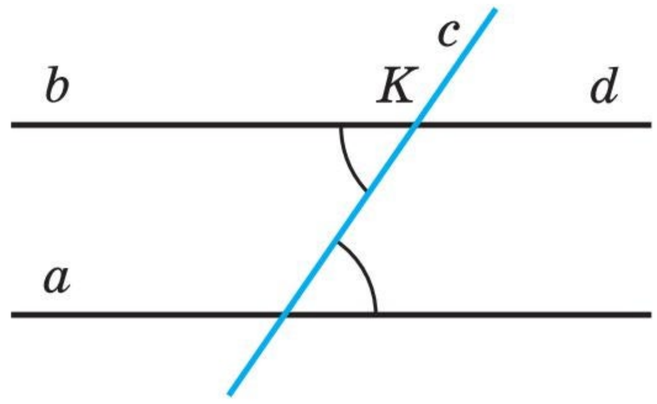


Рис. 10

К: Це *властивість* паралельних прямих:

якщо дві прямі паралельні, то при перетині їх січною різносторонні кути рівні.

5.6. Скористайтеся: а) властивістю рівнобедреного трикутника й ознакою паралельності прямих; б) ознаками рівності трикутників і властивостями рівних трикутників; в) властивостями й ознаками рівнобедрених трикутників.

Ф: Почнемо доводити. Нехай a і b — паралельні прямі, а c — січна, що перетинає пряму b в точці K (рис. 10). Проведемо через точку K пряму d так, щоб для прямих a і d різносторонні кути при січній c були *рівні*. Тоді за ознакою паралельності прямих $d \parallel a$.

К: Пряма b *збігається* з прямою d, оскільки, згідно з аксіомою паралельних прямих, через точку, що не лежить на прямій, можна провести тільки *одну* пряму, паралельну до даної. Отже, для прямих a і b різносторонні кути при січній c також рівні. Властивість паралельних прямих доведено!

5.7.** Яку інформацію можна отримати з рис. 11?

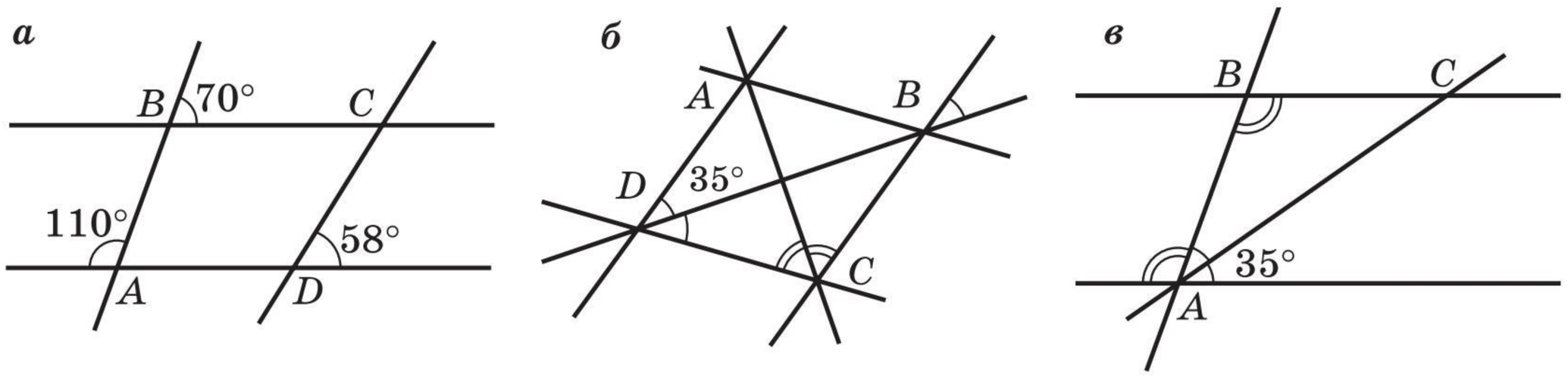


Рис. 11

5.8.* Яку інформацію можна отримати з рис. 12?

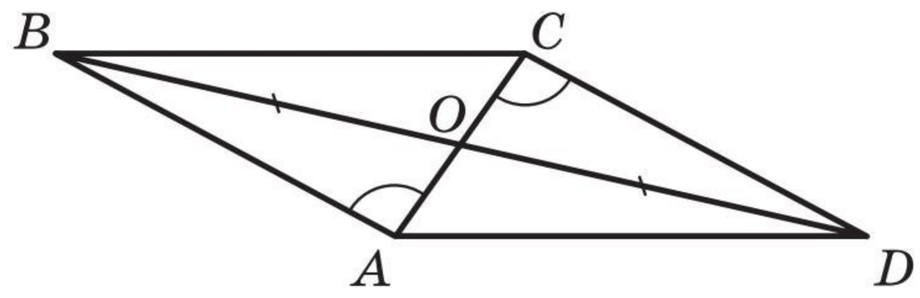


Рис. 12

3. ІНШІ ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ І ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

Рівність відповідних кутів

У: Є й інші ознаки паралельності прямих, а також інші властивості паралельних прямих. Щоб їх сформулювати, дамо назви деяким парам кутів.

5.7. Можна знайти паралельні прямі, дізнатися градусні міри всіх кутів, знайти рівні трикутники.

5.8. Наприклад, можна знайти 4 пари рівних трикутників і дві пари паралельних прямих.

Пари кутів *1* і *5* (ж і ч); *2* і *6*; *4* і *8*; *3* і *7* при січній *c*, що перетинає прямі *a* і *b* на рис. 13, називають *відповідними* кутами.

5.9.* Доведіть таку *ознаку* паралельності прямих:

якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

5.10.* Доведіть таку *властивість* паралельних прямих:

якщо січна перетинає дві паралельні прямі, то відповідні кути рівні.

Сума односторонніх кутів дорівнює 180°

У: Пари кутів *1* і *4* (ж і ч), а також *2* і *3* при січній *c*, що перетинає прямі *a* і *b* на рисунку 14, називають *односторонніми* кутами.

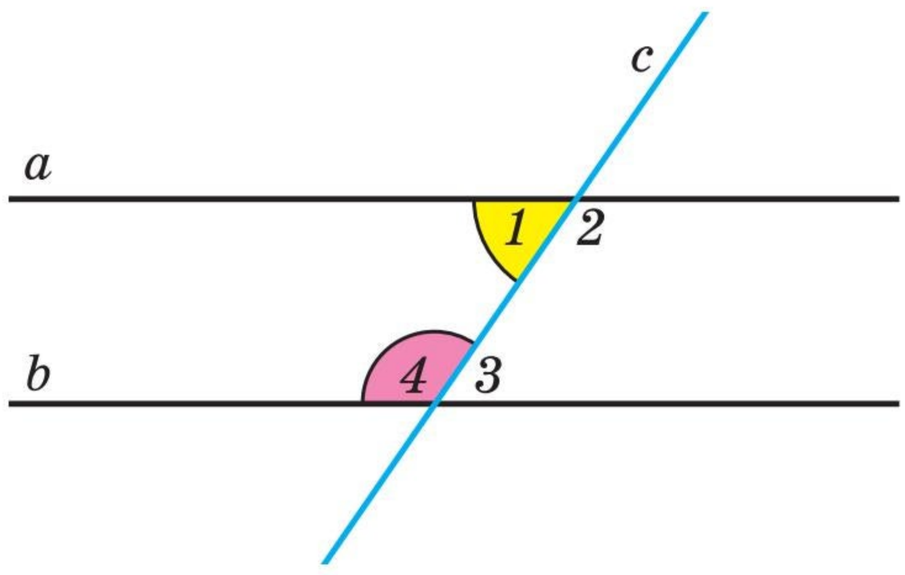


Рис. 14

5.11.* Доведіть таку *ознаку* паралельності прямих:

якщо при перетині двох прямих січною сума односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

5.12.* Доведіть таку *властивість* паралельних прямих:

5.9. Скористайтеся тим, що коли різносторонні кути рівні, то прямі паралельні, і властивістю вертикальних кутів.

5.10. Скористайтеся тим, що коли прямі паралельні, то різносторонні кути рівні, і властивістю вертикальних кутів.

5.11. Скористайтеся тим, що коли різносторонні кути рівні, то прямі паралельні, і властивістю суміжних кутів.

5.12. Скористайтеся тим, що коли прямі паралельні, то різносторонні кути рівні, і властивістю суміжних кутів.

якщо січна перетинає дві паралельні прямі, то сума односторонніх кутів дорівнює 180°.

5.13. Розгляньте рис. 15.

а)* На яких рисунках є паралельні прямі? Запишіть їх.

б)** Знайдіть градусні міри всіх кутів на рис. 15, *а*–*д*.

в)*** Знайдіть градусні міри всіх кутів на рис. 15, *е*.

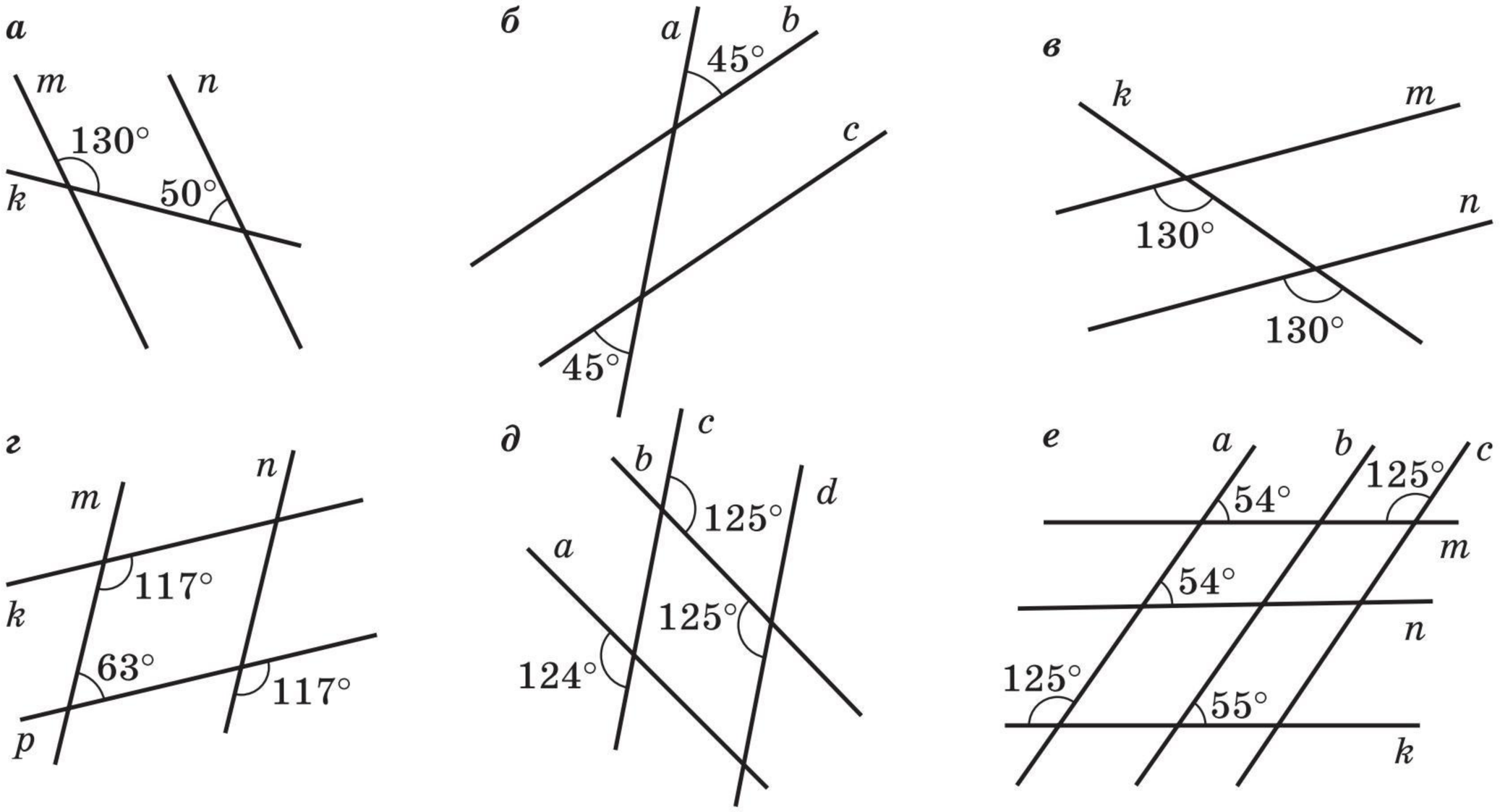


Рис. 15

5.14.* Усі кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні. Яку інформацію звідси можна отримати?

5.15.** При перетині двох прямих січною утворились чотири рівні кути. Чи можна стверджувати, що ці дві прямі обов'язково паралельні? Проілюструйте свою відповідь рисунком.

Подібні завдання (5.16–5.17)

5.16.** При перетині двох прямих січною утворились чотири кути по 75° і чотири кути по 105°. Чи можна стверджувати, що ці дві прямі обов'язково паралельні? Проілюструйте свою відповідь рисунком.

5.13. Скористайтеся ознаками паралельності прямих і властивостями паралельних прямих.

5.15. Рівними можуть бути, наприклад, односторонні кути.

5.16. Рівними можуть бути, наприклад, односторонні кути.

5.17.** При перетині двох прямих січною *односторонні* кути рівні. Чи означає це, що ці дві прямі:
а) обов'язково паралельні; б) обов'язково не паралельні?

5.18.** Паралельні прямі перетинає січна. Яке взаємне розташування бісектрис:
а) різносторонніх кутів; б) відповідних кутів?

5.19.** Знайдіть і запишіть градусні міри всіх кутів на рис. 16.

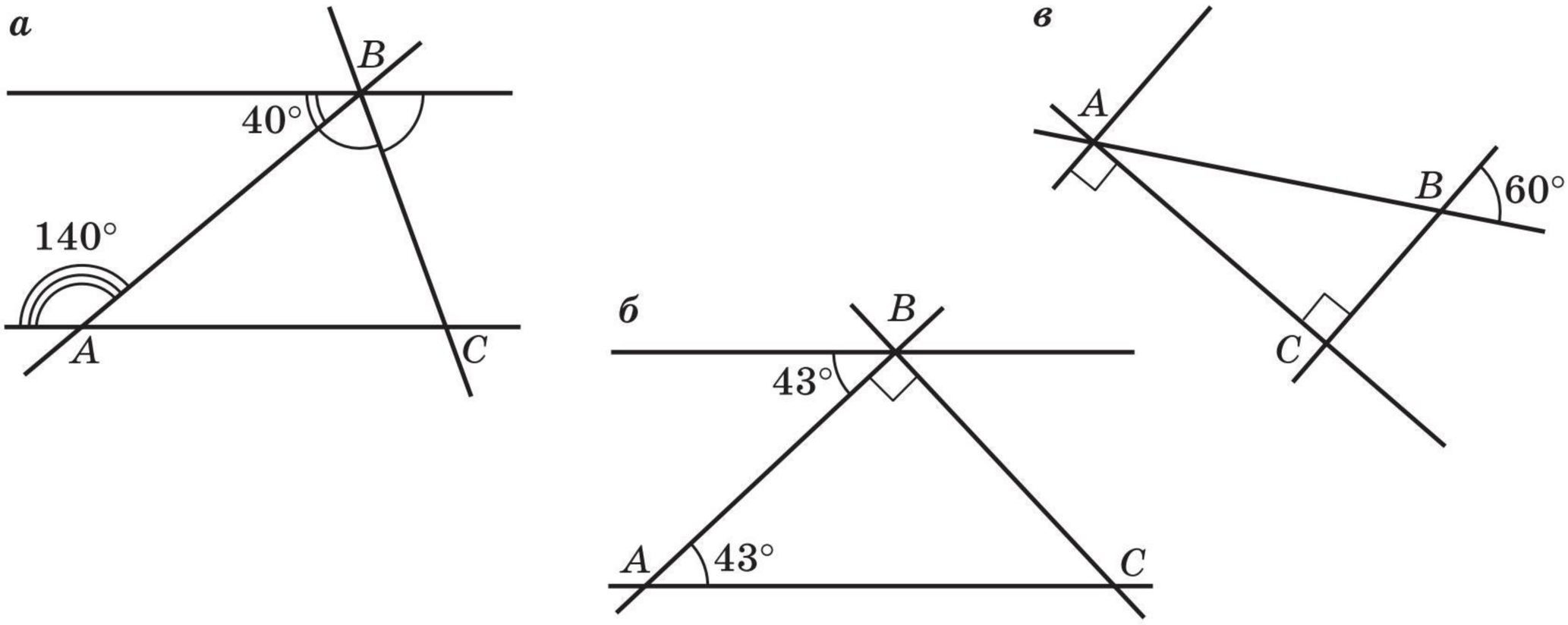


Рис. 16

Подібне завдання

5.20.** Знайдіть на рис. 17 паралельні прямі та невідомі кути.

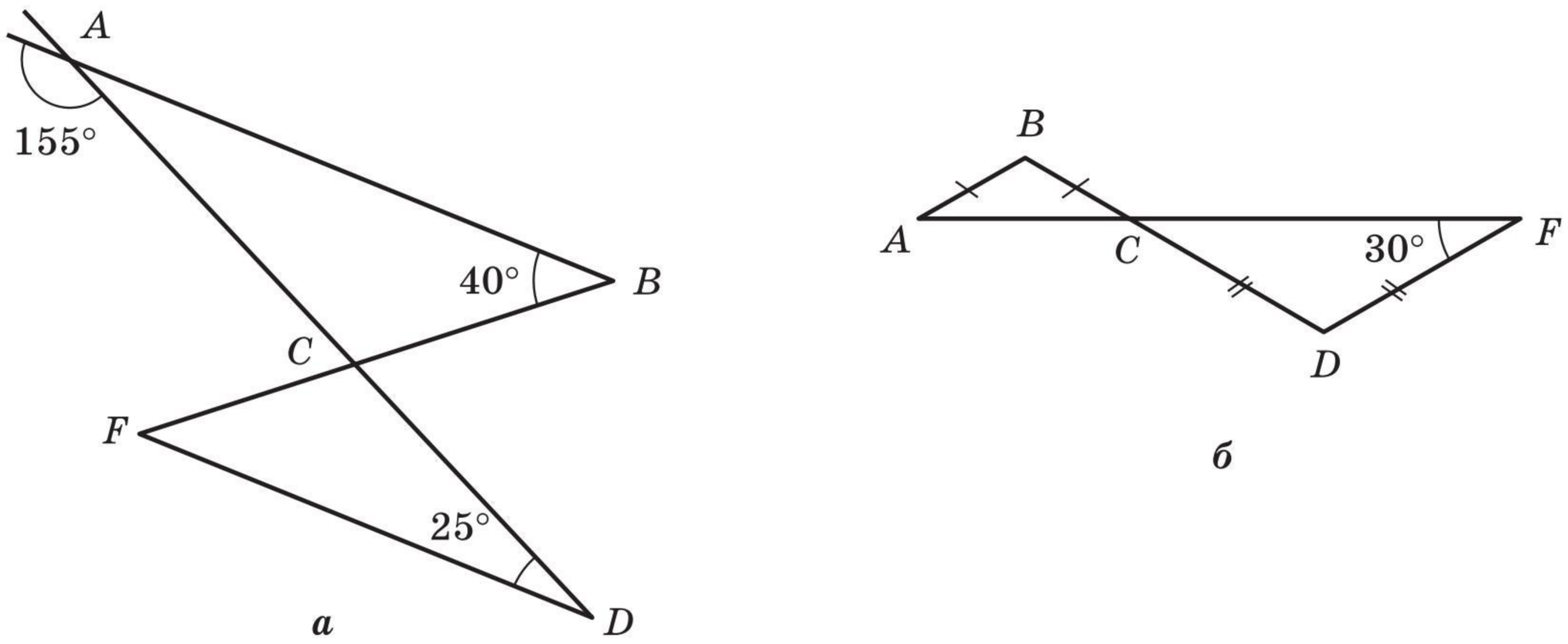


Рис. 17

5.17. б) Зауважте, що суміжні кути можуть бути рівними.

5.21.** На рис. 18 прямі AD і CE паралельні. Чому дорівнює сума кутів 1, 2, 3?

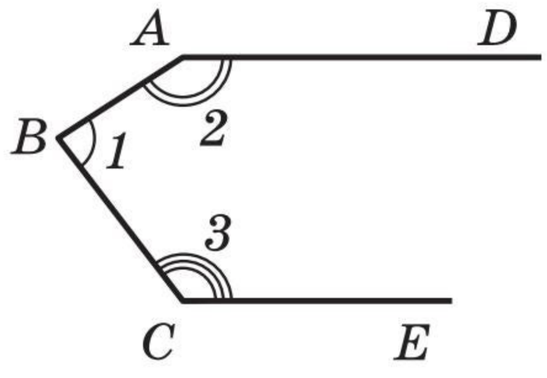
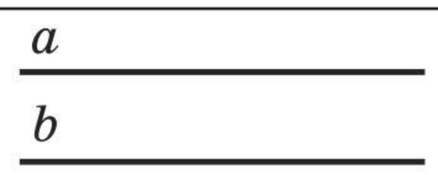


Рис. 18

4. «ПАСПОРТ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ»

Ф: Підсумуємо усе, відоме нам, про паралельні прямі (рис. 19).

Паралельні прямі лежать в одній площині й не перетинаються



Властивості ↓ ↑ **Ознаки**

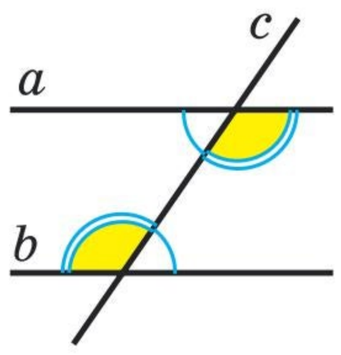
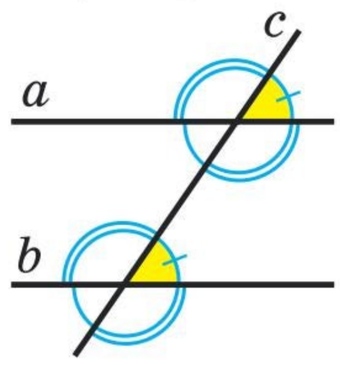
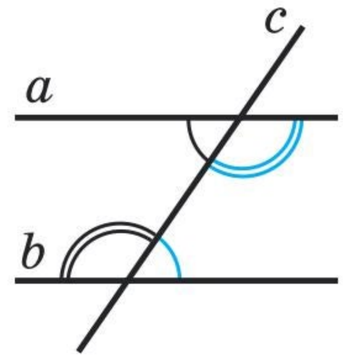
Різносторонні кути рівні	Відповідні кути рівні	Сума односторонніх кутів дорівнює 180°
		

Рис. 19

Застосовуємо властивості паралельних прямих і ознаки паралельності прямих

Паралельні прямі, перетнуті паралельними січними

У: На рис. 20 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Яку інформацію звідси можна отримати?

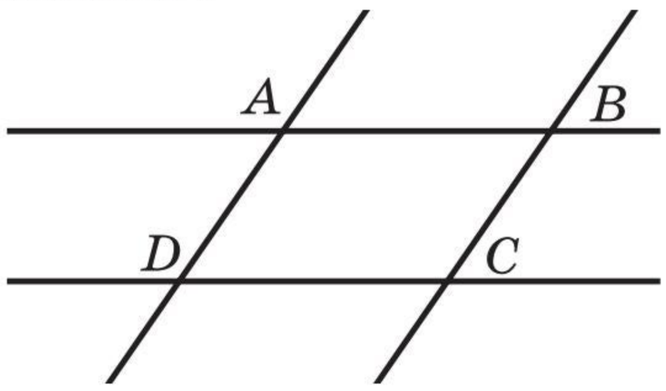


Рис. 20

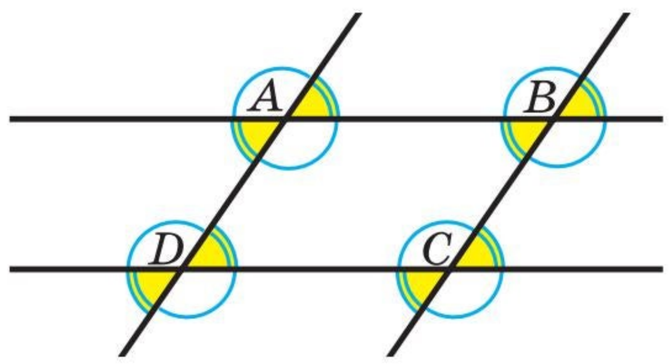


Рис. 21

К: Можна знайти рівні кути (рис. 21).

5.22.* Обґрунтуйте рівність кутів, позначених на рис. 21.

5.21. Проведіть через точку B пряму, паралельну прямій AD, і скористайтеся властивістю односторонніх кутів при паралельних прямих і січній.

5.22. Скористайтеся властивостями паралельних прямих для прямих AB і CD, а також для прямих AD і BC.

Ф: Я думаю, що $AB = CD$ і $AD = BC$ (рис. 22). Але як це довести?

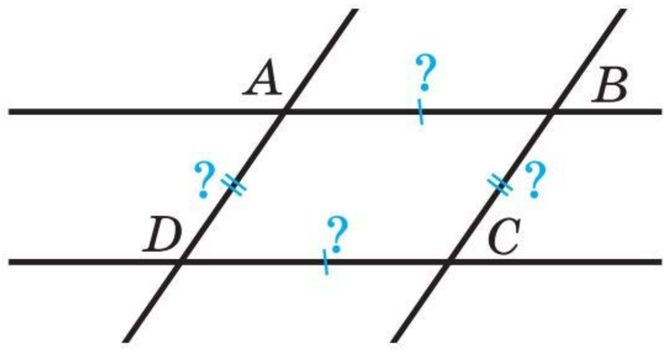


Рис. 22

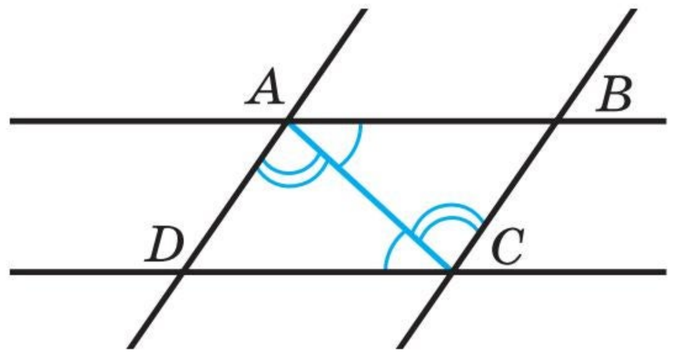


Рис. 23

К: Це можна було б довести, якби тут були рівні трикутники, у яких відрізки AB і CD, а також AD і BC — відповідні сторони. Але тут взагалі немає трикутників...

У: Виконайте *додаткову побудову*: проведіть відрізок AC (рис. 23).

Ф: З'явились трикутники ABC і CDA — і вони рівні!

5.23.* Чи згодні ви з Федором?

Ф: З рівності трикутників ABC і CDA на рис. 23 випливає, що $AB = CD$ і $AD = BC$.

У: Позначимо тепер на рисунку всю інформацію, яку ми отримали (рис. 24, *а*). Чим ми при цьому скористалися?

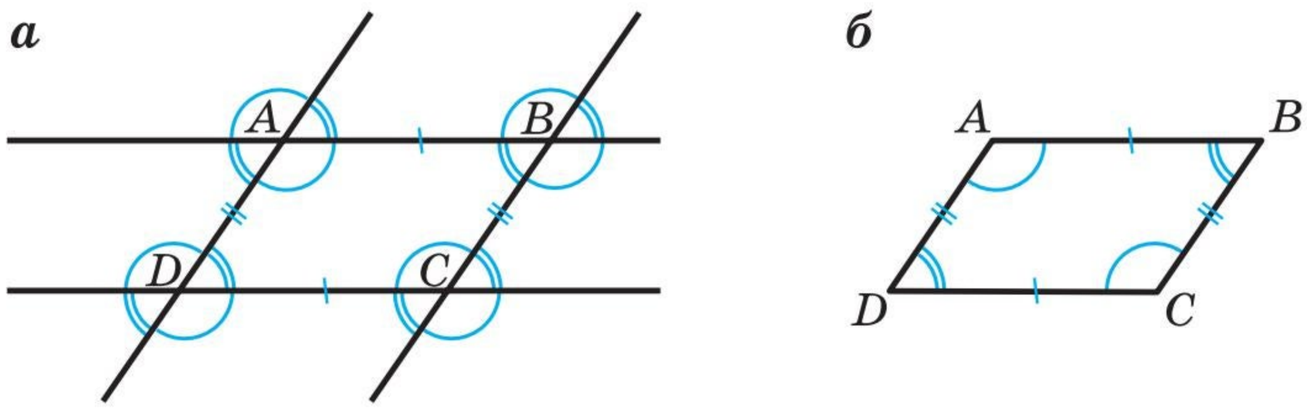


Рис. 24

К: Властивістю паралельних прямих, другою ознакою рівності трикутників, а також властивістю рівних трикутників.

У: Зверніть тепер увагу на чотирикутник $ABCD$ (рис. 24, *б*). *Чотирикутником* називають фігуру, що складається з чотирьох точок (вершин), жодні три з яких не лежать на одній прямій, і чотирьох відрізків (сторін), що послідовно з'єднують ці точки. У нашому випадку вершини чотирикутника — точки A, B, C, D, а сторони — відрізки AB, BC, CD і DA.

Сторони AB і CD, а також сторони BC і DA, що не мають спільних вершин, називають *протилежними*.

5.23. Скористайтеся властивостями паралельних прямих для прямих AB і CD, для прямих AD і BC, а також другою ознакою рівності трикутників.

Ф: А протилежні кути чотирикутника — це, напевно, кути, що не мають спільних сторін?

У: Правильно.

К: Тоді пари протилежних кутів чотирикутника $ABCD$ — це кути A і C, а також кути B і D.

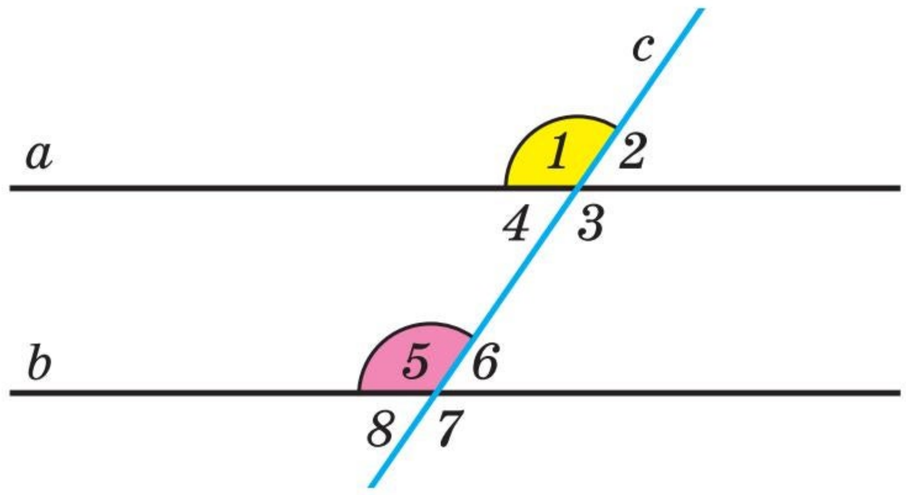


Рис. 13

У: Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називають ***паралелограмом***.

Отже, ми довели зараз деякі *властивості* паралелограма: його протилежні сторони рівні та протилежні кути рівні.

Чотирикутник,
у якого протилежні сторони попарно рівні

У: Нехай на рис. 25 $AB = CD$, $AD = BC$. Яку інформацію звідси можна отримати?

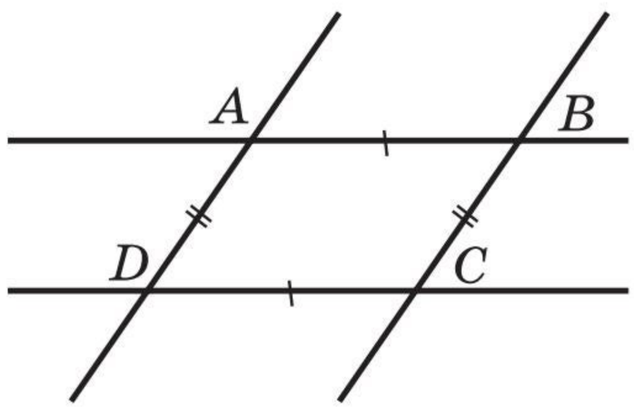


Рис. 25

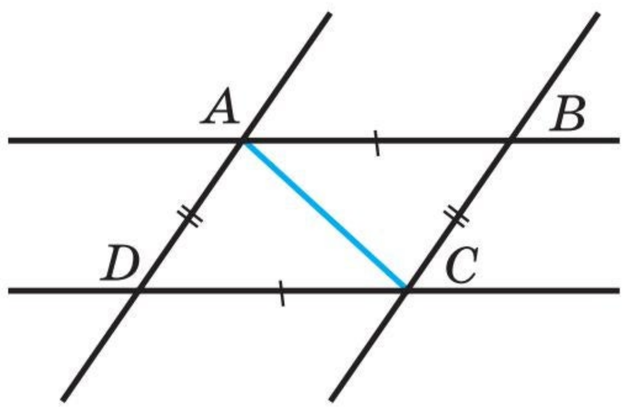


Рис. 26

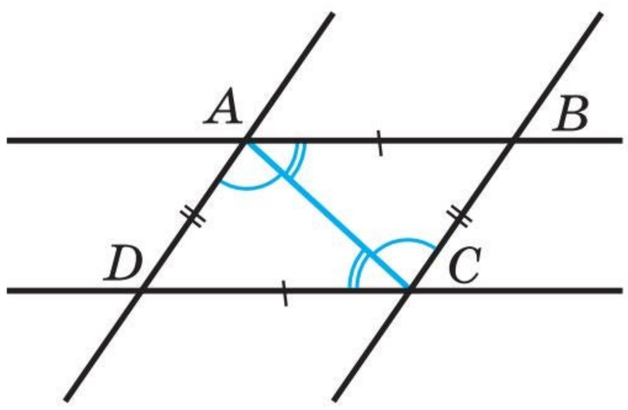


Рис. 27

Ф: Проведемо знову відрізок AC (рис. 26).

К: Трикутники ABC і CDA на рисунку 26 рівні!

5.24.* Чи згодні ви з Катериною?

К: Позначимо в рівних трикутниках відповідно рівні кути (рис. 27).

Ф: Тепер можна довести, що на рис. 27 $AB \parallel DC$ і $AD \parallel BC$!

5.25.* Чи згодні ви з Федором?

У: Цього разу ми довели одну з *ознак* паралелограма: якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то він є паралелограмом.

5.24. Скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників.

5.25. Скористайтеся ознакою паралельності прямих.

Чотирикутник, у якого дві протилежні сторони рівні та паралельні

У: На рис. 28 $AB \parallel DC$, $AB = DC$. Яку інформацію звідси можна отримати?

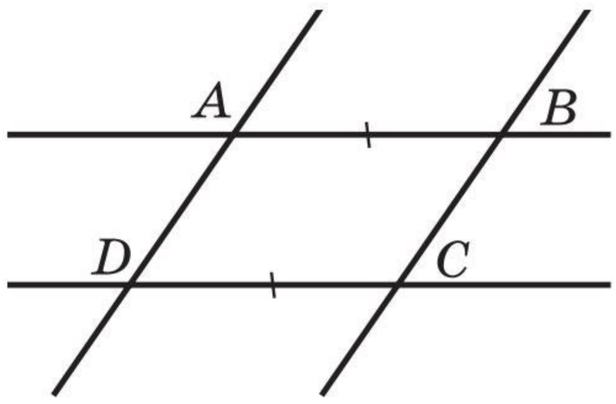


Рис. 28

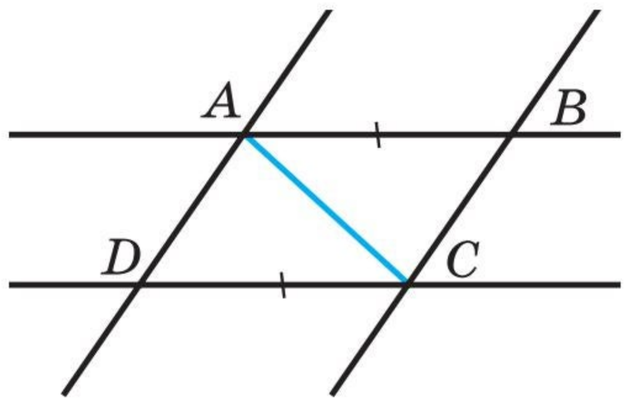


Рис. 29

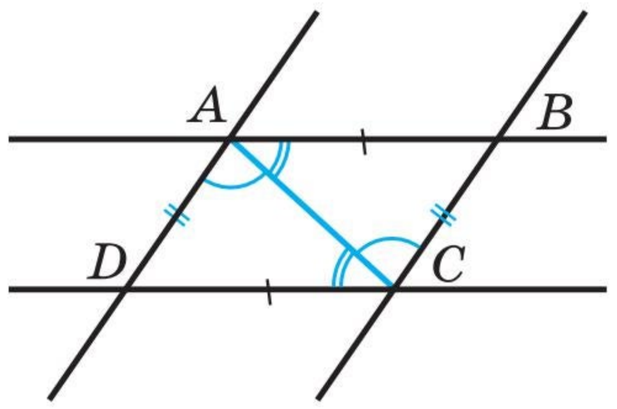


Рис. 30

К: Напевно, відрізок AC і тут нам допоможе (рис. 29).

Ф: Справді: трикутники ABC і CDA на рисунку 29 знову рівні!

5.26.* Чи згодні ви з Федором?

К: Позначимо відповідно рівні сторони та кути в рівних трикутниках ABC і CDA (рис. 30).

Ф: Тепер можна довести, що на рисунку 30 $AD \parallel BC$!

5.27.* Чи згодні ви з Федором?

У: Ми довели ще одну *ознаку* паралелограма:

якщо дві протилежні сторони чотирикутника рівні та паралельні, то він є *паралелограмом*.

5.28.*** Доведіть: площину можна замостити без пропусків однаковими плитками, що мають форму довільного трикутника.

Кути з відповідно паралельними сторонами

5.29.* Доведіть:

кути з відповідно паралельними сторонами або рівні (рис. 31, *а*), або їх сума дорівнює 180° (рис. 31, *б*).

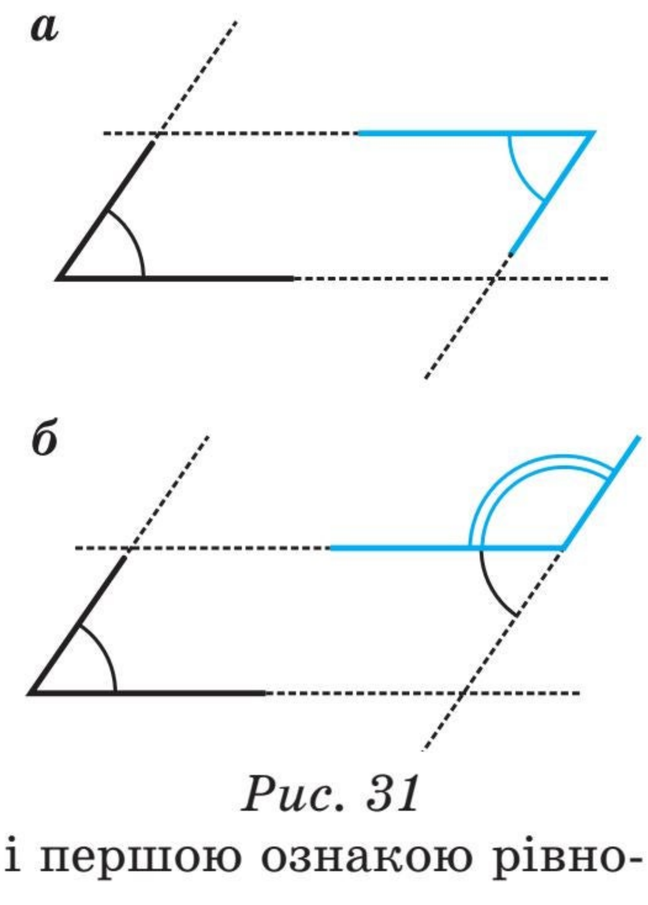


Рис. 31

5.26. Скористайтеся властивістю паралельних прямих і першою ознакою рівності трикутників.

5.27. Скористайтеся ознакою паралельності прямих.

5.28. Доведіть спочатку, що з двох однакових плиток можна скласти паралелограм. Відтак доведіть, що з однакових паралелограмів можна скласти пряму смугу постійної ширини, а смугами можна замостити площину.

5.29. Скористайтеся властивостями паралельних прямих.

5.30.** На рис. 32 зображено кут A і точку B всередині кута.

а) Перенесіть рисунок у зошит і побудуйте кути, вершина яких лежить у точці B, а сторони паралельні сторонам кута A. Скільки таких кутів можна побудувати?

б) Як градусні міри побудованих кутів пов'язані з градусною мірою кута A?

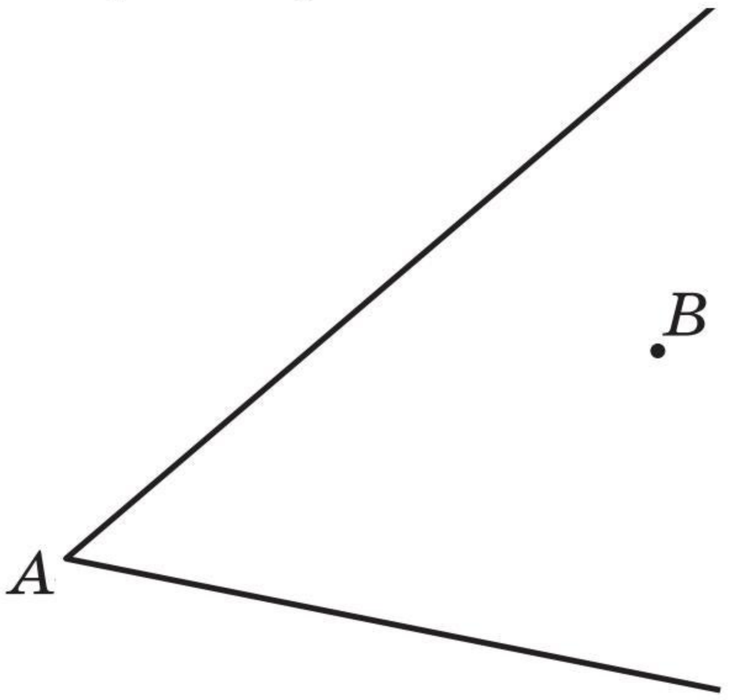


Рис. 32

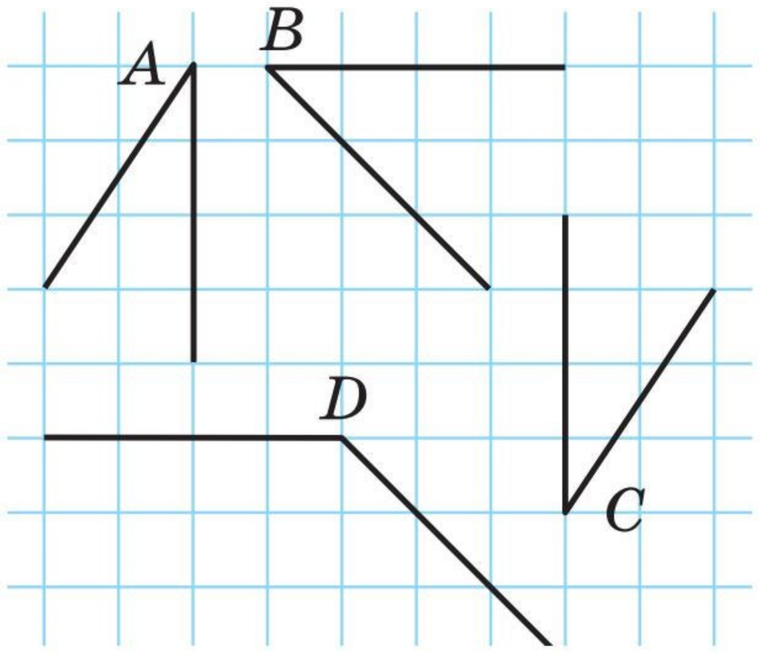


Рис. 33

5.31.** Знайдіть на рисунку 33 пари рівних кутів, а також пари кутів, сума яких дорівнює 180°.

5. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Теорема про суму кутів трикутника

У: Тепер ви вже можете *довести*, що

сума кутів трикутника дорівнює 180°.

5.32.* На рис. 34 пряма MN паралельна стороні AC довільного трикутника ABC. Використовуючи властивість паралельних прямих, доведіть: сума кутів трикутника дорівнює 180°.

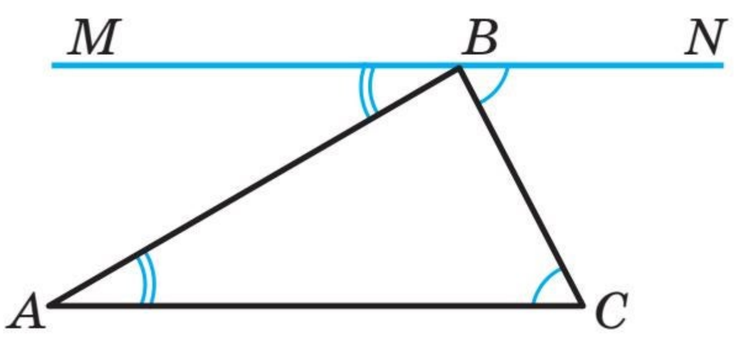


Рис. 34

5.33.** Нарисуйте довільний трикутник. Через кожну його вершину проведіть пряму, паралельну протилежній стороні. Доведіть: кути «великого» трикутника, утвореного проведеними прямими, дорівнюють кутам початкового трикутника.

5.32. Скористайтеся тим, що коли прямі паралельні, то різносторонні кути при січній рівні.

5.33. Скористайтеся властивостями кутів при січній, що перетинає паралельні прямі. Знайдіть паралелограми.

Гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники

5.34.* Скільки у трикутника може бути: а) тупих кутів; б) прямих кутів; в) гострих кутів?

5.35.* Якими можуть бути градусні міри трьох кутів трикутника? Наведіть приклади для випадків, коли в трикутника: всі кути гострі; один кут тупий; один кут прямий.

У: Нагадаю деякі назви видів трикутників:

- якщо всі кути трикутника гострі, його називають *гострокутним* (рис. 35, *а*),
- якщо один кут трикутника тупий, його називають *тупокутним* (рис. 35, *б*),
- якщо один кут трикутника прямий, його називають *прямокутним* (рис. 35, *в*).

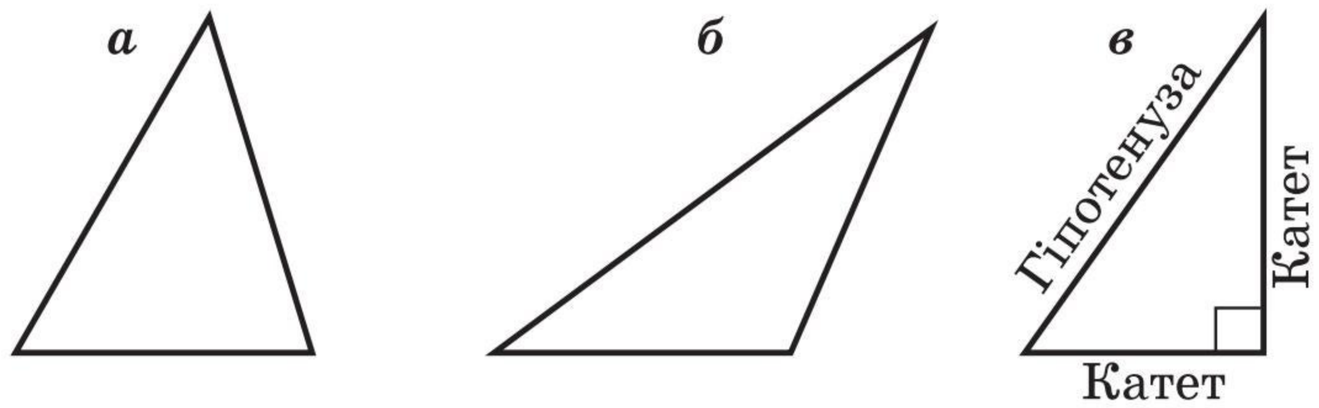


Рис. 35

Сторони *прямокутного* трикутника мають спеціальні назви:

- сторону, що лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***,
- сторони, прилеглі до прямого кута, називають ***катетами***.

У: Почнемо ближче знайомитися з *прямокутним трикутником* — героєм багатьох геометричних задач.

5.36.* Доведіть:

сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

5.37.* Доведіть: якщо сума двох кутів трикутника дорівнює третьому, то трикутник прямокутний. Це властивість чи ознака прямокутного трикутника?

5.38.** Доведіть: якщо один кут трикутника дорівнює модулю різниці двох інших, то трикутник прямокутний. Це властивість чи ознака прямокутного трикутника?

5.34. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника.

5.37. Скористайтеся тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Подібні завдання (5.39–5.42)

5.39.* Доведіть: якщо трикутник прямокутний, то:

а) один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших кутів;

б) один з кутів трикутника дорівнює модулю різниці двох інших кутів.

Ці твердження є властивостями чи ознаками прямокутного трикутника?

5.40. Чи можна визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо про його кути відомо, що сума двох кутів:

а)* дорівнює третьому;

б)** менша від третього;

в)*** більша від третього?

5.41.* Чи може рівнобедрений трикутник бути прямокутним?

5.42.** Паралельні прямі перетнуті січною. Яке взаємне розташування бісектрис односторонніх кутів?

5.43.* Чому дорівнюють кути рівностороннього трикутника?

Подібні завдання (5.44–5.46)

5.44.* Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°. Чи є цей трикутник рівностороннім?

5.45.** Чому дорівнюють кути між прямими, на яких лежать медіани рівностороннього трикутника?

5.46.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC провели висоту AH. Як пов'язані кути B і HAC?

5.47.*** На рис. 36 трикутники ABC_1 і A_1BC — рівносторонні. Доведіть: $AA_1 = CC_1$.

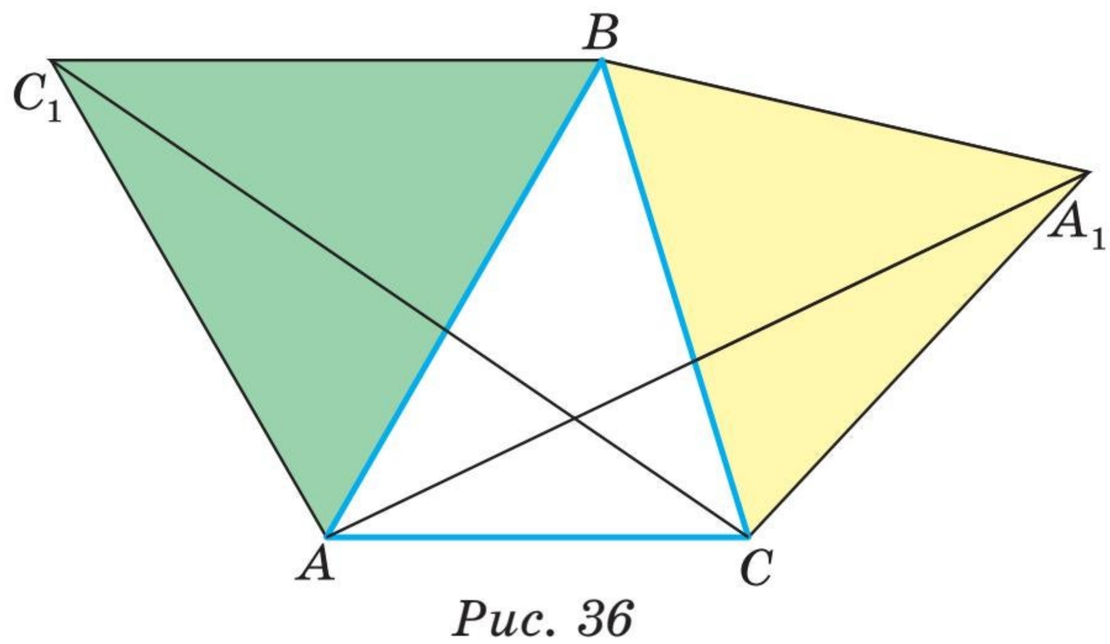


Рис. 36

5.43. Скористайтеся тим, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.

5.44. Розгляньте окремо випадок, коли кут, що дорівнює 60°, є кутом, протилежним основі, і випадок, коли цей кут є кутом при основі.

5.46. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника і властивістю рівнобедреного трикутника.

5.47. Трикутники ABA_1 і C_1BC (жовто-біло-жовтий і зелено-біло-зелений) рівні за першою ознакою рівності трикутників.

Подібне завдання

5.48.*** На рис. 37 трикутники ABC_1 і A_1BC — прямокутні рівнобедрені. Доведіть: $AA_1 = CC_1$.

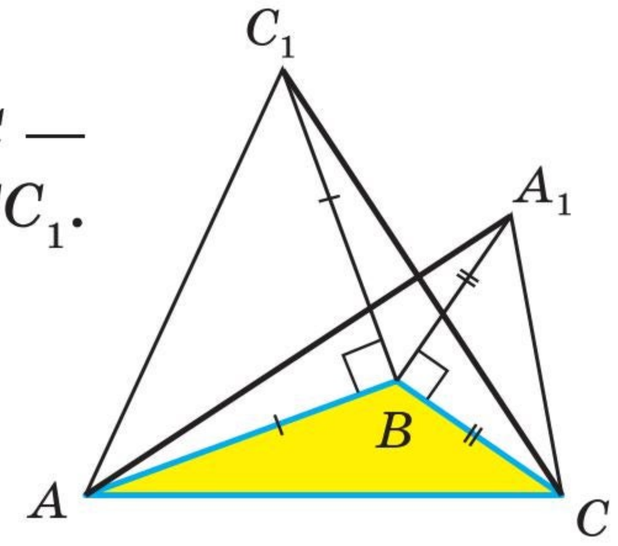


Рис. 37

5.49.** Чи може кут трикутника, що дорівнює 60°, бути:
а) найбільшим кутом трикутника;
б) найменшим кутом трикутника?

Подібні завдання (5.50–5.51)

5.50.** Чи може кут трикутника, більший від 60°, бути:
а) найбільшим кутом трикутника;
б) найменшим кутом трикутника?

5.51.** Чи може кут трикутника, менший від 60°, бути:
а) найбільшим кутом трикутника;
б) найменшим кутом трикутника?

5.52.** Скільки гострих кутів може бути в рівнобедреного трикутника? Підтвердьте вашу відповідь прикладами.

Подібне завдання

5.53.** Чи можна стверджувати, що:
а) кути при основі будь-якого рівнобедреного трикутника гострі;
б) будь-який рівнобедрений трикутник є гострокутним?
Підтвердьте ваші відповіді прикладами.

5.54.** Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Чому дорівнюють кути трикутника? Розгляньте всі можливі варіанти.

Подібні завдання (5.55–5.59)

5.55.** Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Чому дорівнюють кути трикутника?

5.56.** Сума двох нерівних кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Чому дорівнюють кути трикутника?

5.48. Знайдіть рівні трикутники зі сторонами AA_1 і CC_1.

5.49. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника.

5.54. Даний кут може бути кутом при основі або кутом при вершині, протилежній основі.

5.55. Доведіть, що даний кут може бути тільки кутом при вершині між бічними сторонами.

5.56. Доведіть, що третій кут є кутом при основі.

5.57.** Чи може сума двох нерівних кутів рівнобедреного трикутника дорівнювати 40°?

5.58.** Сума двох кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Чому дорівнюють кути трикутника?

5.59.** Сума двох кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 160°. Чому дорівнюють кути трикутника? Розгляньте всі можливі варіанти.

5.60.** Чи можна стверджувати, що два трикутники рівні, якщо сторона, прилеглий до неї кут і *протилежний до неї* кут одного трикутника відповідно дорівнюють стороні, прилеглому до неї куту і *протилежному* до неї куту другого трикутника (рис. 38)? Обґрунтуйте свою відповідь.

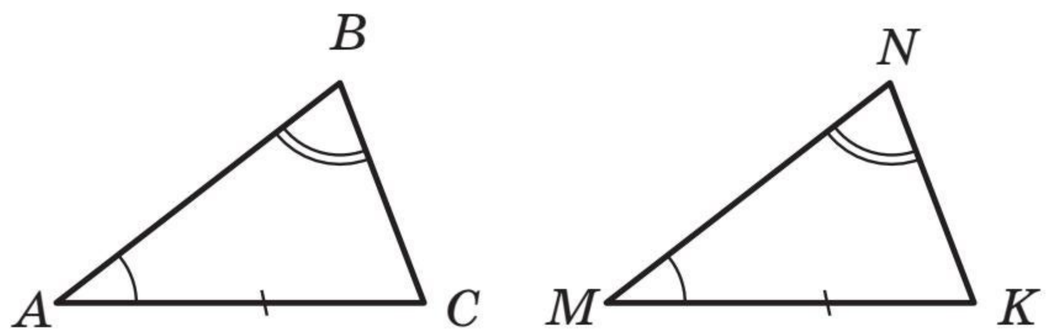


Рис. 38

Подібні завдання (5.61–5.62)

5.61.** Чи можуть бути рівні трикутники, якщо в одному з них є кут 30°, а в другому — кут 150°?

5.62.** Чи можуть бути рівні трикутники, якщо в одному з них є кут 30°, а в другому — кут 148°?

5.63. Два кути трикутника дорівнюють 40° і 80°.

а)* Чому дорівнює третій кут трикутника?

б)** Чому дорівнюють кути між прямими, на яких лежать бісектриси цього трикутника?

5.57. Зауважте, що в трикутнику не може бути двох тупих кутів.

5.58. Доведіть, що задані кути можуть бути тільки кутами при основі.

5.59. Доведіть, що задані кути можуть бути як кутами при основі, так і нерівними кутами.

5.60. Зауважте, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

5.61. Скористайтеся властивістю рівних трикутників і тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

5.63. Якщо неперпендикулярні прямі перетинаються, то кутом між прямими називають *менший* з кутів, утворених при перетині прямих.

Подібні завдання (5.64–5.67)

5.64.** Один кут трикутника дорівнює 60°. Чому дорівнює кут між прямими, на яких лежать бісектриси двох інших кутів цього трикутника?

5.65.** Кут між двома бісектрисами трикутника дорівнює 70°. Чому дорівнює третій кут цього трикутника?

5.66.*** Кути трикутника дорівнюють α, β і γ. Чому дорівнюють кути між бісектрисами трикутника?

5.67.** Чи може кут між бісектрисами двох кутів трикутника бути прямим?

5.68.*** Два кути трикутника дорівнюють α і β, до того ж $\alpha < \beta$. З вершини третього кута проведені висота й бісектриса. Чому дорівнює кут між висотою та бісектрисою?

5.69.** У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, удвічі менша від основи.

а) Виконайте рисунок і знайдіть на ньому всі рівнобедрені прямокутні трикутники.

б) Чому дорівнюють кути даного трикутника?

5.70.*** Кути трикутника відносяться як 1:3:4. Доведіть: бісектриса найбільшого кута трикутника дорівнює одній зі сторін.

5.71.** Усередині трикутника ABC відмітили точку O. Доведіть: кут ABC менший від кута AOC.

5.72.*** У рівнобедреному трикутнику ABC кут B дорівнює 108°. Через точку D перетину бісектриси AD зі стороною BC проведена пряма, перпендикулярна до AD, яка перетинає сторону AC в точці E, а продовження сторони AB — у точці K. Знайдіть *усі* рівнобедрені трикутники.

5.66. Скористайтеся тим, що бісектриса ділить кут навпіл, а також тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°. Зауважте: якщо не перпендикулярні прямі перетинаються, то кутом між прямими називають *менший* з кутів, утворених при перетині прямих.

5.67. Скористайтеся тим, що сума двох кутів трикутника менша від 180°.

5.69. а) Скористайтеся властивістю бісектриси, проведеної до основи рівнобедреного трикутника (медіана і висота).

5.70. Зручно позначити кути даного трикутника x, $3x$, $4x$ і знайти всі кути утворених трикутників. Скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника.

5.71. Скористайтеся тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°, і тим, що кути в трикутнику AOC при вершинах A і C менші, ніж кути в трикутнику AOB при тих самих вершинах.

5.73.** Прямі, на яких лежать сторони трикутника ABC, перетинають пряму a під кутами 30°, 80° і 40° (рис. 39). Чому дорівнюють кути трикутника ABC (ж)?

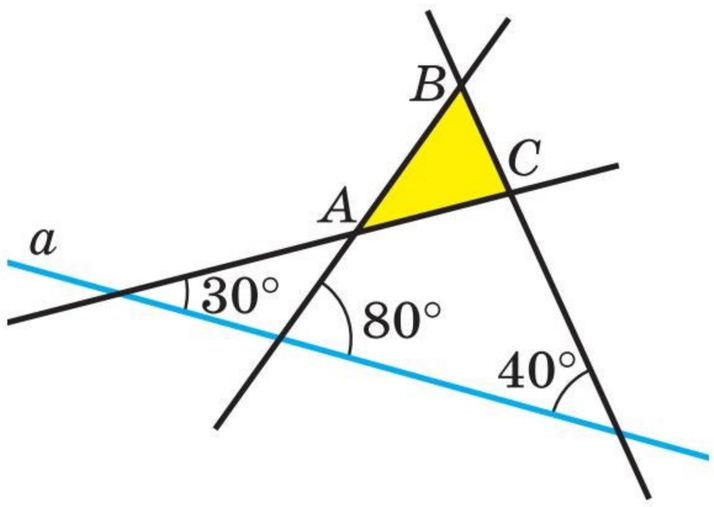


Рис. 39

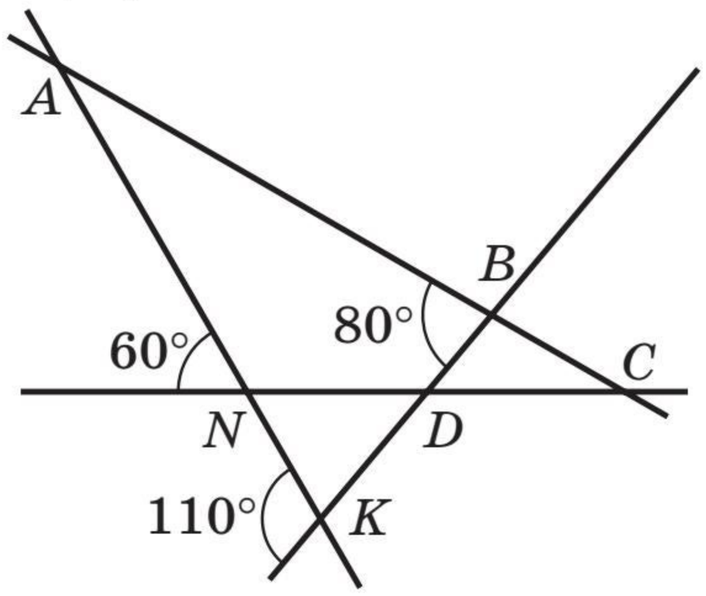


Рис. 40

Подібне завдання

5.74.*** Знайдіть усі невідомі кути на рисунку 40.

5.75.** При перетині прямих a і b січною c утворилися чотири кути по 73° і чотири кути по 107°.

а) Чи обов'язково перетинаються прямі a і b?

б) Якщо прямі a і b перетинаються, то чому дорівнює кут між ними?

Подібні завдання (5.76–5.77)

5.76.** При перетині прямих a і b січною c утворилось два кути по 34° і два кути по 36°.

а) Чи обов'язково перетинаються прямі a та b?

б) Якщо прямі a та b перетинаються, то чому дорівнює кут між ними?

5.77.** Прямі a та b перетинає січна c (рис. 41).

а) З якого боку від січної c (ліворуч чи праворуч) розташована точка перетину прямих a і b?

б) Чому дорівнює кут між прямими a та b?

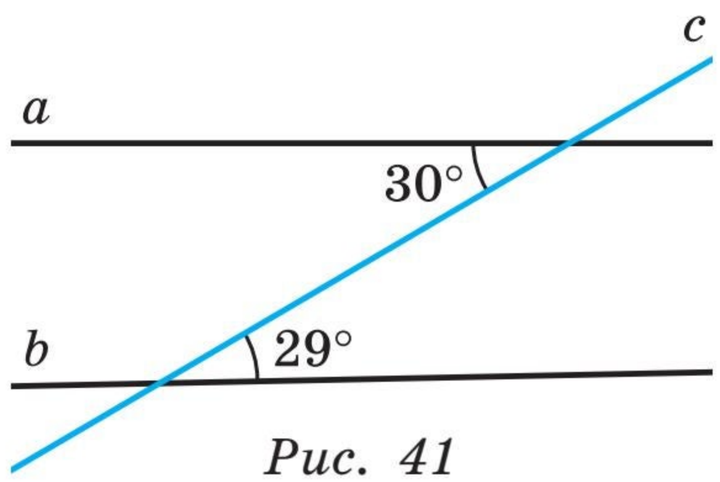


Рис. 41

5.75. Скористайтеся однією з ознак паралельності прямих, а також тим, що сума кутів трикутника, утвореного прямими a, b і c, дорівнює 180°.

5.76. Скористайтеся однією з ознак паралельності прямих, а також тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°. Зауважте: якщо при перетині прямих утворюються нерівні кути, то кутом між прямими вважають менший з кутів, що утворилися.

5.77. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника.

Кути з відповідно перпендикулярними сторонами

5.78.* Доведіть:

кути з відповідно перпендикулярними сторонами або рівні (рис. 42, *а*), або їх сума дорівнює 180° (рис. 42, *б*).

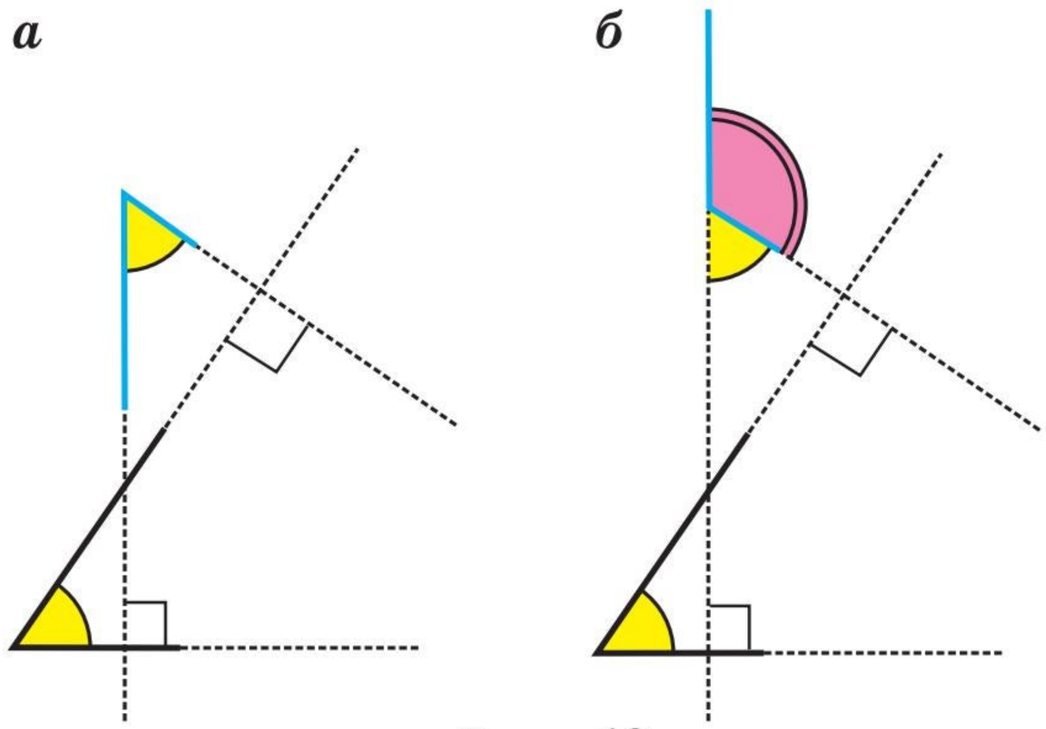


Рис. 42

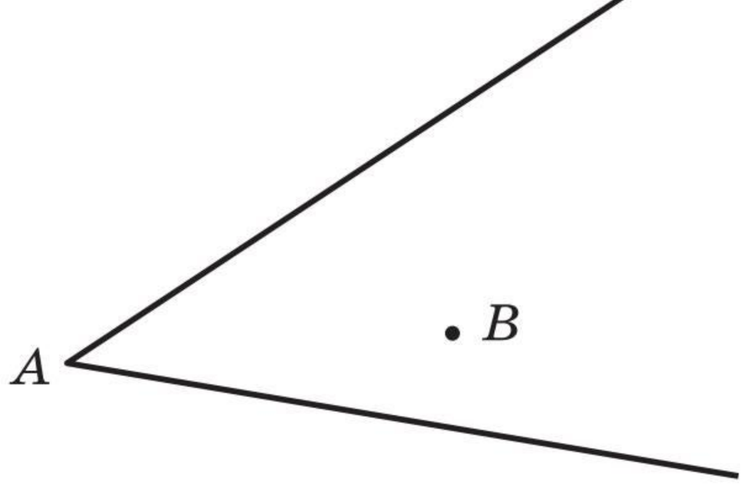


Рис. 43

5.79.** На рис. 43 зображено кут A і точку B всередині кута.

а) Перенесіть рисунок у зошит і побудуйте кути, вершина яких лежить у точці B, а сторони перпендикулярні сторонам кута A. Скільки таких кутів можна побудувати?

б) Як градусні міри побудованих кутів пов'язані з градусною мірою кута A?

Подібні завдання (5.80–5.81)

5.80.** Висоти AD і BK гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці O. Відомо, що $\angle ACB = \gamma$.

а) Виконайте рисунок і знайдіть на ньому всі кути, що дорівнюють γ.

б) Знайдіть на рисунку кути, що дорівнюють $180° - \gamma$.

5.81.** Продовження висот AD і BK тупокутного трикутника ABC перетинаються в точці O. Відомо, що $\angle ACB = \alpha$, до того ж $\alpha > 90°$. Чому дорівнює кут AOB?

Зовнішній кут трикутника

У: Кут, суміжний з будь-яким кутом трикутника, називають *зовнішнім* кутом трикутника.

5.78. Скористайтеся властивістю вертикальних кутів, перпендикулярністю позначених прямих, а також тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

5.80. Знайдіть кути з відповідно перпендикулярними сторонами.

На рис. 44 зовнішні кути трикутника ABC позначені цифрами *1*, *2*, *3*.

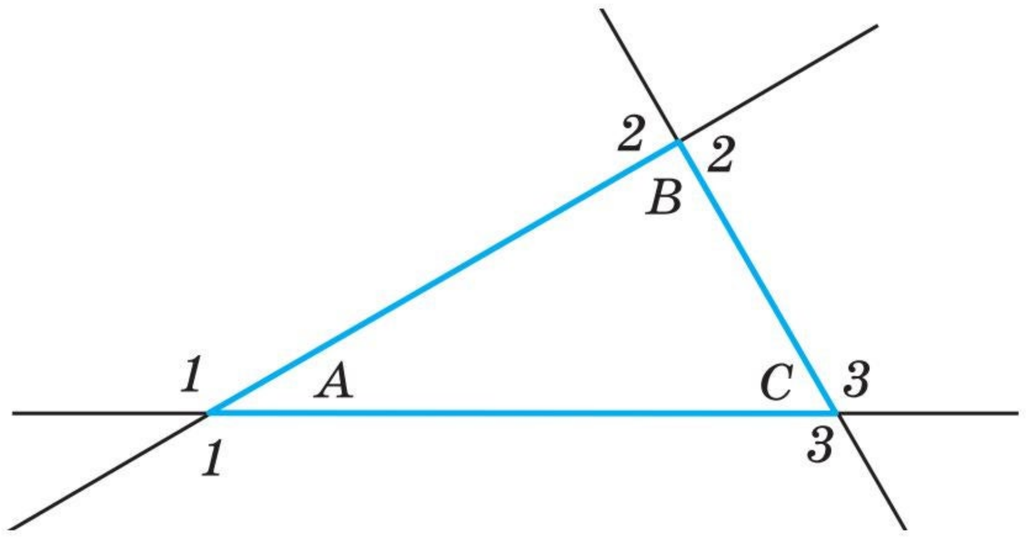


Рис. 44

5.82.* Чому кути, позначені однаковими цифрами на рис. 44, рівні?

Ф: У кожного кута трикутника є *два* суміжні з ним кути. Який з них вважають зовнішнім кутом?

У: Коли кажуть про зовнішній кут трикутника при деякій вершині, то мають на увазі *будь-який один* із двох рівних кутів, суміжних з кутом трикутника при цій вершині.

5.83.* Чому дорівнюють усі зовнішні кути:
а) трикутника ABC, якщо $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$?
б) рівностороннього трикутника?

К: На прикладі попереднього завдання видно, що в трикутника може бути два тупі зовнішні кути.

Ф: Усі три зовнішні кути трикутника можуть бути тупими: наприклад, такими є зовнішні кути рівностороннього трикутника.

К: Мені здається, що в *будь-якого* трикутника *не менше* двох тупих зовнішніх кутів.

5.84.* Чи згодні ви з Катериною?

Ф: Виконуючи завдання 5.83, я помітив, що кожний зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним. Думаю, що це можна узагальнити:

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

5.82. Скористайтеся теоремою про вертикальні кути.

5.83. Скористайтеся теоремою про суміжні кути і теоремою про суму кутів трикутника.

5.84. Скористайтеся тим, що в будь-якого трикутника не менше двох гострих кутів, і теоремою про суміжні кути.

5.85.* Доведіть припущення Федора.

5.86.* На рис. 45 промінь CM паралельний стороні AB трикутника ABC, а точки A, C, N лежать на одній прямій.

а) Перенесіть рисунок у зошит і позначте на ньому рівні кути.

б) Використовуючи рисунок із заданими рівними кутами, поясніть, чому цей рисунок наочно показує, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

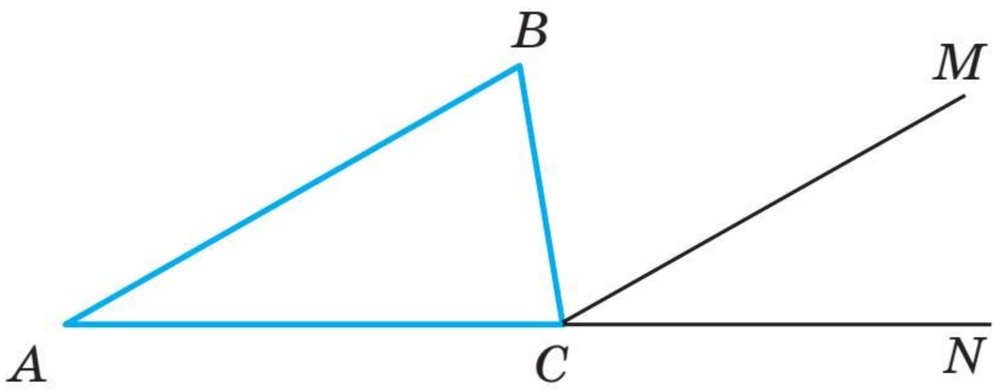


Рис. 45

5.87.* Чому дорівнює сума всіх зовнішніх кутів трикутника (по одному при кожній вершині)?

5.88.** Доведіть: зовнішній кут при вершині між бічними сторонами рівнобедреного трикутника вдвічі більший від кута при основі трикутника.

У: Для зовнішнього кута трикутника справедливою є така важлива *нерівність*, яка стане потрібною згодом.

5.89.* Доведіть:

зовнішній кут трикутника *більший* від кожного з кутів трикутника, не суміжних з ним.

5.90.** Доведіть: бісектриса зовнішнього кута при вершині між бічними сторонами рівнобедреного трикутника паралельна основі.

5.85. Скористайтеся тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°, а також тим, що сума будь-якого кута трикутника із суміжним з ним кутом також дорівнює 180°.

5.87. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

5.88. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним, і властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника.

5.89. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

5.90. Скористайтеся тим, що зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника, протилежний основі, удвічі більший від кута при основі, й ознакою паралельності прямих.

Подібні завдання (5.91–5.92)

5.91.** Доведіть: якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна прямій, на якій лежить протилежна сторона трикутника, то цей трикутник рівнобедрений.

5.92.** Доведіть: зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює сумі прямого кута й половини кута при вершині між бічними сторонами.

5.93.** Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Чому дорівнюють кути трикутника? Розгляньте всі можливі варіанти.

Подібне завдання

5.94.** Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. Чому дорівнюють кути трикутника?

5.95. Доведіть:

а)*дві висоти прямокутного трикутника збігаються з його катетами, а третя висота лежить усередині трикутника (рис. 46, *а*);

б)**усі висоти гострокутного трикутника лежать усередині трикутника (рис. 46, *б*);

в)***дві висоти тупокутного трикутника, проведені з вершин гострих кутів, лежать зовні трикутника, а третя висота лежить усередині трикутника (рис. 46, *в*).

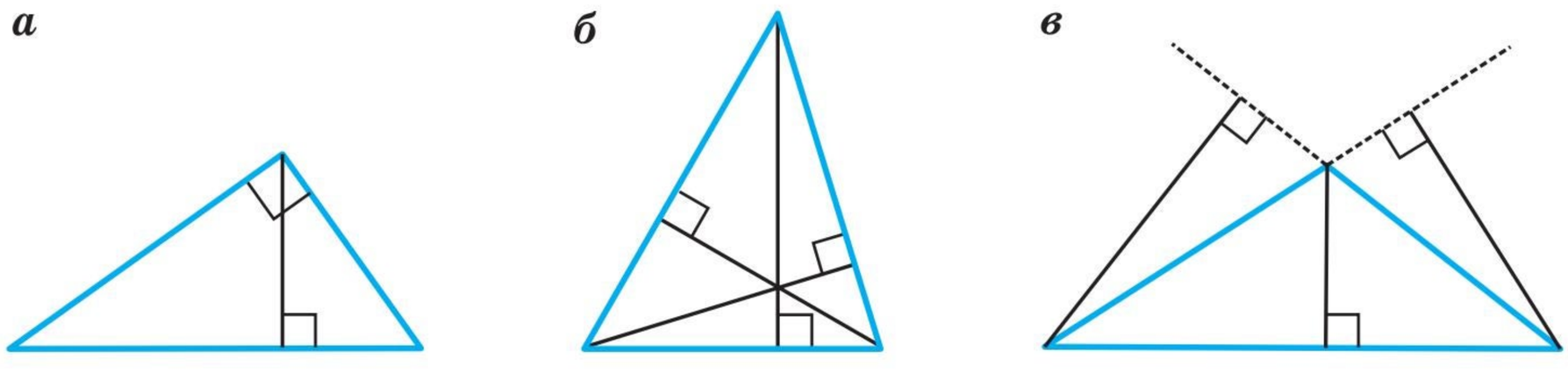


Рис. 46

5.91. Скористайтеся властивостями кутів при паралельних прямих і січній та ознакою рівнобедреного трикутника.

5.93. Зауважте, що даний зовнішній кут може бути при вершині між бічними сторонами або при вершині при основі.

5.94. Зауважте, що даний зовнішній кут може бути тільки при вершині між бічними сторонами.

Подібне завдання

5.96.*** Доведіть:

а) якщо одна висота трикутника збігається з його стороною, то трикутник прямокутний і ще одна його висота також збігається зі стороною (рис. 46, *а*);

б) якщо всі три висоти лежать усередині трикутника, то трикутник гострокутний (рис. 46, *б*);

в) якщо одна висота трикутника лежить зовні трикутника, то трикутник тупокутний і ще одна його висота також лежить зовні трикутника (рис. 46, *в*).

5.97.** У гострокутному трикутнику один з кутів дорівнює 40°. Чому дорівнює кут між прямими, на яких лежать висоти, проведені з двох інших вершин трикутника?

Подібне завдання

5.98.** У трикутнику один з кутів дорівнює 140°. Чому дорівнює кут між прямими, на яких лежать висоти, проведені з двох інших вершин трикутника?

5.99.** З вершин кутів A і C гострокутного трикутника ABC проведено бісектриси кутів AM і CK і бісектриси зовнішніх кутів CM і AK (рис. 47). Кут B дорівнює β.

а) Знайдіть на рисунку всі прямокутні трикутники. Запишіть їх позначення.

б) Знайдіть кут AMC.

в) Знайдіть кут AKC.

г) Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси зовнішніх кутів трикутника.

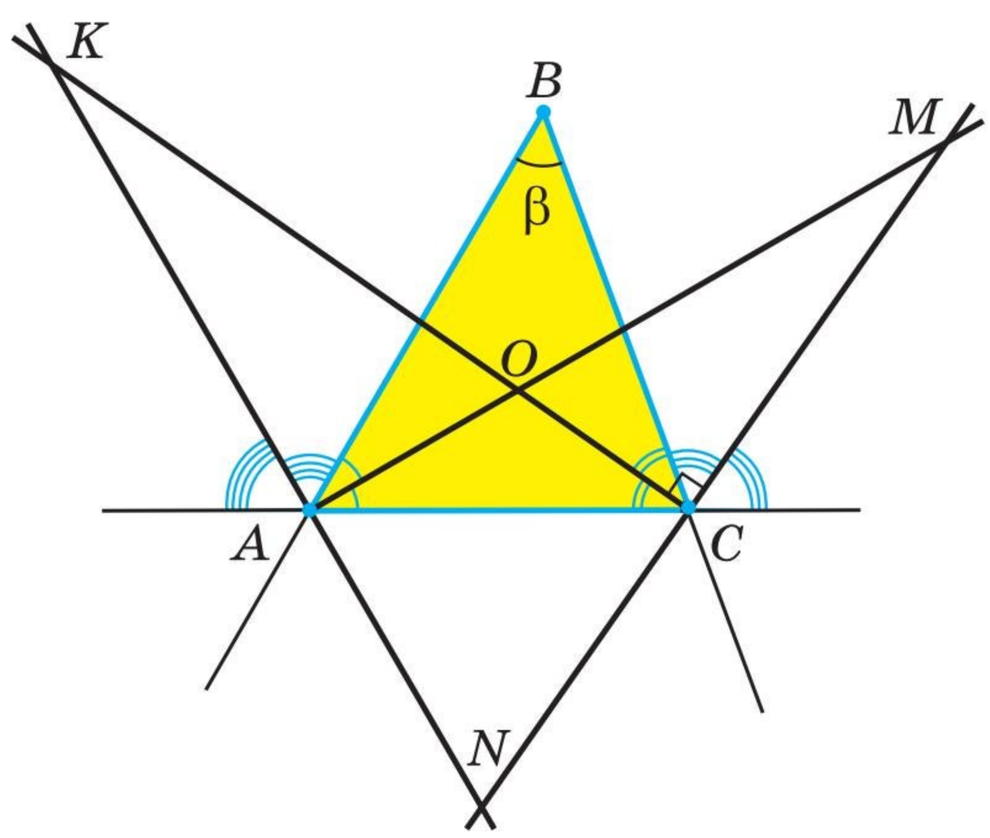


Рис. 47

5.98. Якщо при перетині двох прямих утворюються нерівні кути, то кутом між цими прямими називають *менший* з утворених кутів.

5.99. а) Скористайтеся тим, що кут між бісектрисами суміжних кутів прямий; б, в) скористайтеся тим, що сума кутів A і C трикутника ABC дорівнює $180° - \beta$ і тим, що AM і CK — бісектриси, а відтак тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°; г) скористайтеся результатами попередніх пунктів.

Подібне завдання

5.100.** Кут A при основі рівнобедреного трикутника ABC дорівнює α. З вершин кутів при основі проведено бісектриси кутів і бісектриси зовнішніх кутів.

а) Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси кутів при основі.

б) Знайдіть кут, утворений бісектрисою кута при основі й бісектрисою зовнішнього кута при іншій вершині кута при основі.

в) Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси зовнішніх кутів при основі.

5.101.** Доведіть: на рис. 48 кут A більший від кута C.

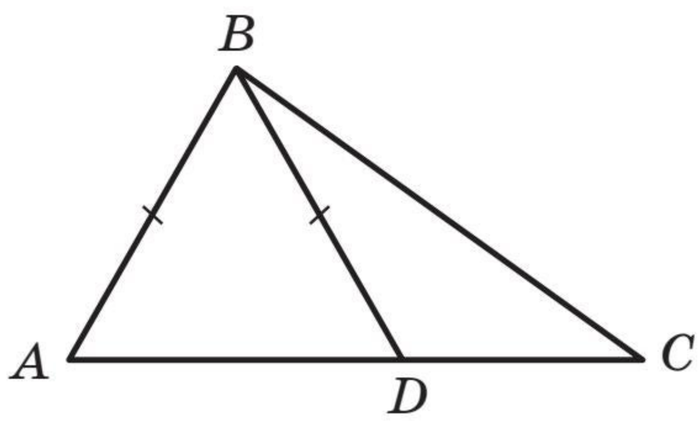


Рис. 48

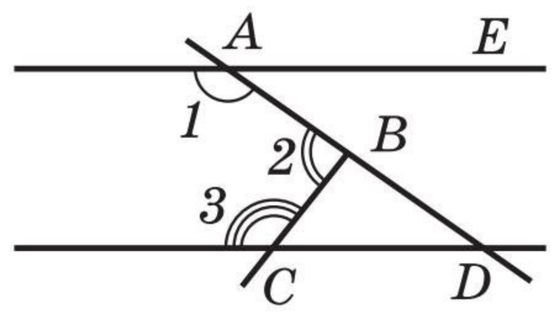


Рис. 49

5.102.** На рисунку 49 прямі AE і CD паралельні. Чому дорівнює сума кутів 1, 2, 3?

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЯ?

Використовуючи рис. 50, сформулюйте основні твердження глави (означення, аксіоми, теореми). Можна сформулювати кілька тверджень (по одному під час кожного піднесення руки). Перемоги (і заохочувального бала на розсуд учителя / учительки) удостоюють того / ту учня / учениці, після якого / якої ніхто не зміг нічого додати протягом, наприклад, пів хвилини.

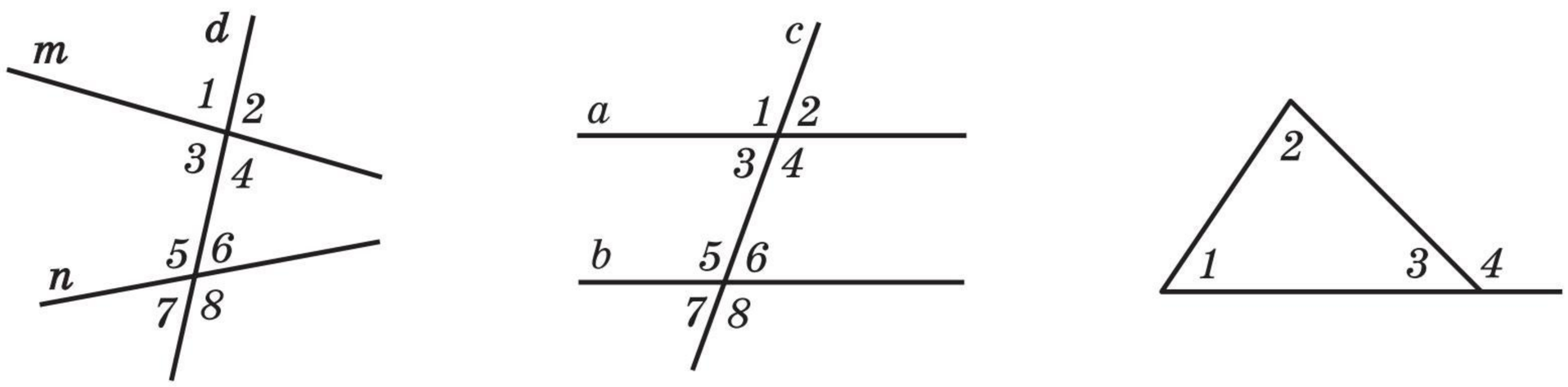


Рис. 50

5.101. Скористайтеся властивістю зовнішнього кута трикутника та властивістю рівнобедреного трикутника.

5.102. Скористайтеся властивістю паралельних прямих, а також тим, що сума зовнішніх кутів трикутника дорівнює 360°.

6. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

У: На рис. 51 точка A_1 — середина сторони BC трикутника ABC, до того ж $C_1A_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel BA$. Які запитання можна поставити за цим рисунком?

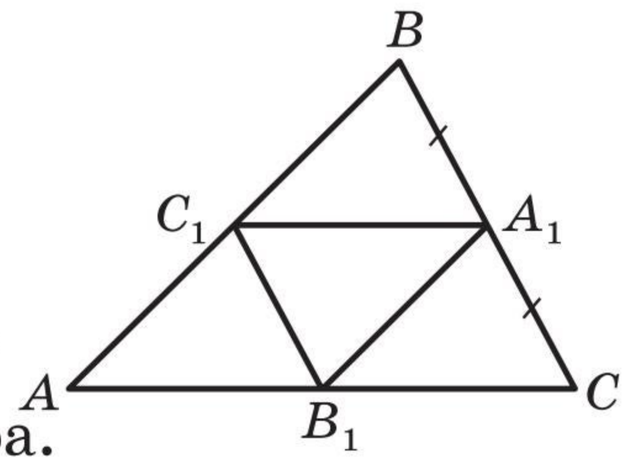


Рис. 51

Ф: Чи є рівними кути BC_1A_1 і BAC на рис. 51?

5.103.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є рівними кути BA_1C_1 і BCA на рис. 51?

5.104.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є рівними кути ABC і B_1A_1C на рис. 51?

5.105.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є рівними кути B_1AC_1 і CB_1A_1 на рис. 51?

5.106.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є рівними трикутники A_1BC_1 і CA_1B_1 на рис. 51?

5.107.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є рівними кути $C_1A_1B_1$ і A_1B_1C на рис. 51?

5.108.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи дорівнює трикутник $A_1B_1C_1$ кожному з трикутників C_1BA_1 або B_1A_1C на рис. 51?

5.109.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є рівними кути $A_1C_1B_1$ і C_1B_1A на рис. 51?

5.110.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є рівними кути $A_1B_1C_1$ і B_1C_1A на рис. 51?

5.111.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи паралельні прямі C_1B_1 і BC на рис. 51?

5.112.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи дорівнює трикутник AC_1B_1 кожному з трикутників C_1BA_1, B_1A_1C, $A_1B_1C_1$ на рис. 51?

5.113.* Дайте відповідь на запитання Федора.

5.103. Скористайтеся тим, що $C_1A_1 \parallel CA$.

5.10.5 Скористайтеся тим, що $A_1B_1 \parallel AB$.

5.10.7 Скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

5.108. Скористайтеся тим, що $C_1A_1 \parallel CA$.

5.109. Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників.

5.110. Скористайтеся будь-яким зі співвідношень $C_1A_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel BA$.

5.112. Скористайтеся ознакою паралельності прямих.

5.113. Скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

У: Дослідимо тепер іншу фігуру.
У трикутнику ABC медіана AM, висота BH і бісектриса CD перетинаються в точці O. Кут BCA дорівнює $60°$. Які запитання можна поставити?

К: Спочатку виконаємо рисунок (рис. 52). Він буде приблизним, оскільки ми не знаємо ще, чому дорівнюють кути B і A.

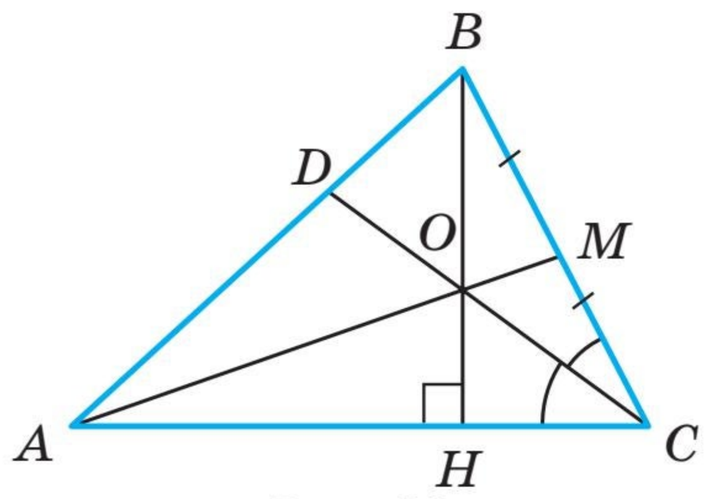


Рис. 52

Ф: Чому дорівнюють кути трикутників COH і CBH на рис. 52?

5.114.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнюють кути трикутника COB?

5.115.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнює кут між OM і BC?

5.116.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнюють кути COM і BOM?

5.117.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є рівними AB і AC?

5.118.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнюють кути трикутника AOH?

5.119.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнюють кути трикутника AOD?

5.120.** Дайте відповідь на запитання Федора.

5.114. Скористайтеся тим, що трикутники COH і CBH прямокутні, а також тим, що CD — бісектриса кута BCA.

5.116. Доведіть, що трикутник COB рівнобедрений, і скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника.

5.117. Скористайтеся тим, що трикутники COM і BOM прямокутні й один з кутів кожного з трикутників дорівнює $30°$.

4.118. Скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника (медіана збігається з висотою).

5.119. Скористайтеся властивістю вертикальних кутів і тим, що трикутник AOH прямокутний.

5.120. Скористайтеся тим, що медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, збігається з його бісектрисою, а також властивістю вертикальних кутів.

К: Чи є рівними AC і BC?

5.121.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є трикутник ABC на рис. 52 рівностороннім?

5.122.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Що можна сказати про шість трикутників на рис. 52, на які ділять даний трикутник ABC відрізки AM, BH і CD?

5.123.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Наш початковий рисунок виявився справді приблизним.

У: Так зазвичай і буває, коли ми креслимо фігуру, про яку знаємо ще не все.

К: Чи вважатиметься такий приблизний рисунок помилкою на контрольній роботі?

У: Ні, але це бажано написати.

Ф: Чи потрібно після розв'язання задачі зробити правильний рисунок?

У: За нього вам уже точно не знизять бал!

5.124.** На кожному рис. 53 задайте кути, які достатньо знати для того, щоб знайти решту кутів. Знайдіть ці кути.

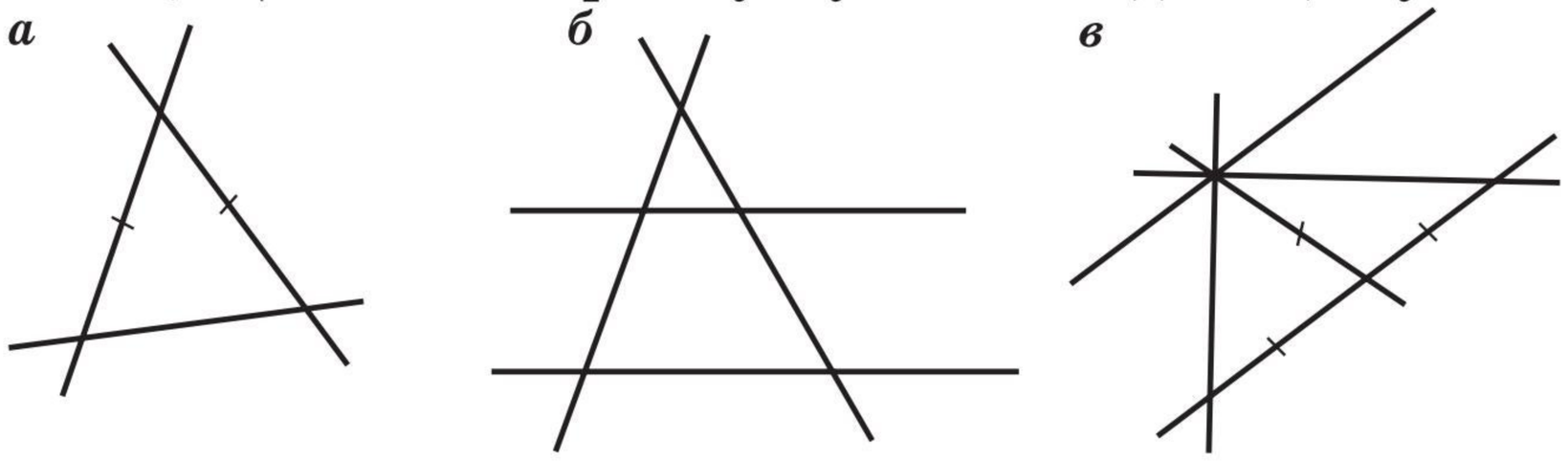


Рис. 53

5.125.*** На кожному рис. 54, *а–б* задайте кути, які достатньо знати для того, щоб знайти решту кутів. Знайдіть ці кути.

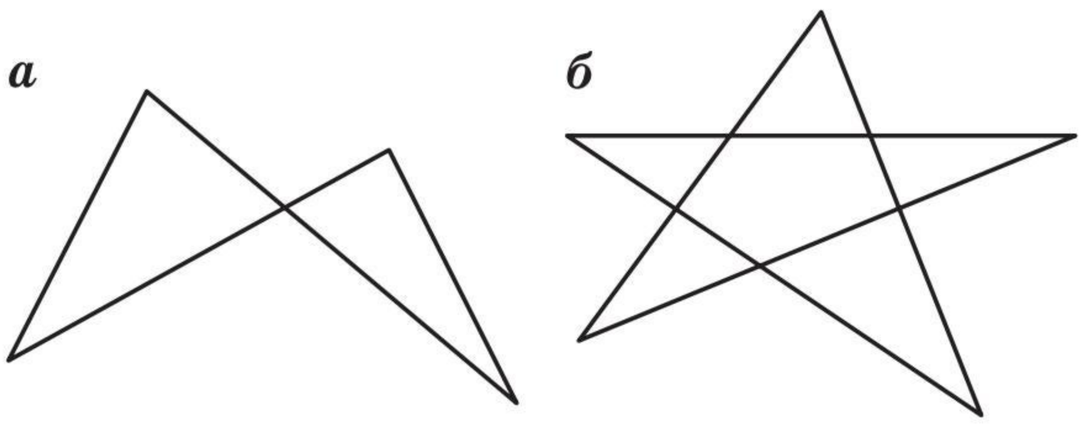


Рис. 54

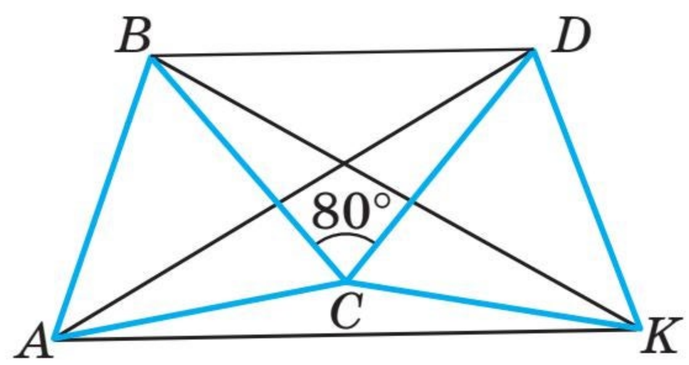


Рис. 55

5.121. Скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника (бісектриса збігається з висотою).

5.124. На рис. 53, *б*, *в* можна в тексті (але не обов'язково!) задати кути так, щоб дві прямі були паралельними.

5.126.** На рис. 55 два рівні рівносторонні трикутники ABC і KDC мають спільну вершину. Яку інформацію можна отримати за цим рисунком?

Ф: Ми вже знаємо, що сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°. А сума кутів будь-якого чотирикутника також дорівнює певному числу? І якщо так, то чому дорівнює це число?

У: Спробуйте з'ясувати це самі. Обмежимося поки *опуклими* чотирикутниками. Чотирикутник називають опуклим, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить одну з його сторін. Наприклад, чотирикутник на рисунку 56, *а* — опуклий, а чотирикутник на рисунку 56, *б* — неопуклий.

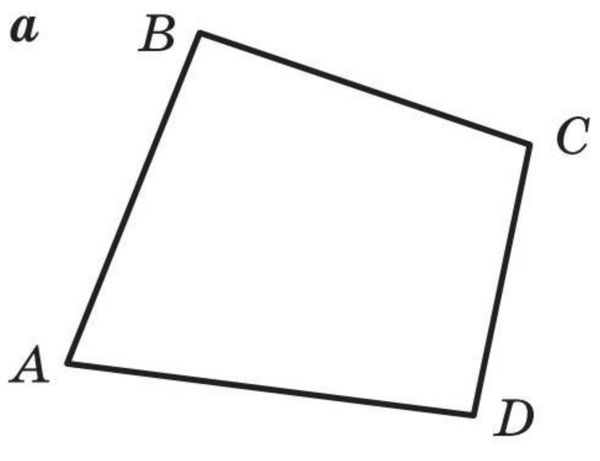


Рис. 56

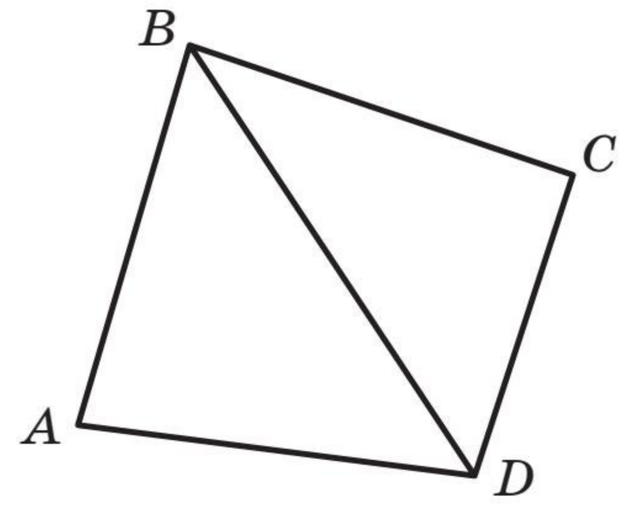


Рис. 57

К: Опуклий чотирикутник можна розділити на два трикутники (рис. 57)!

5.127.** Використовуючи рис. 57, знайдіть суму кутів опуклого чотирикутника.

К: Опуклі п'ятикутники і шестикутники визначають так само, як опуклі чотирикутники?

У: Так.

Ф: Знайдемо тепер, чому дорівнюють суми кутів опуклих п'ятикутника і шестикутника.

5.128.** Знайдіть суму кутів кожного многокутника на рис. 58.

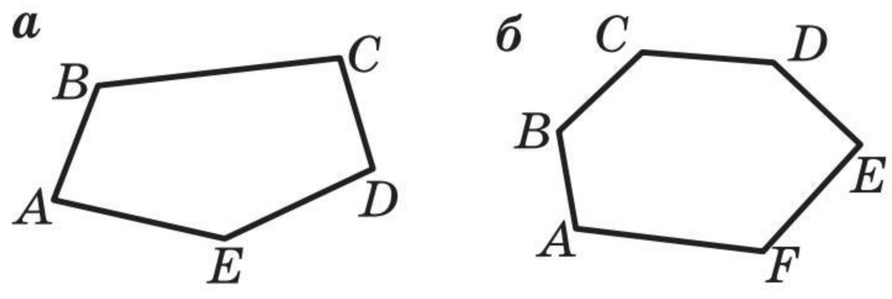


Рис. 58

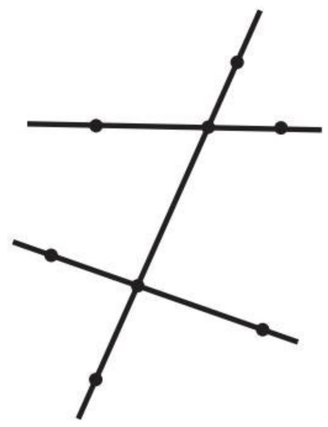
5.127. Доведіть, що сума кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів *двох* утворених трикутників.

ТРИРІВНЕВІ ДОМАШНІ АБО САМОСТІЙНІ ЗАВДАННЯ

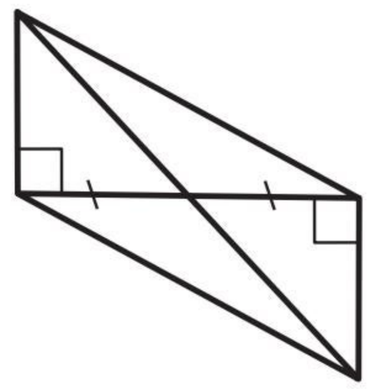
(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C.
Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

Паралельні прямі

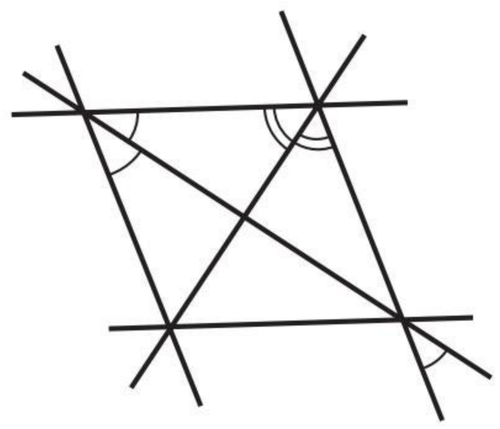
5.129.* Позначте зображені на рисунку точки.
а) Укажіть пари різносторонніх кутів.
б) Позначте рівні кути й запишіть рівності кутів.



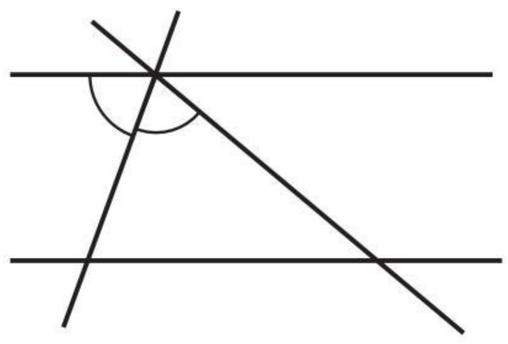
5.131.** Позначте на рисунку вершини всіх трикутників.
а) Запишіть паралельність прямих.
б) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівності трикутників.
в) Позначте на рисунку рівні кути. Запишіть рівності кутів.



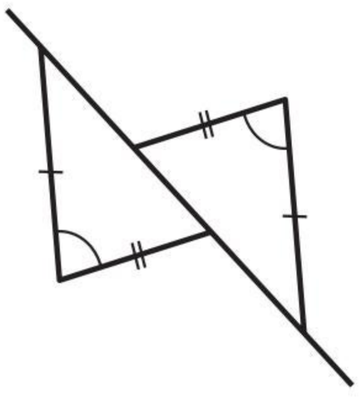
5.133.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть паралельні прямі. Запишіть паралельність прямих.
б) Знайдіть рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.
в) Знайдіть перпендикулярні прямі. Запишіть перпендикулярність прямих.

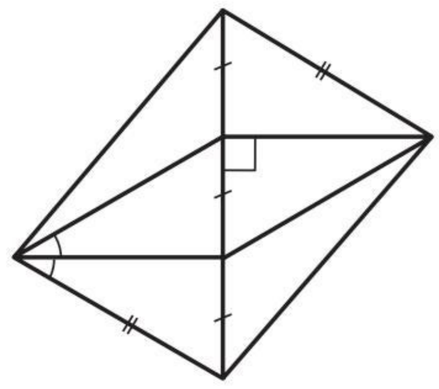


5.135.** Позначте точки, за допомогою яких можна позначити всі кути на рисунку.
а) Задайте самостійно такі значення деяких двох кутів на рисунку, щоб дві прямі були паралельні. Запишіть на рисунку градусні міри цих кутів.
б) Знайдіть решту кутів.



5.137.** Позначте вершини всіх трикутників.
а) Знайдіть рівні трикутники. Запишіть рівність трикутників.
б) Знайдіть паралельні прямі. Запишіть паралельність прямих.

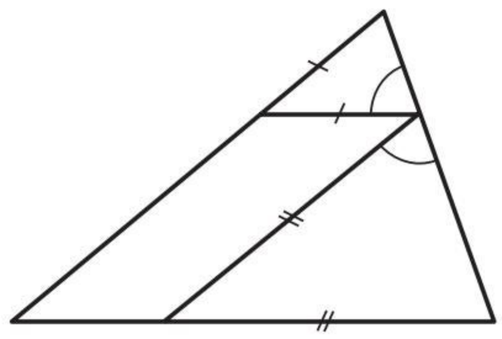




5.139.** Позначте вершини всіх трикутників.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Знайдіть паралельні прямі. Запишіть паралельність прямих.



5.141. Позначте вершини всіх трикутників.

а) Позначте на рисунку рівні кути й запишіть рівності кутів.

б) Знайдіть паралельні прямі. Запишіть паралельність прямих.

5.143.** На аркуші в клітинку позначте 4 точки у вузлах клітинок так, щоб через них можна було провести дві пари паралельних прямих, що не лежать на лініях клітинок. Проведіть ці прямі та позначте точки. Запишіть паралельність прямих.

5.145.*** На аркуші в клітинку проведіть дві паралельні прямі, що не лежать на лініях клітинок. Проведіть січну, яка перетинає паралельні прямі у вузлах клітинок.

а) Позначте 4 точки так, щоб за їх допомогою можна було позначити два кути, рівність яких випливає з паралельності прямих. Позначте ці точки й запишіть рівність цих кутів.

б) Позначте на рисунку всі пари рівних кутів.

5.147.* Накресліть паралельні прямі, які перетинає січна. Задайте самостійно кратну 4 градусну міру одного з кутів на рисунку й запишіть її. Знайдіть градусні міри решти кутів.

5.149.** Запишіть довільне натуральне число b, не більше від 45. Прийміть, що один із кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на b градусів більший від другого. Зробіть рисунок, знайдіть і запишіть на ньому градусні міри всіх кутів.

5.150.** Запишіть довільне натуральне число k. Прийміть, що один з односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у k разів більший від другого. Зробіть рисунок, знайдіть і запишіть на ньому градусні міри всіх кутів.

5.153.** Запишіть довільне натуральне число b, не більше від 150. Прийміть, що різниця двох кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює b градусів. Зробіть рисунок, знайдіть і запишіть на ньому градусні міри всіх кутів.

5.155.*** Один з односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на b градусів більший від другого.

а) Виразіть градусні міри всіх утворених кутів через b.

б) Задайте самостійно значення b і запишіть його. Знайдіть і запишіть на рисунку градусні міри всіх утворених кутів.

Сума кутів трикутника

Наведіть 3 приклади можливих значень трьох кутів (5.157—5.163):

5.157.* довільного трикутника.

5.158.* гострокутного трикутника.

5.159.* тупокутного трикутника.

5.161.* рівнобедреного трикутника.

5.162.* рівнобедреного гострокутного трикутника.

5.163.* рівнобедреного тупокутного трикутника.

Наведіть 3 приклади можливих значень усіх кутів (5.164—5.166):

5.164.* трикутника, якщо один із його кутів дорівнює $35°$.

5.166.* трикутника, якщо один із його кутів $135°$.

5.167.** Запишіть довільне натуральне число k. Прийміть, що один із кутів трикутника в k разів більший від другого. Знайдіть і запишіть можливі значення всіх кутів трикутника. Наведіть 3 приклади.

5.168.** Запишіть довільне натуральне число b, не більше від 135. Прийміть, що один із кутів трикутника на b градусів більший від другого. Знайдіть і запишіть можливі значення всіх кутів трикутника. Наведіть 3 приклади.

5.170.** Запишіть два довільні натуральні числа a і b. Прийміть, що градусні міри трьох кутів трикутника відносяться як $a : b : (a + b)$. Знайдіть кути трикутника.

5.172.*** Кут при основі рівнобедреного трикутника на a градусів більший від кута, протилежного основі.

а) Виразіть градусні міри всіх кутів трикутника через a.

б) Задайте самостійно значення a і запишіть його. Знайдіть і запишіть на рисунку градусні міри всіх кутів трикутника.

5.174.*** Запишіть два довільні натуральні числа a і b, сума яких не більша від 160. Прийміть, що градусні міри двох кутів трикутника дорівнюють a і b градусів. Знайдіть градусну міру кута між прямими, на яких лежать бісектриси цих кутів трикутника.

5.176.*** Запишіть довільне натуральне число b, не більше від 150. Прийміть, що один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює b градусів. Знайдіть можливі значення всіх кутів трикутника. Наведіть 3 приклади.

5.178.*** Запишіть довільне натуральне число $190 < b < 350$. Прийміть, що сума двох зовнішніх кутів трикутника дорівнює b градусів. Знайдіть можливі значення всіх кутів трикутника. Наведіть 3 приклади.

5.180.*** Один із кутів трикутника дорівнює α, а один із його зовнішніх кутів (при іншій вершині) дорівнює β.

а) Виразіть градусні міри всіх кутів трикутника через α і β.

б) Задайте самостійно значення α і β і запишіть їх. Знайдіть градусні міри всіх кутів трикутника.

5.183.** Накресліть три прямі, що попарно перетинаються.

а) Оберіть і позначте на рисунку кути, знаючи які можна знайти решту кутів.

б) Задайте й запишіть на рисунку градусні міри вибраних кутів. Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.

5.184.*** Накресліть чотири прямі, що перетинаються попарно.

а) Оберіть і позначте на рисунку кути, знаючи які, можна знайти решту кутів.

б) Задайте й запишіть на рисунку градусні міри вибраних кутів. Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.

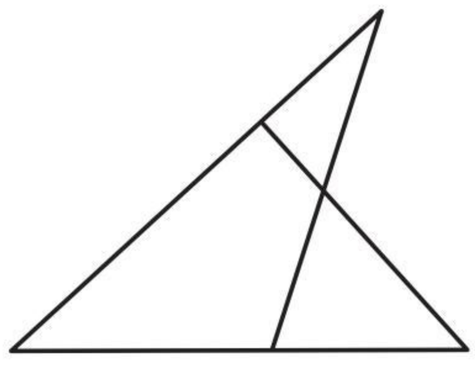
5.186.*** Накресліть чотири прямі, три з яких перетинаються в одній точці, а четверта — паралельна одній із цих трьох прямих.

а) Оберіть і позначте на рисунку кути, знаючи які можна знайти решту кутів.

б) Задайте й запишіть на рисунку градусні міри вибраних кутів. Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.

5.188.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку. Позначте на рисунку рівні кути.

а) Оберіть і позначте на рисунку кути, знаючи які можна знайти решту кутів.



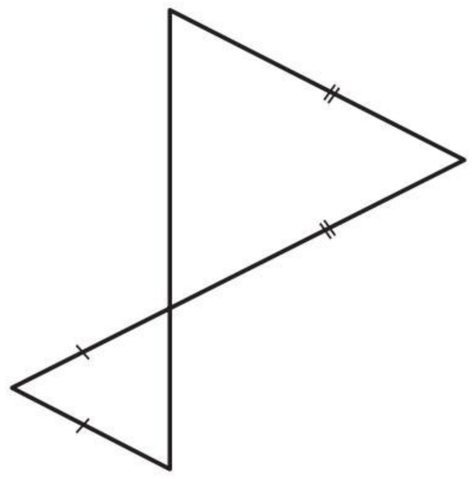
б) Задайте й запишіть на рисунку градусні міри вибраних кутів. Знайдіть і запишіть градусні міри решти кутів.

5.190.** Позначте вершини всіх трикутників.

а) Знайдіть паралельні прямі й запишіть їх паралельність.

б) Задайте градусну міру одного з кутів.

в) Знайдіть решту кутів і запишіть їх градусні міри.



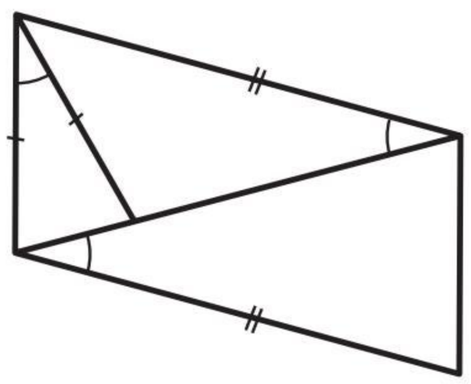
5.192.** Позначте вершини всіх трикутників. Позначте рівні кути.

а) Знайдіть паралельні прямі. Запишіть паралельність прямих.

б) Знайдіть рівнобедрені трикутники та запишіть їх позначення із зазначенням основи.

в) Задайте градусну міру одного з кутів і запишіть її.

г) Знайдіть і запишіть на рисунку градусні міри решти кутів.

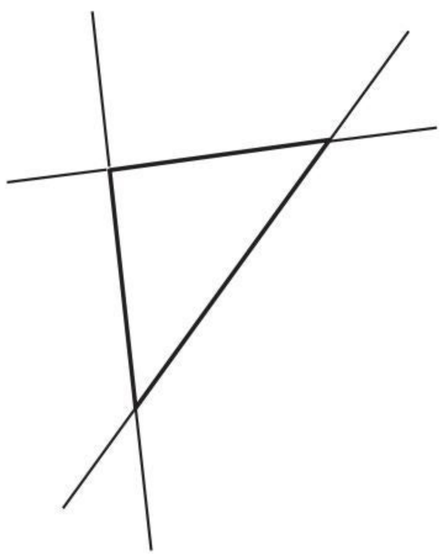


5.194.** Позначте точки, за допомогою яких можна записати всі кути на рисунку.

а) Оберіть і позначте на рисунку кути, знаючи які можна знайти решту кутів.

б) Задайте і запишіть на рисунку градусні міри вибраних кутів.

в) Знайдіть і запишіть на рисунку градусні міри решти кутів.

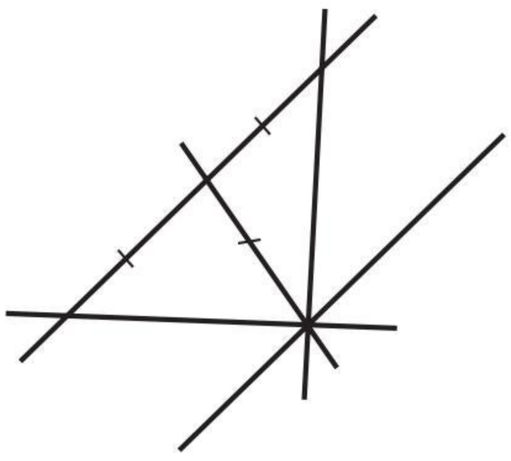


5.196.*** Позначте точки, за допомогою яких можна записати всі кути на рисунку.

а) Оберіть і позначте на рисунку кути, знаючи які можна знайти решту кутів.

б) Задайте і запишіть на рисунку градусні міри вибраних кутів.

в) Знайдіть і запишіть на рисунку градусні міри решти кутів.



ГЛАВА 6. НЕРІВНОСТІ В ТРИКУТНИКУ. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК



1. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Для чого потрібні нерівності?

У: При вивченні геометричних фігур ми спочатку доводили, а потім застосовували різні *рівності* для кутів і відрізків. Однак є цікаві задачі, для розв'язання яких потрібно використовувати *нерівності*.

К: Наведіть, будь ласка, приклад.

У: На цій схемі (рис. 1) зображено пряму залізничну колію d і два невеликі селища A і B. Де потрібно побудувати залізничну станцію C, якщо ми хочемо, щоб *сума довжин* прямих доріг AC і CB була найменшою?

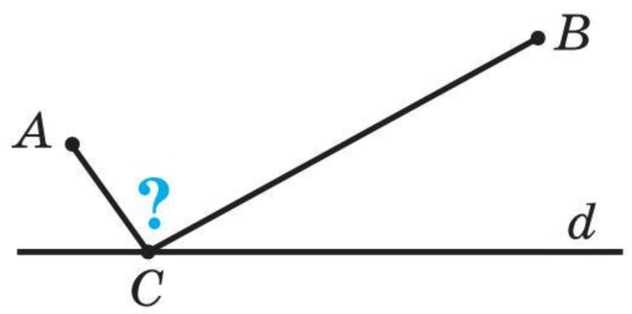


Рис. 1

Ф: Справді цікава задача! Але я не уявляю, як до неї підступитися...

У: Підкажу ідею. Замініть селище B селищем B_1, розташованим на іншій стороні залізниці так, як показано на рисунку 2. Буквою H позначено точку перетину відрізка BB_1, перпендикулярного до прямої d, з цією прямою.

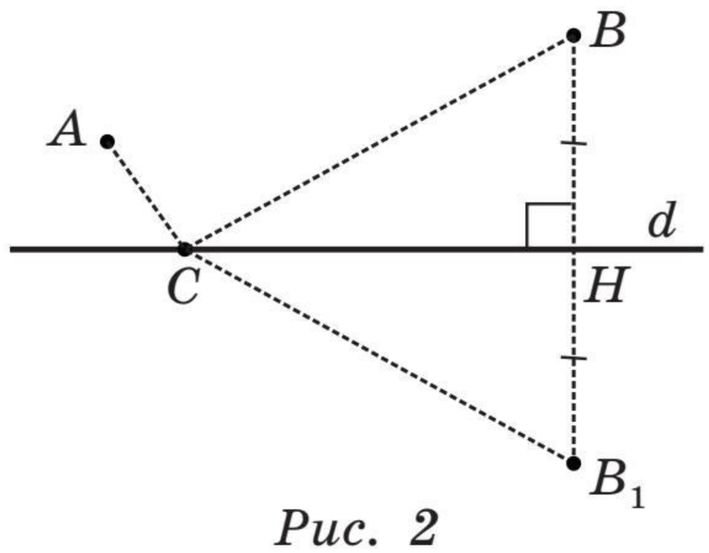


Рис. 2

К: Розв'язавши задачу із селищем B_1, ми одночасно розв'яжемо задачу і з селищем B: адже сума довжин відрізків AC і CB на рисунку 2 дорівнює сумі довжин відрізків AC і CB_1!

6.1.* Чи згодні ви з Катериною?

Ф: А для селища B_1 задача розв'язується дуже просто: з'єднуємо точки A і B_1 *відрізком* і будуємо станцію C в точці перетину цього відрізка із залізницею d (рис. 3).

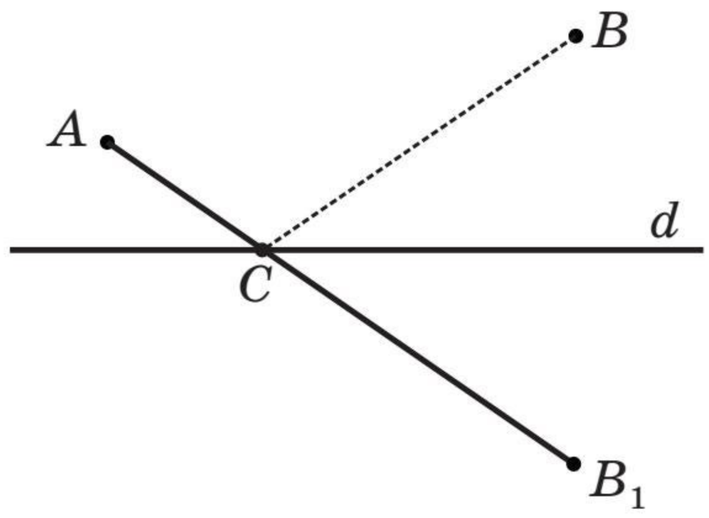


Рис. 3

У: Але чому при такому розташуванні станції C, яке показане на рисунку 3, сума $AC + CB_1$ буде найменшою?

Ф: Якщо розмістити станцію C в будь-якій іншій точці залізниці (рис. 4), $AC + CB_1$ дорівнюватиме сумі довжин *двох* сторін трикутника ACB_1, а вона більша від довжини однієї сторони AB_1.

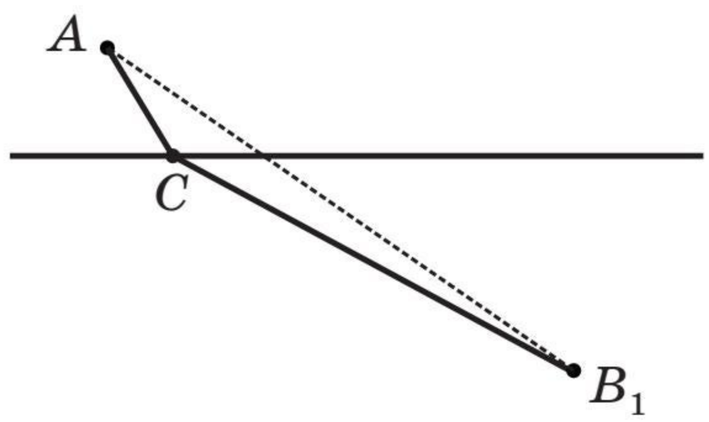


Рис. 4

К: Але ми ще не *довели*, що довжина сторони трикутника менша від суми довжин двох інших його сторін!

У: Невдовзі ми доведемо цю найвідомішу нерівність у геометрії, яку називають *нерівністю трикутника*:

> довжина кожної сторони трикутника менша від суми довжин двох інших його сторін.

Ф: Мені здається, щоб довести цю нерівність, потрібно використовувати якісь інші нерівності...

6.1. Можна скористатися рівністю трикутників CBH і CB_1H.

У: Так і є. Ми використовуватимемо нерівності, які вже знаємо: довжина відрізка більша від його частини, і кут більший від його частини. Доведемо спочатку за їх допомогою співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

У: Ми знаємо, що проти *рівних* сторін трикутника лежать *рівні* кути — це властивість рівнобедреного трикутника. А що можна сказати про кути, що лежать проти *нерівних* сторін трикутника?

Нехай, наприклад, сторона AB трикутника ABC більша від сторони BC (рис. 5). Який кут, на вашу думку, більший: A чи C?

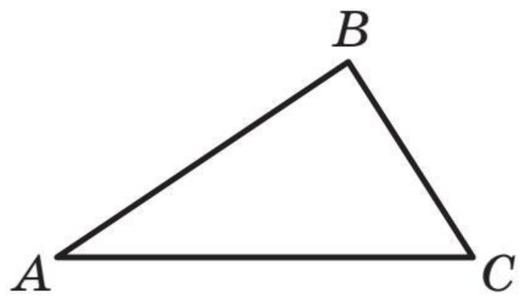


Рис. 5

Ф: Мені здається, що $\angle C > \angle A$.

К: І мені теж. Але як це довести?

У: Спробуйте скористатися рис. 6.

Ф: Тут з'явився рівнобедрений трикутник MBC...

К: І навіть позначені рівні кути при його основі MC...

Ф: Один з цих рівних кутів — *частина* кута C трикутника ABC...

К: А другий — зовнішній кут трикутника AMC...

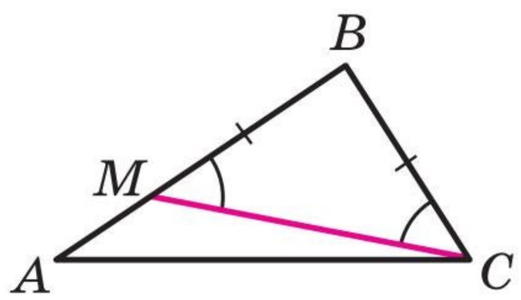


Рис. 6

6.2. Доведіть: на рис. 6 $\angle BCA > \angle A$.

У: Отже,

проти більшої сторони трикутника лежить більший кут.

Ф: А для цієї теореми є обернена?

К: Вона має формулюватися так: «проти більшого кута трикутника лежить більша сторона».

У: Правильно. Нехай, наприклад, $\angle C > \angle A$ в трикутнику ABC (рис. 7). Доведіть: $AB > BC$.

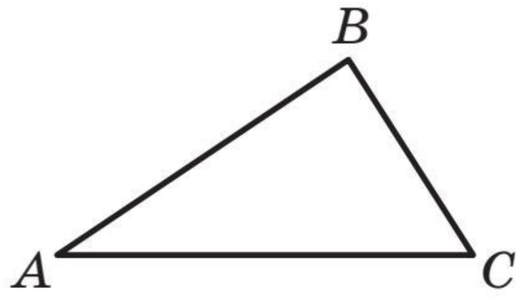


Рис. 7

6.2. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника більший від кожного кута трикутника, не суміжного з ним.

Ф: Скористаємося методом доведення від супротивного. Якщо нерівність $AB > BC$ не виконується, то справедливою є *протилежна* нерівність: $BC > AB$.

К: Не обов'язково! Якщо нерівність $AB > BC$ не виконується, то можливі *два* співвідношення: $BC > AB$ або $BC = AB$.

У: Звісно! Щоб використовувати тут метод доведення від супротивного, потрібно довести, що *кожне* зі співвідношень $BC > AB$ і $BC = AB$ призводить до суперечності.

Ф: Згоден. Розглянемо їх по черзі. Якщо $BC > AB$, то $\angle A > \angle C$, оскільки ми вже довели, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут. Але це суперечить тому, що за умовою $\angle C > \angle A$.

К: Якщо ж $BC = AB$, то трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC, тому кути A і C при його основі рівні. Але це також суперечить тому, що за умовою $\angle C > \angle A$.

Ф: Ось ми й довели: якщо $\angle C > \angle A$, то $AB > BC$.

У: Отже,

проти більшого кута трикутника лежить більша сторона.

Розгляньмо деякі наслідки цієї теореми.

6.3.* Доведіть:

у тупокутному трикутнику проти тупого кута лежить найбільша сторона (рис. 8).



Рис. 8



Рис. 9

6.4.* Доведіть:

гіпотенуза прямокутного трикутника більша від кожного катета (рис. 9).

6.3. Скористайтеся тим, що тупий кут — найбільший у трикутнику.

6.5.** У трикутнику ABC проведено медіану BM (рис. 10). Доведіть: якщо $AB > BC$, то $AB > BM$.

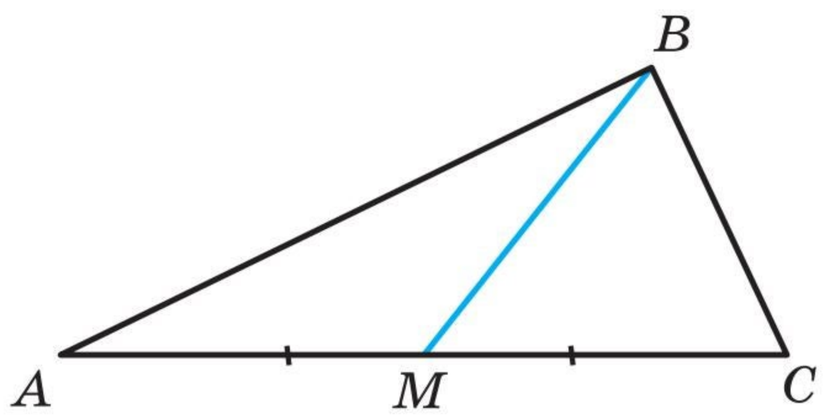


Рис. 10

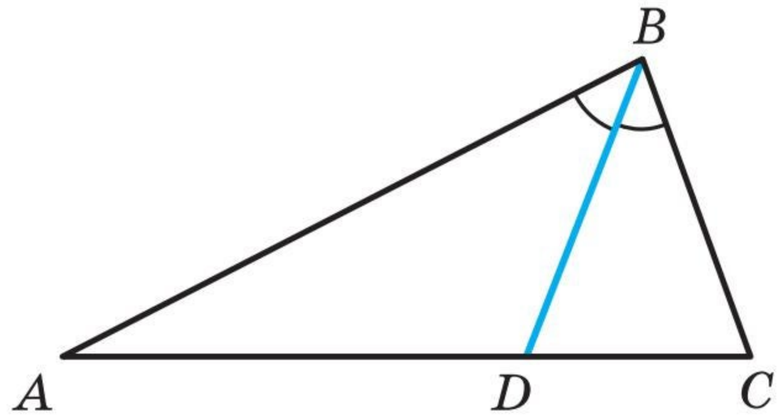


Рис. 11

Подібні завдання (6.6–6.8)

6.6.*** У трикутнику ABC проведено бісектрису BD (рис. 11). Доведіть: якщо $AB > BC$, то:

а) $AB > AD$;

б) $BC > CD$;

в) $AD > DC$.

6.7.*** У трикутнику ABC проведено медіану BM. Доведіть:

а) якщо $BM > \frac{AC}{2}$, то $\angle B < 90°$;

б) якщо $BM < \frac{AC}{2}$, то $\angle B > 90°$.

6.8.** У трикутнику ABC, у якому $AB > BC$, позначено точку M на стороні AC і проведено відрізок BM. Доведіть:

а) $\angle A < \angle AMB$; б) $BM < AB$.

6.5. Оскільки проти більшої сторони трикутника лежить більший кут, то з нерівності $AB > BC$ випливає, що $\angle C > \angle A$. Зовнішній кут AMB трикутника BMC більший від кута C. Для трикутника ABM скористайтеся тим, що проти більшого кута лежить більша сторона.

6.6. а, б) Скористайтеся властивістю зовнішнього кута трикутника, щоб довести, що кожний з кутів ADB і CDB більший від половини кута B. Відтак скористайтеся тим, що в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона; в) позначте на стороні AB точку K так, що $BK = BC$. Тоді $\angle AKD = 180° - \angle C = \angle A + \angle B > \angle A$. Далі для ΔAKD скористайтеся тим, що проти більшого кута лежить більша сторона.

6.7. Скористайтеся тим, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут, а також тим, що сума кутів дорівнює 180° (звідки: якщо один з кутів трикутника менший від суми двох інших, то даний кут — гострий, а якщо один з кутів трикутника більший від суми двох інших, то даний кут — тупий).

6.8. а) Скористайтеся тим, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут, а також властивістю зовнішнього кута трикутника; б) Скористайтеся тим, що проти більшого кута трикутника лежить більша сторона.

Нерівність трикутника

У: Тепер у нас усе готове для того, щоб довести нерівність трикутника.

Ось трикутник ABC (рис. 12). Доведіть, наприклад, що $AC < AB + BC$ (рис. 12).

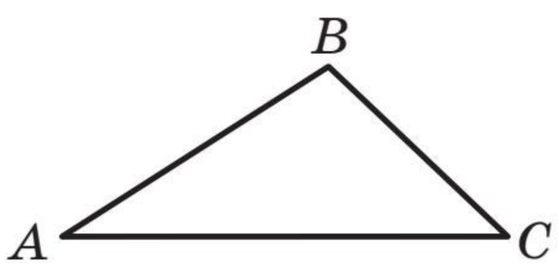


Рис. 12

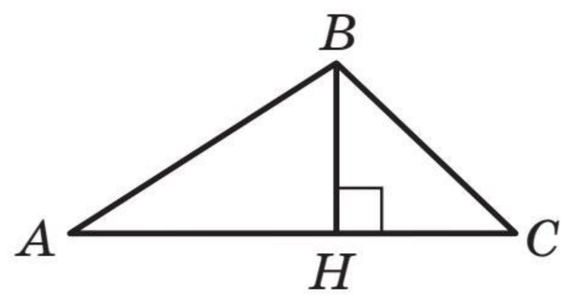


Рис. 13

Ф: Достатньо провести висоту BH (рис. 13) і пригадати, що ми знаємо про гіпотенузу і катет.

6.9.* Використовуючи рисунок 13, доведіть: $AC < AB + BC$.

К: Ми розглянули лише випадок, коли висота, проведена з вершини B, лежить *усередині* трикутника ABC. А якщо ця висота *збігається* з однією зі сторін трикутника (рис. 14, *а*) або лежить *поза* трикутником (рис. 14, *б*)?

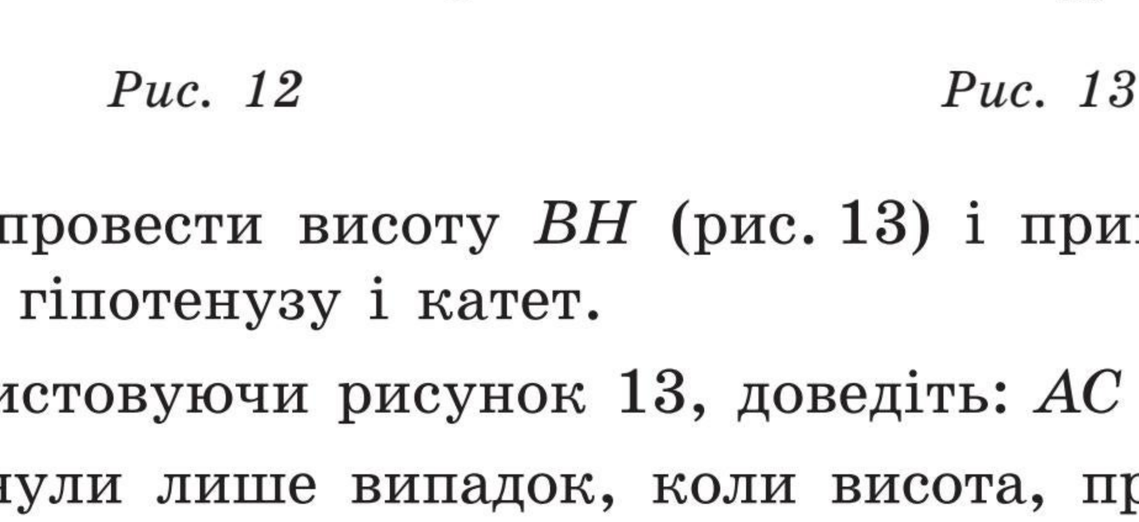


Рис. 14

6.10.* Використовуючи рисунки 14, *а*, *б*, доведіть: для трикутників, зображених на цих рисунках, виконується нерівність $AC < AB + BC$.

У: Отже, ми отримали *нерівність трикутника*:

> будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторон.

6.11.** Що можна сказати про взаємне розташування точок A, B і C, якщо:

а)* $AC < AB + BC$; б)** $AC = AB + BC$;

в)** $AC > AB + BC$?

6.9. Скористайтеся тим, що катет менший від гіпотенузи.

6.12.*** Позначте на аркуші паперу чотири точки M, N, K і P так, щоб кожна з них містилась поза трикутником з вершинами в решті точок. Припустіть, що ці точки позначають чотири міста на карті. Знайдіть за допомогою побудови, де потрібно розмістити аеропорт A так, щоб сума довжин прямих доріг від аеропорту до всіх чотирьох міст була *найменшою*.

6.13.* Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:

а) $AB = 4$ см; $BC = 7$ см; $AC = 11$ см;

б) $AB = 23$ см; $BC = 17$ см; $AC = 7$ см;

в) $AB = 9$ см; $BC = 15$ см; $AC = 6$ см.

Для випадків, коли точки A, B і C лежать на одній прямій, укажіть порядок розміщення точок.

Подібні завдання (6.14–6.15)

6.14.** Чи лежать точки A, B, C і D на одній прямій, якщо:

а) $AB = 4$ см; $BC = 7$ см; $CD = 11$ см; $AD = 22$ см;

б) $AB = 27$ см; $BC = 13$ см; $CD = 6$ см; $AD = 8$ см;

в) $AB = 5$ см; $BC = 24$ см; $CD = 7$ см; $AD = 13$ см.

Для випадків, коли точки A, B, C і D лежать на одній прямій, укажіть порядок розміщення точок.

6.15.** Чи можуть відстані між точками A, B і C бути такими:

а) $AB = 5$ см; $BC = 8$ см; $AC = 14$ см;

б) $AB = 20$ см; $BC = 17$ см; $AC = 37$ см;

в) $AB = 12$ см; $BC = 15$ см; $AC = 22$ см.

Для випадків, коли вказані відстані між точками A, B, C можливі, укажіть порядок розміщення точок.

6.16.** Доведіть:

будь-яка сторона трикутника більша від модуля різниці двох інших його сторін.

6.17.** Якою може бути довжина третьої сторони трикутника, якщо перша і друга його сторони дорівнюють:

а) 5 см і 9 см; б) 7 см і 8 см.

6.18.** Яким може бути периметр рівнобедреного трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють:

а) 9 см і 6 см; б) 9 см і 4 см; в) 8 см і 4 см.

6.12. Скористайтеся нерівністю трикутника.

6.16. Скористайтеся нерівністю трикутника.

6.17. Скористайтеся тим, що будь-яка сторона трикутника менша від суми й більша від модуля різниці двох інших сторін.

6.19.*** Позначимо довжини сторін трикутника a, b, c, а довжину медіани, проведеної до сторони c, позначимо m_c (рис. 15). Доведіть:

а) $m_c < \dfrac{a+b}{2}$; б) $m_c < \dfrac{a+b-c}{2}$.

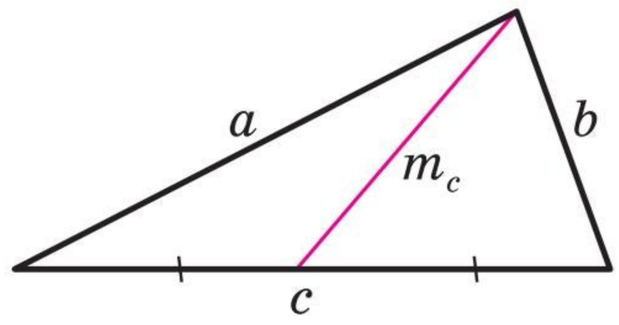


Рис. 15

Подібні завдання (6.20–6.23)

6.20.** На стороні BC трикутника ABC позначено точку M (рис. 16). Доведіть: $AM + MC < AB + BC$.

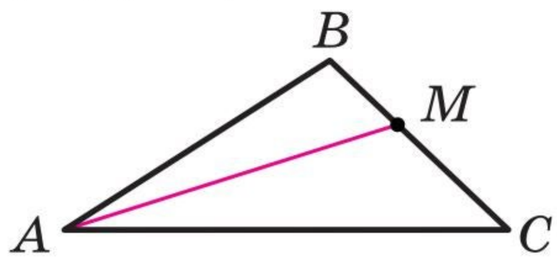


Рис. 16

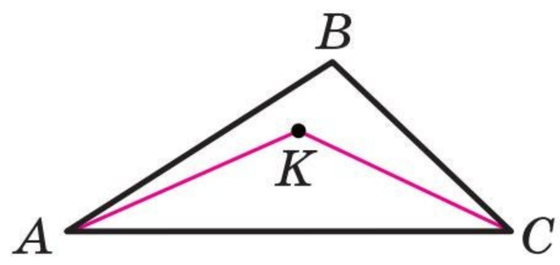


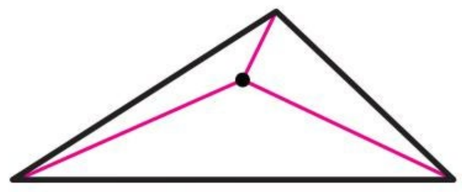
Рис. 17

6.21.*** Усередині трикутника ABC позначено точку K (рис. 17). Доведіть: $AK + KC < AB + BC$.

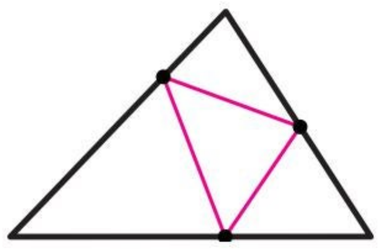
6.22.*** Доведіть: сума відстаней від будь-якої точки всередині трикутника (рис. 18) до його вершин:

а) більша від половини периметра трикутника;

б) менша від периметра трикутника.


Рис. 18

6.23.** Трикутник, вершини якого лежать на сторонах даного трикутника, називають трикутником, *вписаним* у даний трикутник (рис. 19). Доведіть, що периметр вписаного трикутника менший, ніж периметр даного трикутника.


Рис. 19

6.19. а) Скористайтеся «подвоєнням» медіани та нерівністю трикутника; б) Скористайтеся нерівністю трикутника для кожного з двох трикутників, на які медіана ділить даний трикутник.

6.20. Скористайтеся нерівністю трикутника для трикутника ABM.

6.21. Продовжте AK до перетину з BC в точці P. Відтак доведіть, що $AK + KC < AP + PC$ і $AP + PC < AB + BC$.

6.22. а) Скористайтеся тричі тим, що сума відстаней від даної точки до двох вершин трикутника більша від сторони трикутника, що сполучає ці дві вершини; б) Скористайтеся тричі тим, що сума відстаней від даної точки до двох вершин трикутника менша від суми двох сторін трикутника, що сходяться в третій його вершині (див. попередню задачу).

6.23. Скористайтеся нерівністю трикутника.

Порівняння довжин ламаної і відрізка

У: На рис. 20 чорним кольором зображено *ламану* — так називають лінію, що складається з відрізків, послідовно з'єднаних своїми кінцями. Відрізки, з яких складається ламана, називають її *ланками*. Довжиною ламаної є сума довжин усіх її ланок.

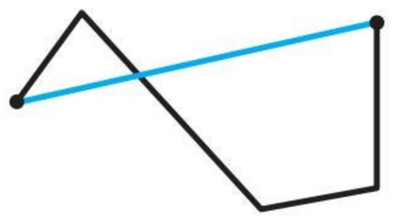


Рис. 20

Як ви гадаєте, що більше: довжина ламаної чи довжина відрізка, кінці якого збігаються з кінцями ламаної (його зображено відрізком блакитного кольору)?

Н: Довжина ламаної більша!

К: Я можу запропонувати ідею доведення: будемо поступово «випрямляти» ламану, щоразу замінюючи *дві* сусідні ланки ламаної *одним* відрізком — поки не утвориться *один* відрізок (рис. 21).

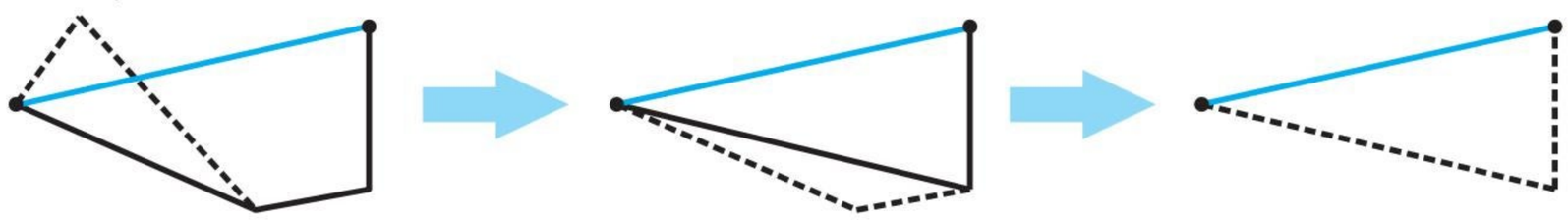


Рис. 21

6.24.* Доведіть, що при заміні двох сусідніх ланок ламаної одним відрізком довжина ламаної зменшується.

У: Отже, ми довели, що

> довжина ламаної, яка сполучає дві точки, більша від довжини відрізка, який сполучає ці самі точки.

Можна довести (це виходить за рамки нашого курсу), що *будь-яку* лінію можна з як завгодно великою точністю подати як складену з великого числа достатньо малих відрізків.

Звідси випливає, що лінія *найменшої* довжини, що сполучає дві точки, — це *відрізок* з кінцями в цих точках. Саме тому *відстань між двома точками* визначають як довжину відрізка з кінцями в цих точках: таке визначення відстані між точками *однозначне*.

Ф: А чи можна, виходячи з цієї ж ідеї, визначити відстань *від точки до прямої*?

У: Можна! Невдовзі ми це зробимо.

6.24. Скористайтеся нерівністю трикутника.

Світло обирає найкоротший шлях

У: Розділ фізики, у якому розглядають хід променів світла, називають *геометричною оптикою*, оскільки хід променів світла знаходять за допомогою *геометричних побудов*.

На рисунку 22 схематично зображено відбиття променя світла від дзеркальної поверхні.

Кутом падіння α називають кут між променем, що падає, і *перпендикуляром* до дзеркала, проведеним з точки падіння променя на дзеркало, а кутом відбивання β — кут між відбитим променем і тим самим *перпендикуляром*. Наприклад, якщо промінь, що падає, спрямований перпендикулярно до дзеркала, то кут падіння променя дорівнює *нулю*.

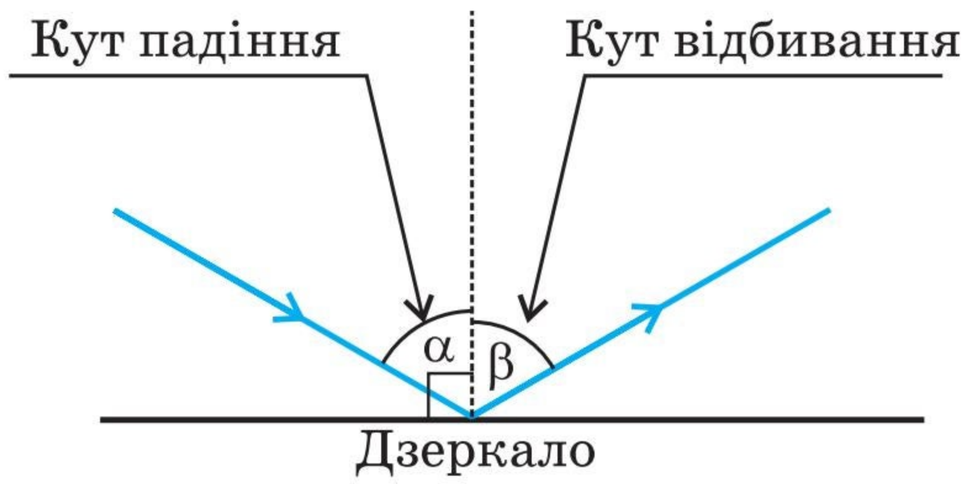


Рис. 22

Давньогрецький учений Евклід, який зібрав і впорядкував відомі до того часу аксіоми та теореми геометрії, установив на досліді, що при відбиванні променя світла від дзеркальної поверхні *кут відбивання дорівнює куту падіння*, тобто виконується рівність $\beta = \alpha$.

Щоб побудувати хід світлового променя, який випромінили з точки S і який потрапив після відбивання в дзеркалі m у точку P, потрібно знайти положення точки N, у якій промінь відбився від дзеркала. При цьому потрібно врахувати, що кут відбивання дорівнює куту падіння: $\beta = \alpha$ (рис. 23).

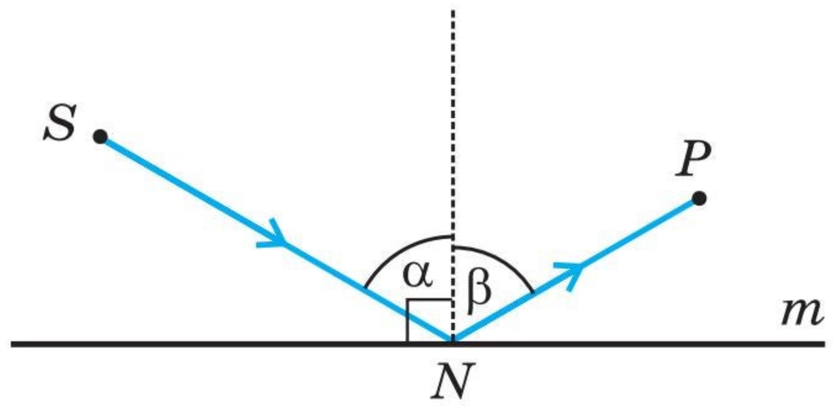


Рис. 23

Щоб знайти положення точки N, зручно «зазирнути за дзеркало». Побудуємо точку P_1, розташовану за дзеркалом так,

як показано на рисунку 24, *а*. Точку перетину відрізка PP_1 з дзеркалом m позначимо H.

К: Отже, відрізок PP_1 перпендикулярний до прямої m, до того ж $PH = P_1H$?

У: Правильно.

6.25.** Доведіть: якщо $\alpha = \beta$, то точка N лежить на *відрізку* SP_1 (рис. 24, *б*).

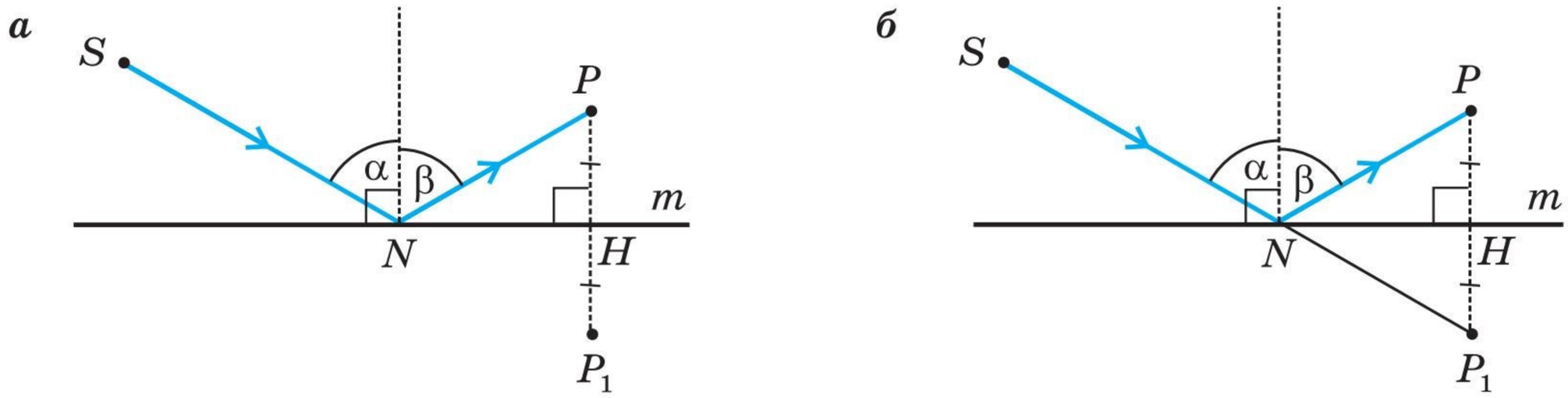


Рис. 24

К: Тепер зрозуміло, як побудувати точку N, у якій промінь відбився від дзеркала:

- проводимо через точку P пряму, перпендикулярну до дзеркала, позначаємо точку перетину H цієї прямої з дзеркалом, і після цього на побудованій прямій позначаємо точку P_1, розташовану за дзеркалом на такій самій відстані від точки H, що і точка P;
- проводимо відрізок SP_1;
- точка перетину цього відрізка з прямою m і є шуканою точкою N, у якій промінь відбивається від дзеркала.

Ф: Ця задача нагадує мені задачу про два селища та станцію на залізниці... Щоб знайти розташування станції, за якого сума довжин прямих доріг від станції до селищ найменша, ми також «будували» ще одне селище з іншого боку залізниці...

У: Добре, що ви згадали задачу про два селища та станцію на залізниці! Використовуючи ідею, яка допомогла нам розв'язати цю задачу, ви зможете довести, що світло вибирає при відбиванні *найкоротший* шлях.

6.25. Доведіть, що кут SNP_1 — розгорнутий. Для цього скористайтеся властивостями рівнобедреного трикутника, тим, що $\angle\beta + \angle PNH = 90°$, а також тим, що $\beta = \alpha$.

6.26.** Доведіть: якби світло відбилося в точці K, відмінній від знайденої вище точки N, то шлях, пройдений світлом, був би більшим від довжини відрізка SP_1 (рис. 25).

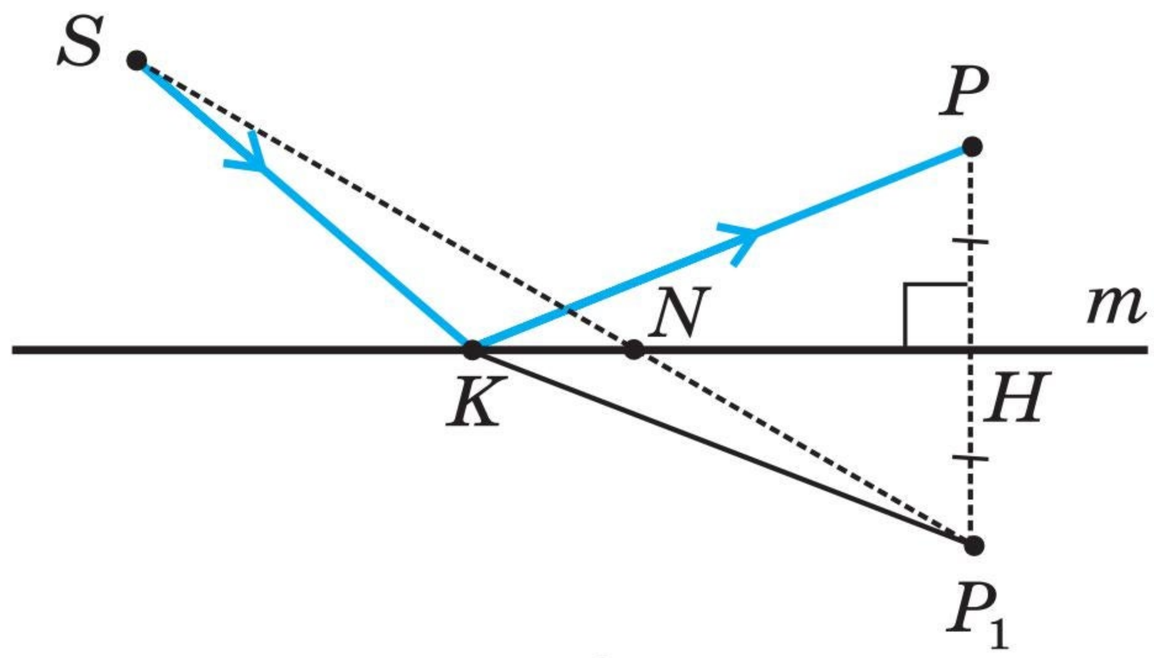


Рис. 25

К: Задача про побудову проходження променя світла при відбиванні від дзеркала та задача про побудову станції на залізниці подібні тим, що в обох випадках сума двох відстаней найменша.

У: Це правильно, але швидкість світла в багато разів більша, ніж швидкість автомобіля й навіть ракети! Швидкість світла — найбільша в природі: вона дорівнює приблизно 300 000 км/с. Наприклад, світло від Місяця йде до нас трохи більше від однієї *секунди*.

Ф: Як же світло, яке мчить із такою величезною швидкістю, встигає ще й обрати найкоротший шлях?

У: Про це ви дізнаєтесь, коли будете вивчати фізику.

2. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Відстань від точки до прямої та відстань між паралельними прямими

У: Застосуємо наші нові знання, щоб допомогти плавцеві, який перебуває в морі в точці A (рис. 26). Який ви порадите йому тримати курс, щоб досягти берега *найкоротшим* шляхом, якщо берегову лінію можна вважати прямолінійною (пряма m на рисунку)?

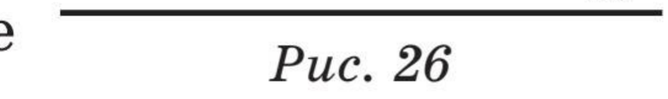


Рис. 26

6.26. Доведіть, що $KP = KP_1$, і скористайтеся нерівністю трикутника.

Ф: Плавцеві потрібно тримати курс *перпендикулярно* до берега — у точку H (рис. 27).

К: А як це *довести*?

6.27.* Доведіть: якщо тримати курс не в точку H, а в будь-яку іншу точку B берега (рис. 28), то пройдений шлях буде більшим.

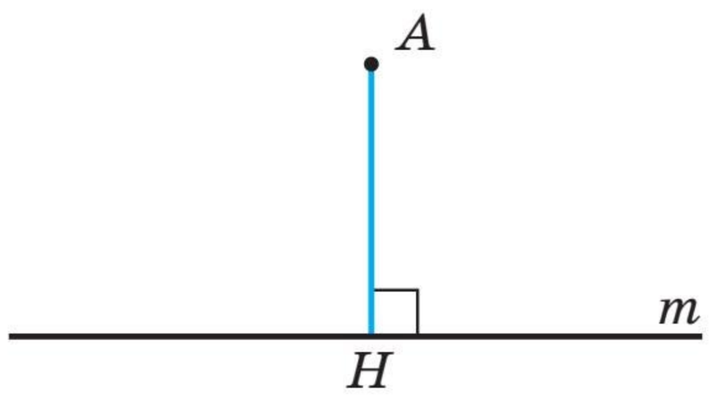


Рис. 27

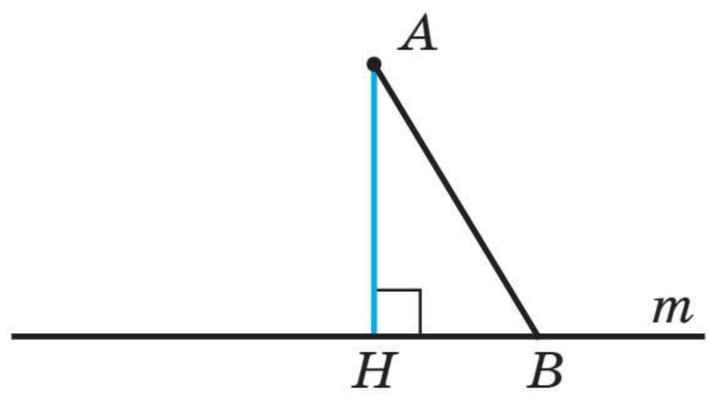


Рис. 28

У: Отже, якщо точка не лежить на прямій, то найближча до неї точка цієї прямої — основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої (рис. 28).

Ф: Напевно, відстань від точки до прямої можна визначити як відстань від точки до *найближчої* до неї точки даної прямої?

У: Правильно! Ось це означення:

Відстанню від точки до прямої називають довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

6.28. Точка A не лежить на прямій m, а точки B і C лежать на цій прямій, до того ж відомо, що $AB = 5$ см, $AC = 4$ см.

а)* Чи може відстань від точки A до прямої m дорівнювати 5 см?

б)** Чи можна стверджувати, що відстань від точки A до прямої m дорівнює 4 см?

в)** Як знайти відстань від точки A до прямої m? Чи можна дізнатися цю відстань із даних, наведених в умові?

У: Подумаймо тепер, як визначити відстань *між прямими*. Якщо прямі *перетинаються*, то найменша відстань між точками, що лежать на цих прямих, дорівнює *нулю*, оскільки в цих прямих є спільна точка.

К: А якщо прямі паралельні?

Ф: Напевно, тоді відстань між двома паралельними прямими можна визначити як *найменшу* відстань між точками, що лежать на різних прямих.

6.27. Скористайтеся тим, що гіпотенуза більша від катета.

6.28. Скористайтеся тим, що відстань від точки до прямої — це відстань від цієї точки до найближчої до неї точки прямої.

6.29.* Доведіть: найменша відстань між точками, що лежать на різних паралельних прямих, дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої до другої прямої (рис. 29).

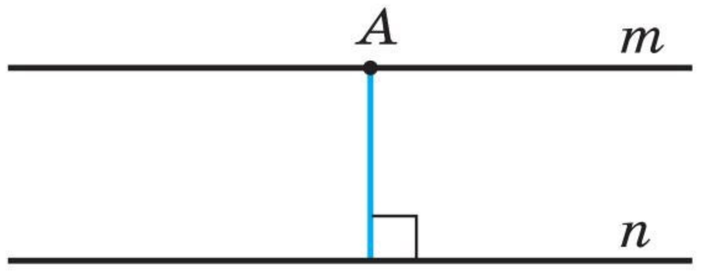


Рис. 29

К: Скористаємося поняттям відстані від точки до прямої та дамо таке означення:

відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї прямої до другої прямої.

6.30.** Через вершину B трикутника ABC провели пряму m, паралельну стороні AC. Відстань між прямими m і AC дорівнює 6 см. Що можна сказати про трикутник ABC, якщо його бісектриса, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см?

Перпендикуляр, похила та проєкція похилої

У: На рис. 30 AH — перпендикуляр до прямої m, а B — точка цієї прямої, відмінна від точки H.
Відрізок AB називають *похилою*, а відрізок HB — *проєкцією* похилої.
Оскільки гіпотенуза більша від катета, то

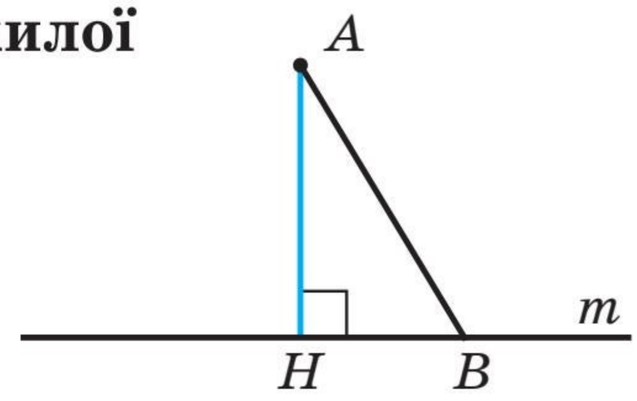


Рис. 30

похила, проведена з точки до прямої, більша від перпендикуляра до цієї прямої, проведеного з тієї самої точки, і більша від своєї проєкції.

6.31.** Доведіть:

якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі (рис. 31), то більша та з них, проєкція якої більша.

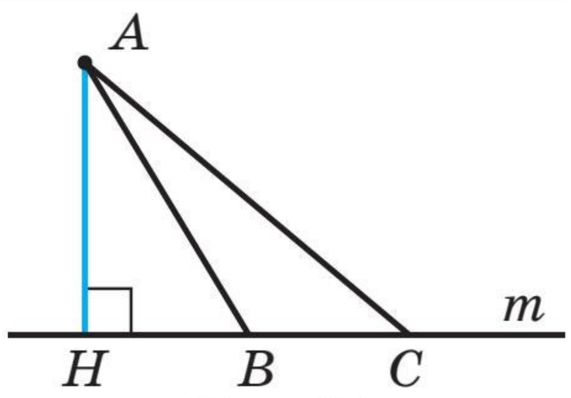


Рис. 31

6.32.** Доведіть: бісектриса і медіана трикутника, проведені до однієї з його сторін, менші хоча б від однієї з двох інших сторін.

6.29. Скористайтеся тим, що гіпотенуза більша від катета.

6.30. Скористайтеся однією з ознак рівнобедреного трикутника.

6.31. Скористайтеся тим, що проти тупого кута трикутника лежить більша сторона.

6.32. Скористайтеся тим, що бісектриса й медіана лежать усередині трикутника, а також тим, що більшою є та похила, проєкція якої більша.

6.33. Доведіть: для рівностороннього трикутника справедливі такі твердження:

а)* усі висоти рівні;

б)** сума відстаней від будь-якої точки, що лежить на стороні трикутника, до двох інших сторін однакова й дорівнює висоті трикутника;

в)*** сума відстаней від будь-якої точки всередині трикутника до трьох його сторін однакова й дорівнює висоті трикутника.

6.34.** Доведіть: пряма, що перетинає трикутник, ділить його на дві фігури, периметр кожної з яких менший від периметра початкового трикутника.

6.35.** Доведіть: якщо один трикутник міститься всередині другого, то периметр «внутрішнього» трикутника менший, ніж периметр «зовнішнього».

3. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Основні ознаки рівності прямокутних трикутників

У: Як ми вже знаємо, для рівності двох трикутників необхідною є рівність *трьох* певних елементів цих трикутників. Пам'ятаєте яких?

К: Дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника — це перша ознака рівності трикутників.

Ф: Сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні й двом прилеглим до неї кутам другого трикутника — це друга ознака рівності трикутників.

К: Три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника — це третя ознака рівності трикутників.

6.33. б) Проведіть перпендикуляри з даної точки на стороні рівностороннього трикутника до двох інших сторін, а також висоту до однієї з цих сторін. Відтак проведіть через дану точку пряму, паралельну тій стороні, до якої проведено висоту. Доведіть, що ця пряма ділить проведену висоту на відрізки, що відповідно дорівнюють відстаням від даної точки до двох інших сторін;

в) Щоб звести цю задачу до попередньої, проведіть через дану точку всередині трикутника пряму, паралельну одній зі сторін трикутника.

6.34. Скористайтеся нерівністю трикутника, а також тим, що довжина ламаної більша від довжини відрізка, що з'єднує кінці ламаної.

6.35. Проведіть послідовно три прямі, на яких лежать сторони «внутрішнього» трикутника, і щоразу скористайтеся тим, що будь-яка пряма, що перетинає трикутник, ділить його на дві фігури, периметр кожної з яких менший від периметра початкового трикутника.

У: Молодці, усе пам'ятаєте! А тепер зазначимо, що у двох *прямокутних* трикутників один відповідно рівний елемент є за означенням: адже один з кутів — прямий. Тому, щоб встановити рівність двох прямокутних трикутників, достатньо рівності лише *двох* елементів цих трикутників. Наше завдання — з'ясувати: яких?

Нагадаю, що сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші сторони — *катетами*.

6.36.* Доведіть:

якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам другого трикутника, то ці трикутники рівні (рис. 32).

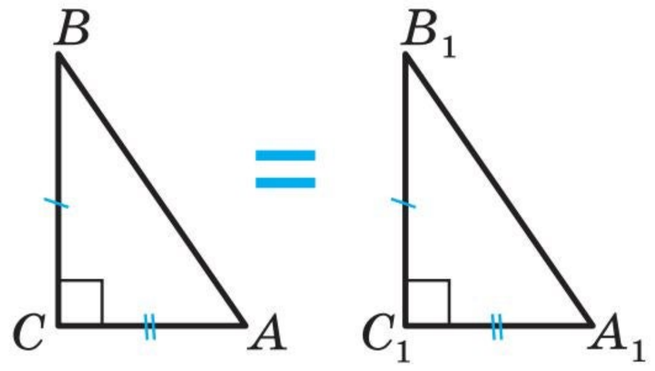


Рис. 32

6.37.* Доведіть:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту другого трикутника, то ці трикутники рівні (рис. 33).

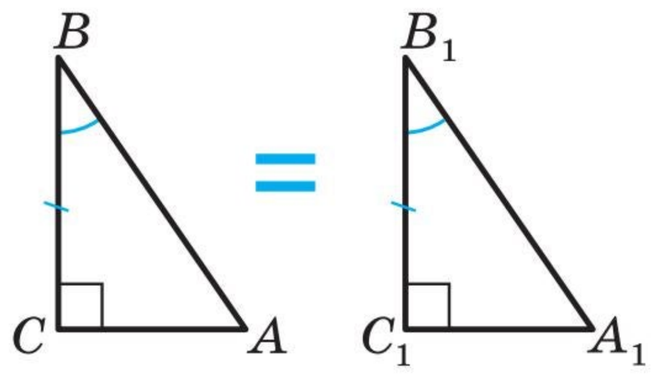


Рис. 33

6.38.** Доведіть:

якщо катет і протилежний до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному до нього гострому куту другого трикутника, то ці трикутники рівні (рис. 34).

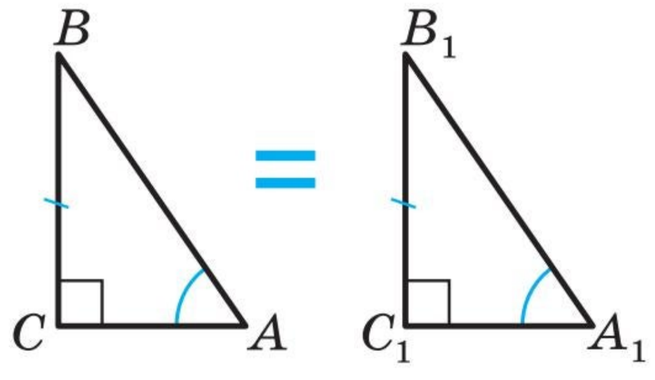


Рис. 34

6.36. Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників.

6.37. Скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

6.38. Оскільки сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°, рівність гострих кутів, протилежних відповідно рівним катетам, означає рівність і прилеглих до них гострих кутів. Скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

6.39.** Доведіть:

якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого трикутника, то ці трикутники рівні (рис. 35).

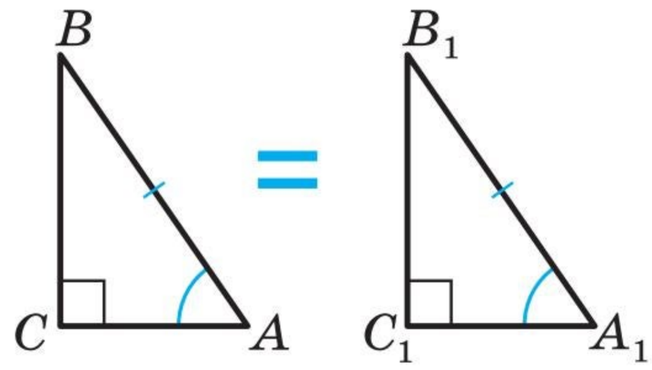


Рис. 35

6.40.*** Доведіть:

якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого трикутника, то ці трикутники рівні (рис. 36).

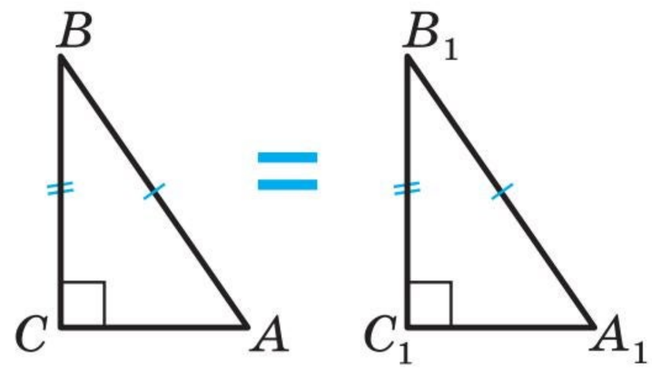


Рис. 36

У: Отже, ми довели *основні* ознаки рівності прямокутних трикутників. При розв'язуванні задач їх можна використовувати, не наводячи доведень.

А тепер застосуймо основні ознаки рівності *прямокутних* трикутників, щоб встановити деякі нові властивості *рівнобедрених* трикутників.

6.41. Доведіть:

а)** висоти, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, рівні (рис. 37, *а*);

б)*** сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедре-

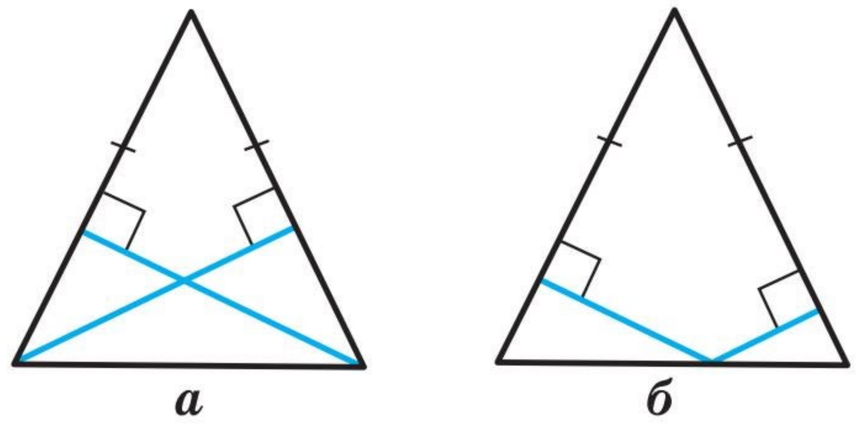


Рис. 37

6.39. Оскільки сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°, рівність одного гострого кута одного трикутника гострому куту другого трикутника означає рівність і других гострих кутів даних трикутників. Це дозволяє скористатися другою ознакою рівності трикутників.

6.40. Прикладіть дані трикутники один до одного рівними катетами так, щоб трикутники були розташовані по різні сторони від прямої, на якій лежать рівні катети. Відтак скористайтеся тим, що в рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, збігається з медіаною та бісектрисою. Після цього скористайтеся будь-якою з трьох ознак рівності трикутників.

6.41. а) Скористайтеся тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, а також ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом; б) Проведіть перпендикуляри з даної точки основи до бічних сторін рівнобедреного трикутника, а також висоту до однієї з бічних сторін. Відтак проведіть через дану точку основи пряму, паралельну тій бічній стороні, до якої проведено висоту. Доведіть, що ця пряма ділить проведену висоту на відрізки, відповідно рівні відстані від даної точки основи до бічних сторін.

ного трикутника до його бічних сторін дорівнює висоті, проведеній до бічної сторони (рис. 37, *б*).

Подібні завдання (6.42–6.43)

6.42.** Доведіть: якщо дві висоти трикутника рівні, то він рівнобедрений.

6.43.** Доведіть: якщо трикутники рівні, то висоти, проведені до їх відповідно рівних сторін, також рівні.

6.44.** Доведіть *додаткові* ознаки рівності рівнобедрених трикутників за:

а) бічною стороною і бісектрисою (медіаною або висотою), проведеною до основи;

б) бічною стороною і висотою, проведеною до бічної сторони;

в) бічною стороною і кутом при основі;

г) основою і кутом, протилежним основі.

Додаткові ознаки рівності прямокутних трикутників

У: Є й інші ознаки рівності прямокутних трикутників, які ми назвемо *додатковими*, оскільки під час розв'язування задач ці ознаки (на відміну від доведених вище) потрібно доводити.

6.45.** Доведіть, що два прямокутні трикутники рівні за:

а) гострим кутом і бісектрисою цього кута;

б) катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи;

в) гострим кутом і висотою, проведеною до гіпотенузи;

г) висотою, проведеною до гіпотенузи, і одним з відрізків, на які основа висоти ділить гіпотенузу;

д) катетом і медіаною, проведеною до цього катета;

е) катетом і медіаною, проведеною до другого катета;

є) бісектрисою, проведеною з вершини прямого кута, і кутом, який ця бісектриса утворює з гіпотенузою.

6.42. Скористайтеся ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом та ознакою рівнобедреного трикутника.

6.43. Скористайтеся властивостями рівних трикутників, а відтак ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом.

6.44. Скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за: а, б) гіпотенузою і катетом; в) гіпотенузою і гострим кутом; г) катетом і протилежним гострим кутом. Проведіть, де це необхідно, бісектрису (медіану або висоту) до основи трикутника.

6.45. Скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за: а) гіпотенузою і гострим кутом; б) гіпотенузою і катетом; в) гіпотенузою і гострим кутом; г) двома катетами; д) гіпотенузою і катетом; е) гіпотенузою і катетом; ж) скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

Додаткові ознаки рівності трикутників

6.46.** У цьому завданні йтиметься про висоту довільного трикутника, що лежить усередині нього (ми вже знаємо, що в будь-якому трикутнику є хоча б одна така висота). Доведіть, що два трикутники рівні за:

а) висотою і кутами, які висота утворює зі сторонами;

б) висотою і відрізками, на які вона ділить сторону, до якої її проведено;

в) висотою, стороною, до якої вона проведена, і кутом, прилеглим до цієї сторони;

г) висотою і двома кутами, прилеглими до сторони, до якої проведено висоту;

д) стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, проведеною з вершини цього кута.

Подібне завдання

6.47.*** Доведіть додаткові ознаки рівності трикутників, розглянуті в попередньому завданні, для випадку, коли висота лежить поза трикутником.

Прямокутний рівнобедрений трикутник

6.48.* Доведіть:

а) якщо в трикутнику два кути дорівнюють по $45°$, то він рівнобедрений і прямокутний;

б) якщо трикутник прямокутний з кутом $45°$, то він рівнобедрений;

в) якщо трикутник рівнобедрений з кутом при основі $45°$, то він прямокутний;

г) якщо висота ділить трикутник на два рівні рівнобедрені трикутники, то цей трикутник рівнобедрений і прямокутний.

6.46. а) Скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом, а відтак першою ознакою рівності трикутників; б) скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за двома катетами, а відтак будь-якою ознакою рівності трикутників; в) скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом, а відтак першою ознакою рівності трикутників; г) скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом, а відтак будь-якою ознакою рівності трикутників; д) скористайтеся рівністю прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.

6.48. г) Скористайтеся властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника і тим, що сума кутів трикутника дорівнює $180°$.

Прямокутний трикутник з кутом 30°

У: Розділимо рівносторонній трикутник будь-якою його бісектрисою на два трикутники. Отримані трикутники часто трапляються в задачах з геометрії.

6.49. У *рівносторонньому* трикутнику ABC провели бісектрису BD (рис. 38). Доведіть: трикутники ADB і CDB — прямокутні з кутами 30° і 60°.

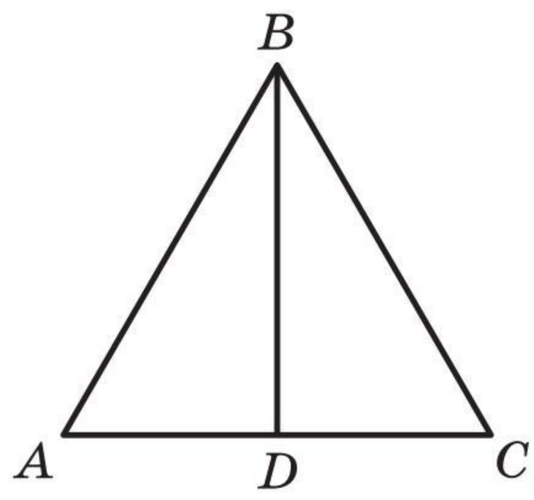


Рис. 38

К: Прямокутний трикутник з кутом 30° (рис. 39) і є той особливий вид прямокутних трикутників, про який ви говорили?

У: Так. Доведемо *властивість* і *ознаку* такого трикутника.

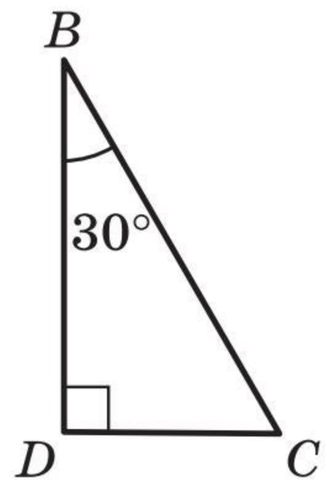


Рис. 39

6.50.** Доведіть:

а) гіпотенуза прямокутного трикутника з кутом 30° удвічі більша від катета, що лежить проти кута 30°;

б) якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Яке із сформульованих вище двох тверджень є *властивістю* прямокутного трикутника з кутом 30°, а яке — його *ознакою*?

6.51.* На рис. 40 прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C і кутом B, що дорівнює 30°, AD — бісектриса, відрізок DM дорівнює 5 см і перпендикулярний до AB.

а) Знайдіть усі кути на рисунку.

б) Знайдіть усі пари рівних відрізків і запишіть їх рівності.

в) Знайдіть усі пари рівних трикутників і запишіть рівності трикутників.

г) Знайдіть AD і BC.

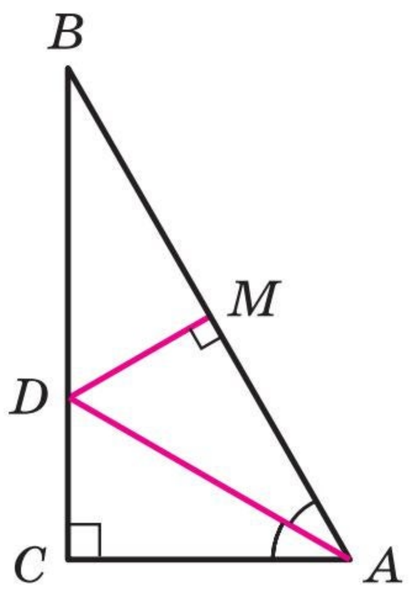


Рис. 40

6.50. а) Доведіть, що два рівні прямокутні трикутники з гострими кутами 30° можна прикласти один до одного так, що утворюється рівносторонній трикутник; б) Доведіть, що два рівні прямокутні трикутники, у кожного з яких катет дорівнює половині гіпотенузи, можна прикласти один до одного так, що утворюється рівносторонній трикутник.

6.51. Скористайтеся властивістю прямокутного трикутника з кутом 30°.

Подібне завдання

6.52.** На рис. 41 $AD = 12$ см, $CD = 6$ см, AD — бісектриса. Чому дорівнює:

а) кут DAC?

б) кут BAC?

в) кут ABC?

г) кут BDA?

д) кут BAK?

е) відстань від точки B до прямої AC?

є) відстань від точки D до прямої AB?

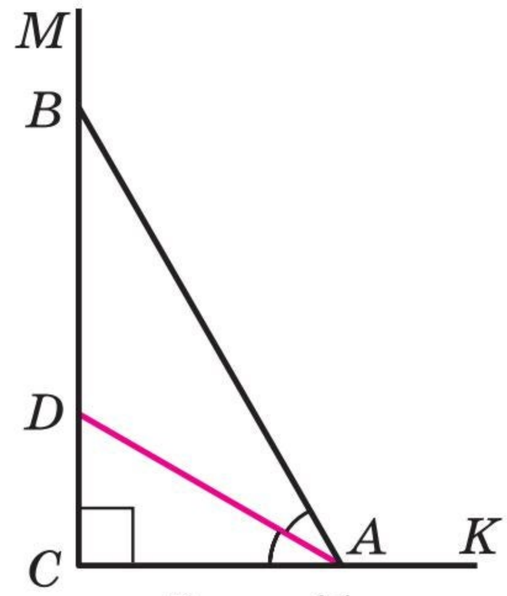


Рис. 41

Властивість і ознака прямокутного трикутника, пов'язані з медіаною, проведеною до гіпотенузи

6.53.** Доведіть таку властивість прямокутного трикутника:

медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи (рис. 42).

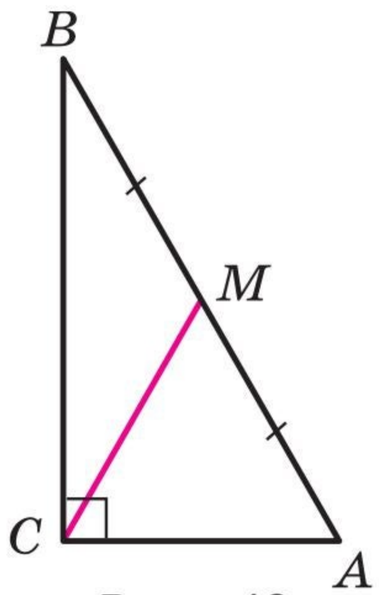


Рис. 42

К: Між іншим, звідси випливає ще одна цікава властивість прямокутного трикутника: медіана, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два *рівнобедрені* трикутники.

6.54.** Доведіть таку *ознаку* прямокутного трикутника:

якщо медіана, проведена до однієї зі сторін трикутника, дорівнює половині цієї сторони, то даний трикутник — прямокутний, а дана сторона — його гіпотенуза.

6.55.** Сума двох кутів трикутника дорівнює 90°. Висота, проведена з найбільшого кута трикутника, ділить його на два трикутники, в одному з яких є кут, що дорівнює 20°. Чому дорівнюють кути початкового трикутника?

6.56. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C і кутом B, що дорівнює 40°, провели висоту CH і бісектрису BD, які перетинаються в точці O.

6.54. Скористайтеся тим, що дана медіана ділить трикутник на два рівнобедрені трикутники; тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, а також тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

6.55. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.

6.56. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника, властивостями прямокутного трикутника й ознакою рівнобедреного трикутника.

а)* Знайдіть усі невідомі кути.
б)** Чи є трикутник DCO рівнобедреним?
в)** Чи залежить вид трикутника DCO від градусної міри кута B?

6.57.** Доведіть: кут між прямими, на яких лежать бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника, дорівнює 45°.

Подібне завдання

6.58.** Доведіть: якщо кут між прямими, на яких лежать бісектриси двох кутів трикутника, дорівнює 45°, то цей трикутник прямокутний.

6.59.** Бісектриси двох кутів трикутника утворюють при перетині кут 45°. Один з кутів трикутника дорівнює 55°. Чому дорівнюють решта кутів трикутника?

6.60.** Сума двох кутів трикутника дорівнює третьому куту. Один кут трикутника дорівнює 27°, а медіана, проведена до найбільшої сторони трикутника, — 9 см.
а) Чому дорівнюють інші кути трикутника?
б) Чому дорівнює найбільша сторона трикутника?
в) Чому дорівнює кут між висотою і медіаною, проведеними з найбільшого кута трикутника?

Подібні завдання (6.61–6.64)

6.61.** Менший гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Чому дорівнює кут між висотою і медіаною, проведеними до гіпотенузи?

6.62.** Медіана, проведена до однієї зі сторін трикутника, дорівнює половині цієї сторони і утворює з нею кут 40°.
а) Чому дорівнюють кути трикутника?
б) Чому дорівнює кут між бісектрисами, проведеними з вершин менших кутів трикутника?
в) Чому дорівнює кут між бісектрисами, проведеними з вершин найбільшого і найменшого кутів трикутника?

6.57. Скористайтеся тим, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

6.60. а) Доведіть, що трикутник прямокутний; б) Скористайтеся властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи; в) Скористайтеся тим, що медіана, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два рівнобедрені трикутники, а також тим, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

6.61. Скористайтеся тим, що медіана, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два рівнобедрені трикутники, а висота ділить прямий кут на кути, рівні гострим кутам трикутника.

6.62. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.

6.63.** Один кут трикутника дорівнює різниці двох інших кутів. Кут між медіаною і висотою, проведеними з більшого кута трикутника, дорівнює 20°. Найбільша сторона трикутника дорівнює 12 см.

а) Чому дорівнюють кути трикутника?

б) Чому дорівнює медіана, проведена до найбільшої сторони?

в) Під яким кутом перетинаються бісектриси менших кутів трикутника?

г) Чому дорівнює кут між бісектрисою і висотою, проведеними з найбільшого кута?

д) На які кути ділить більший кут трикутника висота, проведена з цього кута?

6.64.** Відрізок BK ділить трикутник ABC на два трикутники, при цьому кут B ділиться на кути, що дорівнюють кутам A і C.

а) Чому дорівнює більший кут трикутника ABC?

б) Яким елементом трикутника ABC може бути відрізок BK?

Скільки розв'язків має задача? Знайдіть усі варіанти.

Додаткові ознаки рівності прямокутних трикутників

У: Доведемо додаткові ознаки рівності прямокутних трикутників. Майте на увазі: якщо ви використовуватимете їх на контрольних чи іспитах, їх потрібно доводити.

6.65.** Доведіть, що два прямокутні трикутники рівні за:

а) медіаною, проведеною до гіпотенузи, і одним із катетів;

б) медіаною, проведеною до гіпотенузи, і кутом, який вона утворює з гіпотенузою;

в) медіаною, проведеною до гіпотенузи, і кутом, який вона утворює з одним з катетів.

6.64. а) Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

6.65. Скористайтеся тим, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, а також ознаками рівності трикутників.

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЯ?

Використовуючи рис. 43, сформулюйте основний зміст глави.

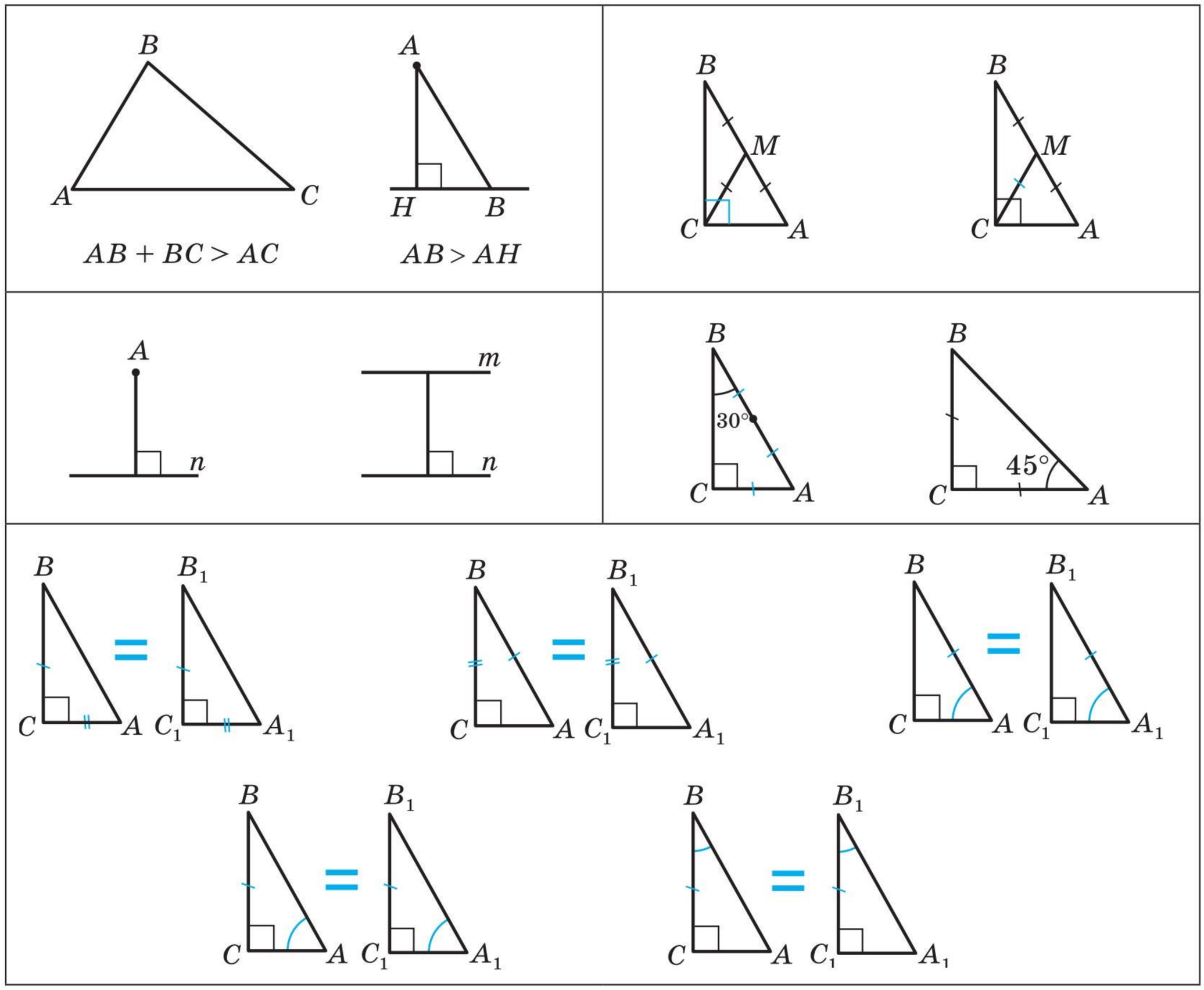


Рис. 43

4. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

Взаємне розташування медіани, бісектриси і висоти в довільному трикутнику

У: Нехай для сторін трикутника ABC справедлива нерівність $AB > BC$ (рис. 44). Проведемо медіану BM, бісектрису BD і висоту BH. Розглянемо спочатку випадок, коли висота лежить усередині трикутника.

Що можна припустити про взаємне розташування медіани, бісектриси і висоти?

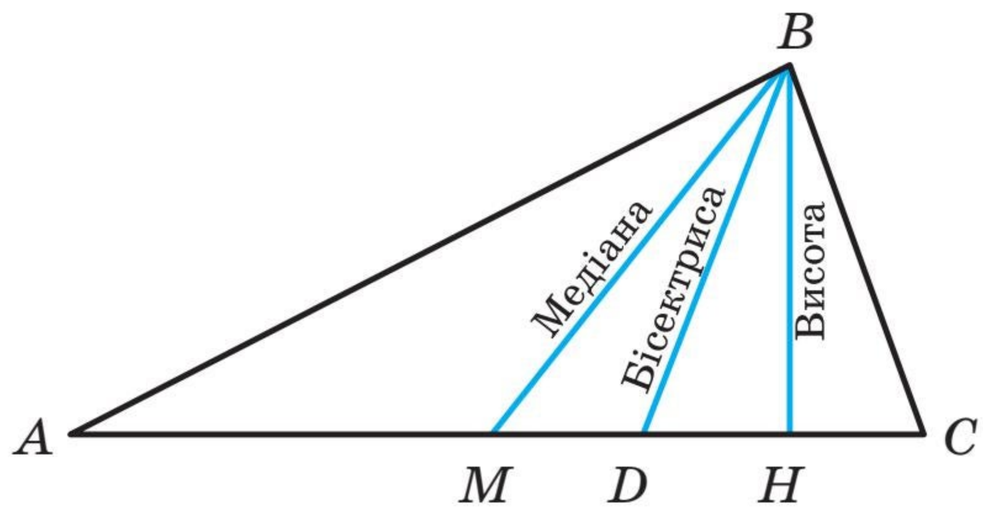


Рис. 44

Ф: Бісектриса розташована між медіаною і висотою!
К: Чи завжди так буде?
У: Спробуйте знайти відповідь на це запитання.
Ф: З чого краще починати?
У: Коли перед вами стоїть складна задача, бажано *поділити її на простіші*.
К: І справді: важко «стежити» одночасно за медіаною, бісектрисою і висотою.
Ф: Почнемо з бісектриси, оскільки вона ділить кут B навпіл незалежно від співвідношення сторін AB і BC (рис. 45).

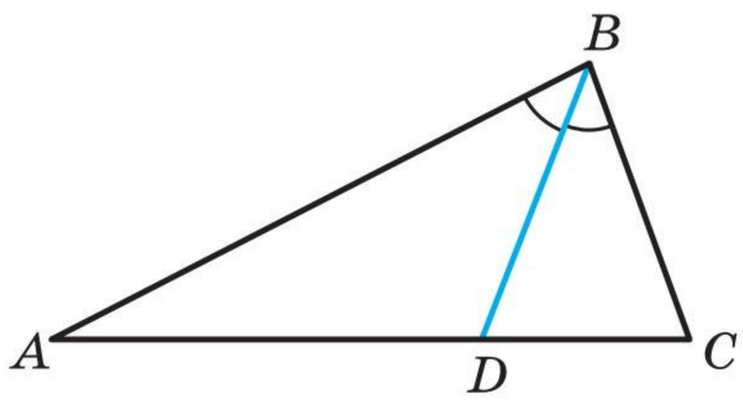


Рис. 45

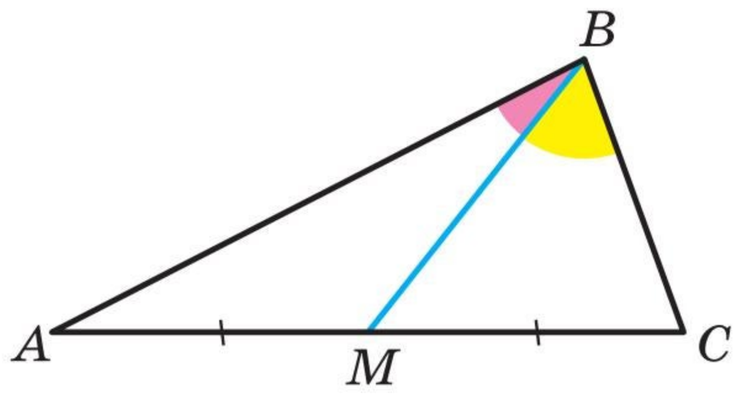


Рис. 46

К: Перейдемо тепер до медіани BM. Якщо вона не збігається з бісектрисою, то вона ділить кут B на *нерівні* частини (рис. 46).
Ф: Мені здається, якщо $AB > BC$, то $\angle CBM > \angle ABM$ ($\angle$ж $>$ $\angle$ч).
К: Мені також так здається. Спробуймо це *довести*. Нам відомо, що $AB > BC$.
Ф: Чи може нам допомогти співвідношення між сторонами і кутами трикутника?
К: Для цього потрібно побудувати трикутник, у якому кут, рівний куту CBM (ж), лежить проти сторони AB, а кут, рівний куту ABM (ч), — проти сторони BC. Тоді звідси випливало б, що $\angle CBM > \angle ABM$ ($\angle$ж $>$ $\angle$ч), оскільки в трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.
Ф: А чи не допоможе нам «подвоєння медіани»?

6.66.** Використовуючи «подвоєння медіани», побудуйте трикутник, у якому проти сторін, рівних AB і BC, лежать кути, відповідно рівні кутам CBM і ABM (ж і ч).

6.67.** Доведіть: якщо $AB > BC$, то $\angle CBM > \angle ABM$.

У: Сформулюємо отриманий висновок так: медіана розташована між бісектрисою і *більшою* зі сторін трикутника, що виходять з тієї самої вершини (рис. 47).

Ф: Перейдемо тепер до висоти BH (рис. 48). Мені здається, що коли $AB > BC$, то $\angle ABH > \angle CBH$.

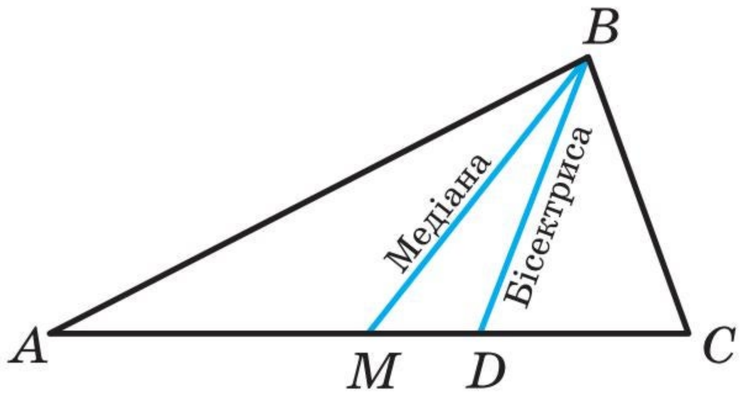


Рис. 47

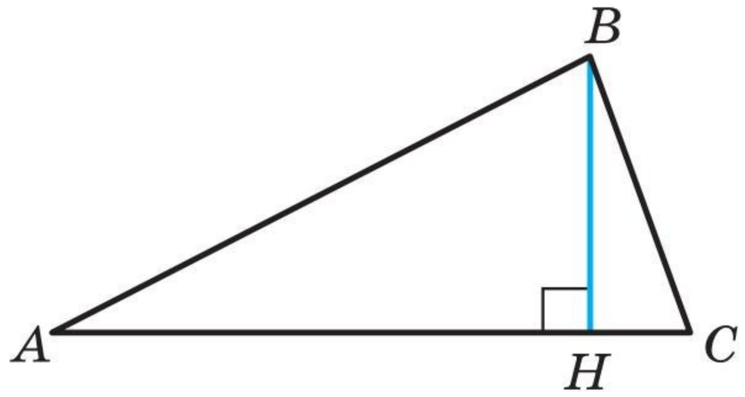


Рис. 48

К: Я навіть знаю, як це можна довести.

6.68.** Доведіть: якщо $AB > BC$, то $\angle ABH > \angle CBH$.

У: А цей висновок можна сформулювати так: висота розташована між бісектрисою і *меншою* зі сторін трикутника, що виходять з тієї самої вершини (рис. 49).

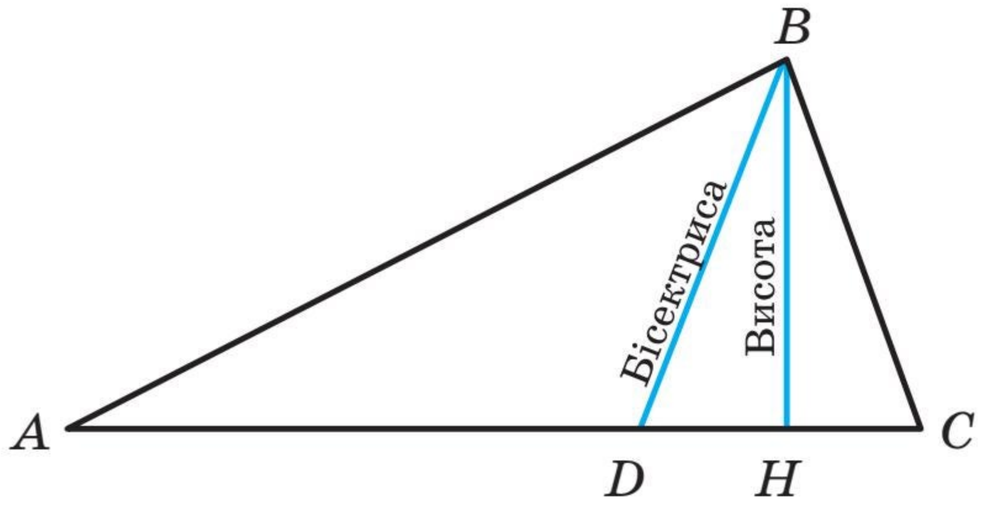


Рис. 49

Ф: Зберемо тепер два висновки разом. Медіана розташована між бісектрисою і *більшою* зі сторін трикутника, що виходять з тієї самої вершини, а висота — між бісектрисою і *меншою* з тих самих двох сторін. Тому бісектриса лежить *між* медіаною та висотою, проведеними з тієї самої вершини. Ми довели наше припущення!

К: Ми розглянули поки тільки випадок, коли висота лежить *усередині* трикутника.

6.67. Скористайтеся «подвоєнням медіани» і тим, що проти більшої сторони лежить більший кут.

6.68. Скористайтеся тим, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут, а також теоремою про суму кутів трикутника.

6.69.*** Доведіть: бісектриса лежить між медіаною та висотою, проведеними з тієї самої вершини, і в тому випадку, коли висота лежить поза трикутником (рис. 50).

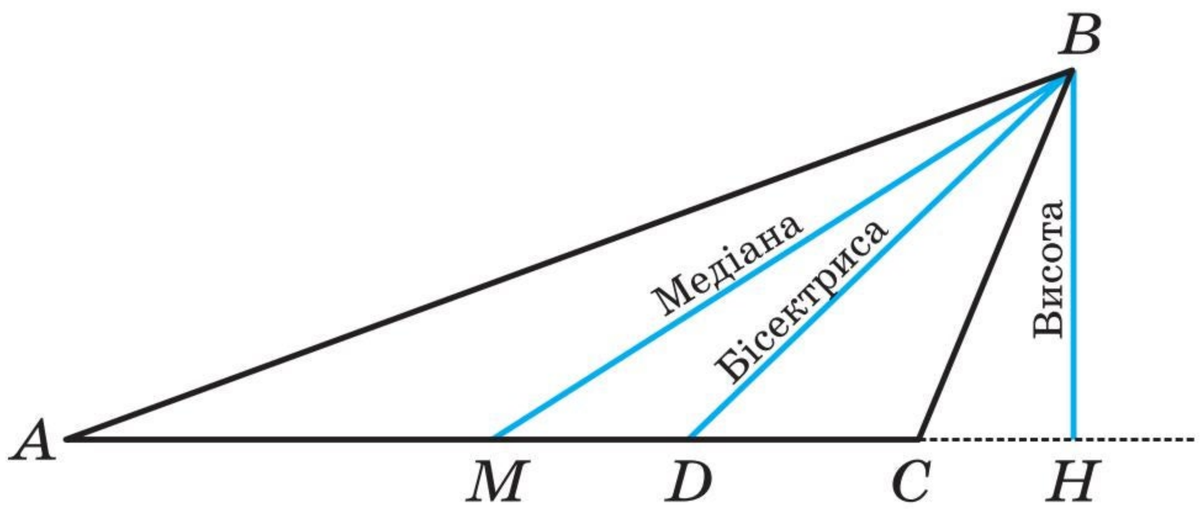


Рис. 50

Взаємне розташування медіани, бісектриси та висоти в прямокутному трикутнику

У: Ми довели, що бісектриса трикутника розташована між медіаною та висотою, проведеними з тієї самої вершини.

К: Якщо вони не збігаються.

У: Звісно! Дякую за уточнення. А тепер дослідимо взаємне розташування медіани CM, бісектриси CD і висоти CH, які проведені з вершини прямого кута *нерівнобедреного* прямокутного трикутника (рис. 51).

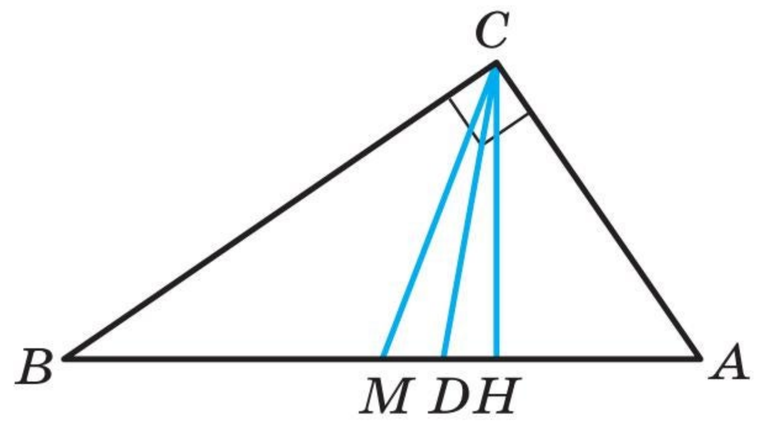


Рис. 51

Х: Бісектриса розташована між медіаною та висотою — але це ми вже знаємо.

Ф: Може бути, якщо кут C прямий, то бісектриса розташована *точно посередині* між медіаною та висотою?

К: Тобто бісектриса прямого кута трикутника є також бісектрисою кута між медіаною та висотою, проведеними з тієї самої вершини? Але це потрібно *довести*.

Ф: Починаємо доводити. Бісектриса ділить кут навпіл, тому кути, які вона утворює в даному випадку з прилеглими сторонами, дорівнюють по $45°$. Знайдемо тепер кути, які медіана

та висота утворюють з прилеглими сторонами. Почнемо з медіани.

6.70.* Доведіть: кут між медіаною, проведеною з вершини прямого кута трикутника, і *більшим* катетом дорівнює *меншому* з гострих кутів даного трикутника, а кут між тією самою медіаною і *меншим* катетом дорівнює *більшому* з гострих кутів трикутника (рис. 52).

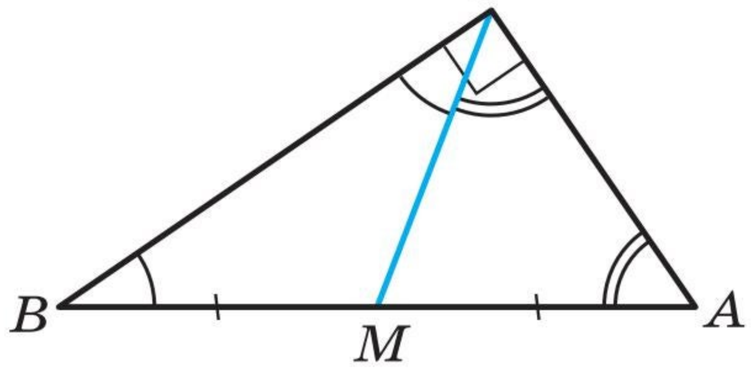


Рис. 52

К: Розгляньмо тепер, які кути утворює з катетами висота, проведена з вершини прямого кута.

6.71.* Доведіть: кут між висотою, проведеною до гіпотенузи, і *більшим* катетом дорівнює *більшому* з гострих кутів трикутника, а кут між тією самою висотою та *меншим* катетом дорівнює *меншому* з гострих кутів трикутника (рис. 53).

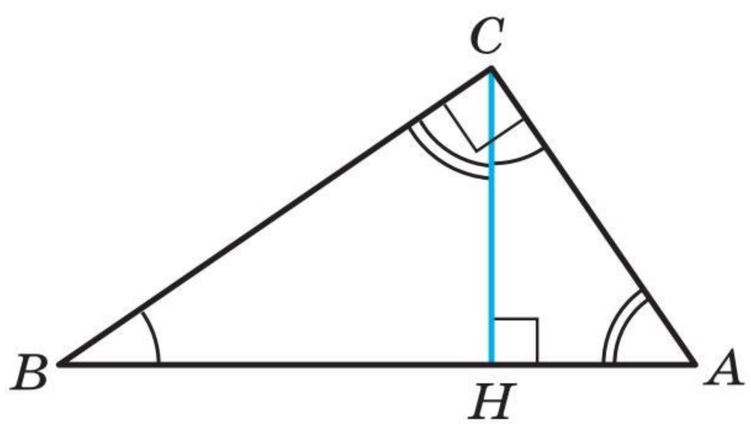


Рис. 53

Ф: Накреслимо тепер медіану, бісектрису та висоту на одному рисунку і позначимо *менший* з кутів, утворених медіаною та висотою з катетами (рис. 54). Оскільки бісектриса ділить кут C навпіл, ми бачимо, що вона ділить навпіл і кут між медіаною та висотою. Ми довели наше припущення!

6.70. Скористайтеся тим, що медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, властивістю рівнобедреного трикутника, а також тим, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут.

6.71. Скористайтеся тим, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

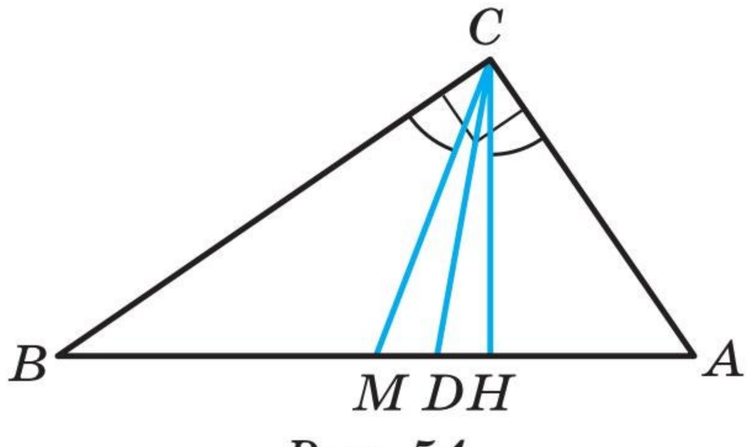


Рис. 54

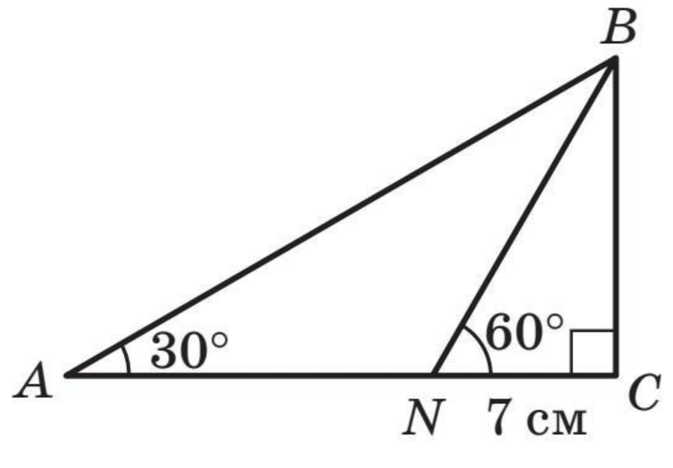


Рис. 55

6.72.** Яку інформацію можна отримати за рис. 55?

6.73.** Які запитання можна поставити за рис. 56?

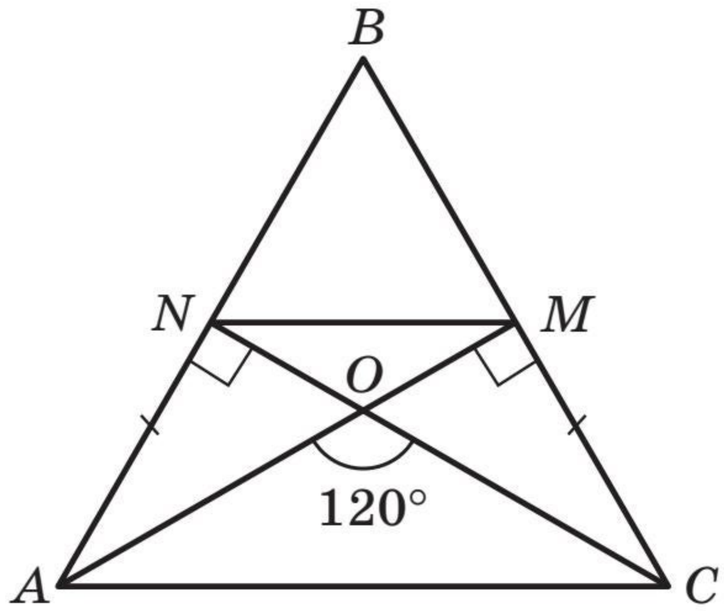


Рис. 56

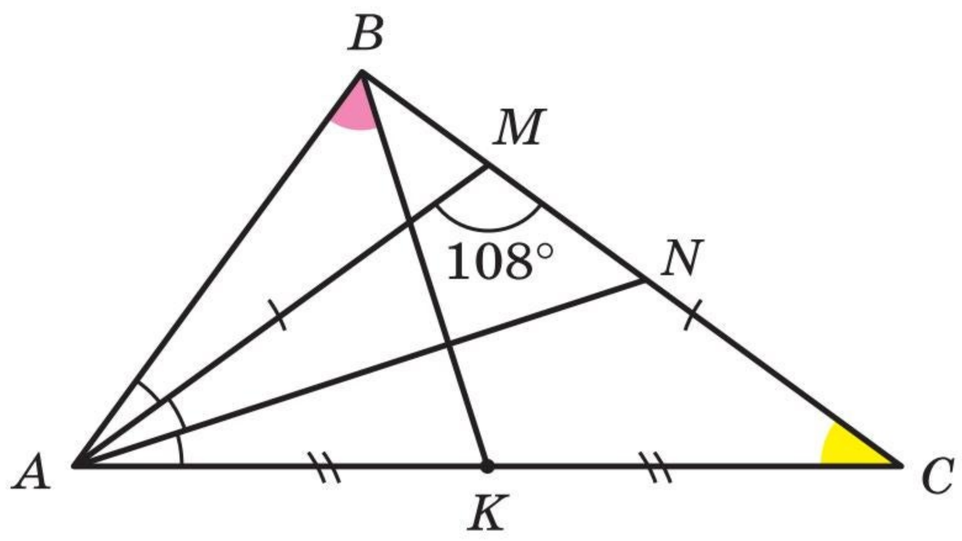


Рис. 57

У: На рис. 57 $AM = MC$, $AK = KC$. Які запитання можна поставити за цим рисунком?

Ф: Чому дорівнює кут MCA (ж) на ри. 57?

6.74.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнює кут BAC на рис. 57?

6.75.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнює кут ABC на рис. 57?

6.76.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнює кут ABK (ч) на рис. 57?

6.77.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

6.78.** Які ще запитання можна поставити за рис. 57? Дайте відповіді на свої запитання.

6.74. Скористайтеся тим, що трикутник AMC рівнобедрений, і теоремою про суму кутів трикутника.

6.75. Скористайтеся тим, що промені AM і AN ділять кут BAC на три рівні кути.

6.76. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника.

6.77. Скористайтеся тим, що медіана, проведена до гіпотенузи, ділить прямокутний трикутник на два рівнобедрені трикутники.

6.78. Можна знайти кути між будь-якими прямими на рисунку.

У: Які запитання можна поставити за рис. 58?

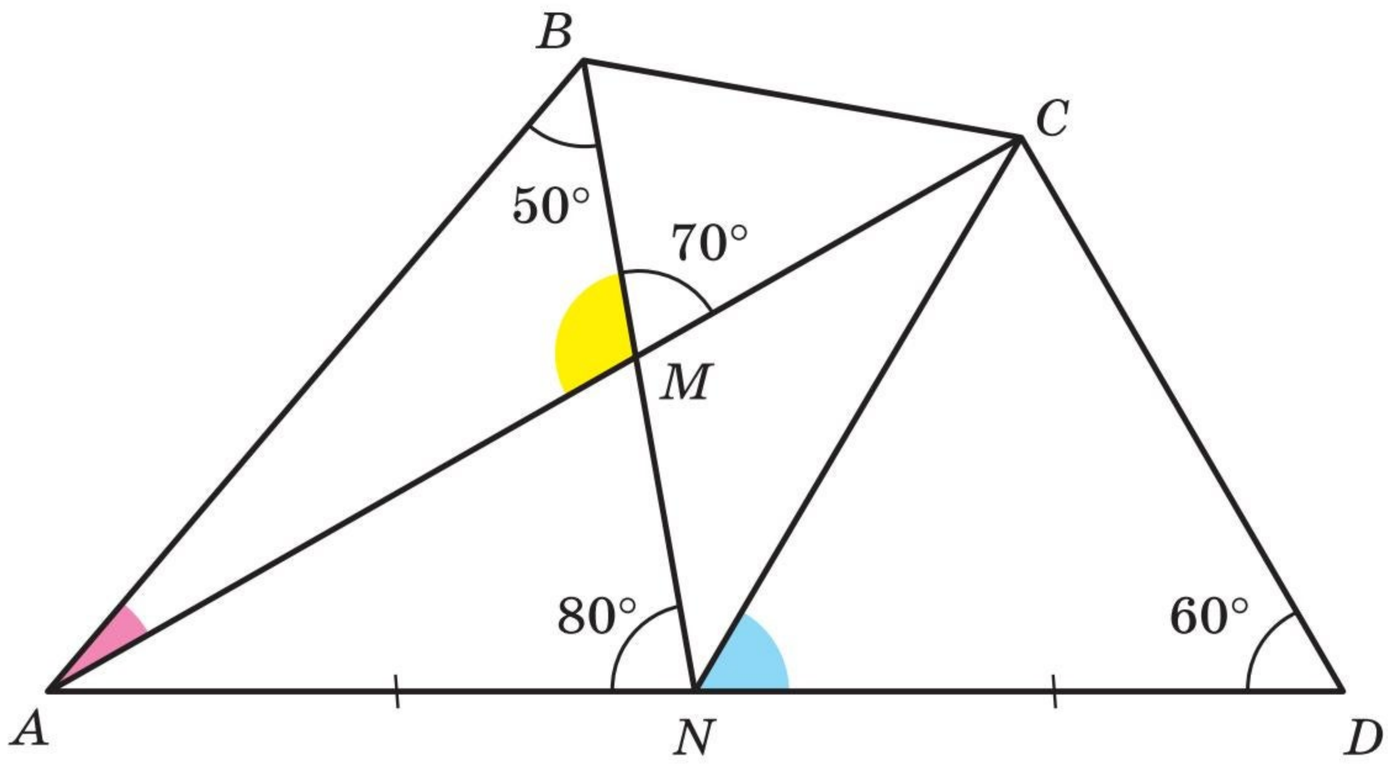


Рис. 58

К: Чому дорівнює кут BAN на рис. 58?

6.79.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнює кут AMB (ж) на рис. 58?

6.80.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнює кут BAM (ч) на рис. 58?

6.81.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чому дорівнює кут ACD на рис. 58?

6.82.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чому дорівнює кут CND (б) на рис. 58?

6.83.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Які рівнобедрені трикутники є на рис. 58?

6.84.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є на рис. 58 рівносторонній трикутник?

6.85.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

6.86.** Які ще запитання можна поставити за рис. 58? Дайте відповіді на свої запитання.

6.79. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника для трикутника BAN.

6.80. Скористайтеся властивістю суміжних кутів.

6.81. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника для трикутника AMB або властивістю зовнішнього кута трикутника.

6.82. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника для трикутника ACD.

6.83. Скористайтеся тим, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить його на два рівнобедрені трикутники.

6.86. Можна знайти кути між будь-якими прямими на рисунку.

У: Які запитання можна поставити за рис. 59?

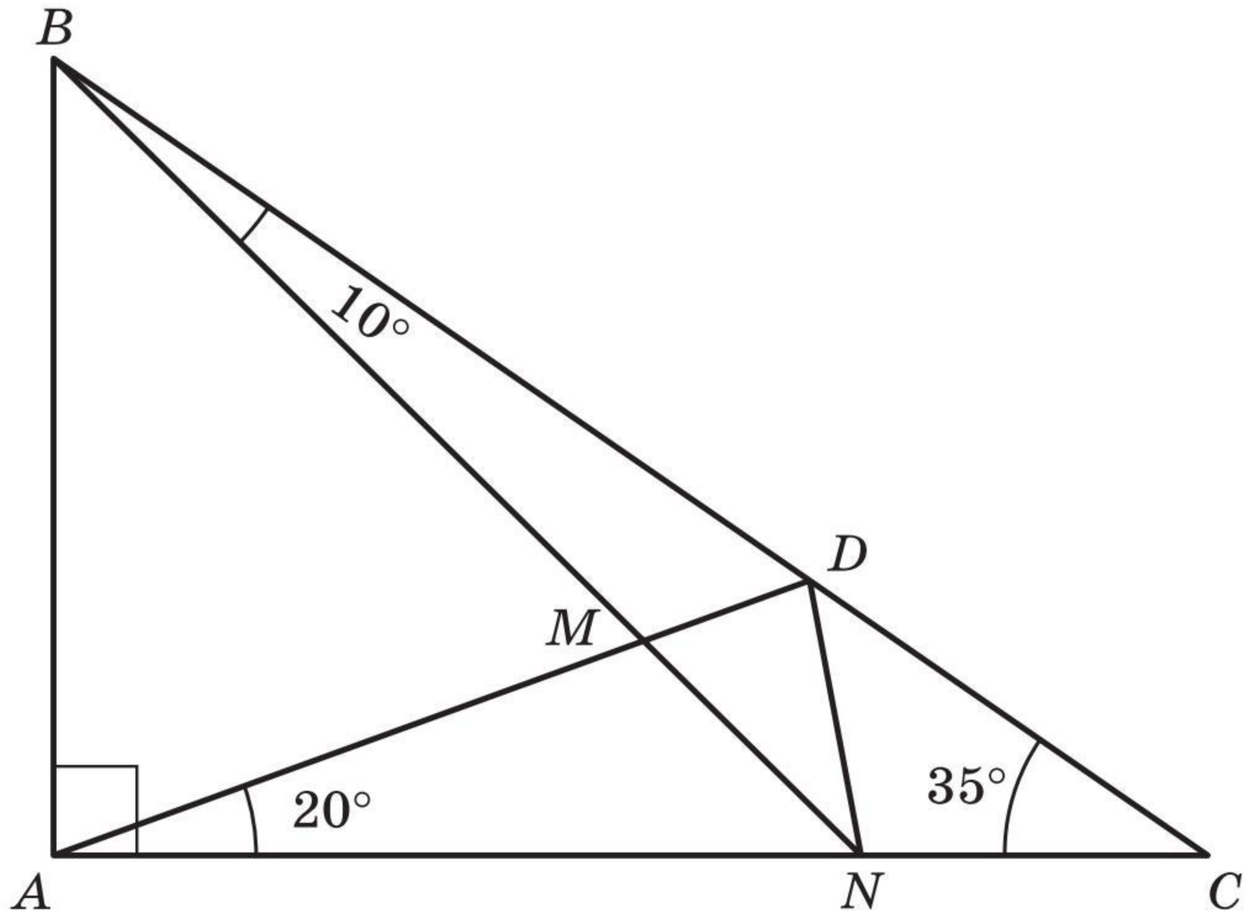


Рис. 59

Ф: Чи є трикутник BAD рівнобедреним?

6.87.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є трикутник BAN рівнобедреним?

6.88.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи є трикутник DAN рівнобедреним?

6.89.** Дайте відповідь на запитання Федора.

6.90.** Які ще запитання можна поставити за рис. 59? Дайте відповіді на свої запитання.

Подібне завдання

6.91.** Яку інформацію можна отримати за рис. 60? Дайте відповіді на свої запитання.

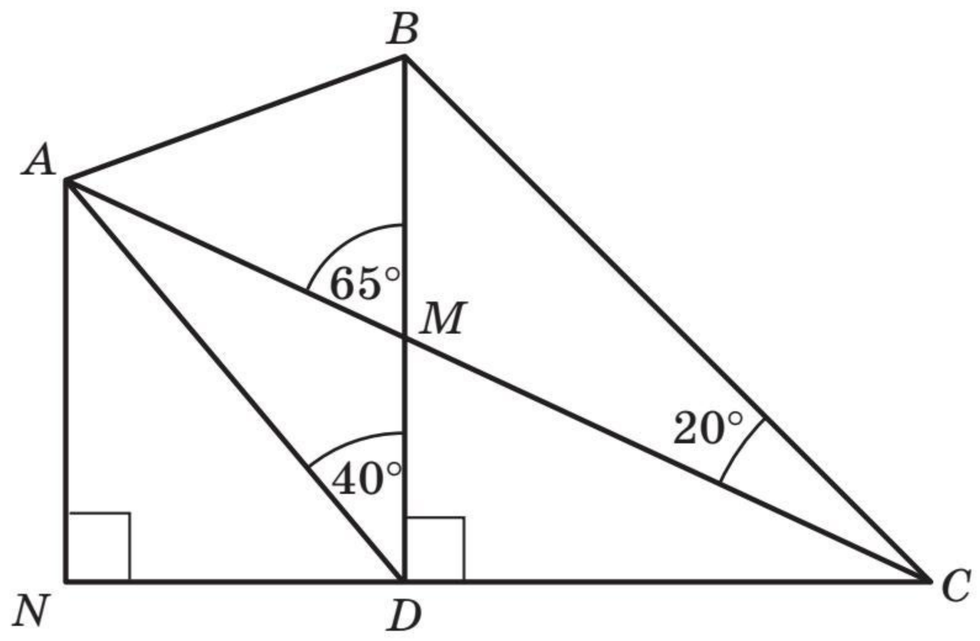


Рис. 60

6.87. Знайдіть кути BAD і BDA (скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника, властивістю суміжних кутів та ознакою рівнобедреного трикутника).

6.88. Знайдіть кут ABN і скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника.

6.89. Скористайтеся тим, що трикутники BAD і BAN рівнобедрені.

6.90. Можна знайти кути між будь-якими прямими на рисунку.

6.91. Скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника, властивістю й ознакою рівнобедреного трикутника.

6.92.** Один кут трикутника дорівнює різниці двох інших кутів. Кут між медіаною і висотою, проведеними з вершини найбільшого кута трикутника, дорівнює 30°. Більша сторона трикутника дорівнює 12 см. Яку інформацію можна отримати?

6.93.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює половині основи. Яку інформацію можна отримати?

6.94.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює половині бічної сторони. Яку інформацію можна отримати?

6.95.** Медіана, проведена до однієї зі сторін трикутника, дорівнює половині цієї сторони й утворює з нею кут 30°. Яку інформацію можна отримати?

ТРИРІВНЕВІ ДОМАШНІ АБО САМОСТІЙНІ ЗАВДАННЯ

(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C.
Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

Нерівність трикутника

6.96.* Накресліть трикутник і позначте його вершини. Запишіть три нерівності, що випливають із нерівності трикутника.

6.97.* Три точки лежать на одній прямій. Запишіть їх позначення. Задайте і запишіть можливі значення всіх відстаней між цими точками. Наведіть 3 приклади.

6.98.* Задайте довжини двох сторін трикутника. Запишіть можливі значення довжини третьої сторони. Наведіть 3 приклади.

6.99.** Накресліть трикутник і позначте його вершини.

а) Позначте точку O всередині трикутника та з'єднайте її відрізками з усіма вершинами трикутника.

б) Запишіть дві нерівності для відрізків, що не містять точку O.

в) Запишіть три нерівності для відрізків, два із яких містять точку O.

6.100.** Накресліть трикутник і позначте по одній точці на кожній його стороні. З'єднайте ці точки відрізками.

а) Позначте вершини всіх трикутників.

б) Запишіть нерівності для відрізків на рисунку.

6.92. Можна поставити, наприклад, такі запитання: чому дорівнюють кути трикутника; чому дорівнює менша сторона трикутника; чому дорівнює медіана, проведена до більшої сторони; на які кути ділить більший кут висота, проведена до більшої сторони?

в) Запишіть нерівність для периметрів початкового трикутника і трикутника, вписаного в нього.

6.101.* Накресліть пряму і позначте точку, що не лежить на ній.

а) Накресліть відрізок, один кінець якого збігається з позначеною точкою, а другий кінець лежить на даній прямій, до того ж довжина цього відрізка дорівнює відстані від точки до прямої. Позначте кінці накресленого відрізка.

б) Позначте на тій самій прямій дві точки так, щоб за їх допомогою можна було позначити утворені кути.

в) Знайдіть на рисунку рівні кути й запишіть рівність кутів.

6.102.* Накресліть дві паралельні прямі.

а) Накресліть відрізок, кінці якого лежать на прямих, до того ж довжина цього відрізка дорівнює відстані між прямими.

б) Запишіть на рисунку градусні міри кутів, які відрізок утворює з кожною прямою.

6.103.** Накресліть різносторонній трикутник і проведіть у ньому будь-яку медіану. Позначте всі точки.

а) Запишіть нерівність для довжин сторін, прилеглих до медіани.

б) Запишіть нерівність, справедливу для проведеної медіани та більшої з прилеглих до неї сторін трикутника.

в) Запишіть коротке обґрунтування для цієї нерівності.

6.104.*** Накресліть рівносторонній трикутник і проведіть у ньому одну висоту.

а) Оберіть точку на одній зі сторін трикутника та проведіть перпендикуляри із цієї точки до двох інших сторін. Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

б) Запишіть рівність, справедливу для проведених перпендикулярів і висоти трикутника.

в) Запишіть коротке обґрунтування цієї рівності.

Прямокутний трикутник

6.105.* Запишіть натуральне число $b \leqslant 30$. Прийміть, що один із гострих кутів прямокутного трикутника на b градусів більший від іншого кута. Знайдіть кути трикутника.

6.106.** Запишіть натуральне число b, не більше від 30. Прийміть, що один із кутів прямокутного трикутника на b градусів більший від іншого. Чому можуть дорівнювати кути цього трикутника? Розгляньте всі можливості.

6.107.** Запишіть довільне натуральне число k. Прийміть, що один із кутів прямокутного трикутника в k разів більший від іншого. Чому можуть дорівнювати кути цього трикутника?

6.108.** Один із гострих кутів прямокутного трикутника на a градусів більший від другого кута.

а) Виразіть значення всіх кутів трикутника через a.

б) Задайте самостійно значення a і запишіть його. Знайдіть значення всіх кутів трикутника.

6.109.** Накресліть прямокутний трикутник з кутом 30°.

а) Проведіть медіану до гіпотенузи. Позначте вершини трикутника та кінець медіани.

б) Знайдіть усі рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.

в) Знайдіть рівносторонній трикутник. Запишіть.

6.110.** Запишіть довільне натуральне число b. Прийміть, що в прямокутному трикутнику з кутом 30° сума довжин гіпотенузи та меншого катета дорівнює b см.

а) Знайдіть довжини гіпотенузи і меншого катета.

б) Знайдіть довжину медіани, проведеної до гіпотенузи.

6.111.** Запишіть довільне натуральне число b, не більше від 80. Прийміть, що один із кутів трикутника дорівнює b градусів, а бісектриси деяких двох кутів трикутника перетинаються під кутом 45°.

а) Знайдіть, чому дорівнює найбільший кут трикутника.

б) Знайдіть значення решти кутів трикутника.

6.112.** Накресліть прямокутний трикутник з кутом 30°.

а) Проведіть бісектрису більшого з гострих кутів трикутника.

б) З кінця цієї бісектриси проведіть перпендикуляр до гіпотенузи. Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

в) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

6.113.** Накресліть прямокутний трикутник і проведіть висоту до найбільшої його сторони.

а) Задайте градусну міру кута між цією висотою та одним із катетів, запишіть її на рисунку.

б) Знайдіть і запишіть значення гострих кутів трикутника.

6.114.** Накресліть прямокутний трикутник і проведіть медіану до його найбільшої сторони.

а) Задайте значення кута між цією медіаною та однією з прилеглих до неї сторін трикутника й запишіть його на рисунку.
б) Знайдіть і запишіть значення гострих кутів трикутника.

6.115.* Накресліть прямокутний трикутник і проведіть медіану та бісектрису до його найбільшої сторони.
а) Задайте значення кута між ними та запишіть його на рисунку.
б) Знайдіть і запишіть значення гострих кутів трикутника.

6.116.* Накресліть прямокутний трикутник і проведіть медіану й висоту до найбільшої його сторони.
а) Задайте значення кута між ними та запишіть його на рисунку.
б) Знайдіть і запишіть значення гострих кутів трикутника.

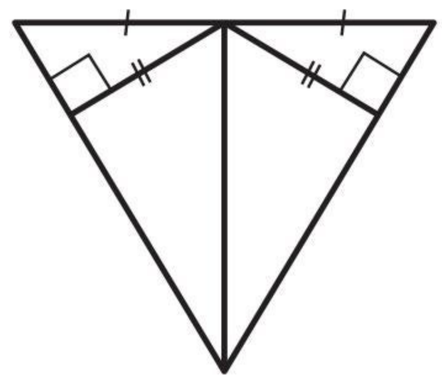
6.117.** Накресліть рівнобедрений трикутник і проведіть висоту до бічної сторони.
а) Задайте градусну міру кута, протилежного до основи трикутника, запишіть її на рисунку.
б) Знайдіть і запишіть значення кутів, на які проведена висота ділить кут при основі.

6.118.* Накресліть прямокутний трикутник з різними катетами. Проведіть у ньому висоту з вершини прямого кута й бісектрису одного з гострих кутів. Позначте вершини всіх трикутників.
а) Знайдіть на рисунку рівнобедрений трикутник і запишіть його позначення із зазначенням основи або бічних сторін.
б) Запишіть коротке обґрунтування того, що знайдений трикутник — рівнобедрений.

6.119.** Задайте градусну міру одного з гострих кутів прямокутного трикутника й запишіть її на рисунку. Знайдіть, чому дорівнює кут між висотою та медіаною, проведеними до гіпотенузи.

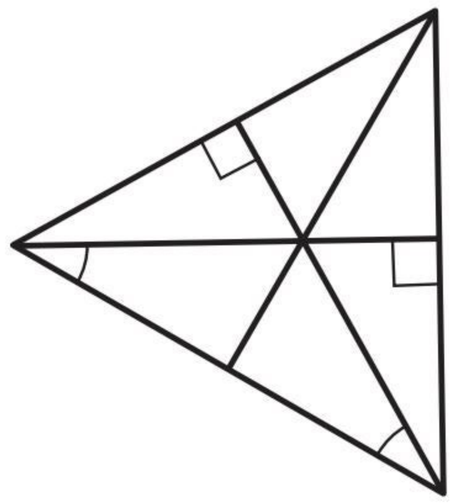
6.120.** Задайте градусну міру одного із гострих кутів прямокутного трикутника й запишіть її на рисунку. Знайдіть, чому дорівнює кут між висотою та бісектрисою, проведеними до гіпотенузи.

6.121.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.
а) Знайдіть усі прямокутні трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням прямого кута.



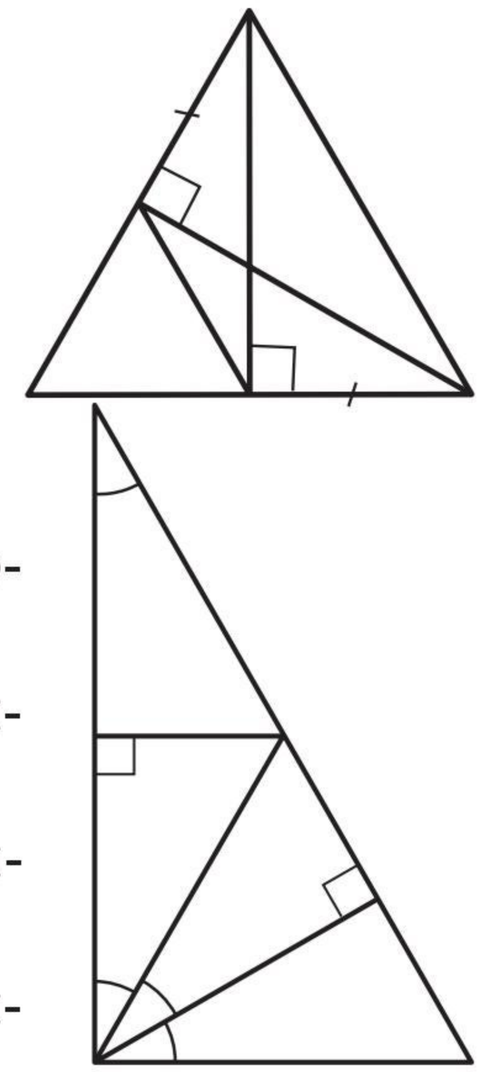
б) Знайдіть усі рівні трикутники. Запишіть рівності трикутників.
в) Знайдіть усі рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.

6.122.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.



а) Знайдіть усі прямокутні трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням прямого кута.
б) Знайдіть усі рівні трикутники. Запишіть рівності трикутників.
в) Знайдіть усі рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.

6.123.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.



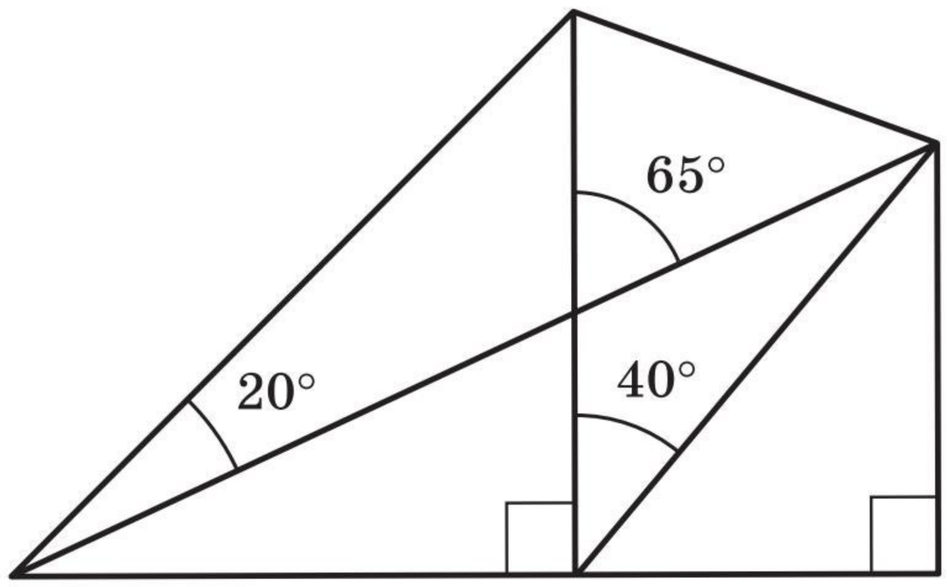
а) Знайдіть усі рівні трикутники. Запишіть рівності трикутників.
б) Знайдіть усі рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.

6.124.*** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть усі кути, що дорівнюють 30°. Позначте їх на рисунку.
б) Знайдіть усі пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.
в) Знайдіть усі рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи.
г) Знайдіть рівносторонній трикутник. Запишіть його позначення.

6.125.** Позначте вершини всіх трикутників на рисунку.

а) Знайдіть і запишіть на рисунку значення всіх кутів.
б) Знайдіть усі рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.



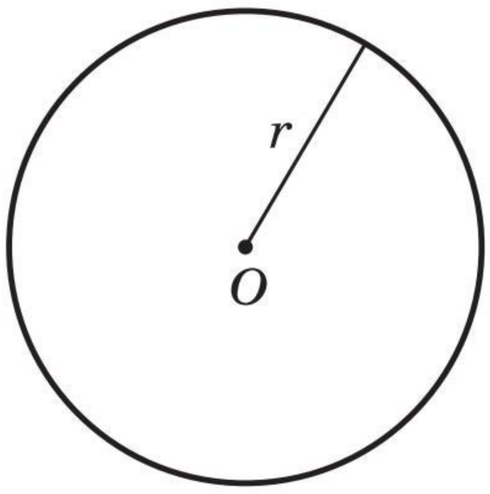
ГЛАВА 7. КОЛО. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ



1. КОЛО І КРУГ

У: Ви вже знаєте, що коло (рис. 1, *а*) креслять циркулем, при цьому розхил циркуля залишається *постійним* (рис. 1, *б*). Така побудова кола унаочнює *означення* цієї геометричної фігури.

а



б

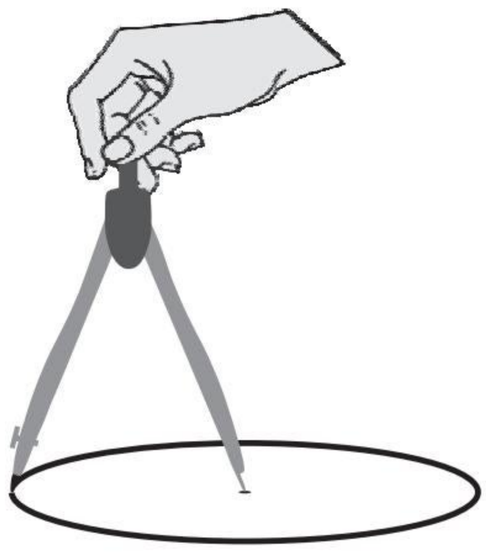


Рис. 1

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, розташованих на однаковій відстані від заданої точки, яку називають *центром* кола.
Відрізок, що сполучає центр кола з будь-якої точкою кола, називають *радіусом* цього кола.

Центр кола, зазвичай, позначають O, а довжину його радіуса — r або R.

7.1.* Чи належить колу його центр? Чому дорівнює найбільша відстань між точками кола?

У: Із кругом ви також уже знайомі. Чим відрізняється круг від кола?

К: Круг містить усі точки кола, а також *усі точки площини*, що розташовані всередині кола.

У: Правильно. Можна дати таке означення.

Кругом називають частину площини, що обмежена колом і включає це коло (рис. 2).
Центром круга називають центр кола, що його обмежує.

Можна сказати також, що круг — це геометрична фігура, що складається зі всіх точок площини, розташованих від заданої точки (центра круга) на відстані, *не більшій від* даної (довжини радіуса круга).

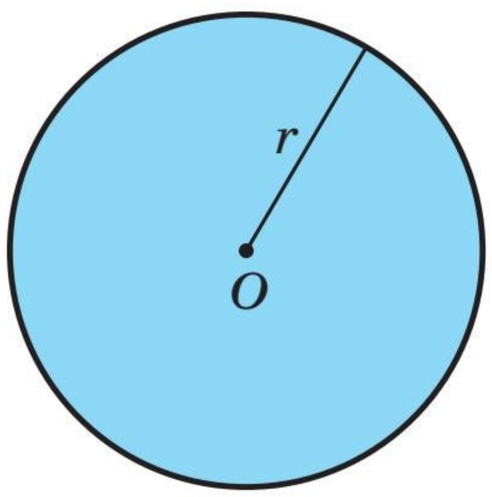


Рис. 2

7.2.* Чи належить кругові його центр? Чому дорівнює найбільша відстань між точками круга?

Хорда, діаметр і дуга кола

У: Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають *хордою*. Хорду, що проходить через центр кола, називають *діаметром* цього кола.

7.3.* Які з відрізків, зображених на рис. 3, є хордами? Які з них є також діаметрами?

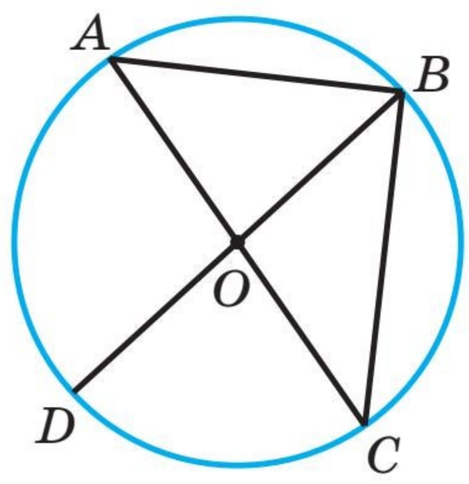


Рис. 3

У: Які із зображених на рис. 3 хорд мають найбільшу довжину?

Ф: Гадаю, що ті, які є діаметрами.

7.4.* Доведіть, що найбільшою хордою є діаметр.

7.4. З'єднайте кінці хорди, що не проходить через центр кола, з центром кола: ви отримаєте рівнобедрений трикутник з бічною стороною, що дорівнює радіусу кола, і основою, що дорівнює даній хорді. Відтак скористайтеся нерівністю трикутника.

У: Діаметр кола легко провести, коли позначений його центр. А як побудувати центр кола, якщо він не позначений (рис. 4)?

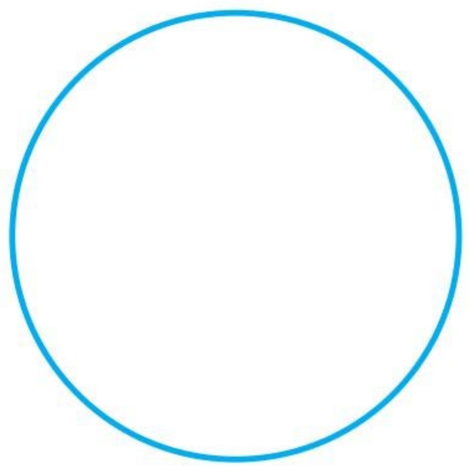


Рис. 4

К: Що означає «побудувати центр кола»? Це ж одна точка!

У: Під словом «побудувати» ми відтепер розумітимемо «побудувати геометричну фігуру або знайти розташування точки *за допомогою циркуля і лінійки без поділок*».

Щоб побудувати задану геометричну фігуру, потрібно використовувати її *властивості* й *ознаки*. Які властивість й ознака центра кола?

Ф: Він розташований на *однаковій* відстані від усіх точок кола.

К: Припустимо, що ми знаємо, де розміщений центр кола O. Тоді трикутник, вершини A і B якого лежать на колі, а третя вершина O збігається з центром кола, буде *рівнобедреним* з основою AB (рис. 5).

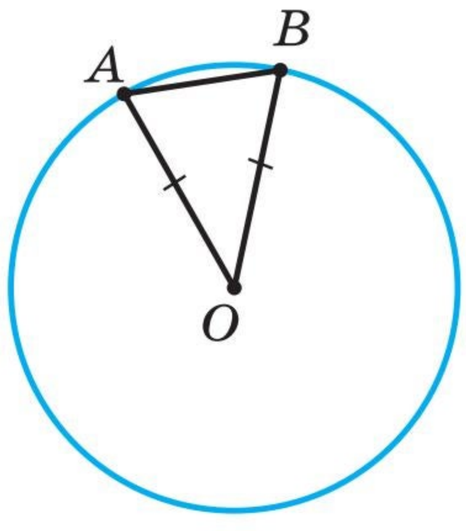


Рис. 5

Ф: А про рівнобедрений трикутник ми знаємо вже доволі багато. Наприклад, ми знаємо, що його вершина, протилежна основі, розташована на серединному перпендикулярі до основи (рис. 6).

К: Значить, серединний перпендикуляр до *будь-якої* хорди кола проходить через *центр* кола (рис. 7)!

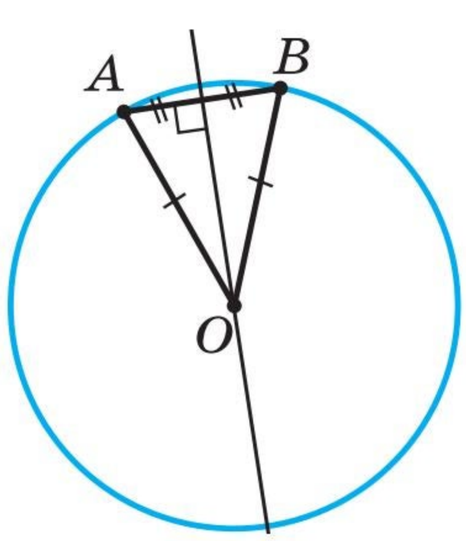


Рис. 6

Ф: Я вже бачу, як це допоможе побудові центра кола!

К: Я також знаю тепер, як побудувати центр кола. Може, у нас *різні* способи?

7.5.** Запропонуйте два способи побудови центра кола за допомогою циркуля і лінійки без поділок.

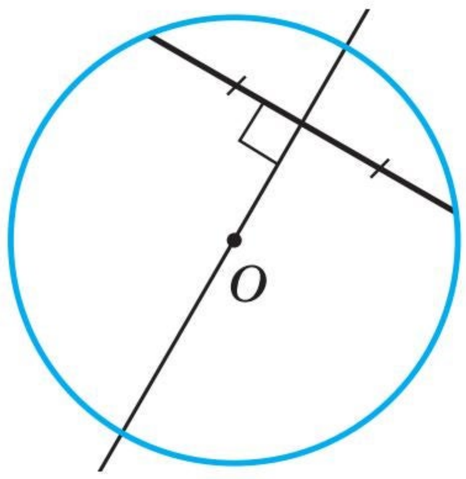


Рис. 7

7.6.** Доведіть:

а) якщо діаметр ділить навпіл хорду, що не є діаметром, то він перпендикулярний до неї;

б) якщо діаметр перпендикулярний до хорди, то він ділить її навпіл.

Чому в завданні а) зроблене застереження, що хорда, яку діаметр ділить навпіл, не є діаметром? Наведіть приклад, що ілюструє вашу відповідь.

Подібне завдання

7.7.** Розгляньте рис. 8.

а) Які відрізки на рисунку перпендикулярні?

б) Які відрізки на рисунку паралельні?

в) Які кути на рисунку рівні?

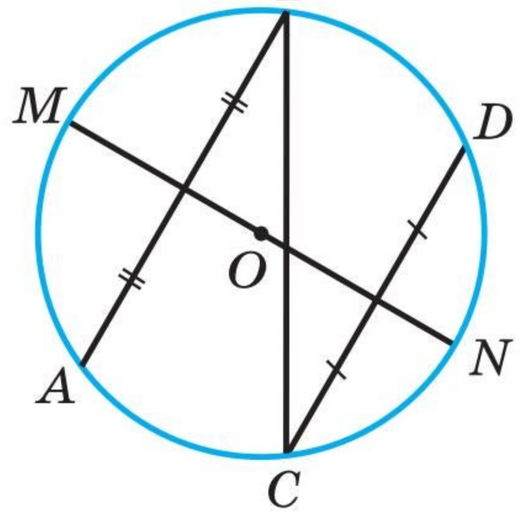


Рис. 8

7.8. Розгляньте рис. 9.

а)* Які на цьому рисунку є рівні відрізки?

б)** Які на цьому рисунку є рівні кути?

в)*** Чи є трикутник ABC прямокутним?

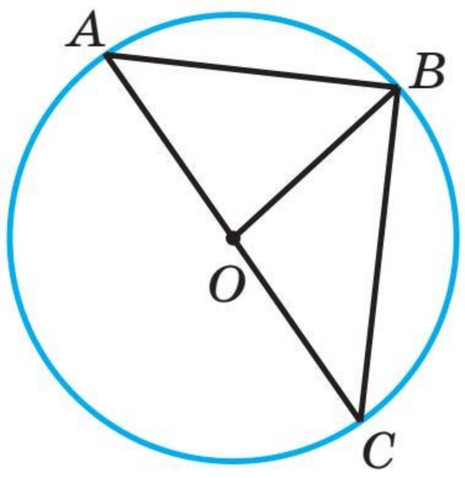


Рис. 9

7.9. Накресліть коло з центром O і проведіть діаметри AB і CD.

а)* Які ще хорди з кінцями в точках A, B, C, D можна провести? Проведіть їх.

б)** Чи є серед проведених хорд паралельні? Запишіть ваші відповіді, використовуючи знак паралельності.

в)*** Чи є серед проведених хорд перпендикулярні? Запишіть ваші відповіді, використовуючи знак перпендикулярності.

г)*** Чи є серед проведених хорд рівні? Запишіть їх рівності.

7.6. З'єднайте кінці хорди з центром кола і скористайтеся тим, що: а) медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, збігається з висотою; б) висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, збігається з медіаною. *Будь-які* два діаметри одного кола (у тому числі й *неперпендикулярні один одному*) точкою перетину діляться навпіл.

7.7. Скористайтеся тим, що коли діаметр ділить навпіл хорду, що не є діаметром, то він перпендикулярний до неї, а також тим, що дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Скористайтеся також властивостями вертикальних і різносторонніх кутів.

7.8. в) Скористайтеся однією з ознак прямокутного трикутника.

7.9. б) Доведіть рівність трикутників і скористайтеся ознакою паралельності прямих. в) Скористайтеся однією з ознак прямокутного трикутника. г) Скористайтеся властивістю рівних трикутників.

7.10.** Доведіть, що рівні хорди розташовані на рівних відстанях від центра кола.

Подібне завдання

7.11.** Доведіть: якщо дві хорди розташовані на рівних відстанях від центра кола, то вони рівні.

7.12. На рисунку 10 точка O — центр кола, а довжини всіх хорд рівні. Діаметр кола дорівнює 12 см.

а)* Чи є на рисунку рівні трикутники?

б)** Знайдіть усі кути на рисунку.

в)*** Чому дорівнює відстань від центра кола до кожної хорди?

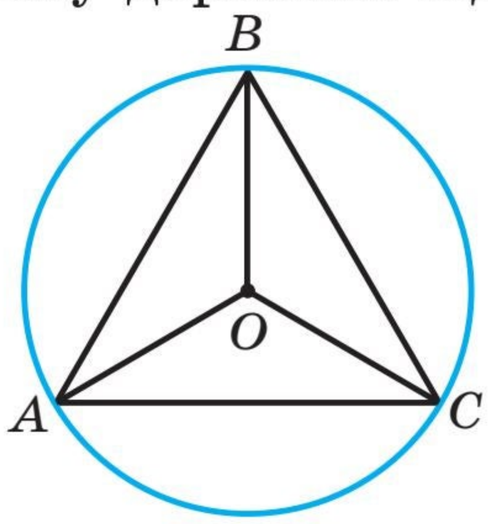


Рис. 10

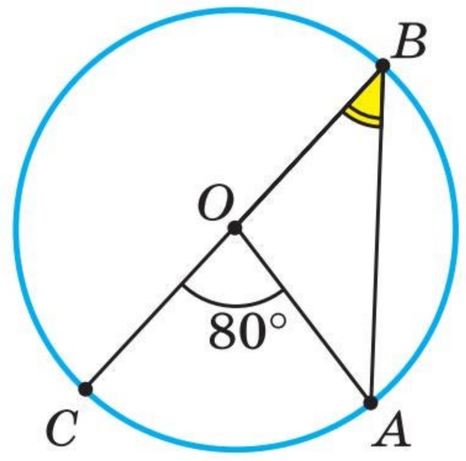


Рис. 11

7.13.** На рис. 11 точка O — центр кола. Чому дорівнює кут ABC?

Подібні завдання (7.14–7.15)

7.14.** На рис. 12 точка O — центр кола. Чому дорівнюють кути ABD (ж) і COD (с)?

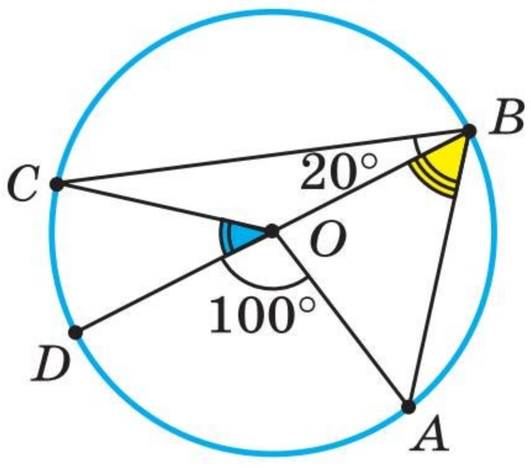


Рис. 12

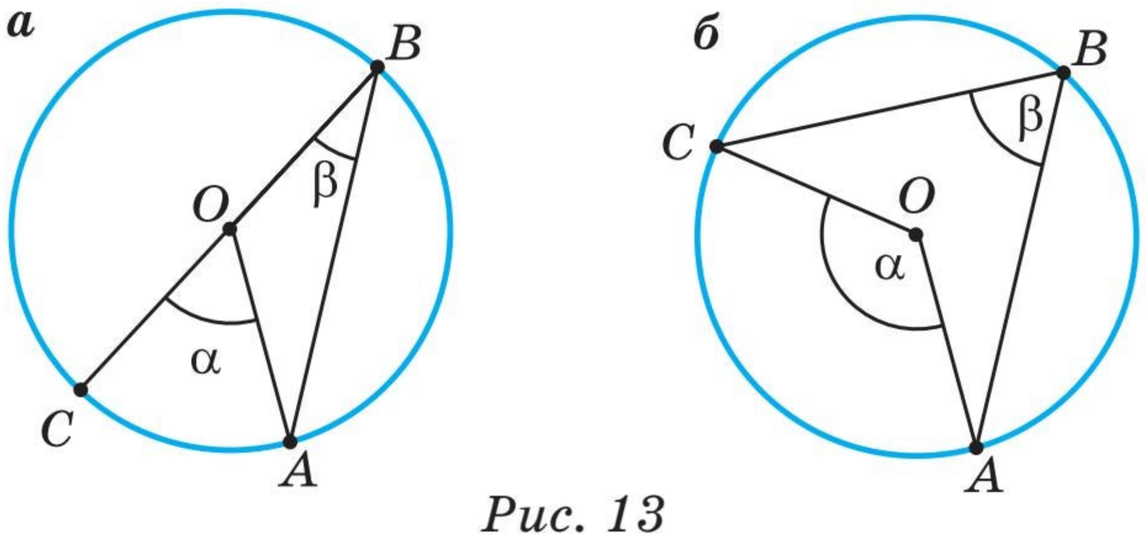


Рис. 13

7.10. Зауважте, що відстань від центра до хорди дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного від центра до хорди, скористайтеся властивістю діаметра, перпендикулярного до хорди, а також однією з ознак рівності прямокутних трикутників.

7.12. а) Скористайтеся ознакою рівності трикутників за трьома сторонами; б) Скористайтеся тим, що кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°; в) Скористайтеся властивістю прямокутного трикутника з кутом 30°.

7.15.** Доведіть: $\alpha = 2\beta$ (рис. 13).

7.16.** Виразіть усі кути на рис. 14 через кут α.

7.17. На рис. 15 $BC = OA$.

а)* Знайдіть на рисунку всі рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням основи чи бічних сторін.

б)** Виразіть усі кути на рисунку через кут α.

в)** Чому дорівнює відрізок AD, якщо $BC = 2$ см і $\alpha = 20°$?

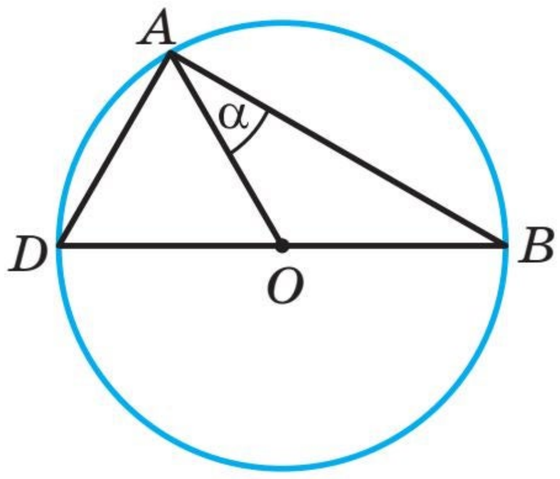


Рис. 14

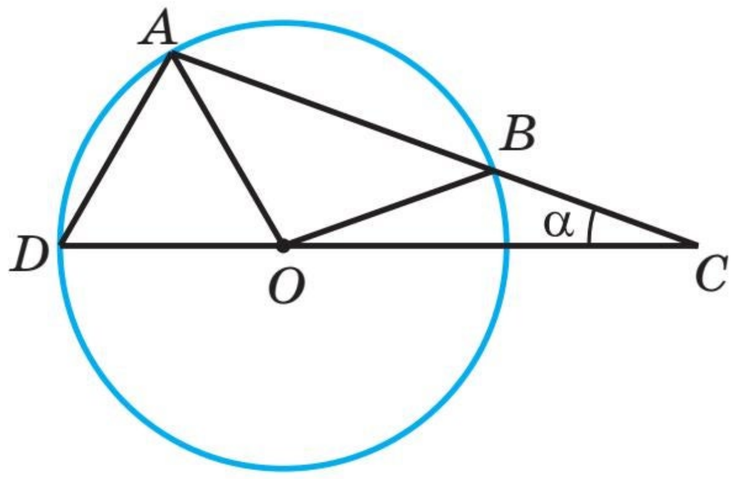


Рис. 15

Будь-які дві точки кола ділять його на дві частини, які називають *дугами* кола.

На рис. 16 дві дуги кола ABC і ADC позначені різними кольорами. Детальніше з дугами кіл ми ознайомимося в наступних класах.

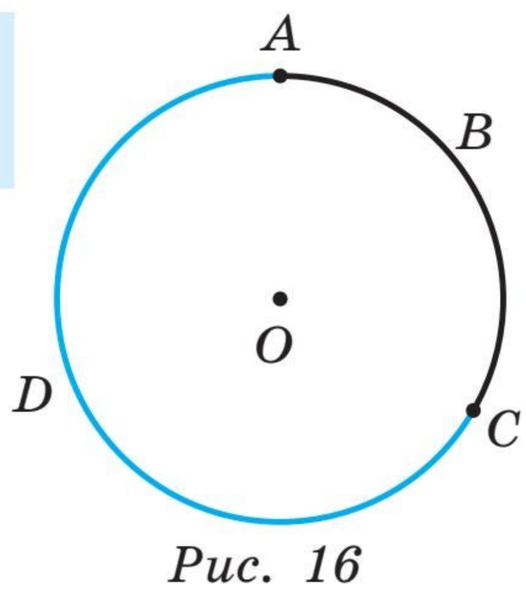


Рис. 16

Дотична

У: На рис. 17 зображені коло з центром O і пряма a, що має лише одну спільну точку B з цим колом.

Пряму, що має лише одну спільну точку з колом, називають *дотичною* до цього кола.

Спільну точку дотичної і кола називають *точкою дотику*.

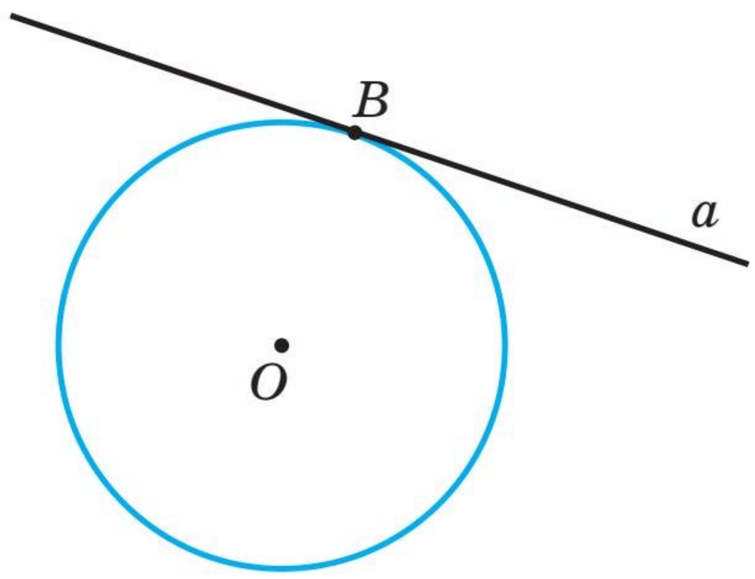


Рис. 17

7.16. Скористайтеся тим, що коли медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то даний трикутник прямокутний, до того ж медіана проведена до його гіпотенузи.

7.17. б) Скористайтеся тим, що всі радіуси одного кола рівні, тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, властивістю зовнішнього кута трикутника, а також теоремою про суму кутів трикутника. в) Доведіть, що трикутник AOD рівносторонній.

К: Назва дотичної говорить сама за себе — її не потрібно перекладати з грецької або латини!

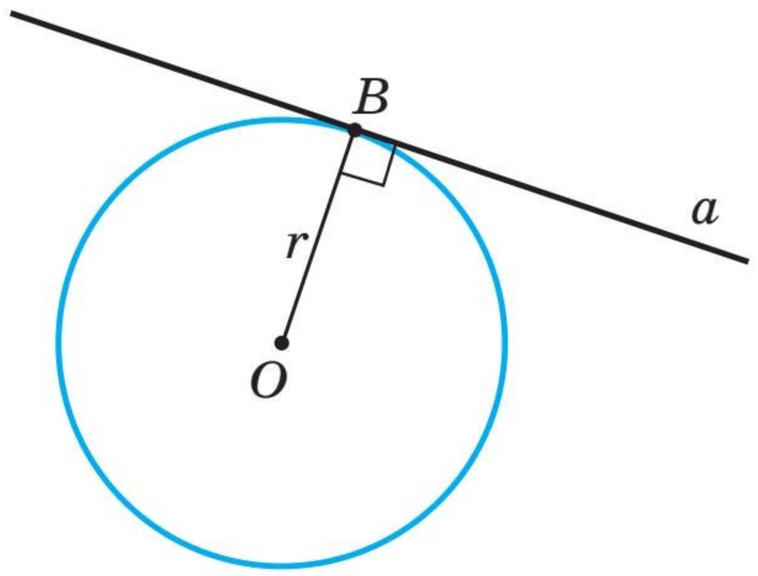


Рис. 18

7.18.** Доведіть *властивість* дотичної:

дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику (рис. 18).

7.19.** Доведіть *ознаку* дотичної:

якщо пряма має спільну точку з колом і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма — дотична до даного кола.

У: Розглянемо тепер дві дотичні до одного кола, проведені з *однієї* точки (рис. 19). Порівняйте відрізки дотичних AK і BK, що з'єднують спільну точку K дотичних з точками дотику A і B.

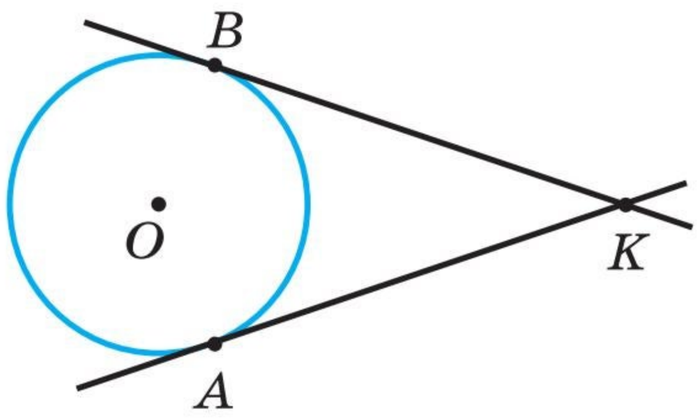


Рис. 19

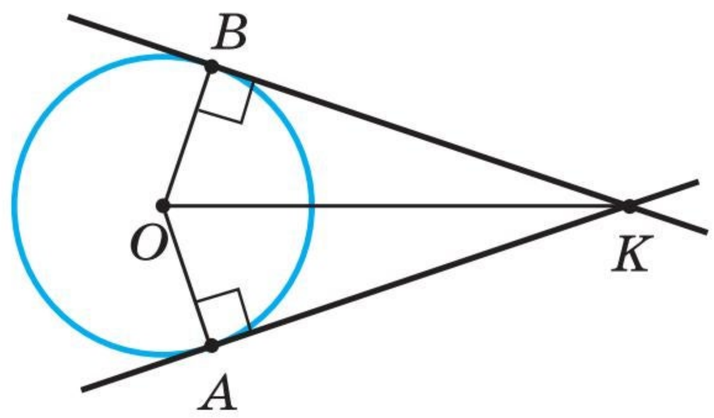


Рис. 20

Ф: Мені здається, що вони рівні.

К: Ось рисунок, за допомогою якого це можна довести (рис. 20).

7.20.* Використовуючи рис. 20, доведіть: $AK = BK$.

7.18. Скористайтеся тим, що всі точки дотичної, крім точки дотику, розташовані поза колом, тобто розташовані на більшій відстані від центра кола, ніж точка дотику. Скористайтеся також тим, що найближча до даної точки точка прямої — це основа перпендикуляра, проведеного до цієї прямої з даної точки.

7.19. Скористайтеся тим, що похила, проведена з будь-якої точки до даної прямої, більша від перпендикуляра до цієї прямої, проведеного з тієї самої точки.

7.20. Скористайтеся ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.

7.21.** На рис. 21 точка O — центр кола, KB і KA — дотичні, $\angle AOB = 120°$ (ж), $OK = 8$ см.

а) Доведіть: KO — бісектриса кута AKB, а OK — бісектриса кута AOB.

б) Знайдіть усі кути на рисунку.

в) Знайдіть радіус кола.

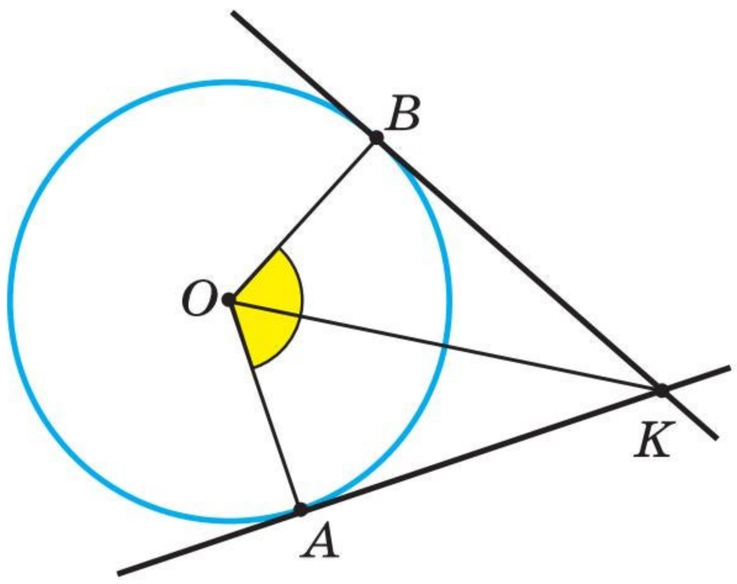


Рис. 21

Подібні завдання (7.22–7.23)

7.22.** На рис. 22 точка O — центр кола, KB і KA — дотичні до кола, A і B — точки дотику. Знайдіть усі кути на рисунку.

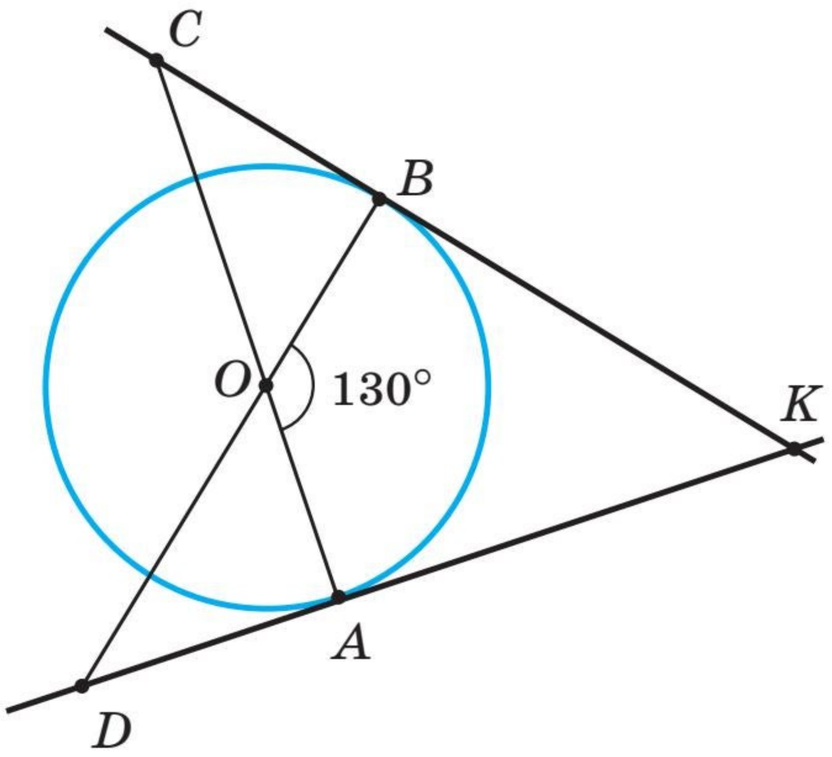


Рис. 22

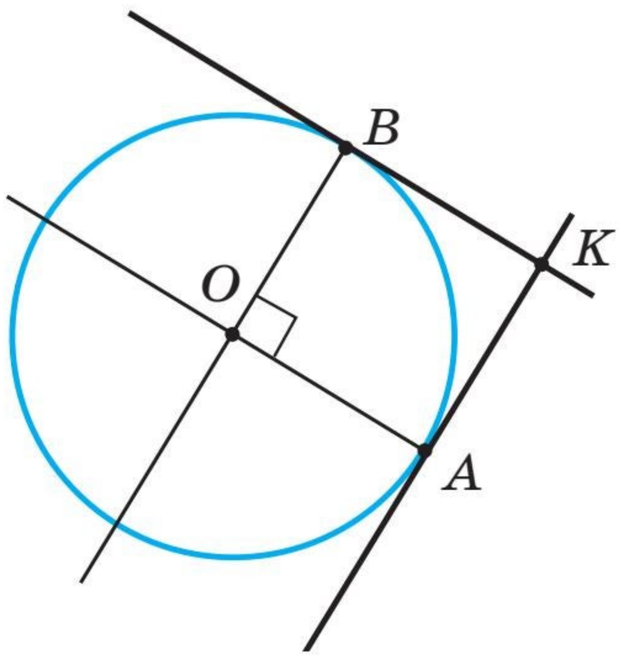


Рис. 23

7.23.** На рисунку 23 точка O — центр кола, KB і KA — дотичні до кола, A і B — точки дотику. Яку інформацію можна отримати за цим рисунком?

7.24.** На рис. 24 точки B, D і M — точки дотику відповідно прямих CB, CD і KN з колом. Периметр трикутника BCD дорівнює 9 см.

а) Які рівні відрізки є на рисунку? Запишіть рівність відрізків.

б) Чому дорівнює кожна сторона трикутника BCD?

в) Чому дорівнює периметр трикутника KCN?

7.21. а) Скористайтеся властивістю дотичної та доведіть рівність трикутників AOK і BOK; в) Скористайтеся співвідношенням між катетом і гіпотенузою в прямокутному трикутнику з кутом 30°.

7.24. Доведіть, що трикутник BCD рівносторонній. Скористайтеся тим, що коли з однієї точки проведені дві дотичні до кола, то відрізки дотичних, що з'єднують цю точку з точками дотику, рівні.

Подібне завдання

7.25.** Відрізки AB, BC, CD і DA лежать на дотичних до кола (рис. 25). Доведіть: $AB + CD = BC + AD$.

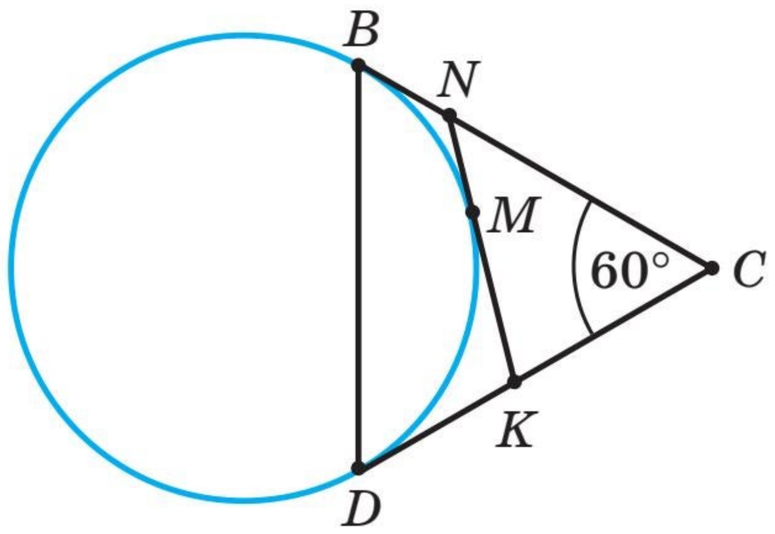


Рис. 24

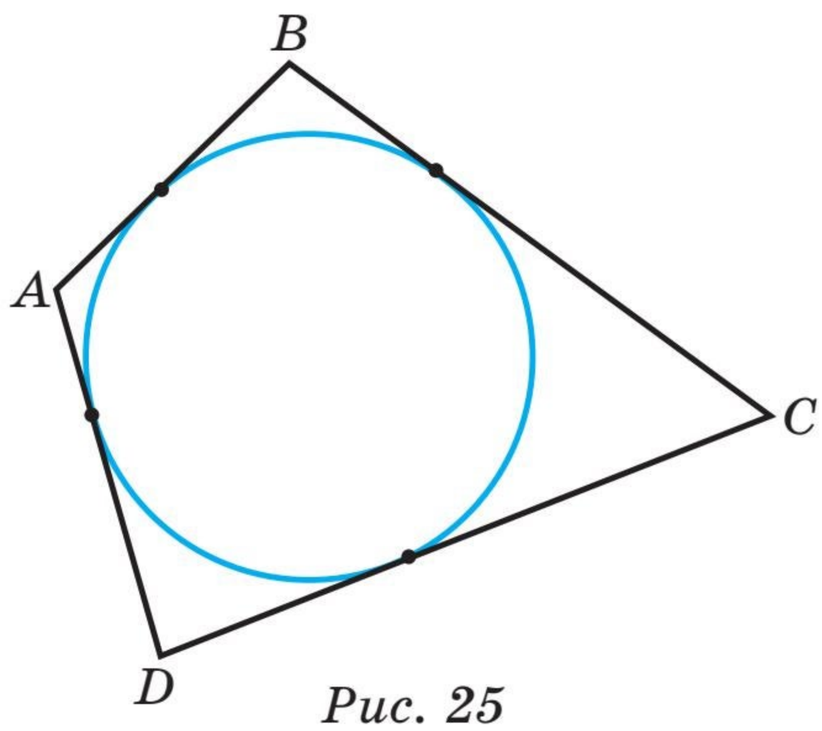


Рис. 25

2. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК. МЕТОД ДВОХ ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Коло як геометричне місце точок

У: Коло є множиною точок, що задовольняють *дві* умови:
1) *усі точки кола* розташовані на заданій відстані від даної точки;
2) *усі точки площини*, що розташовані на заданій відстані від даної точки, належать колу.

Такий погляд на коло дозволяє ввести нове поняття.

Геометричним місцем точок (ГМТ) на площині називають множину всіх точок площини, які мають певну властивість.

Використовуючи поняття ГМТ, коло можна визначити так:

коло — це геометричне місце всіх точок площини, розташованих на заданій відстані від даної точки (*центра* кола).

Розглядаючи коло як ГМТ, розв'яжіть таку задачу.

Відстань між заданими на площині точками A і B дорівнює 2 см (рис. 26). Побудуйте точки, розташовані на відстані 1,5 см від точки A і на відстані 1 см від точки B. Скільки існує таких точок?

7.25. Скористайтеся тим, що відрізки дотичних, що з'єднують спільну точку дотичних з точками дотику, *рівні*.

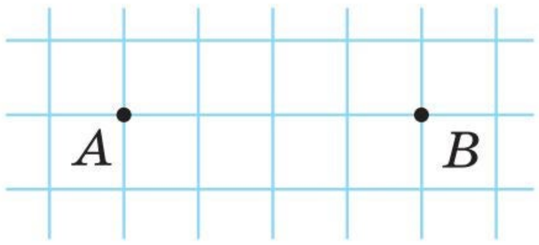


Рис. 26

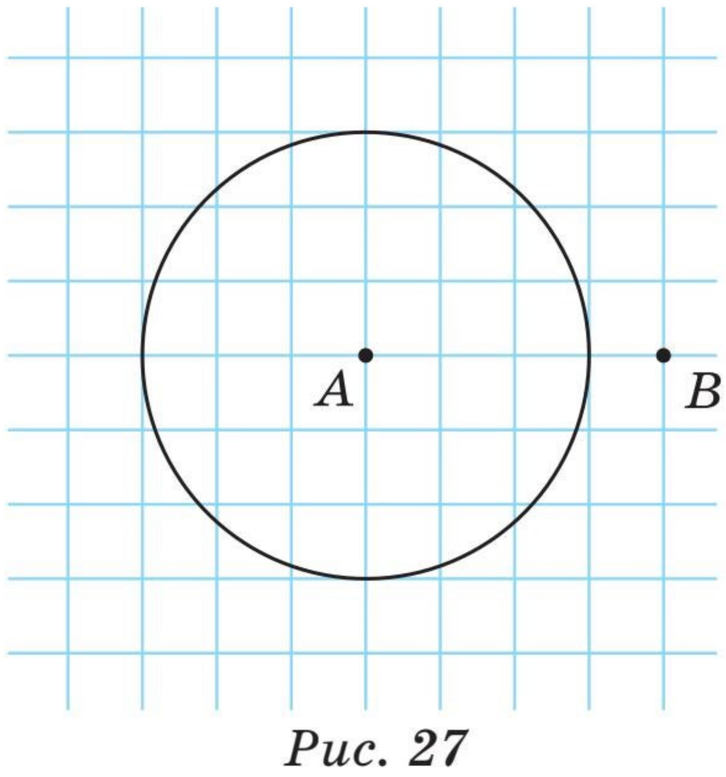


Рис. 27

К: Усі точки площини, розташовані на відстані 1,5 см від точки A, лежать на колі радіуса 1,5 см з центром у точці A (рис. 27).

Ф: А всі точки площини, розташовані на відстані 1 см від точки B, лежать на колі радіуса 1 см з центром у точці B (рис. 28).

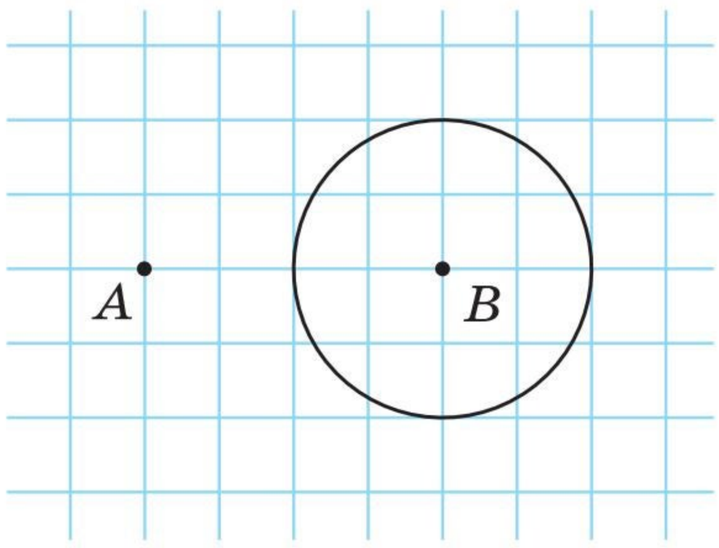


Рис. 28

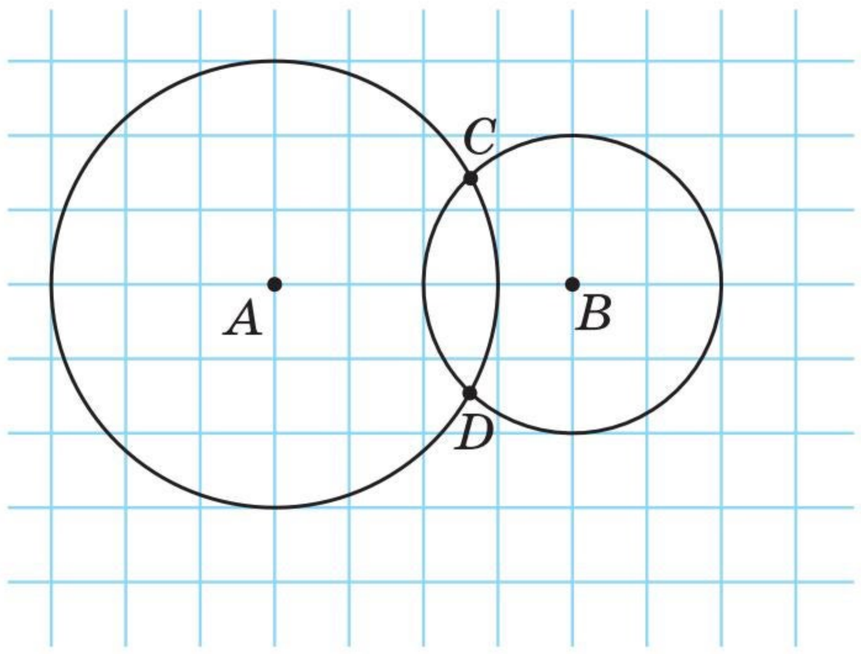


Рис. 29

К: Значить, точки, розташовані на відстані 1,5 см від точки A і на відстані 1 см від точки B, належать *обом* колам. Таких точок *дві*: позначимо їх C і D (рис. 29).

Метод двох геометричних місць

У: Розв'язуючи попередню задачу, ви побудували точки, що задовольняють одночасно *дві* умови:

- вони розташовані на заданій відстані від точки A;
- вони розташовані на заданій відстані від точки B.

Отже, шукані точки належать одночасно *двом* геометричним місцям точок — у даному випадку колам з центрами в точках A і B.

Побудову точок, що задовольняють одночасно *дві* умови, називають *методом двох геометричних місць*. Ми часто застосовуватимемо його під час геометричних побудов.

А тепер скажіть: які вже відомі вам фігури є також геометричними місцями точок?

Серединний перпендикуляр до відрізка як геометричне місце точок

7.26.** На рис. 30 зображений серединний перпендикуляр до відрізка AB.

а) Доведіть *властивість* серединного перпендикуляра: кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка розташована на рівних відстанях від кінців цього відрізка.

б) Доведіть *ознаку* серединного перпендикуляра: усі точки площини, розташовані на рівних відстанях від кінців відрізка, лежать на серединному перпендикулярі до цього відрізка.

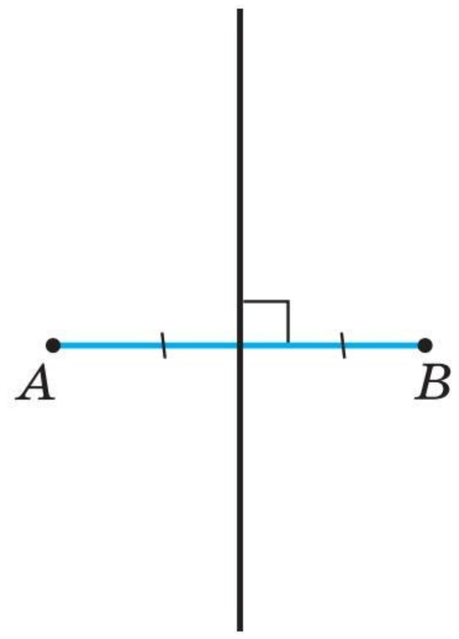


Рис. 30

У: Замість слів «на рівних відстанях» часто кажуть *рівновіддалені*.

Отже,

> серединний перпендикуляр до відрізка — це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

Коло, описане навколо трикутника

У: Розглядаючи серединний перпендикуляр як геометричне місце точок, розв'яжіть таку задачу.

На площині задано три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій (рис. 31).

Побудуйте точки, рівновіддалені:

а) від точок A і B;

б) від точок A і C;

в) від точок A, B і C.

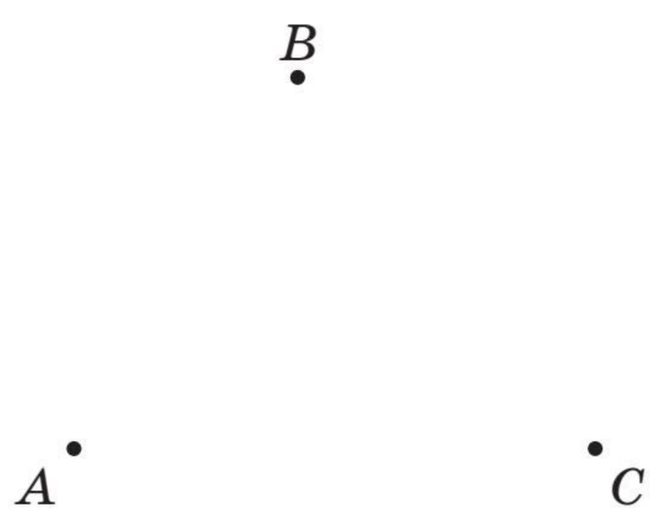


Рис. 31

К: Усі точки площини, рівновіддалені від точок A і B, лежать на серединно-

---

7.26. а) Скористайтеся тим, що коли медіана трикутника збігається з висотою, проведеною з тієї самої вершини, то даний трикутник — рівнобедрений;
б) Скористайтеся тим, що медіана рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, збігається з висотою.

му перпендикулярі до відрізка AB (рис. 32).

Ф: А всі точки площини, рівновіддалені від точок A і C, лежать на серединному перпендикулярі до відрізка AC (рис. 33).

К: Щоб знайти положення точки, рівновіддаленої від точок A і B, а також рівновіддаленої від точок A і C, застосуємо *метод двох геометричних місць*. Ми побачимо, що шукана точка лежить на *обох* серединних перпендикулярах, тобто є *точкою їх перетину* (рис. 34).

У: Позначимо цю точку O, а рівні відстані від точки O до точок A, B і C позначимо *великою* буквою R (рис. 35). Скажіть, чи лежить точка O також і на серединному перпендикулярі до відрізка BC?

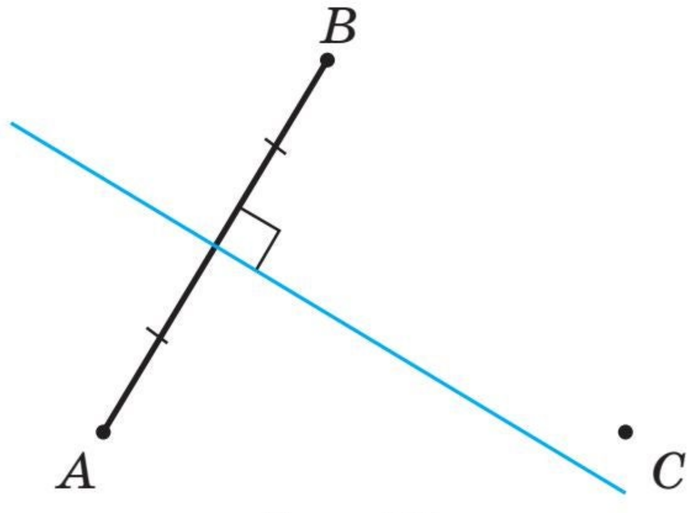


Рис. 32

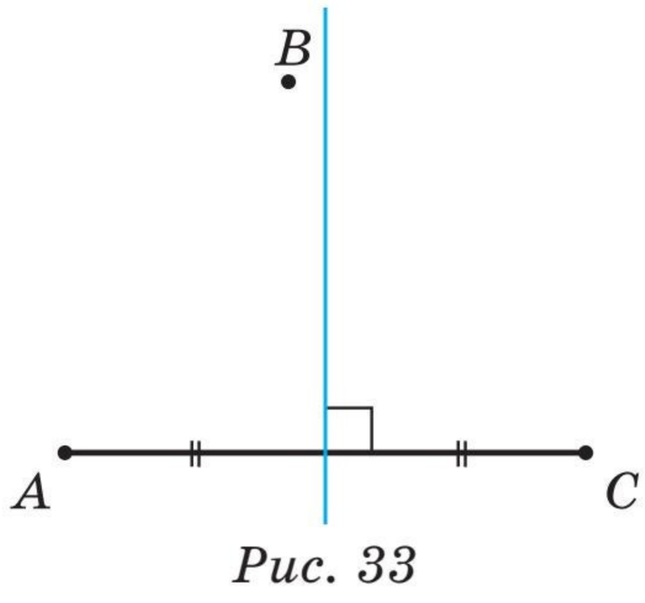


Рис. 33

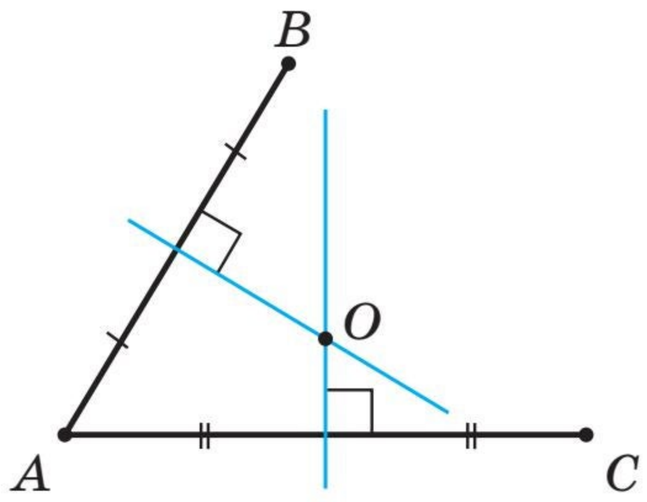


Рис. 34

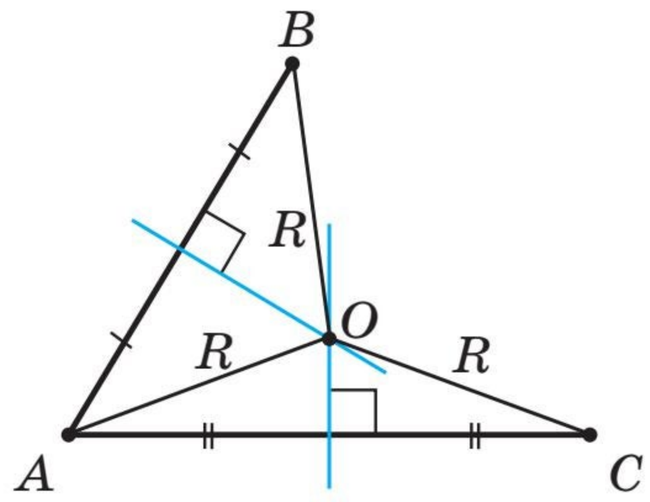


Рис. 35

К: Лежить, оскільки за побудовою точка O розташована на рівних відстанях від точок B і C, а всі точки площини, рівновіддалені від двох точок, лежать на серединному перпендикулярі до відрізка з кінцями в цих точках (рис. 36).

У: Правильно. А тепер зверніть увагу на трикутник ABC (рис. 36). Ми довели, що *серединні перпендикуляри до трьох сторін трикутника перетинаються в одній точці*.

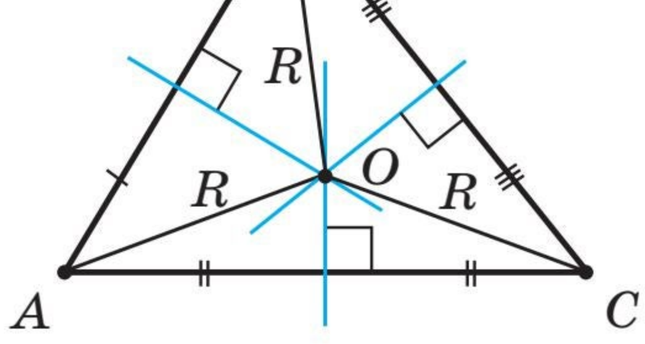


Рис. 36

Як ви вважаєте: чому я позначив шукану точку буквою O, а *однакову* відстань від цієї точки до точок A, B і C — буквою R?

К: Буквою O позначають часто центр кола, а буквою R — довжину радіуса кола... але де ж тут коло?

Ф: Оскільки точки A, B і C розташовані на *тій самій відстані* R від точки O, значить, вони лежать на *колі* радіуса R з центром у точці O (рис. 37)!

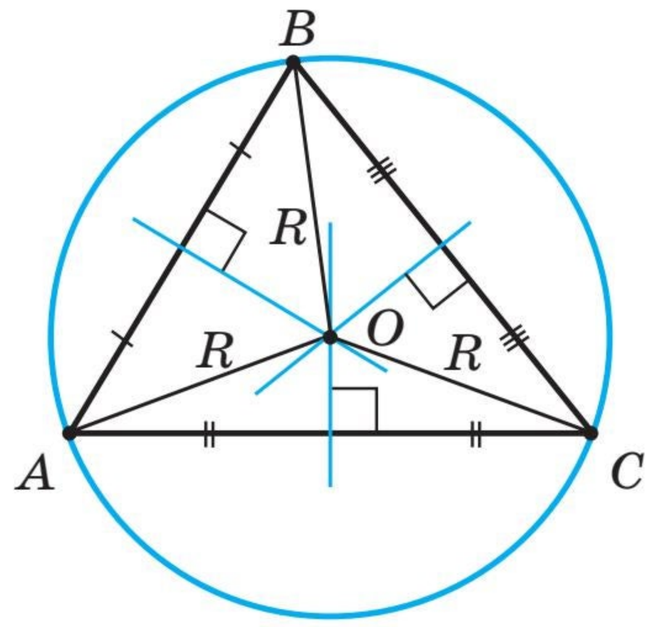


Рис. 37

У: Коло, на якому лежать усі вершини трикутника, називають колом, *описаним* навколо цього трикутника.

Радіус описаного кола позначають зазвичай *великою* буквою R. Підведемо підсумки.

К: Ми довели, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Ф: Ми навчилися будувати коло, описане навколо трикутника, використовуючи те, що його центр розташований у точці перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

7.27.* Накресліть довільний трикутник.

а) Побудуйте серединні перпендикуляри до двох будь-яких сторін трикутника. Позначте точку O перетину цих перпендикулярів.

б) Проведіть коло з центром у точці O, що проходить через якусь вершину трикутника. Якщо ви зробили рисунок акуратно, то на цьому самому колі лежатимуть і дві інші вершини трикутника.

7.28.** Доведіть: якщо центр кола, описаного навколо даного трикутника, лежить на одній з його сторін (рис. 38), то даний трикутник прямокутний, а центр описаного кола є серединою його гіпотенузи.

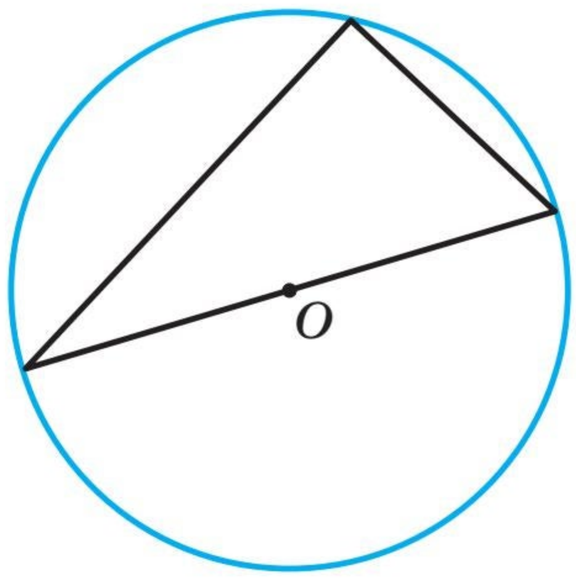


Рис. 38

7.28. Сполучіть центр кола з вершиною трикутника, протилежною до сторони, що є діаметром описаного кола, і скористайтеся тим, що коли медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то цей трикутник прямокутний, до того ж дана сторона — його гіпотенуза.

Подібне завдання

7.29.** Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, збігається із серединою його гіпотенузи.

Бісектриса кута як геометричне місце точок

У: Ще одна знайома вам фігура, яка є геометричним місцем точок, — це бісектриса кута (рис. 39).

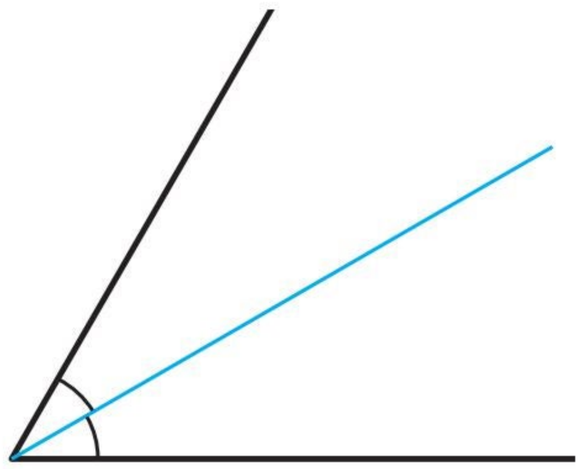


Рис. 39

7.30.** Доведіть:

а) кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута;

б) усі точки всередині кута, рівновіддалені від сторін кута, лежать на бісектрисі цього кута.

У: Отже,

> бісектриса кута — це геометричне місце точок площини, що лежать усередині цього кута і рівновіддалені від його сторін.

Коло, вписане в трикутник

У: Розглядаючи бісектрису кута як ГМТ, ми знайдемо ще одну цікаву точку трикутника. Розв'яжіть таку задачу.

На площині дано трикутник ABC (рис. 40). Побудуйте точки, рівновіддалені від сторін:

а) кута A;

б) кута B;

в) кутів A і B.

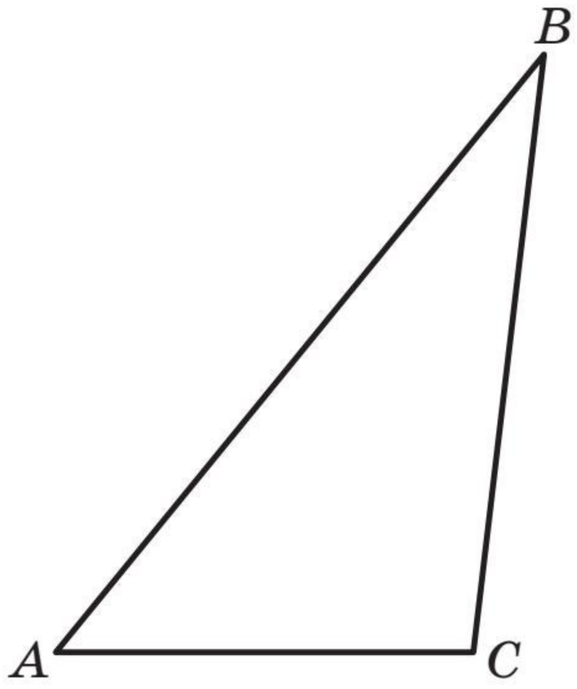


Рис. 40

7.29. Скористайтеся тим, що коли трикутник прямокутний, то медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи. Звідси випливає, що всі вершини прямокутного трикутника розташовані на рівних відстанях від середини гіпотенузи.

7.30. Скористайтеся тим, що відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої, а також: а) ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом, б) ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.

К: Усі точки площини, що лежать усередині трикутника і рівновіддалені від сторін кута A, лежать на бісектрисі цього кута (рис. 41)...

Ф: А всі точки площини, що лежать усередині трикутника і рівновіддалені від сторін кута B, лежать на бісектрисі кута B (рис. 42)...

К: Щоб знайти положення точки, що лежить усередині трикутника і рівновіддалена від сторін кутів A і B, застосуємо знову *метод двох геометричних місць*. Шукана точка лежить на *обох* бісектрисах, тобто є *точкою їх перетину* (рис. 43).

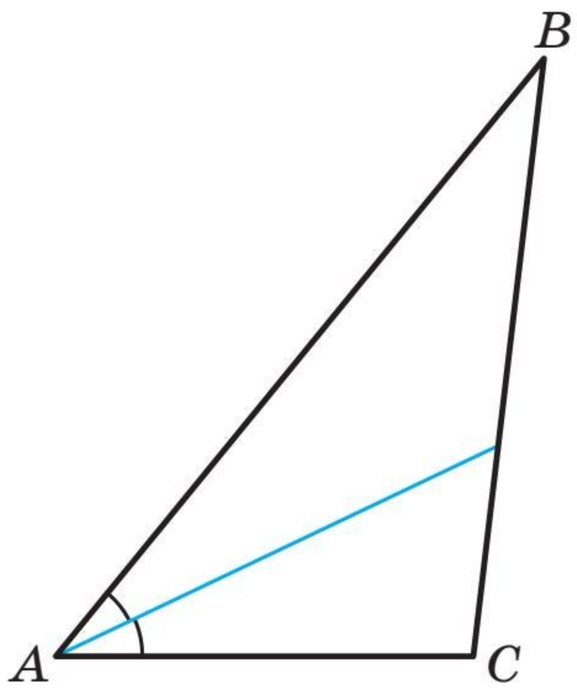


Рис. 41

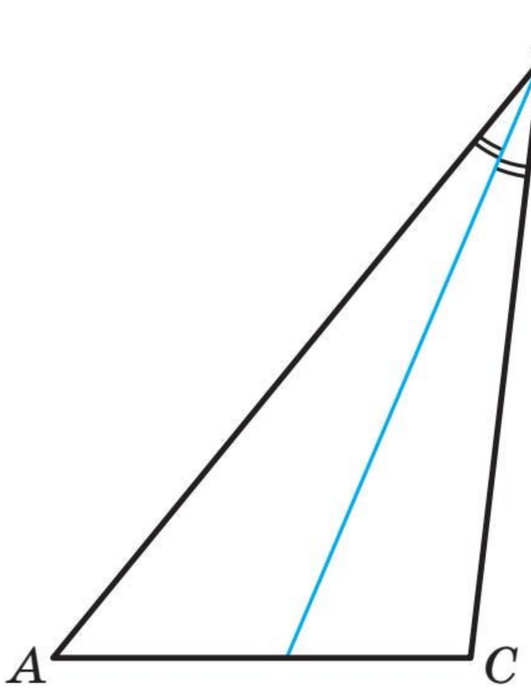


Рис. 42

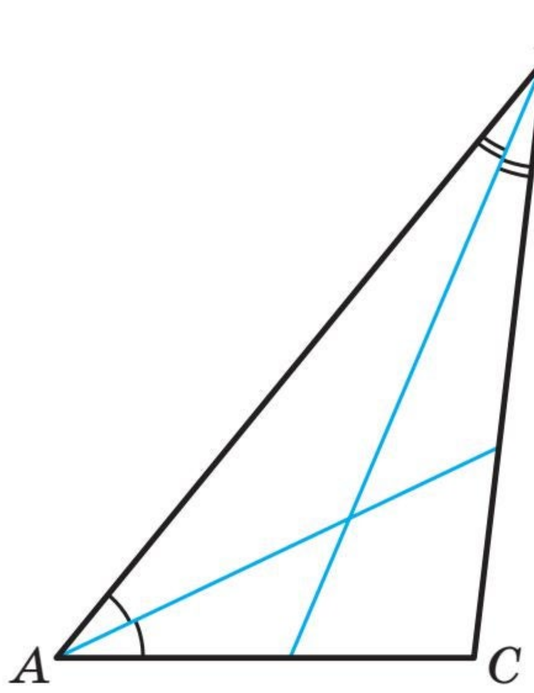


Рис. 43

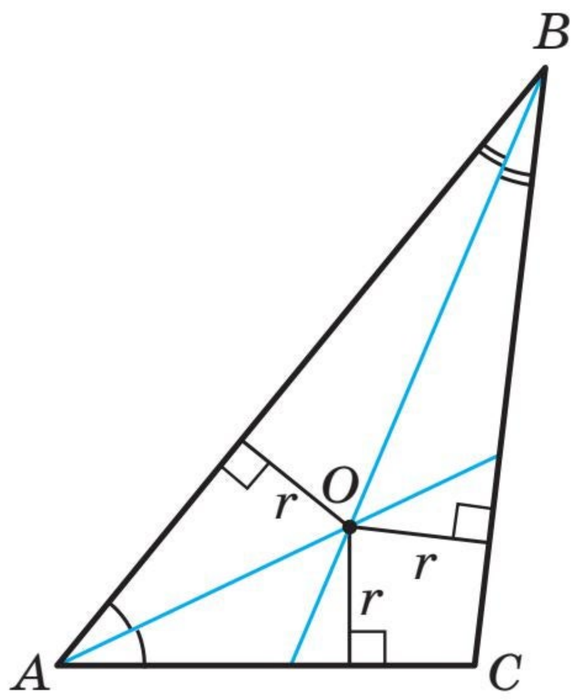


Рис. 44

У: Позначимо цю точку O, а рівні відстані до сторін кутів A і B позначимо *маленькою* буквою r (рис. 44).

7.31.* Доведіть, що точка O лежить на бісектрисі кута C. Який висновок звідси можна зробити?

К: Ми довели, що *бісектриси трикутника* перетинаються в одній точці (рис. 45).

Ф: Якщо ви запропонували позначити рівні відстані від точки O до сторін трикутника буквою r, отже, точка O є центром деякого кола, а r — довжина радіуса цього кола...

7.31. Скористайтеся тим, що всі точки всередині кута, розташовані на рівних відстанях від сторін кута, лежать на бісектрисі цього кута.

К: Ось це коло: основи всіх трьох перпендикулярів, проведених з точки O до сторін трикутника, лежать *на колі* радіуса r з центром у точці O (рис. 46).

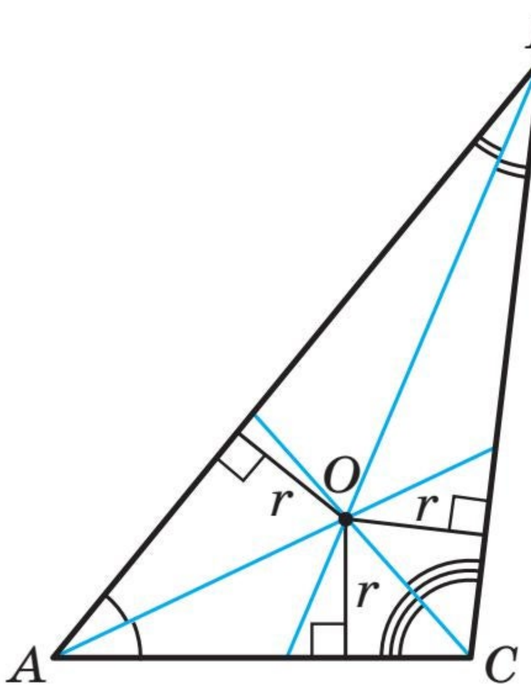


Рис. 45

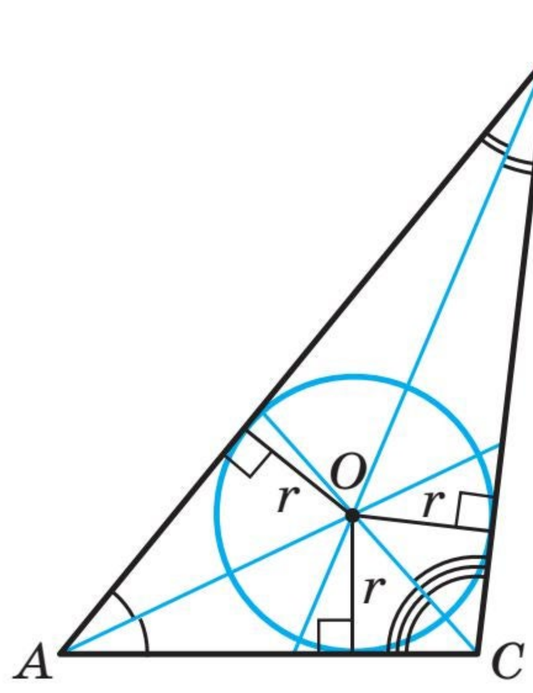


Рис. 46

Ф: Схоже, що кожна сторона трикутника лежить на *дотичній* до цього кола.

7.32.* Чи згодні ви з Федором?

У: Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, називають колом, *вписаним* у даний трикутник.

Знову підведемо підсумки.

К: Ми довели, що в будь-який трикутник можна вписати коло.

Ф: Ми навчились будувати коло, вписане в трикутник, використовуючи те, що його центр розташований у точці перетину бісектрис кутів трикутника.

У: Правильно. Зверніть увагу: радіус вписаного кола зазвичай позначають *маленькою* буквою r.

Пряма, паралельна даній, як геометричне місце точок

У: Чи є пряма b, паралельна прямій a, геометричним місцем точок (рис. 47)?

Ф: Є, оскільки всі точки прямої b рівновіддалені від прямої a і розташовані в одній півплощині відносно цієї прямої.

7.33.** Чи згодні ви з Федором?



Рис. 47

7.31. Скористайтеся ознакою дотичної до кола.

7.33. Доведіть, що два перпендикуляри, проведені з різних точок прямої b до паралельної їй прямої a, рівні. Для цього скористайтеся властивістю паралельних прямих і однією з ознак рівності прямокутних трикутників.

К: Щоб вважати пряму b геометричним місцем точок, що рівновіддалені від прямої a і лежать в одній півплощині відносно неї, потрібно довести ще, що *всі точки площини*, що рівновіддалені від прямої a і лежать в одній півплощині відносно неї, лежать на прямій b, паралельній до прямої a.

7.34.** Доведіть: усі точки площини, що рівновіддалені від даної прямої і лежать в одній півплощині відносно неї, належать прямій, паралельній даній.

У: Отже,

пряма, паралельна даній, — це геометричне місце точок площини, що рівновіддалені від даної прямої й лежать в одній півплощині відносно неї.

К: А в яких задачах можна використовувати пряму, паралельну даній, як геометричне місце точок?

У: У деяких задачах на побудову. Зараз ми до них перейдемо. Але спочатку згадаємо, які геометричні фігури ми вже вміємо будувати.

3. ОСНОВНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

У: Нагадаю, що ми будуватимемо геометричні фігури *за допомогою лише циркуля і лінійки без поділок*.

Ми вже вміємо:

- відкладати на даній прямій від заданої точки (або на даному промені від його початку) відрізок, рівний даному відрізку;
- проводити коло даного радіуса з центром у заданій точці;
- будувати серединний перпендикуляр до даного відрізка (і тим самим знаходити середину цього відрізка);
- будувати перпендикуляр до даної прямої, що проходить через задану точку — на даній прямій чи поза нею;
- будувати бісектрису даного кута.

К: Але навіщо будувати геометричні фігури за допомогою *тільки* циркуля і лінійки без поділок, якщо є й інші креслярські інструменти — наприклад, транспортир і лінійка з поділками?

7.34. Доведіть, що якщо два перпендикуляри до прямої a, що проведені з точок M і N, розташованих по один бік від прямої a, рівні, то пряма MN паралельна прямій a. Для цього скористайтеся однією з ознак рівності трикутників і ознакою паралельності прямих.

Ф: А ще краще використовувати комп'ютерні графічні редактори: вони дозволяють створювати дива!

У: Побудова геометричних фігур за допомогою циркуля і лінійки без поділок — це цікава і корисна геометрична гра. Розв'язуючи задачі на побудову, ми, ніби граючись, повторимо головне з того, що вивчили.

Але є й інша користь у геометричних задачах на побудову — і вона пов'язана якраз з комп'ютерами. Річ у тім, що розв'язування задач на побудову подібне до *програмування*.

К: Програмування?! Але ж воно з'явилось лише у XX столітті! Яке відношення має давньогрецька геометрія до програмування?

У: Створення комп'ютерних програм — це моделювання мислення: адже комп'ютерна програма — це «план міркувань» для розв'язування комп'ютером певної задачі. А найкращою школою мислення досі вважають давньогрецьку геометрію.

Наприклад, розв'язуючи більш-менш складну задачу, ми зазвичай ділимо її на простіші «підзадачі». Подібно до цього кожна більш-менш складна комп'ютерна програма також складається з простіших підпрограм.

Ф: Це я вже зрозумів, оскільки вивчаю програмування.

У: Розв'язування геометричних задач на побудову подібне до написання комп'ютерних програм за допомогою підпрограм. У випадку геометричних побудов «підпрограмами» є наведені вище побудови — назвемо їх «елементарними». При виконанні складніших геометричних побудов ми використовуватимемо елементарні побудови, не описуючи їх щоразу.

Побудова трикутника за трьома сторонами

У: Першу задачу на побудову розберемо детально, щоб вам став зрозумілим підхід до розв'язання таких задач.

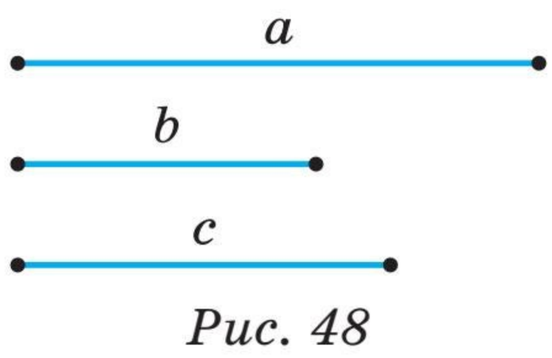


Рис. 48

Побудуйте трикутник, довжини сторін якого дорівнюють довжинам a, b, c заданих відрізків (рис. 48).

Припустимо, що такий трикутник побудовано (рис. 49). Зручно позначити його вершини великими буквами A, B, C так,

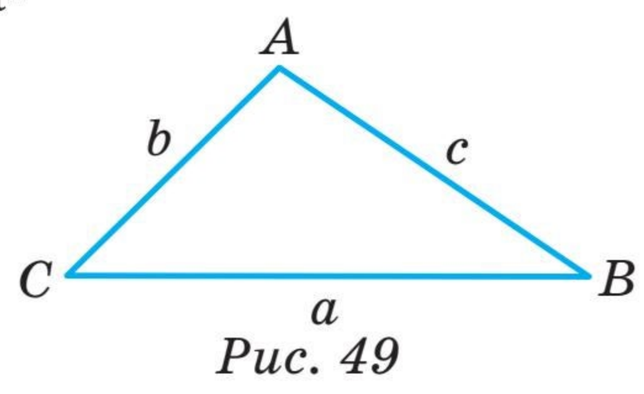


Рис. 49

щоб вершини A, B і C лежали відповідно *проти* сторін, довжини яких дорівнюють a, b і c.

Дві вершини трикутника, який потрібно побудувати, — це кінці одного з заданих відрізків. Візьмемо за цей відрізок відрізок завдовжки a, тоді його кінці — вершини B і C (рис. 50).



Рис. 50

Ф: Залишилося знайти розташування тільки третьої вершини A!

К: Ми знаємо, що вона розташована на відстані b від вершини C і на відстані c від вершини B...

Ф: Тоді застосуємо метод двох геометричних місць. Проведемо коло радіуса b з центром у точці C і коло радіуса c з центром у точці B (рис. 51). Вони перетинаються у двох точках, будь-яка з яких може бути вершиною A трикутника ABC.

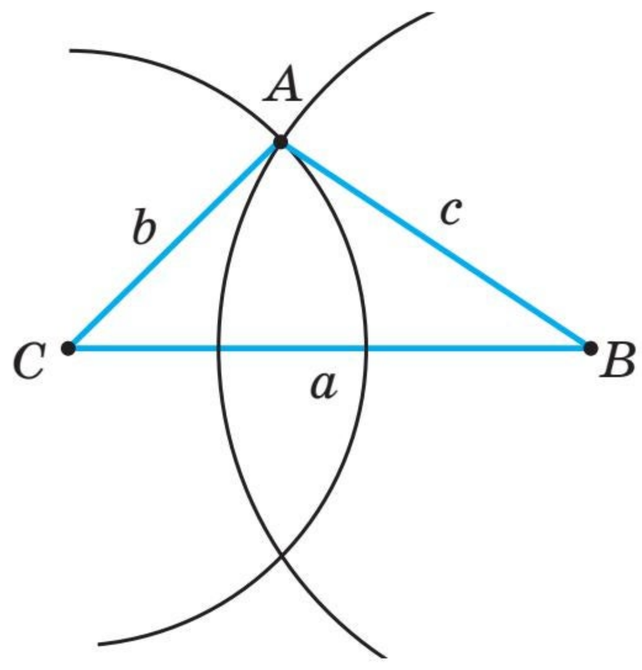


Рис. 51

У: Згоден. А як переконатися в тому, що цей трикутник — якраз той, який нам потрібно побудувати?

К: Довжини сторін побудованого трикутника ABC за побудовою дорівнюють a, b і c. А всі такі трикутники рівні за трьома сторонами.

У: І з цим також згоден. Але залишилося важливе питання: чи *завжди* можна виконати таку побудову — тобто чи *будь-які* три відрізки можуть бути сторонами трикутника?

Ф: Довжина кожного з цих трьох відрізків має бути менша від суми довжин двох інших, оскільки має виконуватися нерівність трикутника: кожна його сторона менша від суми двох інших.

К: А якщо, наприклад, $a > b + c$, то кола радіусів b і c з центрами відповідно в точках C і B, не перетнуться (рис. 52).

У: Підведемо підсумки: побудова трикутника за трьома заданими сторонами можлива за умови,

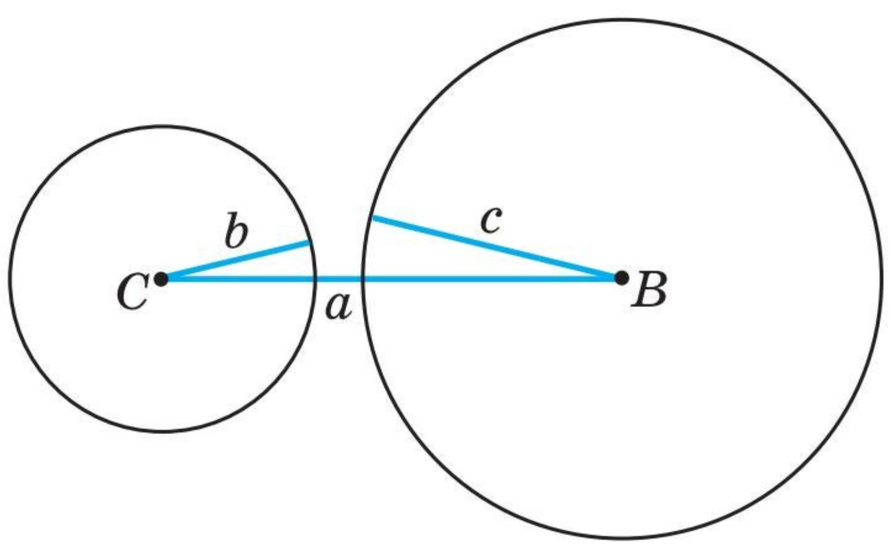


Рис. 52

що довжина кожної із заданих сторін менша від суми довжин двох інших сторін. І якщо цю умову виконано, то такий трикутник можна побудувати, до того ж тільки один.

Як розв'язувати задачі на побудову?

У: На прикладі побудови трикутника за трьома сторонами ми могли помітити, що розв'язання задачі на побудову можна поділити на такі чотири етапи.

1) *Аналіз*. Ми припускаємо, що потрібна фігура побудована, і знаходимо ті її властивості й ознаки, які дозволяють виконати побудову цієї фігурі, використовуючи «елементарні» побудови. Враховуючи це, складаємо план побудови потрібної фігури.
2) *Побудова*. Виконуємо побудову потрібної фігури за складеним планом.
3) *Доведення*. Доводимо, що побудована фігура задовольняє поставлені умови.
4) *Дослідження*. З'ясовуємо: за яких значень запропонованих даних побудова можлива, і, якщо вона дійсно можлива, визначаємо, скільки можна побудувати *різних фігур*, що задовольняють поставлені умови.

На практиці деякі з цих етапів виконують усно.

Побудова кута, що дорівнює даному

7.35.* Відкладіть від початку даного променя MN кут, що дорівнює заданому куту A (рис. 53).

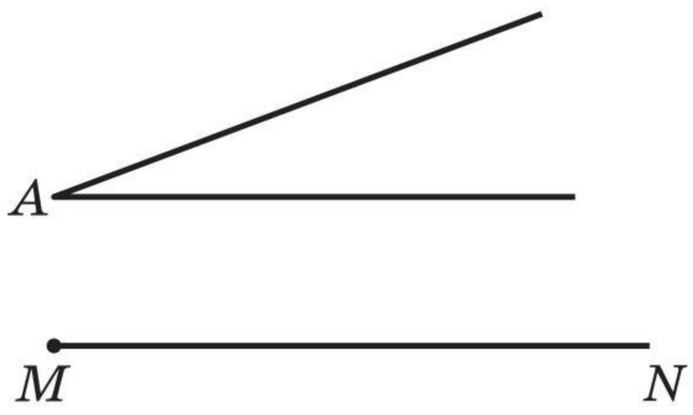


Рис. 53

Побудова трикутника за двома сторонами і кутом між ними

7.36.* Побудуйте трикутник, довжини двох сторін якого дорівнюють довжинам b і c заданих відрізків, а кут між цими сторонами дорівнює куту A (рис. 54).

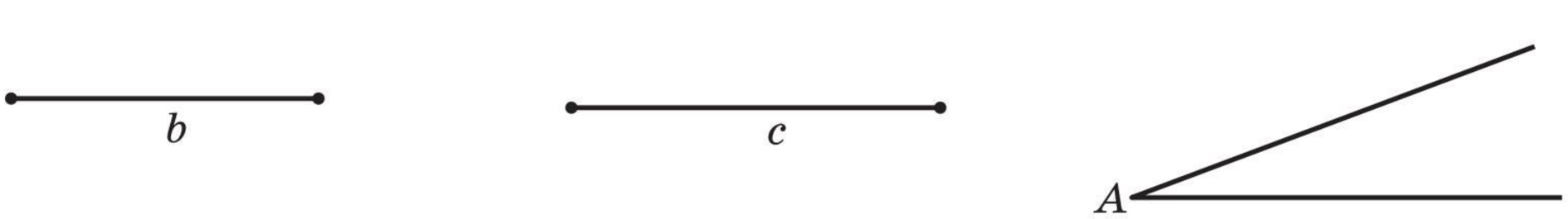


Рис. 54

7.35. Побудуйте рівнобедрений трикутник з кутом A, протилежним основі, і відтак скористайтеся побудовою трикутника за трьома сторонами.

7.36. Відкладіть на сторонах кута A відрізки b і c.

Побудова трикутника за стороною і прилеглими кутами

7.37.* Побудуйте трикутник, довжина однієї сторони якого дорівнює довжині c заданого відрізка, а прилеглі до цієї сторони кути дорівнюють кутам A і B (рис. 55).

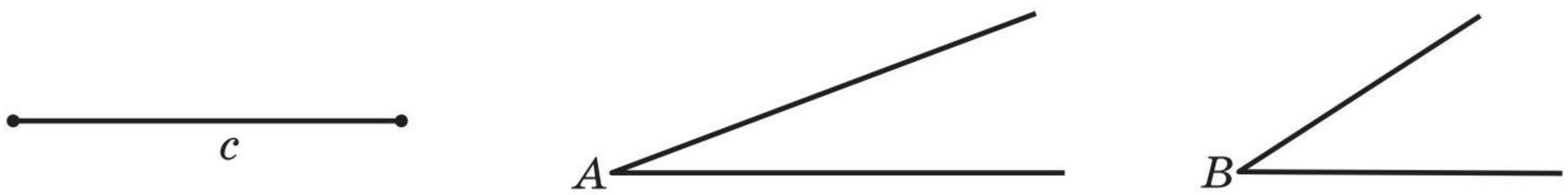


Рис. 55

Побудова прямої, що паралельна даній і проходить через задану точку

7.38.** Проведіть на аркуші білого паперу пряму a і позначте точку C, що не лежить на цій прямій. Побудуйте пряму b, що паралельна прямій a і проходить через точку C.

4. ПОБУДОВА ТРИКУТНИКІВ

У: Ми вже вміємо будувати трикутники за трьома сторонами, двома сторонами і кутом між ними, а також за стороною і прилеглими до неї кутами.

К: Це якраз відповідає трьом ознакам рівності трикутників!

У: Так і є. Тепер ми розглянемо складніші побудови. Для побудови трикутника в загальному випадку необхідно задати *три* елементи, до того ж хоча б один з них має бути відрізком заданої довжини.

Почнемо з простіших задач — побудова прямокутних і рівнобедрених трикутників.

Ф: А чим ці побудови простіші?

У: *По-перше*, для побудови прямокутних і рівнобедрених трикутників достатньо задати всього *два* певних елементи, хоча б один з яких має бути відрізком заданої довжини.

По-друге, досвід побудови вказаних трикутників стане потрібним при побудові будь-яких трикутників.

По-третє, при побудові прямокутних і рівнобедрених трикутників ми повторимо основне за курс геометрії 7 класу — адже нашими «головними героями» були саме рівнобедрений і прямокутний трикутники.

7.37. Скористайтеся двічі побудовою кута, рівного даному.

Побудова прямокутного трикутника за двома елементами

7.39.* Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.

7.40.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

Подібні завдання (7.41–7.42)

7.41.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до гіпотенузи.

7.42.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

7.43.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і прилеглим до нього гострим кутом.

Подібне завдання

7.44.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним до нього гострим кутом.

7.45.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

Подібні завдання (7.46–7.47)

7.46.** Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і медіаною, проведеною до гіпотенузи.

7.47.** Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з цього кута.

7.48.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою, проведеною до гіпотенузи.

7.49.*** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і проведеною до неї висотою.

7.50.*** Побудуйте прямокутний трикутник за периметром і катетом.

Подібні завдання (7.51–7.52)

7.51.*** Побудуйте прямокутний трикутник за периметром і гіпотенузою.

7.52.*** Побудуйте прямокутний трикутник за периметром і гострим кутом.

Побудова рівнобедреного трикутника за двома елементами

7.53.* Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і основою.

Подібне завдання

7.54.* Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при основі.

7.55.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і бісектрисою (медіаною або висотою), проведеною до основи.

Подібне завдання

7.56.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і бісектрисою (медіаною або висотою), проведеною до основи.

7.57.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при вершині між бічними сторонами.

7.58.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і медіаною, проведеною до бічної сторони.

7.59.*** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

Подібне завдання

7.60.*** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до бічної сторони.

7.61.*** Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при основі й бісектрисою трикутника, проведеною з цього кута.

Побудова трикутника за трьома елементами

7.62.*** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою цього кута.

7.63.*** Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до другої сторони, і кутом між заданими стороною і медіаною.

7.64.*** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, проведеною до цієї сторони.

7.65.*** Побудуйте трикутник за стороною, медіаною і висотою, проведеними з протилежної до цієї сторони вершини.

Подібні завдання (7.66–7.67)

7.66.*** Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї з них.

7.67.*** Побудуйте трикутник за кутом, висотою і бісектрисою, проведеними з вершини цього кута.

7.68.*** Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

Подібне завдання

7.69.*** Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

7.70.*** Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до іншої сторони.

7.71.*** Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони. У яких випадках ця задача має єдиний розв'язок?

ПРО ЩО МИ ДІЗНАЛИСЯ?

Використовуючи рис. 56, сформулюйте основні твердження глави. Кожний / кожна може сформулювати кілька тверджень (по одному під час кожного піднесення руки). Перемоги (і заохочувального бала на розсуд учителя / учительки) удостоюють того / ту учня / учениці, після якого / якої ніхто не зміг нічого додати протягом, наприклад, пів хвилини.

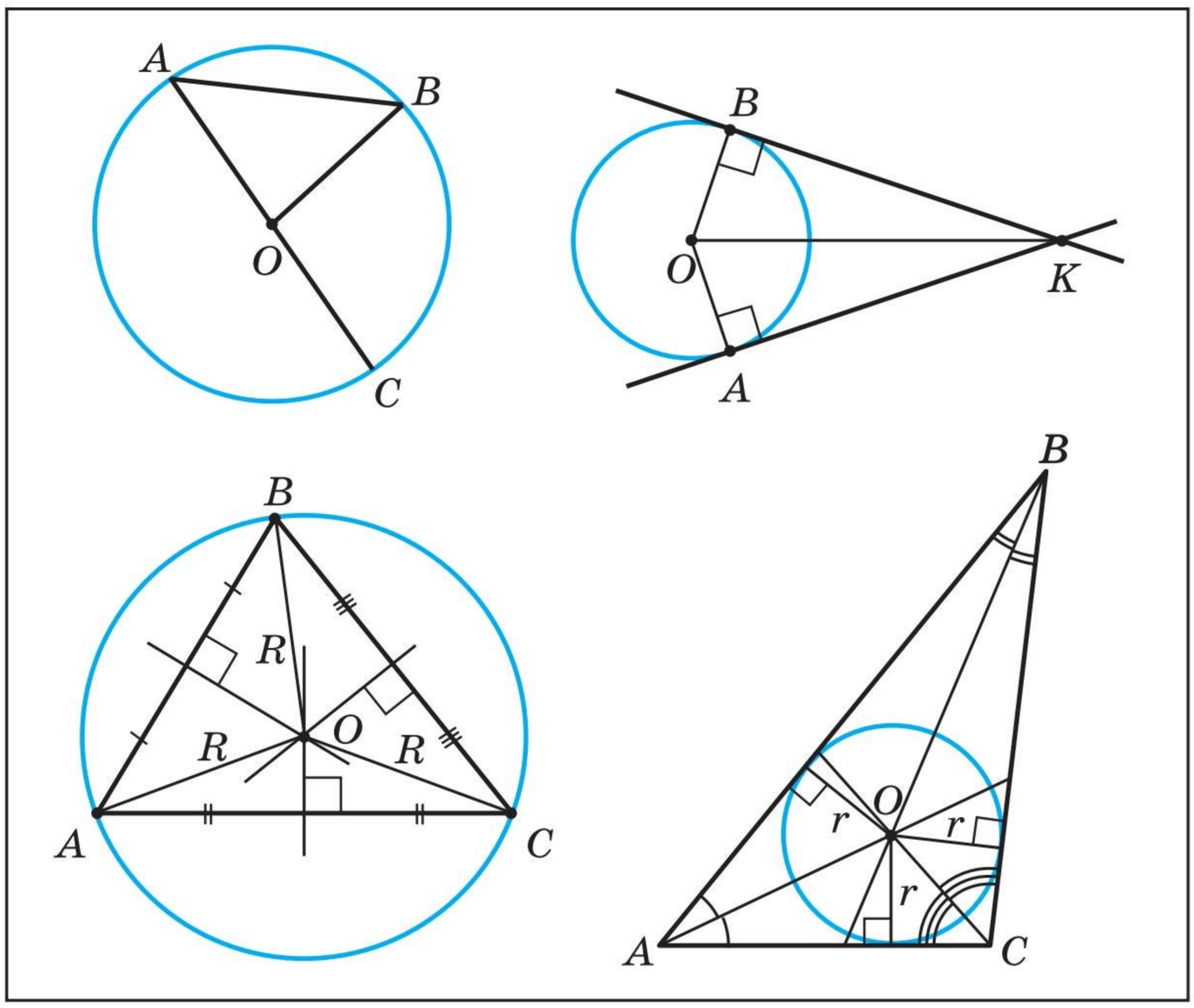


Рис. 56

5. СТАВИМО ЗАПИТАННЯ ДО УМОВИ ЗАДАЧІ

У: На рис. 57 зображені два кола з центрами O_1 і O_2, що мають *одну* спільну точку A, — такі кола називають *дотичними* одне до одного, а їх спільну точку називають *точкою дотику*.

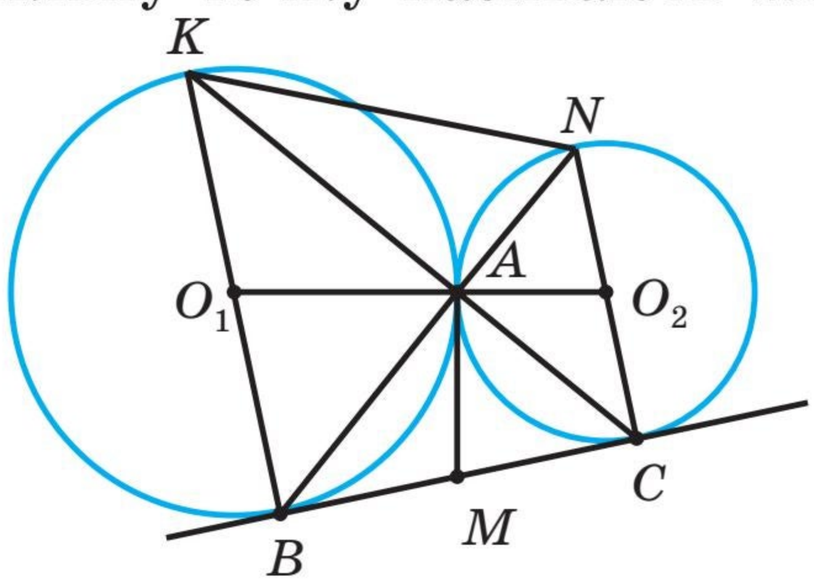


Рис. 57

У точках B і C дані кола дотикаються до прямої BC, а AM — відрізок спільної дотичної до цих кіл. Відрізки BK і CN — діаметри кіл.

Яку інформацію можна отримати за цим рисунком?

К: Які рівнобедрені трикутники є на рис. 57?

7.72.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Які прямокутні трикутники є на рис. 57?

7.73.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи є на рис. 57 прямі кути, які не є кутами трикутників?

7.74.** Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи лежать точки O_1, A і O_2 на одній прямій на рис. 57?

7.75.** Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Чи лежать точки K, A і C на одній прямій на рис. 57?

7.76.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Чи лежать точки B, A і N на одній прямій на рис. 57?

7.77.* Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Які паралельні відрізки є на рис. 57?

7.78.* Дайте відповідь на запитання Катерини.

Ф: Які рівні не прямі кути є на рис. 57?

7.79.* Дайте відповідь на запитання Федора.

Перетин висот трикутника (або їх продовжень)

У: Наші зустрічі в цьому навчальному році добігають кінця.

К: Ви обіцяли, що ще в цьому класі ми доведемо, що висоти трикутника чи їх продовження перетинаються в одній точці.

У: Гаразд. Але зробімо, як чинили індійські математики. Вони робили рисунок із додатковими побудовами і писали поруч із ним: «Дивись».

Ось рисунок 58, який допоможе вам довести, що висоти гострокутного трикутника ABC (ж) перетинаються в одній точці. На цьому рисунку $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$, $C_1B_1 \parallel CB$.

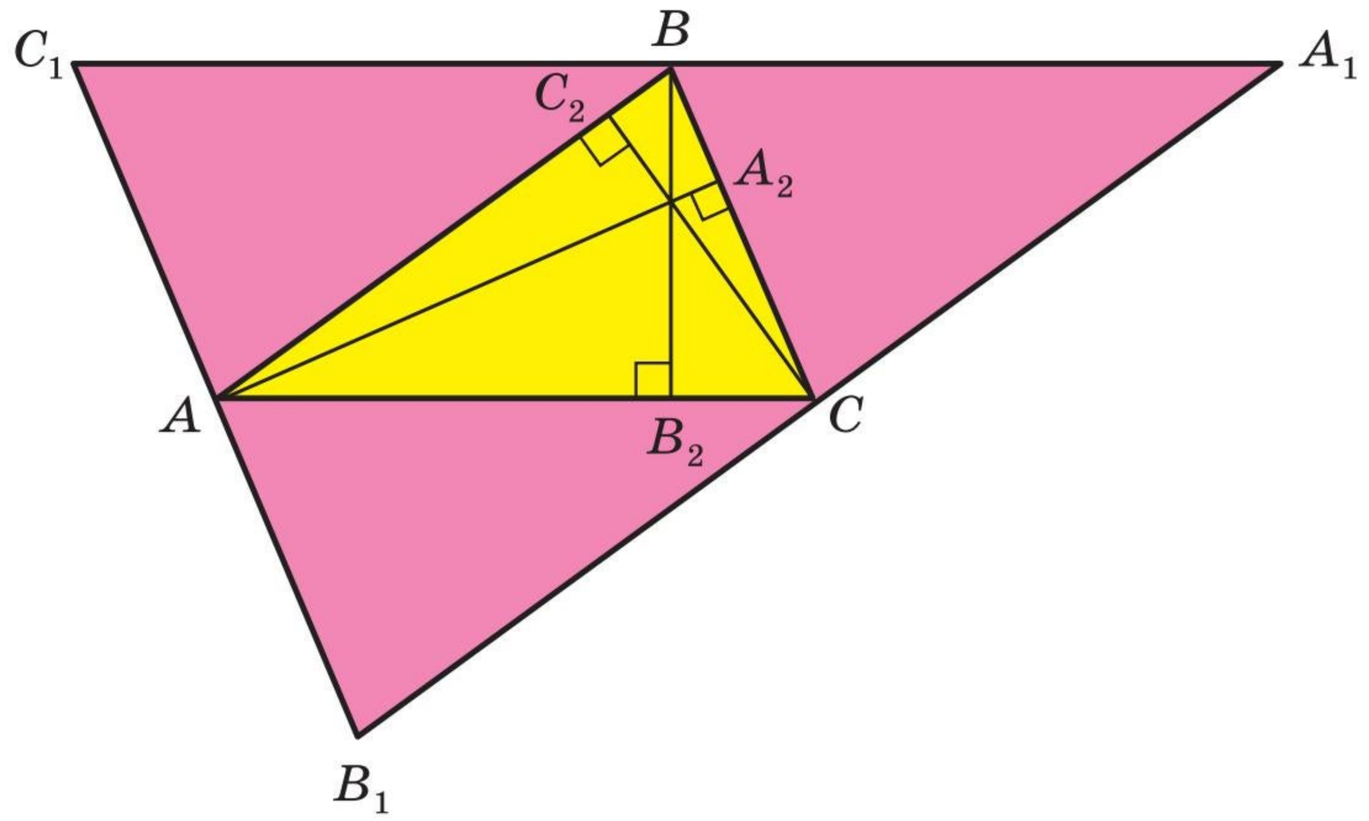


Рис. 58

К: Відрізки AA_2, BB_2 і CC_2 — висоти трикутника ABC. Хоча на рис. 58 вони перетинаються в одній точці, нам це потрібно *довести*. Чим ми можемо скористатися?

Ф: Згадаймо: перетин яких трьох відрізків в одній точці ми вже довели?

К: Ми довели, що три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці — це центр кола, вписаного в трикутник.

Ф: Не видно, як нам тут це може допомогти...

К: Ми довели ще, що три серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці — це центр кола, описаного навколо трикутника.

Ф: Мені здається, що це вже «тепліше»!

7.80.* Доведіть: AA_2, BB_2 і CC_2 — серединні перпендикуляри до сторін трикутника $A_1B_1C_1$.

К: Отже, ми довели, що висоти гострокутного трикутника перетинаються в одній точці. Розглянемо тепер висоти тупокутного трикутника.

7.81.** Використовуючи рис. 59, доведіть, що продовження висот тупокутного трикутника перетинаються в одній точці. На цьому рисунку $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$, $C_1B_1 \parallel CB$.

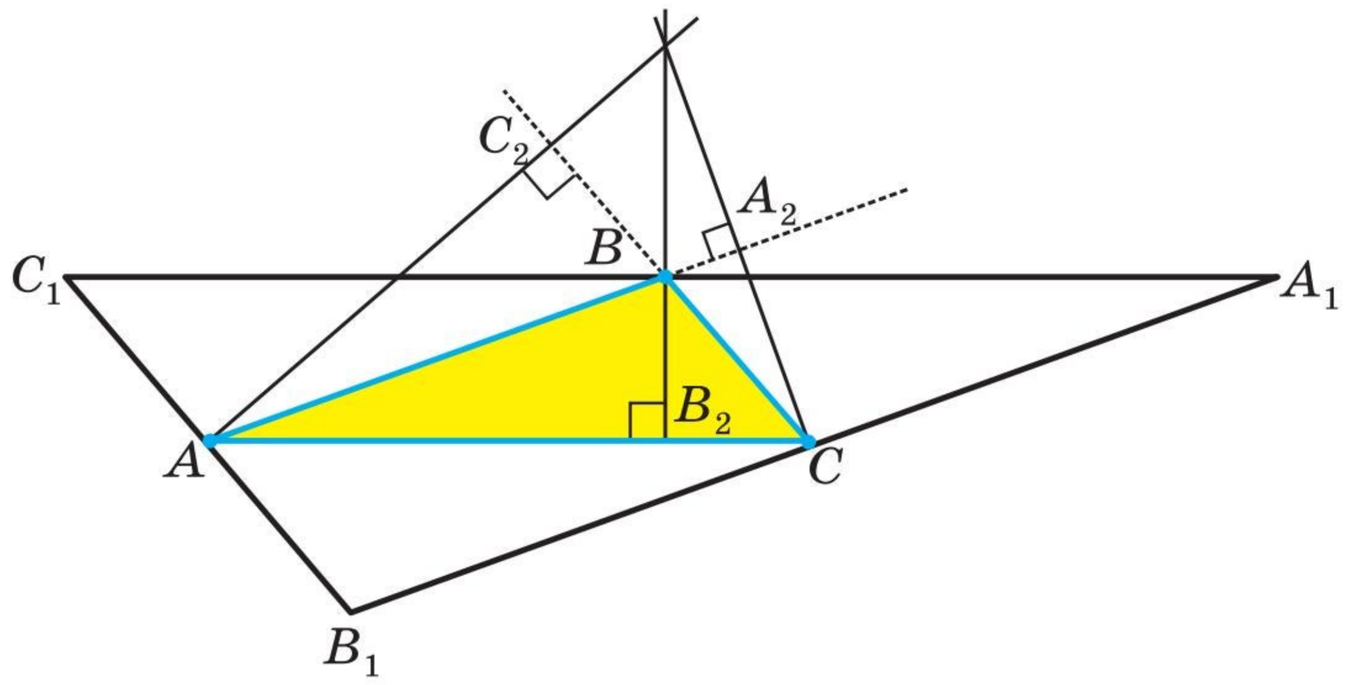


Рис. 59

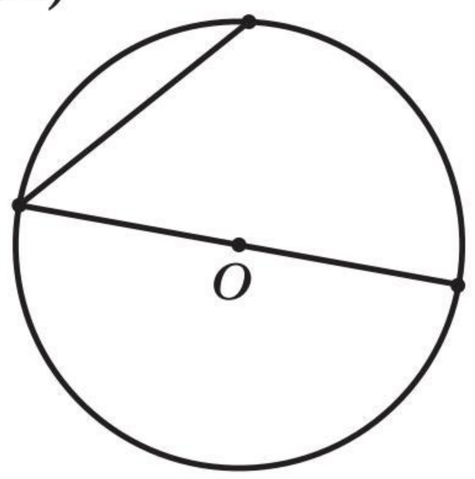
К: Залишилося довести, що висоти прямокутного трикутника також перетинаються в одній точці.

У: Залишимо це нашим читачам на літні канікули!

ТРИРІВНЕВІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ АБО САМОСТІЙНІ РОБОТИ

(У цих задачах не використовуйте літери A, B і C. Рисунки в умовах перенесіть до зошита.)

Коло і круг



7.82.** На рисунку точка O — центр кола. Позначте кінці відрізків.

а) Запишіть позначення діаметра кола.

б) Запишіть позначення хорди кола, яка не є діаметром.

в) Запишіть позначення радіусів кола.

г) Запишіть рівності та нерівності, справедливі для відрізків на рисунку.

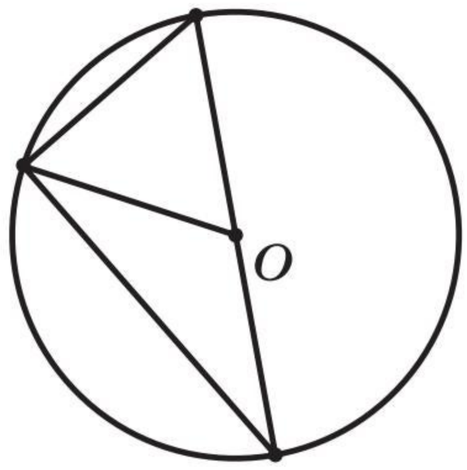
7.84.* Накресліть коло і позначте його центр літерою O.

а) Проведіть діаметр кола і позначте його кінці. Запишіть позначення діаметра кола.

б) Запишіть позначення відрізків на рисунку, які є радіусами даного кола.

в) Позначте на рисунку рівні відрізки і запишіть рівність цих відрізків.

7.87.** На рисунку точка O — центр кола. Позначте зображені на колі точки.

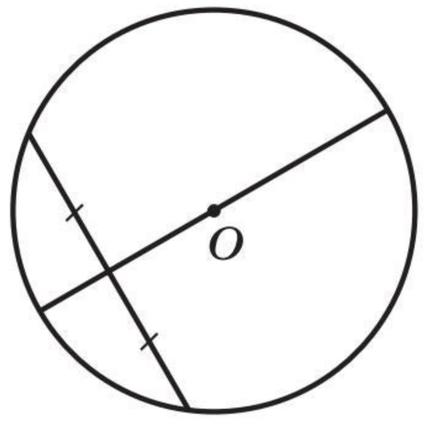


а) Запишіть позначення діаметра.
б) Запишіть позначення хорд кола, які не є діаметрами.
в) Знайдіть на рисунку рівнобедрені трикутники і запишіть їх позначення із зазначенням основи або бічних сторін.
г) Позначте на рисунку рівні кути. Запишіть рівності кутів.

7.89.** Накресліть коло і позначте його центр літерою O.
а) Позначте на колі три точки так, щоб дві з них були кінцями одного діаметра. Позначте ці точки.
б) Накресліть трикутник з вершинами в позначених точках.
в) Позначте рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.
г) Позначте на рисунку пари рівних кутів. Запишіть їх рівності.

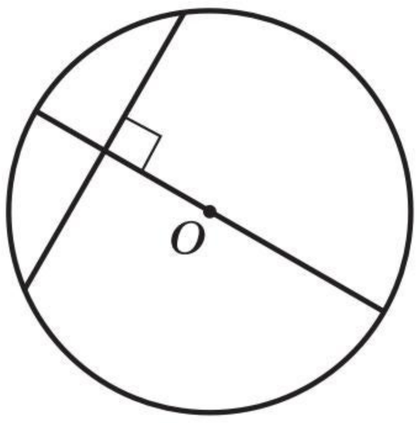
7.91.** Накресліть коло і позначте його центр літерою O.
а) Позначте на колі три точки так, щоб дві з них були кінцями одного діаметра. Позначте ці точки.
б) З'єднайте позначені точки між собою і з центром кола.
в) Знайдіть на рисунку рівнобедрені трикутники. Запишіть їх позначення із зазначенням бічних сторін.
г) Позначте на рисунку рівні кути. Запишіть рівності кутів.

7.93.* На рисунку коло з центром O.



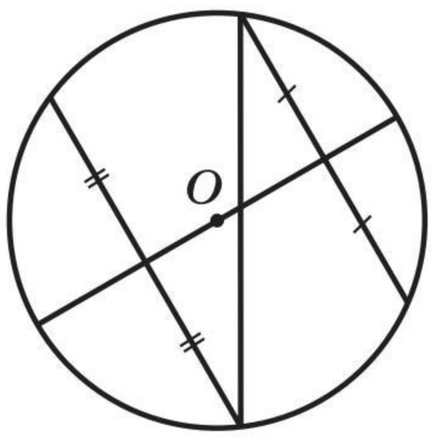
а) Позначте кінці відрізків і точку їх перетину.
б) Запишіть позначення діаметра.
в) Позначте на рисунку прямий кут.

7.94.* На рисунку коло з центром O.

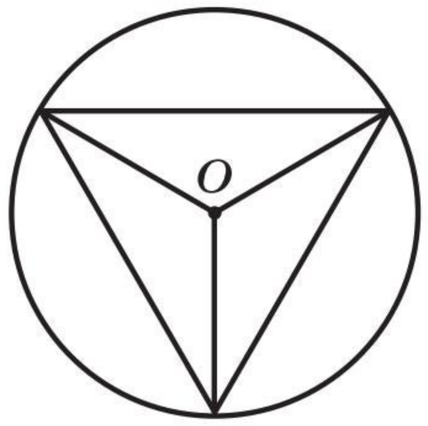


а) Позначте кінці відрізків і точку їх перетину.
б) Запишіть позначення діаметра.
в) Позначте на рисунку рівні відрізки. Запишіть їх рівності.

7.97.** На рисунку коло з центром O. Позначте кінці всіх відрізків і точки їх перетину.



а) Позначте рівні кути на рисунку. Запишіть рівності кутів.
б) Позначте прямі кути на рисунку. Запишіть їх позначення.



7.99.** На рисунку точка O — центр кола. Усі хорди на рисунку рівні. Позначте кінці хорд.

а) Знайдіть пари рівних трикутників. Запишіть рівності трикутників.

б) Позначте на рисунку кути, що дорівнюють 60°. Запишіть позначення цих кутів.

в) Позначте на рисунку кути, що дорівнюють 30°. Запишіть позначення цих кутів.

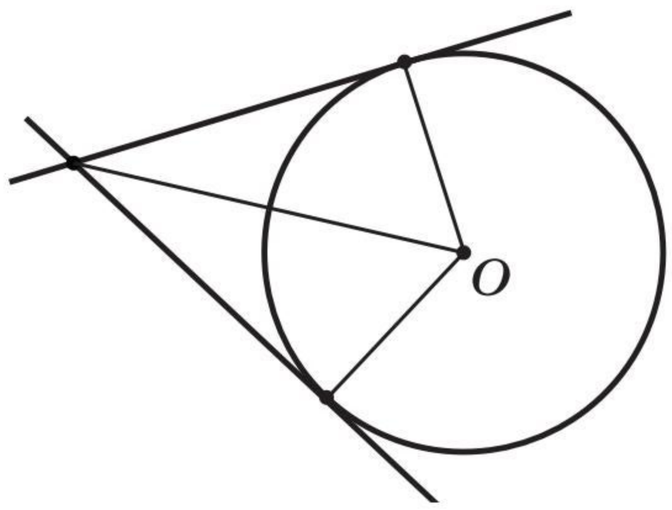
г) Знайдіть кути, що дорівнюють 120°. Запишіть позначення цих кутів.

7.101.** Накресліть коло і позначте його центр літерою O.

а) Позначте на колі діаметр і точку.

б) З'єднайте відрізками позначені на колі точки між собою і з центром кола. Задайте значення одного із кутів між радіусом і хордою та запишіть його на рисунку.

в) Знайдіть і запишіть на рисунку градусні міри решти кутів.



7.103.*** На рисунку точка O — центр кола, а прямі є дотичними до цього кола. Позначте точки дотику і точку перетину дотичних.

а) Позначте на рисунку прямі кути.

б) Позначте на рисунку рівні відрізки. Запишіть рівності відрізків.

в) Позначте на рисунку рівні кути. Запишіть рівності кутів.

7.105.** Накресліть коло і позначте його центр літерою O.

а) Проведіть дотичну до кола, позначте на ній точку дотику і ще одну точку. Позначте ці точки.

б) З'єднайте відрізками центр кола з позначеними точками.

в) Позначте на рисунку прямий кут.

г) Запишіть нерівність для проведених відрізків.

Метод двох геометричних місць

7.109.** Позначте точку O і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від неї.

а) Позначте і з'єднайте відрізком дві точки геометричного місця точок, відстань між якими найбільша.

б) Позначте третю точку цього же геометричного місця точок і з'єднайте її відрізками з уже відміченими точками. Позначте вершини утвореного трикутника.
в) Позначте прямий кут. Запишіть його.

7.110.** Позначте дві точки і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від них.
а) Позначте на ньому будь-яку точку так, щоб три позначені точки були вершинами трикутника. Накресліть цей трикутник і позначте його вершини.
б) Позначте рівні кути. Запишіть рівність кутів.

7.111.** Накресліть трикутник і позначте його вершини.
а) Побудуйте серединні перпендикуляри до сторін трикутника.
б) Знайдіть центр кола O, описаного навколо трикутника.
в) Накресліть відрізки, що сполучають центр описаного кола з вершинами трикутника.
г) Позначте і запишіть на рисунку рівні відрізки.

Геометричні побудови

7.115.** Накресліть промінь і кут. За допомогою циркуля і лінійки без поділок відкладіть від накресленого променя кут, що дорівнює накресленому.

7.117.** Накресліть два кути і відрізок. Побудуйте за допомогою циркуля і лінійки без поділок трикутник, одна сторона якого дорівнює накресленому відрізку, а прилеглі до неї кути дорівнюють накресленим кутам.

7.119.** Накресліть два відрізки і побудуйте за допомогою циркуля і лінійки без поділок прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють накресленим відрізкам.

7.121.*** Накресліть відрізок. Побудуйте за допомогою циркуля і лінійки без поділок прямокутний трикутник з кутом 30°, менший катет якого дорівнює накресленому відрізку.

7.123.** Накресліть пряму і позначте точку, що їй не належить. Побудуйте за допомогою циркуля і лінійки без поділок коло, для якого позначена точка є центром, а накреслена пряма — дотичною.

7.125.** Накресліть коло і позначте точку на ньому. Побудуйте за допомогою циркуля і лінійки без поділок дотичну до кола, що проходить через позначену точку.

ГЛАВА 8. «НЕ СВЯТІ ГОРЩИКИ ЛІПЛЯТЬ» (матеріали для проєктно-дослідницької діяльності)



У: У цій додатковій главі ми детальніше дослідимо рівнобедрені трикутники, які були головними героями в курсі геометрії 7-го класу. Оскільки ці дослідження будуть складнішими, ніж у попередніх главах, їх можна розглядати як *проєкти*. Вони можуть бути індивідуальними чи груповими.

1. ПОДІЛ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА НА ІНШІ РІВНОБЕДРЕНІ ТРИКУТНИКИ

У: Вивчимо питання: які рівнобедрені трикутники можна поділити на два інші рівнобедрені трикутники і якими будуть трикутники, що утворились у результаті такого поділу?

Поділ рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною, протилежною до основи

У: Припустимо, що рівнобедрений трикутник ABC з основою AC поділений на два рівнобедрені трикутники ABD і BCD відрізком BD, один кінець якого збігається з вершиною B, *протилежною основі* AC (рис. 1).

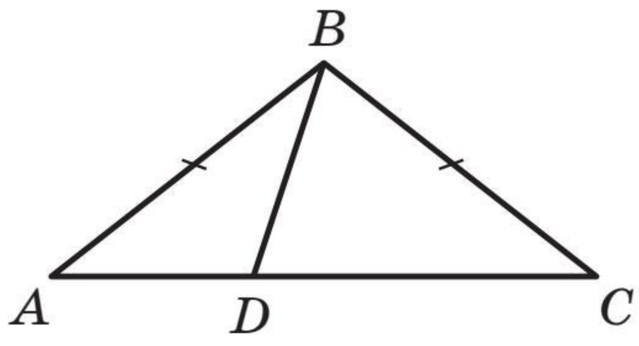


Рис. 1

К: Я виміряла: трикутник BCD на рис. 1 справді рівнобедрений, оскільки $BC = CD$, але в трикутнику ABD рівних сторін немає!

У: Ми не можемо зробити відразу правильний рисунок, оскільки ще не знаємо, яким має бути вихідний трикутник. Ми ще навіть не довели, що рівнобедрений трикутник взагалі можна поділити на два рівнобедрені! Тому наш рисунок поки лише схематичний, але й він буде для нас корисним: адже навіть про передбачувану фігуру зручніше міркувати, маючи хоча б приблизний рисунок перед очима.

До речі, про геометрію іноді кажуть як про «мистецтво робити правильні висновки за допомогою неправильних креслень». Це, звичайно, жарт, але в кожному жарті лише доля жарту, а решта — правда.

Ф: Позначимо для наочності рівні кути при основі утворених рівнобедрених трикутників точками: точки одного кольору позначають рівні кути при основах рівнобедрених трикутників. Ось, наприклад, поділ трикутника ABC на рівнобедрені трикутники ABD і DBC з основами відповідно AD і DC (рис. 2).

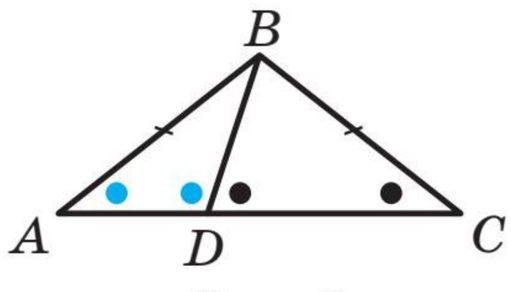


Рис. 2

К: Такий поділ неможливий!

8.1. Чи згодні ви з Катериною?

Ф: Тоді з тієї самої причини неможливі й поділи, зображені на рисунках 3, *а–в*.

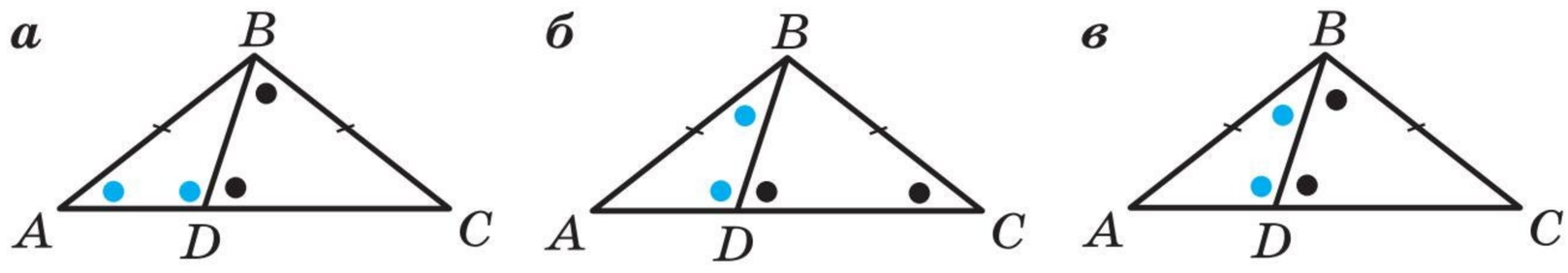


Рис. 3

8.2. Чи згодні ви з Федором?

К: А чи можливий поділ, зображений на рис. 4?

Ф: Неможливий!

8.3. Чи згодні ви з Федором?

8.1. Скористайтеся тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника гострі, а також тим, що сума суміжних кутів дорівнює 180°.

8.3. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника більший від кожного з кутів трикутника, несуміжних з ним, а також тим, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

К: Тоді з тієї самої причини неможливий і поділ, зображений на рис. 5.

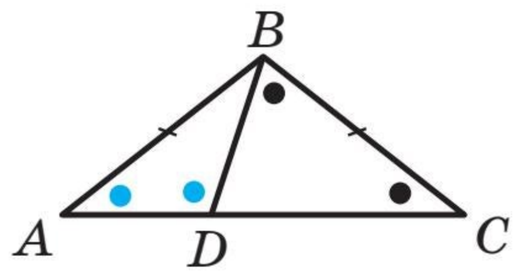


Рис. 4

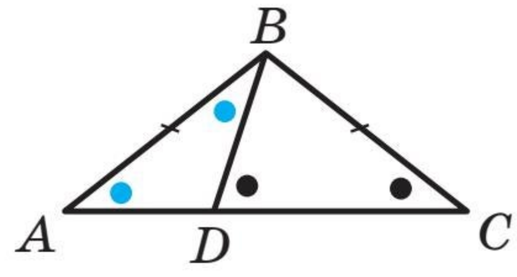


Рис. 5

8.4. Чи згодні ви з Катериною?

Ф: Може, можливих поділів узагалі не існує?

К: Ми розглянули шість варіантів поділу, і всі вони виявились неможливими. А скільки всього існує варіантів поділу?

Ф: Поміркуймо. Будь-яка сторона кожного з трикутників ABD і BCD могла б бути основою рівнобедреного трикутника...

К: До того ж *кожному* з *трьох* варіантів одного трикутника могли б відповідати *три* варіанти другого трикутника. Значить, всього варіантів поділу початкового трикутника могло б бути тричі по три, тобто *дев'ять*!

Ф: Оскільки *шість* варіантів ми вже розглянули, залишилось ще *три*. Які ж це варіанти? Може, серед них будуть можливі?

К: Зобразимо схематично *всі* варіанти поділу. Але для цього потрібно їх *упорядкувати*, щоб ми були впевнені, що врахували *всі* варіанти.

Ф: Почнемо наводити лад. У трикутнику ABD основою може бути будь-яка з трьох сторін AB, BD і AD...

К: Ось схематичні рисунки для трьох варіантів поділу, коли в трикутнику ABD основою є AB (рис. 6, *а*–*в*):

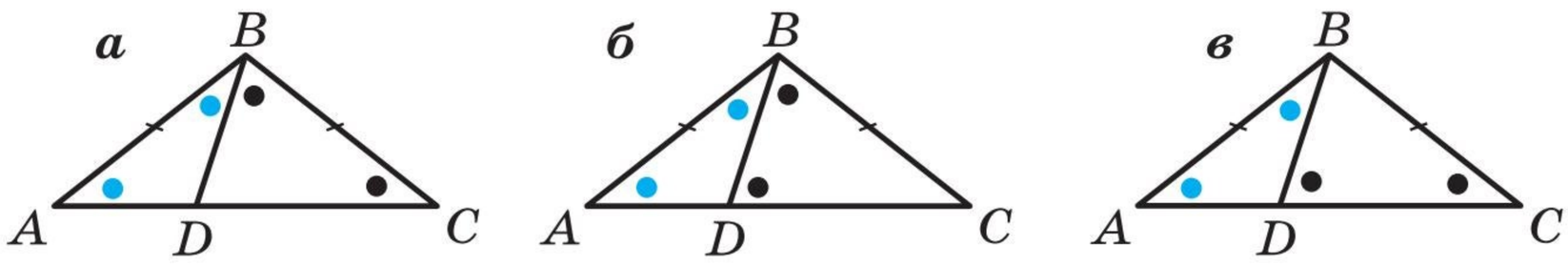


Рис. 6

8.5. Зробіть схематичні рисунки для трьох варіантів поділу, коли в трикутнику ABD основою є BD.

8.6. Зробіть схематичні рисунки для трьох варіантів поділу, коли в трикутнику ABD основою є AD.

Ф: Тепер перед нами всі *дев'ять* варіантів поділу початкового трикутника. Які ж *шість* з цих дев'яти варіантів ми вже розглянули, а які *три* залишились?

8.7. Дайте відповідь на запитання Федора.

К: Ось один з решти трьох варіантів поділу (рис. 7).

Ф: Тоді трикутники ABD і CBD мають бути рівні!

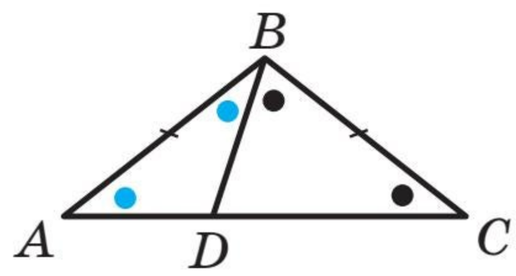


Рис. 7

8.8. Чи згодні ви з Федором?

К: Такий варіант поділу справді можливий, до того ж можна знайти кути *всіх* трикутників!

8.9. Знайдіть усі кути трикутників ABC, ABD і CBD на рис. 7 і зробіть *правильний* рисунок.

У: Підсумуємо: ви довели, що рівнобедрений прямокутний трикутник можна поділити на два рівнобедрені прямокутні трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною, протилежною основі.

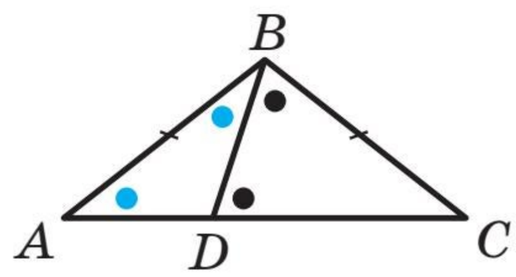


Рис. 8

Ф: Рухаймося далі. Ось другий з решти трьох варіантів поділу (рис. 8). Чи можливий він?

К: Позначмо α рівні кути при основі рівнобедреного трикутника ADB, а β — рівні кути при основі рівнобедреного трикутника DCB (рис. 9).

Ф: Тоді $\beta = 2\alpha$ і $\angle C = \alpha$.

8.10. Чи згодні ви з Федором?

К: Цей варіант можливий, до того ж можна знайти кути *всіх* трикутників!

8.11. Знайдіть кути трикутників на рис. 9 і зробіть *правильний* рисунок.

Ф: Залишився останній варіант. Але він є просто дзеркальним двійником попереднього: рівнобедрені трикутники, на які розбивається вихідний трикутник, міняються місцями.

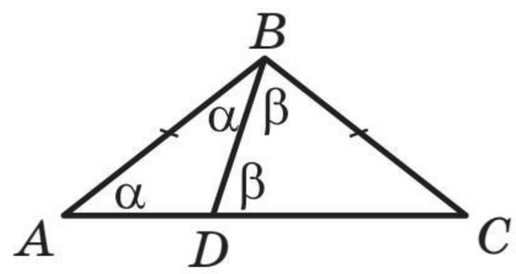


Рис. 9

8.12. Чи згодні ви з Федором? Якщо так, то накресліть спочатку схематично поділ трикутника, про який він каже, а відтак зробіть *правильний* рисунок.

У: На цей раз ви довели, що рівнобедрений трикутник з кутом при основі, що дорівнює $36°$, можна поділити відрізком, один кінець якого збігається з вершиною, протилежною основі, на

8.8. Скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

8.9. Скористайтеся тим, що коли суміжні кути рівні, то вони прямі.

8.10. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі кутів трикутника, несуміжних з ним, а також тим, що трикутник ABC рівнобедрений.

два рівнобедрені трикутники з кутами при основі, що дорівнюють відповідно 36° і 72°.
Підведіть тепер підсумки вашого дослідження.

Ф: Рівнобедрений трикутник можна поділити на два рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною, протилежною основі, у двох випадках: 1) якщо початковий трикутник прямокутний; 2) якщо кут при основі початкового трикутника дорівнює 36°.

К: У першому випадку в результаті поділу утворюються два рівнобедрені прямокутні трикутники, а в другому випадку — рівнобедрені трикутники з кутами при основі, що дорівнюють відповідно 36° і 72°.

Поділ рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною при основі

У: Розглянемо тепер поділ рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною *при основі*.

К: Почнемо знову з того, що з'ясуємо: які є варіанти такого поділу...

8.13. Зобразіть схематично всі очікувані варіанти поділу рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною при основі. Позначте точками різних кольорів рівні кути при основі цих трикутників.

Ф: Які ж з цих варіантів поділу можливі?

8.14. Дайте відповідь на запитання Федора.

8.15. Зобразіть схематично *можливі* варіанти поділу, позначивши α і β рівні кути при основі рівнобедрених трикутників, утворених у результаті поділу.

8.16. Знайдіть кути всіх трикутників для кожного можливого варіанта поділу.

8.17. Підведіть підсумок вашого дослідження: 1) які рівнобедрені трикутники можна поділити на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною при основі; 2) які рівнобедрені трикутники утворюються в результаті такого поділу.

Один зі способів поділу рівнобедреного трикутника на *n* рівнобедрених трикутників

К: Один з розглянутих нами способів поділу рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники нагадує дитячу книжку-розкладайку. Щоб це стало помітним, я виділила кольором рівні відрізки, утворені в результаті такого поділу (рис. 10).

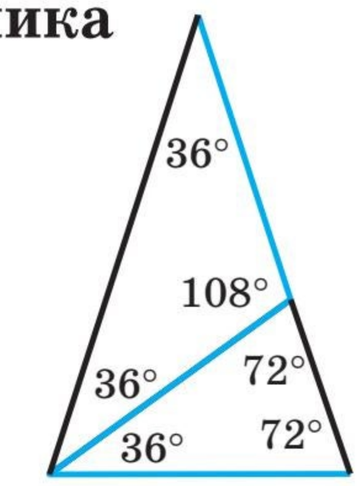


Рис. 10

Ф: Це ти добре підмітила. Тоді виникає питання: який рівнобедрений трикутник можна поділити подібним чином на *три* рівнобедрені трикутники, як показано на рисунку 11?

8.18. Знайдіть кути всіх трикутників на рис. 11.

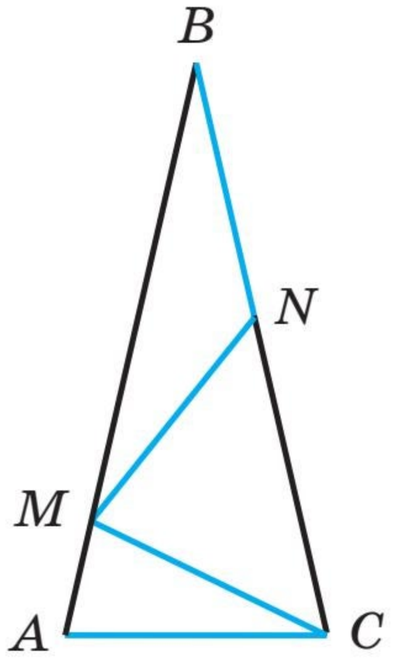


Рис. 11

К: Подібним чином можна поділити рівнобедрений трикутник і на *чотири* рівнобедрені трикутники!

8.19. Виконайте запропонований Катериною поділ. Виконайте відповідний рисунок і знайдіть кути всіх трикутників.

Ф: А яким буде подібний поділ рівнобедреного трикутника на *довільне* число рівнобедрених трикутників?

8.20. Знайдіть кути всіх трикутників при запропонованому Федором розбитті рівнобедреного трикутника на n рівнобедрених трикутників.

8.21. Рівнобедрений трикутник розбито розглянутим способом на кілька рівнобедрених трикутників так, що градусні міри кутів усіх трикутників виражаються *натуральними* числами.

а) Скільки рівнобедрених трикутників може утворитися в результаті такого поділу?

б) Чому може дорівнювати у вихідному трикутнику кут при вершині, протилежній до основи?

8.18. Скористайтеся тим, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі кутів трикутника, несуміжних з ним, властивістю рівнобедреного трикутника, а також тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

8.20. Доведіть, що у даному випадку кути при основі рівнобедрених трикутників відносяться як $1:2:3:\ \ldots\ :n$, а також скористайтеся тим, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

8.21. Знайдіть усі непарні множники числа 180.

У: Ще два проєкти ми присвятимо двом чудовим рівнобедреним трикутникам.

2. ДВА ЧУДОВІ РІВНОБЕДРЕНІ ТРИКУТНИКИ

Рівнобедрений трикутник з кутами 80°, 20°, 80°

У: Придивімося уважніше до вже знайомого нам рівнобедреного трикутника з кутами 80°, 20°, 80°.

К: Ми вже знаємо, що такий трикутник можна поділити на 4 рівнобедрені трикутники (рис. 12).

У: Спробуйте скористатися цією його властивістю, щоб поставити нові запитання і знайти на них відповіді.

Ф: З'єднаймо відрізками точки M і C, а також точки K і A, і спробуймо знайти кути утворених нових трикутників.

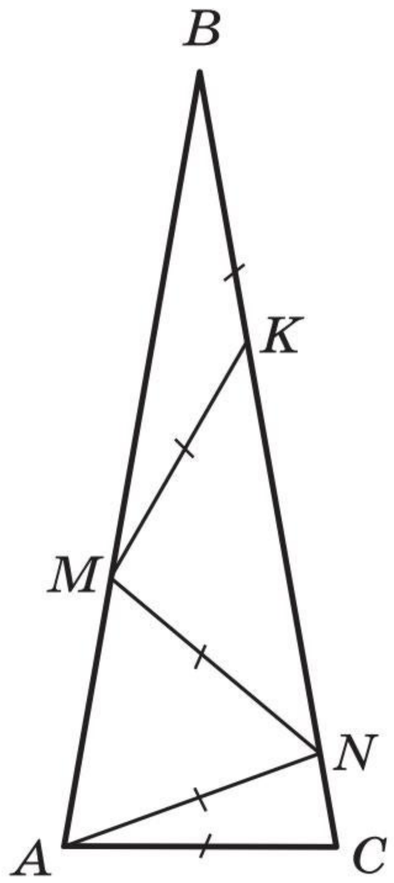


Рис. 12

8.22. На рис. 13 зображено рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Кут B дорівнює 20°. Знайдіть кути трикутника:

а) AMK б) MAC

в) AKC г) BKA

К: Ми знайшли всі ці кути!

У: Молодці! Між іншим, ці задачі вважають доволі складними.

Ф: Рівнобедрений трикутник з кутами 80°, 20°, 80° справді чудовий!

У: Тоді не будемо з ним розлучатися.

8.23. На рис. 14 трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. Кут B дорівнює 20°, $BM = MA$. Отримайте з рисунка якомога більше інформації.

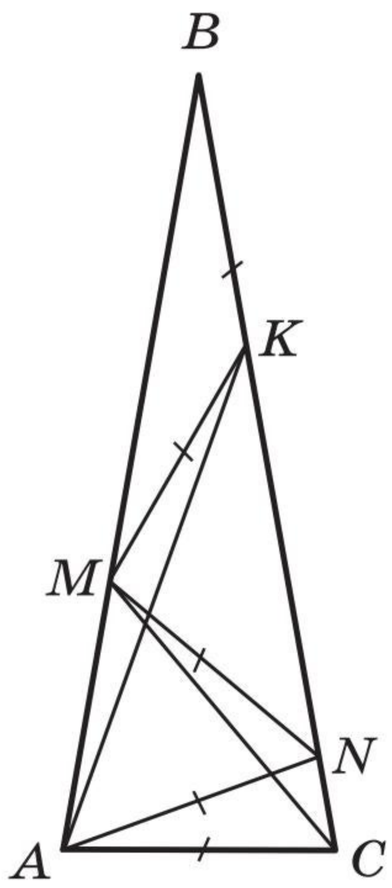


Рис. 13

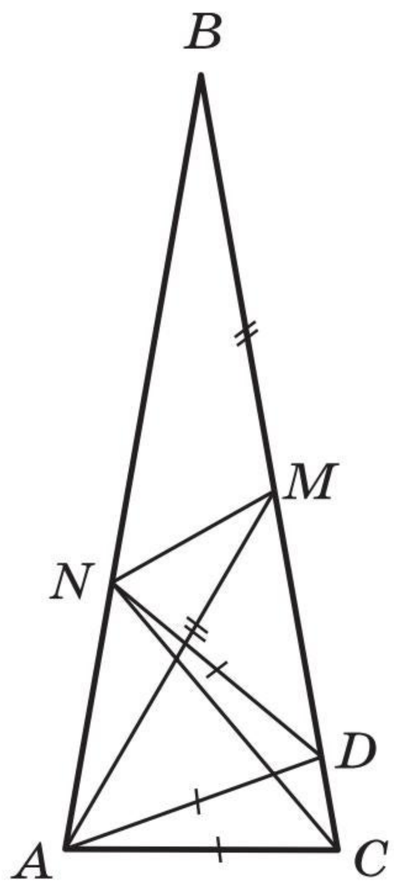


Рис. 14

8.22. а) Доведіть, що трикутник AMK рівнобедрений; для цього доведіть спочатку, що трикутник ANM рівносторонній; б) Скористайтеся тим, що трикутник MAC рівнобедрений; в, г) Скористайтеся результатами пункта a.

8.23. Доведіть, що трикутники ADM і NDM рівнобедрені. Після цього можна знайти кути всіх трикутників з вершинами в заданих точках.

Рівнобедрений трикутник з кутами 50°, 80°, 50°

У: Розглянемо тепер інший чудовий рівнобедрений трикутник. Ось, наприклад, одна з багатьох задач про цей трикутник, які теж вважають доволі важкими.

8.24. Кути при основі AC рівнобедреного трикутника ABC дорівнюють по 50° (рис. 15). Кути DAC і DCA (ж і ч) дорівнюють відповідно 30° і 10°. Знайдіть кути трикутника BCD.

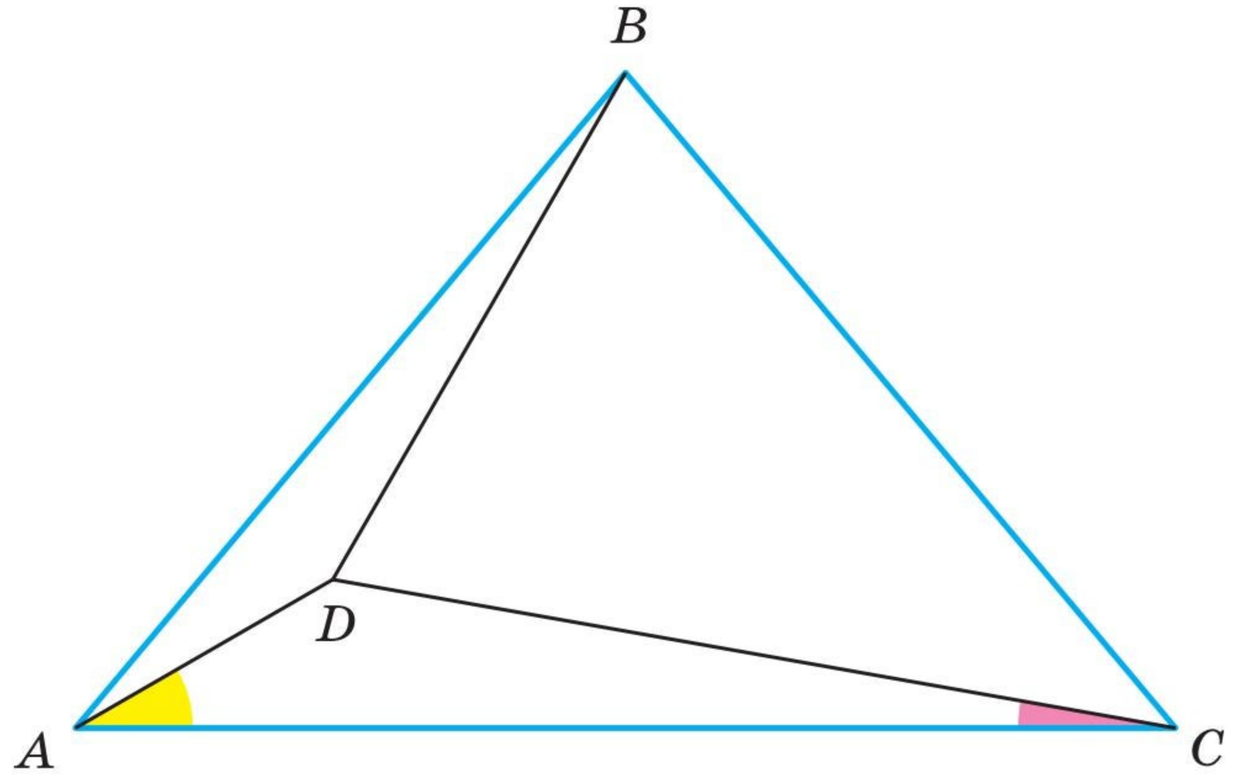


Рис. 15

Ф: Трикутник BCD схожий на рівнобедрений... але я поки не бачу, як це довести.

У: Тоді я запропоную вам інші задачі про цей трикутник, розв'язавши які ви впораєтесь із задачею 24.

8.25. Кути трикутника ABC дорівнюють відповідно 50°, 80°, 50° (рис. 16). Кути DAC і FCA дорівнюють 30°, а кути DCA і FAC — 10°. Знайдіть кути трикутника DBF.

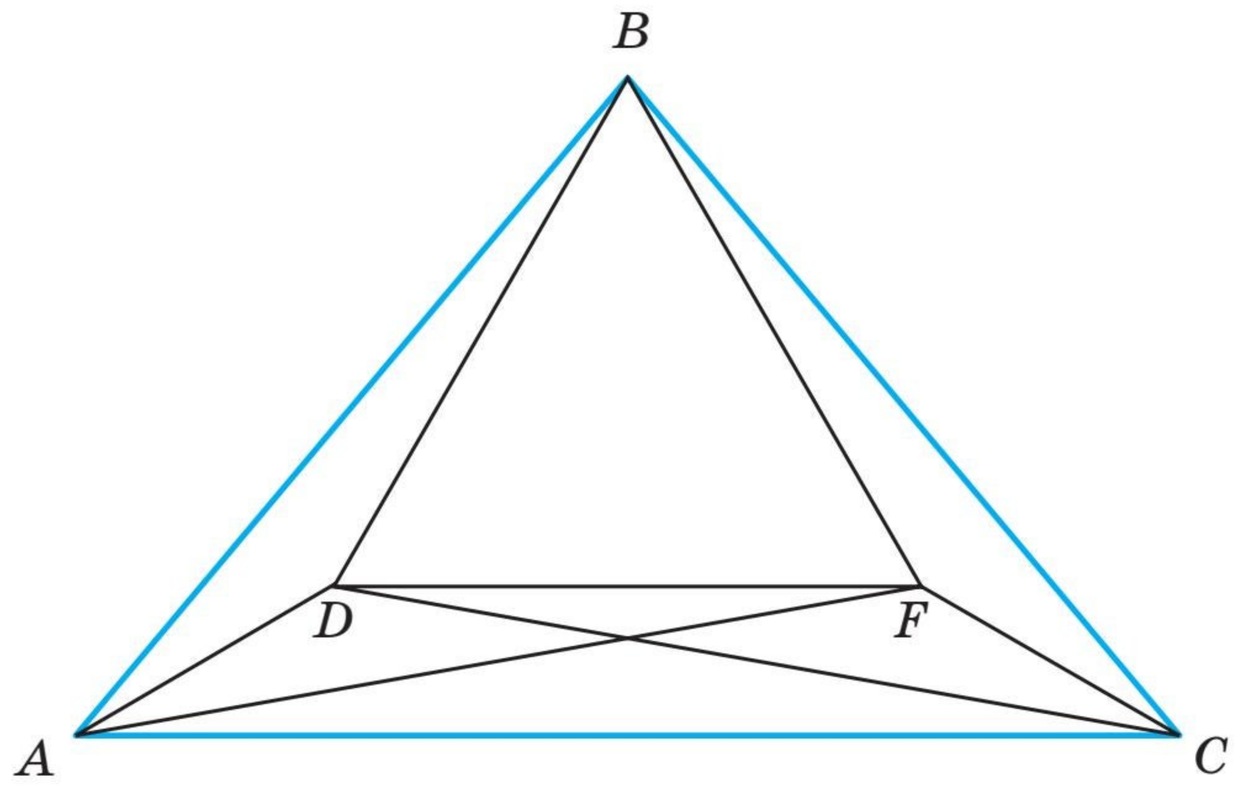


Рис. 16

Ф: Мені здається, що трикутник DBF — рівносторонній.

К: А як це довести?

Ф: Перейдемо від *розв'язування задачі до дослідження фігури*.

К: Зробимо додаткові побудови: проведемо в трикутнику ABC відрізки AP і CN так, щоб утворились уже знайомі нам рівнобедрені трикутники BAP і BCN з кутами 80°, 20°, 80° (рис. 17).

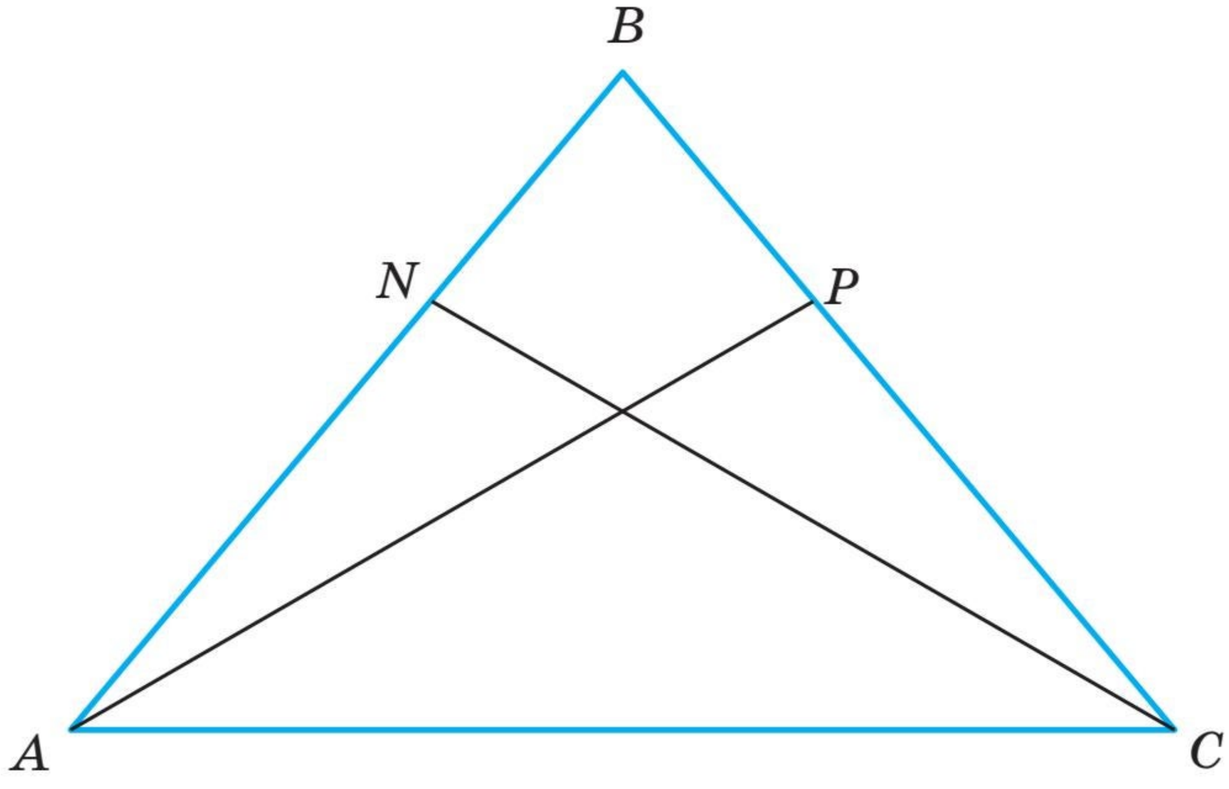


Рис. 17

Ф: Мені здається, якщо провести відрізок BH через точку O перетину відрізків AP і CN (рис. 18), то утвориться багато рівних трикутників...

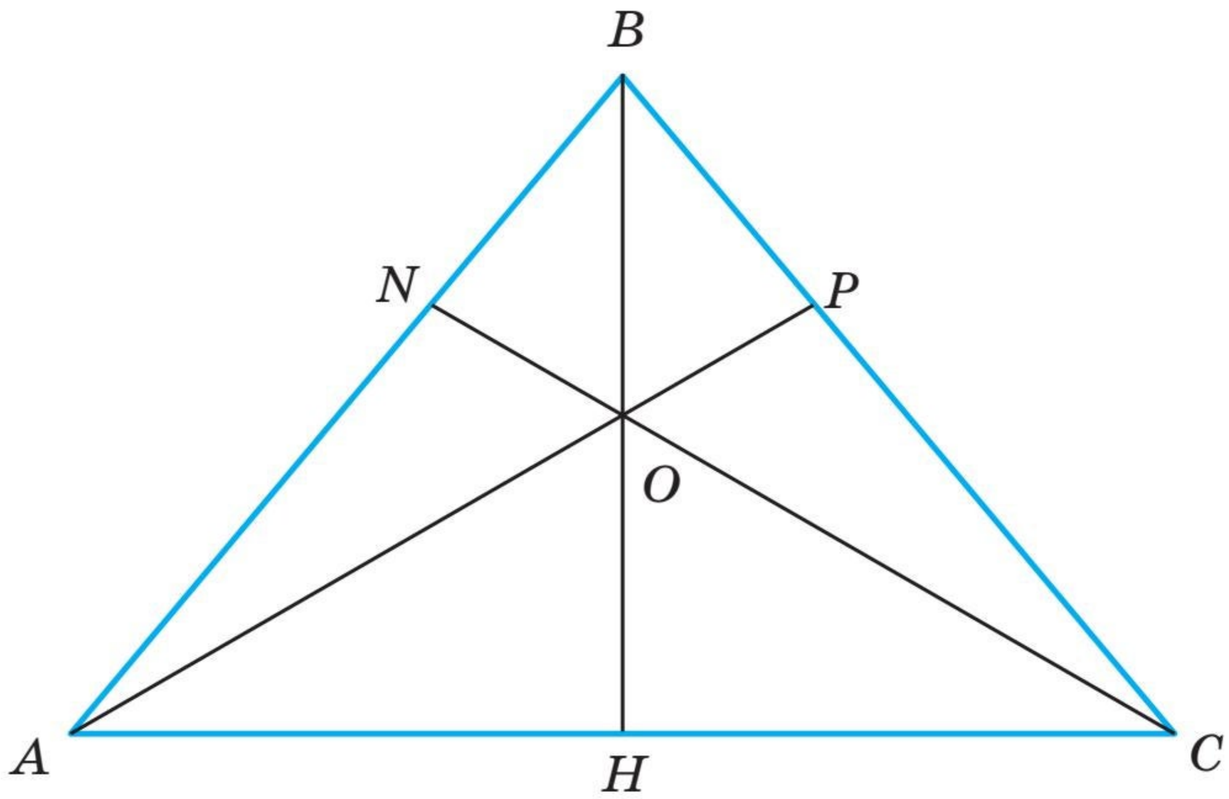


Рис. 18

8.26. Розгляньте рис. 18.

а) Які пари рівних трикутників є на цьому рисунку?

б) Доведіть: $BH \perp AC$.

в) Знайдіть градусні міри усіх гострих кутів з вершиною O.

Ф: В умовах задач 24 і 25 згадувалися відрізки, проведені під кутом 10° до основи AC...
Проведімо й ми відрізки AQ і CM так, щоб кути QAC і MCA дорівнювали по 10° (рис. 19). Позначимо буквами D і F точки перетину відрізків.

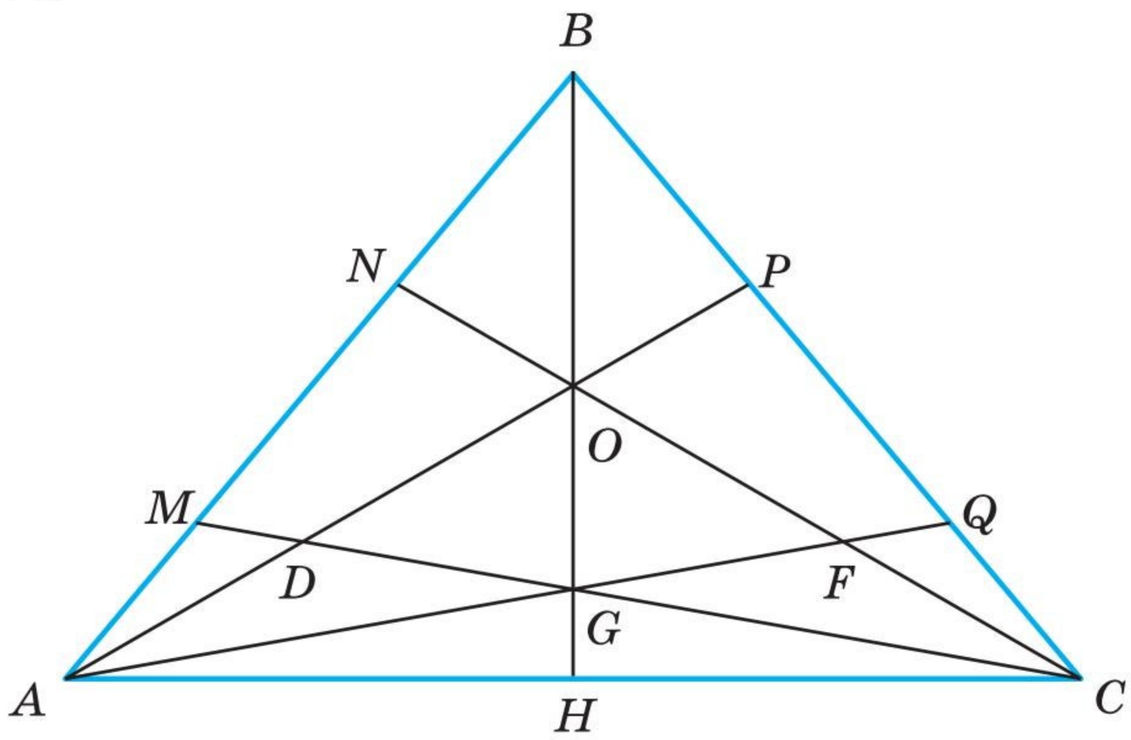


Рис. 19

К: У тебе сьогодні одна ідея краща від іншої! Здається, тепер ми вже зможемо розв'язати задачі 24 і 25. Спочатку доведемо рівність деяких трикутників, що з'явилися на рис. 19...

Ф: Мені здається, що при цьому ми виявимо нові рівнобедрені трикутники.

8.27. Розгляньте рис. 19.
а) Знайдіть пари рівних трикутників, одна з вершин кожного з яких розташована в точці C.
б) Доведіть, що трикутник BCD рівнобедрений.

К: Рівнобедрений трикутник з кутами 50°, 80°, 50° також чудовий!

У: Тепер ви знаєте про цей трикутник достатньо, щоб розв'язати задачу 24.

К: А якщо додати ще три відрізки (рис. 20), то стане зрозуміло, як розв'язати задачу 25.

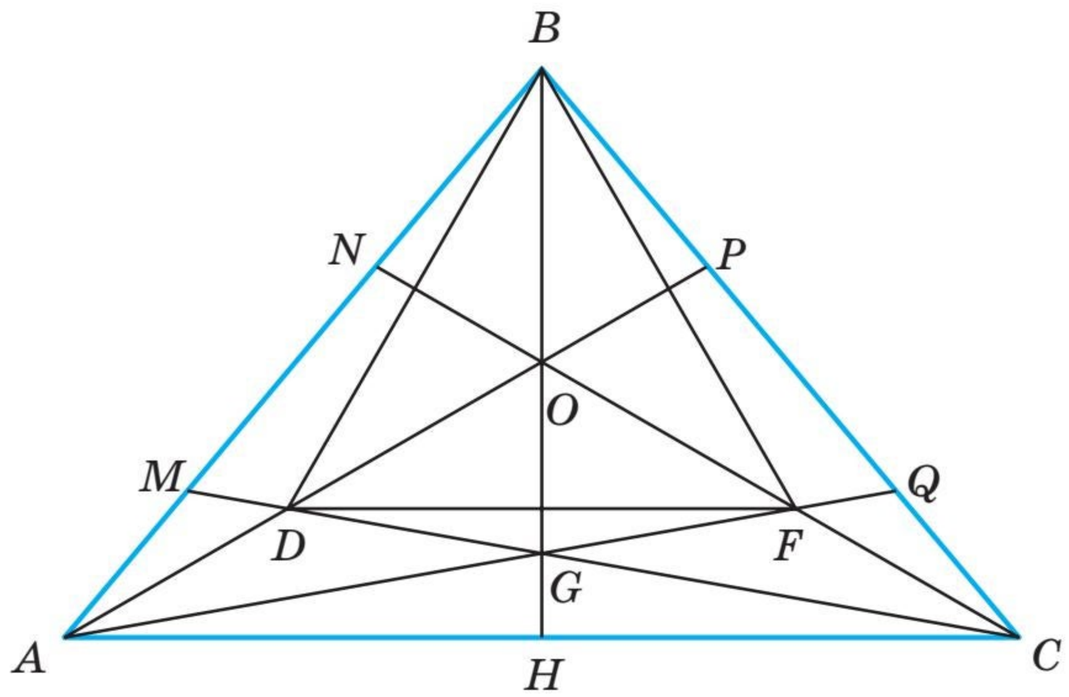


Рис. 20

8.28. Отримайте з рис. 20 якомога більше інформації.

Ф: Додамо ще три відрізки (рис. 21)! Яку інформацію можна отримати тепер?

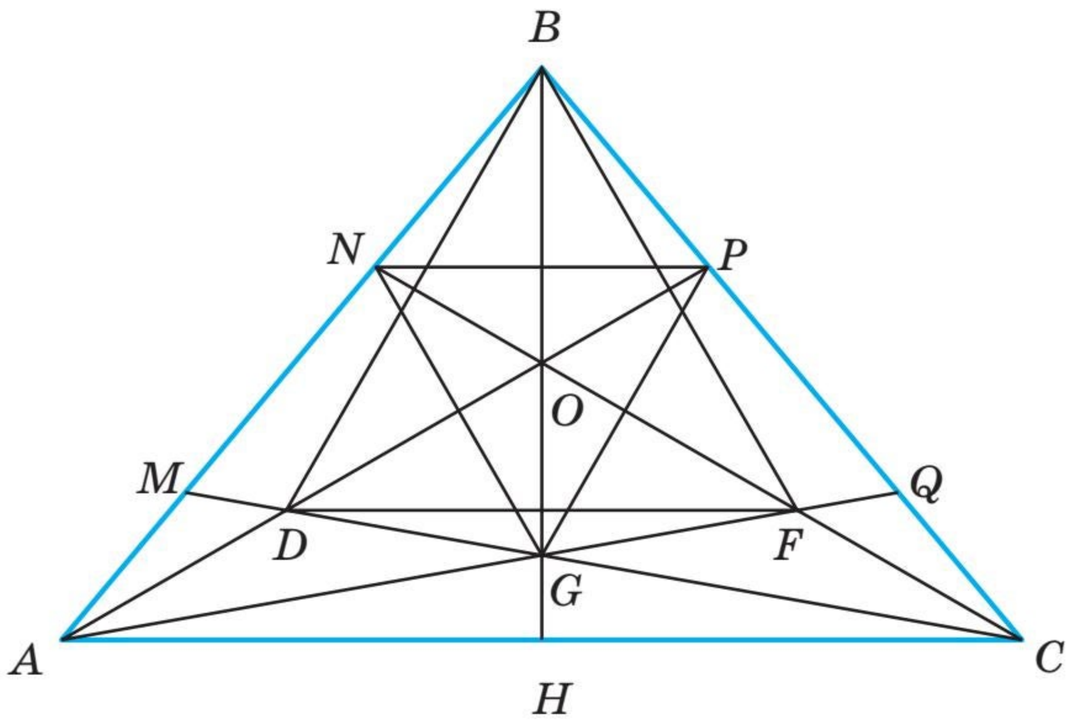


Рис. 21

ВІДПОВІДІ Й РОЗВ'ЯЗКИ

ГЛАВА 1. ТОЧКИ І ПРЯМІ

5. *AB*, *BC*, *AC*, *BA*, *CB*, *AC*. **14.** Нехай пряма *c* перетинає пряму *a*, але не перетинає паралельну їй пряму *b*. Тоді через точку *D* перетину прямих *a* і *c* проходять *дві* прямі, паралельні прямій *b* (рис. 1). Але це суперечить аксіомі паралельних прямих. Звідси випливає, що пряма *c перетинає* пряму *b*. **16.** Не може. **17.** Див. рисунки 2, *а*—*г*.

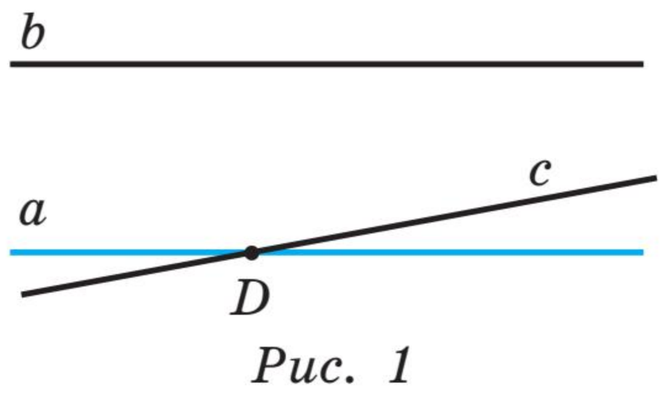


Рис. 1

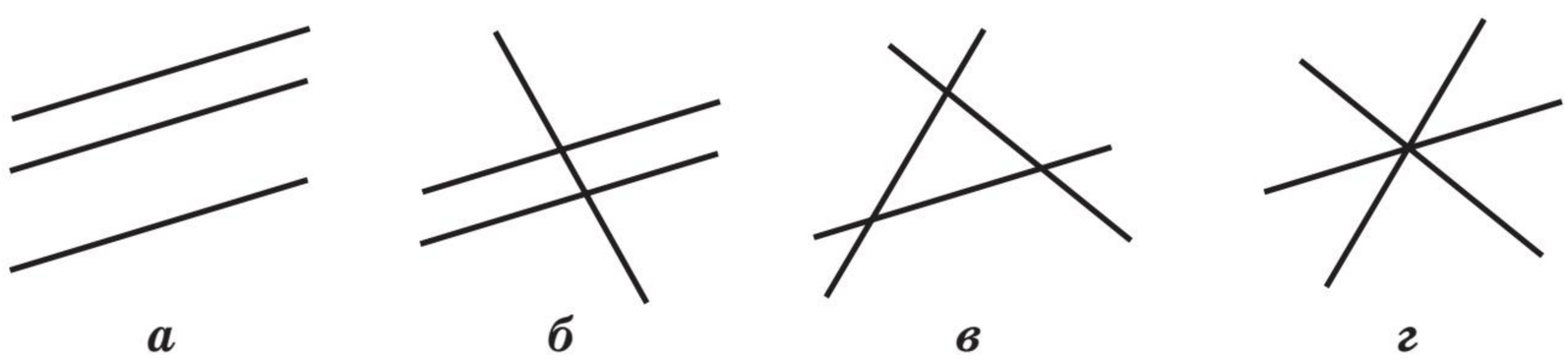


Рис. 2

18. а) Усі три прямі перетинаються в одній точці; б) пряма *c* паралельна одній із прямих *a* або *b*; в) усі три прямі перетинаються попарно. **26.** Точка *M* є точкою перетину прямих *a* і *b*. **27.** Ні. **28.** Точку *N* потрібно помістити на прямій *b* так, щоб точки *N* і *P* лежали по різні сторони від точки *M*.

ГЛАВА 2. ПРОМЕНІ, КУТИ І ВІДРІЗКИ

2. Початком променя *AB* є точка *A*, а початком променя *BA* — точка *B*; промені *AB* і *BA* напрямлені в протилежні сторони. **4.** 8. **5.** $2n$. **6.** Не можуть. **7.** Не обов'язково (див. рис. 3). **8.** $\angle ABC = 60°$; у 3 рази. **9.** а) 5 або 2. **10.** а) 5 кутів. **11.** 120° і 60°. **14.** а) 130°. б) 65°. **16.** а) 80°. б) 60° і 20°; 70° і 10°. **17.** а) 25°. **18.** а) 100°. б) 150° і 50°; в) 125° і 25°. **19.** 90°. **21.** Так; ні; ні. **22.** б) 110° або 170°. в) Можна: при цьому тільки одна з точок *M* або *N* лежить у внутрішній області кута *AOB*. $\angle MON = 60°$. **23.** б) 85° або 15°. **24.** 120° і 60°. **25.** 70° і 110°. **26.** а) Можуть. б) Не обов'язково. **27.** 90°. **28.** а) 180°. б) Так, оскільки в них є спільна сторона *OB*. **29.** По 90°. **30.** а) $\angle BOC = 60°$; б) $\angle AOB = 110°$; в) $\angle AOB = 72°$; $\angle BOC = 108°$; г) $\angle AOB = 140°$; $\angle BOC = 40°$; д) $\angle AOB = 105°$; $\angle BOC = 75°$; е) $\angle BOC = 72°$; $\angle AOB = 108°$. **32.** 180°. **35.** Два кути по 45° і два кути по 135°. **36.** а) Два кути по 30° і два кути по 150°. б) Два кути по 110° і два кути по 70°. в) Два кути по 65° і два кути по 115°. г) Два кути по 60° і два кути по 120°. **43.** а) 60°. б) $\angle AOC$ або $\angle BOD$. **44.** 36°. **45.** а) 25°; б) 80°; в) 65°; г) 70°. д) Кут між прямими може бути будь-яким.

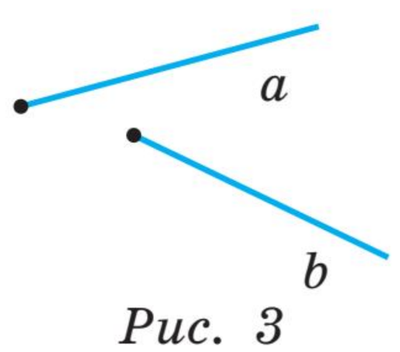


Рис. 3

48. а) 12 см і 6 см; б) 3 см і 15 см; в) 8 см і 10 см; г) 4 см і 14 см.

49. Пронумеруємо точки від 1 до 5. Точку 1 можна сполучити *чотирма* відрізками з точками 2–5. Точку 2 можна сполучити *трьома* відрізками з точками 3–5 (з точкою 1 вона вже з'єднана відрізком). Точку 3 можна сполучити *двома* відрізками з точками 4–5 (з точками 1 і 2 вона уже з'єднана відрізками). Точку 4 можна сполучити *одним* відрізком з точкою 5 (з точками 1–3 вона вже з'єднана відрізками). Зрештою, точка 5 уже з'єднана зі всіма точками 1–4. Отже, число відрізків дорівнює $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

50. Міркуючи так само, як при розв'язуванні попередньої задачі, отримуємо, що число відрізків дорівнює сумі $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$. Щоб знайти суму цього ряду, підпишемо під ним той самий ряд, але у зворотному порядку: $\begin{matrix}(n-1)+(n-2)+\ldots+ & 2 & + & 1\\ 1 & + & 2 & +\ldots+(n-2)+(n-1)\end{matrix}$. Додаючи верхні числа до нижніх, помічаємо, що їх сума завжди дорівнює n. Оскільки в кожному ряді $(n-1)$ доданків, отримуємо, що сума всіх чисел в *обох* рядах дорівнює $n(n-1)$. Ця сума у 2 рази більша від шуканої суми, оскільки вона є сумою двох однакових рядів. Тому шукане число дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$. Цей метод підсумовування ряду натуральних чисел називають «методом Гаусса», оскільки його винайшов німецький школяр Карл, який згодом став знаменитим математиком Карлом Фрідріхом Гауссом. **54.** а) 8 см. б) 2 см і 6 см. **55.** а) $\frac{a}{n}$; б) $\frac{(n-1)a}{n}$. **56.** Довжина середнього відрізка 1 см, довжини крайніх відрізків 2 см і 4 см. **57.** а) $2b-a$. б) Перший варіант: довжина кожного крайнього відрізка дорівнює $a-b$, довжина середнього відрізка $2b-a$; другий варіант: довжина середнього відрізка і одного з крайніх дорівнює $2b-a$, довжина другого крайнього відрізка дорівнює $3a-4b$. **67.** $\angle DOG=30°$, $\angle COA=45°$, $\angle AOF=\angle BOG=75°$.

ГЛАВА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТРИКУТНИКА. РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

2. 6 трикутників. **6.** 8 або 9 трикутників. **9.** а) 5 трикутників (враховуючи трикутник, частинами якого є 4 менші трикутники). **10.** Не може. Якщо б проведена пряма була паралельна двом сторонам трикутника, то вона була б паралельна *двом* прямим, що перетинаються у вершині цього трикутника. А це суперечить тому, що через точку, що не лежить на прямій, можна провести одну і тільки одну пряму, паралельну даній. **16.** 8 см, 4 см, 8 см. **17.** 9 см. **18.** а) $KN=12$ см, $NM=24$ см, $KM=30$ см. б) 66 см. **19.** а) $NK=6$ см, $MN=9$ см, $MK=12$ см. б) 27 см. **20.** Федір має рацію: у запропонованому ним записі зберігається відповідність вершин. **21.** $\Delta QPS=\Delta KNM$. **23.** Наприклад, $\Delta ASP=\Delta KNF$. **24.** Наприклад, $\Delta BKL=\Delta MCD$. **25.** Можна. **26.** Якщо в двох трикутників відповідно рівні дві сторони і кут *не* між ними, то ці трикутники можуть бути не рівними.

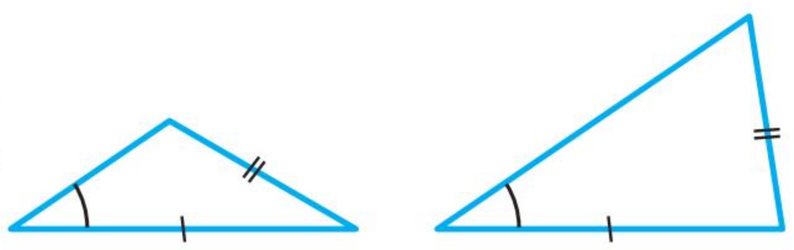


Рис. 4

27. Не можна (в даних трикутниках рівні кути, які не лежать між відповідно рівними сторонами). **28.** Можна довести, що $\Delta BKM=\Delta CKN$ за другою ознакою рівності трикутників. **31.** б) $\Delta ACB=\Delta ADB$ за другою ознакою рівності трикутників. **32.** б) $\Delta BCA=\Delta BDA$ за другою ознакою рівності трикутників. **33.** а) За першою ознакою рівності трикутників рівні трикутники ABC і NKM. б) За другою ознакою рівності трикутників рівні трикутники KMN і PRS. в) Рівні. г) Можна дізнатись, що $\angle C=30°$, $SP=4$ см. **34.** а) За першою ознакою рівності трикутників рівні трикутники KMN і SRP. б) За другою ознакою рівності трикутників рівні трикутники ABC і KMN. в) Не рівні (рівні трикутники ABC і SRP). г) Можна знайти $AC=10{,}4$ см. **36.** Можна довести рівність трикутників ABC, KMN і SPR, звідки випливає рівність відповідних сторін і кутів цих трикутників. **37.** Можна довести рівність трикутників ABC, NKM і FEH, звідки випливає рівність відповідних сторін і кутів цих трикутників.

40. Нехай AM і A_1M_1 — медіани рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, відповідно. Щоб довести, що $AM = A_1M_1$, достатньо довести, що $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$. Це випливає з того, що в трикутників ACM і $A_1C_1M_1$ є по дві відповідно рівні сторони і кут між ними ($AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$ як половини відповідно рівних сторін BC і B_1C_1, а $\angle C = \angle C_1$). Аналогічно доводиться і рівність інших медіан, проведених до відповідно рівних сторін. **41.** Нехай AD і A_1D_1 — бісектриси відповідно рівних кутів A і A_1 рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Щоб довести, що $AD = A_1D_1$, достатньо довести, що $\Delta ACD = \Delta A_1C_1D_1$. Це випливає з того, що в трикутників ACD і $A_1C_1D_1$ є по одній відповідно рівній стороні та два прилеглі до неї кути ($AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ як половини відповідно рівних кутів A і A_1). Аналогічно доводиться і рівність бісектрис інших відповідно рівних кутів. **47.** Так, $\Delta AOC = \Delta BOD$. **48.** Так, $\Delta AOD = \Delta BOC$. **49.** $\Delta CAD = \Delta DBC$; $\Delta ACB = \Delta BDA$.

ГЛАВА 4. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

1. AB і BC. **2.** Чотири рівнобедрені трикутники: ABC, ADC, DAB і DCB. **5.** Трикутники ABD і CBD рівні за першою ознакою рівності трикутників. **6.** 28°. **9.** $\angle CBD = 60°$, $\angle BDC = 90°$. $\angle BCD = 30°$. **10.** а) 90°. б) 50°. **11.** Даний трикутник є рівнобедреним, до того ж дана медіана проведена до основи. Звідси випливає, що вона збігається з бісектрисою і висотою, тобто вона ділить навпіл кут, з якого виходить, а також перпендикулярна до основи. **12.** 5 см. **13.** 10 см. **15.** Так. **16.** Так. **17.** Запишемо для кожного випадку рівність відповідних сторін рівних трикутників, використовуючи порядок букв у запису рівності трикутників в умові. Отримаємо: а) $AB = CB$, звідки випливає, що трикутник ABC рівнобедрений з бічними сторонами AB і BC; б) $AB = BC$, $BC = CA$, $AC = BA$, звідки випливає, що всі три сторони трикутника рівні. **26.** Твердження, зворотне до теореми про вертикальні кути: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні». Це неправильно: якщо кути рівні, то вони не обов'язково вертикальні — це можуть бути, наприклад, кути при основі рівнобедреного трикутника. **27.** Якщо медіана BM трикутника ABC перпендикулярна до сторони AC, то за першою ознакою рівності трикутників $\Delta AMB = \Delta CMB$. Звідси випливає, що $AB = BC$. **28.** Якщо бісектриса BD трикутника ABC перпендикулярна до сторони AC, то за другою ознакою рівності трикутників $\Delta ADB = \Delta CDB$. Звідси випливає, що $AB = BC$. **30.** Висота за умовою збігається з медіаною, проведеною також до сторони AC, тому трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. Звідси випливає, що висота і медіана, проведені до сторони AC, дорівнюють 12 см. Довівши, що бісектриси, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, рівні, отримуємо, що бісектриса кута C також дорівнює 15 см. **33.** Є. **34.** Є. **35.** $AB = BC = 16$ см, $AC = 10$ см. **36.** 70 см. **39.** а) 28 см. б) 66°. **45.** Нехай трикутник ABC (рис. 5) розбивається відрізком BD на два рівні трикутники, причому сторона BD у цих трикутників спільна. У рівних трикутниках проти рівних сторін лежать рівні кути, тому $\angle A = \angle C$. Отже, трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. **47.** Трикутники ABD і CDB рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає рівність відповідних кутів цих трикутників: $\angle A = \angle C$, $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. **48.** Рівні.

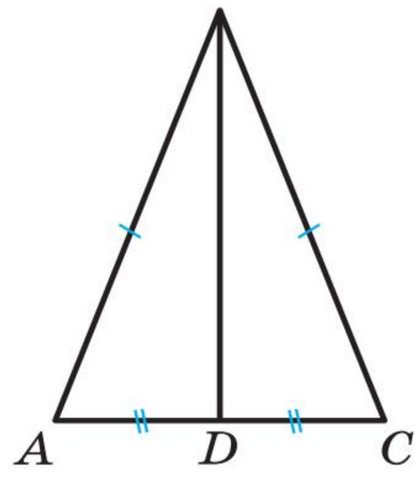


Рис. 5

49. Рівні. **50.** Рівні. **51.** Рівні. **64.** Трикутник BAM — рівнобедрений, оскільки його бісектриса збігається з висотою. Звідси випливає, що і трикутник BDM рівнобедрений, оскільки DF — одночасно його медіана і висота. Трикутник ADC також рівнобедрений, оскільки KD — одночасно його медіана і висота. **65.** Кути BDA і MDA рівні, оскільки DF — бісектриса рівнобедреного трикутника BDM, а кути ADM і CDM рівні, оскільки DM — бісектриса рівнобедреного трикутника ADC. Сума цих трьох рівних кутів дорівнює 180°, тому кожний з них дорівнює 60°. **66.** Трикутники ABD і AMD рівні за будь-якою (!) з трьох ознак рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle ABC = \angle AMD$, а за умовою $DM \perp AC$. Отже, $\angle ABC = 90°$. **67.** $\angle BDF = 55°$. **68.** $\angle BDA = 70°$. **69.** $\angle BAD = 70°$. **75.** Побудуйте серединний перпендикуляр до відрізка AB. Станція C має міститися в точці перетину цього перпендикуляра з дорогою (рис. 6, *а*—*в*).

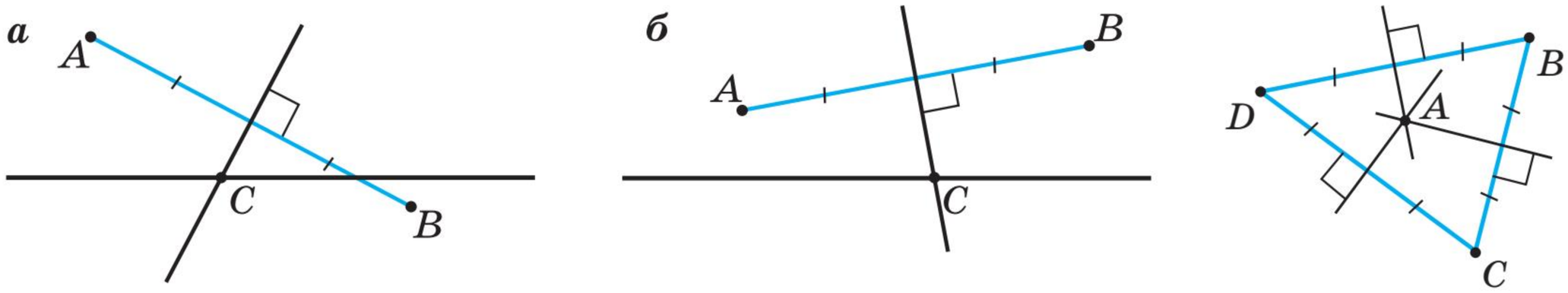


Рис. 6

Рис. 7

76. Точка A має лежати на перетині серединних перпендикулярів до відрізків DB, BC і DC (рис. 7). Те, що ці серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці, ми доведемо в останньому параграфі.

ГЛАВА 5. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

2. Основній властивості точок і прямих, згідно з якою через дві точки можна провести *одну* і тільки *одну* пряму. **13.** в) Кут між прямими c і k дорівнює 56°. **14.** Січна перетинає дві паралельні прямі й перпендикулярна до них. **15.** Не можна: див., наприклад, рис. 8. **16.** Не можна: див., наприклад, рис. 9. **17.** а) Не означає: ознакою паралельності прямих є не рівність односторонніх кутів, а те, що їх сума дорівнює 180°. б) Не означає: прямі, які перетнуті січною, можуть бути паралельними, а січна — перпендикулярна до них. **18.** а, б) Паралельні. **21.** 360°. **23.** У трикутників ABC і CDA сторона AC спільна, кути CAB і ACD рівні як різносторонні при паралельних AB і CD і січній AC, а кути BCA і DAC рівні як різносторонні при паралельних AD і BC і січній AC. Отже, ці трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників. **25.** Кути ACB і CAD є різносторонніми при січній AC, що перетинає прямі AD і BC, звідки випливає, що $AD \parallel BC$. Аналогічно доводиться, що $AB \parallel DC$. **26.** Сторона AC у трикутників ABC і CDA спільна, а кути BAC і ACD рівні як різносторонні при січній AC, що перетинає паралельні прямі AB і CD. Оскільки за умовою $AB = CD$, трикутники ABC і CDA рівні за першою ознакою рівності трикутників. **27.** Кути ACB і CAD є різносторонніми при січній AC, що перетинає прямі AD і BC, звідки випливає, що $AD \parallel BC$.

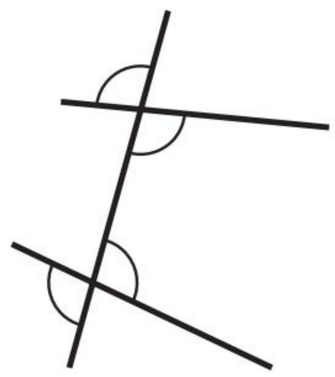


Рис. 8

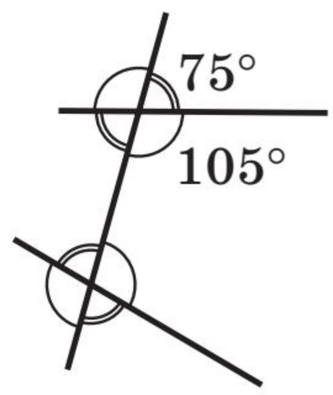


Рис. 9

32. Оскільки пряма MN паралельна стороні AC (рис. 10), то $\angle MBA = \angle BAC$, $\angle NBC = \angle BCA$ як різносторонні при паралельних прямих MN і AC та січних AB і BC відповідно. Отже, сума всіх кутів трикутника дорівнює сумі кутів MBA, ABC і CBN, що складають розгорнутий кут, тобто дорівнює 180°.

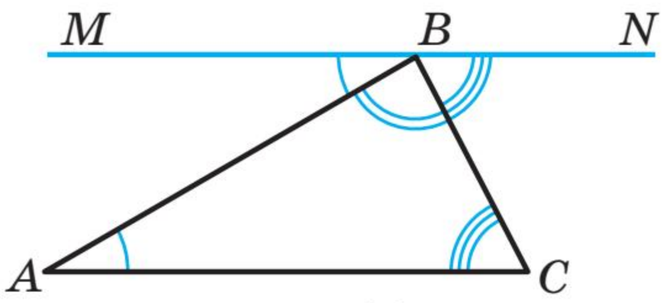


Рис. 10

34. а) 1; б) 1; в) 2 або 3. **40.** а) Можна: трикутник прямокутний. б) Можна: трикутник тупокутний. в) Не можна: трикутник може бути гострокутним, прямокутним або тупокутним. Знайдіть самостійно приклади для кожного з цих випадків. **41.** Так. **42.** Бісектриси односторонніх кутів перпендикулярні. **43.** Кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°. **44.** Так. **45.** 60°. **46.** $\angle B = 2\angle HAC$. **49.** а) Ні. б) Ні. **50.** а) Так. б) Ні. **51.** а) Ні. б) Так. **52.** Два або три. **53.** а) Так. б) Ні. **54.** 30°, 30°, 120° або 30°, 75°, 75°. **55.** 130°, 25°, 25°. **56.** 40°, 40°, 100°. **57.** Не може. **58.** 35°, 35°, 110°. **59.** 80°, 80°, 20° або 20°, 20°, 140°. **60.** Можна, оскільки з теореми про суму кутів трикутника випливає, що і треті кути в цих трикутниках рівні. А отже, ці трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників. **61.** Не можуть. **62.** Можуть. **63.** а) 60°. б) 70°, 60°, 50°. **64.** 60°. **65.** 40°. **66.** $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90° - \frac{\gamma}{2}$. **67.** Не може. **68.** $\frac{\beta - \alpha}{2}$. **69.** б) 45°, 45°, 90°. **72.** ΔEAK, ΔBDK, ΔDEC (рис. 11). **73.** $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. **74.** $\angle AND = 120°$, $\angle KND = 60°$, $\angle AKB = 70°$, $\angle KDN = \angle BDC = 50°$, $\angle KAB = 30°$, $\angle DBC = 100°$, $\angle BCD = 30°$. **75.** а) Не обов'язково: прямі a та b можуть бути паралельними. б) 34°. **76.** а) Обов'язково: прямі a та b не можуть бути паралельними. б) 70° чи 2°. **77.** а) Праворуч. б) 1°. **79.** а) Чотири кути. **80.** а) $\angle AOK = \angle BOD = \gamma$; б) $\angle DOK = \angle AOB = 180° - \gamma$. **81.** $\angle AOB = 180° - \alpha$. **83.** а) 150°, 90°, 120°. б) 120°. **84.** Так. **87.** 360°. **93.** 40°, 70°, 70° або 40°, 40°, 100°. **94.** 140°, 20°, 20°. **97.** 40°. **98.** 40°. **99.** а) ΔKOA, ΔMOC, ΔKNC, ΔMNA. б) $\angle AMC = \frac{\beta}{2}$. в) $\angle AKC = \frac{\beta}{2}$. г) $\angle KNM = 90° - \frac{\beta}{2}$. **100.** а) α. б) $90° - \alpha$. в) α. **102.** 360°. **116.** 90°. **118.** Так. **119.** 90°, 60°, 30°. **120.** 90°, 60°, 30°. **121.** Рівні. **122.** Є. **123.** Усі ці трикутники рівні, до того ж кожний з них є прямокутним трикутником, один з кутів якого дорівнює 30°. **127.** 360°. **128.** Поділіть кожний многокутник на трикутники відрізками — наприклад, так, як показано на рисунку. а) 540°; б) 720°.

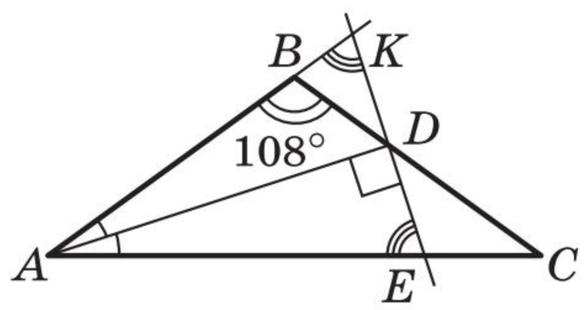
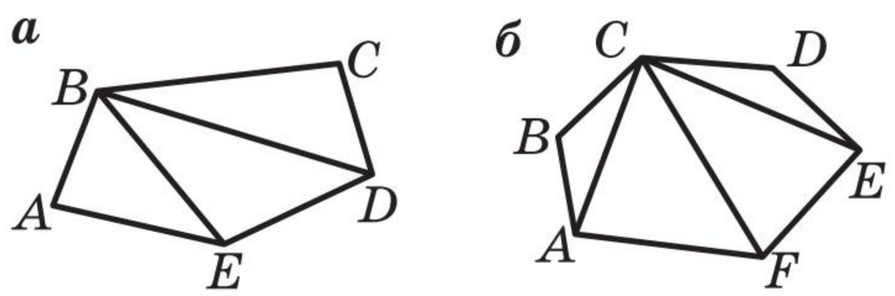


Рис. 11



ГЛАВА 6. НЕРІВНОСТІ В ТРИКУТНИКУ. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

2. Оскільки кути при основі рівнобедреного трикутника MBC рівні, отримуємо $\angle BMC = \angle BCM$. Оскільки $\angle BCM$ — *частина* кута ACB, отримуємо $\angle ACB > \angle BCM$. Оскільки кут BMC — *зовнішній* кут трикутника AMC і кут A — не суміжний з кутом BMC, отримуємо $\angle BMC > \angle A$. Із записаних спів-

відношень випливає, що $\angle ACB > \angle A$. **9.** У прямокутних трикутниках ABH і CBH гіпотенузами є відповідно AB і BC, а AH і HC — катети цих трикутників. Оскільки катет менший від гіпотенузи, отримуємо $AH < AB$, $HC < BC$, звідки випливає, що $AH + HC < AB + BC$. А оскільки $AH + HC = AC$, отримуємо $AC < AB + BC$. **10.** Для трикутників, зображених на вказаних рисунках, виконується нерівність $AC < AB$, оскільки в трикутнику проти прямого або тупого кута лежить найбільша сторона. Звідси випливає, що $AC < AB + BC$. **11.** а) Точки A, B і C є вершинами трикутника. б) Точки A, B і C лежать на одній прямій, до того ж точка B лежить між точками A і C. в) Таке розташування точок A, B і C неможливе, оскільки воно суперечить нерівності трикутника: нерівність $AC > AB + BC$ означає, що довжина відрізка AC більша від суми довжин його частин AB і BC. **12.** Нехай точки позначені так, як на рисунку 12. Тоді аеропорт A потрібно розмістити на перетині відрізків MK і NP. **13.** а) Лежать; точка B лежить між точками A і C. б) Не лежать. в) Лежать; точка A лежить між точками B і C. **14.** а) Лежать; точки розташовані в такому порядку: A, B, C, D. б) Лежать; точки розташовані в такому порядку: A, D, C, B; в) Не лежать. **15.** а) Не можуть, оскільки $AC > AB + BC$. б) Можуть: точки розташовані на одній прямій, до того ж точка B розташована між точками A і C, оскільки $AC = AB + BC$. в) Можуть: точки розташовані у вершинах трикутника, оскільки $AC < AB + BC$. **17.** а) Більше від 4 см, але менше від 14 см. б) Більше від 1 см, але менше від 15 см. **18.** а) 24 см або 21 см; б) 22 см; в) 20 см. **28.** а) Не може, оскільки є точка прямої m, відстань від якої до точки A менша від 5 см (точка C). б) Не можна, оскільки з даних в умові не випливає, що точка C — *найближча* до точки A точка прямої m. в) Потрібно провести перпендикуляр з точки A до прямої m. Довжина цього перпендикуляра і є відстанню від точки A до прямої m. Знайти цю відстань з даних, наведених в умові, не можна. **30.** Якщо бісектриса трикутника дорівнює перпендикуляру, проведеному з тієї самої вершини до протилежної сторони, то бісектриса збігається з висотою, проведеною з тієї самої вершини. Це — одна з ознак рівнобедреного трикутника. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. **51.** г) $AD = 10$ см, $CB = 15$ см.

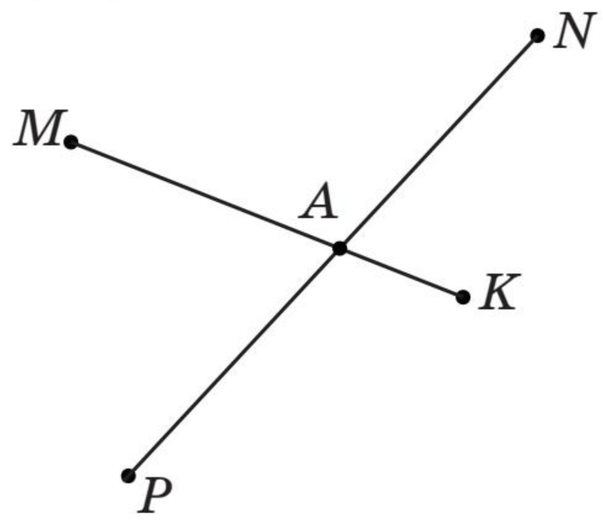


Рис. 12

53. Перший спосіб. Нехай CM — медіана прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C (рис. 13, *а*). Проведемо відрізки MK і MN, перпендикулярні відповідно до катетів AC і BC. Прямокутні трикутники AMK і MBN рівні за гіпотенузою і гострим кутом ($\angle AMK = \angle MBN$ як відповідні кути при січній AB, що перетинає паралельні прямі KM і BC). Звідси випливає, що $AK = MN$. Прямокутні трикутники MKC і CNM також рівні за гіпотенузою і гострим кутом ($\angle KMC = \angle NCM$ як різносторонні кути при січній CM, що перетинає паралельні прямі KM і BC). Звідси випливає, що $CK = MN$. З рівностей

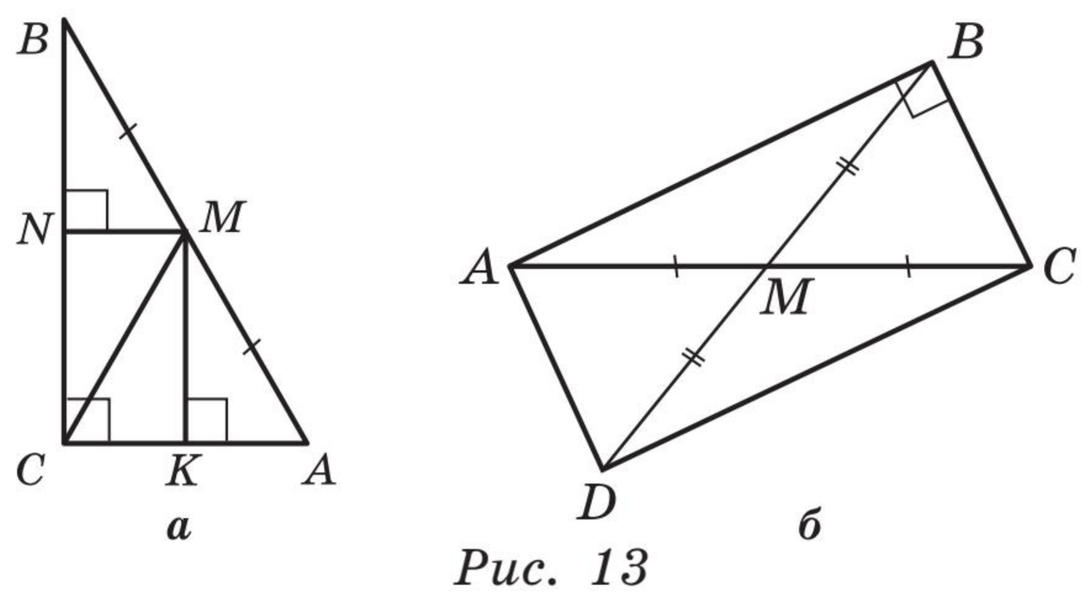


Рис. 13

$AK = MN$ і $CK = MN$ випливає, що $AK = CK$. Це означає, що в трикутнику AMC висота MK є також медіаною, тобто цей трикутник — рівнобедрений з основою AC. Отже, $CM = AM$: медіана дорівнює половині гіпотенузи, що і потрібно було довести. **Другий спосіб.** Проведемо медіану BM до гіпотенузи AC прямокутного трикутника ABC (рис. 13, *б*). «Подвоїмо» медіану, тобто продовжимо BM до точки D так, що $MD = BM$, і проведемо відрізки AD і CD. З рівності пар трикутників AMB і CMD, AMD і CMB, а також того, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°, випливає, що кут BAD — прямий. Тому трикутники ABC і BAD рівні за першою ознакою рівності трикутників, звідки випливає, що $AC = BD$. Звідси отримуємо, що медіана BM дорівнює половині гіпотенузи AC. **55.** 20°, 70°, 90°. **56.** а) $\angle A = 50°$, $\angle BCH = 50°$, $\angle BOC = 110°$, $\angle BOH = 70°$, $\angle ACH = 40°$, $\angle COD = 70°$, $\angle CDO = 70°$, $\angle BDA = 110°$. б) Трикутник DCO рівнобедрений. в) Не залежить. **59.** 90° і 35°. **60.** а) 90°, 63°. б) 18 см. в) 36°. **61.** $90° - 2\alpha$. **62.** а) 90°, 70°, 20°. б) 45°. в) 55°. **63.** а) 90°, 55°, 35°. б) 6 см. в) 45°. г) 10°. д) 55°, 35°. **64.** а) 90°. б) Відрізок BK може бути висотою або медіаною. **66.** Продовжте медіану BM до точки K так, що $KM = BM$ (рис. 14). З першої ознаки рівності трикутників випливає, що $\Delta CMB = \Delta AMK$, звідки випливає, що $AK = BC$ і $\angle CBM = \angle AKM$. Отже, у трикутнику KAB проти сторін, що дорівнюють відповідно AB і BC, лежать кути, що дорівнюють відповідно кутам CBM і ABM. **68.** Для прямокутних трикутників ABH і CBH справедливі рівності $\angle ABH = 90° - \angle A$, $\angle CBH = 90° - \angle C$. Віднімаючи від першої рівності другу, отримуємо $\angle ABH - \angle CBH = \angle C - \angle A$. З умови $AB > BC$ випливає, що $\angle C > \angle A$, оскільки проти більшої сторони трикутника лежить більший кут. Отже, $\angle ABH > \angle CBH$. **74.** 36°. **75.** 54°. **76.** 90°. **77.** 54°. **79.** 50°. **80.** 110°. **81.** 20°. **82.** 90°. **83.** 60°. **84.** Трикутники ANB, BNC, BCM, ANC, NCD (друга буква в запису трикутників означає вершину, що лежить проти основи). **85.** Трикутник NCD. **87.** Є. **88.** Є. **89.** Є.

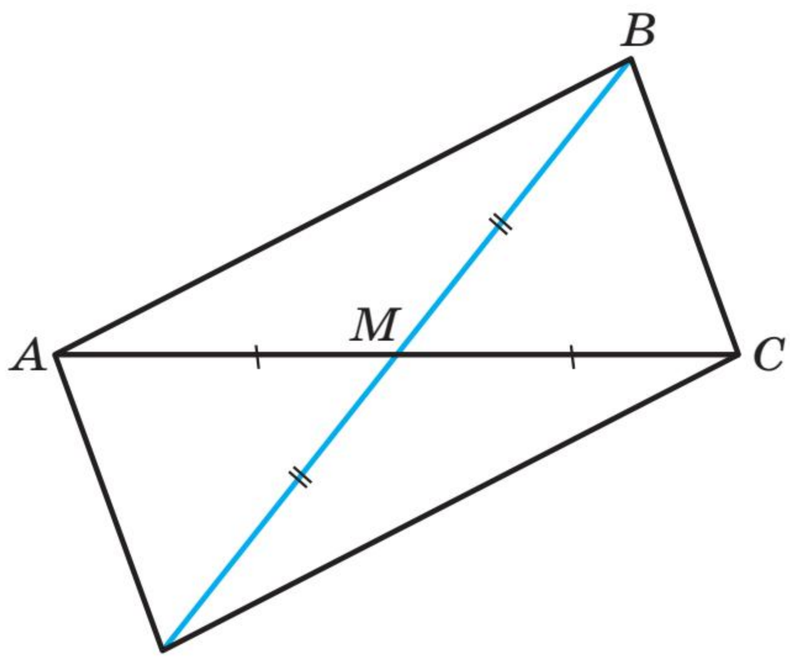


Рис. 14

ГЛАВА 7. КОЛО. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

1. Ні. Подвоєному радіусу кола. **2.** Так. Подвоєному радіусу круга. **3.** Хордами є відрізки AB, BC, AC і BD. Діаметрами є тільки відрізки AC і BD. **5.** Можна побудувати другий діаметр і знайти точку перетину двох діаметрів. Можна також знайти середину одного побудованого діаметра. **13.** 40°. **14.** $\angle ABD = 50°$, $\angle COD = 40°$. **16.** $\angle ABO = \alpha$, $AOD = 2\alpha$, $\angle AOB = 180° - 2\alpha$, $\angle OAD = \angle ODA = 90° - \alpha$. **17.** б) $\angle BOC = \alpha$, $\angle OBA = \angle OAB = 2\alpha$, $\angle AOB = 180° - 4\alpha$, $\angle AOD = 3\alpha$, $\angle OAD = \angle ODA = 90° - 1{,}5\alpha$. в) $AD = 2$ см. **21.** б) $\angle OAK = \angle OBK = 90°$, $\angle AKO = \angle BKO = 30°$, $\angle AKB = 60°$. $\angle BOK = \angle AOK = 60°$. в) $R = 4$ см. **22.** $\angle OBC = \angle OBK = \angle OAD = \angle OAK = 90°$; $\angle COB = \angle DOA = 50°$; $\angle BCO = \angle ADO = 40°$; $\angle CKD = 50°$. **24.** а) $CB = BD = CD$; $NB = NM$; $KD = KM$. б) 3 см. в) 6 см.

33. Доведемо, що відстані від довільних точок M і N прямої b до паралельної їй прямої a рівні. Згідно з означенням відстані від точки до прямої для цього потрібно довести, що $MP = NQ$, де P і Q — основи перпендикулярів, проведених з точок M і N до прямої a відповідно (рис. 15). Відрізки MP і NQ перпендикулярні прямій b, оскільки пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна і до другої прямої. Проведемо відрізок MQ. Кути NMQ і PQM рівні як різносторонні при січній MQ, що перетинає паралельні прямі a і b. Тому прямокутні трикутники MPQ і QNM рівні за гіпотенузою і гострим кутом. Звідси випливає, що $MP = NQ$. **34.** Нехай точки M і N розташовані по один бік від прямої a, до того ж відстані від цих точок до прямої a рівні. Згідно з означенням відстані від точки до прямої це означає, що $MP = NQ$, де P і Q — основи перпендикулярів, проведених з точок M і N до прямої a відповідно (рис. 15). Відрізки MP і NQ паралельні, оскільки вони обидва перпендикулярні до прямої a. Проведемо відрізок MQ. Отже, кути MQN і QMP рівні як різносторонні при січній MQ, що перетинає паралельні прямі MP і NQ. Тому трикутники MPQ і QNM рівні за двома сторонами і кутом між ними. Звідси випливає, що $\angle QMN = \angle MQP$. Ці кути є різносторонніми при січній MQ, що перетинає прямі a і MN. Згідно з ознакою паралельності прямих звідси випливає, що $MN \parallel a$. **35.** Проводимо коло довільного радіуса з центром у вершині кута A (рис. 16, *а*). Вершина кута A і точки B та C перетину кола зі сторонами кута є вершинами рівнобедреного трикутника BAC з кутом A між бічними сторонами. Будуємо за трьома сторонами такий самий рівнобедрений трикутник, вершина кута A якого збігається з початком променя MN, а одна з бічних сторін лежить на цьому промені (рис. 16, *б*).

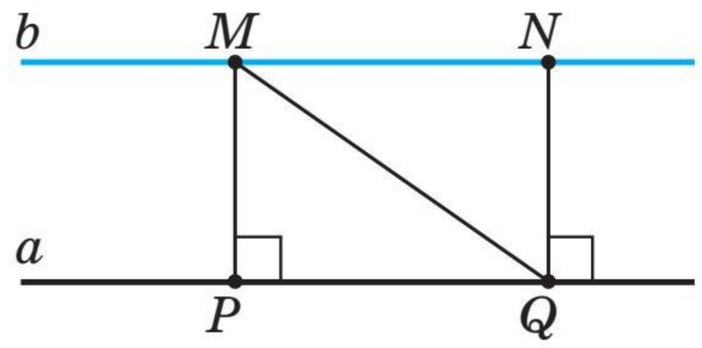


Рис. 15

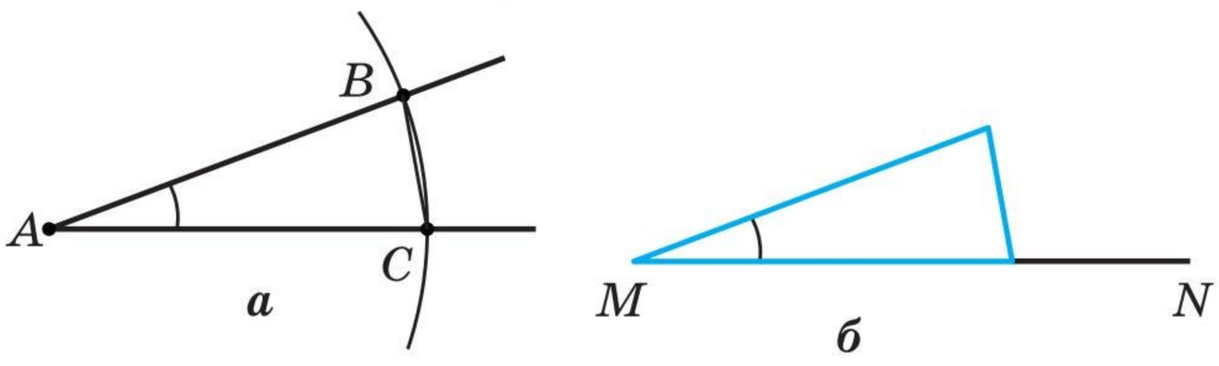


Рис. 16

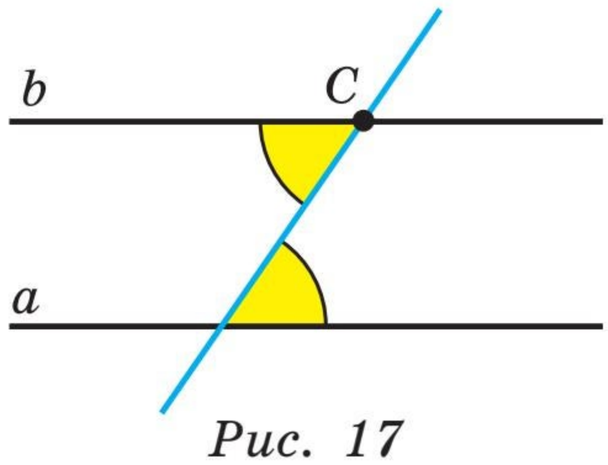
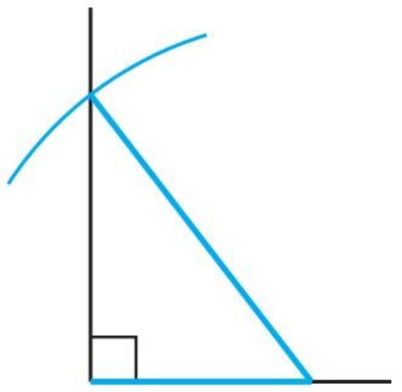


Рис. 17

38. Побудову можна виконати різними способами, використовуючи ознаку паралельності прямих, а також побудову прямої, перпендикулярної до даної, або побудову кута, що дорівнює даному. Один з можливих способів показаний на рисунку (рис. 17). **39.** Побудуйте прямий кут і відкладіть на його сторонах відрізки, що дорівнюють заданим катетам. **40.** Див. рис. 18. Побудуйте прямий кут і відкладіть на одній його стороні заданий катет. Відтак за допомогою циркуля знайдіть на другій стороні прямого кута точку, розташовану від другого кінця заданого катета на відстані, що дорівнює довжині заданої гіпотенузи. **41.** Оскільки медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, то задачу можна звести або до побудови прямокутного трикутника за катетом і гіпотенузою, або до побудови рівнобедреного трикутника за основою і бічною стороною.


Рис. 18

42. Див. рис. 19. Побудуйте спочатку прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою. **43.** Див. рис. 20. Побудуйте прямий кут і відкладіть на одній його стороні заданий катет. Відтак відкладіть від другого кінця цього катета кут, що дорівнює заданому, і знайдіть точку перетину сторони цього кута зі стороною прямого кута.

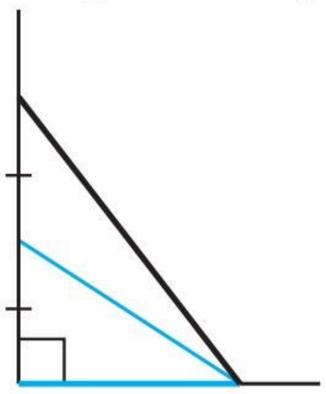


Рис. 19

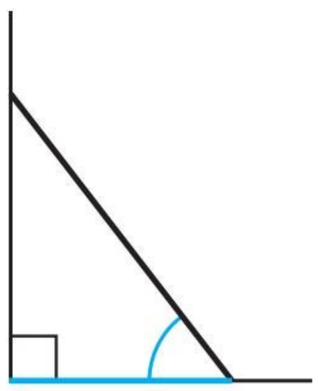


Рис. 20

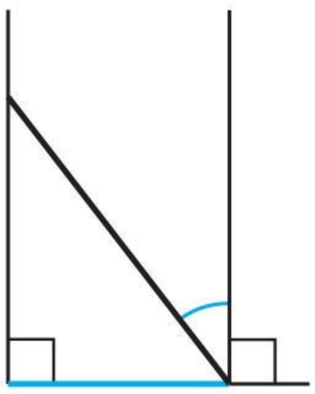


Рис. 21

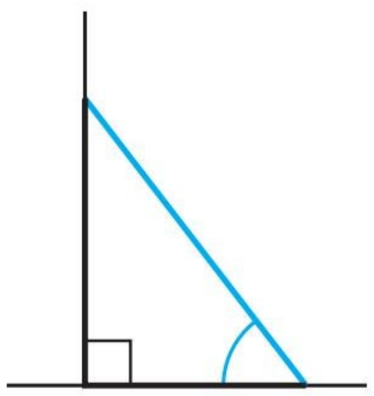


Рис. 22

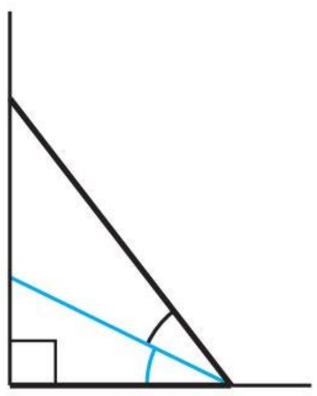


Рис. 23

44. Задачу можна звести до попередньої, якщо побудувати кут, *прилеглий* до заданого катета. Для цього можна скористатися тим, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює прямому куту. Отже, якщо побудувати прямий кут і відкласти всередині нього кут, рівний заданому протилежному гострому куту, то при цьому утворюється кут, що дорівнює прилеглому гострому куту (рис. 21). **45.** Див. рис. 22. Побудуйте гострий кут, що дорівнює заданому. На одній з його сторін від вершини кута відкладіть відрізок, що дорівнює заданій гіпотенузі, після того з другого кінця цього відрізка проведіть перпендикуляр до другої сторони побудованого гострого кута. **46.** Оскільки медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, задачу можна звести або до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і гострим кутом, або до побудови рівнобедреного трикутника за бічною стороною і кутом при основі. **47.** Див. рис. 23. Побудуйте спочатку прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом. **48.** Див. рис. 24. Побудуйте спочатку трикутник за двома сторонами і кутом між ними (45°). **49.** Див. рис. 25. Скористайтеся тим, що гіпотенуза є діаметром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, а також тим, що геометричне місце точок площини, що розташовані на даній відстані від даної прямої і лежать по один бік від неї, — це пряма, паралельна даній. Доведіть, що два побудовані трикутники рівні. **50.** Див. рис. 26, на якому AD — заданий периметр, CD — заданий катет, BKC — побудований прямокутний трикутник. **51.** Див. рис. 27, на якому AD — заданий периметр, AB — задана гіпотенуза, $BK = AB$, $\angle ADK = 45°$, BKC — побудований прямокутний трикутник.

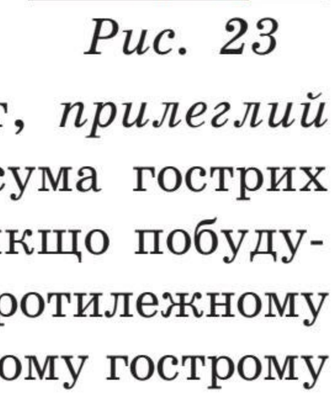


Рис. 24

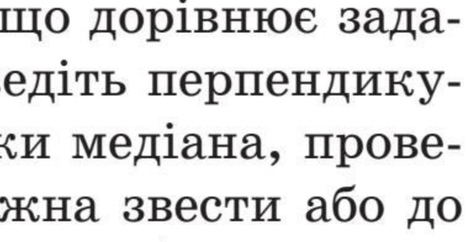


Рис. 25

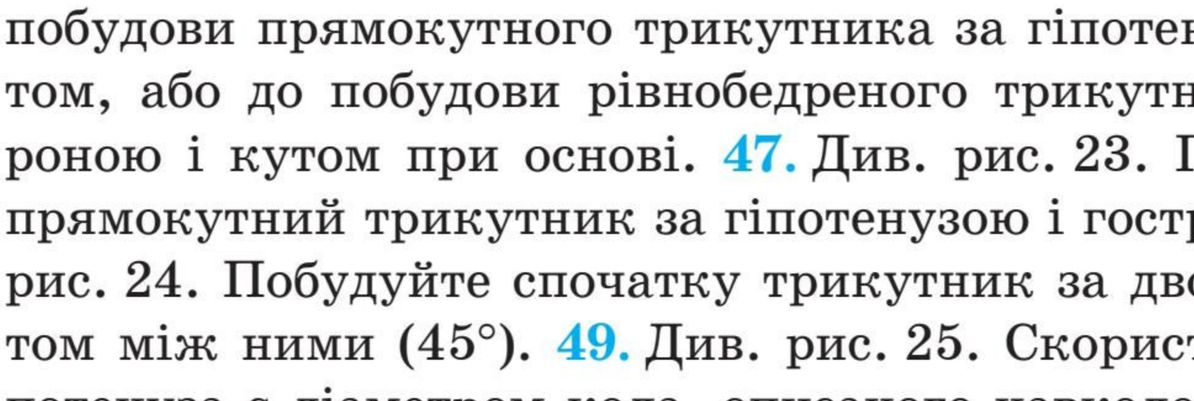


Рис. 26

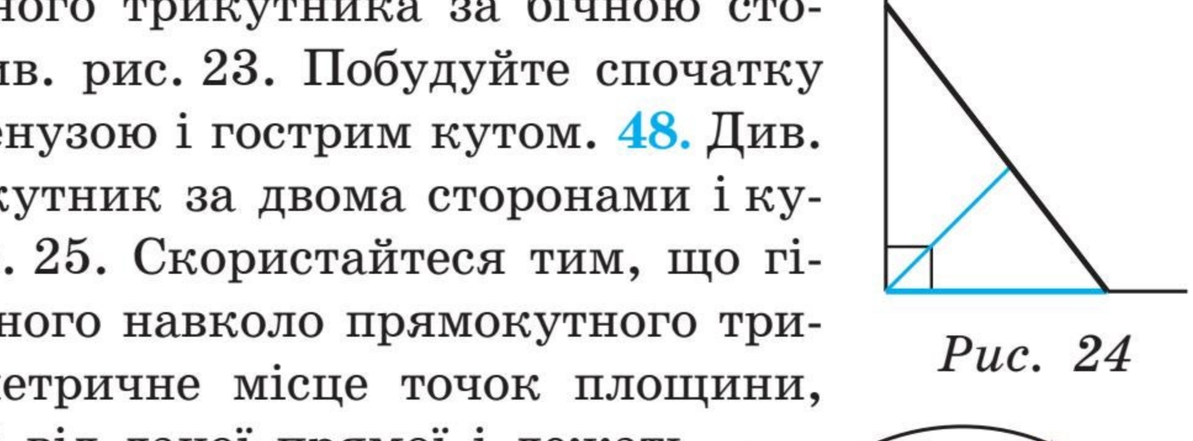


Рис. 27

52. Див. рис. 28, на якому AD — заданий периметр, кут DAK дорівнює половині заданого гострого кута, $\angle ADK = 45°$, BKC — побудований прямокутний трикутник із заданим гострим кутом CBK.

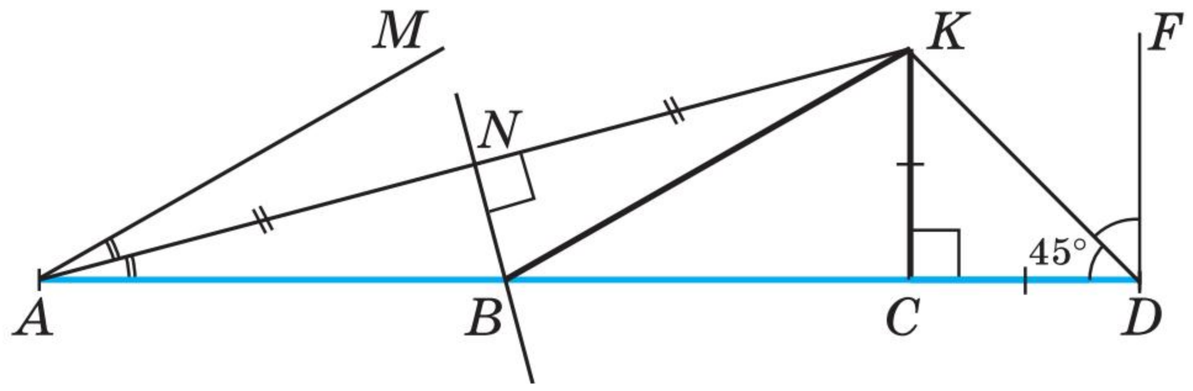


Рис. 28

53. Задачу можна звести до побудови трикутника за трьома сторонами: для цього потрібно врахувати, що бічні сторони рівнобедреного трикутника рівні. **54.** Задачу можна звести до побудови трикутника за стороною і прилеглими до неї кутами: для цього потрібно врахувати, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. **55.** Побудуйте серединний перпендикуляр до основи і відкладіть на ньому відрізок, що дорівнює заданій бісектрисі (медіані або висоті). **56.** Задачу можна звести до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і катетом: гіпотенузою є задана бічна сторона, а катетом — задана бісектриса (медіана або висота). **57.** Задачу можна звести до побудови прямокутного трикутника за катетом і протилежним гострим кутом: для цього потрібно спочатку розділити навпіл заданий кут при вершині, протилежній основі. **58.** Задачу можна звести до побудови трикутника за трьома сторонами: бічною стороною, половиною бічної сторони і медіаною, проведеною до бічної сторони. **59.** Спочатку можна побудувати кут при основі потрібного рівнобедреного трикутника — для цього потрібно побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом: гіпотенузою є задана основа, а катетом — задана висота, проведена до бічної сторони. Після цього задачу можна звести до побудови рівнобедреного трикутника за основою і кутом при основі. **60.** Задачу можна звести до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і катетом: гіпотенузою є задана медіана, а катетом — відрізок, що дорівнює 3/4 основи. Щоб обґрунтувати це, доведіть, що основа перпендикуляра, проведеного з середини гіпотенузи до катета, ділить цей катет навпіл. **61.** Спочатку можна побудувати рівнобедрений трикутник AB_1C_1 з довільною основою AC_1 і заданим кутом A при основі. Відтак проведемо в цьому трикутнику бісектрису кута A і відкладемо на ній відрізок AD, що дорівнює заданій бісектрисі. Доведіть, що якщо через точку D провести пряму, паралельну B_1C_1, то вона перетне прямі AB_1 і AC_1 в точках, що є вершинами B і C потрібного рівнобедреного трикутника ABC. **62.** Відкладіть від відрізка, що дорівнює заданій стороні, заданий кут і відкладіть на бісектрисі цього кута відрізок, що дорівнює заданій бісектрисі. Проведіть пряму через другий кінець відрізка, що дорівнює стороні трикутника, і другий кінець відрізка, що дорівнює заданій бісектрисі. **63.** Задачу можна звести до побудови трикутника за двома сторонами і кутом між ними: сторонами є задана сторона і медіана, а кутом — кут між ними. **64.** Відкладіть від відрізка, що дорівнює заданій стороні, заданий кут. Проведіть пряму, що паралельна побудованій стороні та розташована від цієї сторони на відстані, що дорівнює заданій висоті. **65.** Задачу можна звести до побудови прямокутно-

го трикутника за гіпотенузою і катетом: гіпотенузою є задана медіана, а катетом — задана висота. **66.** Задачу можна звести до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і катетом: гіпотенузою є задана друга сторона, а катетом — задана висота. **67.** Задачу можна звести до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою і катетом: гіпотенузою є задана бісектриса, а катетом — задана висота. Відтак відкладіть від заданої бісектриси трикутника в різні сторони половини заданого кута і знайдіть точки перетину двох побудованих променів з прямою, на якій лежить другий катет побудованого прямокутного трикутника. **68.** Задачу можна звести до побудови трикутника за трьома сторонами: сторонами є сторона, до якої не проведена медіана, задана медіана і половина іншої сторони. **69.** Задачу можна звести до побудови трикутника за трьома сторонами. Для цього скористайтеся «подвоєнням» медіани. **70.** На рис. 29 показаний один із двох можливих розв'язків. Тут AC — задана сторона, BH — задана висота, AM — задана медіана, $BK \parallel AC$, $AK = 2AM$, ABC — побудований потрібний трикутник. Знайдіть самостійно другий розв'язок і доведіть, що задача має розв'язки, якщо задана висота менша від подвоєної заданої медіани.

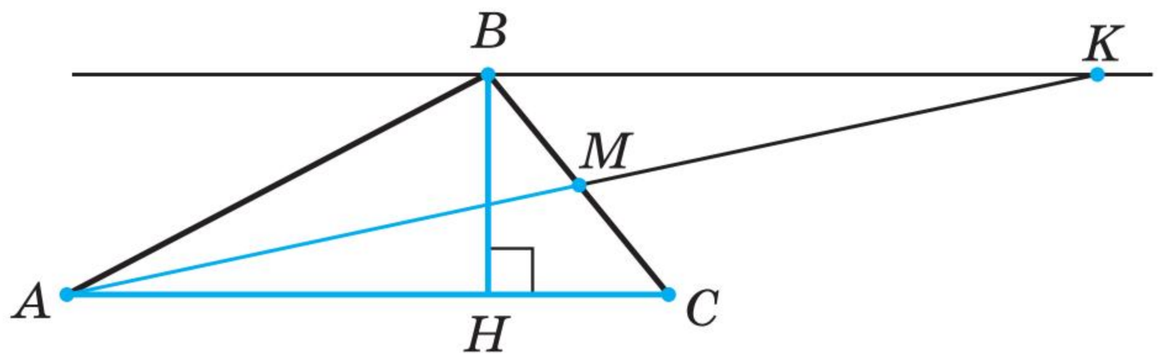


Рис. 29

71. Задачу можна звести до побудови двох прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом. Задача має єдиний розв'язок, якщо одна з двох даних сторін дорівнює висоті, проведеній до третьої сторони (тоді побудований трикутник прямокутний), а також у випадку, якщо довжини двох даних сторін рівні (тоді побудований трикутник рівнобедрений). Доведіть, що якщо ці дві умови не виконані, то задача має два розв'язки, до того ж хоча б один з двох побудованих трикутників — тупокутний. **72.** Скористайтеся тим, що всі радіуси того самого кола рівні, а також тим, що відрізки дотичних до кола, що сполучають спільну точку дотичних з точками дотику, рівні. Рівнобедреними є трикутники KO_1A, BO_1A, NO_2A, CO_2A, BMA, CMA. **73.** Скористайтеся тим, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на стороні цього трикутника, то даний трикутник прямокутний; тим, що якщо медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то даний трикутник прямокутний; тим, що дотична до кола перпендикулярна до радіуса кола, проведеного в точку дотику. Щоб довести, що кут KAN — прямий, доведіть, що кути KAB і NAC прямі. Прямокутними є трикутники KAB, NAC, BAC, KBC, NCB, KAN. **74.** Скористайтеся тим, що дотична до кола перпендикулярна до радіуса кола, проведеного в точку дотику. Прямими є кути O_1AM і O_2AM. **75.** Скористайтеся тим, що $O_1A \perp AM$, $O_2A \perp AM$. Лежать. **76.** Скористайтеся тим, що кути CAB і BAK прямі. Лежать. **77.** Лежать. **78.** Скористайтеся тим, що прямі, перпендикулярні до однієї прямої, паралельні. $KB \parallel NC$. **79.** Скористайтеся властивістю вертикальних кутів, властивістю рівнобедреного трикутника, а також рівністю розгорнутих кутів (або теоремою про суму кутів трикутника). $\angle O_1KA = \angle O_1AK = \angle O_2CA = \angle O_2AC$, $\angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle O_2NA = \angle O_2AN$, $\angle KO_1A = \angle CO_2A$, $\angle BO_1A = \angle NO_2A$. **80.** Доведіть спочатку, що трикутники A_1CB, CB_1A і BAC_1 дорівнюють трикутнику ABC за другою

ознакою рівності трикутників, використовуючи рівність різносторонніх кутів при січній, що перетинає паралельні прямі. Звідси випливає, що точки A, B і C є відповідно серединами сторін трикутника $A_1B_1C_1$. Враховуючи також, що пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна і до другої, отримуємо, що AA_2, BB_2 і CC_2 — серединні перпендикуляри до сторін трикутника $A_1B_1C_1$.

ГЛАВА 8. «НЕ СВЯТІ ГОРЩИКИ ЛІПЛЯТЬ»

5. Див. рисунок 30, *а–в*.

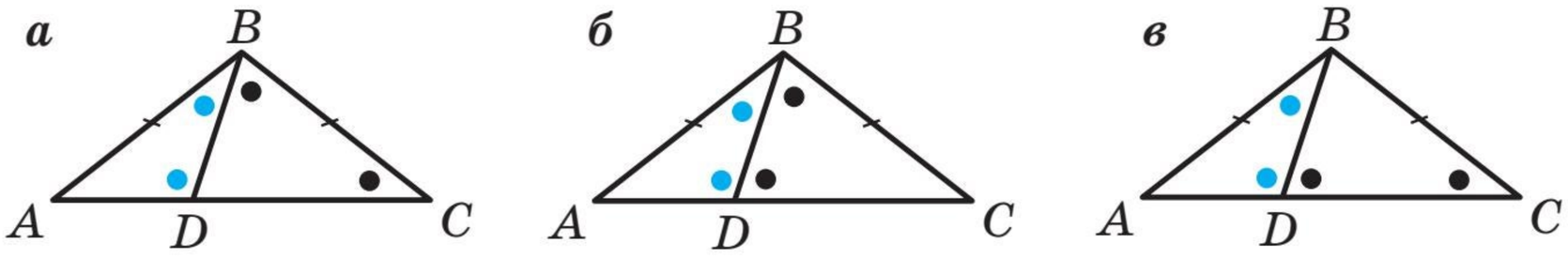


Рис. 30

6. Див. рисунок 31, *а–в*.

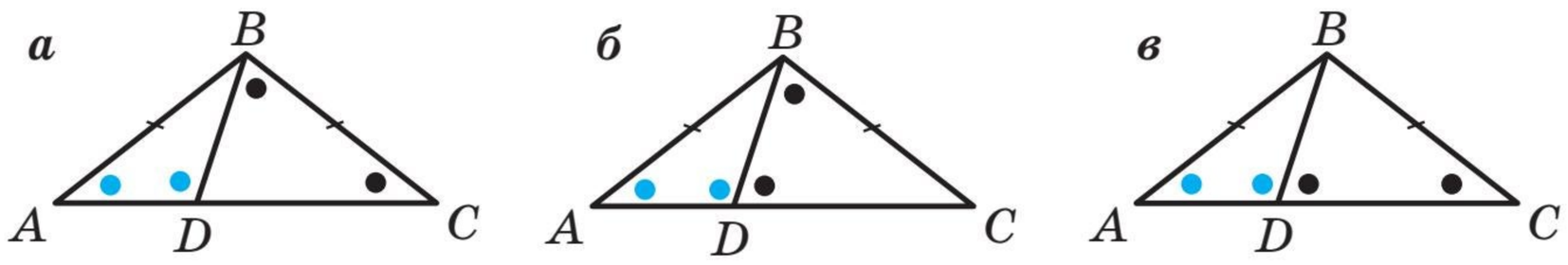


Рис. 31

7. Залишились такі три варіанти (рис. 32, *а–в*).

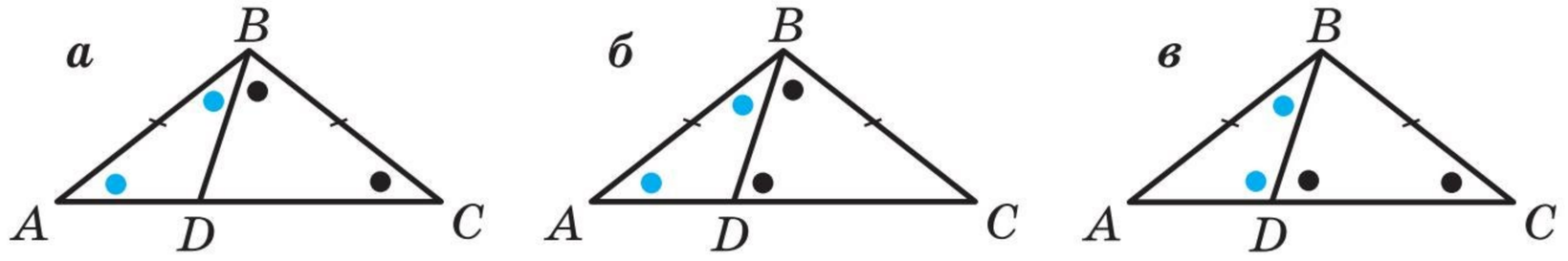


Рис. 32

9. Див. рисунок 33. **11.** Див. рисунок 34. **12.** Див. рисунок 35. **13.** Див. рисунки 36, *а–и*.

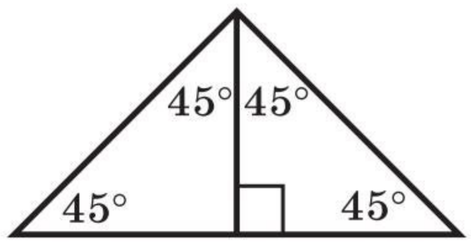


Рис. 33

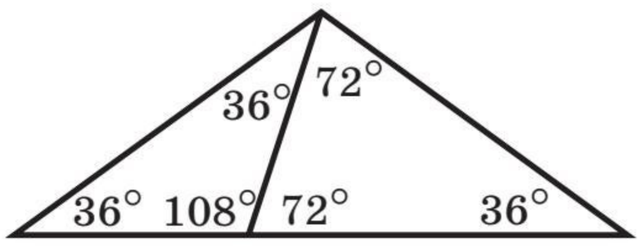


Рис. 34

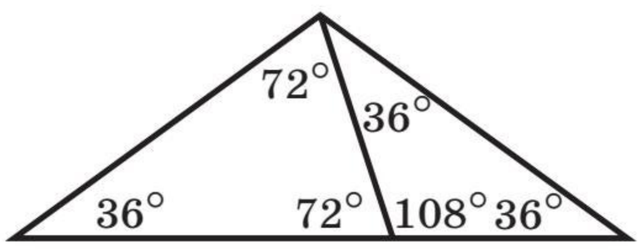


Рис. 35

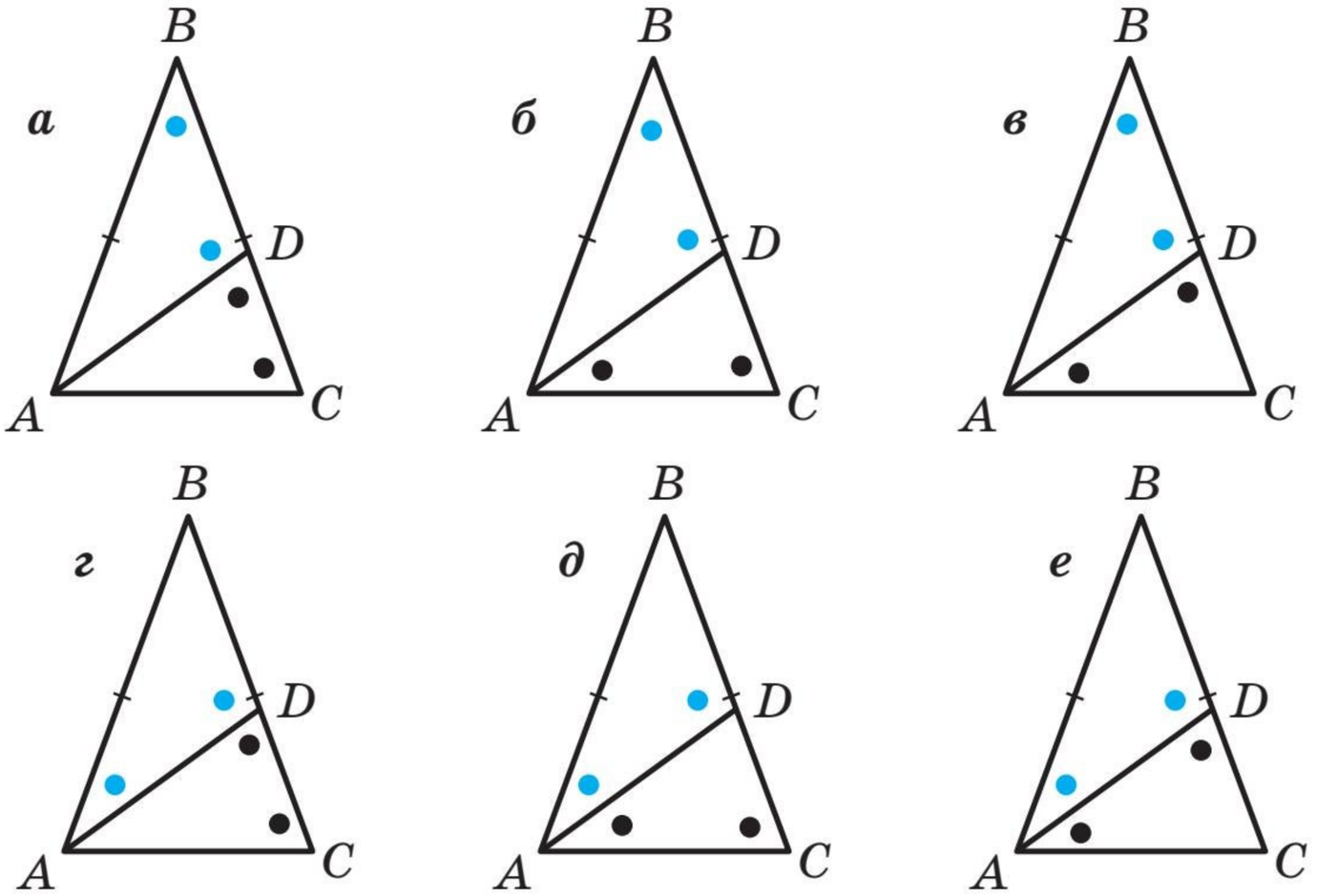


Рис. 36

14. Можливі тільки випадки, зображені на рисунках 36, *ж*, *и*.

15. Див. рисунки 37, *а*, *б*.

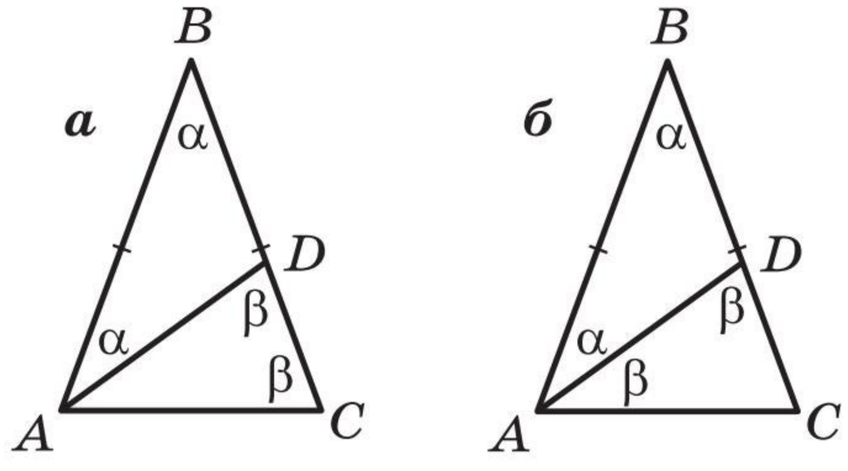


Рис. 37

16. Див. рисунки 38, *а*, *б*.

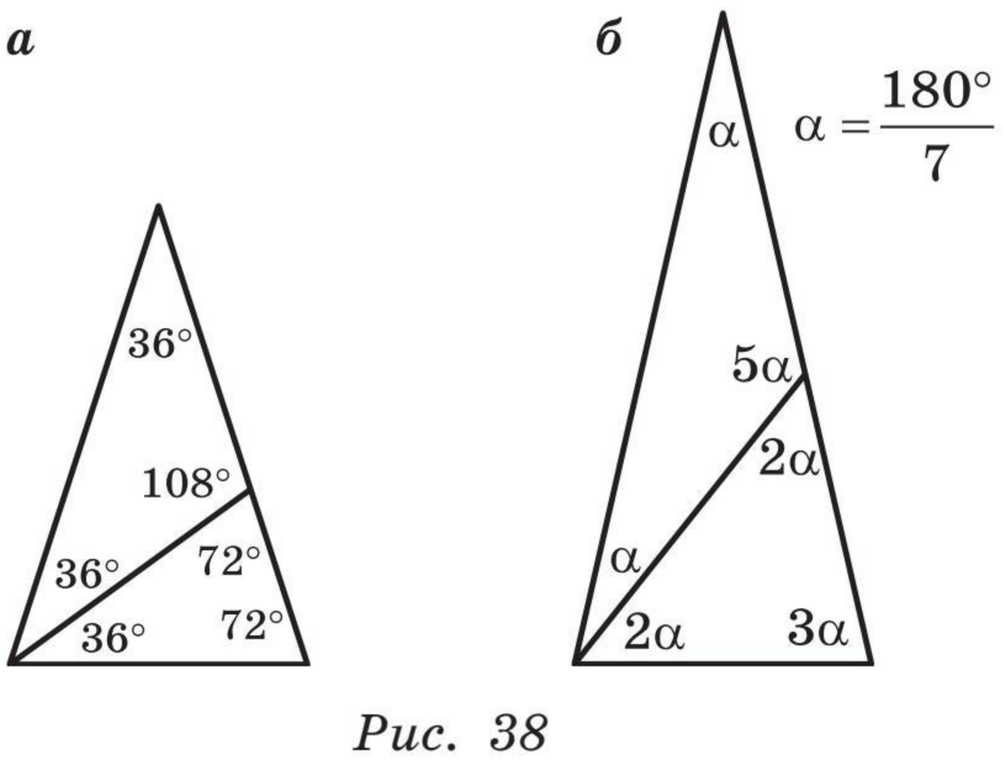


Рис. 38

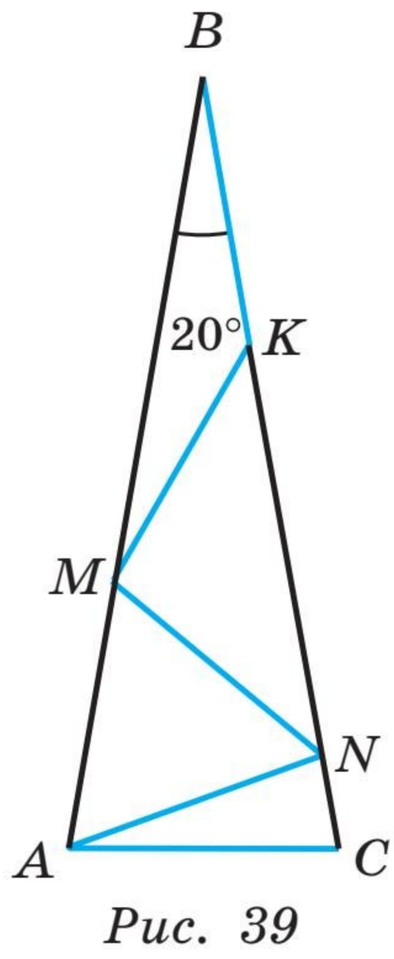


Рис. 39

18. Кути при основі трикутника BNM дорівнюють $\frac{180°}{7}$, кути при основі трикутника NMC дорівнюють $\frac{2 \cdot 180°}{7}$, кути при основі трикутників ABC і MCA дорівнюють $\frac{3 \cdot 180°}{7}$. **19.** Див. рис. 39. Кути при основі рівнобедрених трикутників дорівнюють відповідно $\frac{180°}{2n+1}$, $\frac{2 \cdot 180°}{2n+1}$, $\frac{3 \cdot 180°}{2n+1}$, … $\frac{n \cdot 180°}{2n+1}$. **21.** а) 2, 4, 7 або 22. б) 36°, 20°, 12° або 4°. **22.** а) 10°, 160°, 10°. б) 50°, 80°, 50°. в) 70°, 30°, 80°. г) 20°, 150°, 10°.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксіома 12
— паралельності прямих 14
Аналіз (задачі на побудову) 199

Бісектриса кута 27
— трикутника 53

Вершина кута 23
— трикутника 50
Висновок теореми 85
Висота трикутника 54
Відрізки паралельні 37
— перпендикулярні 37
— рівні 34
Відрізок 34
Відстань від точки до прямої 156
— між паралельними прямими 157
— між точками 34
Властивість вертикальних кутів 30
— дотичної 186
Властивості зовнішнього кута трикутника 130
— кола 180
— паралельних прямих 113
— рівнобедреного трикутника 78
Внутрішня точка відрізка 34
— область кута 26

Геометрія 6
Геометричне місце точок 188
Гіпотенуза 123
Градус 25
Градусна міра кута 25

Діаметр кола 181
Довжина відрізка 34
Дотична до кола 185

Катет 123
Кінці відрізка 34
Коло 180
— вписане в трикутник 195
— описане навколо трикутника 190
Контрприклад 60
Круг 181
Кут 23
— гострий 29
— зовнішній трикутника 129
— між прямими 33
— прямий 29
— розгорнутий 24
— трикутника 51
— трикутника зовнішній 129
— тупий 29
Кути вертикальні 30
— відповідні 115
— односторонні 115
— рівні 24
— різносторонні 110
— суміжні 29

Ламана 152
Лінія 8

Медіана трикутника 53
Метод від супротивного 13
— геометричних місць точок 189

Нерівність трикутника 145

Одиниця довжини
Ознака дотичної до кола 186
— рівності трикутників перша 58
— — — друга 60
— — — третя 90
Ознаки паралельності прямих 110
— рівнобедреного трикутника 83
— рівності прямокутних трикутників 158
— рівності трикутників 58

Основа перпендикуляра 37
— рівнобедреного трикутника 76

Паралелограм 120
Периметр трикутника 55
Перпендикуляр 37
Півплощина 26
Побудова бісектриси кута 97
— кута, що дорівнює даному 199
— перпендикуляра до відрізка 95
— прямої, перпендикулярної до даної 96
— серединного перпендикуляра відрізка 94
— трикутника за сторонами 197
— — за двома сторонами і кутом між ними 199
— — за стороною і прилеглими кутами 200
Поділ відрізка навпіл 94
Похила 157
Промені доповняльні 22
— паралельні 23
Промінь 22
Пряма 9
Прямі паралельні 13
— перпендикулярні 32

Радіус кола 180

Середина відрізка 35
Серединний перпендикуляр відрізка 94
Система СІ 34
Січна 110
Сторони кута 23
— трикутника 20
Сума кутів трикутника 109

Теорема 12
— висновок 84
— обернена 85
— умова 84
Теореми взаємно обернені 84
Точка 8
— дотику до кола 185
— перетину бісектрис трикутника 194
— перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника 191
Трикутник 51
— гострокутний 123
— прямокутний 123
— рівнобедрений 76
— рівносторонній 77
— різносторонній 77
— тупокутний 123
Трикутники рівні 57

Умова теореми 85

Фігури рівні 24
— найпростіші геометричні 8

Хорда кола 181

Центр кола 180
— круга 181
— — вписаного в трикутник 194
— — описаного навколо трикутника 191

Чотирикутник 119

ЗМІСТ

Особливості цієї книжки. Як її можна використовувати? 3
Що таке геометрія 6

ГЛАВА 1. ТОЧКИ І ПРЯМІ 8
1. Геометричні точки і геометричні прямі 8
Як перевірити прямизну? (11). Теореми й аксіоми (12). Доведення від супротивного (13).
2. Паралельні прямі 13
Аксіома паралельних прямих (14)
Про що ми дізналися? 15
3. Ставимо запитання до умови задачі 16
Трирівневі завдання для домашніх та самостійних робіт 18
Паралельні прямі (19)
Видатні українські математики. Марина Сергіївна В'язовська 20
Видатні українські математики. Олексій Васильовий Погорєлов 21

ГЛАВА 2. ПРОМЕНІ, КУТИ І ВІДРІЗКИ 22
1. Промені 22
2. Кути 23
Порівняння і вимірювання кутів (24). Додавання кутів (27). Прямий, гострий і тупий кути (28)
3. Суміжні та вертикальні кути 29
Суміжні кути (29). Вертикальні кути (30). Перший із семи мудреців (31). Перпендикулярні прямі (32). Кут між двома прямими (33).
4. Відрізки 34
Відрізок. Порівняння і вимірювання відрізків (34). Середина відрізка (35). Паралельні й перпендикулярні відрізки. Перпендикуляр до прямої (37).
Про що ми дізналися? 38
5. Ставимо запитання до умови задачі 38
Трирівневі завдання для домашніх та самостійних робіт 41
Промені й кути (41). Суміжні й вертикальні кути (44). Відрізки (45).
Видатні українські математики. Михайло Пилипович Кравчук 48
Видатні українські математики. Мирон Онуфрійович Зарицький 49

ГЛАВА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТРИКУТНИКА. РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ 50
1. Трикутник та його елементи 50
Елементи трикутника (53). Периметр трикутника (55)
2. Рівні трикутники 55
Властивості рівних трикутників (56)
3. Перша ознака рівності трикутників 58
4. Друга ознака рівності трикутників 60
Отримуємо «приховану» інформацію в кілька кроків (61)
Про що ми дізналися? 66

5. Ставимо запитання до умови задачі 67
Трирівневі домашні або самостійні завдання 69
Трикутник і його елементи. Рівні трикутники (69). Перша і друга ознаки рівності трикутників (70).
Видатні українські математики. Микола Андрійович Чайковський 74
Видатні українські математики. Веніамін Федорович Каган.....74
Видатні українські математики. Георгій Феодосійович Вороний 75
Видатні українські математики. Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко ...75
ГЛАВА 4. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК 76
1. Знайомство з рівнобедреним трикутником..... 76
2. Властивості рівнобедреного трикутника 78
Властивості рівностороннього трикутника (81). Додаткові властивості рівнобедреного трикутника (81). Деякі ознаки рівності рівнобедрених трикутників (82).
3. Ознаки рівнобедреного трикутника..... 83
Навіщо потрібні ознаки рівнобедреного трикутника? (83). Два кути рівні (83). Взаємно обернені теореми (84). Медіана збігається з висотою (86). Бісектриса збігається з висотою (86). Медіана збігається з бісектрисою (86). Ознаки рівностороннього трикутника (87)
4. «Паспорт» рівнобедреного трикутника..... 88
5. Третя ознака рівності трикутників 90
Трикутник — жорстка фігура (93)
6. Геометричні побудови за допомогою циркуля і лінійки 94
Серединний перпендикуляр до відрізка (94). Як побудувати серединний перпендикуляр до даного відрізка? (95). Як побудувати пряму, що перпендикулярна до даної прямої і проходить через задану точку? (96). Як побудувати бісектрису кута? (97)
Про що ми дізнались? 98
7. Ставимо запитання до умови задачі..... 98
Секрет розв'язання важких задач (99). Як народжуються задачі? (100)
Трирівневі домашні або самостійні завдання.....103
Властивості рівнобедреного трикутника (103). Ознаки рівнобедреного трикутника (105). Третя ознака рівності трикутників (108)
ГЛАВА 5. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ 109
1. Гіпотеза про суму кутів трикутника.....109
2. Рівність різносторонніх кутів — ознака паралельності прямих і властивість паралельних прямих 110
Рівність різносторонніх кутів — ознака паралельності прямих (110). Рівність різносторонніх кутів — властивість паралельних прямих (113)
3. Інші ознаки паралельності прямих і властивості паралельних прямих.....114
Рівність відповідних кутів (114). Сума односторонніх кутів дорівнює 180° (115)

4. «Паспорт паралельних прямих».....118
Застосовуємо властивості паралельних прямих і ознаки паралельності прямих (118). Паралельні прямі, перетнуті паралельними січними (118). Кути з відповідно паралельними сторонами (121)
5. Сума кутів трикутника.....122
Теорема про суму кутів трикутника (122). Гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники (123). Кути з відповідно перпендикулярними сторонами (129). Зовнішній кут трикутника (129)
Про що ми дізналися?.....134
6. Ставимо запитання до умови задачі.....135
Трирівневі домашні або самостійні завдання.....139
Паралельні прямі (139). Сума кутів трикутника (141)

ГЛАВА 6. НЕРІВНОСТІ В ТРИКУТНИКУ. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК.....144
1. Нерівність трикутника.....144
Для чого потрібні нерівності? (144). Співвідношення між сторонами і кутами трикутника (146). Нерівність трикутника (149). Порівняння довжин ламаної і відрізка (152). Світло обирає найкоротший шлях (153)
2. Відстань від точки до прямої. Перпендикуляр і похила.....155
Відстань від точки до прямої та відстань між паралельними прямими (155). Перпендикуляр, похила та проєкція похилої (157)
3. Прямокутний трикутник.....158
Основні ознаки рівності прямокутних трикутників (158). Додаткові ознаки рівності прямокутних трикутників (161). Додаткові ознаки рівності трикутників (162). Прямокутний рівнобедрений трикутник (162). Прямокутний трикутник з кутом 30° (163). Властивість і ознака прямокутного трикутника, пов'язані з медіаною, проведеною до гіпотенузи (164). Додаткові ознаки рівності прямокутних трикутників (166)
Про що ми дізналися?.....167
4. Ставимо запитання до умови задачі.....167
Взаємне розташування медіани, бісектриси і висоти в довільному трикутнику (167). Взаємне розташування медіани, бісектриси та висоти в прямокутному трикутнику (170)
Трирівневі домашні або самостійні завдання.....175
Нерівність трикутника (175). Прямокутний трикутник (176)

ГЛАВА 7. КОЛО. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ.....180
1. Коло і круг.....180
Хорда, діаметр і дуга кола (181). Дотична (185)
2. Геометричне місце точок. Метод двох геометричних місць.....188
Коло як геометричне місце точок (188). Метод двох геометричних місць (189). Серединний перпендикуляр до відрізка як геометричне місце точок (190). Коло, описане навколо трикутника (190). Бісектриса кута як геометричне місце точок (193). Коло, вписане в трикутник (193). Пряма, паралельна даній, як геометричне місце точок (195)
3. Основні геометричні побудови.....196
Побудова трикутника за трьома сторонами (197). Як розв'язувати задачі на побудову? (199). Побудова кута, що дорівнює даному (199). Побудова

трикутника за двома сторонами і кутом між ними (200). Побудова трикутника за стороною і прилеглими кутами (200). Побудова прямої, що паралельна даній і проходить через задану точку (200)
4. Побудова трикутників 200
Побудова прямокутного трикутника за двома елементами (201). Побудова рівнобедреного трикутника за двома елементами (202). Побудова трикутника за трьома елементами (202)
Про що ми дізналися? 203
5. Ставимо запитання до умови задачі.....204
Перетин висот трикутника (або їх продовжень) (205)
Трирівневі домашні завдання або самостійні роботи 206
Коло і круг (206). Метод двох геометричних місць (208). Геометричні побудови (209)

ГЛАВА 8. «НЕ СВЯТІ ГОРЩИКИ ЛІПЛЯТЬ»
(матеріали для проєктно-дослідницької діяльності) **210**
1. Поділ рівнобедреного трикутника на інші рівнобедрені трикутники 210
Поділ рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною, протилежною до основи (210). Поділ рівнобедреного трикутника на два інші рівнобедрені трикутники відрізком, один кінець якого збігається з вершиною при основі (214). Один зі способів поділу рівнобедреного трикутника на *n* рівнобедрених трикутників (215)
2. Два чудові рівнобедрені трикутники 216
Рівнобедрений трикутник з кутами 80°, 20°, 80° (216). Рівнобедрений трикутник з кутами 50°, 80°, 50° (217)

ВІДПОВІДІ Й РОЗВ'ЯЗКИ 221
Глава 1. Точки і прямі 221
Глава 2. Промені, кути і відрізки 221
Глава 3. Елементи трикутника. Рівність трикутників.....222
Глава 4. Рівнобедрений трикутник 223
Глава 5. Сума кутів трикутника і паралельні прямі 224
Глава 6. Нерівності в трикутнику. Прямокутний трикутник 225
Глава 7. Коло. Геометричні побудови.....227
Глава 8. «Не святі горщики ліплять» 232

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 234

Навчальне видання

Генденштейн Лев Елевич
Жемчужкіна Галина Володимирівна

Геометрія

(у навчальних діалогах)

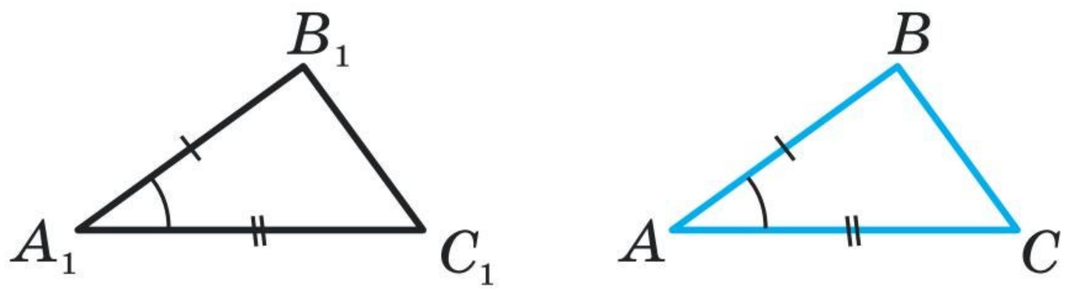
7 клас

Науковий редактор: *Євген Нелін*
Редагування: *Сергій Мартинюк*
Літературне редагування: *Оксана Давидова, Людмила Олійник, Маргарита Більчук, Любов Левчук*
Художнє оформлення: *Олена Демчак*
Дизайн обкладинки: *Олена Демчак*

Формат 70х100/16. 19,4 ум. др. арк., 13,8 обл.-вид. арк. Тираж 500. Замовлення №23-513.
Видавець, виготовлювач і розповсюджувач видавничої продукції
Редакція газети «Підручники і посібники»
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-31
Збут: pip.ternopil@ukr.net Редакція: editoria@i.ua
Інтернет-магазин: www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5143 від 05.07.2016 р.

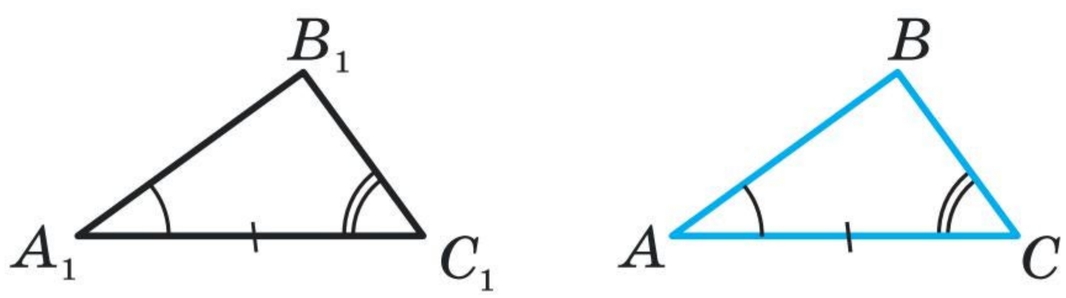
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Перша ознака рівності трикутників. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то ці трикутники рівні.



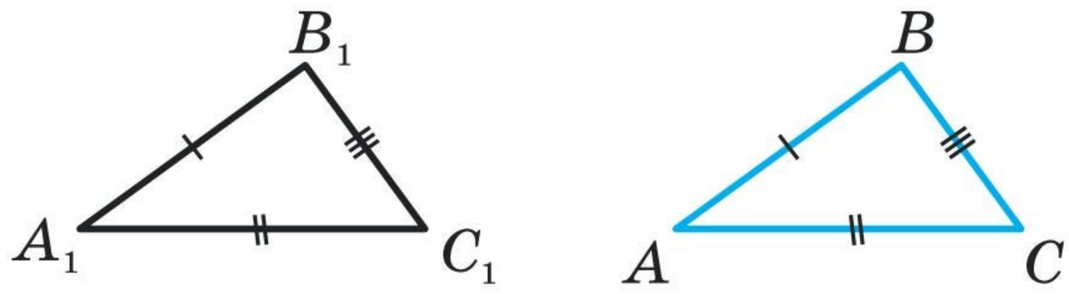
$$A_1B_1 = AB;\ \ A_1C_1 = AC;\ \angle A_1 = \angle A$$

Друга ознака рівності трикутників. Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні й двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то ці трикутники рівні.



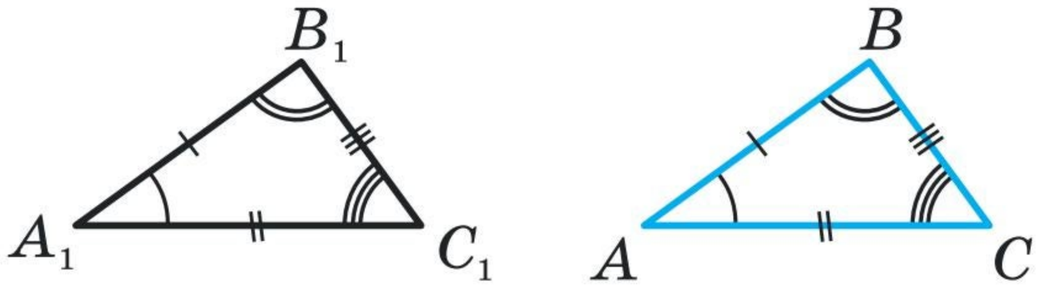
$$A_1C_1 = AC;\ \ \angle A_1 = \angle A;\ \angle C_1 = \angle C$$

Третя ознака рівності трикутників. Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам другого трикутника, то ці трикутники рівні.



$$A_1B_1 = AB;\ \ A_1C_1 = AC;\ \ B_1C_1 = BC$$

ВЛАСТИВОСТІ РІВНИХ ТРИКУТНИКІВ

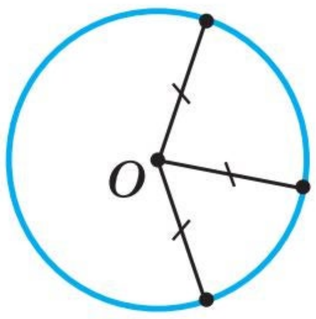


$$A_1B_1 = AB;\ \ A_1C_1 = AC;\ \ B_1C_1 = BC$$

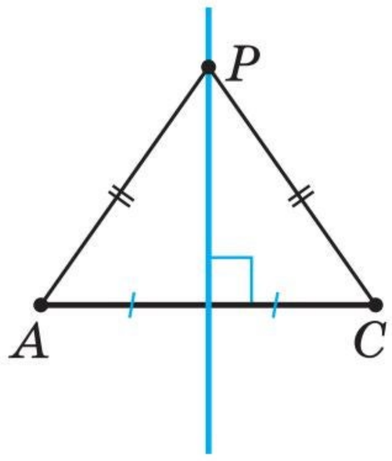
$$\angle A_1 = \angle A;\ \ \angle B_1 = \angle B;\ \ \angle C_1 = \angle C$$

ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК (ГМТ)

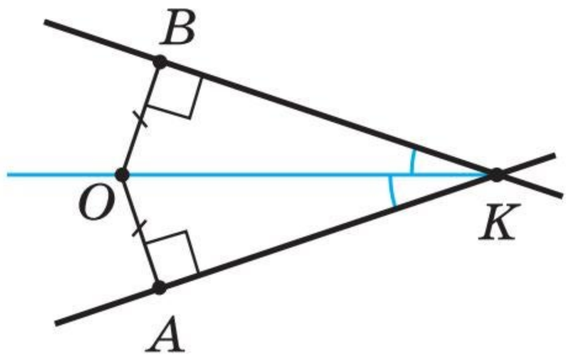
Коло



Серединний перпендикуляр

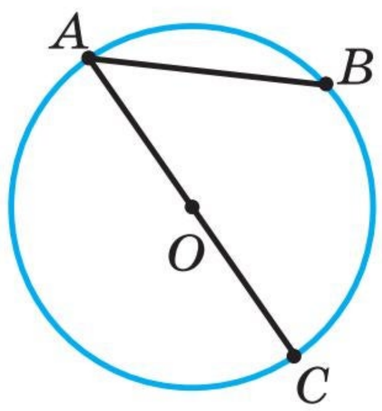


Бісектриса



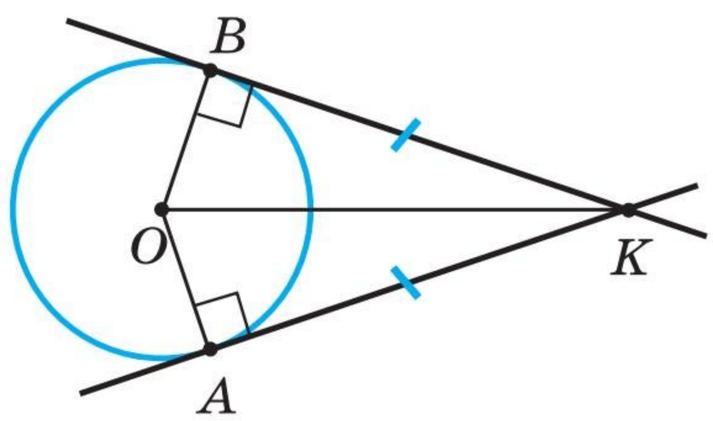
КОЛО

Діаметр і хорда, яка не є діаметром



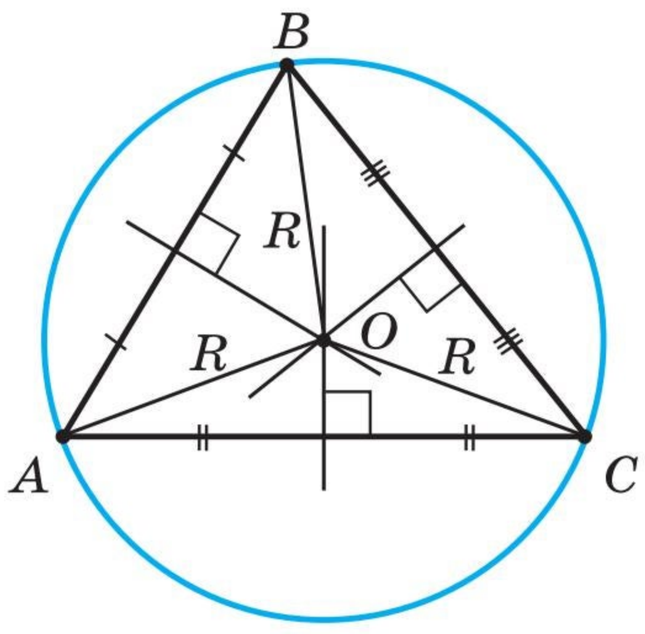
$AC > AB$

Дотичні до кола



KB і KA — дотичні до кола з центром у точці O

Коло, описане навколо трикутника



Коло, вписане в трикутник

