

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Мильник
Юлія Простакова



**НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ**

МАТЕМАТИКА 8

**ІНТЕГРОВАНІЙ
КУРС**

ЧАСТИНА 2



Олександр Шкільний, Євген Нелін,
Андрій Милляник, Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу
для 8 класу закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)

Частина 2

Видавництво «Ранок»
2025

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми
«Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Васишин М. С., Милян А. І., Працьовитий М. В.,
Простакова Ю. С., Шкільний О. В.)

Олександр Шкільний
Євген Нелін
Андрій Милянник
Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

**Підручник інтегрованого курсу для 8 класу
закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)**

Частина 2

Рекомендовано

Міністерством освіти і науки України



rnk.com.ua/107929

Інтерактивний
електронний додаток
до підручника

Київ • Харків
Видавництво «Ранок»

УДК 51:37.016(075.3)
ІІІ 67

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми
«Математика. 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти
(автори Василюшин М. С., Милянник А. І.,
Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.)

Підручник пройшов апробацію
в закладах загальної середньої освіти України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 24.01.2025 № 98)

Ілюстрації *Володимира Хорошенка*

Шкільний О. В.
ІІІ 67 Математика : підруч. інтегр. курсу для 8 кл. закл. загал. серед.
освіти (у 2-х ч.). Ч. 2 / О. В. Шкільний, Є. П. Нелін, А. І. Милянник,
Ю. С. Простакова. — Х. : Вид-во «Ранок», 2025.

УДК 51:37.016(075.3)



Інтерактивний
електронний додаток
до підручника
доступний за QR-кодом
або посиланням
rnk.com.ua/107929

- © Шкільний О. В., Нелін Є. П.,
Милянник А. І., Простакова Ю. С., 2025
- © Хорошенко В. Д., ілюстрації, 2025
- © ТОВ Видавництво «Ранок», 2025

Вельмишановне панство!

Ви продовжуєте вивчати математику. Згадайте, що користь від вивчення математики подвійна: з одного боку, за її допомогою можна знаходити розв'язання багатьох проблем, які виникають у повсякденному житті, а з іншого боку, математика — це своєрідний фітнес для розуму, який допомагає тримати ваше мислення в тонусі, готовим до багатьох сюрпризів навколишнього світу.

Щоб вивчення цієї науки було цікавішим, вам допомагатимуть Петрик і Тетянка (вони, як і ви, зараз навчаються у 8 класі), а також учитель, учителька та дідусь Тарас — учитель математики на пенсії. Нагадаємо їхні аватарки:



Тетянка



Петрик



Учителька



Учитель



Дідусь Тарас

Теоретичний матеріал підручника викладено у формі чату, у якому беруть участь згадані персонажі. Для зручності сприйняття матеріалу деякі частини **теоретичного чату** виділено кольором.



Синьою плашкою виділено основні означення, аксіоми — їх формулювання необхідно запам'ятати.



Оранжевою плашкою виділено формулювання основних властивостей і теорем, зміст яких слід запам'ятати.

Одразу після теоретичного чату — рубрика **«Перевірте себе»**, яка містить *контрольні запитання*, що дозволять вам зрозуміти, чи добре ви засвоїли теоретичний матеріал.

Тренувальні вправи чотирьох рівнів (початкового, середнього, достатнього, високого) наведено в рубриці **«Тренажерний зал»** (пам'ятаймо, що математика — це фітнес для розуму!). Непарні номери ви будете опрацьовувати в класі, а парні номери (позначені «будиночком» ) — удома самостійно. Серед тренувальних вправ вам будуть зустрічатися *ключові завдання*, позначені «ключем» , — результати або методи розв'язування таких завдань можуть бути корисними під час розв'язування інших завдань.

Після чималої порції тренувальних вправ на вас чекатиме рубрика **«Цікавинки від дідуся Тараса»**, що містить матеріал для розширення кругозору та додаткового вивчення.

Список використаних джерел інформації для матеріалів цієї рубрики розміщено в інтерактивному електронному додатку до підручника: rnk.com.ua/110132



За можливості обов'язково опрацюйте рубрику **«Запитання та завдання від дідуся Тараса»** — це збагатить вас новими знаннями та вміннями!

Кожний параграф завершується рубрикою **«Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу»**, яка дозволить вам не забути вивчене та бути готовими до нових сюжетних поворотів у вивченні математики протягом 8-го класу.

Наприкінці кожного розділу ви знайдете рубрику **«Готуємось до контрольної роботи»**, яка подана у формі тестових завдань із варіантами відповідей, короткою відповіддю та повним поясненням. Корисною також буде рубрика **«Головне в розділі»**. Вона оформлена у вигляді логічних блок-схем, призначених для систематизації вивченого матеріалу.

І нарешті, наприкінці кожної частини підручника дідусь Тарас пропонує виконати **навчальні проєкти**, які додатково допоможуть усвідомити важливість математики в реальному житті.

*Бажаємо вам успіхів у вивченні математики!
Все у вас вийде, вірте в себе!*

РОЗДІЛ 4. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

CHAPTER 4. SIMILARITY OF TRIANGLES. SOLVING RIGHT TRIANGLES

§ 17. Теорема Фалеса та її узагальнення. Властивість медіан трикутника. Властивість бісектриси трикутника



Слухай, Петрику, волонтерський проєкт «Зелене місто» планує навесні провести виставку квіткових композицій «Україна та Європа». Мені доручили розробити ескіз композиції «Україна та Італія». Ось, поглянь, що я придумала.



Цікаво. Я так розумію, у лівому верхньому кутку композиції буде український прапор, а в правому верхньому — італійський. З одного боку — Пізанська вежа й море, а з іншого — дзвіниця

Софійського собору й гора Говерла. А що означає напис «Amici per sempre»?



.....

Це ж італійською «Друзі назавжди». Але в мене виникла одна проблема. Для прапорів на місцевості треба провести паралельні відрізки. Для українського прапора це просто: я взяла прямокутний трикутник і з'єднала середини його катетів. За властивістю середньої лінії отримаємо паралельні відрізки. А от як зробити паралельними відрізки для італійського прапора?



.....

Думаю, слід діяти аналогічно: кожен катет прямокутного трикутника вгорі праворуч поділити на три рівні частини та сполучити відповідні точки відрізками. Чомусь я впевнений, що обидва проведені відрізки будуть паралельними гіпотенузі. Не зійти мені з цього місця, якщо це не так!



.....

Це в тебе якийсь новий метод доведення, що зветься «не зійти мені з цього місця, якщо це не так»? Пропоную запитати у вчителів, чи все справді так.



.....

Підтримую. Тим більше, що паралельні відрізки доволі часто доводиться будувати на місцевості. До речі, навесні ми із сім'єю збираємося до друзів у село допомагати на городах, то ж можна буде красиво розпланувати садіння городини.

Теорема Фалеса та її узагальнення



.....

Згоден, Петрику, краса — річ важлива, тому ми обов'язково дамо відповідь на ваше з Тетянкою запитання, але спочатку введемо допоміжне поняття й доведемо важливе твердження.



Якщо задано кут BAC і прямі l_1, l_2, l_3 , які перетинають його сторону AB у точках K_1, K_2, K_3 , а сторону AC — у точках M_1, M_2, M_3 (див. рис. 17.1), то вважають, що ці прямі **відтинають** на стороні AB даного кута відрізки AK_1, K_1K_2 і K_2K_3 , а на стороні AC — відповідні відрізки AM_1, M_1M_2 і M_2M_3 .

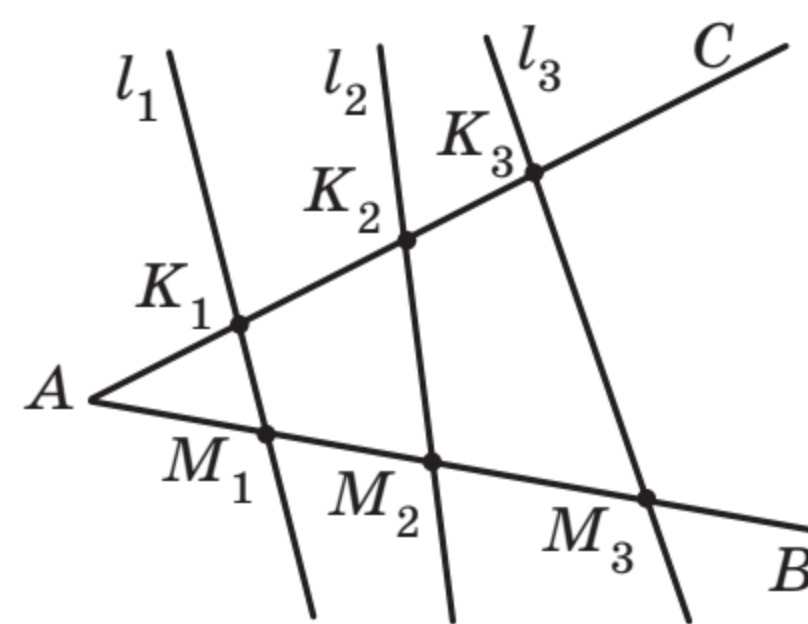


Рис. 17.1

У випадку коли прямих більше ніж три, поняття відрізків, які відтинаються цими прямими на сторонах кута, вводиться аналогічно.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні лише рівні відрізки, то вони відтинають лише рівні відрізки й на іншій його стороні.

Доведення. Нехай на рис. 17.2 зображено кут BAC , а паралельні прямі l_1, l_2, l_3 перетинають відповідно сторону кута AB у точках K_1, K_2, K_3 , а сторону кута AC — у точках M_1, M_2, M_3 . Нехай також $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3$. Покажемо, що $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$.

Проведемо міркування від супротивного. Припустимо, що $AM_1 \neq M_1M_2$, тобто M_1 не є серединою відрізка AM_2 . Нехай P_1 — середина відрізка AM_2 . Тоді

K_1P_1 — середня лінія трикутника AK_2M_2 , а отже, $K_1P_1 \parallel K_2M_2$. Але за умовою $K_1M_1 \parallel K_2M_2$, тобто через точку K_1 паралельно до прямої l_2 проведено дві різні паралельні прямі, що неможливо. Отримали суперечність. Отже, наше припущення неправильне й $AM_1 = M_1M_2$.

Припустимо тепер, що $M_1M_2 \neq M_2M_3$, тобто M_2 не є серединою відрізка M_1M_3 . Нехай P_2 — середина відрізка M_1M_3 . Тоді

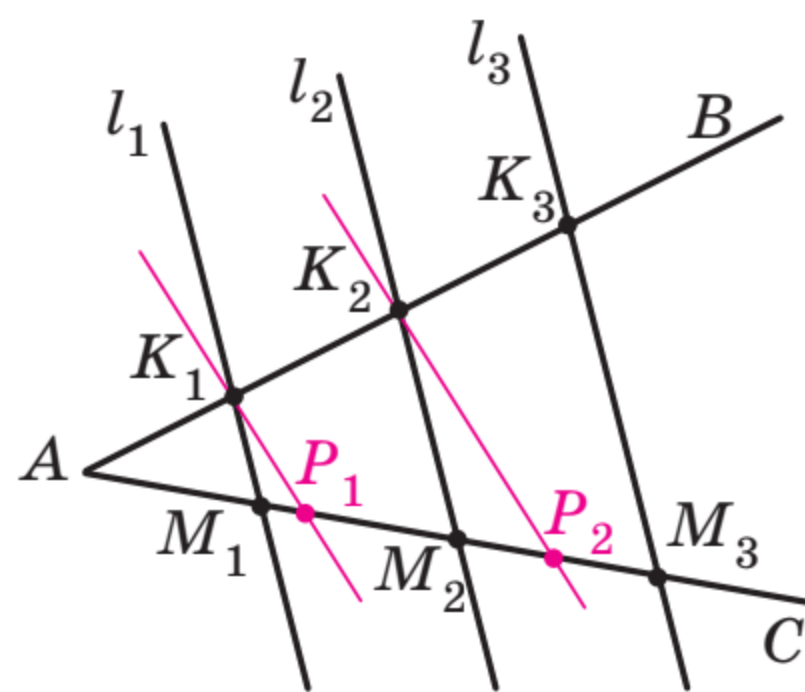


Рис. 17.2

K_2P_2 — середня лінія трапеції $K_3K_1M_1M_3$, а отже, $K_2P_2 \parallel K_3M_3$. Але за умовою $K_2M_2 \parallel K_3M_3$, тобто через точку K_2 паралельно до прямої l_3 проведено дві різні паралельні прямі, що неможливо. Знову отримали суперечність. Отже, наше припущення неправильне й $M_1M_2 = M_2M_3$.



Ми щойно довели теорему Фалеса для випадку, коли сторони кута перетнуті *трьома* паралельними прямими. Для випадку, коли цих прямих більше, міркування другої частини доведення, в якій використано властивість середньої лінії трапеції, слід провести ще кілька разів.

Також теорема Фалеса залишається правильною, якщо перший із відрізків, рахуючи від вершини кута, відрізняється довжиною від інших відрізків, які відтинаються паралельними прямими (див. рис. 17.3). *Переконайтеся в цьому самостійно.*

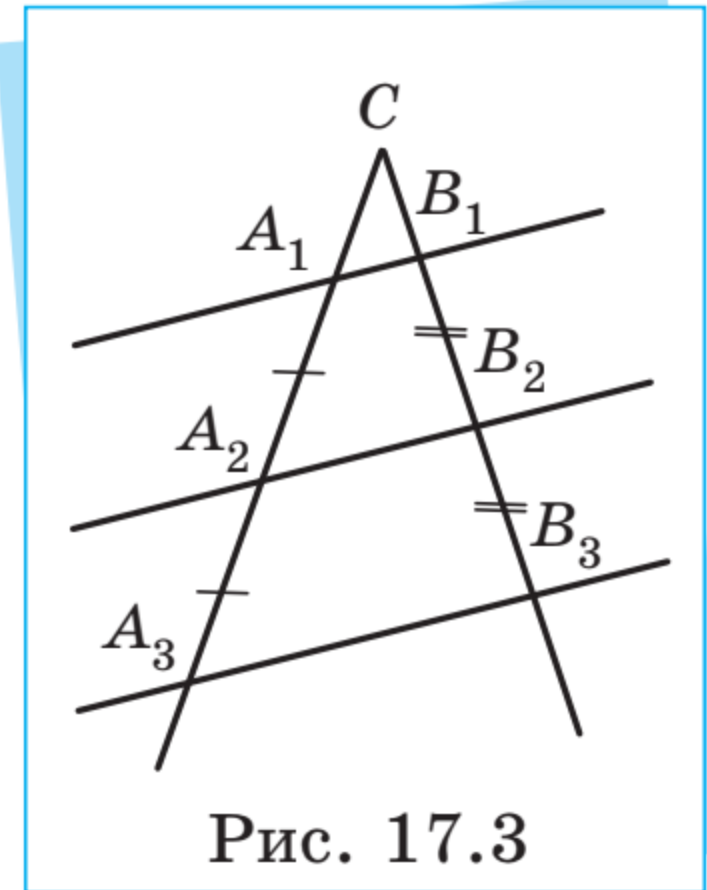


Рис. 17.3



А відповідь на запитання Тетянки й Петрика дає таке твердження.

ТЕОРЕМА (обернена до теореми Фалеса).

Якщо прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на кожній із його сторін лише рівні між собою відрізки, то ці прямі паралельні.

Доведення. Нехай на рис. 17.4 зображено кут BAC , а прямі l_1, l_2, l_3 перетинають відповідно сторону кута AB в точках K_1, K_2, K_3 , а сторону кута AC — у точках M_1, M_2, M_3 . Нехай також $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3$ і $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$. Покажемо, що $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$.

Дійсно, оскільки K_1 є серединою AK_2 , а M_1 — серединою AM_2 , то K_1M_1 є середньою лінією трикутника AK_2M_2 , а отже, $l_2 \parallel l_1$. Припустимо, що l_3 не є паралельною

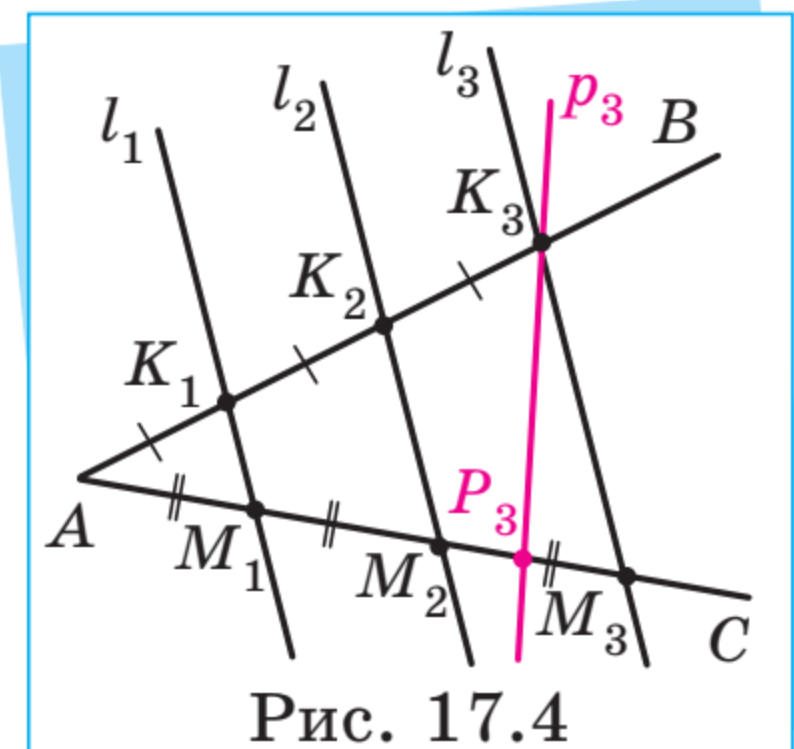


Рис. 17.4

до l_2 . Тоді через точку K_3 можна провести пряму $p_3 \parallel l_2$. Нехай ця пряма перетинає сторону кута AC в точці P_3 , яка не збігається з точкою M_3 . Оскільки за умовою $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3$ і за припущенням $l_1 \parallel l_2 \parallel p_3$, то за теоремою Фалеса $AM_1 = M_1M_2 = M_2P_3$. Але за умовою $M_1M_2 = M_2M_3$, звідки $M_2M_3 = M_2P_3$. Тоді точки M_3 і P_3 збігаються, оскільки, згідно з аксіомою, на промені M_2C від його початку можна відкласти лише один відрізок даної довжини. Отримали суперечність. Отже, припущення неправильне й $l_2 \parallel l_3$.



Теорему Фалеса й обернену до неї теорему можна сформулювати як одне твердження: **прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на кожній із його сторін лише рівні відрізки тоді й тільки тоді, коли ці прямі паралельні.**

Якщо ж у разі перетину сторін кута прямими перший із відрізків, рахуючи від вершини кута, відрізняється за довжиною від інших рівних між собою відрізків на кожній зі сторін кута, то відповідні прямі можуть не бути паралельними (див. рис. 17.5). Тому на ескізі Тетянки прямі, що визначають італійський прапор, дійсно будуть паралельними, а от більш загальне твердження є неправильним.

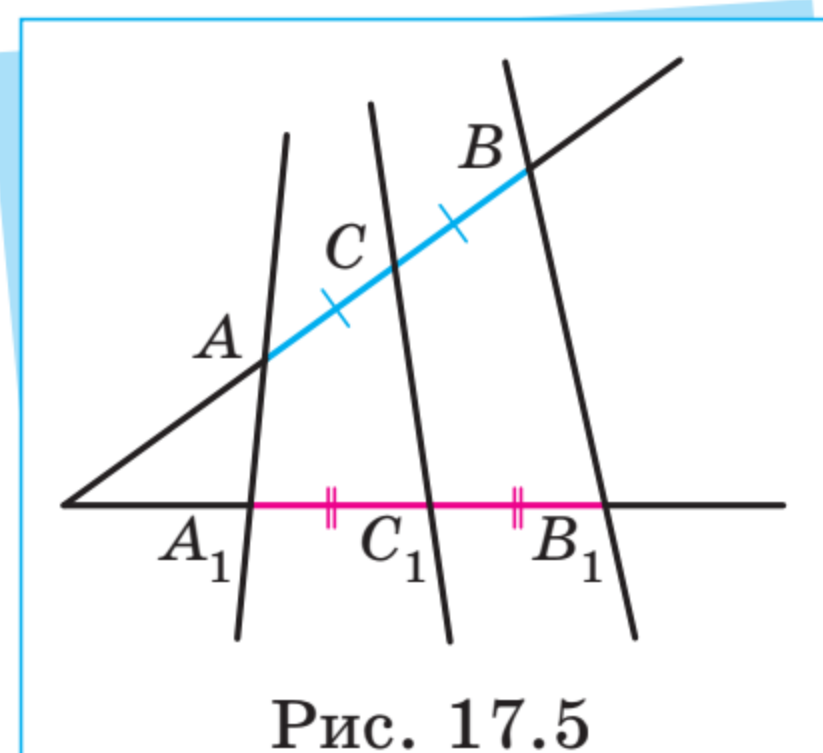


Рис. 17.5



Теорема Фалеса й теорема, обернена до теореми Фалеса, мають численні практичні застосування. Розв'яжемо задачу на застосування теореми Фалеса.

Задача. Поділіть даний відрізок на 5 рівних частин.

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (див. рис. 17.6). Поділимо його на 5 рівних частин. Діятимемо за таким алгоритмом:

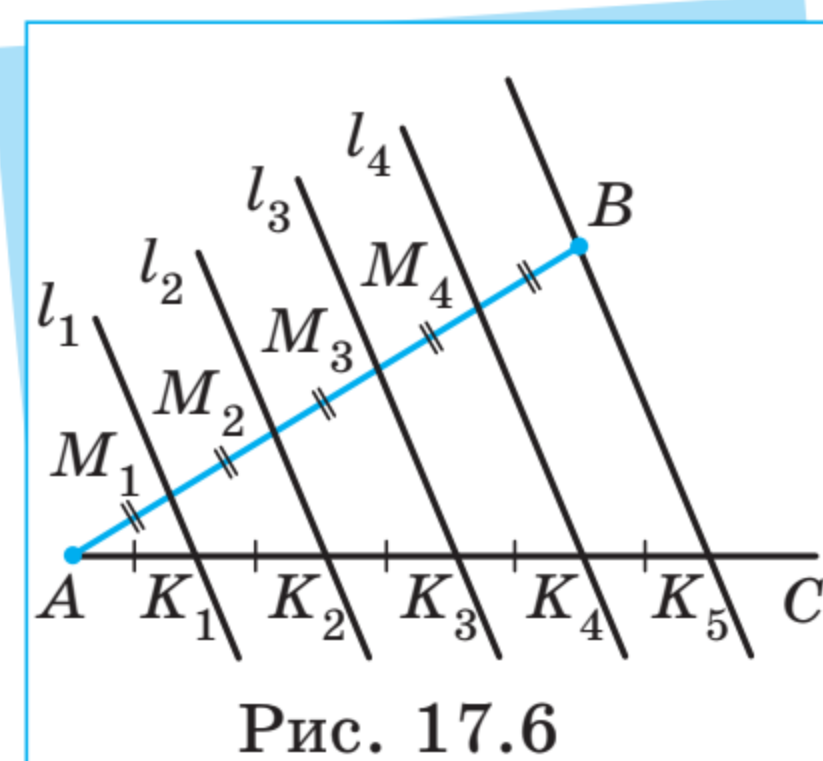


Рис. 17.6

- 1) проведемо довільний промінь AC й відкладемо на ньому 5 довільних рівних між собою відрізків $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = K_3K_4 = K_4K_5$;
- 2) проведемо пряму K_5B ;
- 3) через точки K_1, K_2, K_3, K_4 проведемо прямі l_1, l_2, l_3, l_4 , паралельні до прямої K_5B ;
- 4) точки перетину цих прямих із відрізком AB позначимо M_1, M_2, M_3, M_4 .

Згідно з теоремою Фалеса, точки M_1, M_2, M_3, M_4 поділяють відрізок AB на 5 рівних частин.



Теорема Фалеса має одне важливе узагальнення. Щоб його було зручно сформулювати, введемо кілька допоміжних означень.



Відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених у тих самих одиницях виміру.

Наприклад, якщо $AB = 8$ см, а $CD = 1$ дм, то для знаходження відношення відрізків AB і CD спочатку подамо їхні довжини в сантиметрах, тобто $CD = 10$ см. Тоді $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{10} = 0,8$.

Якщо $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}$, то вважатимемо, що відрізки A_1B_1 і C_1D_1

є пропорційними відрізкам A_2B_2 і C_2D_2 .

Зрозуміло, що означення пропорційних відрізків можна поширити й на більшу їхню кількість. Наприклад, якщо

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = \frac{K_1M_1}{K_2M_2}$, то вважатимемо, що відрізки A_1B_1, C_1D_1

і K_1M_1 є **пропорційними** відрізкам A_2B_2, C_2D_2 і K_2M_2 .



Тепер можна сформулювати ще одне важливе твердження.

ТЕОРЕМА (про пропорційні відрізки).

Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, які вони відтинають на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, які вони відтинають на іншій стороні кута.

Якщо BAC — заданий кут, а прямі l_1 , l_2 перетинають відповідно сторону кута AB у точках K_1 , K_2 , а сторону кута AC — у точках M_1 , M_2 (див. рис. 17.7), то потрібно довести, що $\frac{AK_1}{AM_1} = \frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{AM_2}$.

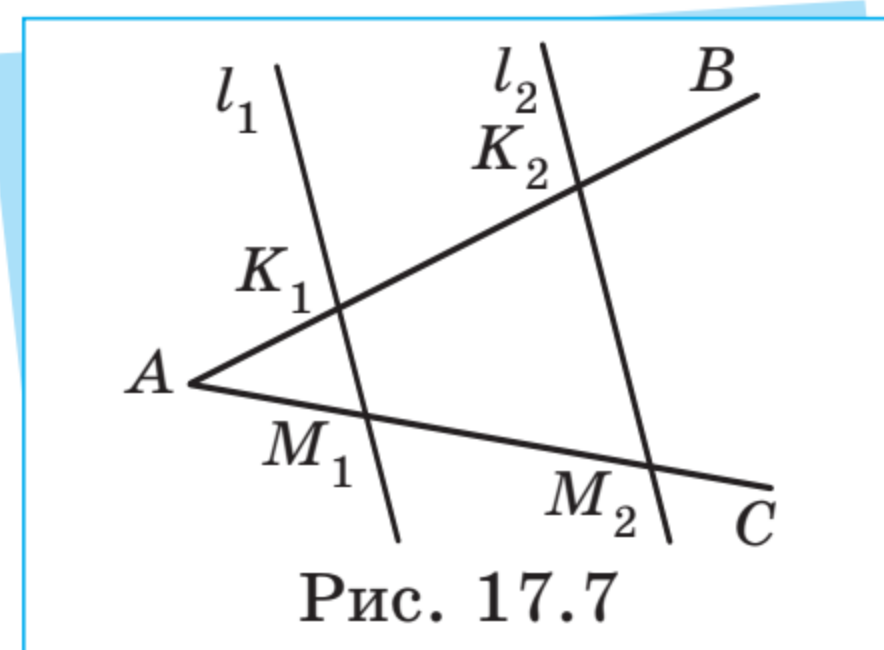


Рис. 17.7

Детальніше зміст і доведення теореми про пропорційні відрізки: rnk.com.ua/109375



До речі, теорема про пропорційні відрізки залишається правильною і тоді, коли замість сторін кута взяти будь-які дві прямі. *Переконайтеся в цьому самостійно.*

Властивість медіан трикутника і властивість бісектриси трикутника



Теорема Фалеса й теорема про пропорційні відрізки дозволяють довести цікаву властивість медіан трикутника.

ТЕОРЕМА (властивість медіан трикутника).

Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з цих медіан у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника.

Доведення. Нехай ABC — даний трикутник (рис. 17.8). Проведемо в ньому медіани AK і BL , які перетинаються в точці M . Покажемо, що $\frac{BM}{ML} = \frac{2}{1}$.

Проведемо через точку L пряму, паралельну медіані AK , точку перетину цієї прямої зі стороною BC позначимо K_1 . Оскільки за умовою $AL = LC$, то за теоремою Фалеса $KK_1 = K_1C$, звідки $KC = 2KK_1$. Але за умо-

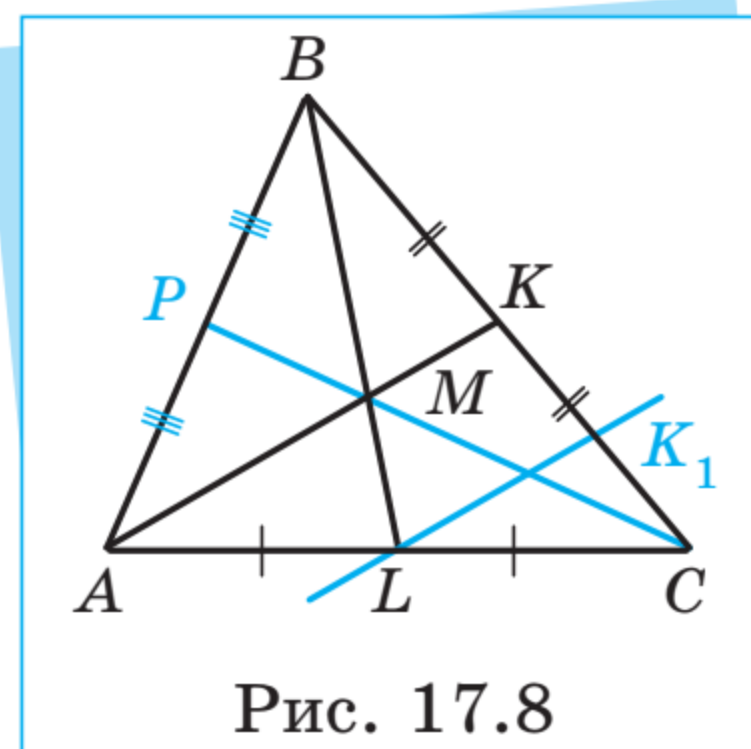


Рис. 17.8

вою $BK = KC$, а отже, $\frac{BK}{KK_1} = \frac{2}{1}$. Тоді за теоремою про пропорційні від-

різки $\frac{BM}{BK} = \frac{ML}{KK_1}$. Звідси за властивістю пропорції маємо $\frac{BM}{ML} = \frac{BK}{KK_1}$.

Оскільки $\frac{BK}{KK_1} = \frac{2}{1}$, то і $\frac{BM}{ML} = \frac{2}{1}$. Міркуючи аналогічно, можна показа-

ти, що $\frac{AM}{MK} = \frac{2}{1}$.

Якщо провести медіану CP , то точка її перетину з медіаною BL також поділить BL у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини B (*переконайтеся в цьому самостійно*), а отже, вона збігатиметься з точкою M . Таким чином, ми довели, що всі три медіани даного трикутника проходять через точку M , що й вимагалось довести.

Також нескладно показати, що $\frac{CM}{MP} = \frac{2}{1}$. *Зробіть це самостійно.*



Точку перетину медіан трикутника **називають центром мас** або **центроїдом** цього трикутника. Визначення розташування центру мас є надзвичайно важливим для збереження рівноваги багатьох об'єктів реального світу. Дізнайтеся про це більше у вчителя (вчительки) фізики.



Доведемо ще одне корисне в подальших застосуваннях твердження. Але для того, щоб його коректно сформулювати, спочатку введемо ще одне допоміжне поняття.



Нехай точка F належить стороні AC трикутника ABC (рис. 17.9). Тоді сторони трикутника AB і BC називають **прилеглими** до відрізків AF і FC відповідно.

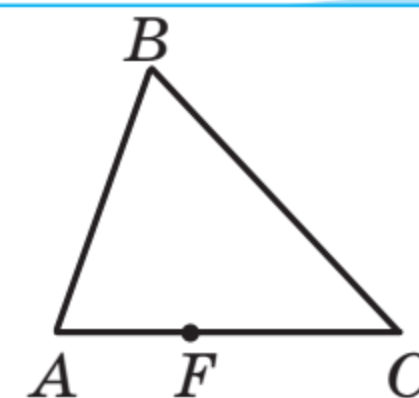


Рис. 17.9



ТЕОРЕМА (властивість бісектриси трикутника).

Основа бісектриси трикутника ділить сторону трикутника на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

Доведення. Нехай BF — бісектриса трикутника ABC . Покажемо, що $\frac{FC}{BC} = \frac{AF}{AB}$ (рис. 17.10).

Через точку A проведемо пряму, паралельну BF , і позначимо точку її перетину з прямою BC через P . $\angle BAP = \angle ABF$ як внутрішні різносторонні для паралельних прямих AP і BF , перетнутих січною AB , а $\angle APB = \angle FBC$ як відповідні для паралельних прямих AP і BF , перетнутих січною BC . Оскільки BF — бісектриса, то $\angle ABF = \angle FBC$, а отже, $\angle BAP = \angle APB$. Тоді трикутник ABP — рівнобічний з основою AP , звідки $PB = AB$.

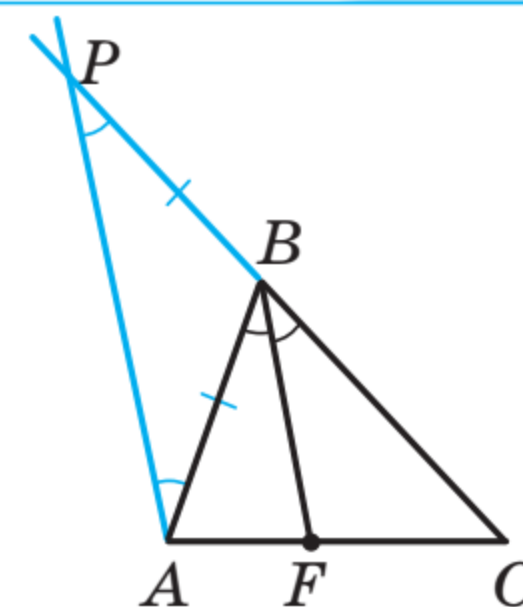


Рис. 17.10

За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{FC}{BC} = \frac{AF}{PB}$. Але $PB = AB$, тому $\frac{FC}{BC} = \frac{AF}{AB}$, що й вимагалось довести.



Розв'яжемо задачу.

Задача. У трикутнику ABC проведено бісектриси AK , BL , CP (рис. 17.11). Доведіть, що

$$\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1.$$

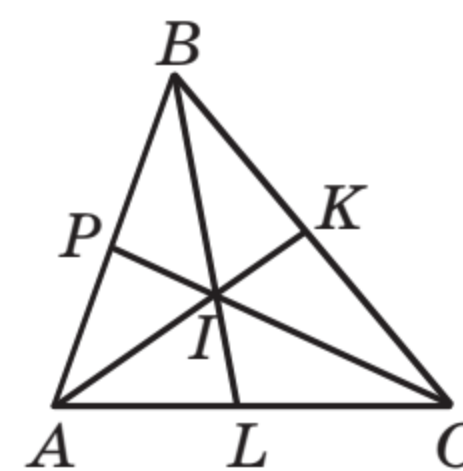


Рис. 17.11

Розв'язання. За властивістю бісектриси $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$, $\frac{CK}{KB} = \frac{AC}{AB}$,

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BC}{AC}. \text{ Отже, } \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BP}{PA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$



Остання задача є окремим випадком більш загального твердження, яке має назву *теорема Чеви*. Дізнайтеся про неї більше самостійно.



Перевірте себе!

1. Сформулюйте теорему Фалеса й теорему, обернену до теореми Фалеса.
2. Дайте означення відношення двох відрізків.
3. Які відрізки називають пропорційними?
4. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.
5. Сформулюйте властивість медіан трикутника.
6. Як називають точку перетину медіан трикутника?
7. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Прямі a_1 , a_2 , a_3 паралельні та перетинають сторони кута (рис. 1); $AB = BC$. Виберіть правильне твердження:
 - а) $AB = DE$;
 - б) $EF = BC$;
 - в) $AC = CF$;
 - г) $DE = EF$.

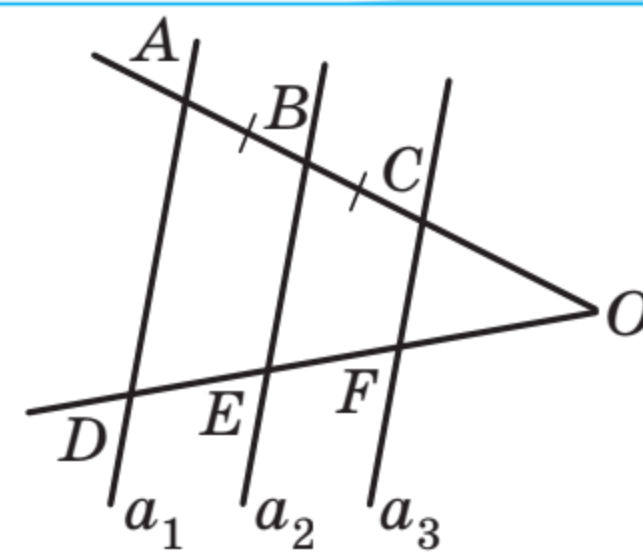


Рис. 1

2. Прямі b_1 і b_2 паралельні та перетинають сторони кута (рис. 2); $OA = AB$. Виберіть правильне твердження: а) $OA = OC$; б) $OA = AC$; в) $OC = CD$; г) $OB = OD$.

3. Прямі n_1 і n_2 перетинають сторони кута (рис. 3); $OM = MK$. Прямі n_1 і n_2 будуть паралельними, якщо: а) $OA = AB$; б) $OA = OM$; в) $OM = MA$; г) $OK = OB$.

4. Прямі m_1 і m_2 перетинають сторони кута (рис. 4); $AB = BC$. Прямі m_1 і m_2 будуть паралельними, якщо: а) $AB = KL$; б) $KL = CK$; в) $BC = KC$; г) $AB = BK$.

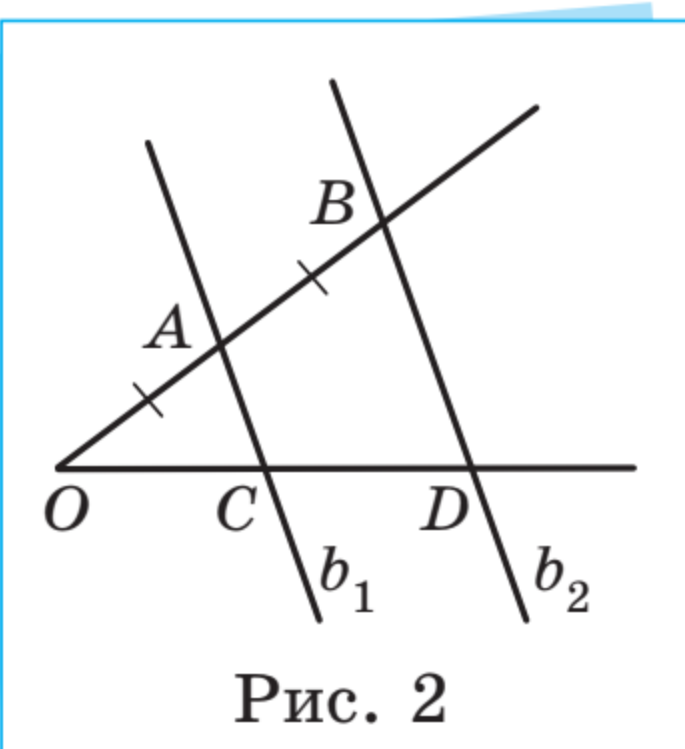


Рис. 2

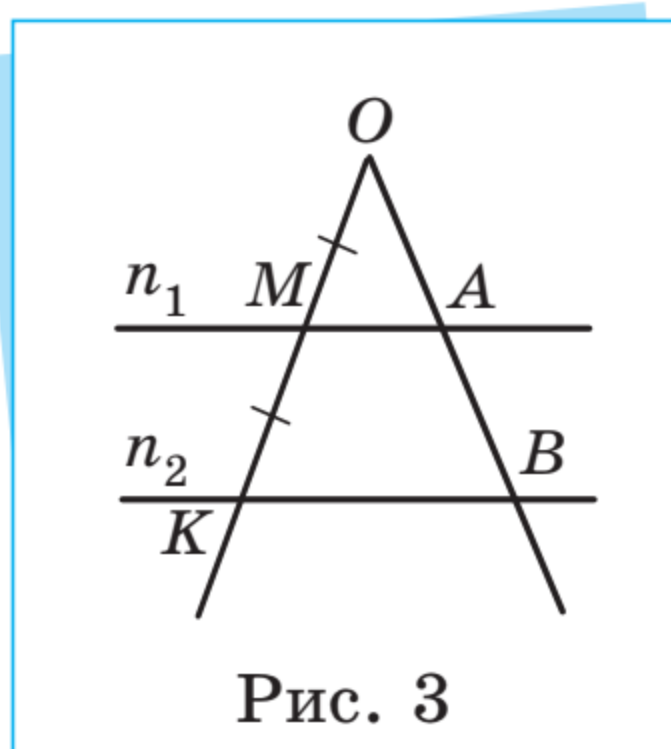


Рис. 3

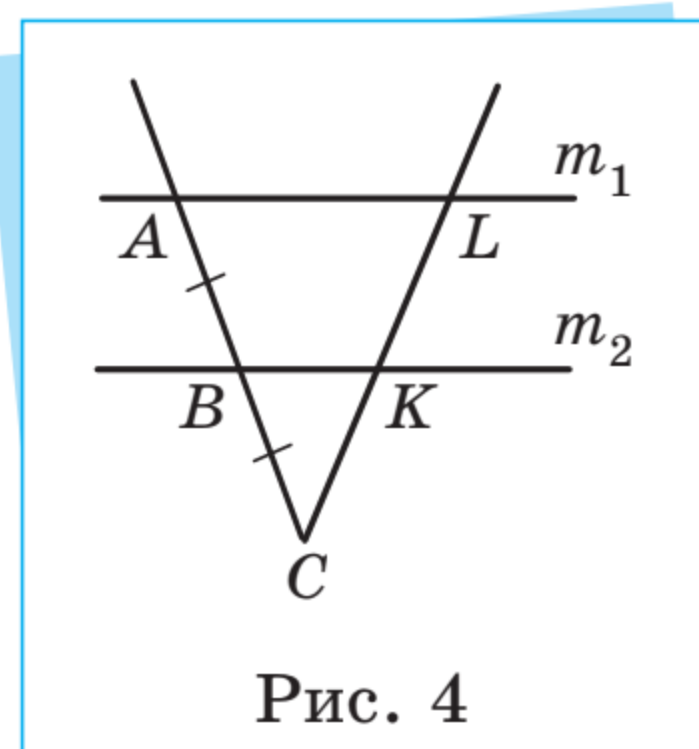


Рис. 4

Рис. 4

5. Знайдіть відношення $\frac{AB}{A_1B_1}$, якщо: а) $AB = 8$ см; $A_1B_1 = 5$ см; б) $AB = 15$ см; $A_1B_1 = 4$ см; в) $AB = 56$ м; $A_1B_1 = 14$ м; г) $AB = 12$ м; $A_1B_1 = 30$ см.

6. Знайдіть відношення $\frac{AB}{KL}$, якщо: а) $AB = 45$ см; $KL = 30$ см; б) $AB = 21$ см; $KL = 12$ см; в) $AB = 7$ м; $KL = 10$ см; г) $AB = 36$ дм; $KL = 60$ см.

7. Відомо, що $K_1M_1 = 18$ см, $C_1D_1 = 12$ см, $K_2M_2 = 3$ см, $C_2D_2 = 2$ см. Чи є відрізки K_1M_1 і C_1D_1 пропорційними відрізкам K_2M_2 і C_2D_2 ?

8. Відомо, що $A_1B_1 = 15$ см, $C_1D_1 = 20$ см, $A_2B_2 = 3$ см, $C_2D_2 = 4$ см. Чи є відрізки A_1B_1 і C_1D_1 пропорційними відрізкам A_2B_2 і C_2D_2 ?

9. Відомо, що $A_1B_1 = 12$ см, $C_1D_1 = 5$ см, $A_2B_2 = 12$ м, $C_2D_2 = 5$ м. Чи є відрізки A_1B_1 і C_1D_1 пропорційними відрізкам A_2B_2 і C_2D_2 ?

10. Відомо, що $K_1M_1 = 17$ см, $C_1D_1 = 10$ см, $K_2M_2 = 17$ дм, $C_2D_2 = 10$ дм. Чи є відрізки K_1M_1 і C_1D_1 пропорційними відрізкам K_2M_2 і C_2D_2 ?

11. У трикутнику ABC проведено медіани BM і CK , які перетинаються в точці O (рис. 5); $KO = 7$ см, $OB = 10$ см*. Обчисліть довжини відрізків OC і OM .

12. У трикутнику KLM проведено медіани LP і KR , які перетинаються в точці O (рис. 6); $KO = 24$ см, $OP = 9$ см. Обчисліть довжини відрізків OR і OL .

13. У трикутнику ABC проведено бісектрису AK (рис. 7); $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $BK = 4$ см. З'ясуйте, якою може бути довжина відрізка KC .

а) 6 см; б) 10 см; в) 4 см; г) 8 см.

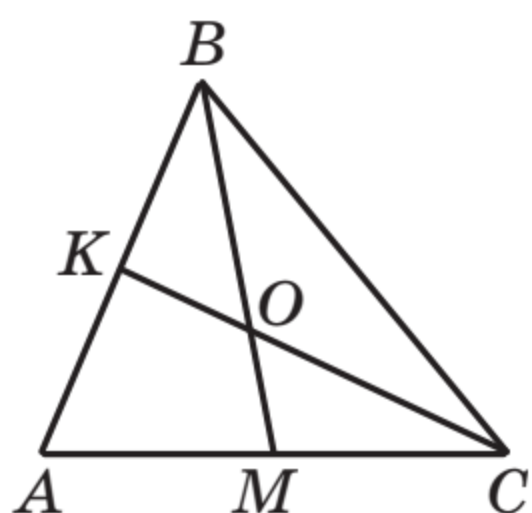


Рис. 5

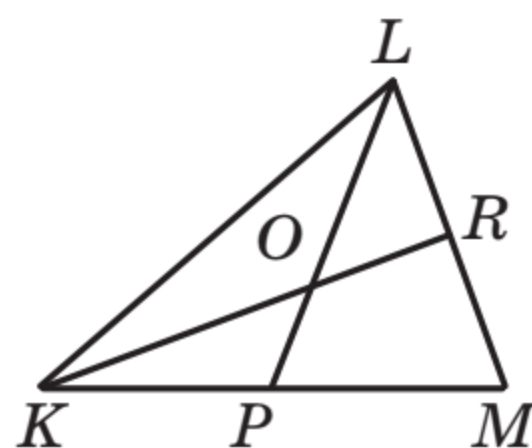


Рис. 6

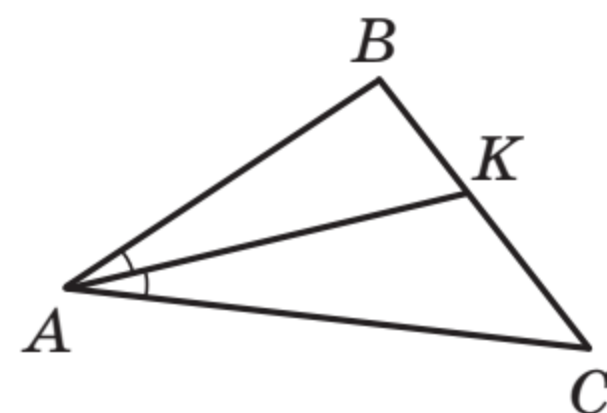


Рис. 7

14. У трикутнику ABC проведено бісектрису AK (див. рис. 7); $AB = 10$ см, $AC = 14$ см, $KC = 7$ см. З'ясуйте, якою може бути довжина відрізка BK .

а) 7 см; б) 5 см; в) 3 см; г) 10 см.

* Нагадаємо, що в цьому й аналогічних випадках подані рисунки є схематичними.



Середній рівень

15. Точка C ділить відрізок AB на частини так, що $AC:CB=5:3$ (див. рис. 8). З'ясуйте, чому дорівнює відношення: а) $BC:CA$; б) $AC:AB$.



Рис. 8

16. Точка C ділить відрізок AB на частини так, що $AC:CB=3:2$. З'ясуйте, чому дорівнює відношення: а) $BC:CA$; б) $AC:AB$.

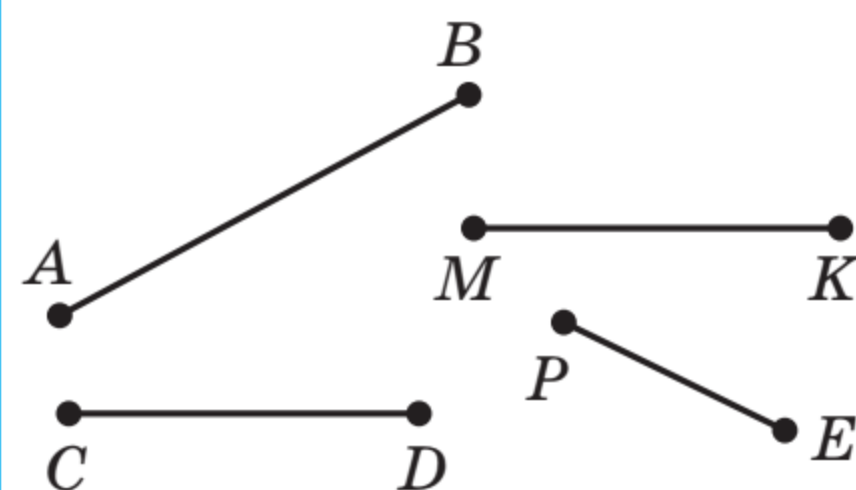


Рис. 9

17. На рис. 9 зображено відрізки $AB=12$ см, $CD=8$ см, $MK=9$ см, $PE=x$ см. Знайдіть довжину відрізка PE , якщо $\frac{AB}{CD} = \frac{MK}{PE}$.

18. На рис. 9 зображено відрізки $AB=10$ см, $CD=6$ см, $MK=x$ см, $PE=3$ см. Знайдіть довжину відрізка MK , якщо $\frac{AB}{CD} = \frac{MK}{PE}$.

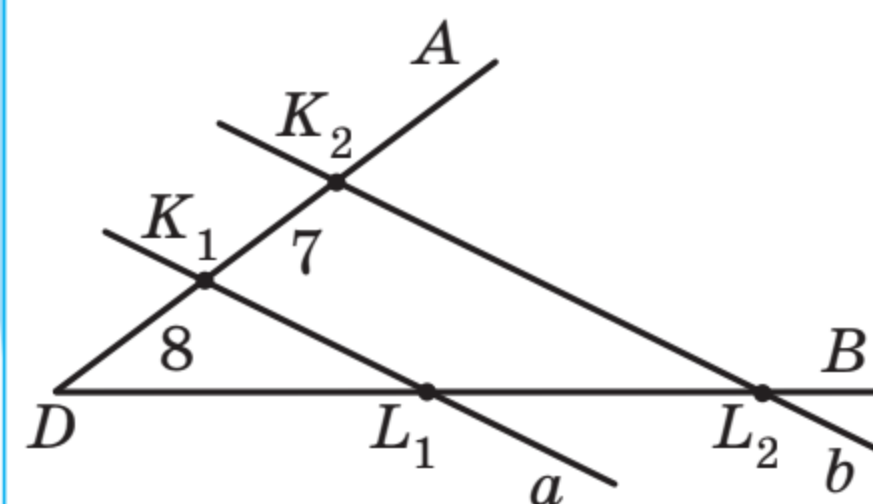


Рис. 10

19. Паралельні прямі a і b перетинають сторони кута ADB в точках K_1, K_2, L_1, L_2 (див. рис. 10). Знайдіть довжини відрізків DL_1 і L_1L_2 , якщо $DL_2 = 30$ см, $DK_1 = 8$ см, $K_1K_2 = 7$ см.

20. У трапеції $ABCD$ проведено $MK \parallel BE \parallel CD$ (рис. 11). Відомо, що точка M — середина AB , $BC=10$ см, а $AD=16$ см. Знайдіть довжину відрізка AK .

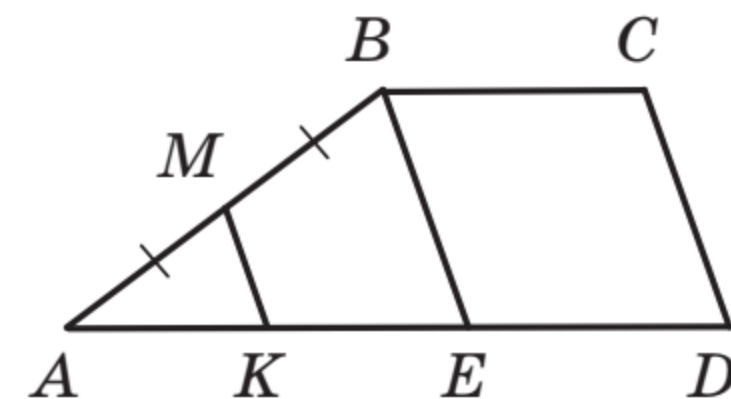


Рис. 11

21. Паралельні прямі відтинають на сторонах кута BAC відрізки так, як показано на рис. 12. Знайдіть довжину невідомого відрізка x .

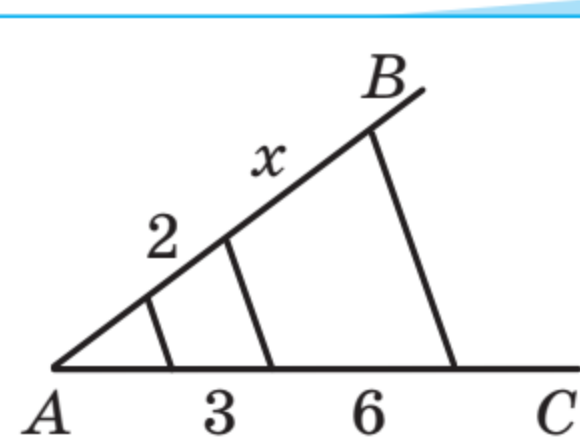


Рис. 12

22. Паралельні прямі відтинають на сторонах кута BAC відрізки так, як показано на рис. 13. Знайдіть довжину невідомого відрізка x .

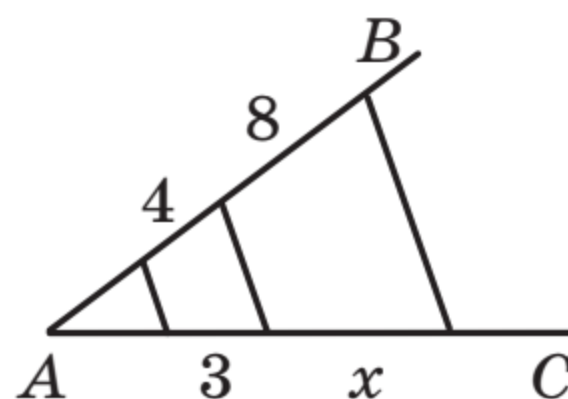


Рис. 13

23. Медіани AK і CP трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 14). Знайдіть довжини відрізків AM і CM , якщо $AK = 12$ см, $MP = 3,5$ см.

24. Медіани AK і CP трикутника ABC перетинаються в точці M (див. рис. 14). Знайдіть довжини відрізків AM і CM , якщо $PC = 15$ см, $MK = 4,5$ см.

25. У трикутнику ABC проведено бісектрису BK (рис. 15). Точка K ділить сторону AC на відрізки AK і KC . Знайдіть довжину відрізка KC , якщо $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AK = 3$ см.

26. У трикутнику ABC BK — бісектриса, $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $KC = 2$ см (рис. 16). Знайдіть довжину відрізка AK .

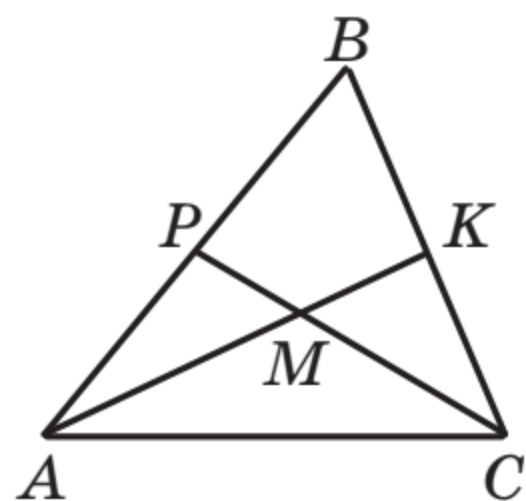


Рис. 14

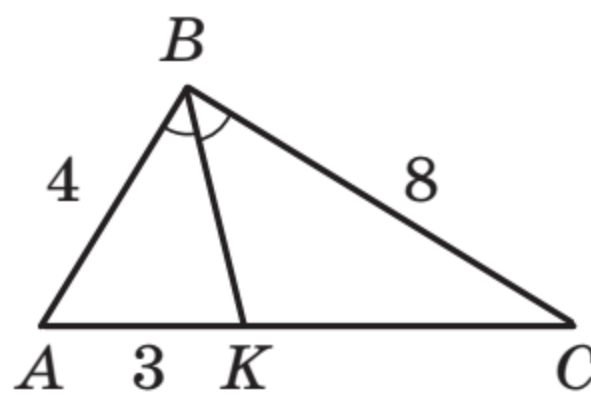


Рис. 15

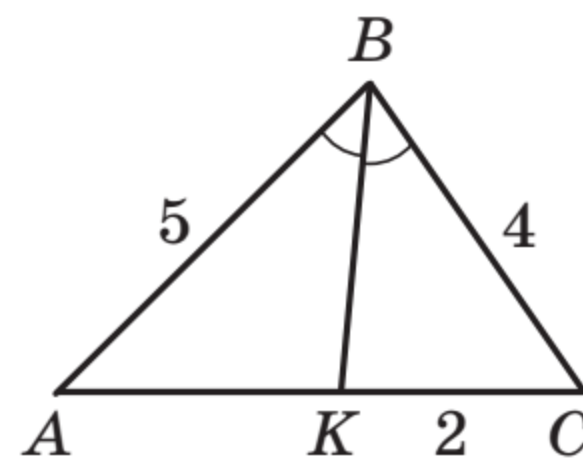


Рис. 16

27. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису AL . Знайдіть довжини відрізків BL і LC , якщо $AB = 15$ см, $AC = 10$ см.

28. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису CK . Знайдіть довжини відрізків AK і KB , якщо $AC = 6$ см, $BC = 12$ см.



Достатній рівень

29. За даними рис. 17 знайдіть довжину невідомого відрізка, якщо відомо, що $m \parallel n \parallel k$.

30. За даними рис. 18 знайдіть довжину невідомого відрізка, якщо відомо, що $m \parallel n \parallel k$.

31. Прямі MN і PK перетинають сторони трикутника ABC і паралельні прямій BC . Використовуючи дані рис. 19, знайдіть довжини відрізків AN і KC .

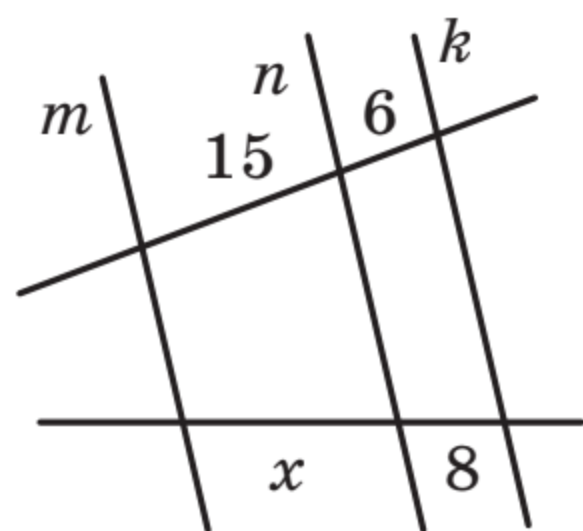


Рис. 17

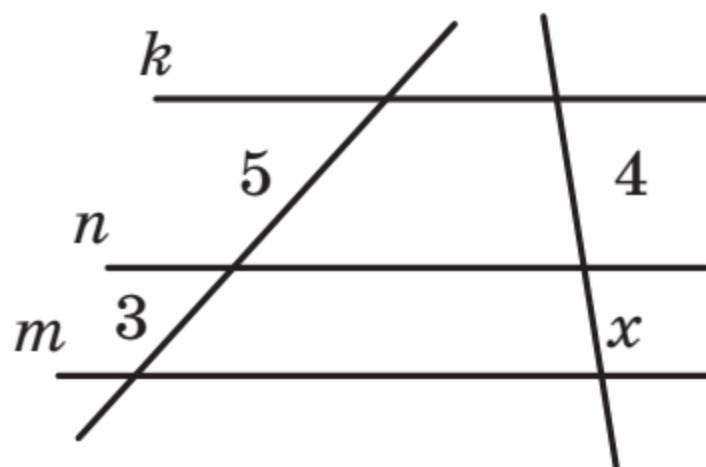


Рис. 18

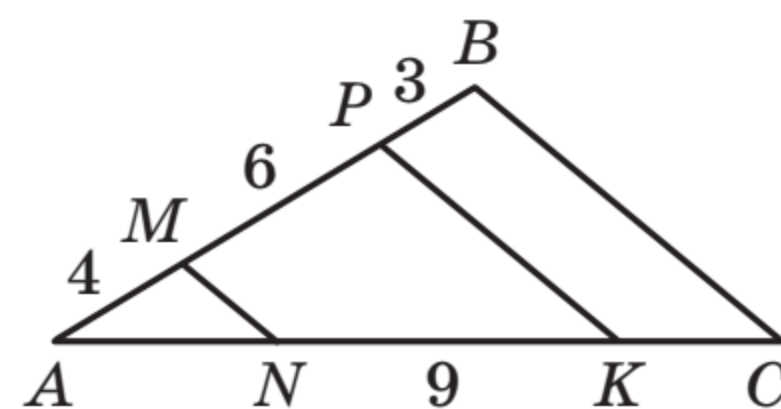


Рис. 19

32. Прямі MN і PK перетинають сторони трикутника ABC і паралельні прямій BC . Використовуючи дані рис. 20, знайдіть довжини відрізків AM і PM .

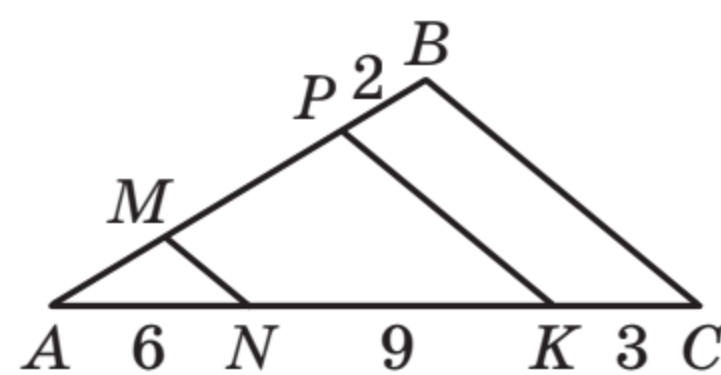


Рис. 20

33. На сторонах трикутника ABC взято точки M , K і N так, що $AK = KC$, а $MKNB$ — паралелограм (рис. 21). Доведіть, що точки M і N — середини сторін AB і BC . Знайдіть периметр паралелограма $MKNB$, якщо $AK = 6$ см, а $NC = 8$ см, а $BM = 7$ см.

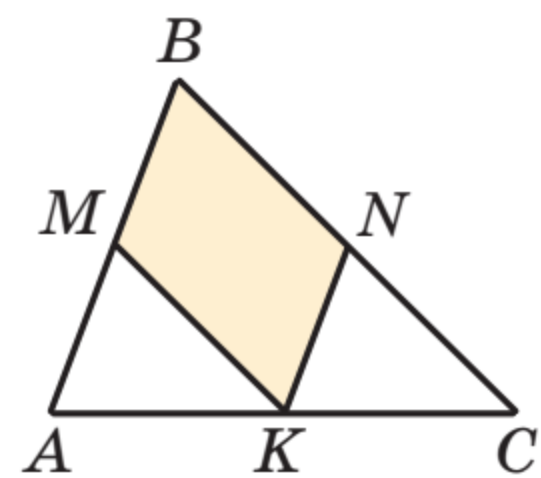


Рис. 21

34. Дано трикутник ABC . Точки K , N , M — середини відповідно сторін AB , BC , CA . Доведіть, що чотирикутник $MKNC$ — паралелограм. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AM = 5$ см, $AK = 7$ см, $MK = 9$ см.

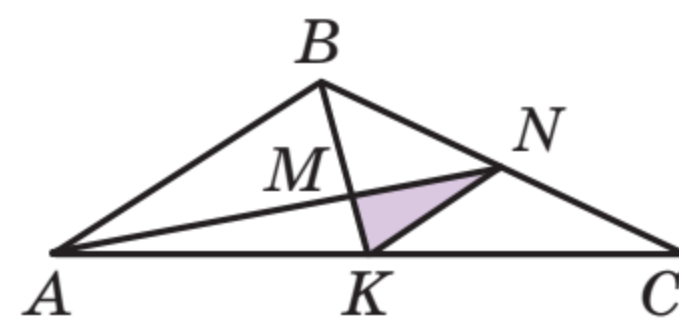


Рис. 22

35. AN і BK — медіани трикутника ABC (рис. 22); $AB = 30$ см, $BK = 15$ см, $AN = 36$ см. Знайдіть периметр трикутника KMN .

36. BN і CK — медіани трикутника ABC (рис. 23); $BN = 18$ см, $CK = 21$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть периметр трикутника CMN .

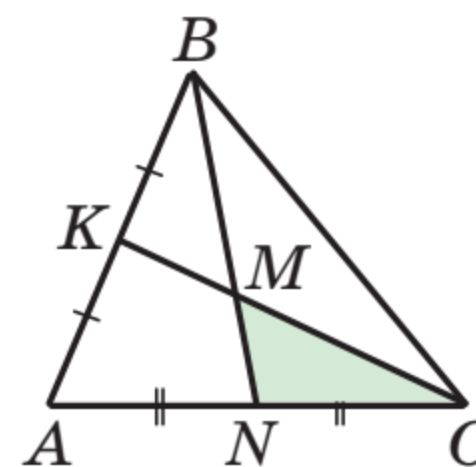


Рис. 23

37. У трикутнику ABC проведено бісектрису AL . Відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть довжини відрізків, на які точка L ділить сторону BC .

38. У трикутнику ABC проведено бісектрису AN . Відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть довжини відрізків, на які точка N ділить сторону BC .

39. Задано відрізок $PQ = 7$ см. За допомогою циркуля та лінійки без поділок поділіть відрізок PQ на три рівні частини. Запишіть ваші дії.

40. Задано відрізок $MN = 8$ см. За допомогою циркуля та лінійки без поділок поділіть відрізок MN на сім рівних частин. Запишіть ваші дії.

41. На сторонах трикутника ABC взято точки K , M і E так, що $AM = BM = 6$ см, $\angle MEB = \angle AKM = \angle ACB$, $MK = 7$ см, $KC = 5$ см (рис. 24). Знайдіть периметр трикутника ABC .

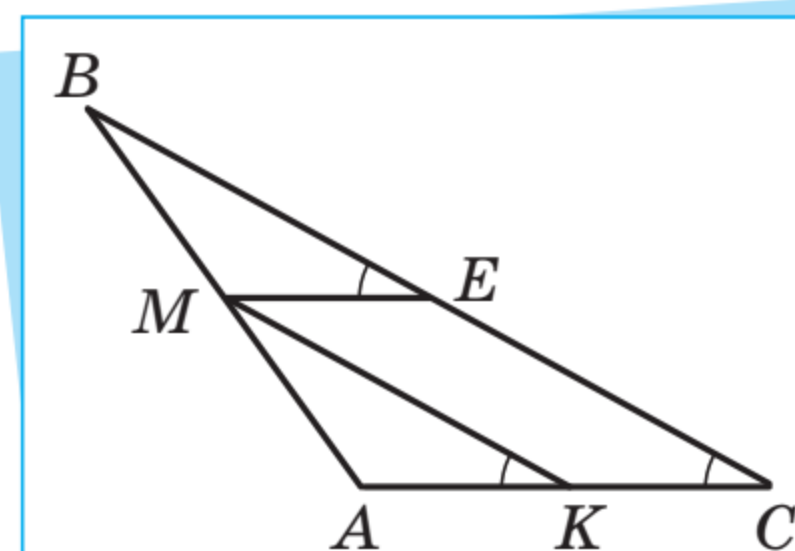


Рис. 24

42. У трикутнику ABC проведено середні лінії KM і KN (рис. 25). Знайдіть периметр чотирикутника $MKNC$, якщо $BK = 7$ см, $BN = 6$ см, $KN = 8$ см.

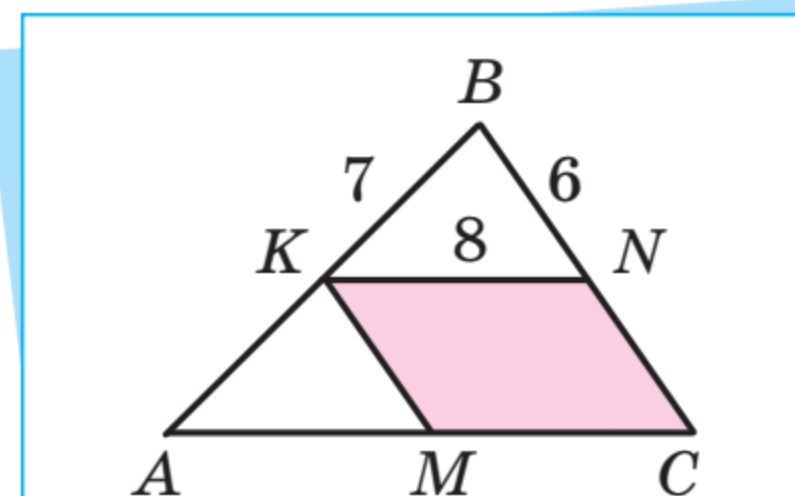


Рис. 25

43. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає сторону BC у точці P так, що $BP = 4$ см, а $PC = 5$ см. Знайдіть сторони трикутника ABC , якщо його периметр дорівнює 45 см.

44. У трикутнику ABC проведено бісектрису AL . Знайдіть довжини відрізків BL і CL , якщо $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, а периметр трикутника ABC дорівнює 45 см.

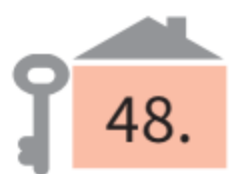


Високий рівень

45. Чи може середня лінія трапеції проходити через точку перетину її діагоналей? Відповідь обґрунтуйте.

46. Чи можуть в разі перетину діагоналей із середньою лінією трапеції утворитися три рівні частини середньої лінії? Якщо так, то вкажіть співвідношення між довжинами основ такої трапеції.

47. Точки K і M — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що прямі AK і CM ділять діагональ BD на три рівні частини.



48. Доведіть, що середня лінія трапеції ділить кожну з її діагоналей і висоту трапеції навпіл.

49. У рівнобічному трикутнику KMN провели висоту MD до основи, а на бічній стороні MN позначили точку A . Відрізки AK і MD перетинаються в точці O , так що $AO:OK = 3:5$. Знайдіть відношення $MA:AN$.
50. У рівнобічному трикутнику ABC точка M — середина основи AC . На стороні BC позначили точку K , так що $BK:KC = 5:9$. У якому відношенні відрізок BM ділить відрізок AK ?
51. Чи може середня лінія трикутника проходити через точку перетину його медіан? Відповідь обґрунтуйте.
52. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Визначте відстань від точки перетину його медіан до вершини прямого кута.
53. Відстань від точки перетину медіан рівнобічного трикутника до його основи дорівнює 4 см. Визначте бічну сторону трикутника, якщо кут, протилежний основі, дорівнює 120° .
54. Побудуйте трикутник за стороною та медіанами, проведеними до двох інших сторін.
55. Побудуйте рівнобічний трикутник за основою та медіаною, проведеною до бічної сторони.
56. Чи може одна з бісектрис трикутника проходити через середину іншої бісектриси? Відповідь обґрунтуйте.
57. У трикутник ABC вписано ромб $AKLM$ так, що точки K , L , M належать відповідно сторонам AB , BC і AC . Визначте довжини відрізків, на які точка L ділить сторону BC , якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 10$ см.
58. У прямокутний трикутник ABC вписано квадрат $CKLM$ так, що точки K , L , M належать відповідно сторонам AC , AB і BC . Визначте довжини відрізків, на які точка L ділить сторону AB , якщо $AB = 35$ см, $BC = 28$ см, $AC = 21$ см.



Цікавинки від дідуса Тараса

Фалес (або **Талес**) **Мілетський** (VII–VI ст. до н. е.) — математик, астроном і філософ із давньогрецького міста Мілет в Анатолії. Він був одним із семи мудреців Стародавньої Греції (разом із *Піттаком Мітеленським*, *Солоном Афінським*, *Клеобулом Ліндським*, *Біасом Приєнським*, *Міносом Хенейським*, *Хілоном Спартанським*).

Багато мислителів, зокрема *Аристотель*, вважали Фалеса першим філософом у грецькій традиції, а в інших історичних джерелах його визнано першою людиною, яка займалася науковою філософією.

Фалеса також часто називають «батьком науки», оскільки вважають, що саме він першим познайомив греків із геометрією. Йому приписують відкриття та доведення багатьох відомих нині теорем: про поділ кола діаметром навпіл; про те, що вписаний кут, який спирається на півколо, є прямим; про рівність кутів при основі рівнобічного трикутника; про рівність вертикальних кутів; про рівність і пропорційність відрізків, утворених на прямих, які перетинаються кількома паралельними прямими, тощо. Також Фалес з'ясував, що трикутник однозначно визначається стороною і двома прилеглими до неї кутами.



Запитання і завдання від дідуса Тараса

1. Користуючись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про Фалеса Мілетського. Підготуйте невелике повідомлення. Який факт біографії Фалеса вразив вас найбільше?

2. Чи доводилося вам раніше будувати паралельні прямі на місцевості? Якщо так, то поділіться досвідом такої побудови. Запропонуйте кілька альтернативних способів побудови паралельних прямих на місцевості без використання теореми Фалеса. Порівняйте простоту та ефективність цих способів.

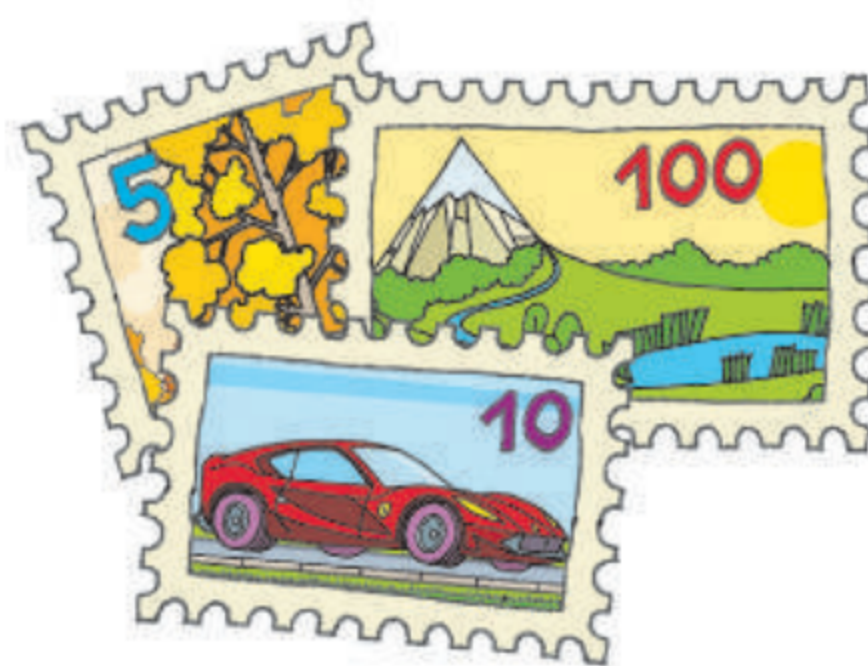


Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x + 5y = -1 \end{cases}$ а) способом підстановки; б) способом додавання; в) графічним способом. Переконайтеся в ідентичності відповідей.

2. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) : \frac{x+2}{2x}$, якщо $x = 0,24$.

3. Марія запитала в Олега, який збирав марки з природою та транспортом, скільки в нього марок кожного виду. Олег відповів: «Марок з природою в мене на 10 більше, ніж марок з транспортом, а якщо перемножити кількості марок кожного виду, то вийде 42 000 марок». Допоможіть Марії дізнатися, скільки марок кожного виду в Олега.



4. У дельтоїда $ABCD$ діагональ $AC = 10$ см, а $\angle B = \angle D = 90^\circ$. Доведіть, що навколо цього дельтоїда можна описати коло. Знайдіть радіус цього кола.
5. Користуючись довідковими системами, дайте означення пилососа. Побудуйте від цього означення ланцюжок з означень дедалі більш загальних понять доти, поки не отримаєте неозначуване поняття. До якого неозначуваного поняття ви врешті дійшли?

§ 18. Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників



Послухай, Тетяно, учора семикласник Марко попросив пояснити, чому сума кутів трикутника дорівнює 180° . Тож я розповів йому про те, як рік тому ми малювали схему трикутного тролейбусного маршруту в місті (пам'ятник Шевченку — універмаг — Центральний ринок), а потім виміряли кути цього трикутника транспортиром, і в нас обох вийшло 180° . Зрештою, я показав йому доведення теореми про суму кутів трикутника, і він його зрозумів, але запитав: «А чому ти вважаєш, що кути на схемі й кути на реальному маршруті мають бути однаковими?» Я сказав, що подумаю і потім відповім.



Правильно сказав, завжди краще спочатку подумати, а потім уже щось говорити. Я теж колись ставила собі таке питання, добре поміркувала й вирішила, що якщо сторони трикутника збільшити в одну й ту саму кількість разів, то його кути не повинні змінитися. Наприклад, коли ми користуємося збільшувальним склом, то на ньому написано, що воно всі відстані збільшує в якусь кількість разів, але при цьому прямокутний

учнівський квиток все одно залишається прямокутним — я перевіряла.



А може, інші кути, відмінні від прямих, якось змінюються? Я розумію, що на картах, наприклад, зазначають масштаб, який показує відношення розміру зображення об'єкта до його реального розміру, але ніде не написано, що всі кути мають при цьому залишатися незмінними.



Як на мене, це майже очевидно. Якби було не так, то всі карти не мали б жодного сенсу, бо за ними не можна було б нічого розрахувати, зокрема й кути поворотів для японського громадського транспорту без водія, про який ми теж згадували торік.



Логічно, але дідусь Тарас колись цитував одного вченого, який казав, що тільки-но вчені взялися доводити очевидні твердження, більшість із цих тверджень виявилися неправильними.

Петрик навів цитату *Бертрана Рассела* (1872–1970) — британського філософа, логіка, математика, громадського діяча.



Мабуть, таки варто поцікавитись у вчителів. Можливо, це питання не таке просте, як здається на перший погляд.



Питання Марка насправді не дуже просте, хоча в цьому випадку, Тетянко, інтуїція тебе не підвела. Але про все по черзі.

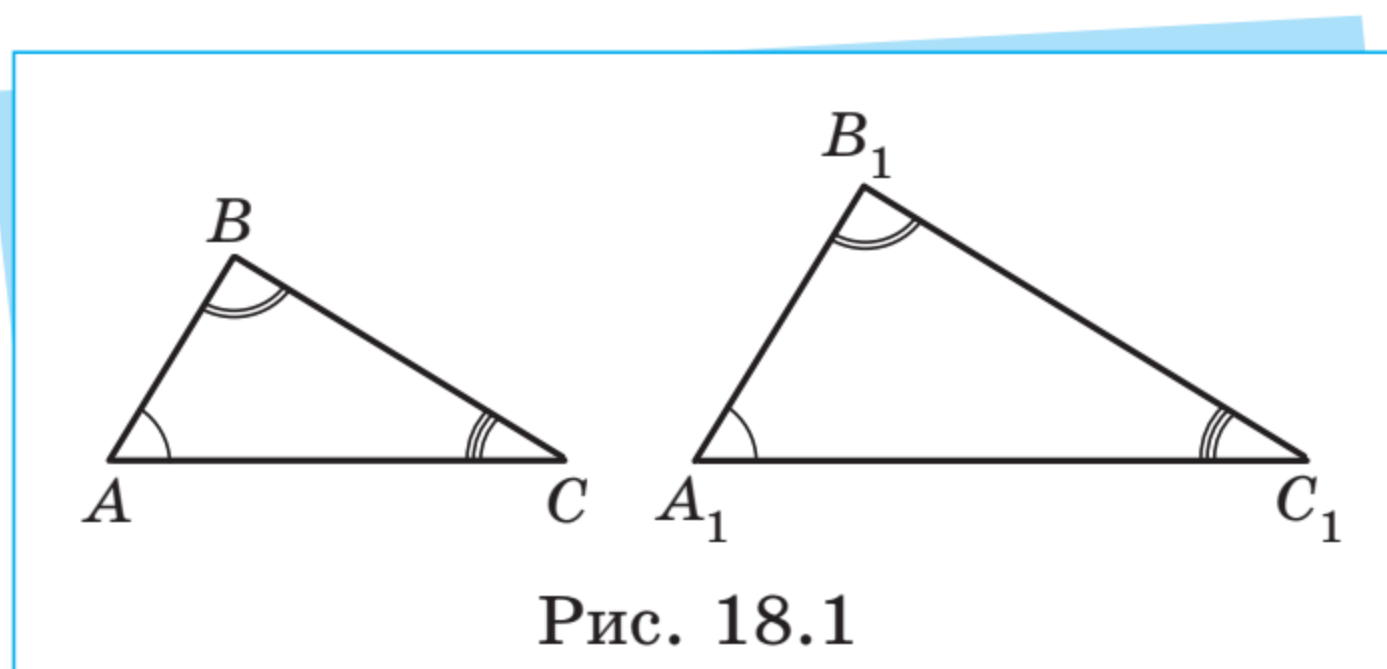


Два трикутники називають **подібними**, якщо їхні відповідні кути рівні, а відповідні сторони — пропорційні.

Наприклад, якщо на рис. 18.1 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, а також

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k, \text{ то трикутники } ABC \text{ і } A_1B_1C_1 \text{ є подібни-}$$

ми. Число k при цьому називають **коефіцієнтом подібності**, а саму подібність символічно записують так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ або $\triangle ABC \overset{k}{\sim} \triangle A_1B_1C_1$.



Зрозуміло, що всі рівні трикутники можна вважати подібними з коефіцієнтом $k = 1$.



Аналогічно до означення рівних трикутників (згадайте його), в означенні подібних трикутників потрібно, щоб були правильними *шість рівностей* — три для градусних мір кутів, а ще три — для відношень довжин сторін. Однак, як і у випадку з рівністю трикутників, для того щоб два трикутники були подібними, іноді буває достатньо, щоб із цих шести рівностей виконувалася лише частина, а решта рівностей справджуватиметься автоматично. Як ви вже знаєте, такі твердження природно назвати *ознаками подібності трикутників*.

Найчастіше використовують *три ознаки подібності трикутників*. Щоб було простіше їх доводити, доведемо спочатку **лему** — допоміжне твердження, яке ми використаємо надалі для доведення кількох теорем.



ЛЕМА (про подібні трикутники).

Пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.

Доведення. Нехай на рис. 18.2 зображено трикутник ABC , а пряма l , паралельна до його сторони AC , перетинає сторони AB і BC у точках K і M відповідно. Покажемо, що $\triangle KBM \sim \triangle ABC$.

$\angle K = \angle A$ і $\angle M = \angle C$ як відповідні кути для паралельних прямих l і AC , перетнутих січними AB і BC відповідно. Отже, відповідні кути трикутників KBM і ABC рівні.

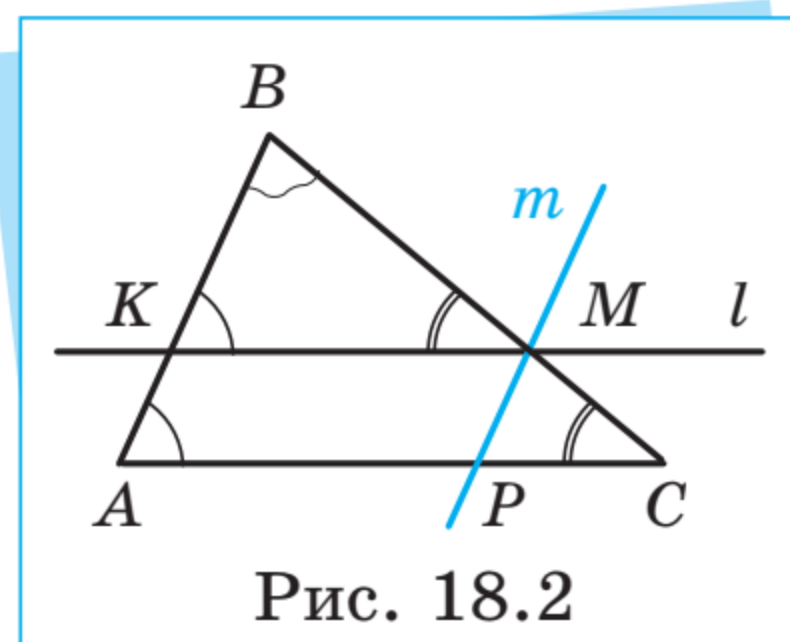


Рис. 18.2

За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{BK}{BM} = \frac{BA}{BC}$, звідки за властивістю пропорції $\frac{BK}{BA} = \frac{BM}{BC}$. Через точку M проведемо пряму t паралельно до прямої AB . Нехай ця пряма перетинає сторону AC трикутника ABC у точці P . За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{BC}{AC} = \frac{BM}{AP}$, звідки $\frac{BM}{BC} = \frac{AP}{AC}$. Оскільки за побудовою $AKMP$ — паралелограм, то $AP = KM$. Отже, ми показали, що $\frac{BK}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{KM}{AC}$, тобто відповідні сторони трикутників KBM і ABC є пропорційними. Враховуючи раніше доведену рівність відповідних кутів, стверджуємо, що $\triangle KBM \sim \triangle ABC$ за означенням.



Тепер сформулюємо й доведемо ознаки подібності трикутників.



ТЕОРЕМА (перша ознака подібності трикутників — за двома кутами).

Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то ці трикутники є подібними.

Доведення. Нехай на рис. 18.3 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Покажемо, що ці трикутники є подібними.

Якщо $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники будуть подібними з коефіцієнтом $k=1$. Припустимо, що $AB > A_1B_1$, міркування для випадку $AB < A_1B_1$ будуть аналогічними. На промені BA від точки B відкладемо відрізок $BK = A_1B_1$, проведемо через точку K пряму $l \parallel AC$ та позначимо як M точку її перетину з прямою BC . За лемою про подібні трикутники $\triangle KBM \sim \triangle ABC$. Але $\angle A = \angle K$ як відповідні кути, утворені в разі перетину паралельних прямих l і AC січною AB . Тому $\triangle KBM = \triangle A_1B_1C_1$, а отже, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, що й вимагалось довести.

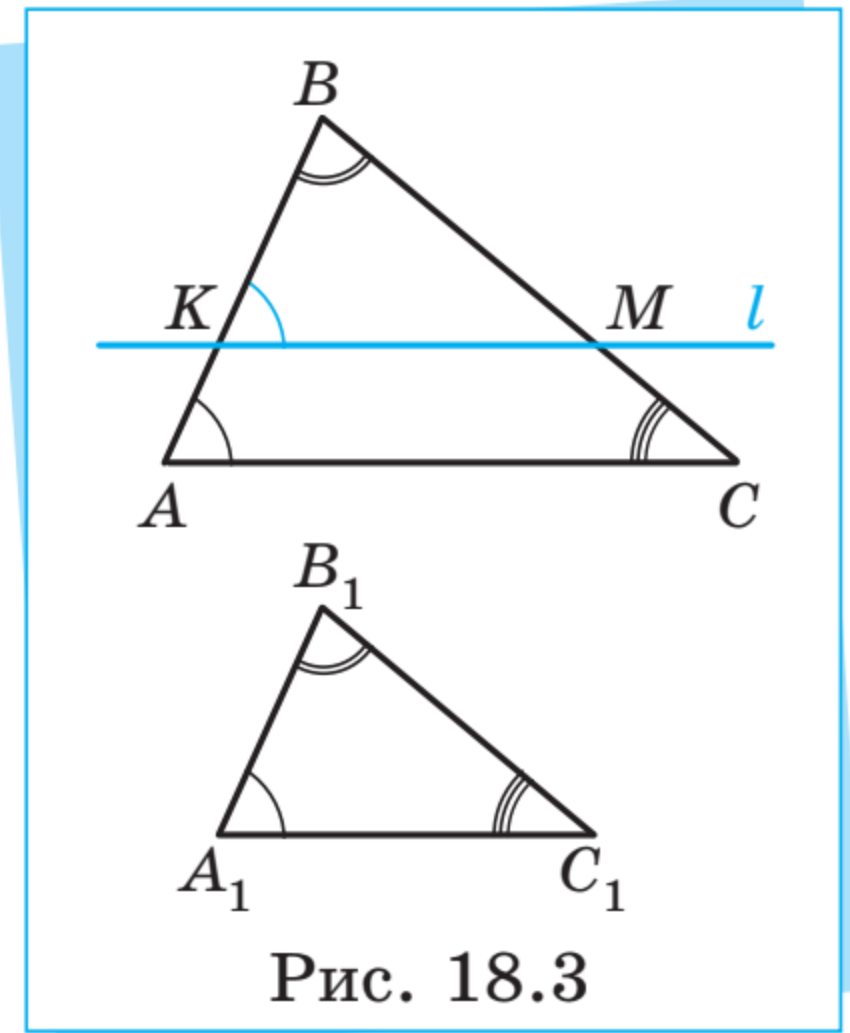


Рис. 18.3



Зауважимо, що в першій ознаці рівності трикутників рівність третьої пари відповідних кутів трикутника випливає з теореми про суму кутів трикутника. Тому першу ознаку подібності трикутників іноді називають ознакою подібності трикутників за двома або за трьома кутами. Перейдімо до наступної ознаки.



ТЕОРЕМА (друга ознака подібності трикутників — за кутом і двома пропорційними сторонами).

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники є подібними.

Доведення другої ознаки подібності трикутників:
rnk.com.ua/109376





Відповідь на запитання Марка до Петрика дає таке твердження.



ТЕОРЕМА (третя ознака подібності трикутників — за трьома пропорційними сторонами).

Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники є подібними.

Доведення. Нехай на рис. 18.4 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$. Покажемо, що ці трикутники подібні.

Якщо $k=1$, то ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а отже, і подібні. Припустимо, що $k > 1$, міркування для $k < 1$ будуть аналогічними. На променях BA і BC від точки B відкладемо відрізки $BK = A_1B_1$ і $BM = B_1C_1$. Тоді $\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BM} = k$.

Також під час доведення другої ознаки подібності трикутників ми встановили, що $KM \parallel AC$. Отже, за лемою про подібні трикутники $\triangle ABC \sim \triangle KBM$, звідки $\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BM} = \frac{AC}{KM} = k$, тобто $AC = k \cdot KM$. Але за умовою $AC = k \cdot A_1C_1$, звідки $KM = A_1C_1$. Тому $\triangle KBM = \triangle A_1B_1C_1$ за трьома сторонами, а отже, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

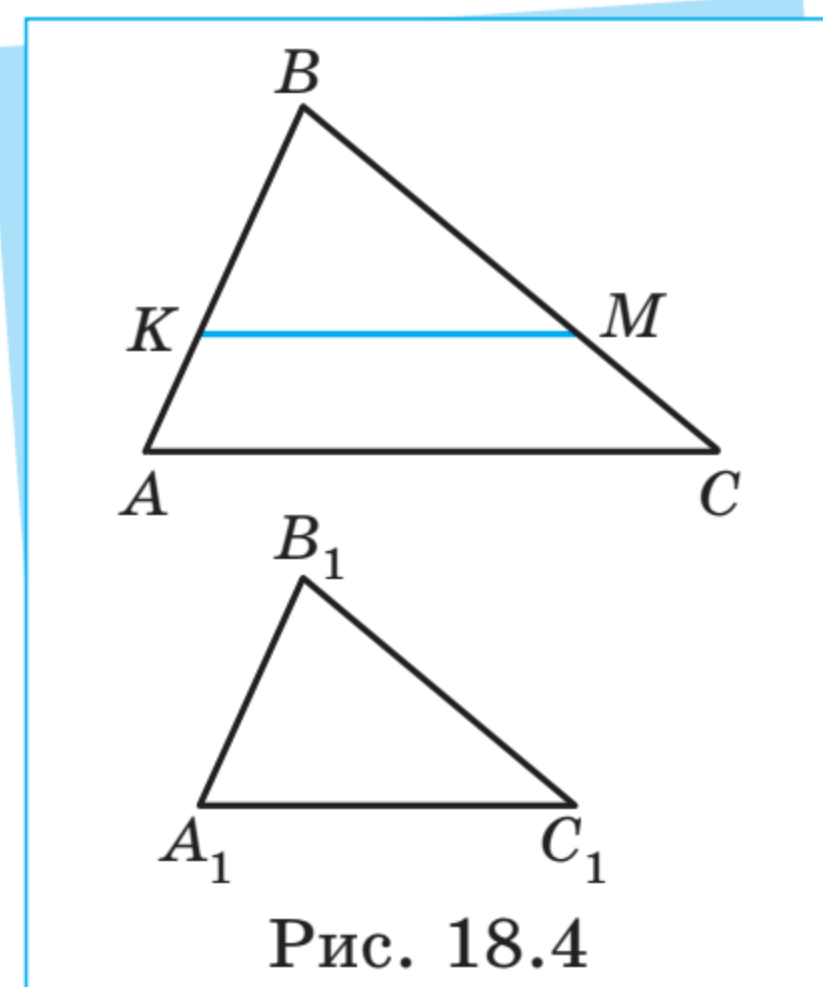


Рис. 18.4



Отже, справді, **зі збільшенням чи зменшенням довжин усіх сторін трикутника в однакову кількість разів градусні міри кутів не змінюються**. Цей факт, зокрема, дає можливість вивчати властивості великих об'єктів, зображуючи їх на рисунках, або властивості малих об'єктів, використовуючи прилади для збільшення — лупи, мікроскопи тощо. Однак ознаки подібності мають і численні застосування в математиці. Наведемо кілька прикладів важливих задач, які будуть корисними в подальшому.

Задача 1. (властивість хорд). Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці M , то правильною є рівність $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Розв'язання. Проведемо хорди AD і BC (рис. 18.5). $\triangle DAM \sim \triangle BCM$ за двома кутами, оскільки $\angle B = \angle D$ як вписані кути, що спираються на одну дугу, а $\angle AMD = \angle CMB$ як вертикальні. Отже, $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$, звідки за властивістю пропорції $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, що й вимагалось довести.

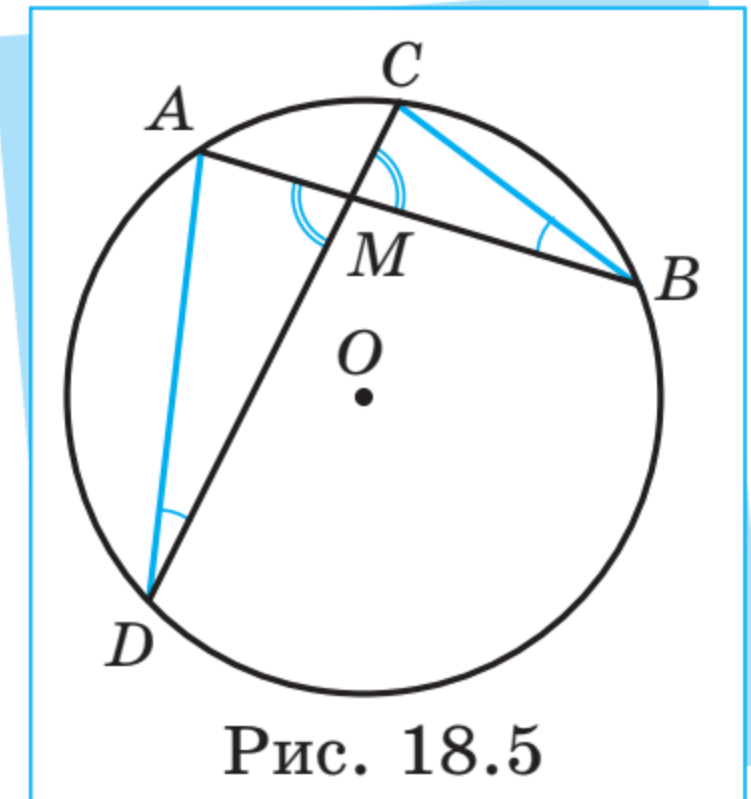


Рис. 18.5

Задача 2. (властивість січних). Якщо через точку S , що не належить колу, визначеному даним колом, до кола проведено дві січних, які перетинають це коло відповідно у точках A, B і C, D (рис. 18.6), то правильною є рівність $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Розв'язання. Проведемо хорди AD і BC . $\triangle SBC \sim \triangle SDA$ за двома кутами, оскільки $\angle B = \angle D$ як вписані кути, що спираються на одну дугу, а $\angle S$ є спільним для обох трикутників. Отже, $\frac{SB}{SD} = \frac{SC}{SA}$, звідки за властивістю пропорції $SA \cdot SB = SC \cdot SD$, що й вимагалось довести.

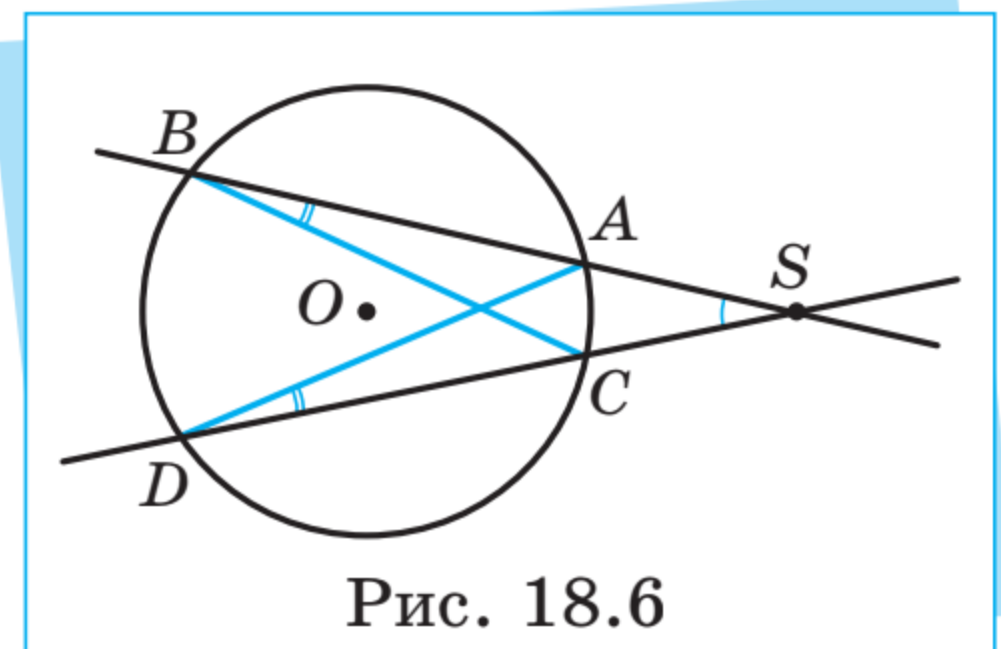


Рис. 18.6



Перевірте себе!

1. Сформулюйте означення подібних трикутників. Що називають коефіцієнтом подібності двох трикутників?
2. Сформулюйте першу, другу й третю ознаки подібності трикутників.
3. Сформулюйте властивість хорд і властивість січних.



Тренажерний зал



Початковий рівень

- Відомо, що $\triangle LBC \sim \triangle L_1B_1C_1$. Запишіть пропорційність сторін цих трикутників.
- Відомо, що $\triangle DMK \sim \triangle BCP$. Запишіть, які кути є рівними.
- Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 40$ см, $A_1B_1 = 8$ см. Обчисліть коефіцієнт подібності цих трикутників.
- Відомо, що $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$, $AM = 35$ см, $A_1M_1 = 5$ см. Обчисліть коефіцієнт подібності цих трикутників.
- У кожному з випадків *a–г* на рис. 1 наведено пару трикутників, рівні кути яких позначено однаковими дужками. Запишіть пари подібних трикутників. За якою ознакою вони подібні?

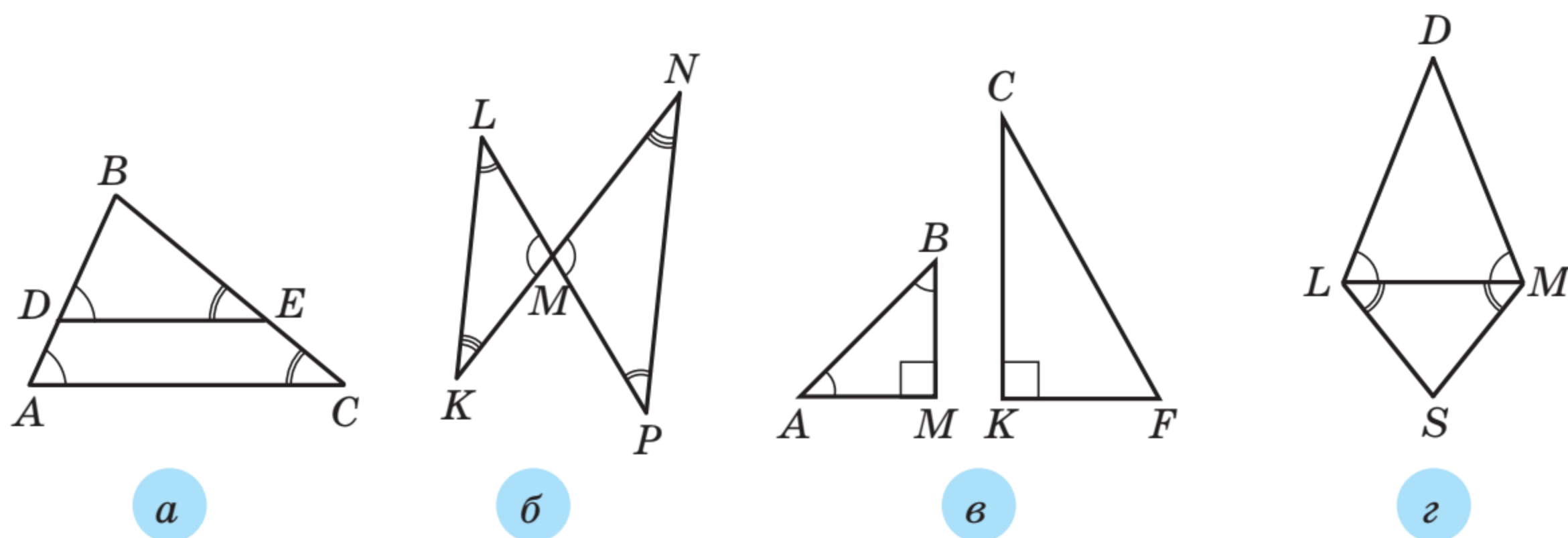


Рис. 1

- У кожному з випадків *a–г* на рис. 2 наведено пару трикутників, рівні кути яких позначено однаковими дужками. Запишіть пари подібних трикутників. За якою ознакою вони подібні?

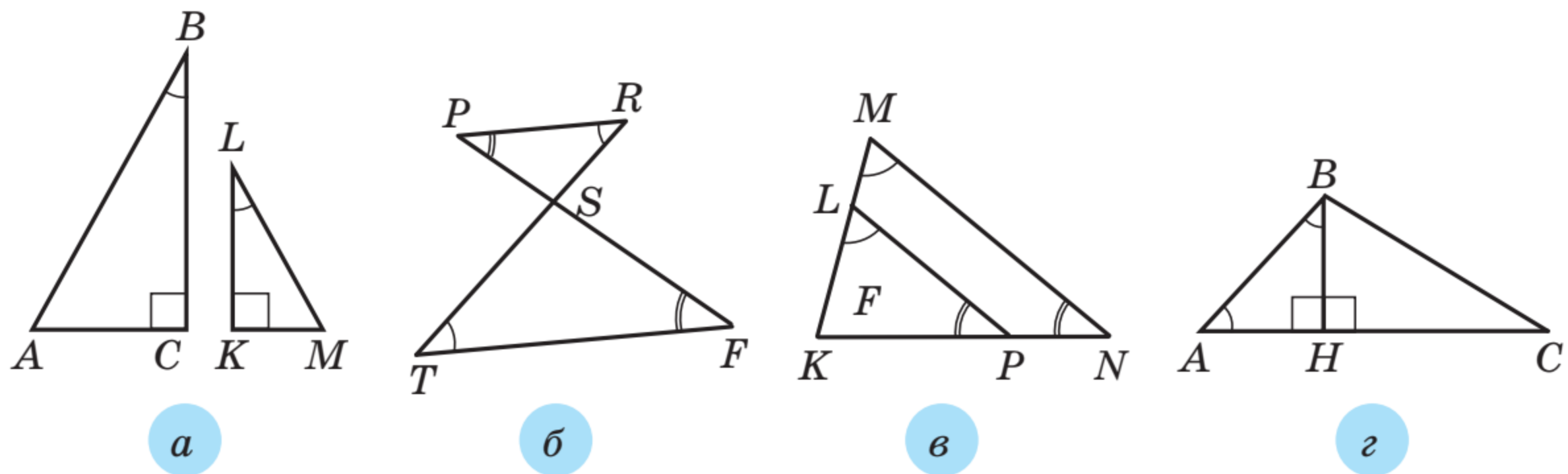


Рис. 2

7. Відомо, що $\triangle FBC \sim \triangle F_1B_1C_1$; $\angle F = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Обчисліть усі кути трикутника $F_1B_1C_1$. Скористайтесь властивістю: сума всіх кутів трикутника дорівнює 180° .
8. Відомо, що $\triangle KPL \sim \triangle K_1P_1L_1$; $\angle K = 40^\circ$, $\angle P = 75^\circ$. Обчисліть усі кути трикутника $K_1P_1L_1$. Скористайтесь властивістю: сума всіх кутів трикутника дорівнює 180° .
9. Відомо, що в трикутника ABC $\angle A = 38^\circ$, $AB = 28$ см, $AC = 35$ см, а в трикутника KLM $\angle K = 38^\circ$, $KL = 4$ см, $KM = 5$ см. Чи є подібними трикутники ABC і KLM ? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні та яким є коефіцієнт подібності?
10. Відомо, що в трикутника CBM $\angle C = 50^\circ$, $CB = 16$ см, $CM = 20$ см, а в трикутника KLP $\angle K = 50^\circ$, $KL = 4$ см, $KP = 5$ см. Чи є подібними трикутники CBM і KLP ? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні та яким є коефіцієнт подібності?
11. Відомо, що в трикутника ABC всі сторони в шість разів більші, ніж відповідні сторони трикутника NKM . Чи є подібними трикутники ABC і NKM ? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні та яким є коефіцієнт подібності?
12. Відомо, що в трикутника PRN усі сторони у два рази більші, ніж відповідні сторони трикутника CFD . Чи є подібними трикутники PRN і CFD ? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні та яким є коефіцієнт подібності?

13. Відстань між українськими містами Сімферополь і Київ дорівнює 650 км, між Києвом і Харковом — 410 км, Харковом і Сімферополем — 550 км. Відстані між відповідними містами на карті дорівнюють 65 см, 41 см і 55 см відповідно. Чи є подібними трикутники Сімферополь — Київ — Харків у реальності та на карті? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні?

14. Відстань на карті між українськими містами Вінниця й Донецьк дорівнює 67 см, між Вінницею та Одесою — 36 см, Одесою та Донецьком — 57 см. Відстані між відповідними містами в реальності дорівнюють 670 км, 360 км і 570 км відповідно. Чи є подібними трикутники Вінниця — Донецьк — Одеса на карті та в реальності? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні?



Середній рівень

15. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причому $\frac{AB}{A_1B_1} = 2$. Знайдіть довжини сторін трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см.

16. Відомо, що $\triangle MNK \sim \triangle M_1N_1K_1$, причому $\frac{MK}{M_1K_1} = \frac{1}{3}$. Знайдіть довжини сторін трикутника MNK , якщо $M_1N_1 = 3$ см, $N_1K_1 = 6$ см, $M_1K_1 = 6$ см.

17. На рис. 3 $\triangle ABC \sim \triangle EFD$. Знайдіть довжину сторони BC .

18. На рис. 4 $\triangle MNP \sim \triangle AOK$. Знайдіть довжину сторони OK .

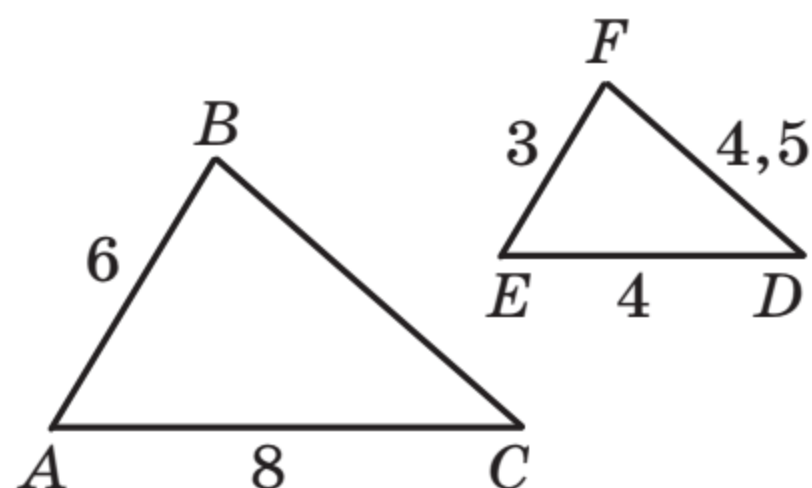


Рис. 3

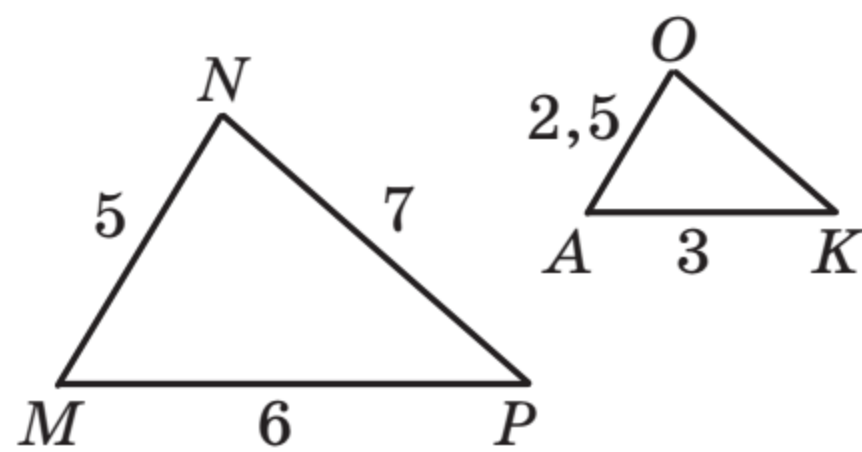
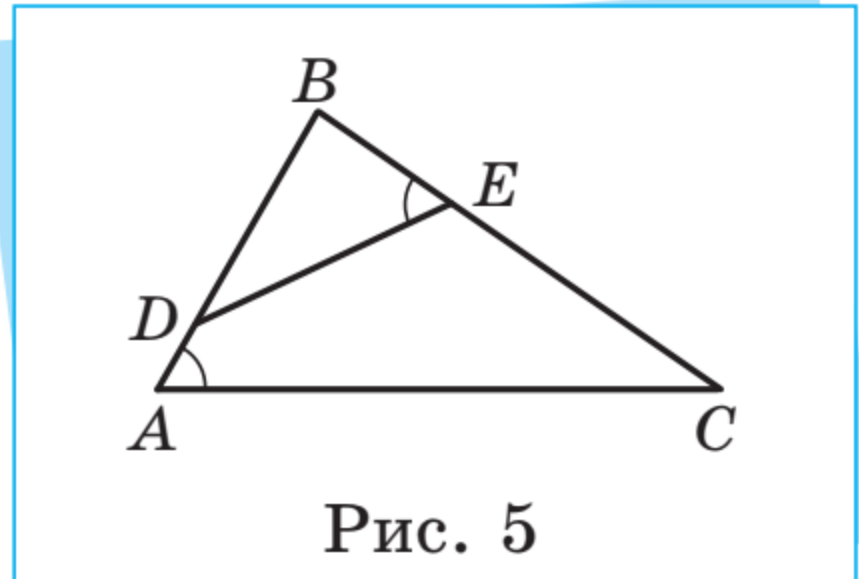
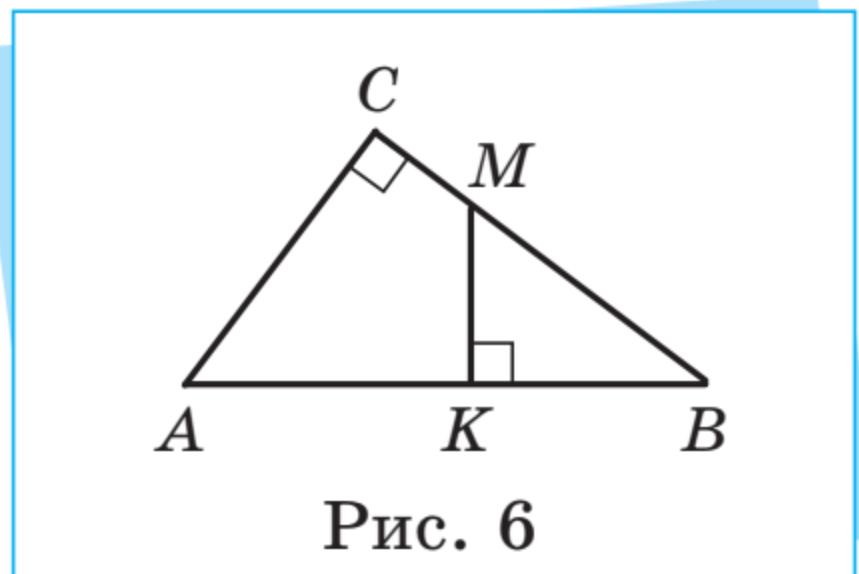


Рис. 4

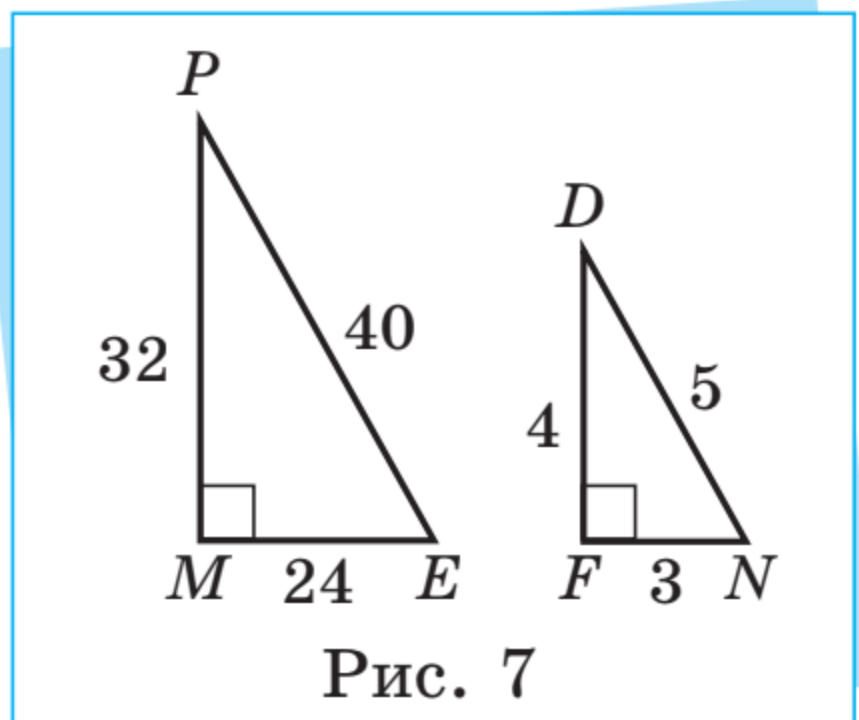
19. На сторонах трикутника ABC взято точки D і E так, що $\angle BAC = \angle BED$ (рис. 5). Які трикутники на рис. 5 є подібними? Запишіть відношення їх сторін.



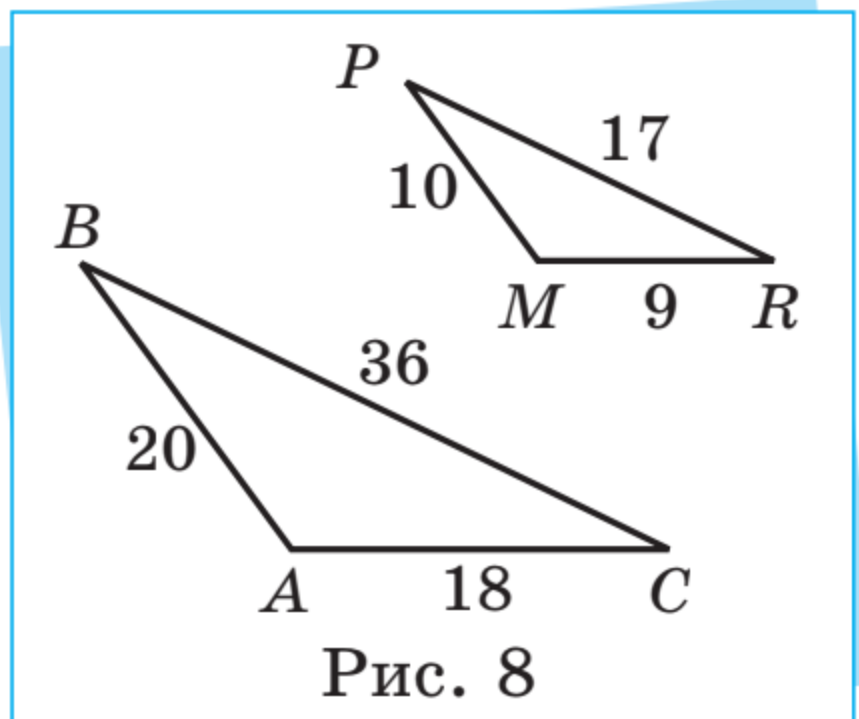
20. На стороні BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) взято точку M і проведено $MK \perp AB$ (рис. 6). Які трикутники на рис. 6 є подібними? Запишіть відношення їх сторін.



21. Довжини сторін трикутника MPE дорівнюють 32 см, 40 см і 24 см, а довжини сторін трикутника FDN дорівнюють 4 см, 5 см і 3 см (рис. 7). Перевірте, чи є подібними трикутники MPE і FDN . Якщо так, то за якою ознакою?



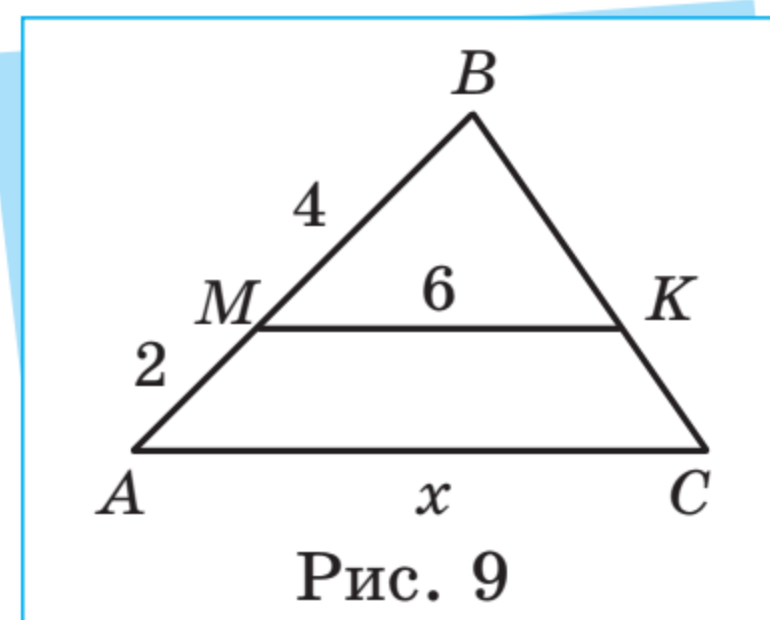
22. Довжини сторін трикутника ABC дорівнюють 20 см, 36 см і 18 см, а довжини сторін трикутника MPR дорівнюють 9 см, 10 см і 17 см (рис. 8). Перевірте, чи є подібними трикутники MPR і ABC . Якщо так, то за якою ознакою?



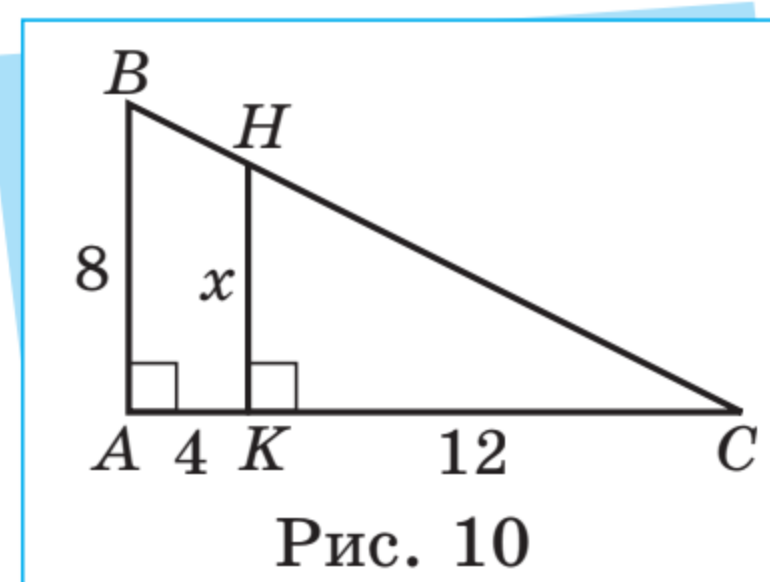
23. Трикутники ABC і MNK — подібні. Знайдіть:
- градусну міру кута B , якщо $\angle M = 28^\circ$, $\angle K = 60^\circ$;
 - довжину сторони AB , якщо $AC = 15$ см, $MN = 39$ см, $MK = 45$ см.

24. Трикутники ABC і MNK — подібні. Знайдіть:
 а) градусну міру кута N , якщо $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 73^\circ$.
 б) довжину сторони MK , якщо $AB = 15$ см, $AC = 13$ см, $MN = 5$ см.

25. У трикутнику ABC проведено $MK \parallel AC$ (рис. 9). Запишіть відношення сторін трикутників ABC і MBK . Знайдіть довжину відрізка AC , якщо $BM = 4$ см, $AM = 2$ см, $MK = 6$ см.



26. У трикутнику ABC проведено $NK \parallel AB$ (рис. 10). Запишіть відношення сторін трикутників ABC і KNC . Знайдіть довжину відрізка NK , якщо $AB = 8$ см, $AK = 4$ см, $KC = 12$ см.



27. У подібних трикутників ABC і PKM $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle K$, $AB = 20$ см, $BC = 15$ см, $AC = 10$ см, $PM = 18$ см. Знайдіть довжини сторін PK і KM .

28. У подібних трикутників ABC і MKP $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle P$, $BC = 6$ см, $MK = 8$ см, $KP = 10$ см, $MP = 9$ см. Знайдіть довжини сторін AB і AC .



Достатній рівень

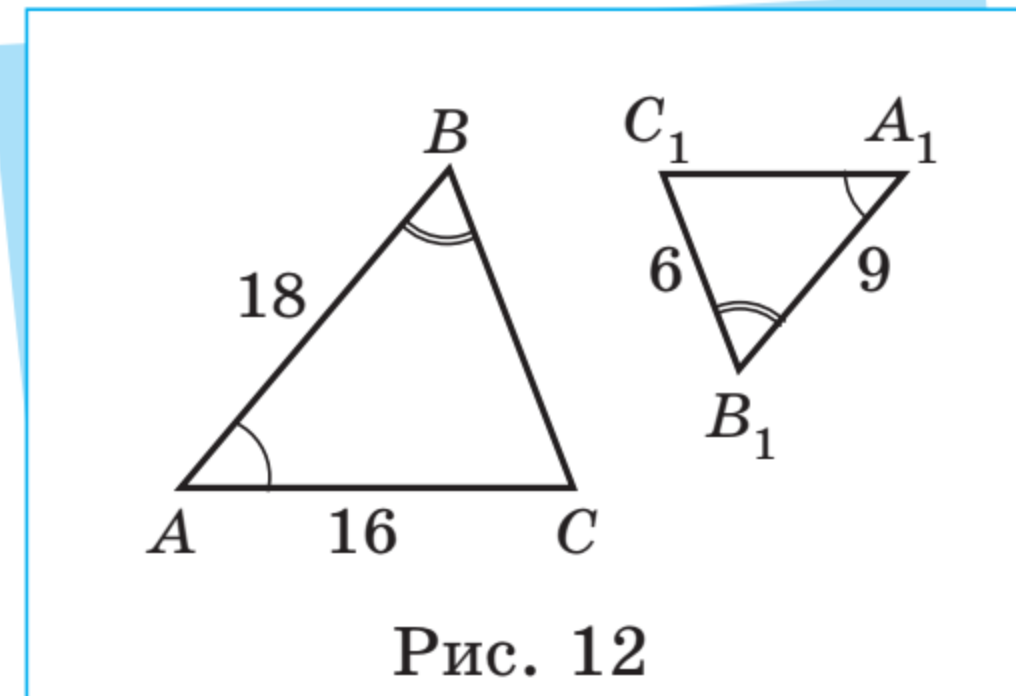
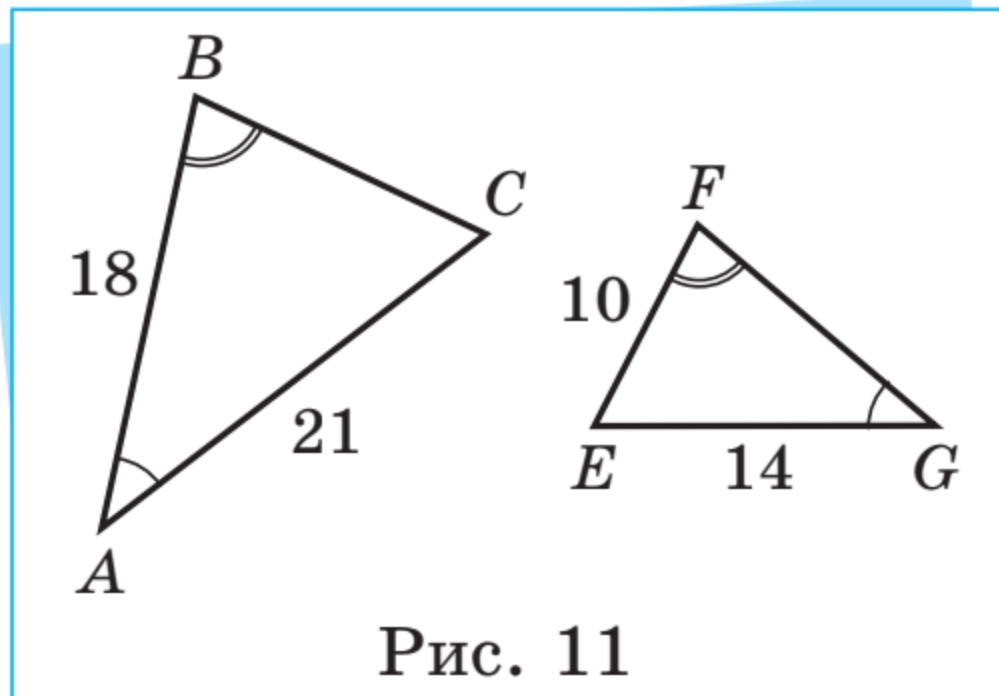
29. У трикутнику ABC , периметр якого дорівнює 28 см, паралельно стороні BC проведено середню лінію MN . Знайдіть периметр трикутника AMN .

30. У трикутнику ABC паралельно стороні AB проведено середню лінію EF . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника CEF дорівнює 17 см.

31. Відомо, що в трикутників ABC і EFG $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, $AB = 18$ см, $AC = 21$ см, $EF = 10$ см, $EG = 14$ см (рис. 11). Знайдіть довжини сторін BC і FG .



32. Відомо, що в трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 18$ см, $AC = 16$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 6$ см (рис. 12). Знайдіть довжини сторін BC і A_1C_1 .



33. У паралелограмі $ABCD$ із вершини B проведено висоти $BH \perp AD$ і $BN \perp CD$. Доведіть, що трикутники BHA та BNC є подібними.



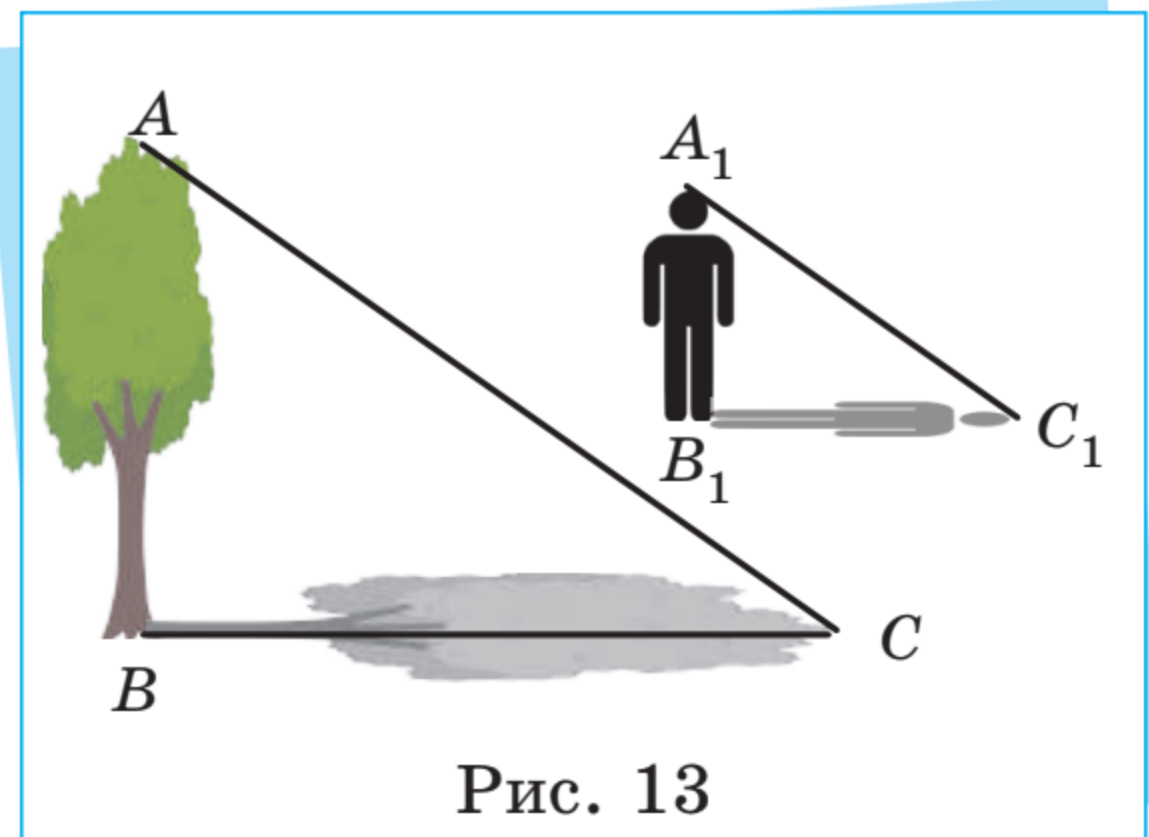
34. Діагоналі AC і BD рівнобічної трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутники AOD і BOC є подібними.

35. Доведіть: якщо два трикутники подібні до третього, то вони є подібними між собою.

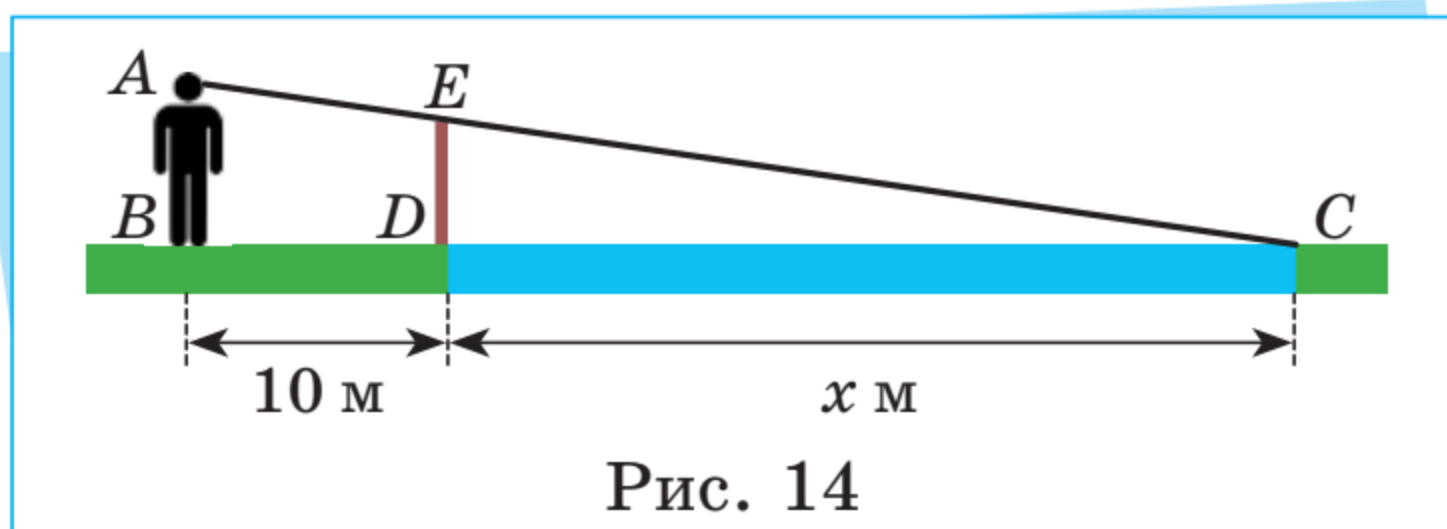


36. Доведіть: якщо в рівнобічних трикутниках кути, протилежні до основ, рівні, то ці трикутники є подібними.

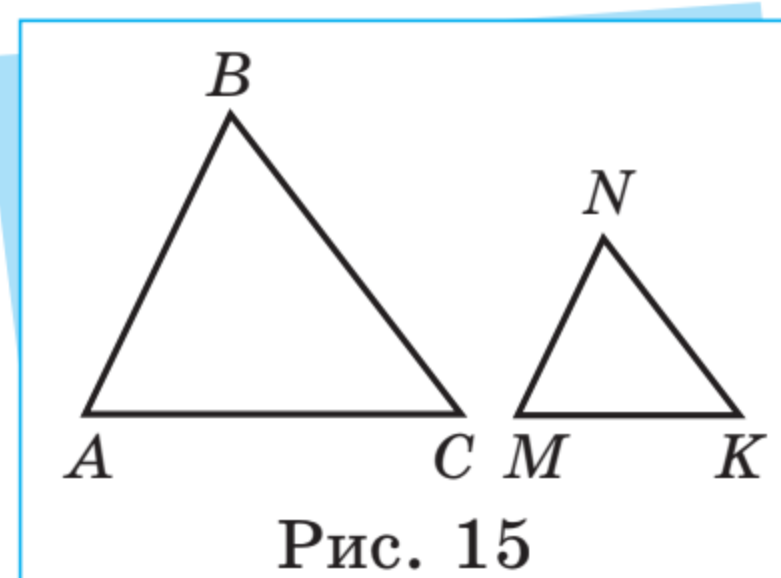
37. Сонячного дня тінь від людини, зріст якої 1,8 м, дорівнює 2,5 м, а тінь від дерева — 5 м (див. рис. 13). Знайдіть висоту дерева.



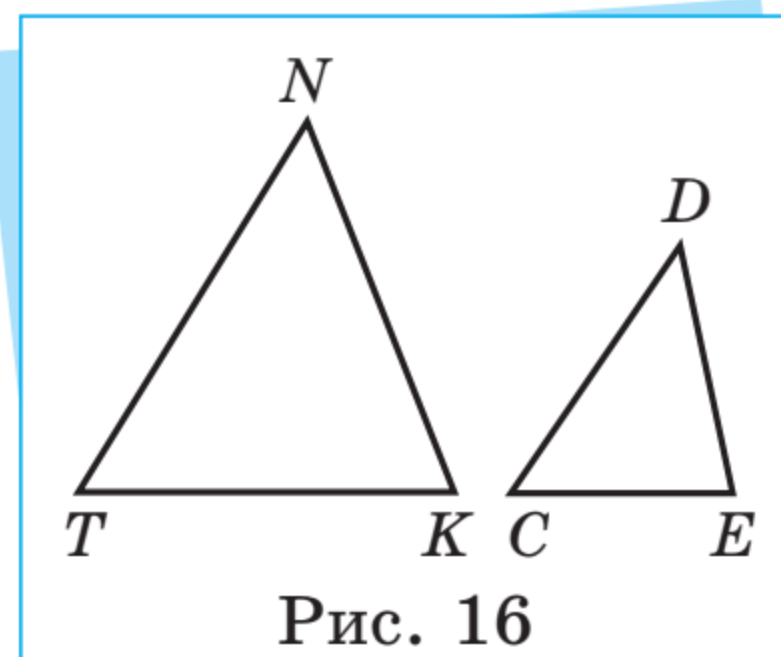
38. Щоб визначити ширину річки, на березі вертикально встановили жердину (ED) заввишки 1,5 м (див. рис. 14). Людина (AB), зріст якої (до рівня очей) 1,8 м, стоїть на відстані 10 м від жердини так, що верхівка жердини й край протилежного берега (C) розташовані на одній прямій. Визначте ширину річки.



39. Трикутники ABC і MNK — подібні (рис. 15). Знайдіть сторони трикутника MNK , якщо його периметр дорівнює 9 см і $AB=8$ см, $BC=9$ см, $AC=10$ см.



40. Трикутники TNK і CDE — подібні (рис. 16). Знайдіть сторони трикутника CDE , якщо його периметр дорівнює 54 см і $TN=11$ см, $NK=9$ см, $TK=7$ см.



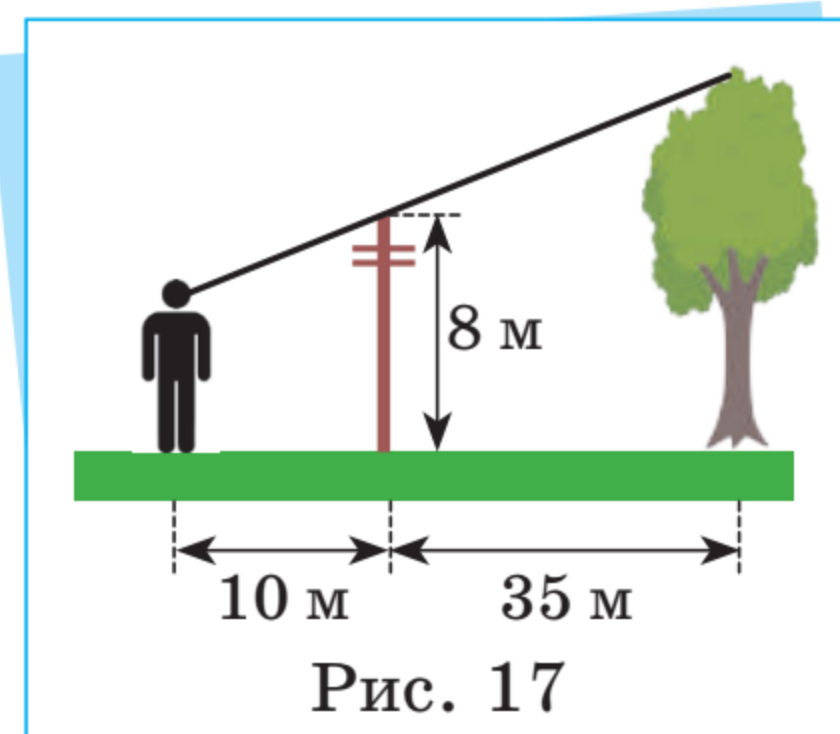
41. Діагональ трапеції завдовжки 28 см точкою перетину ділить іншу діагональ на відрізки довжиною 9 см і 5 см. Знайдіть довжину більшої основи трапеції та довжини відрізків, на які більша діагональ розділена точкою перетину, якщо відомо, що довжина меншої основи дорівнює 6 см.

42. Діагоналі трапеції перетинаються, і точкою перетину одна з діагоналей розділена на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть довжини основ трапеції, якщо відомо, що довжина меншої основи трапеції на 16 см менша від довжини більшої основи трапеції.



Високий рівень

43. Доведіть: у разі перетину діагоналей трапеції одержані відрізки разом з основами трапеції утворюють подібні трикутники. Укажіть коефіцієнт подібності.
44. Доведіть: у подібних трикутників відношення відповідних сторін дорівнює відношенню відповідних: а) висот трикутника; б) медіан трикутника; в) бісектрис трикутника; г) радіусів описаних кіл; д) радіусів вписаних кіл.
45. Доведіть: відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню їхніх відповідних сторін.
46. Доведіть: якщо коло вписане в рівнобічну трапецію, то квадрат діаметра кола дорівнює добутку основ трапеції.
47. Довжини основ трапеції дорівнюють 3 см і 6 см, а її висота 12 см. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей трапеції до її основ.
48. Довжина основи AC рівнобічного трикутника ABC дорівнює 16 см, а довжина його бічної сторони — 24 см. Відрізки AK і CM — бісектриси трикутника. Знайдіть довжину відрізка MK .
49. Чоловік, зріст якого (до рівня очей) дорівнює 180 см, стоїть на відстані 10 м від стовпа. Він помітив, що верхівка стовпа й верхівка дерева розміщені на одній прямій (див. рис. 17). Знайдіть висоту дерева, якщо висота стовпа дорівнює 8 м, а відстань від стовпа до дерева становить 35 м.



50. Для знаходження ширини річки виконали побудови на місцевості, показані на рис. 18. Знайдіть ширину річки, якщо $BC = 2$ м, $CE = 10$ м, $FE = 1$ м, $FH = 1,5$ м.

51. Дано три відрізки a , b , c . Побудуйте відрізок $x = \frac{a \cdot b}{c}$.

52. Дано два відрізки a і b . Побудуйте відрізок $x = \frac{a^2}{b}$.

53. Побудуйте трикутник за двома кутами та: а) висотою; б) медіаною; в) бісектрисою, проведеними з вершини третього кута.

54. Побудуйте трикутник за двома кутами та радіусом: а) описаного кола; б) вписаного кола.

55. Відрізок, кінці якого лежать на бічних сторонах трапеції, паралельний основам цієї трапеції та проходить через точку перетину її діагоналей. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо довжини основ трапеції дорівнюють a і b .

56. У трикутник вписали квадрат так, як показано на рис. 19. Знайдіть сторону квадрата, якщо основа трикутника дорівнює a і висота, проведена до неї, дорівнює h .

57. Доведіть: якщо з точки C кола опущено перпендикуляр CD на діаметр AB , то $CD^2 = AD \cdot BD$.

58. Доведіть: якщо через точку A поза колом проведено дотичну AM до кола (M — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках B і C (див. рис. 20), то $AM^2 = AC \cdot AB$.

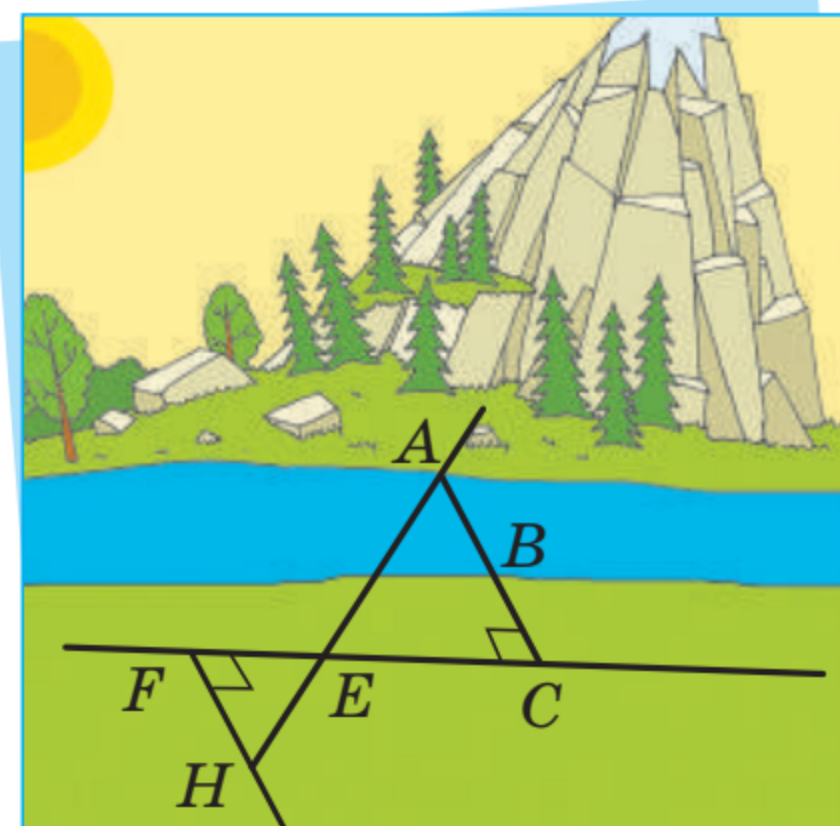


Рис. 18

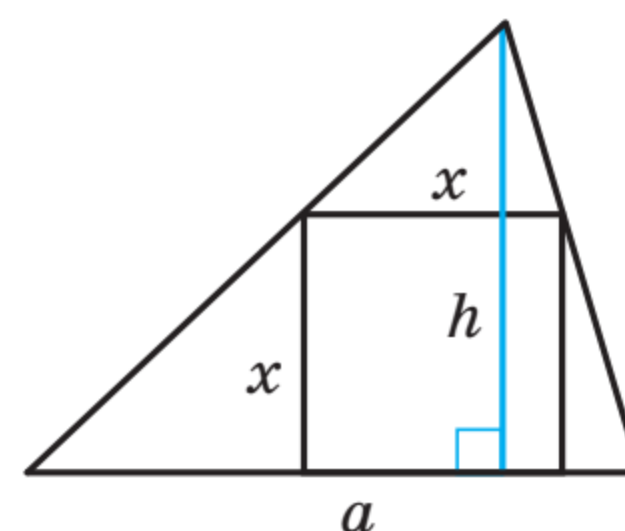


Рис. 19

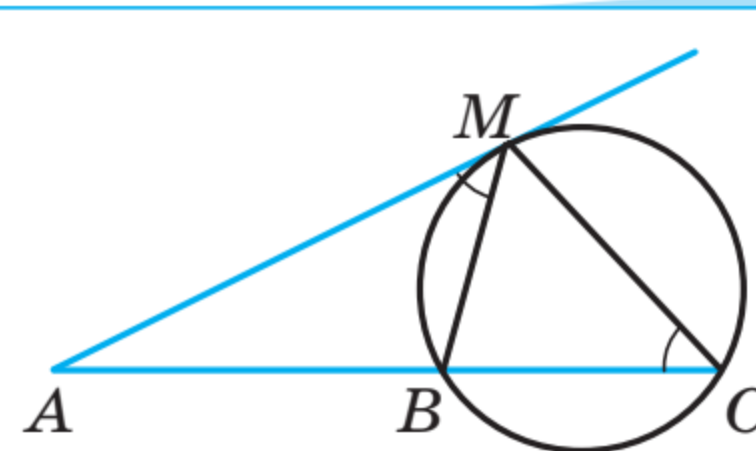


Рис. 20

59. Через точку C , яка лежить на продовженні діаметра AB кола за точку B , проведено пряму, яка дотикається до кола в точці K . Знайдіть CK , якщо радіус кола дорівнює $2,5$ см і $BC = 4$ см.

60. Градусна міра дуги AB кола з радіусом $\sqrt{2}$ см дорівнює 60° . На продовженні хорди AB за точку B позначили точку C так, що $BC = AB$, і через неї провели пряму, яка дотикається до кола в точці K . Знайдіть CK .

61. На рис. 21 AC — дотична до меншого кола, C — точка дотику, $AD = 2$ см, $DB = 16$ см. Знайдіть довжину відрізка AC .

62. На рис. 22 коло дотикається до сторони AC трикутника ABC у точці N і проходить через точку B . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AK = 3$ см, $AN = 6$ см, $NC = 8$ см, $CM = 4$ см.

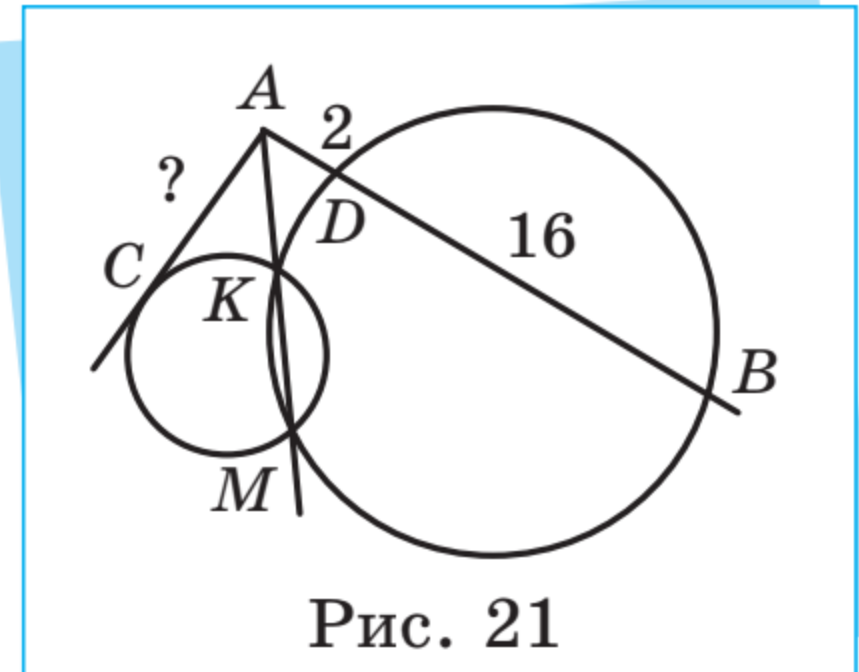


Рис. 21

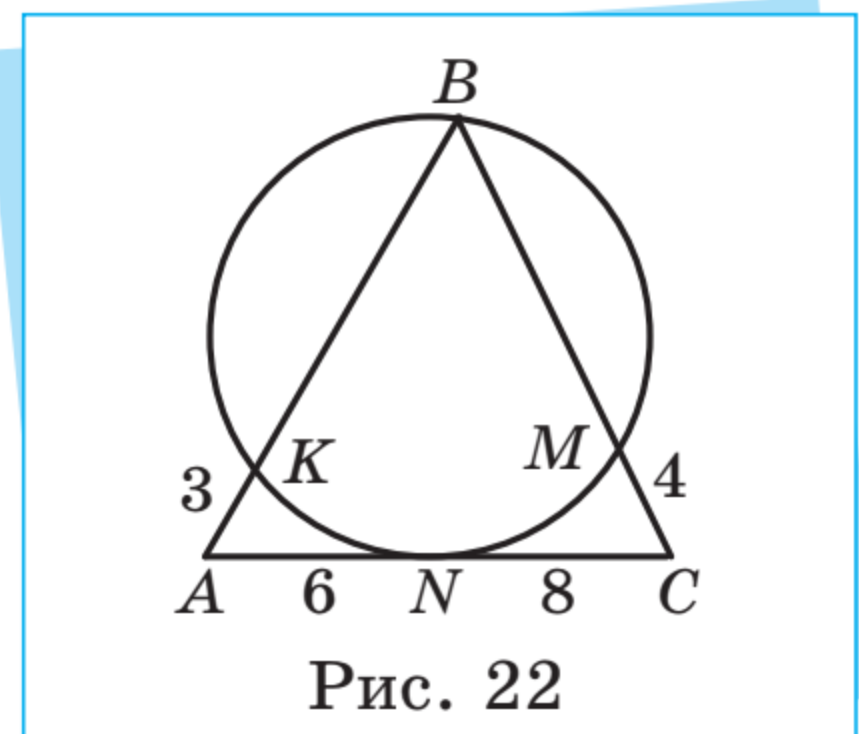


Рис. 22



Цікавинки від дідуса Тараса

За допомогою ознак подібності трикутників можна довести багато цікавих властивостей геометричних фігур, відомих із давніх часів. Розгляньмо, наприклад, теорему *Клавдія Птолемея* — давньогрецького математика, астронома й географа, який жив майже дві тисячі років тому (87–165 рр.).

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ: добуток діагоналей чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

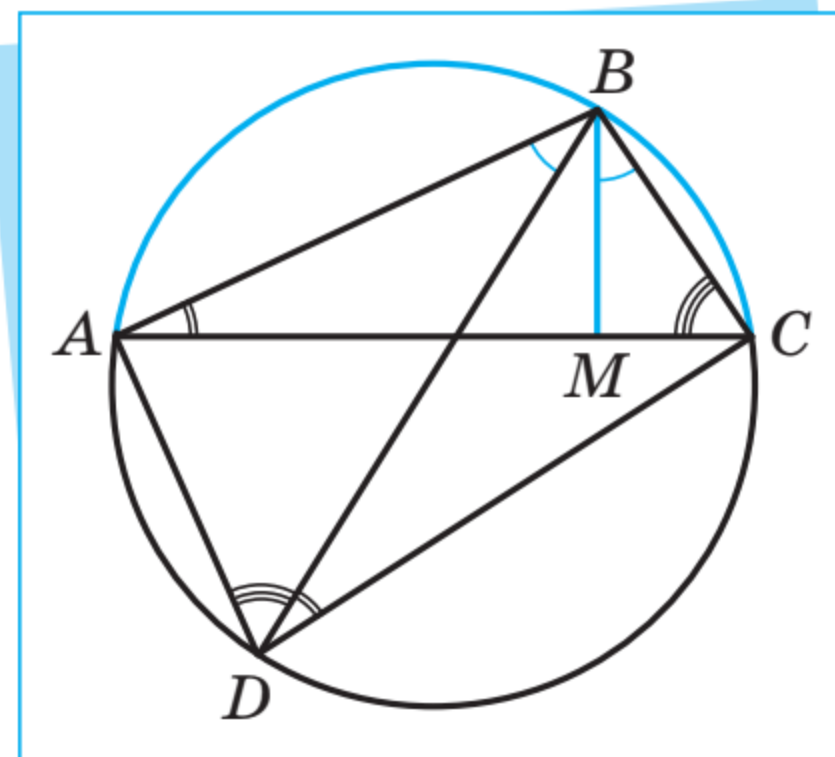
Доведення. Нехай на рисунку зображено чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло. Покажемо, що $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

На діагоналі AC оберемо точку M так, щоб $\angle CBM = \angle ABD$. $\angle MCB = \angle ADB$, бо вони спираються на одну дугу. Тоді $\triangle CBM \sim \triangle DBA$ за двома кутами, а отже, $\frac{BC}{BD} = \frac{CM}{AD}$, звідки $BC \cdot AD = BD \cdot CM$.

Оскільки $\angle CBD = \angle CBM + \angle MBD$, $\angle ABM = \angle ABD + \angle MBD$, а $\angle CBM = \angle ABD$, то $\angle CBD = \angle ABM$. Крім того, $\angle BDC = \angle BAM$, бо вони теж спираються на одну дугу. Тому $\triangle BDC \sim \triangle BAM$ за двома кутами, а отже, $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AM}$, звідки $AB \cdot CD = BD \cdot AM$.

Таким чином:

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AM + BD \cdot CM = BD \cdot (AM + CM) = BD \cdot AC$,
що й вимагалось довести.



Існують також інші цікаві математичні твердження, які доводять за допомогою ознак подібності трикутників і які пов'язані з іменами відомих математиків минулого: *теорема Менелая, теорема Чеви, теорема про пряму Ойлера* тощо. Дізнайтеся більше про ці твердження самотійно чи на заняттях математичного гуртка.



Запитання і завдання від дідуса Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про Клавдія Птолемея та його внесок у науку. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Відомо, що понад 1500 років помилкова геоцентрична система світу, розроблена Птолемеєм, була офіційно визнаною і використовувалась для астрономічних розрахунків, доки не була

спростована Миколаєм Коперником. Як ви вважаєте, чи можна теорії, які в подальшому не підтвердилися, вважати внеском у науку? Поясніть свою думку.

3. Чи доводилося вам мати про щось хибні уявлення, які в подальшому були спростовані? Якщо так, то поділіться своїм досвідом. Чи вважаєте ви корисним такий досвід? Поясніть свою думку.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Скориставшись властивостями квадратного кореня, знайдіть значення виразу.

а) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{6}$; б) $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{30}}{\sqrt{24}}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} = 4$.

3. В одному з міст України в листопаді було 40 % сонячних днів, а в лютому невисокосного року — лише 25 % сонячних днів. На скільки відсотків сонячних днів у листопаді було більше, ніж сонячних днів у лютому (у відсотках від кількості днів у лютому)? Відповідь округліть до десятих.

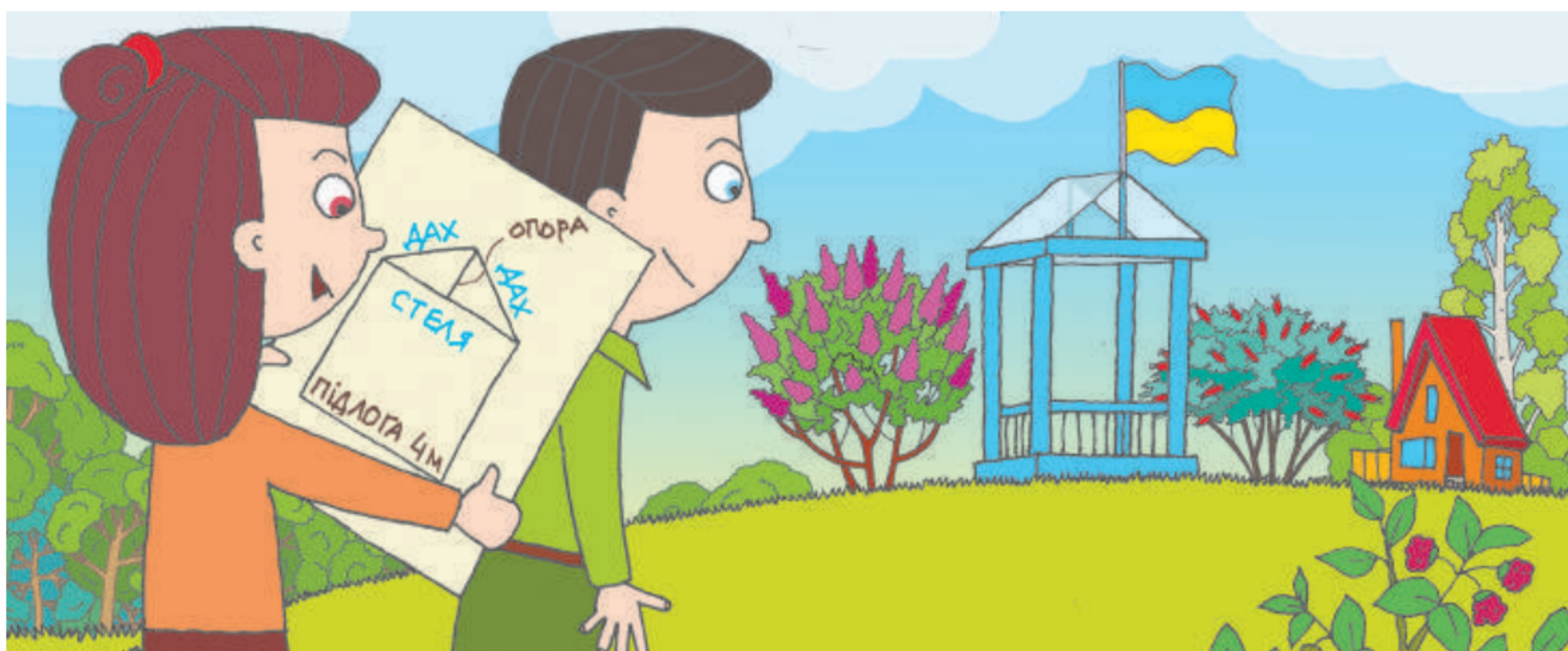


4. З'ясуйте, скільки парних чотирицифрових чисел можна утворити із цифр 0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, якщо цифри в кожному із чисел НЕ повторюватимуться.
5. У прямокутному трикутнику KMP із прямим кутом M кут P удвічі більший за кут K . Знайдіть довжину (в см) кола, описаного навколо цього трикутника, якщо $PM = 5$ см. Відповідь округліть до десятих.

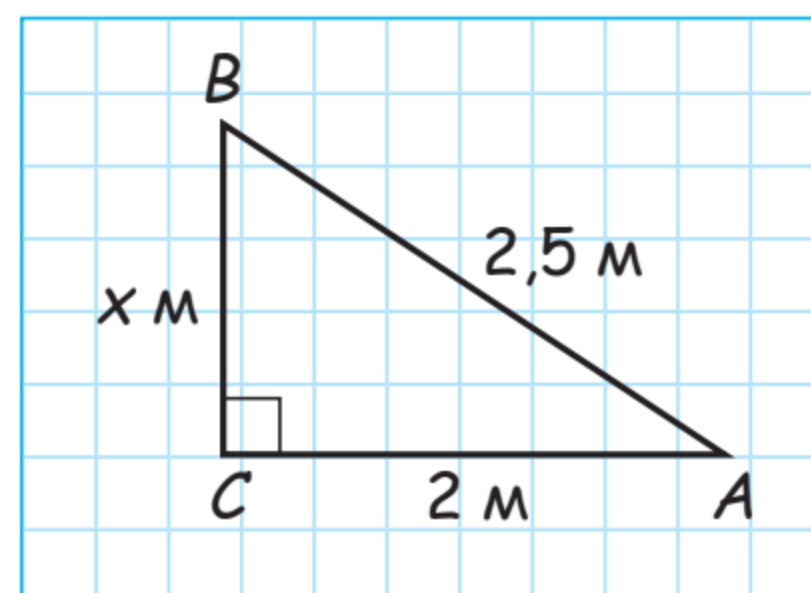
§ 19. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора. Перпендикуляр, похила та їх властивості



Петрику, мої батьки зібралися на дачі альтанку побудувати з прозорим двоскатним дахом і стелею. Для цього купили для стелі квадратні листи пластику зі стороною 2 метри, а для даху — прямокутні листи пластику розмірами 2,5 метра завдовжки й 1 метр завширшки. Хочемо встановити ці листи на стелю й дах приблизно так, як я намалювала. Тоді вийде, що підлога й стеля альтанки будуть однаковими квадратами зі стороною 4 метри. Треба знайти висоту опори посередині стелі, яка триматиме прямокутні листи пластику на даху альтанки. Допоможеш?



О, а згори над опорою обов'язково треба встановити шпиль із прапором України! Зобразимо прямокутний трикутник, який утворюють стеля, опора й дах. Назвемо утворений трикутник ABC , де $\angle C = 90^\circ$. У цьому трикутнику відома гіпотенуза $AB = 2,5$ м і один із



катетів $AC = 4 : 2 = 2$ м (бо опора має розташовуватися посередині стелі). Нам треба знайти довжину катета BC , нехай вона буде x м. Оце задачка! Якщо чесно, я не знаю, як її розв'язати. Краще запитаймо у вчителів.



Так, ця задача справді непроста. Щоб її розв'язати, потрібно трохи поміркувати. Спочатку дамо означення одного поняття й доведемо важливе твердження.



Нехай $\triangle ABC$ — прямокутний із прямим кутом C , а CH — його висота, проведена до гіпотенузи AB (рис. 19.1). Тоді відрізки $АН$ і $ВН$ називають **проєкціями** на гіпотенузу катетів AC і BC відповідно.

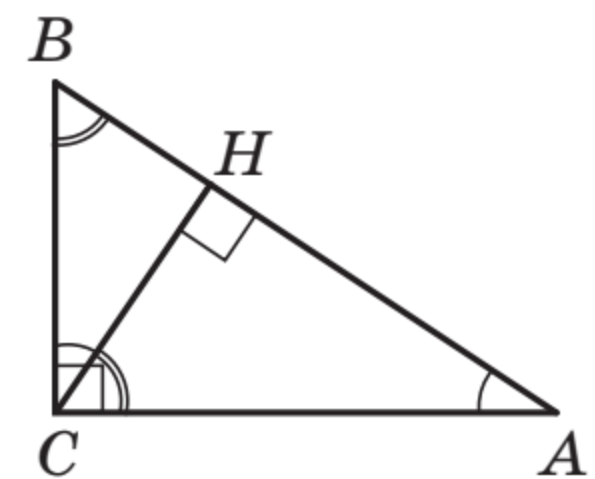


Рис. 19.1



ТЕОРЕМА (про метричні співвідношення у прямокутному трикутнику).

У прямокутному трикутнику:

- 1) **квадрат висоти, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проєкцій катетів на гіпотенузу;**
- 2) **квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи на проєкцію цього катета на гіпотенузу.**

Доведення. Скористаємось рисунком із означення проєкцій (див. рис. 19.1). Нам потрібно довести, що:

- 1) $CH^2 = AH \cdot BH$;
- 2) $AC^2 = AB \cdot AH$ і $BC^2 = AB \cdot BH$.

Оскільки трикутник AHC — прямокутний із прямим кутом H , то $\angle A + \angle ACH = 90^\circ$. Але оскільки $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то $\angle ACH = \angle B$. Міркуючи аналогічно, отримуємо, що $\angle BCH = \angle A$. Тому $\triangle AHC \sim \triangle CHB$, $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ і $\triangle CHB \sim \triangle ACB$ за двома кутами. Із першої пари

подібних трикутників отримуємо, що $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$, тобто $CH^2 = AH \cdot BH$; із другої пари подібних трикутників отримуємо, що $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$, тобто $AC^2 = AB \cdot AH$; нарешті, з третьої пари подібних трикутників маємо: $\frac{HB}{BC} = \frac{BC}{AB}$, тобто $BC^2 = AB \cdot BH$, що й вимагалось довести.



Тепер доведемо твердження, яке допоможе Тетянці розрахувати висоту опори для її альтанки.



ТЕОРЕМА ПІФАГОРА.

У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ — прямокутний із прямим кутом C . Покажемо, що $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Для цього проведемо з вершини прямого кута висоту CH до гіпотенузи AB (рис. 19.2). За теоремою про метричні співвідношення у прямокутному трикутнику $AC^2 = AB \cdot AH$ і $BC^2 = AB \cdot BH$. Тому $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AH + AB \cdot BH = AB(AH + BH) = AB \cdot AB = AB^2$, що й потрібно було довести.

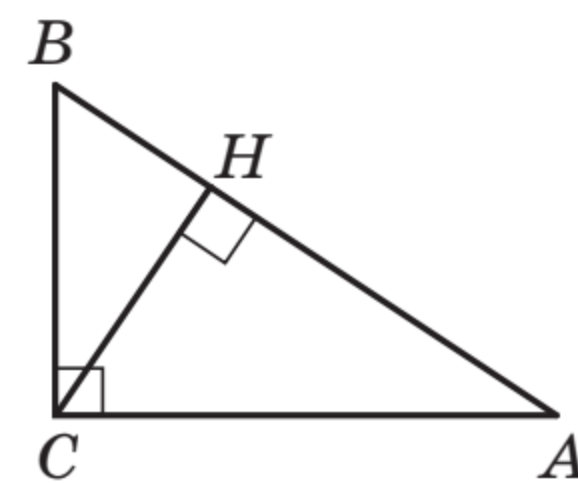


Рис. 19.2

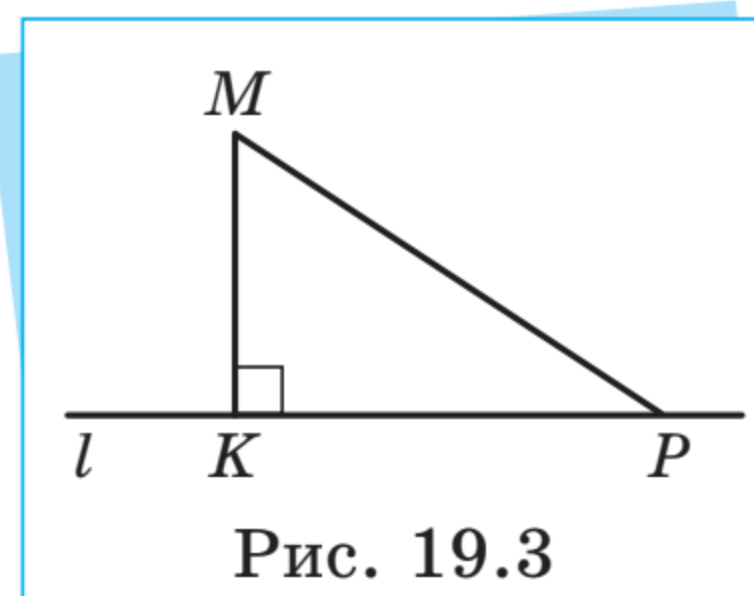


Тепер для розрахунку висоти опори для Тетянчиної альтанки скористаємося міркуваннями Петрика. Підставимо в теорему Піфагора відомі нам значення катета й гіпотенузи прямокутного трикутника та знайдемо невідомий катет. Одержимо рівність $x^2 + 2,5^2 = 3^2$, звідки $x^2 = 9 - 6,25 = 2,75$, тобто $x = \pm\sqrt{2,75}$. Оскільки висота опори не може бути від'ємною, то висота опори має бути $\sqrt{2,75}$ метра. Але в практичних застосуваннях

іраціональні числа безпосередньо не використовують, зазвичай обчислюють їх наближене значення з певною точністю. Для нашого випадку знайдемо висоту опори з точністю до тисячних метра (до міліметра), тобто $\sqrt{2,75} \text{ м} \approx 1,658 \text{ м}$, або 1658 мм.



Отже, теорема Піфагора дає змогу за відомими довжинами двох сторін прямокутного трикутника знаходити довжину третьої його сторони. Розгляньмо ще одне застосування цієї теореми. Нехай точка M не належить прямій l і нехай MK є перпендикуляром, проведеним із точки M до прямої l (рис. 19.3). Тоді будь-який відмінний від цього перпендикуляра відрізок MP , що сполучає точку M з точкою $P \in l$, називають **похилою**, проведеною з точки M до прямої l . Нагадаємо, що точку K називають **основою перпендикуляра** MK . За аналогією точку P називають **основою похилої**, а відрізок KP — **проєкцією похилої** MP на пряму l .



ТЕОРЕМА (властивість похилої).



Будь-яка похила, проведена з точки до прямої, більша за перпендикуляр, проведений із цієї точки до даної прямої, і за свою проєкцію на цю пряму.

Доведення. Скористаємося рис. 19.3 із означення похилої та її проєкції на пряму. Нехай $MK \perp l$; MP — довільна похила; KP — її проєкція на пряму l . Покажемо, що $MP > MK$ і $MP > KP$.

За теоремою Піфагора $MK^2 + KP^2 = MP^2$. Оскільки $MK^2 > 0$ і $KP^2 > 0$, то $MP^2 > MK^2$ і $MP^2 > KP^2$. Крім того, довжини відрізків — додатні числа, а функція $y = x^2$ зростає на множині всіх невід'ємних чисел. Тому, якщо $MP^2 > MK^2$, то $MP > MK$. Аналогічно, якщо $MP^2 > KP^2$, то $MP > KP$, що й вимагалось довести.



Із властивості похилої, зокрема, випливає, що **в будь-якому прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за кожен із його катетів**. Цю властивість гіпотенузи часто використовують як для розв'язування математичних задач, так і в повсякденному житті. Наприклад, під час виготовлення додаткових опор для стовпів електричних ліній ці опори мають бути більшої довжини, ніж самі стовпи (див. рис. 19.4).



Рис. 19.4



Теорему про метричні співвідношення у прямокутному трикутнику й теорему Піфагора також використовують у задачах на побудову.

Задача. Дано два відрізки довжиною a і b ($a > b$). Побудуйте відрізки довжиною: а) $\sqrt{ab}$; б) $\sqrt{a^2 + b^2}$; в) $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Розв'язання поданої задачі:
rnk.com.ua/109381



Перевірте себе!

1. Зобразіть прямокутний трикутник і побудуйте проєкції його катетів на гіпотенузу.
2. Сформулюйте теорему про метричні співвідношення в прямокутному трикутнику.
3. Сформулюйте теорему Піфагора.
4. Дайте означення похилої, проведеної з даної точки до даної прямої, та проєкції цієї похилої на дану пряму.
5. Сформулюйте властивість похилої та наслідок із неї (властивість гіпотенузи прямокутного трикутника).



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH (рис. 1). Який відрізок є проекцією катета BC на гіпотенузу?

2. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) проведено висоту MH (рис. 2). Який відрізок є проекцією катета KM на гіпотенузу?

3. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) проведено висоту MH (див. рис. 2). Проекцією якого катета на гіпотенузу є відрізок LH ?

4. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH (див. рис. 1). Проекцією якого катета на гіпотенузу є відрізок AH ?

5. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH (див. рис. 1). Яка рівність відповідає твердженню: «Квадрат висоти, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу»?

а) $AB^2 = AC \cdot BC$;

в) $CH^2 = AH \cdot BH$;

б) $CH^2 = AC \cdot BC$;

г) $AB^2 = AH \cdot BH$.

6. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) проведено висоту MH (див. рис. 2). Яка рівність відповідає твердженню: «Квадрат висоти, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу»?

а) $MH^2 = KH \cdot HL$;

в) $KL^2 = KH \cdot HL$;

б) $MH^2 = MK \cdot ML$;

г) $KL^2 = MK \cdot ML$.

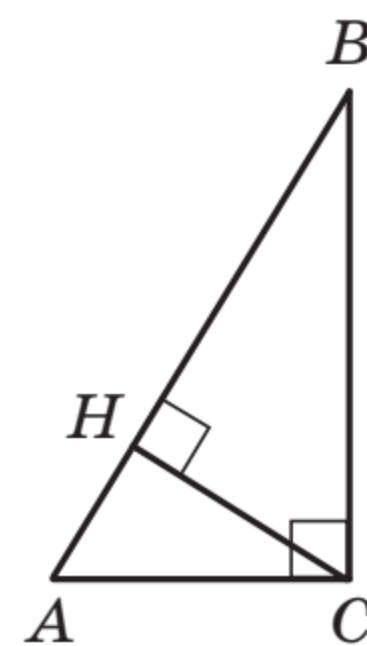


Рис. 1

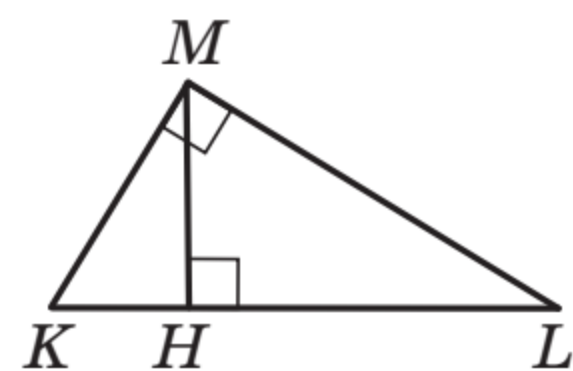


Рис. 2

7. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) проведено висоту MH (див. рис. 3). Яка рівність відповідає твердженню: «Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу»?

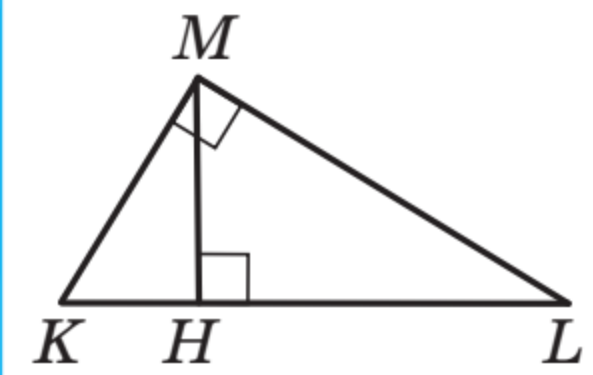


Рис. 3

- а) $MK^2 = KL \cdot KH$; в) $KM^2 = KL \cdot HL$;
б) $ML^2 = KL \cdot HL$; г) $ML^2 = KL \cdot KH$.

8. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH (див. рис. 4). Яка рівність відповідає твердженню: «Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу»?

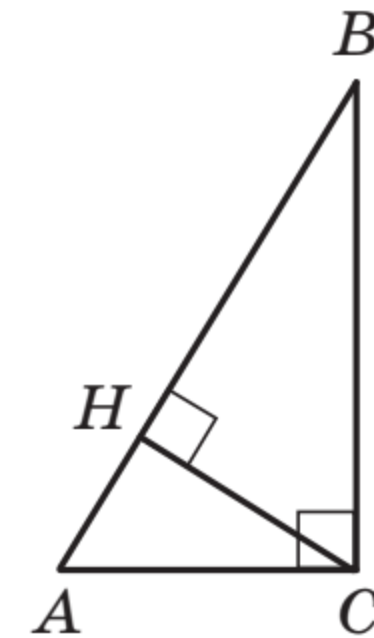


Рис. 4

- а) $AC^2 = AB \cdot BH$; в) $BC^2 = AB \cdot BH$;
б) $AC^2 = AB \cdot AH$; г) $BC^2 = AH \cdot BH$.

9. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) висота CH розбиває цей трикутник на два прямокутних трикутники ACH ($\angle H = 90^\circ$) та BCH ($\angle H = 90^\circ$) (див. рис. 4). Яка рівність відповідає твердженню: «У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи»?

- а) $AC^2 + BC^2 = AB^2$; в) $HC^2 + AH^2 = BC^2$;
б) $AH^2 + HC^2 = AC^2$; г) $CH^2 + HB^2 = BC^2$.

10. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) висота MH розбиває цей трикутник на два прямокутних трикутники KMH ($\angle H = 90^\circ$) та LMH ($\angle H = 90^\circ$) (див. рис. 3). Яка рівність відповідає твердженню: «У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи»?

- а) $KM^2 + MH^2 = ML^2$; в) $MH^2 + HL^2 = ML^2$;
б) $KH^2 + HM^2 = KM^2$; г) $KM^2 + ML^2 = KL^2$.

11. Із точки A на пряму m провели перпендикуляр та похилу (рис. 5).

- Яка точка є основою перпендикуляра?
- Який відрізок є похилою?
- Який відрізок є проєкцією похилої на пряму?
- Який із відрізків менший: AB чи AK ?

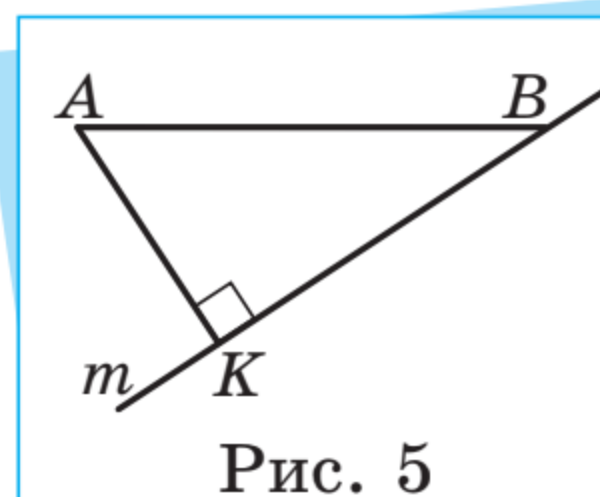


Рис. 5

12. Із точки B на пряму l провели перпендикуляр та похилу (рис. 6).

- Яка точка є основою похилої?
- Який відрізок є перпендикуляром?
- Який відрізок є проєкцією похилої на пряму?
- Який із відрізків більший: BM чи MH ?

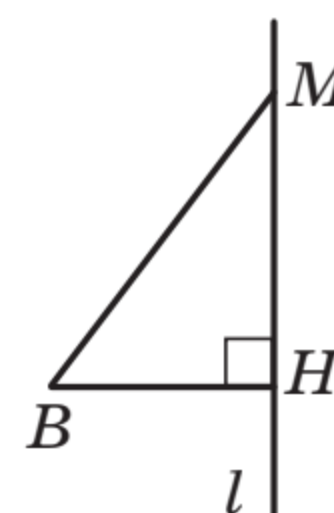


Рис. 6



Середній рівень

13. Довжина катета рівнобічного прямокутного трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть довжину його гіпотенузи.

14. Довжини катетів рівнобічного прямокутного трикутника дорівнюють 5 см. Знайдіть довжину його гіпотенузи.

15. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

- 1 см та 2 см;
- 8 см, 15 см;
- 3 см, $3\sqrt{3}$ см.

16. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

- 2 см та 3 см;
- 7 см, 24 см;
- $\sqrt{12}$ см, $\sqrt{13}$ см.

17. У рівнобічному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту BH . Знайдіть довжину BH , якщо $AB = 10$ см, $AC = 16$ см.

18. У рівнобічному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту BH . Знайдіть довжину AC , якщо $AB = 29$ см, $BH = 21$ см.

19. Знайдіть діагональ квадрата, сторона якого дорівнює 7 см.

20. Знайдіть довжину сторони квадрата, діагональ якого дорівнює 10 см.

21. Основа висоти CH , проведеної з прямого кута C прямокутного трикутника ABC (рис. 7), ділить гіпотенузу на відрізки $AH = 2$ см і $BH = 8$ см. Знайдіть довжину CH .

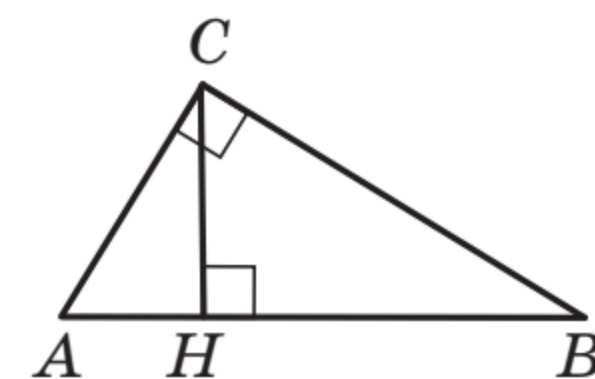


Рис. 7

22. Знайдіть довжину перпендикуляра AH , проведеного з вершини прямого кута трапеції $ABCD$ до діагоналі BD (рис. 8), якщо $BH = 2$ см, а $DH = 4,5$ см.

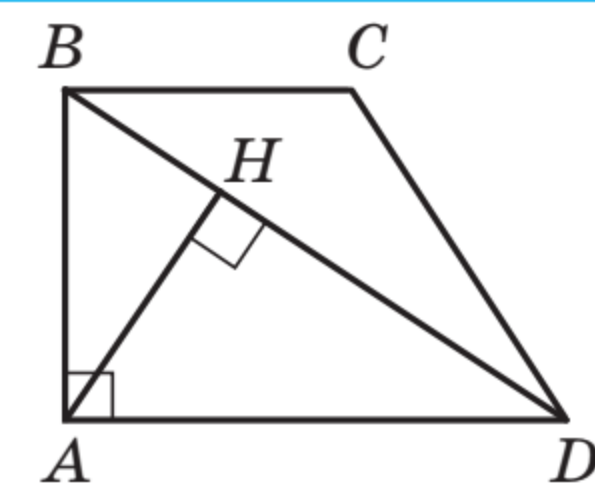


Рис. 8

23. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено висоту CH (див. рис. 7). Знайдіть довжини катетів цього трикутника, якщо $AH = 2$ см, $BH = 3$ см.

24. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено висоту CH (див. рис. 7). Знайдіть довжини катетів цього трикутника, якщо $AH = 2$ см, $BH = 6$ см.

25. На координатній площині взято точки $A(-2; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(4; 0)$, $D(2; 4)$ і побудовано відрізки AD , OD , BD , CD .

а) Укажіть відрізок, який є перпендикуляром до осі абсцис.

б) Назвіть усі похилі, проведені з точки D до осі Ox , та проєкції цих похилих.

в) Яка з проведених похилих має найбільшу проєкцію?

26. На координатній площині взято точки $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(-1; 0)$, $C(5; 0)$, $D(0; -2)$, $M(-1; -5)$ і побудовано відрізки AM , MD , BM , CM .

а) Укажіть відрізок, який є перпендикуляром до осі абсцис.

б) Назвіть усі похилі, проведені з точки D до осі Ox , та проєкції цих похилих.

в) Яка з проєкцій відповідає найбільшій похилій?



Достатній рівень

27. Драбину завдовжки 6,5 м приставили до стіни будинку на рівні вікна на другому поверсі (рис. 9). Нижній кінець драбини розташований на відстані 2,5 м від стіни. На якій відстані від землі розташований нижній край вікна?

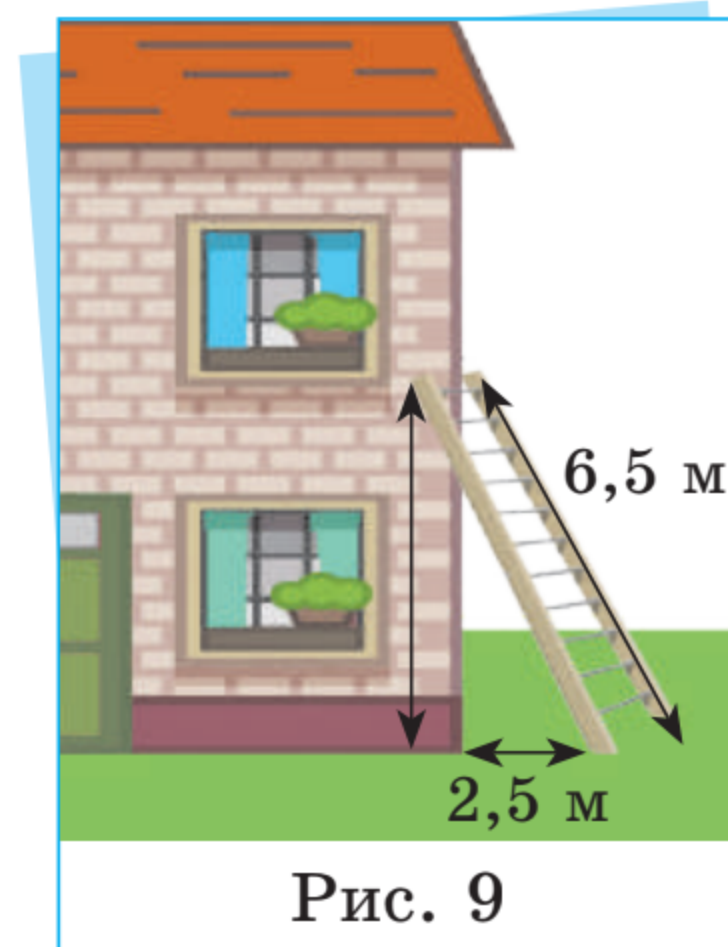


Рис. 9

28. Нижній край вікна будинку розташований на відстані 7,2 м від землі. Якою має бути довжина драбини, щоб її можна було приставити до стіни будинку на рівні вікна, а нижній кінець драбини розташовувався б на відстані 3 м від стіни?

29. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 3:4, а гіпотенуза дорівнює 30 см. Знайдіть довжини катетів цього трикутника.

30. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 12:5, а гіпотенуза дорівнює 39 см. Знайдіть довжини катетів цього трикутника.

31. Знайдіть довжину сторони ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см та 10 см.

32. Знайдіть довжину бічної сторони рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 30 см та 44 см, а висота трапеції — 24 см.

33. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 м, а гіпотенуза — 15 м. Складіть дві математичні моделі для знаходження катетів цього трикутника. Знайдіть катети цього трикутника.

34. Різниця катетів прямокутного трикутника дорівнює 1 м, а гіпотенуза — 29 м. Складіть дві математичні моделі для знаходження катетів цього трикутника. Знайдіть катети цього трикутника.

35. У трикутнику ABC з вершини C проведено медіану CM і висоту CH . Доведіть, що довжина CH менша, ніж довжина CM .

36. У трикутнику ABC з вершини B проведено бісектрису BL і висоту BH . Доведіть, що довжина BL більша, ніж довжина BH .

37. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює 8 см.

38. Знайдіть медіану рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

39. Знайдіть діагональ квадрата зі стороною a .

40. Знайдіть сторону квадрата з діагоналлю d .

41. Із точки, яка віддалена від прямої на 5 см, проведено похилу до цієї прямої. Довжина похилої дорівнює 13 см. Знайдіть довжину проєкції цієї похилої на пряму.

42. Із точки, яка віддалена від прямої на 8 см, проведено похилу до цієї прямої. Довжина проєкції похилої на пряму дорівнює 6 см. Знайдіть довжину похилої.

43. Діагоналі дельтоїда $ABCD$ перетинаються в точці M . Знайдіть довжину більшої діагоналі дельтоїда, якщо довжини його сторін дорівнюють 13 см і $\sqrt{74}$ см, а довжина меншої діагоналі — 10 см.

44. Діагоналі дельтоїда $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайдіть периметр дельтоїда, якщо $AB=17$ см, $AC=30$ см, $DO=20$ см.



Високий рівень

45. Доведіть (теорема, обернена до теореми Піфагора): якщо в трикутнику з довжинами сторін a , b , c виконується рівність $a^2 + b^2 = c^2$, то цей трикутник є прямокутним (з гіпотенузою c).

46. Доведіть: якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то суми квадратів його протилежних сторін рівні.

47. Довжини сторін трикутника ABC дорівнюють 7 см, 24 см, 25 см. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

48. Довжини сторін трикутника MNK дорівнюють 8 см, 15 см, 17 см. Доведіть, що трикутник MNK прямокутний.

49. Знайдіть відстань від центра кола з діаметром 20 см до його хорди завдовжки 16 см.

50. Відстань від центра кола до його хорди завдовжки 24 см дорівнює 5 см. Знайдіть радіус кола.

51. Висота гострокутного рівнобічного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 16 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 10 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

52. Основа тупокутного рівнобічного трикутника дорівнює 48 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 26 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

53. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 22 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть висоту трапеції.

54. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 13 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута. Знайдіть висоту трапеції.

55. Із точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 13 см і 20 см. Проекція меншої похилої на пряму дорівнює 5 см. Знайдіть проекцію більшої похилої та відстань між основами похилих.

56. Із точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 15 см, а її проекція на пряму — 9 см. Друга похила утворює з прямою кут 45° . Знайдіть довжину цієї похилої та відстань між основами похилих.

57. Із точки A кола провели хорду AC і діаметр AB . Відрізок AD — проекція даної хорди на діаметр (рис. 10). Доведіть, що $AC^2 = AB \cdot AD$.

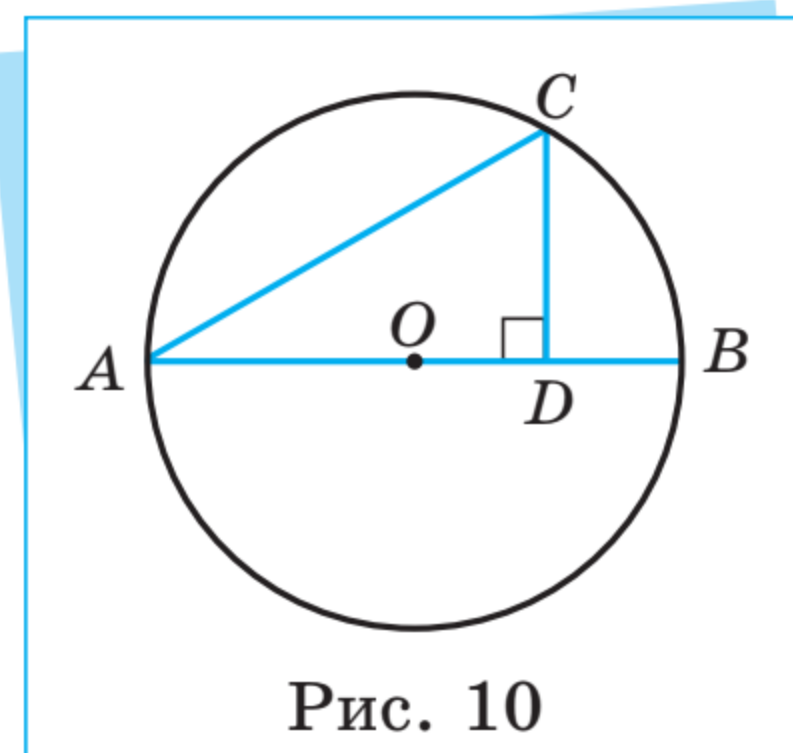


Рис. 10



58.

Із точки C кола опустили перпендикуляр CD на діаметр AB (рис. 11). Доведіть, що $CD^2 = AD \cdot DB$.

59.

(Задача Леонардо Пізанського) Дві вежі, одна заввишки 40 футів, а друга — 30 футів, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що розташована між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись із однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

60.

(Задача Бгаскари) Квітка лотоса за вертикального положення стебла піднімається над водою на $\frac{1}{2}$ фута. Вітер відхилив її на 2 фути від попереднього положення стебла, і квітка опинилася на поверхні води (рис. 12). Знайдіть глибину x водойми в цьому місці.

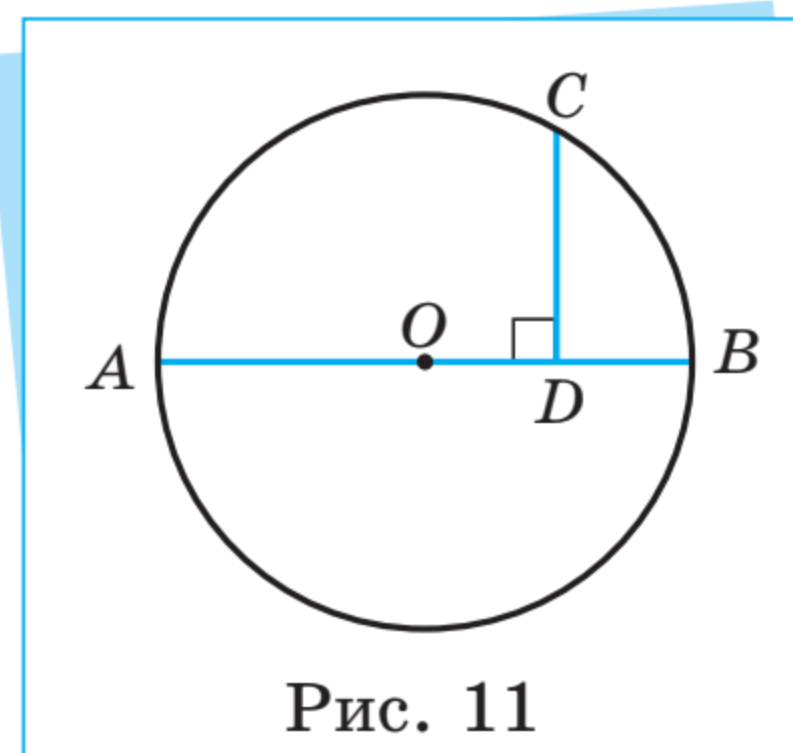


Рис. 11

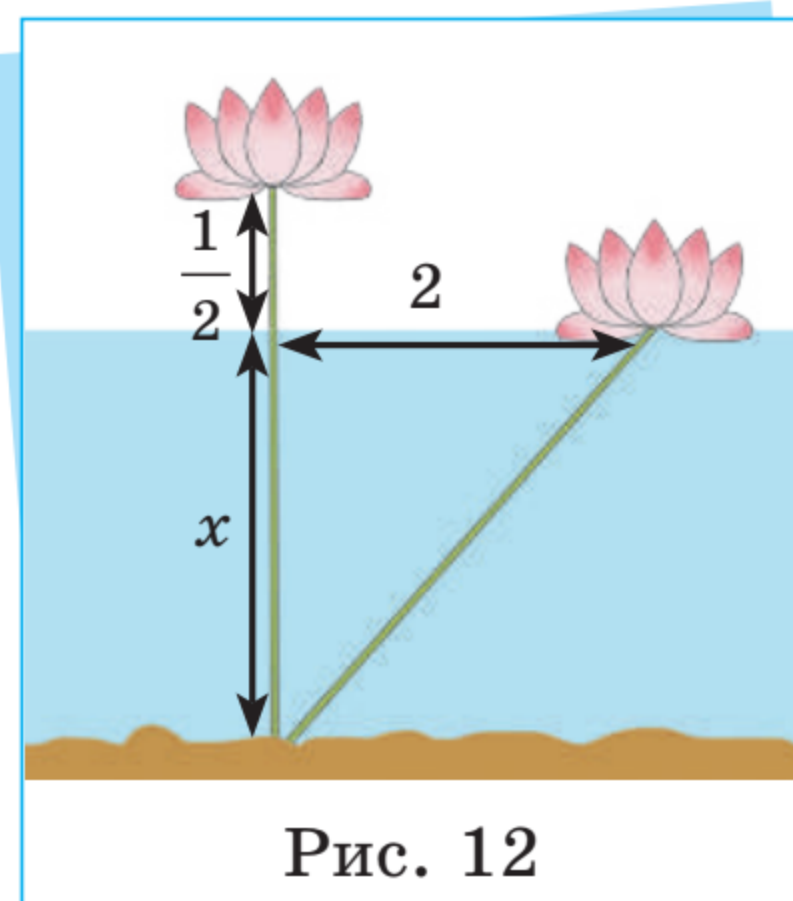


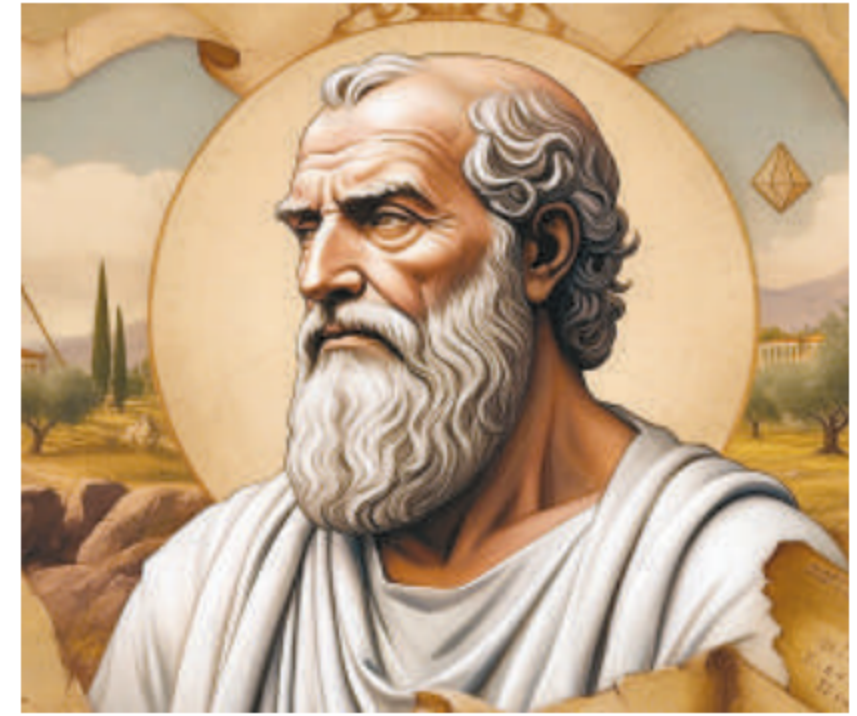
Рис. 12



Цікавинки від дідуса Тараса

Піфагор (або *Пітагор*) — давньогрецький філософ, математик, письменник, релігійний і політичний діяч, теоретик музики, засновник піфагореїзму, який став легендою та об'єктом дискусій ще за стародавніх часів. Піфагор жив у період із 570 до 497 рр. до н. е., але вже в 306 р. до н. е. йому, як найрозумнішому з греків, поставили пам'ятник у Римському Форумі. Відтоді мало що прояснилося в біографії Піфагора та в історичній ролі організованого ним ордену піфагорійців. І досі висувують нові гіпотези й тлумачення щодо діяльності стародавнього мудреця та його послідовників.

Історію життя Піфагора важко відокремити від легенд, у яких його подають як величного мудреця. Найдавніші відомі джерела відомостей про Піфагора датовано періодом не менш ніж 200 років по його смерті. Сам Піфагор не залишив творів, і всі відомості про нього та його вчення ґрунтуються на працях його послідовників, не завжди об'єктивних і неупереджених.



Народився Піфагор на острові Самос. За переказами, його батько Мнесарх був фінікійським купцем із Тіри. Батько дав Піфагору гарну освіту, навчаючи його в найвідоміших учителів того часу. По смерті батька Піфагор вирушив до Мілета, де його вчителями були *Ферекід*, *Анаксимандр* і *Фалес*. Саме за порадою Фалеса Піфагор у двадцятирічному віці поїхав спочатку до Єгипту, а потім до Індії, де жив близько 30 років і витримав чимало випробувань.

Повернувшись, Піфагор оселився на півдні італійського півострова, в місті Кротон. Незабаром навколо Піфагора згуртувалися одностудії, організувавши таємний релігійно-політичний союз — гетерію, що була прообразом майбутньої філософської школи. Незабаром і в інших містах південної Італії та Греції виникли піфагорійські гетерії, в яких разом із науковими проблемами (математичними, філософськими, етичними) розглядали релігійні й політичні.

Доля Піфагора була трагічною. Один із впливових людей Кротона, Кілон, претендував на дружбу Піфагора. Коли Кілона не прийняли до братства через важкий і владний характер, він організував змову проти піфагорійців. Прихильники Кілона підпалили дім, де збиралися послідовники Піфагора. Чи був там сам Піфагор, точно невідомо, але, за однією з версій, врятуватися від пожежі йому не вдалося. За іншою версією, Піфагор, втікнувши від заколотників, переховувався та врешті загинув від голоду в місті Метапонт на півдні Італії.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про внесок Піфагора: а) у математику; б) в музику; в) у філософію. Підготуйте невеликі повідомлення.

2. Існує понад 200 різних способів доведення теореми Піфагора. Знайдіть ще кілька способів доведення цієї теореми та підготуйте невелике повідомлення на цю тему. Яке із цих доведень, на вашу думку, найкраще? Поясніть свою думку.
3. Чи доводилося вам у повсякденному житті використовувати теорему Піфагора? Якщо так, то поділіться досвідом.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Виконайте дії, результат запишіть у стандартному вигляді.
 - а) $(2,5 \cdot 10^{23}) \cdot (8 \cdot 10^{-18})$; б) $(3,6 \cdot 10^{-8}) : (9 \cdot 10^7)$.
2. Розв'яжіть рівняння.
 - а) $3\sqrt{x} - 5 = 17$; б) $\sqrt{13 - 2x} = 5$.
3. Відомо, що графік оберненої пропорційності проходить через точки $M\left(\frac{2}{3}; \frac{6}{7}\right)$ і $P\left(a; \frac{1}{2}\right)$. Знайдіть значення a .
4. Панько продає на ринку овочі й працює за графіком: три дні робочі, після них один вихідний. Його дружина Одарка на цьому самому ринку продає пиріжки й працює за графіком: два дні робочі, після них один вихідний. Однієї суботи чоловік і дружина були вихідними й сходили разом у кіно. Щонайменше скільки днів від цього дня повинно минути, щоб Панько й Одарка знову мали можливість у свій вихідний сходити в кіно в суботу?
5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кут C на 30° більший за кут A і на 35° менший від кута D , а градусні міри кутів B і D відносяться як $7:2$. Знайдіть градусні міри всіх кутів чотирикутника $ABCD$. Чи можна навколо нього описати коло? Чи можна в нього вписати коло?

§ 20. Синус, косинус, тангенс, котангенс гострого кута прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса деяких кутів



Цими вихідними був у музеї народної архітектури та згадував твою альтанку на дачі. Я помітив, що в гірських районах дахи хат мають більший кут нахилу до стелі, ніж у рівнинних. Я запитав у нашого гіда, чому це так. Той відповів, що зазвичай у горах випадає більше снігу, ніж на рівнині, тому й потрібен більший кут нахилу даху, щоб сніг не затримувався на покрівлі й не руйнував її. Ось, поглянь, на фото зліва хата в рівнинному регіоні, а справа — хата в Карпатах.



Подивився я на ці дахи й стало мені цікаво, під яким кутом нахилений дах твоєї альтанки? До речі, ви вже побудували її?

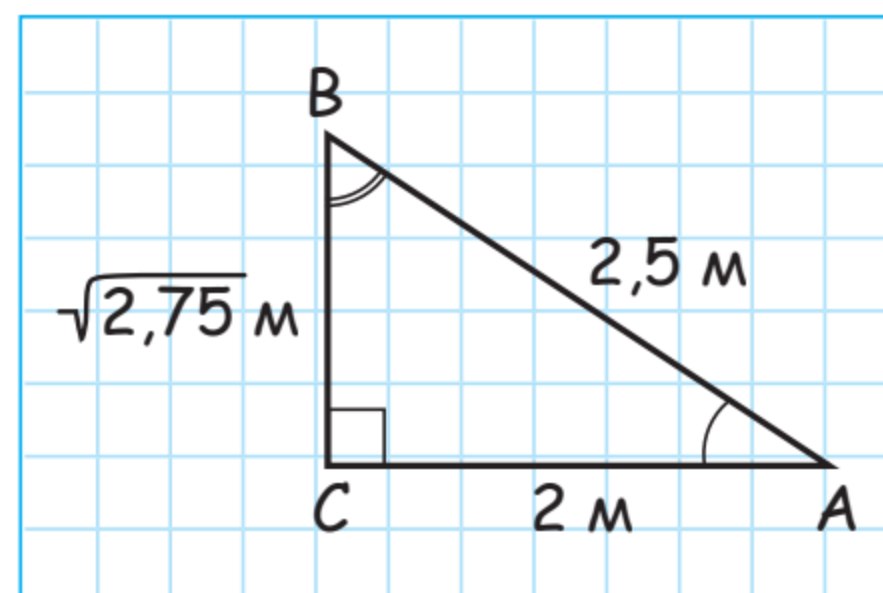


Ні, ще не побудувати, але опору потрібного розміру, а також шпиль на неї для прапора України вже замовили. Справді, цікаво визначити кут нахилу, бо взимку в нас теж буває сніжно, і не хочеться, щоб пластик під вагою снігу тріснув. Можливо, доведеться взагалі весь проєкт даху альтанки переробляти й змінювати замовлення. Але як же той кут знайти?



Ми вже зробили модель одного схилу даху альтанки у вигляді прямокутного трикутника — ось цей рисунок.

Відомо, що в $\triangle ABC$, де $\angle C = 90^\circ$, гіпотенуза $AB = 2,5$ м, а катет $AC = 2$ м. За теоремою Піфагора ми з'ясували, що $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{2,75}$ м $\approx 1,658$ м.



Тепер треба знайти градусну міру, наприклад, кута A (після цього легко знайти градусну міру кута B). Але як, знаючи сторони, знайти кут? Ми, здається, нічого подібного раніше не вчили.

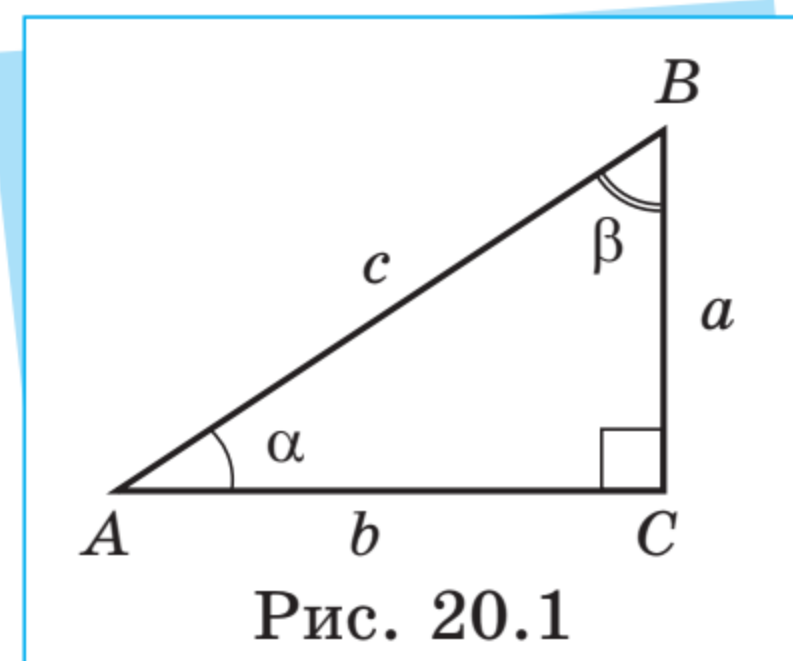


Так, я пам'ятаю, що для прямокутного трикутника з прямим кутом C $\angle A + \angle B = 90^\circ$. А для знаходження кутів прямокутного трикутника за відомими його сторонами має бути якийсь хитрий спосіб. От не віриться, що математики досі нічого не придумали, щоб розв'язувати подібні задачі.

Синус, косинус, тангенс, котангенс гострого кута прямокутного трикутника



Звісно, придумали, зараз розповімо про цей хитрий спосіб. Розгляньмо прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C . Для зручності позначимо $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ (рис. 20.1). Природно вважати, що для гострого кута α катет a є **протилежним** до цього кута, а катет b — **прилеглим** до нього. Аналогічно для гострого кута β катет b є протилежним, а катет a — прилеглим.





Синус гострого кута прямокутного трикутника — це відношення протилежного катета до гіпотенузи. Синус кута α записують як $\sin \alpha$.

Наприклад, для прямокутного трикутника ABC (див. рис. 20.1)

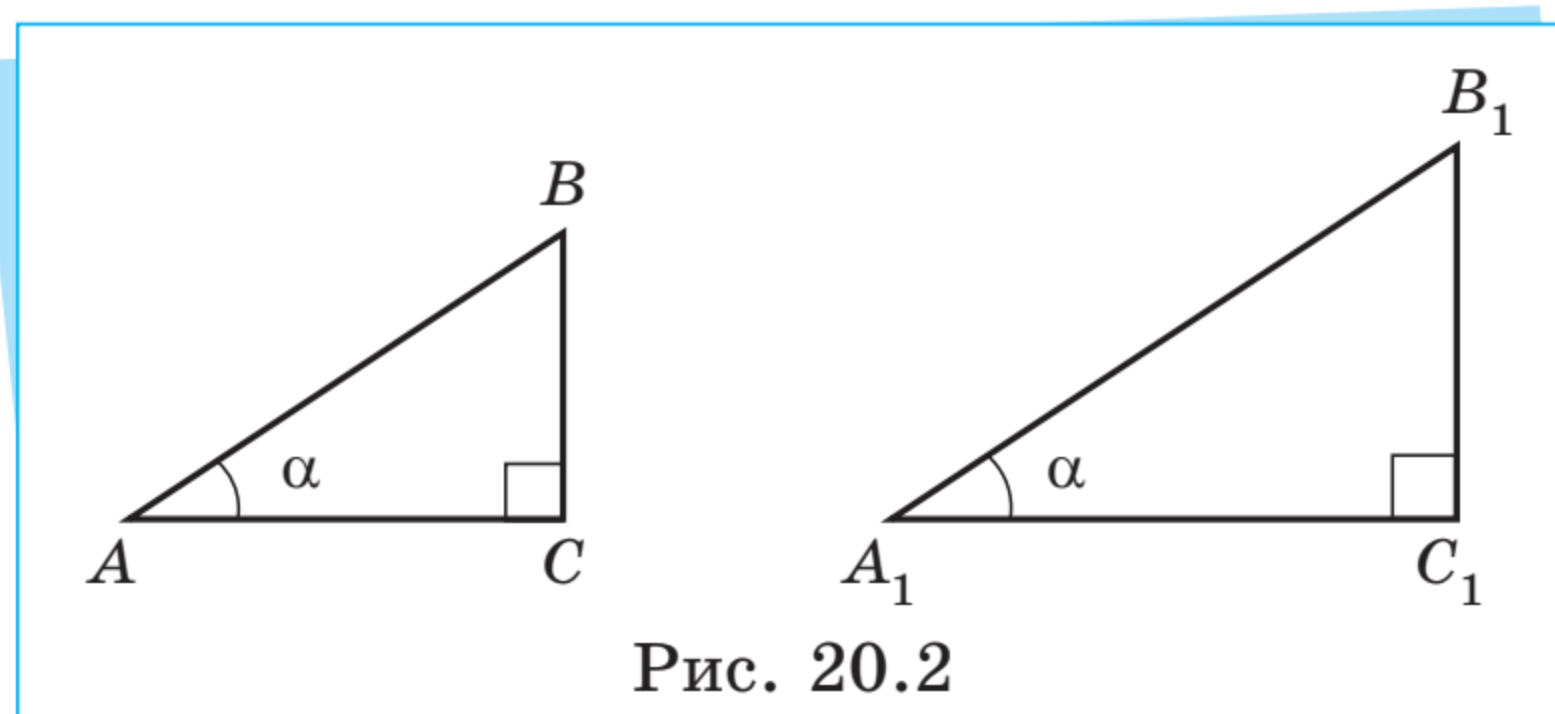
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}.$$



Для прямокутного трикутника, який побудував Петрик як модель даху Тетянчиної альтанки, $\sin \angle A = \frac{\sqrt{2,75}}{2,5} \approx \frac{1,658}{2,5} = 0,6632$.

За цим наближеним значенням синуса кута можна знайти й наближене значення градусної міри цього кута, оскільки **значення синуса кута залежить лише від градусної міри цього кута, а від розмірів прямокутного трикутника не залежить**.

Справді, розглянемо два прямокутних трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1 = \alpha$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ (рис. 20.2).



Тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ за двома кутами, а отже, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, звідки за властивістю пропорції $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$. Але за означенням

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}, \quad \text{а} \quad \sin \angle A_1 = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}, \quad \text{тобто} \quad \sin \angle A = \sin \angle A_1 = \sin \alpha.$$



Таким чином, **кожному гострому куту відповідає лише одне значення синуса цього кута**. Можна також показати, що й **кожному значенню синуса кута відповідає лише один гострий кут прямокутного трикутника**.

Обґрунтування останнього твердження:
rnk.com.ua/109382

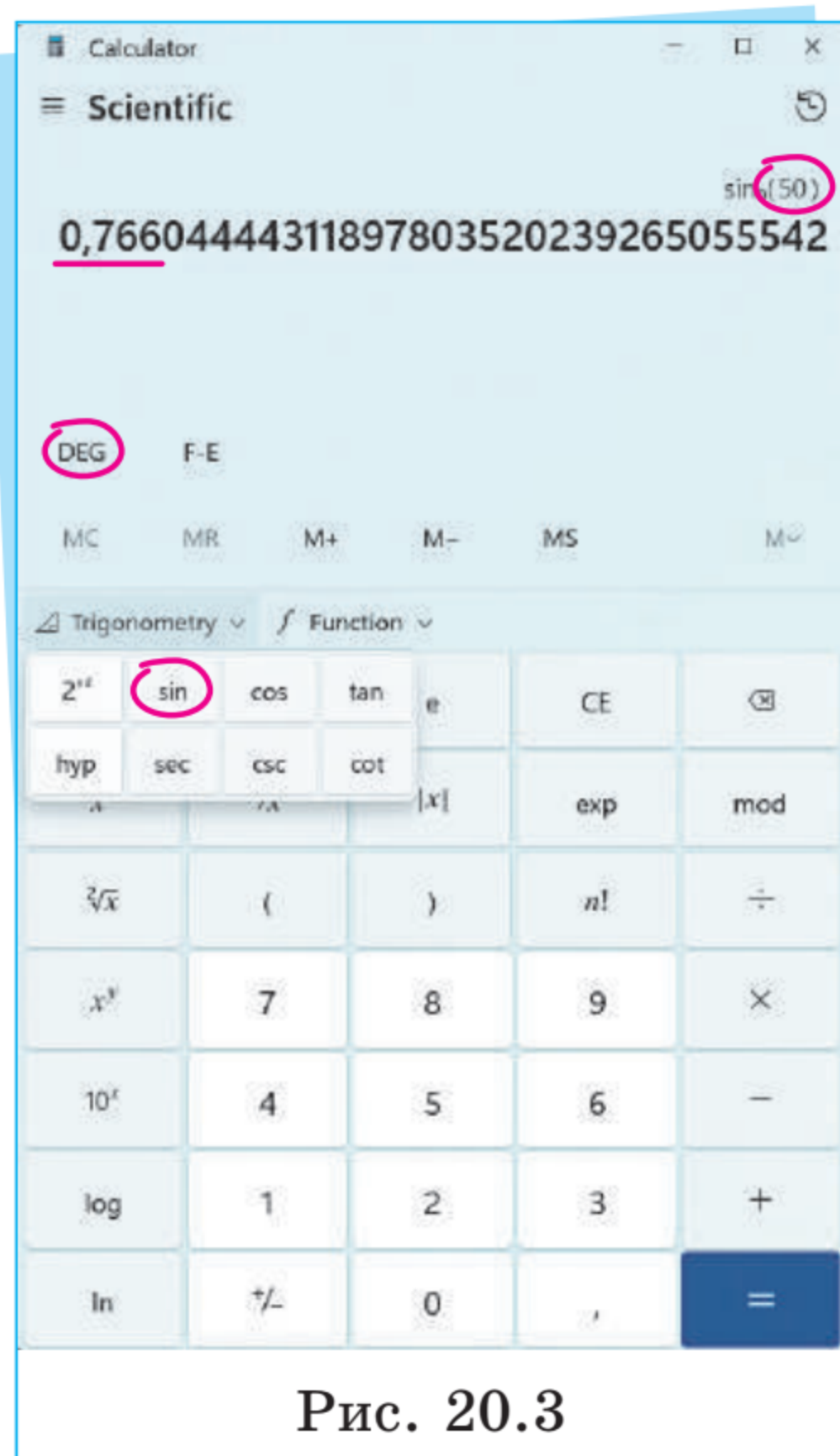


Рис. 20.3

Для обчислення наближених значень синусів кутів і наближених значень градусних мір кутів за відомим значенням синуса цього кута зазвичай використовують калькулятор. Наприклад, щоб знайти синус кута 50° , потрібно (див. рис. 20.3):

- вибрати вимірювання кутів у градусах (напис DEG);
- ввести значення 50 (градусна міра кута) у вікно калькулятора;
- вибрати пункт меню Trigonometry;
- натиснути клавішу sin.

У підсумку одержимо, що $\sin 50^\circ \approx 0,766$ із точністю до тисячних. Зазвичай такої точності досить для практичних потреб.



Обчислимо тепер за допомогою калькулятора наближене значення градусної міри кута нахилу альтанки Тетянки, тобто знайдемо градусну міру кута, синус якого дорівнює 0,6632. Для цього потрібно (див. рис. 20.4):

- вибрати вимірювання кутів у градусах (напис DEG);
- ввести значення 0,6632 (значення синуса кута) у вікно калькулятора;
- вибрати пункт меню Trigonometry;
- натиснути клавішу 2nd, а потім клавішу $\sin^{-1}$.

У підсумку отримаємо значення градусної міри кута $41,544^\circ$ із точністю до тисячних градуса, тобто $\sin 41,544^\circ \approx 0,6632$.

Для практичних потреб така точність знаходження градусної міри кута зазвичай не потрібна, тому можна вважати, що градусна міра кута нахилу Тетянчиної альтанки дорівнює 42° .

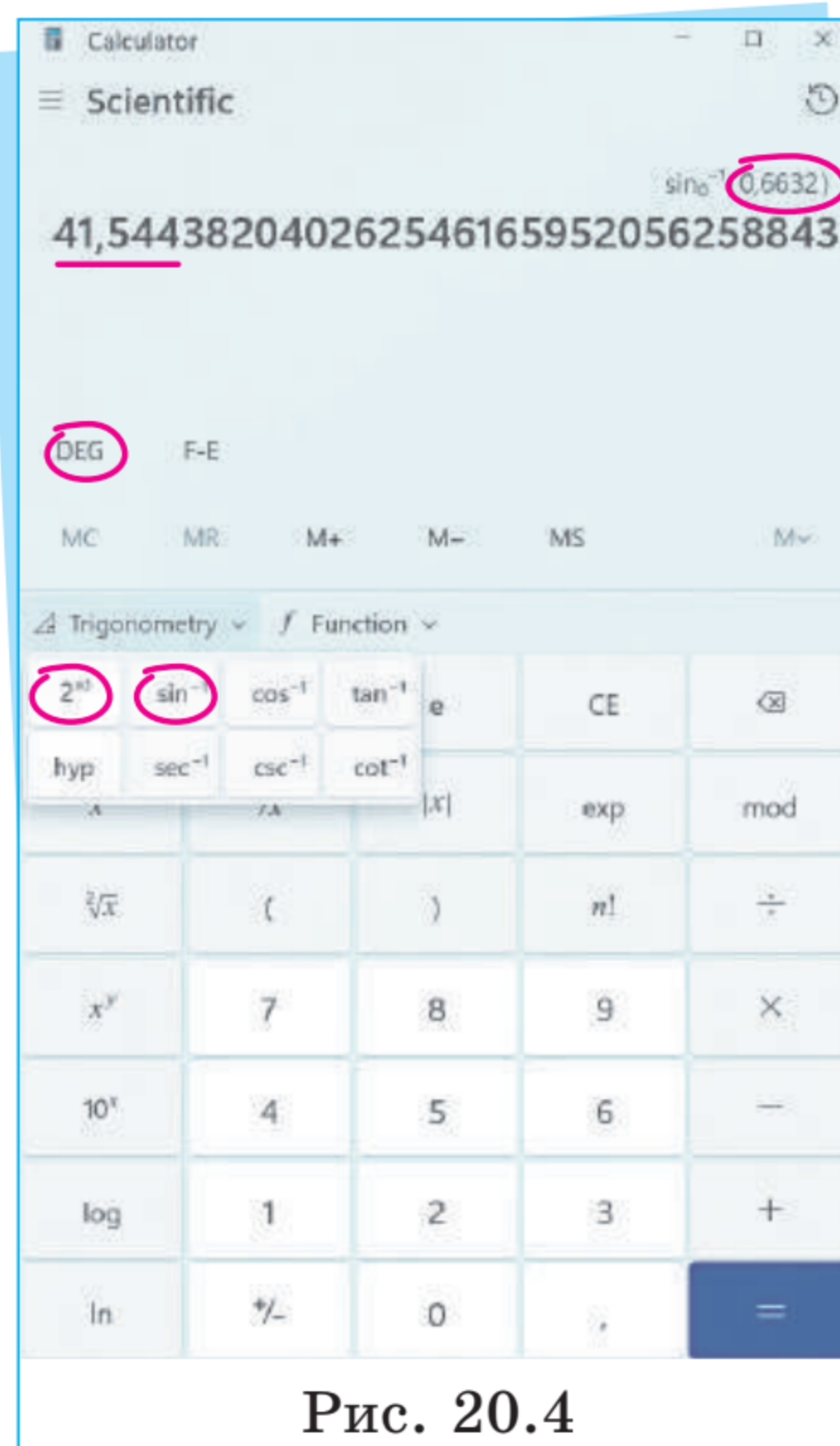


Рис. 20.4



Аналогічно до синуса вводяться означення косинуса, тангенса й котангенса гострого кута прямокутного трикутника.



Косинус гострого кута прямокутного трикутника — це відношення прилеглого катета до гіпотенузи. Косинус кута α записують як $\cos \alpha$.



Тангенс гострого кута прямокутного трикутника — це відношення протилежного катета до прилеглого. Тангенс кута α записують як $\tan \alpha$.



Котангенс гострого кута прямокутного трикутника — це відношення прилеглого катета до протилежного. Котангенс кута α записують як $\text{ctg}\alpha$.

Наприклад, для прямокутного трикутника ABC (див. рис. 20.5)

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}; \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB};$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{BC}{AC}; \quad \text{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{AC}{BC};$$

$$\text{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{AC}{BC}; \quad \text{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{BC}{AC}.$$

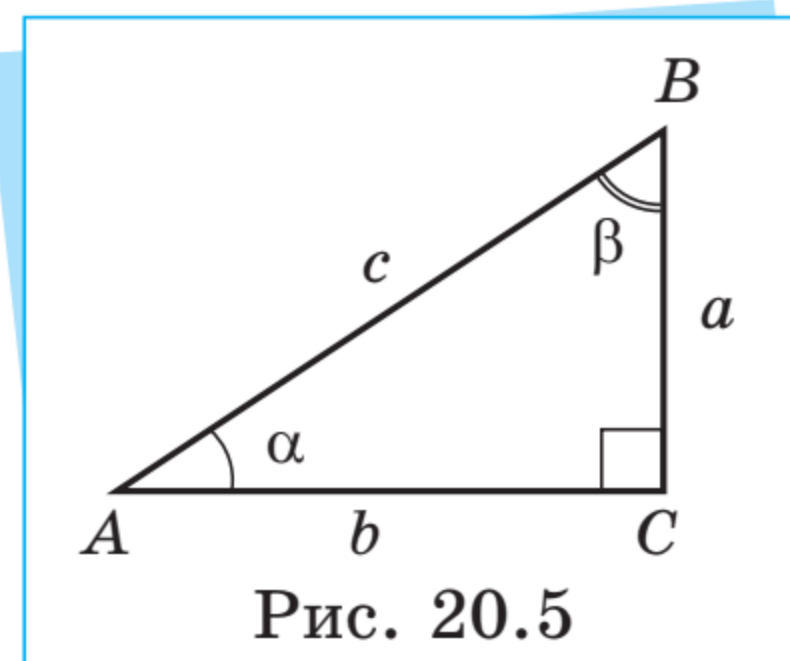


Рис. 20.5



Зверніть увагу на те, що в англomовних підручниках позначення тангенса й котангенса дещо відрізняються: тангенс кута α записують як $\tan \alpha$, а котангенс кута α — як $\cot \alpha$.



Як і для синуса гострого кута прямокутного трикутника, можна показати, що **значення косинуса (тангенса, котангенса) кута залежить лише від градусної міри цього кута, а від розмірів прямокутного трикутника не залежить.**

Це, зокрема, означає:

- **кожному гострому куту відповідає лише одне значення косинуса (тангенса, котангенса) цього кута;**
- **кожному значенню косинуса (тангенса, котангенса) кута відповідає лише один гострий кут прямокутного трикутника.**



Синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника називають **тригонометричними функціями** цього кута.

Більше про використання калькулятора для обчислення значень тригонометричних функцій даного кута та про знаходження кута за даним значенням його тригонометричної функції:

rnk.com.ua/109383



Значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса деяких кутів



Для практичних потреб зазвичай користуються наближеними значеннями тригонометричних функцій кута. Але в математичних задачах для окремих кутів можна знайти й точні значення їх тригонометричних функцій.

Розглянемо рівнобічний прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C (рис. 20.6). Очевидно, що в такого трикутника $\angle A = \angle B = 45^\circ$.

Нехай $AC = BC = a$, $AB = c$. Тоді за теоремою Піфагора $a^2 + a^2 = c^2$, звідки $c^2 = 2a^2$, тобто $c = a\sqrt{2}$.

$$\text{Отже, } \sin \angle A = \sin 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Міркуючи аналогічно, одержимо:

$$\cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} \angle A = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

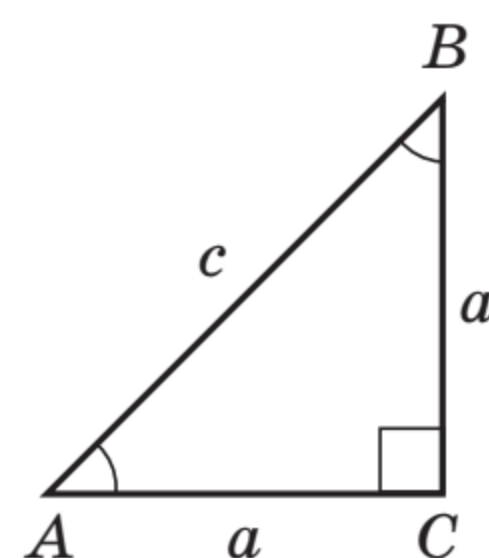


Рис. 20.6



Розглянемо рівносторонній трикутник KLM зі стороною a і проведемо в ньому висоту LH (рис. 20.7). Тоді $\angle KHL = 90^\circ$ і $KL = a$. За властивостями рівностороннього трикутника $\angle K = 60^\circ$, $\angle KHL = 30^\circ$, $KH = \frac{a}{2}$. За

теоремою Піфагора $KH^2 + LH^2 = KL^2$, тобто

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + LH^2 = a^2, \text{ звідки } LH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

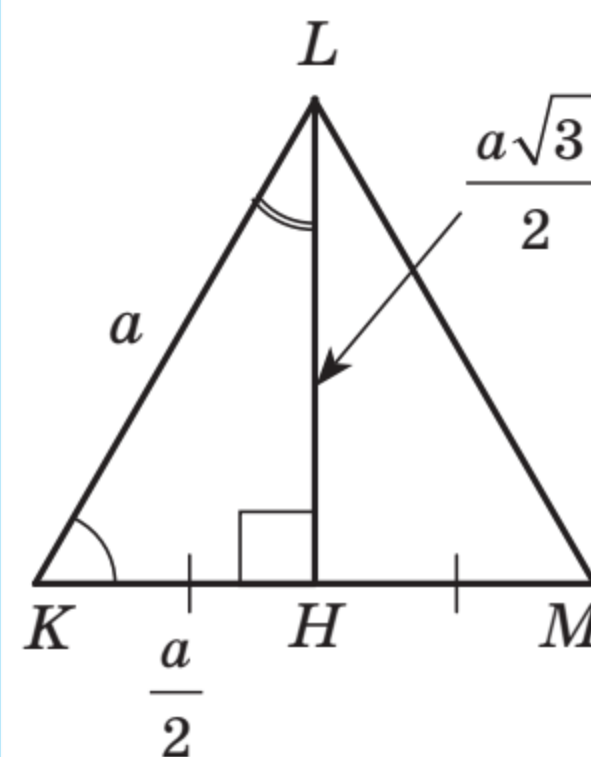


Рис. 20.7

$$\text{Тоді } \sin \angle K = \sin 60^\circ = \frac{LH}{KL} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \angle K = \cos 60^\circ = \frac{KH}{KL} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \angle K = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{LH}{KH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} \angle K = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{KH}{LH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Аналогічно } \sin \angle KLH = \sin 30^\circ = \frac{KH}{KL} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \angle KLH = \cos 30^\circ = \frac{LH}{KL} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \angle KLH = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{KH}{LH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} \angle KLH = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{LH}{KH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$



Значення тригонометричних функцій кутів 30° , 45° , 60° для зручності запам'ятовування подають у вигляді таблиці.

Тригоно- метрична функція \ Кут	30°	45°	60°
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Зверніть увагу на те, що $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$. Ці рівності є окремими випадками більш загальних формул, які виконуються для довільного гострого кута α .

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

Доведення наведених формул:
rnk.com.ua/109384



Перевірте себе!

1. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса гострого кута прямокутного трикутника.
2. Як знайти значення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника за допомогою калькулятора?
3. Як за допомогою калькулятора знайти значення градусної міри кута за відомою його тригонометричною функцією?
4. Якими є значення тригонометричних функцій кутів 30° , 45° , 60° ?



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = \alpha$ (рис. 1).
а) Який катет є прилеглим до кута α ?
б) Який катет є протилежним до кута α ?

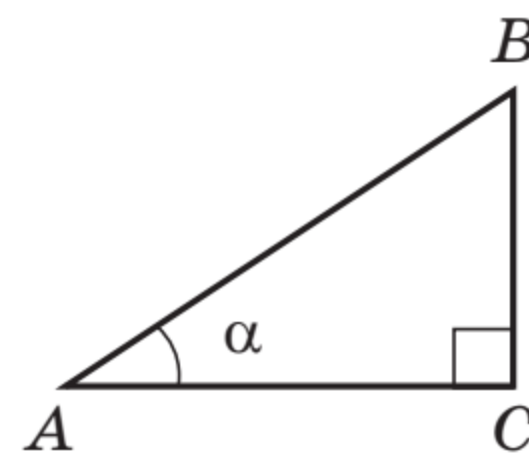


Рис. 1

2. У прямокутному трикутнику $ВМК$ ($\angle K = 90^\circ$) $\angle B = \beta$ (рис. 2).

а) Який катет є прилеглим до кута β ?

б) Який катет є протилежним до кута β ?

3. У прямокутному трикутнику $ВМК$ ($\angle K = 90^\circ$) $\angle B = \beta$ (див. рис. 2). Який із виразів є відношенням протилежного кута β катета до гіпотенузи?

а) $\frac{KM}{BM}$; б) $\frac{BM}{KM}$; в) $\frac{KM}{BK}$; г) $\frac{BK}{KM}$.

4. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = \alpha$ (див. рис. 3). Який із виразів є відношенням протилежного кута α катета до прилеглого катета?

а) $\frac{AC}{BC}$; б) $\frac{BC}{AC}$; в) $\frac{BC}{AB}$; г) $\frac{AC}{AB}$.

5. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = \alpha$ (див. рис. 3). Яке з відношень дорівнює $\cos \alpha$? (Згадайте, що косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.)

а) $\frac{AC}{BC}$; б) $\frac{BC}{AC}$; в) $\frac{BC}{AB}$; г) $\frac{AC}{AB}$.

6. У прямокутному трикутнику $ВМК$ ($\angle K = 90^\circ$) $\angle B = \beta$ (див. рис. 2). Яке з відношень дорівнює $\sin \beta$? (Згадайте, що синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.)

а) $\frac{KM}{BM}$; б) $\frac{BM}{KM}$; в) $\frac{KM}{BK}$; г) $\frac{BK}{KM}$.

7. Обчисліть за допомогою калькулятора; результат округліть до тисячних.

а) $\sin 20^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 70^\circ$; в) $\cos 40^\circ$; г) $\operatorname{tg} 50^\circ$.

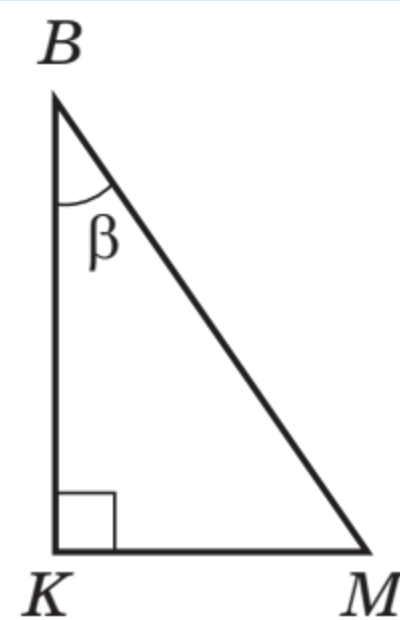


Рис. 2

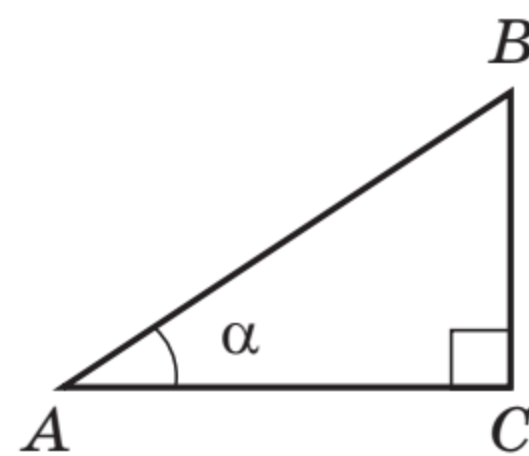


Рис. 3

8. Обчисліть за допомогою калькулятора; результат округліть до сотих.

- а) $\cos 30^\circ$; б) $\sin 35^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 60^\circ$; г) $\operatorname{tg} 20^\circ$.

9. У прямокутному трикутнику $ВМК$ ($\angle K = 90^\circ$) $\angle B = \beta$ (див. рис. 2). Яке з відношень дорівнює $\operatorname{ctg} \beta$? (Згадайте, що котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного катета.)

- а) $\frac{KM}{BM}$; б) $\frac{BM}{KM}$; в) $\frac{KM}{BK}$; г) $\frac{BK}{KM}$.

10. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = \alpha$ (див. рис. 3). Яке з відношень дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$? (Згадайте, що тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого катета.)

- а) $\frac{AC}{BC}$; б) $\frac{BC}{AC}$; в) $\frac{BC}{AB}$; г) $\frac{AC}{AB}$.

11. Знайдіть за таблицею значення тригонометричних функцій:
а) $\sin 30^\circ$; б) $\cos 45^\circ$; в) $\operatorname{tg} 60^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 45^\circ$.

12. Знайдіть за таблицею значення тригонометричних функцій:
а) $\sin 45^\circ$; б) $\cos 30^\circ$; в) $\operatorname{tg} 45^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 30^\circ$.

13. Позначення 10 % на дорожньому знаку «Крутий підйом» означає, що на кожні 100 метрів висота дороги над рівнем моря збільшується на 10 метрів, тобто на 10 % від 100 метрів (див. рис. 4). Яка тригонометрична функція кута визначається відношенням $\frac{10}{100}$?

- а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$; г) $\operatorname{ctg} \alpha$.

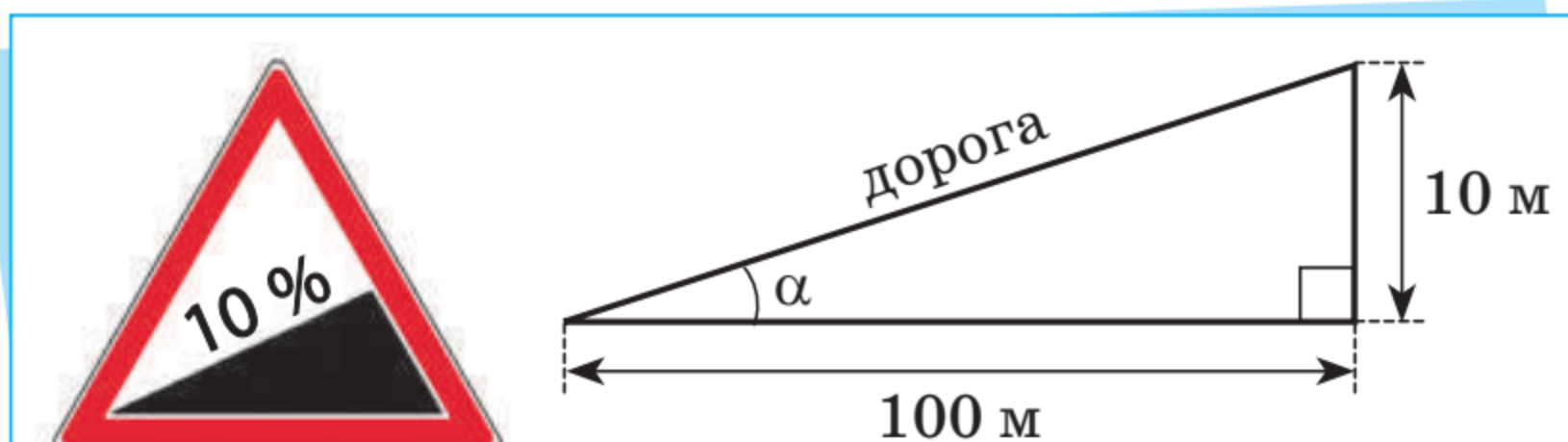


Рис. 4

14.

Позначення 6 % на дорожньому знаку «Крутий спуск» означає, що на кожні 100 метрів висота дороги над рівнем моря зменшується на 6 метрів, тобто на 6 % від 100 метрів (див. рис. 5). Яка тригонометрична функція кута β визначається відношенням $\frac{6}{100}$?

- а) $\sin\beta$; б) $\cos\beta$; в) $\operatorname{tg}\beta$; г) $\operatorname{ctg}\beta$.

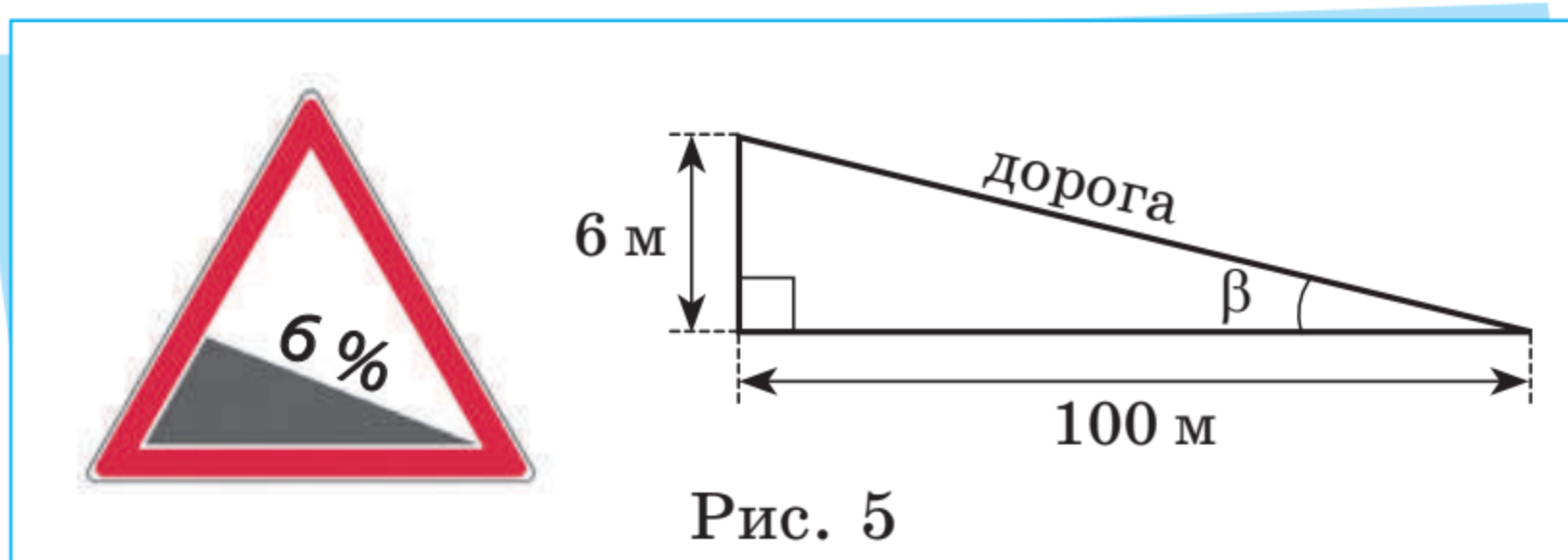


Рис. 5



Середній рівень

15.

Для кожного з трикутників на рис. 6 запишіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

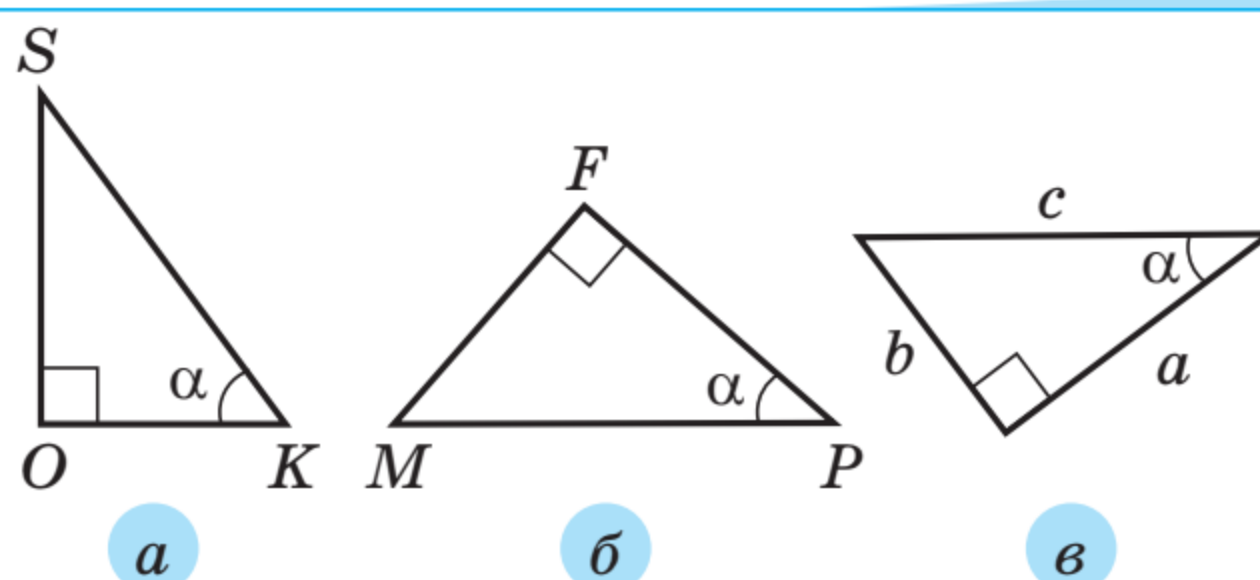


Рис. 6

16.

Для кожного з трикутників на рис. 7 запишіть $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

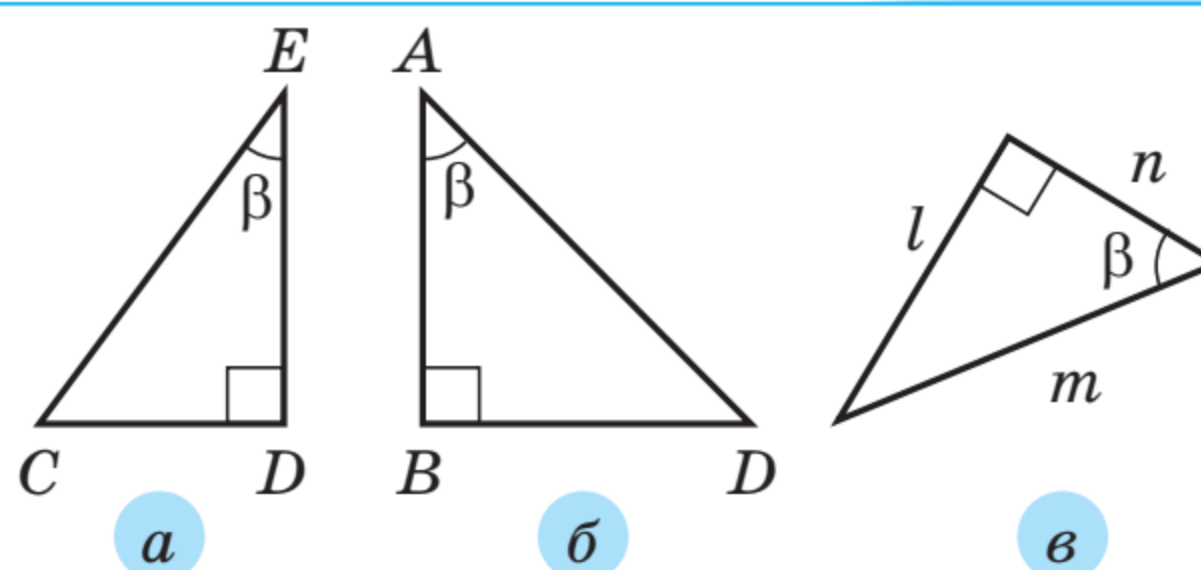


Рис. 7

17. У прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 7$ см, $BC = 11$ см (рис. 8). Порівняйте:
а) $\sin \angle B$ і $\cos \angle B$; б) $\sin \angle B$ і $\cos \angle A$.

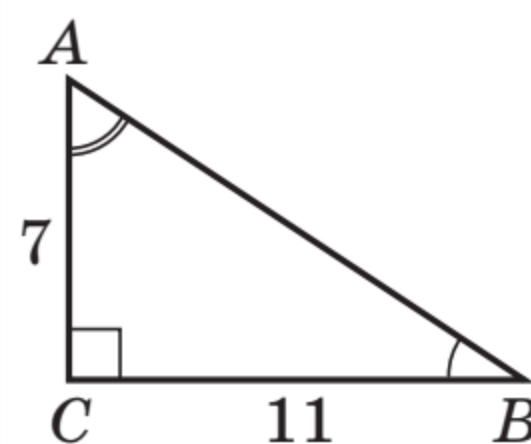


Рис. 8

18. У прямокутного трикутника KLM ($\angle L = 90^\circ$) $LK = 13$ см, $LM = 6$ см (рис. 9). Порівняйте:
а) $\sin \angle M$ і $\cos \angle M$; б) $\sin \angle K$ і $\cos \angle M$.

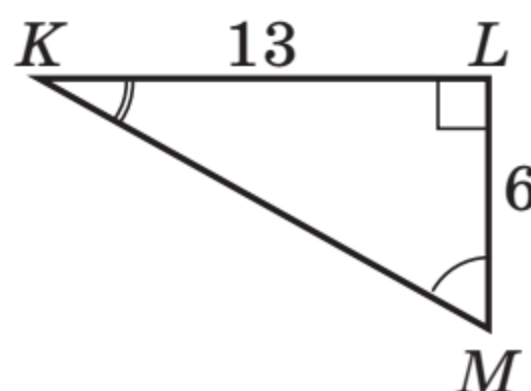


Рис. 9

19. У прямокутного трикутника KLM ($\angle L = 90^\circ$) $LK = 13$ см, $LM = 6$ см (див. рис. 9). Порівняйте:
а) $\operatorname{tg} \angle M$ і $\operatorname{ctg} \angle M$; б) $\operatorname{tg} \angle K$ і $\operatorname{ctg} \angle M$.

20. У прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 7$ см, $BC = 11$ см (див. рис. 8). Порівняйте:
а) $\operatorname{tg} \angle B$ і $\operatorname{ctg} \angle B$; б) $\operatorname{tg} \angle B$ і $\operatorname{ctg} \angle A$.

21. У прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = 30^\circ$, $CB = 8$ см (рис. 10). Обчисліть довжину гіпотенузи AB . Виконайте завдання двома способами:
а) використайте властивість прямокутного трикутника з кутом 30° ;
б) використайте означення синуса й таблицю значень тригонометричних функцій.
Чи однаковий результат ви отримали?

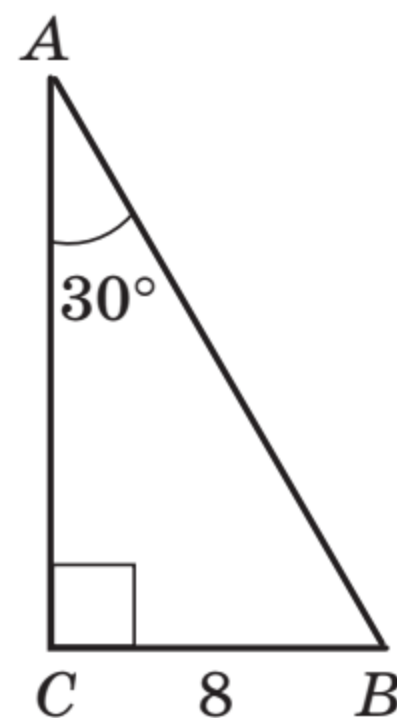


Рис. 10

22. У прямокутного трикутника MKD ($\angle D = 90^\circ$) $\angle M = 45^\circ$, $KD = 10$ см (рис. 11). Обчисліть довжину катета MD . Виконайте завдання двома способами:
а) використайте властивість прямокутного рівнобічного трикутника;
б) використайте означення котангенса й таблицю значень тригонометричних функцій.

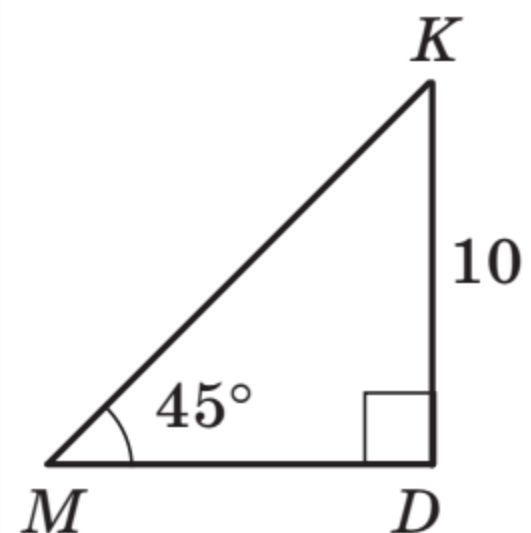


Рис. 11

Чи однаковий результат ви отримали?

23. Знайдіть значення виразу, скориставшись таблицею значень тригонометричних функцій.

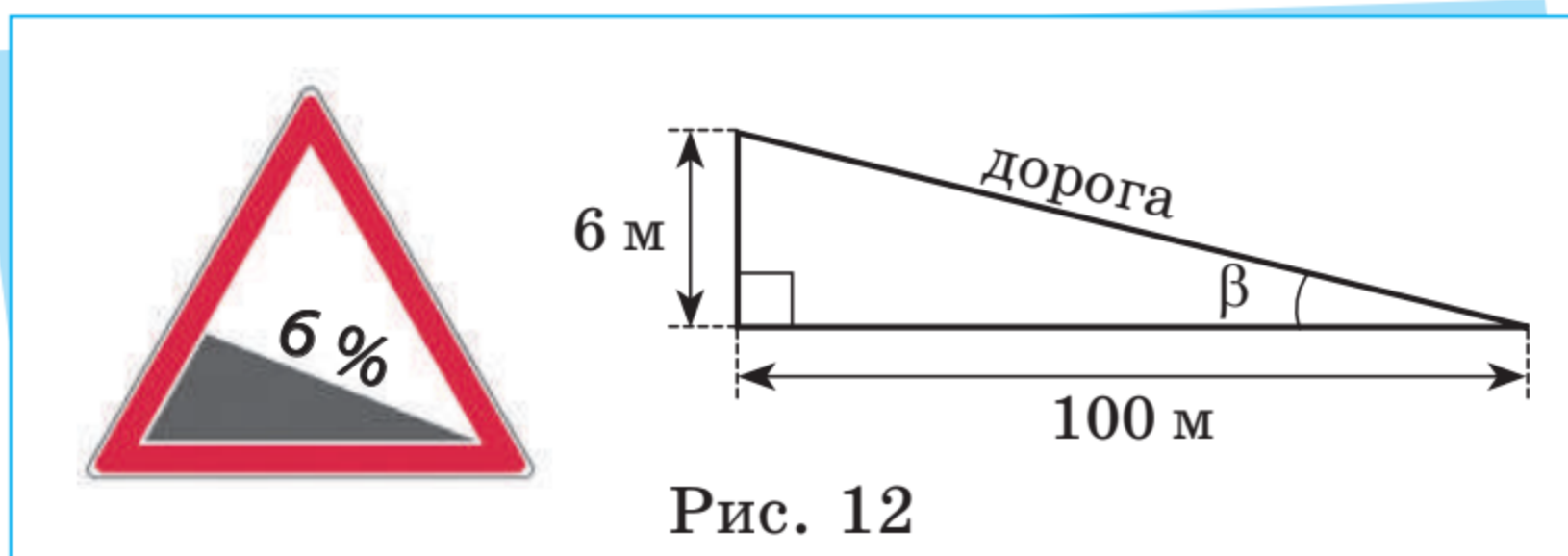
- а) $\sin 45^\circ : \cos 45^\circ$; в) $\sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$;
 б) $\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ$; г) $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$.

24. Знайдіть значення виразу, скориставшись таблицею значень тригонометричних функцій.

- а) $\sin 30^\circ : \operatorname{ctg} 60^\circ$; в) $\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ$;
 б) $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$; г) $\sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

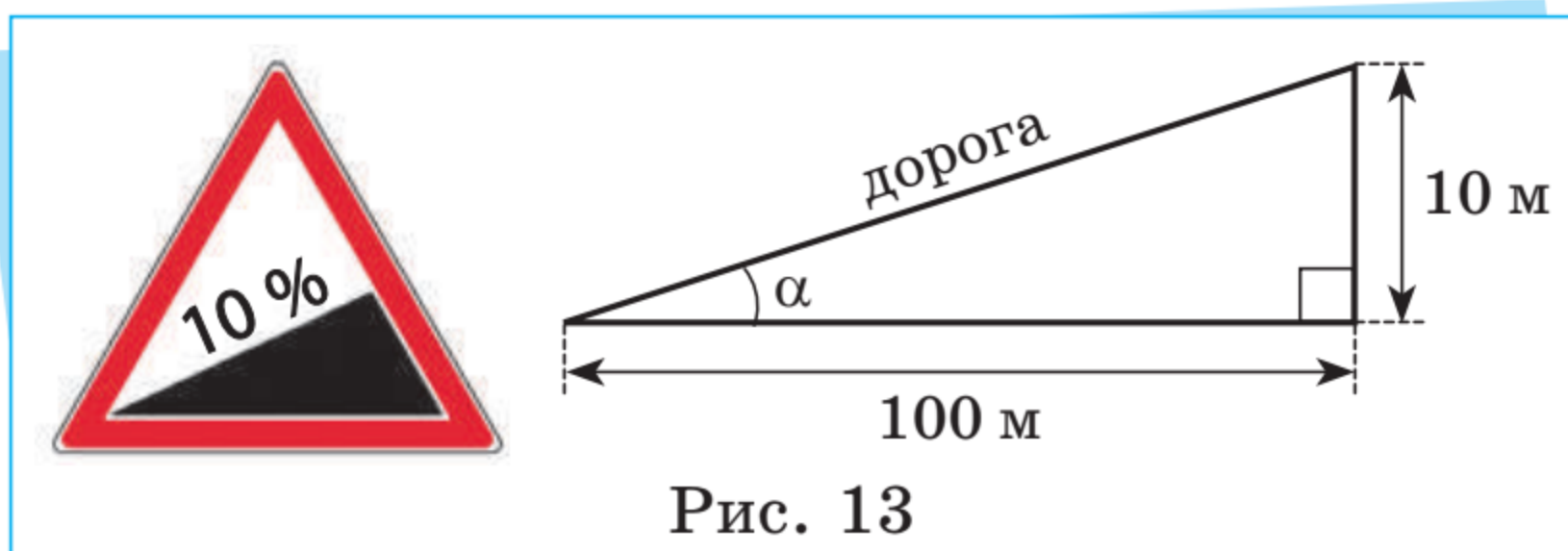
25. Позначення 6 % на дорожньому знаку «Крутий спуск» означає, що на кожні 100 метрів висота дороги над рівнем моря зменшується на 6 метрів, тобто на 6 % від 100 метрів (рис. 12). За допомогою калькулятора підберіть значення кута β , яке є найближчим до реального.

- а) 3° ; б) 6° ; в) 12° ; г) 30° .



26. Позначення 10 % на дорожньому знаку «Крутий підйом» означає, що на кожні 100 метрів висота дороги над рівнем моря збільшується на 10 метрів, тобто на 10 % від 100 метрів (див. рис. 13). За допомогою калькулятора підберіть значення кута α , яке є найближчим до реального.

- а) 3° ; б) 5° ; в) 6° ; г) 10° .





Достатній рівень

27. У прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) $BC = 8$ см, $AB = 17$ см. Знайдіть $\cos \angle A$.
28. У прямокутного трикутника KDE ($\angle E = 90^\circ$) $DE = 5$ см, $DK = 13$ см. Знайдіть $\sin \angle D$.
29. У прямокутного трикутника один із катетів дорівнює 6 см, а кут, що лежить навпроти цього катета, дорівнює 60° . Знайдіть гіпотенузу й другий катет цього трикутника.
30. У прямокутного трикутника гіпотенуза дорівнює $10\sqrt{2}$ см, а один із гострих кутів дорівнює 45° . Знайдіть довжини катетів цього трикутника.
31. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо: а) $BC = 3$ см, $\cos \angle B = \frac{2}{3}$; б) $AC = 4$ см, $\operatorname{tg} \angle B = 2$.
32. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо: а) $AC = 4$ см, $\sin \angle B = \frac{1}{4}$; б) $AB = 8$ см, $\cos \angle A = \frac{5}{8}$.
33. У паралелограмі $ABCD$ до сторони AD проведено висоту BH . Запишіть вирази для знаходження довжин висоти BH і відрізка AH , якщо $\angle A = \alpha$, $AB = a$. Знайдіть довжини BH і AH , якщо: а) $\alpha = 30^\circ$, $a = 6$ см; б) $\alpha = 60^\circ$, $a = 5$ см.
34. У ромбі $ABCD$ до сторони AD проведено висоту BH . Запишіть вирази для знаходження довжин висоти BH і сторони AB , якщо $\angle A = \beta$, $AH = b$. Знайдіть довжини BH і AB , якщо: а) $\beta = 30^\circ$, $b = 9$ см; б) $\beta = 45^\circ$, $b = 4\sqrt{2}$ см.
35. Доведіть, що для будь-якого гострого кута α виконується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.



36. Доведіть, що для будь-якого гострого кута α виконується рівність $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

37. Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором.

а) $\frac{\sin 40^\circ}{\cos 50^\circ}$; б) $\cos 80^\circ + \cos 60^\circ - \sin 10^\circ$; в) $\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{ctg} 53^\circ$.



38. Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором.

а) $\frac{2 \cos 20^\circ}{\sin 70^\circ}$; б) $\sin 30^\circ + \sin 15^\circ - \cos 75^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 33^\circ - \operatorname{tg} 57^\circ$.

39. Точки $A(-2; 0)$ і $B(0; 4)$ належать графіку деякої лінійної функції. Побудуйте графік цієї функції. Знайдіть тангенс кута між графіком функції та віссю абсцис.



40. Точки $A(0; 6)$ і $B(2; 0)$ належать графіку деякої лінійної функції. Побудуйте графік цієї функції. Знайдіть тангенс кута між графіком функції та віссю ординат.



Високий рівень

41. Основа рівнобічного трикутника дорівнює 16 см, а його бічна сторона — 17 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при основі цього трикутника.



42. Знайдіть синус, косинус і котангенс гострого кута рівнобічної трапеції, основи якої — 4 см і 16 см, а бічна сторона — 10 см.

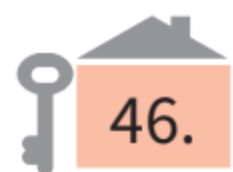
43. У прямокутному трикутнику проєкції катетів на гіпотенузу дорівнюють 1 см і 4 см. Знайдіть синус, косинус і котангенс більшого гострого кута заданого трикутника.



44. Задано прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 12 см, а периметр становить 34 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс меншого гострого кута між діагоналлю і стороною прямокутника.



45. Доведіть, що для будь-якого гострого кута α виконується рівність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



46. Доведіть, що для будь-якого гострого кута α виконуються рівності: а) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$; б) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; в) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

47. За допомогою циркуля й лінійки побудуйте кут, косинус якого дорівнює 0,8.



48. За допомогою циркуля й лінійки побудуйте кут, синус якого дорівнює 0,6.

49. Знайдіть кути ромба з діагоналями $4\sqrt{3}$ і 4.



50. Сторони прямокутника дорівнюють 3 см і $\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути, які утворює діагональ зі сторонами прямокутника.



Цікавинки від дідуся Тараса

Тригонометрія (від грецьк. *τρίγωνο* — «трикутник» і *μετρέιν* — «вимірюю») — це розділ математики, який вивчає співвідношення між сторонами й кутами трикутників. Історія тригонометрії охоплює понад два тисячоліття. Історики вважають, що цей розділ математики створили стародавні астрономи, пізніше тригонометрію почали використовувати в геодезії й архітектурі. Згодом сфера застосування тригонометрії повсякчас розширювалась, наразі вона є складовою майже всіх природничих наук, техніки й низки інших галузей людської діяльності.

Зародки тригонометрії можна знайти в математичних рукописах стародавнього Єгипту, Вавилону й Стародавнього Китаю, але загальне й логічне викладення тригонометричних співвідношень з'явилося у давньогрецькій геометрії. Грецькі математики ще не виділяли тригонометрію як окрему науку, для них вона була частиною астрономії. Після занепаду античної науки центр розвитку математики змістився до Індії. Саме індійці (*Брамагупта*, *Аріабгата*, *Бгаскара* та ін.) у IV ст. вперше вжили термін «синус кута» (походить від санскритського слова «тятива»). Також вони вперше ввели термін «косинус кута». Терміни «тангенс кута» і «котангенс кута» введено пізніше арабськими вченими *аль-Хорезмі* та *аль-Марвазі*. У країнах Європи значний внесок у розвиток тригонометрії зробили *Леонардо Пізанський (Фібоначчі)*, *Йоганн*

Мюллер (Регіомонтан), Миколай Коперник, Йоганн Кеплер, Франсуа Вієт, Ісаак Ньютон, Готфрід Ляйбніц, Леонард Ойлер, Данієль Бернуллі, Жан-Батист Фур'є, Сімеон-Дені Пуассон, Огюстен-Луї Коші та ін.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про історію розвитку тригонометрії в різні періоди часу та в різних країнах. Підготуйте невеликі повідомлення.
2. Чи доводилося вам у повсякденному житті використовувати тригонометрію? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $\left(4y - \frac{1}{y}\right) : \frac{2y-1}{y^2}$ і знайдіть його значення, якщо $y = 1,5$.
2. Розв'яжіть рівняння: а) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$; б) $2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$.
3. В однієї компанії є два представництва: в обласному центрі та в столиці країни. Усі 12 працівників столичного представництва отримують зарплату в розмірі 20 тис. грн на місяць, а всі n працівників представництва в обласному центрі — зарплату в розмірі 17 тис. грн на місяць. Знайдіть значення n , якщо середня зарплата працівників двох представництв цієї компанії становить 18 800 грн на місяць.
4. Один із кутів дельтоїда — прямий. Знайдіть градусні міри всіх інших його кутів, якщо одна з діагоналей дельтоїда утворює з його стороною кут 35° .
5. Знайдіть слово, яке потрібно поставити в дужках, щоб воно було закінченням слова, що починається зліва від дужок, і початком слова, яке закінчується справа від дужок (кількість крапок у дужках дорівнює кількості букв у слові).
а) МЕГА(. . .)ТАН; б) О(. . .)ДА; в) ОБ(. . . .)ОК.

§ 21. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Розв'язування прямокутних трикутників



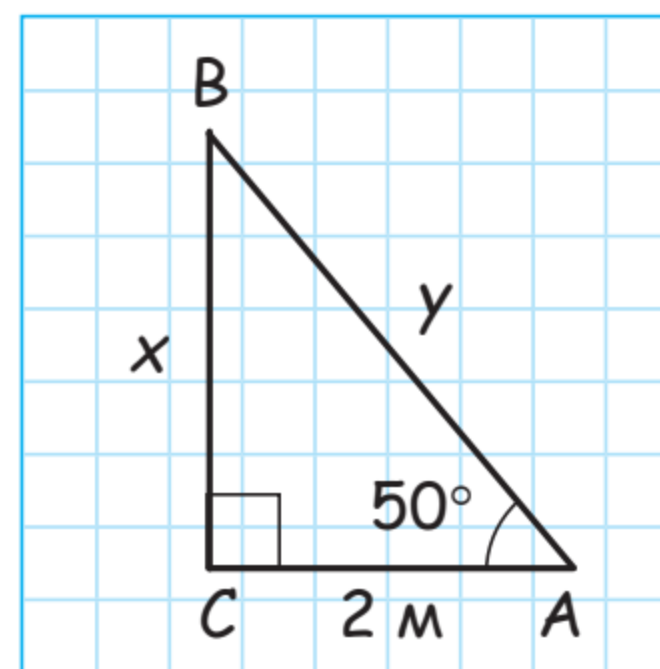
Ну як, Тетянко, нахил даху твоєї альтанки у 42° виявився прийнятним чи довелося змінювати проєкт?



Останніми роками взимку випадає не дуже багато снігу, тому батьки вирішили, що кута в 42° буде цілком достатньо. Але мені цікаво, а якби ми все-таки вирішили збільшити кут нахилу даху й зробити його, скажімо, 50° , то як розрахувати відповідні розміри даху й опори за незмінних розмірів стелі?



Побудуймо математичну модель цієї задачі. Поглянь, на моєму рисунку той самий прямий прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C . Нехай катет AC позначає половину стелі, катет BC — опору для даху, а гіпотенуза AB — схил даху. Також нехай планується, що кут нахилу даху до стелі (кут A) дорівнює 50° . Потрібно, знаючи, що сторона AC дорівнює 2 метри, знайти довжини сторін BC і AB .





Стривай, я зрозуміла ідею, хочу далі сама спробувати. Позначимо $BC = x$ метрів, а $AB = y$ метрів. Тоді $\cos \angle A = \cos 50^\circ = \frac{2}{y}$, а $\operatorname{tg} \angle A = \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{x}{2}$. За допомогою калькулятора знаходимо $\cos 50^\circ \approx 0,643$ і $\operatorname{tg} 50^\circ \approx 1,192$. Трохи легше знайти значення x із рівності $\frac{x}{2} \approx 1,192$. Виходить, що $x \approx 1,192 \cdot 2 = 2,384$ метра. Із рівності $\frac{2}{y} \approx 0,643$ можна знайти значення y . Отже, $y \approx \frac{2}{0,643} \approx 3,11$ метра. От ми і знайшли розміри даху й опори.



Як на мене, значення y краще було знаходити за теоремою Піфагора: $y^2 = x^2 + 2^2$. Тобто $y \approx \sqrt{2,384^2 + 2^2} = \sqrt{9,683456} \approx 3,11$ (м). Вийшов той самий результат. Але я розумію, що під час виконання обчислень за рахунок округлення можуть виникати й невеликі розбіжності.



Виходить, що, знаючи в прямокутному трикутнику якісь два елементи, можна знайти всі інші елементи цього трикутника. У нашому випадку нам були відомі один катет і один гострий кут, за цими даними ми знайшли інший катет і гіпотенузу трикутника. Інший гострий кут, до речі, теж легко знайти — за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle A + \angle B = 90^\circ$, а отже, $\angle B = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.



Насправді, це не зовсім правильно. Якщо відомі лише два гострих кути прямокутного трикутника, то сторони нам знайти не вдасться, бо є безліч прямокутних трикутників різного розміру з даними кутами — усі вони будуть подібними між собою. Але якщо із цих двох відомих елементів прямокутного трикутника

один елемент — сторона, то думаю, що решту елементів цього трикутника ми справді можемо знайти.



Згодна, але хочеться про це дізнатися більше.



Зараз, Тетянко, все розповімо.

Знаходження за відомими елементами (кутами й сторонами) прямокутного трикутника всіх інших невідомих його елементів (сторін і кутів) називають **розв'язуванням прямокутних трикутників**. Як слушно зазначив Петрик, серед відомих елементів прямокутного трикутника має бути принаймні одна сторона. **Якщо відомі лише кути прямокутного трикутника, то розв'язати його не можна.**



Розглянемо прямокутний ABC з прямим кутом C . Нехай, як і раніше, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ (рис. 21.1). Виділяють чотири можливі типи задач щодо розв'язування цього прямокутного трикутника.

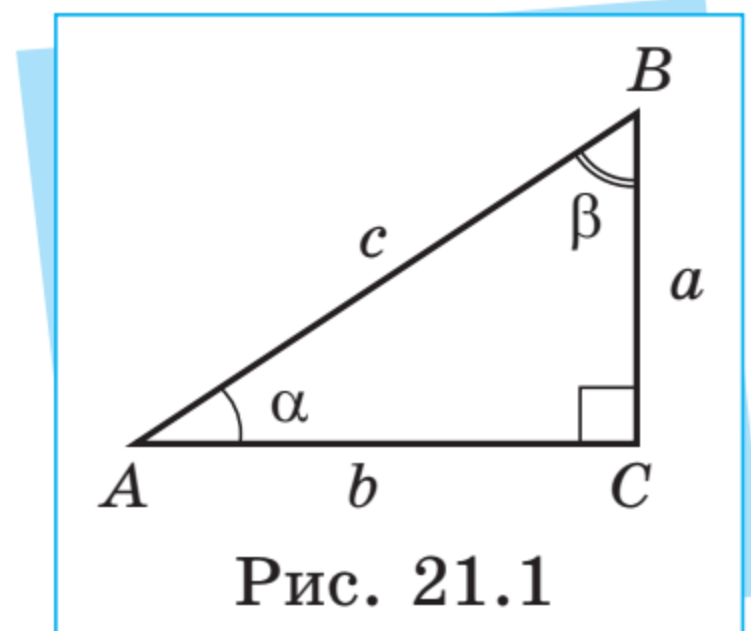


Рис. 21.1

1. Відомі два катети трикутника, потрібно знайти гіпотенузу й два гострих кути трикутника.
2. Відомі один із катетів і гіпотенуза трикутника, потрібно знайти інший катет і два гострих кути трикутника.
3. Відомі гіпотенуза й один із гострих кутів трикутника, потрібно знайти інший гострий кут і обидва катети трикутника.
4. Відомі один із катетів і один із гострих кутів трикутника, потрібно знайти інший гострий кут, інший катет і гіпотенузу цього трикутника.



Розглянемо *перший тип задач* на розв'язування прямокутного трикутника. За відомими двома катетами a і b за теоремою

Піфагора можна знайти гіпотенузу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Потім, скориставшись будь-якою тригонометричною функцією, за допомогою калькулятора можна знайти градусні міри кутів α і β . Один із можливих варіантів: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

Наприклад, нехай $a = 12$ см, $b = 5$ см. Тоді $c = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ см, $\sin \alpha = \frac{12}{13} \approx 0,923$, $\sin \beta = \frac{5}{13} \approx 0,385$. За допомогою калькулятора знаходимо, що $\alpha \approx 67,4^\circ$ або $\alpha \approx 67^\circ 24'$, $\beta \approx 22,6^\circ$ або $\beta \approx 22^\circ 36'$. Прямокутний трикутник розв'язано. Зауважимо, що кут β також можна знаходити за формулою $\beta = 90^\circ - \alpha$.



Розглянемо *четвертий тип* задач на розв'язування прямокутного трикутника. Нехай відомі катет a і гострий кут α . Одразу можна знайти гострий кут β за формулою $\beta = 90^\circ - \alpha$. Далі з рівностей $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ одержуємо, що $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ і $b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

Наприклад, нехай $a = 10$ см, $\alpha = 78^\circ$. Тоді $\beta = 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$, $c = \frac{10}{\sin 78^\circ} \approx 10,22$ см, $b = 10 \cdot \operatorname{ctg} 78^\circ \approx 2,13$ см. Прямокутний трикутник розв'язано.



Про те, як розв'язувати прямокутні трикутники у задачах *другого й третього типів*: rnk.com.ua/109403



Перевірте себе!

1. Що означає розв'язати прямокутний трикутник?
2. Які існують типи задач на розв'язування прямокутних трикутників?
3. Наведіть алгоритми розв'язування для кожного типу задач на розв'язування прямокутних трикутників.



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. У прямокутному трикутнику відомі катет і прилеглий до цього катета гострий кут. Що означає розв'язати цей прямокутний трикутник?
2. У прямокутному трикутнику відомі гіпотенуза та один із гострих кутів. Що означає розв'язати цей прямокутний трикутник?
3. У прямокутному трикутнику відомі два катети. Що означає розв'язати цей прямокутний трикутник?
4. У прямокутному трикутнику відомі гіпотенуза та один із катетів. Що означає розв'язати цей прямокутний трикутник?
5. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см (рис. 1). Скориставшись теоремою Піфагора, обчисліть довжину гіпотенузи AB . Згадайте, що тангенс гострого кута прямокутного трикутника — це відношення протилежного катета до прилеглого катета. Обчисліть $\operatorname{tg} \angle A$. Чи можна сказати, що розв'язання трикутника завершено? Якщо ні, то які ще елементи трикутника потрібно знайти?
6. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) $KM = 12$ см, $LM = 5$ см (рис. 2). Скориставшись теоремою Піфагора, обчисліть довжину гіпотенузи KL . Згадайте, що котангенс гострого кута прямокутного трикутника — це відношення прилеглого катета до протилежного катета. Обчисліть $\operatorname{ctg} \angle K$. Чи можна сказати, що розв'язання трикутника завершено? Якщо ні, то які ще елементи трикутника потрібно знайти?

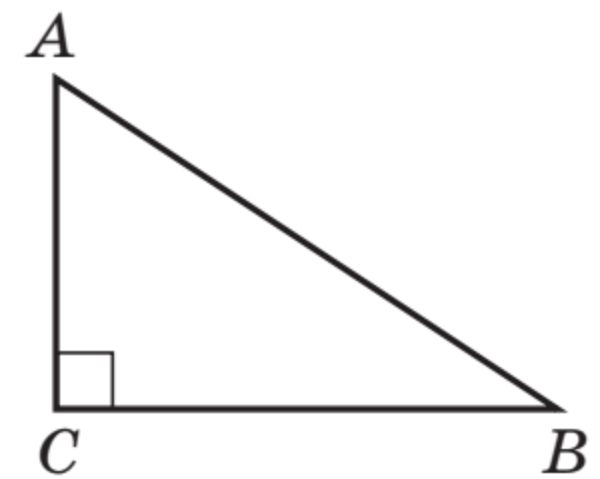


Рис. 1

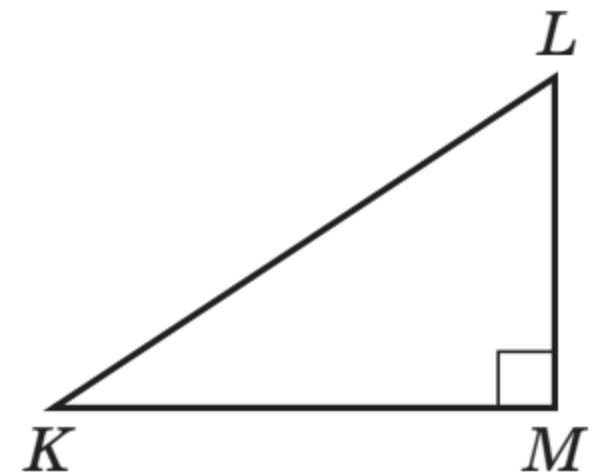
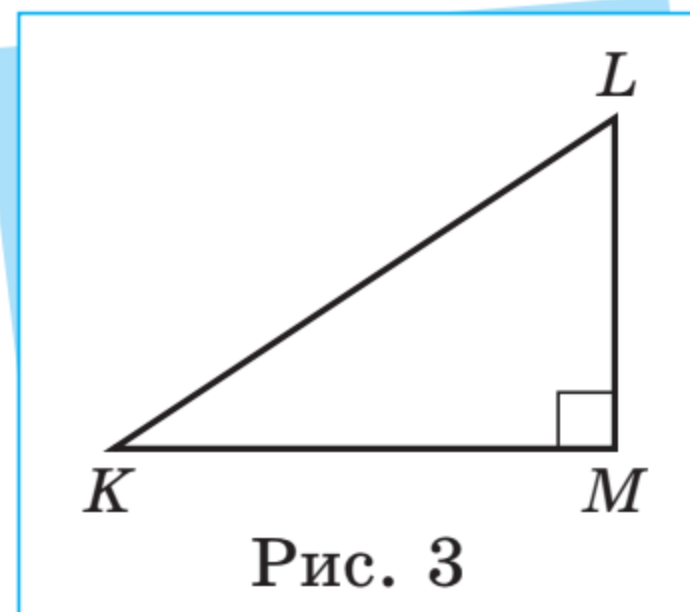
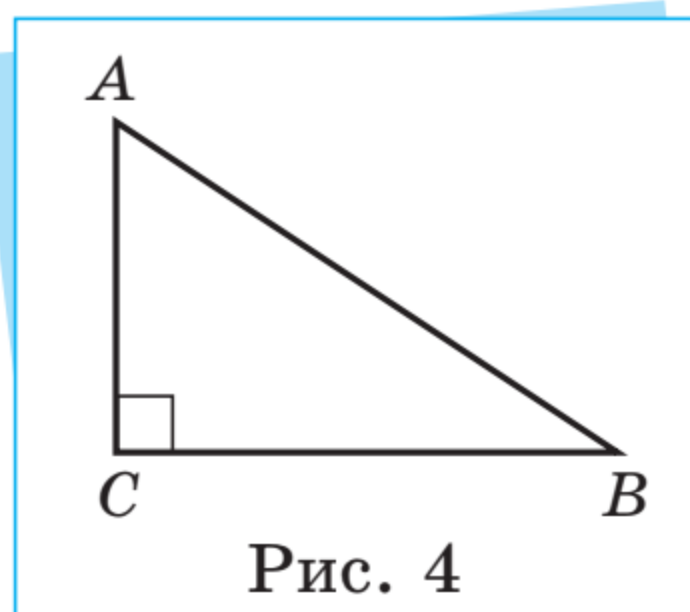


Рис. 2

7. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) $KM = 12$ см, $LK = 15$ см (див. рис. 3). Скориставшись теоремою Піфагора, обчисліть довжину катета ML . Згадайте, що синус гострого кута прямокутного трикутника — це відношення протилежного катета до гіпотенузи. Обчисліть $\sin \angle L$. Чи можна сказати, що розв'язання трикутника завершено? Якщо ні, то які ще елементи трикутника потрібно знайти?



8. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 5$ см, $AB = 13$ см (див. рис. 4). Скориставшись теоремою Піфагора, обчисліть довжину катета BC . Згадайте, що косинус гострого кута прямокутного трикутника — це відношення прилеглого катета до гіпотенузи. Обчисліть $\cos \angle A$. Чи можна сказати, що розв'язання трикутника завершено? Якщо ні, то які ще елементи трикутника потрібно знайти?



9. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 8$ см, $\angle B = 25^\circ$ (див. рис. 4). Обчисліть $\angle A$. За допомогою калькулятора знайдіть $\sin \angle B$. Згадайте, що синус гострого кута прямокутного трикутника — це відношення протилежного катета до гіпотенузи. Обчисліть довжину гіпотенузи AB . Чи можна сказати, що розв'язання трикутника завершено? Якщо ні, то які ще елементи трикутника потрібно знайти?

10. У прямокутному трикутнику KLM ($\angle M = 90^\circ$) $\angle L = 70^\circ$, $LK = 25$ см (див. рис. 3). Обчисліть $\angle K$. За допомогою калькулятора знайдіть $\cos \angle L$. Згадайте, що косинус гострого кута прямокутного трикутника — це відношення прилеглого катета до гіпотенузи. Обчисліть довжину катета LM . Чи можна сказати, що розв'язання трикутника завершено? Якщо ні, то які ще елементи трикутника потрібно знайти?



Середній рівень

11. За допомогою калькулятора знайдіть: а) $\sin 38^\circ$; б) $\cos 75^\circ$; в) $\operatorname{tg} 18^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 63^\circ$. Одержані значення округліть до тисячних.
12. За допомогою калькулятора знайдіть: а) $\sin 81^\circ$; б) $\cos 52^\circ$; в) $\operatorname{tg} 44^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 35^\circ$. Одержані значення округліть до тисячних.
13. У прямокутного трикутника довжини катетів дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та синуси гострих кутів цього трикутника.
14. У прямокутного трикутника довжини катетів дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та косинуси гострих кутів цього трикутника.
15. У прямокутного трикутника довжина одного з катетів дорівнює 12 см, а довжина гіпотенузи — 37 см. Знайдіть довжину другого катета й тангенс гострих кутів цього трикутника.
16. У прямокутного трикутника довжина одного з катетів дорівнює 7 см, а довжина гіпотенузи — 25 см. Знайдіть довжину другого катета й тангенс гострих кутів цього трикутника.
17. У прямокутного трикутника довжина гіпотенузи дорівнює 10 см, а градусна міра одного з гострих кутів — 30° . Знайдіть довжини катетів цього трикутника й градусну міру другого гострого кута.
18. У прямокутного трикутника довжина гіпотенузи дорівнює 18 см, а градусна міра одного з гострих кутів — 60° . Знайдіть довжини катетів цього трикутника й градусну міру другого гострого кута.
19. У прямокутного трикутника довжина одного з катетів дорівнює 8 см, а градусна міра кута, прилеглого до цього катета, — 40° . Знайдіть довжину гіпотенузи, довжину другого катета й градусну міру другого гострого кута цього трикутника, якщо відомо, що $\sin 40^\circ = 0,6428$, а $\cos 40^\circ = 0,7660$. Одержані значення округліть до десятих.

20.

У прямокутного трикутника довжина одного з катетів дорівнює 9 см, а градусна міра кута, протилежного цьому катету, — 20° . Знайдіть довжину гіпотенузи, довжину другого катета й градусну міру другого гострого кута цього трикутника, якщо відомо, що $\sin 20^\circ = 0,3420$, а $\cos 20^\circ = 0,9397$. Одержані значення округліть до десятих.



Достатній рівень

21.

У рівнобічному трикутнику AMD ($AM = MD$) проведено медіану MK . Знайдіть довжини сторін і градусні міри кутів трикутника AMD , якщо $MK = 7$ см, а $KD = 7\sqrt{3}$ см.

22.

У рівнобічному трикутнику STL ($ST = LT$) проведено бісектрису TN . Знайдіть довжини сторін і градусні міри кутів трикутника STL , якщо $TN = 6\sqrt{3}$ см, а $NL = 6$ см.

23.

Знайдіть довжини діагоналей ромба $ABCD$, якщо відомо, що $AB = 4$ см, а більша діагональ утворює зі стороною ромба кут 25° . Одержані значення округліть до сотих.

24.

Знайдіть довжини діагоналей ромба $ABCD$, якщо відомо, що $BC = 8$ см, а менша діагональ утворює зі стороною ромба кут 65° . Одержані значення округліть до десятих.

25.

Із точки A до прямої a проведено перпендикуляр AO та похилу $АН$. Знайдіть довжину проєкції цієї похилої й тангенс кута між похилою та проєкцією, якщо $AO = 20$ см, $АН = 29$ см.

26.

Із точки M до прямої b проведено перпендикуляр MN і похилу MK . Знайдіть довжину перпендикуляра MN і синус кута між похилою та проєкцією, якщо $MK = 53$ см, $KN = 45$ см.

27.

Промінь світла падає під кутом 15° (рис. 5). Знайдіть довжину тіні дерева, якщо висота дерева становить 16 м. Відповідь округліть до десятих.

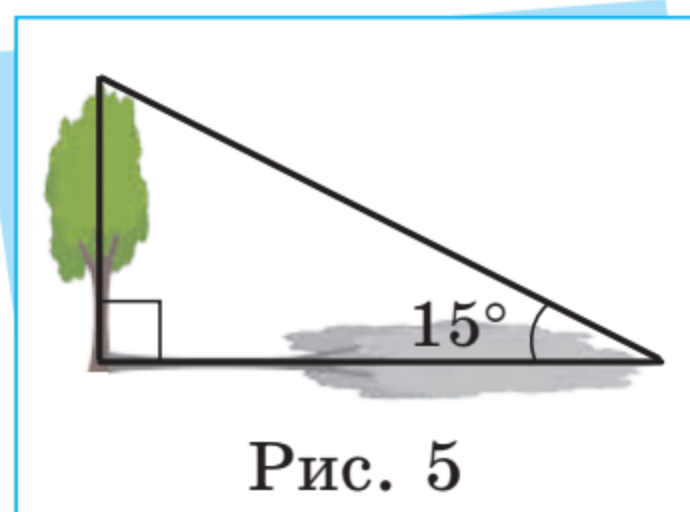
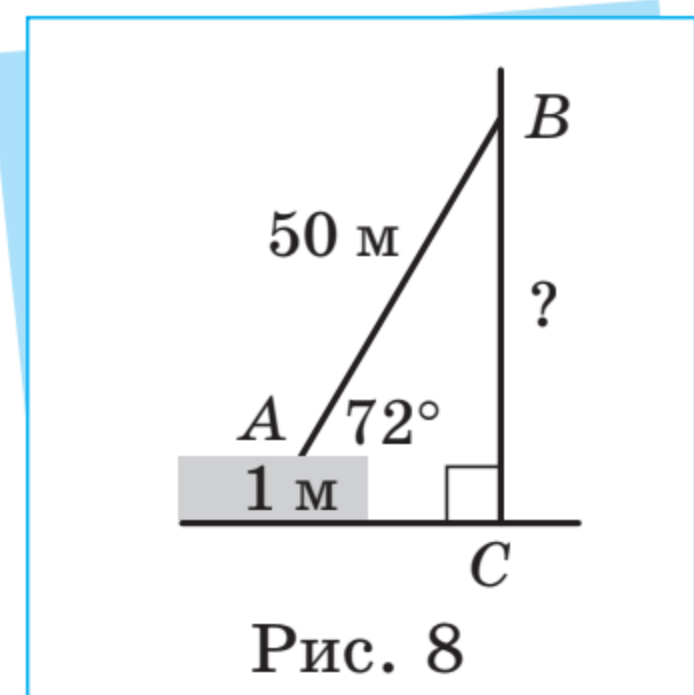
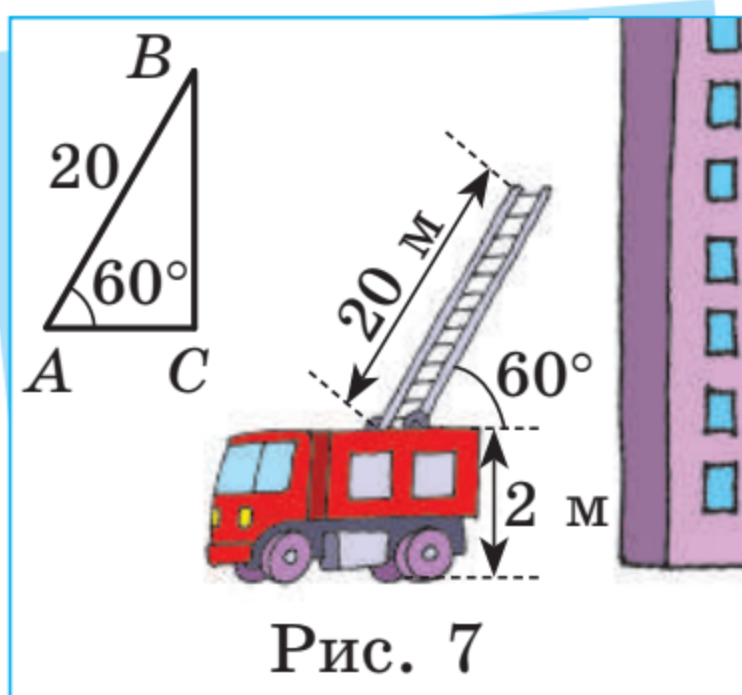
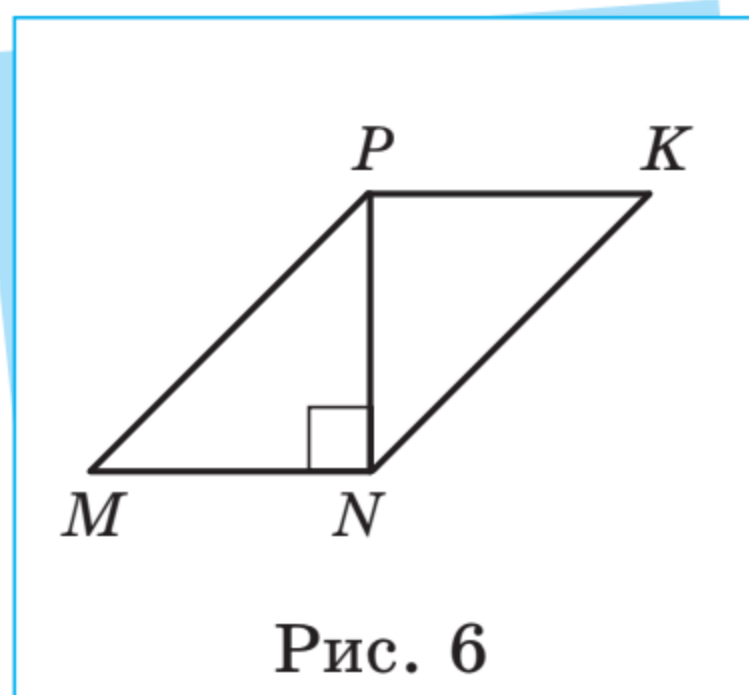


Рис. 5

28. Діагональ PN паралелограма $MPKN$ є висотою паралелограма (рис. 6). Знайдіть периметр і кути паралелограма $MPKN$, якщо $PN = 15$ см, $\angle MPN = 42^\circ$. Відповідь округліть до десятих.

29. Пожежну драбину, розміщену на машині, можна висунути на 20 м, а її нахил може досягати 60° . Основа драбини розташована на висоті 2 м (рис. 7). До якого поверху може дістати драбина, якщо висота кожного поверху 3 м?

30. Пожежну драбину AB висунуто на 50 м за граничного кута підйому 72° . Знайдіть висоту BC , якої досяг верхній край драбини, якщо її нижній край віддалений від поверхні землі на 1 м (див. схематичний рис. 8). Відповідь запишіть із точністю до десятих частин метра.



Високий рівень

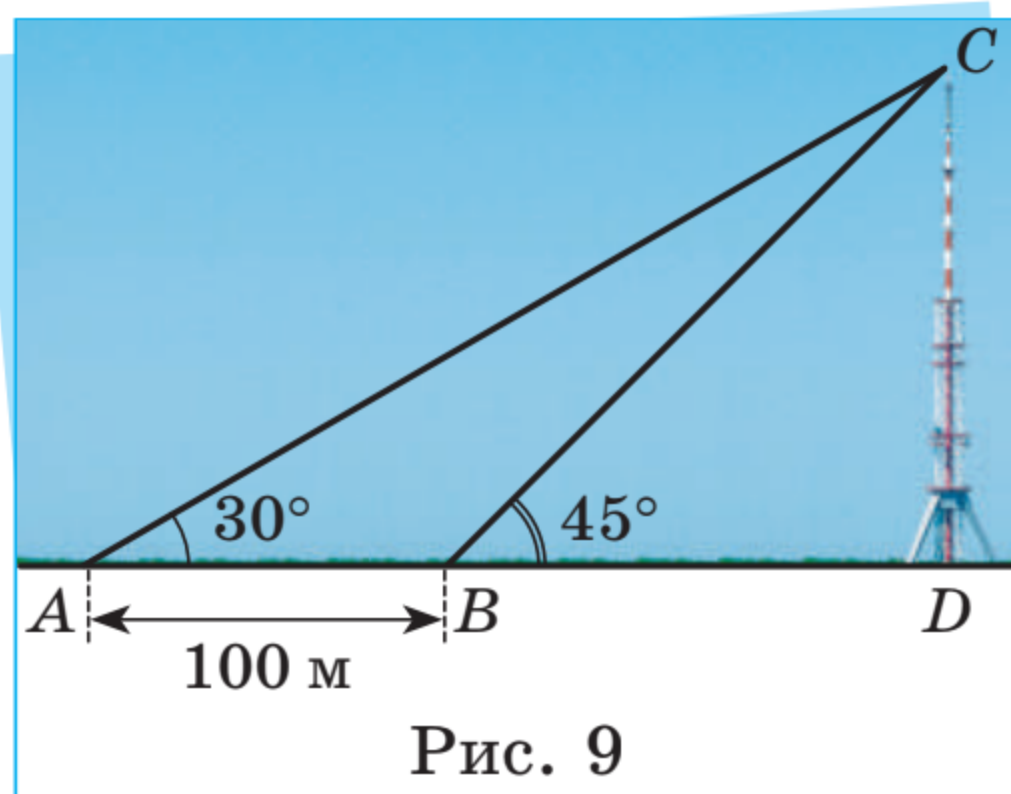
31. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c , а один із його гострих кутів — α . Знайдіть радіус вписаного в трикутник кола.

32. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює R , а один із його гострих кутів — α . Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

33. Більша діагональ ромба дорівнює d , а гострий кут — α . Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

34. Одна зі сторін трикутника дорівнює a , а прилеглі до неї гострі кути — α і β . Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

35. Точки A і B лежать на одній прямій з основою телевізійної вежі й по один бік від неї (рис. 9). Із точки A верхівку C вежі видно під кутом 30° , а з точки B — під кутом 45° . Знайдіть висоту CD вежі, якщо відстань між точками A і B дорівнює 100 м. Відповідь запишіть із точністю до десятих частин метра.



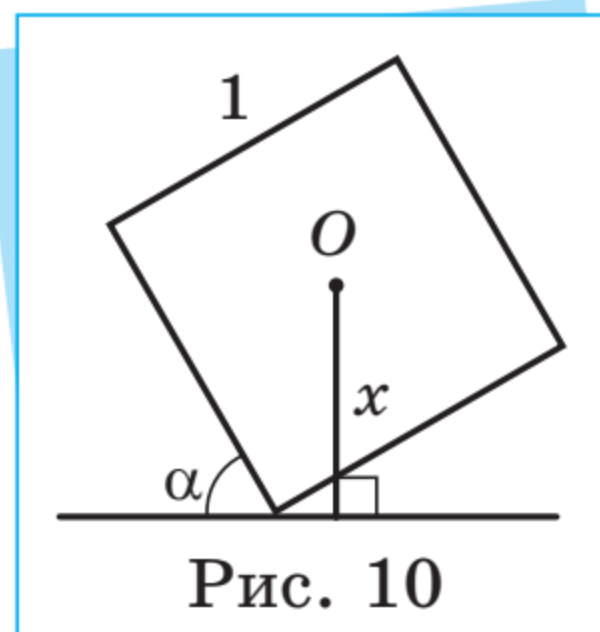
36. Точки A і B лежать на одній прямій з основою телевізійної вежі й по різні боки від неї. Із точки A верхівку вежі видно під кутом 30° , а з точки B — під кутом 45° . Знайдіть висоту вежі, якщо відстань між точками A і B дорівнює 100 м. Відповідь запишіть із точністю до десятих частин метра.

37. Гострий кут ромба дорівнює α , а радіус вписаного в ромб кола — r . Знайдіть сторону й діагоналі ромба.

38. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює α , а радіус вписаного в трапецію кола — r . Знайдіть сторони трапеції.

39. Діагональ прямокутної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть відношення основ трапеції, якщо її гострий кут дорівнює φ .

40. Пряма проходить через вершину квадрата й утворює з його стороною кут α (рис. 10). Знайдіть відстань x від центра квадрата до цієї прямої, якщо сторона квадрата дорівнює 1.





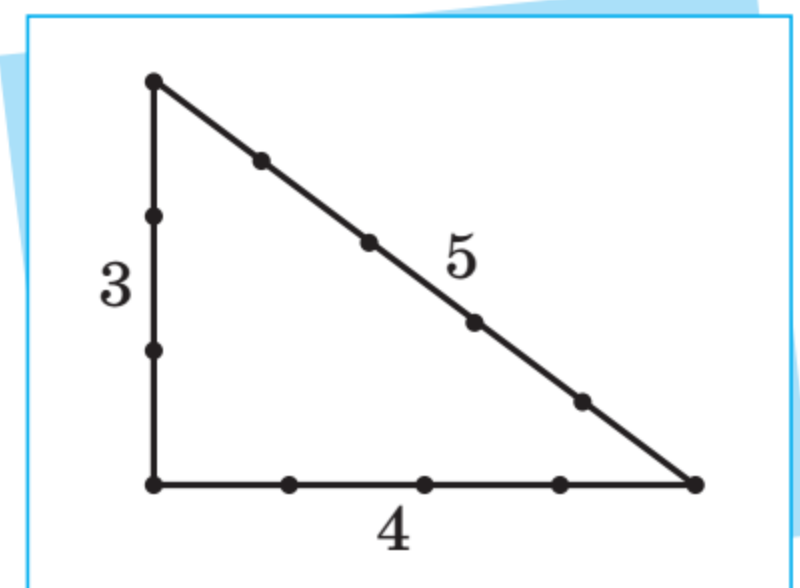
Цікавинки від дідуса Тараса

Під час розв'язування прямокутного трикутника з катетами a , b і гіпотенузою c іноді трапляється, що всі три числа a , b , c є натуральними. Для них виконується теорема Піфагора: $a^2 + b^2 = c^2$. Такі трійки натуральних чисел називають *піфагоровими трійками*. Найвідомішою піфагоровою трійкою є числа (3, 4, 5). Очевидно, що трійки чисел, кратних числам піфагорової трійки, теж утворюють піфагорову трійку. Наприклад, трійки чисел (6, 8, 10); (9, 12, 15); (12, 15, 20) і т. д. є піфагоровими.

Існує нескінченна кількість різних піфагорових трійок: (5, 12, 13); (8, 15, 17); (7, 24, 25); (9, 40, 41) тощо. Їх можна використовувати для економії часу під час розв'язування прямокутних трикутників. Наприклад, якщо відомо, що гіпотенуза трикутника дорівнює 13 см, а один із катетів — 5 см, то очевидно, що другий катет дорівнює 12 см, бо трійка (5, 12, 13) є піфагоровою.

Як ви вже знаєте із задач § 19, можна довести *теорему, обернену до теореми Піфагора*: якщо довжини сторін a , b , c деякого трикутника задовольняють рівність $a^2 + b^2 = c^2$, то такий трикутник є прямокутним.

Цей факт зручно використовувати для побудови прямих кутів на місцевості. Саме із цієї причини прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 називають *єгипетським трикутником*. Ця назва походить від факту, що єгиптяни в часи створення пірамід для побудови прямого кута на місцевості користувалися мотузкою у формі кільця, яка була розбита вузлами на частини, довжини яких пропорційні числам 3, 4 і 5 (див. рисунок).



Запитання і завдання від дідуса Тараса

1. Чи доводилося вам будувати прямі кути на місцевості? Якщо так, то яким чином ви це робили? Поділіться своїм досвідом.

2. Запитайте у вчителя/вчительки інформатики про те, яким чином можна написати програму, що генерує всі можливі піфагорові трійки в заданому діапазоні чисел. Напишіть таку програму. З'ясуйте за допомогою неї, скільки існує піфагорових трійок, в яких кожне число не більше за 200.
3. Знайдіть трійки натуральних чисел, для яких $a^3 + b^3 = c^3$. Якщо вам не вдалося, то дізнайтеся з додаткових джерел інформації, чи це взагалі можливо. *Підказка:* дізнайтеся про велику теорему Ферма та спроби її довести.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Доведіть тотожність $\frac{a-b}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$.
2. Розв'яжіть рівняння $10-2x=\sqrt{x}$: а) графічним способом; б) за допомогою заміни $\sqrt{x}=t$. Переконайтеся в ідентичності відповідей.
3. На першому поверсі в ліфт 18-поверхового офісного центру зайшло 35 осіб — працівниць і працівників, що поспішають на роботу в цій будівлі. Доведіть, що принаймні три особи вийдуть на одному поверсі.
4. Чотири бригади за 6 місяців збирають 8 однакових щитових будинків у кожному містечку. Скільки таких щитових будинків зберуть три бригади за 9 місяців? Вважайте, що всі бригади працюють з однаковою постійною продуктивністю.
5. Кожна бічна грань правильної чотирикутної піраміди є рівнобічним трикутником, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть площу основи цієї піраміди. Виготовте її розгортку та склейте з неї піраміду.



ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 4

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle KLP$. Укажіть НЕправильну рівність.

А	Б	В	Г
$\angle B = \angle L$	$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LP}$	$\angle C = \angle K$	$\frac{AB}{KL} = \frac{AC}{KP}$

2. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$. Тоді $\alpha =$

А	Б	В	Г
90°	60°	45°	30°

3. На рис. 1 зображено трикутник RST ; $\angle S = 90^\circ$. Тоді $\cos \angle R =$

А	Б	В	Г
$\frac{ST}{RT}$	$\frac{ST}{SR}$	$\frac{SR}{ST}$	$\frac{SR}{RT}$

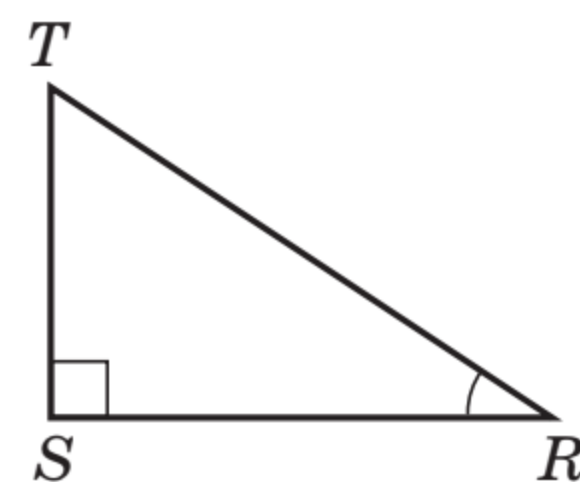
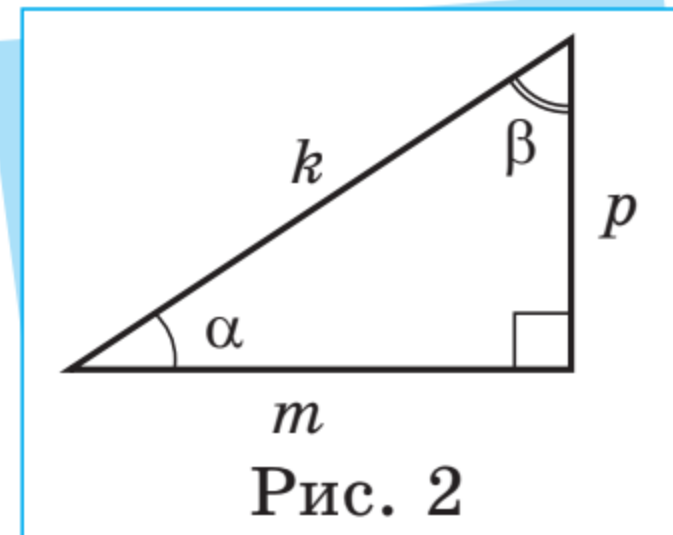


Рис. 1

4. За рис. 1 укажіть правильну рівність.

А	Б	В
$RT = SR + ST$	$RT^2 = SR \cdot ST$	$RT^2 = SR^2 - ST^2$
Г	Д	
$RT = SR - ST$	$RT^2 = SR^2 + ST^2$	

5. На рис. 2 зображено прямокутний трикутник із катетами m і p , гіпотенузою k та гострими кутами α і β . Укажіть правильну рівність для знаходження гіпотенузи k .



А	Б	В	Г	Д
$k = p \cdot \sin \alpha$	$k = \frac{m}{\sin \beta}$	$k = p \cdot \operatorname{ctg} \beta$	$k = \frac{p}{\cos \alpha}$	$k = m \cdot \operatorname{tg} \alpha$

6. Укажіть НЕправильне твердження.

А	Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні лише рівні відрізки, то вони відтинають лише рівні відрізки й на другій його стороні.
Б	Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то ці трикутники подібні.
В	Основа бісектриси трикутника ділить сторону трикутника на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.
Г	Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.
Д	Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну із цих медіан у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника.

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. Дано трикутники ABC і MPH . Відомо, що $\angle C = \angle H$, $\angle B = \angle P$, $AB = 7$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см, $PH = 4$ см. Знайдіть довжину сторони MH (у см).

8. У прямокутному трикутнику KLP (кут L — прямий) гіпотенуза $KP = 20$ см, а катет KL на 4 см довший за катет PL . Знайдіть периметр трикутника KLP (у см).

9. На рис. 3 зображено кут BAC . Прямі a і b перетинають сторону AC цього кута в точках K і L , а сторону AB — в точках M і P відповідно. Відомо, що $AK = KL$, $AM = MP$, $\angle 1 = 49^\circ$, $\angle 2 = 112^\circ$. Знайдіть градусну міру кута BAC .

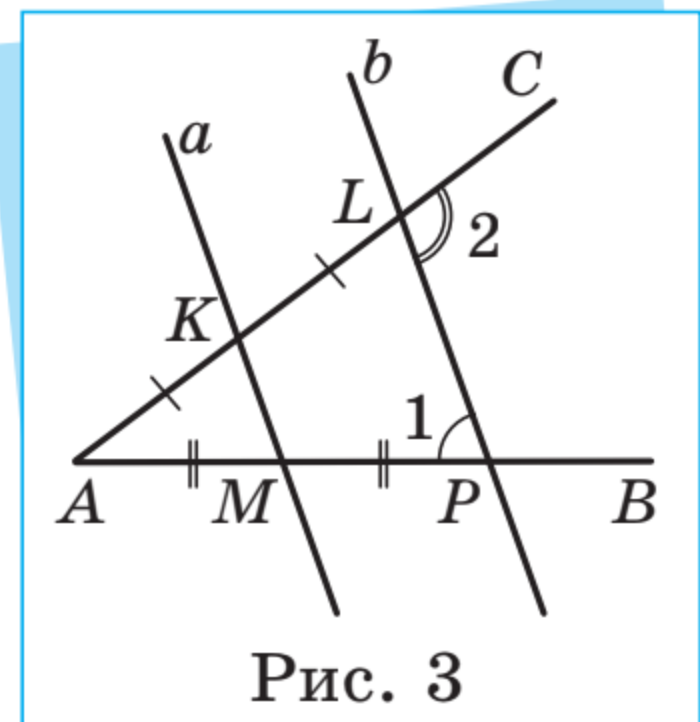


Рис. 3

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. У трикутнику DEF проведено бісектрису EM . Знайдіть довжини всіх сторін цього трикутника, якщо $DM = 4$ см, $MF = 6$ см, а довжина сторони EF на 3 см більша за довжину сторони DE .
11. Задано прямокутний трикутник ABC , у якому $\angle C = 90^\circ$, $AB = 8$ см, $\angle B = 28^\circ$. Знайдіть усі інші невідомі сторони (у см) та кути (у градусах) цього трикутника. Довжини відрізків знайдіть із точністю до десятих.
12. Дано два відрізки довжинами a і b . За допомогою циркуля та лінійки побудуйте відрізок довжиною $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
13. Точка S розташована зовні кола й розташована від його центра на відстані 22 см. Січна, проведена через точку S , перетинає це коло в точках A і B , причому $SA = 16$ см, $AB = 8$ см, а точка A належить відрізку SB . Знайдіть довжину цього кола (у см).
14. Вероніка гуляла в парку, зупинилася на галявині й помітила, що з місця, де вона стоїть, верхівки ялини та дуба розташовані на одній прямій. Проте відомо, що ця ялина має висоту 4 м, а дуб — 9 м. Знайдіть відстань (у метрах) від очей Вероніки до землі (тобто приблизний зріст дівчини), якщо в описаний момент спостереження відстань від дівчини до ялини була 10 м, а до дуба — 30 м.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC перетинає пряму AB у точці D (рис. 1). Доведіть, що $AD:BD = AC:BC$.

2. Доведіть: якщо пряма перетинає дві сторони трикутника й точками перетину ділить ці сторони в одному відношенні, рахуючи від спільної вершини, то ця пряма паралельна третій стороні трикутника.

3. Доведіть: якщо пряма перетинає бічні сторони трапеції і точками перетину ділить ці сторони відповідно в одному відношенні, то ця пряма паралельна основам трапеції.

4. У коло вписано трикутник, градусні міри двох кутів якого дорівнюють 30° і 45° (рис. 2). Через вершину третього кута проведено діаметр цього кола. Знайдіть відношення, в якому точка перетину діаметра зі стороною трикутника ділить сторону трикутника.

5. Побудуйте трикутник за трьома медіанами.

6. Дано чотири відрізки з довжинами a , b , c , d . За допомогою циркуля та лінійки побудуйте відрізок довжиною $\sqrt{ab+cd}$.

7. Доведіть: у будь-якій трапеції точка перетину діагоналей, точка перетину продовжень бічних сторін і середини обох основ лежать на одній прямій.

8. Доведіть *теорему Менелая*. Нехай на сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки C_1 і A_1 , а на продовженні сторони AC — точку B_1 (рис. 3). Для того щоб точки A_1 , B_1 , C_1 лежали

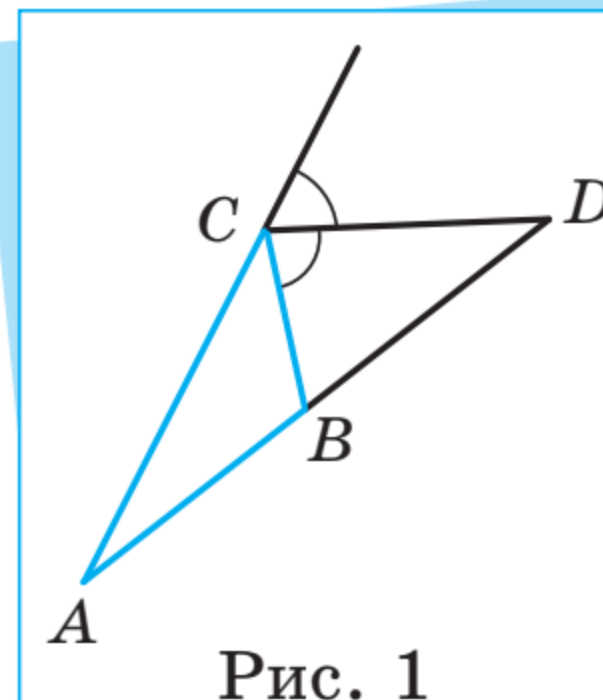


Рис. 1

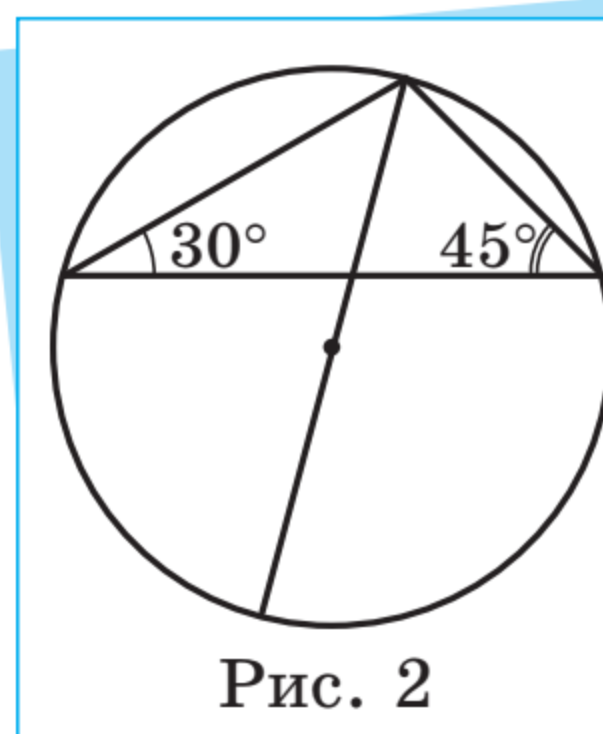


Рис. 2

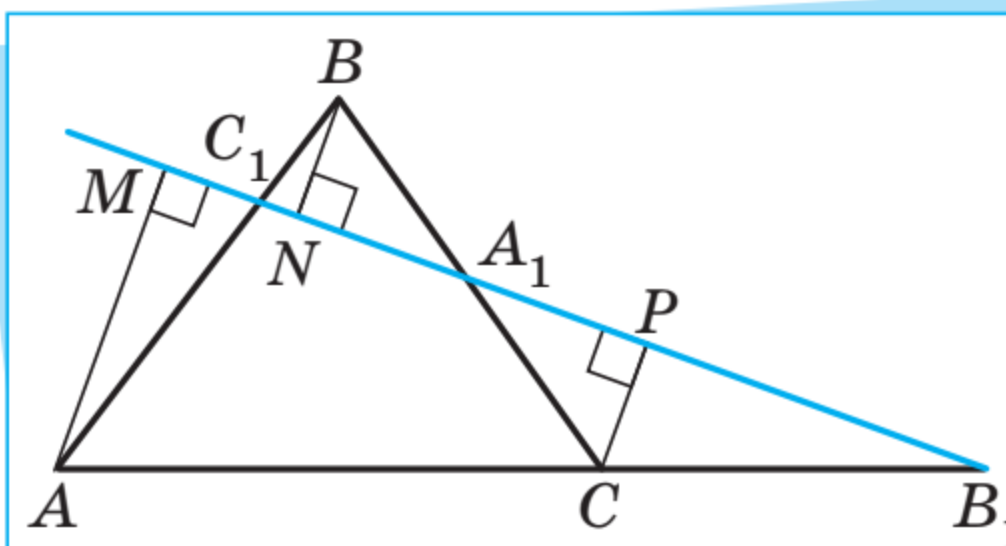


Рис. 3

на одній прямій, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

9. Сторона трикутника дорівнює a , а тангенси кутів, прилеглих до неї, — 2,4 і 0,75. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

10. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють a і b . Діагональ трапеції утворює з її бічними сторонами кути 60° і 150° (рис. 4). Знайдіть довжину діагоналі трапеції.

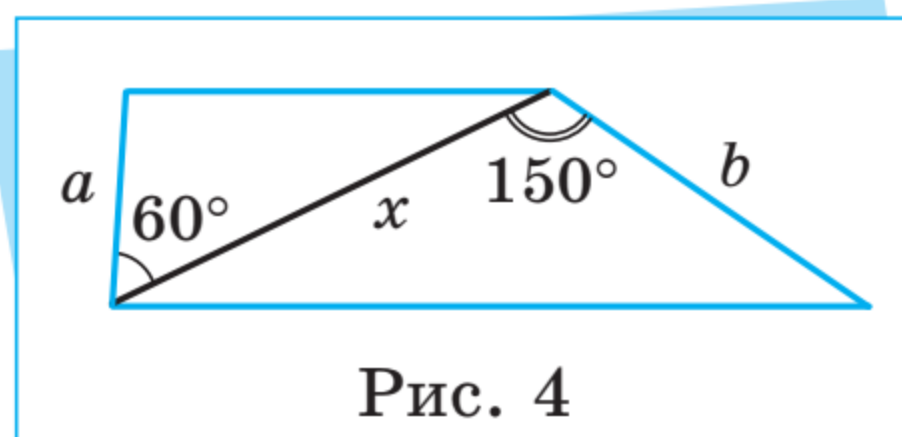


Рис. 4

СЛОВНИЧОК

Відношення довжин відрізків — the ratio of segment lengths

Центр мас трикутника — the center of mass of the triangle

Коефіцієнт подібності трикутників — the coefficient of similarity of triangles

Ознака подібності трикутників — criteria of similarity of triangles

Теорема Піфагора — the Pythagoras theorem

Перпендикуляр, похила, проекція — perpendicular, inclined segment, projection segment

Синус, косинус, тангенс, котангенс — sine, cosine, tangent, cotangent

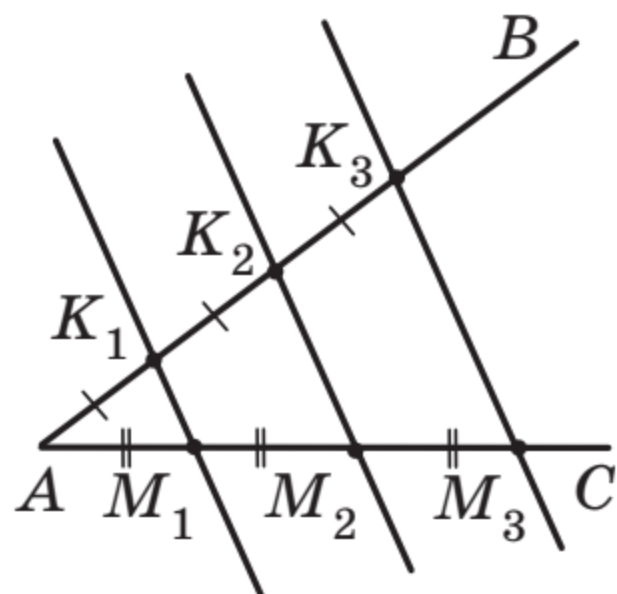
Тригонометричні функції кута — trigonometric functions of an angle

Розв'язування прямокутних трикутників — solving right triangles

Єгипетський трикутник — Egyptian triangle

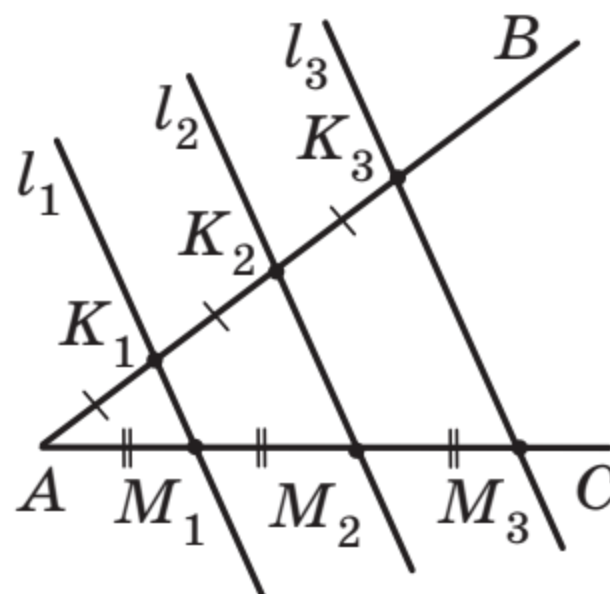
ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

Теорема,
обернена до теореми
Фалеса



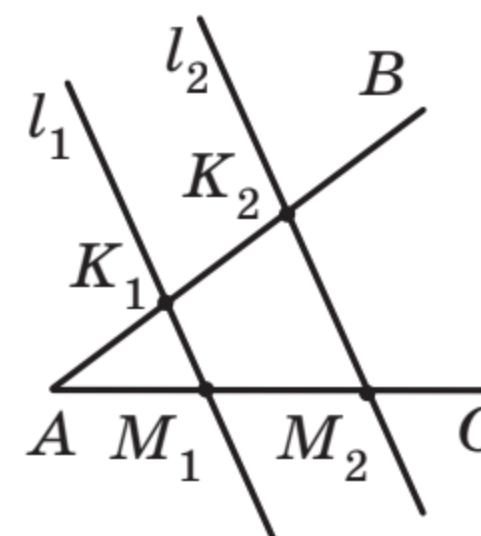
Якщо
 $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3$
 і
 $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$,
 то $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$

Теорема
Фалеса



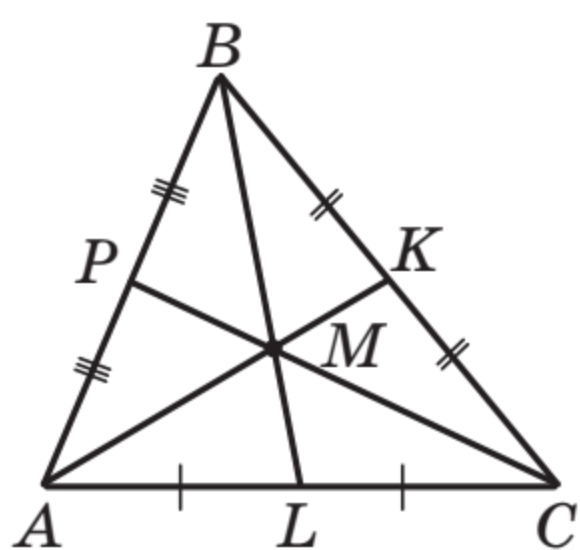
$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$
 Якщо
 $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3$,
 то
 $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$

Теорема
про пропорційні
відрізки



Якщо $l_1 \parallel l_2$,
 то
 $\frac{AK_1}{AM_1} = \frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{AM_2}$

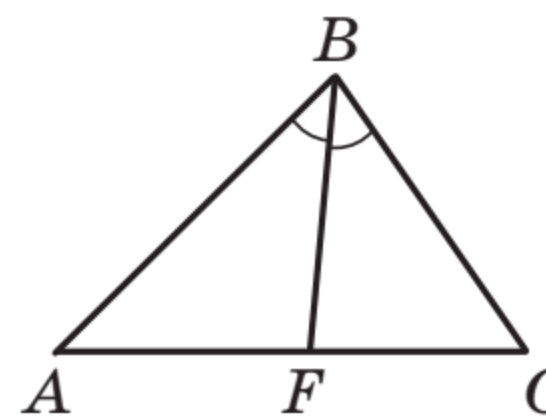
Властивість медіан
трикутника



BL, AK, CP —
медіани
трикутника
 M — точка
перетину всіх
медіан (центр
мас)

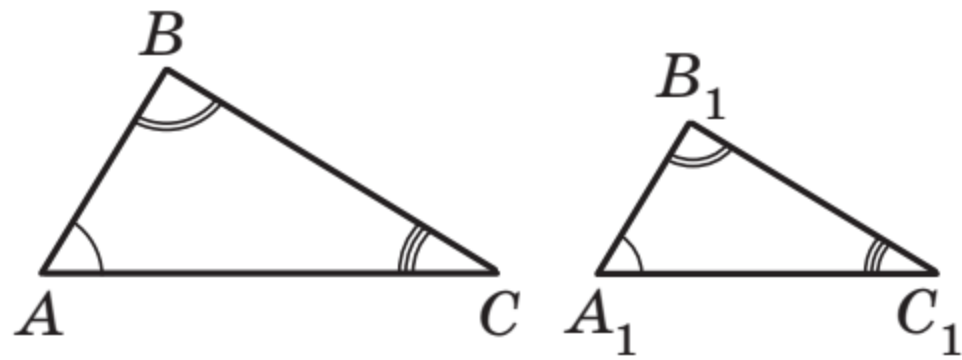
$$\frac{BM}{ML} = \frac{AM}{MK} = \frac{CM}{MP} = \frac{2}{1}$$

Властивість бісектриси
трикутника



Якщо BF — бісектриса,
 то $\frac{FC}{BC} = \frac{AF}{AB}$

Подібні трикутники



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1,$$

якщо $\angle A = \angle A_1$,

$\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k;$$

k — коефіцієнт подібності

означення

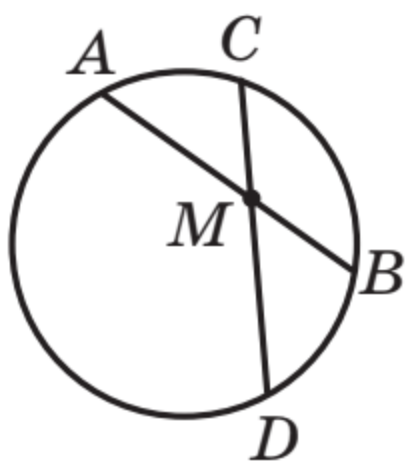
Ознаки подібності трикутників

1 Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
(за двома кутами)

2 Якщо $\angle A = \angle A_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
(за кутом і двома
пропорційними сторонами)

3 Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
(за трьома пропорційними
сторонами)

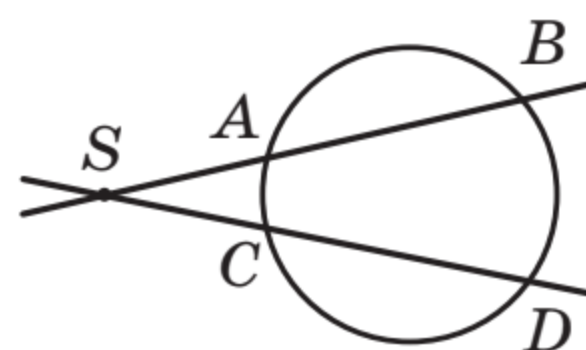
Властивість хорд



AB і CD —
хорди кола

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

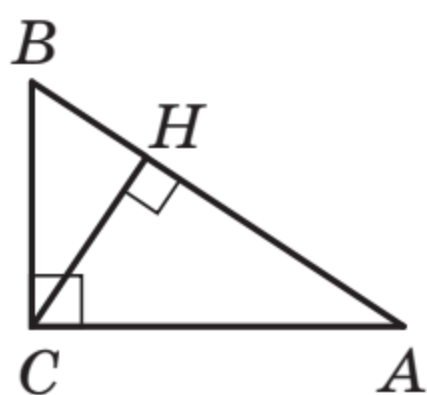
Властивість січних



SB і SD —
січні кола

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику



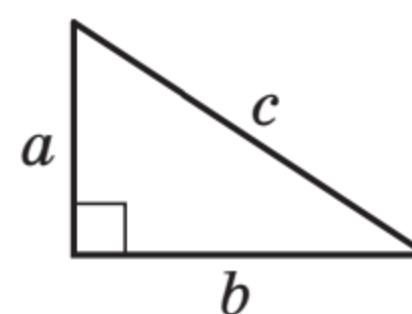
CH — висота
 $\angle C = 90^\circ$

$$1) CH^2 = AH \cdot BH$$

$$2) AC^2 = AB \cdot AH$$

$$3) BC^2 = AB \cdot BH$$

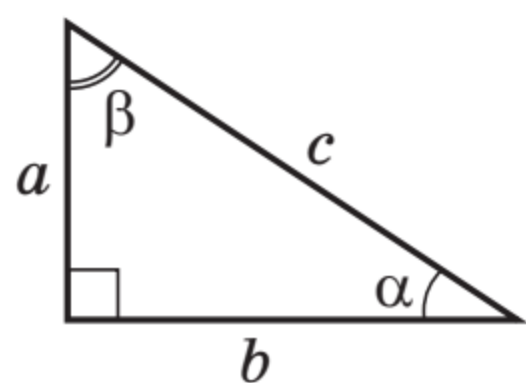
Теорема Піфагора



a, b — катети
 c — гіпотенуза

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Тригонометричні функції кута прямокутного трикутника



a, b — катети
 c — гіпотенуза

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

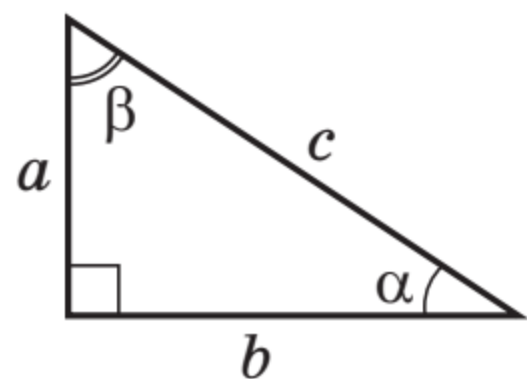
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

означення

Таблиця значень тригонометричних функцій окремих важливих кутів

Кут Функція	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Типи задач на розв'язування прямокутних трикутників



a, b — катети;
 c — гіпотенуза

1 Дано: a, b
Знайти: c, α, β

2 Дано: a, c
Знайти: b, α, β

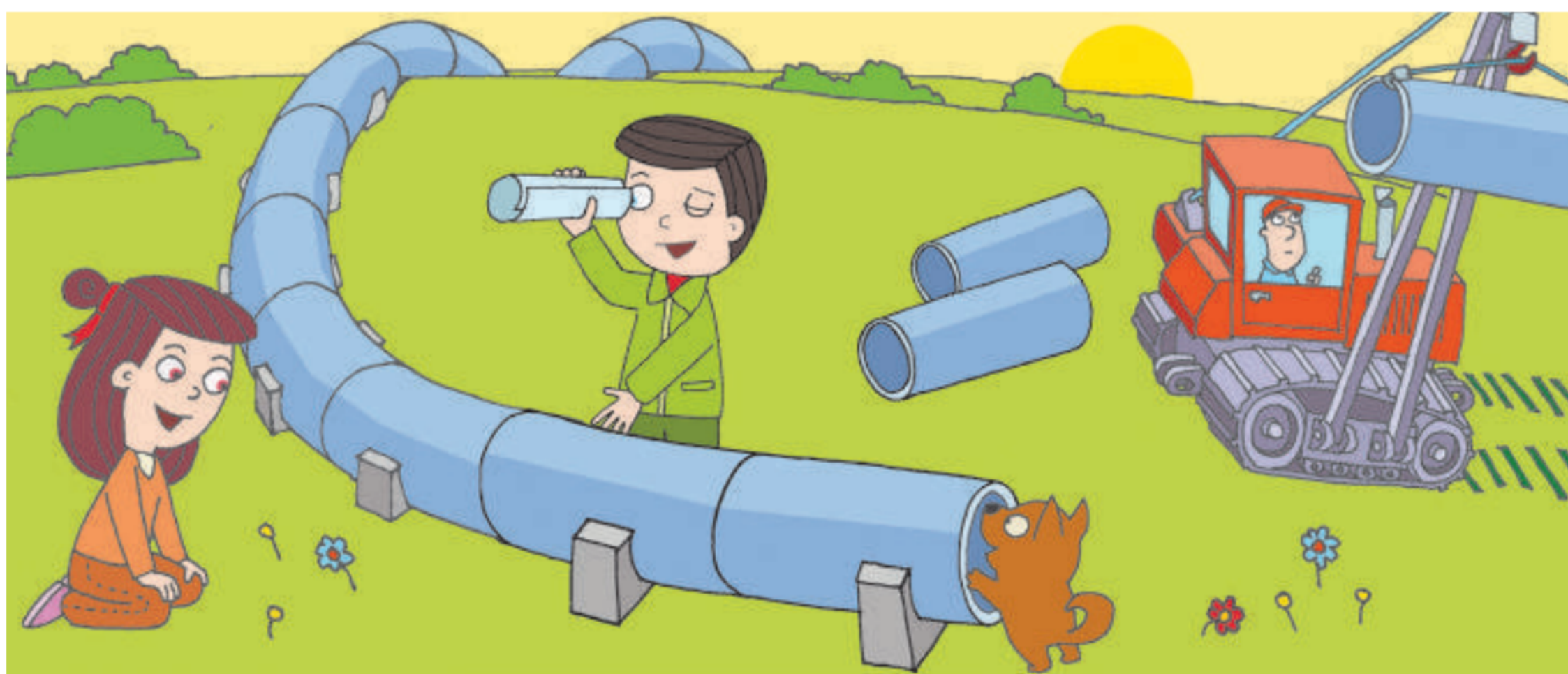
3 Дано: c, α
Знайти: β, a, b

4 Дано: a, α
Знайти: β, b, c

РОЗДІЛ 5. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

CHAPTER 5. NETS OF SURFACES OF ROTATION BODIES

§ 22. Розгортка поверхні циліндра. Створення моделей циліндрів



А пам'ятаєш, Петрику, як нам пощастило побачити, як прокладають величезні металеві труби? І от тепер мені стало цікаво, як виготовляють такі труби.



Мені здається, це не дуже складно. Колись, ще в дитсадку, ми з друзями виготовляли такі собі піратські підзорні труби зі звичайного прямокутного аркуша паперу. Зараз покажу. Поглянь, якщо цей аркуш отак скрутити, а потім прикласти до ока, то цілком можна себе вважати таким собі Петриком Горобцем!



Я зрозуміла: можна так само скрутити звичайний прямокутний металевий лист, а потім, наприклад, за допомогою електрозварювання з'єднати протилежні його краї — і вийде труба. Здається, колись на уроках математики нам розповідали, що таке геометричне тіло називають циліндром. А прямокутний аркуш буде розгорткою його поверхні, аналогічною до розгортки прямокутного паралелепіпеда чи піраміди.



Лише одного прямокутного аркуша для створення розгортки поверхні циліндра буде недостатньо. Щоб вийшов циліндр, треба виготовити ще дві «кришки» у формі круга, які слід припасувати з двох боків до скрученого прямокутного аркуша паперу. До речі, коробки у формі циліндрів із кришками з обох боків використовують для пакування продуктів, я сам у магазинах бачив.



Цікаво, яким чином розрахувати діаметр кришки, щоб вона щільно затуляла циліндричну коробку, виготовлену з прямокутного аркуша картону? Як на мене, на око це не визначити, слід спочатку провести розрахунки.



Гадаю, що це не дуже складно. Втім, запитаймо вчителів про це і про розгортку поверхні циліндра.



Так, Петрику, розрахувати розмір кришки справді не надто складно. Але спочатку згадаємо, що таке циліндр.



Циліндр — це геометричне тіло, яке можна утворити внаслідок обертання плоского прямокутника навколо прямої, що містить одну з його сторін.

Поверхня циліндра складається з двох кругів, які називають **основами циліндра**, та **бічної поверхні**. Бічну поверхню циліндра разом із його основами називають **повною поверхнею** цього циліндра.

Наприклад, на рис. 22.1 зображено плоский прямокутник $ABCD$, у якого $AB = CD = a$ і $BC = AD = b$. Якщо цей прямокутник обертати навколо прямої AB , то утвориться циліндр, основами якого є круги радіуса $R = b$ із центрами в точках A і B . Відрізок AB називають **висотою** або **віссю** утвореного циліндра, а всі відрізки, утворені під час обертання відрізка CD , називають **твірними** цього циліндра. Зазвичай висоту циліндра позначають літерою H , а будь-яку його твірну — літерою L .

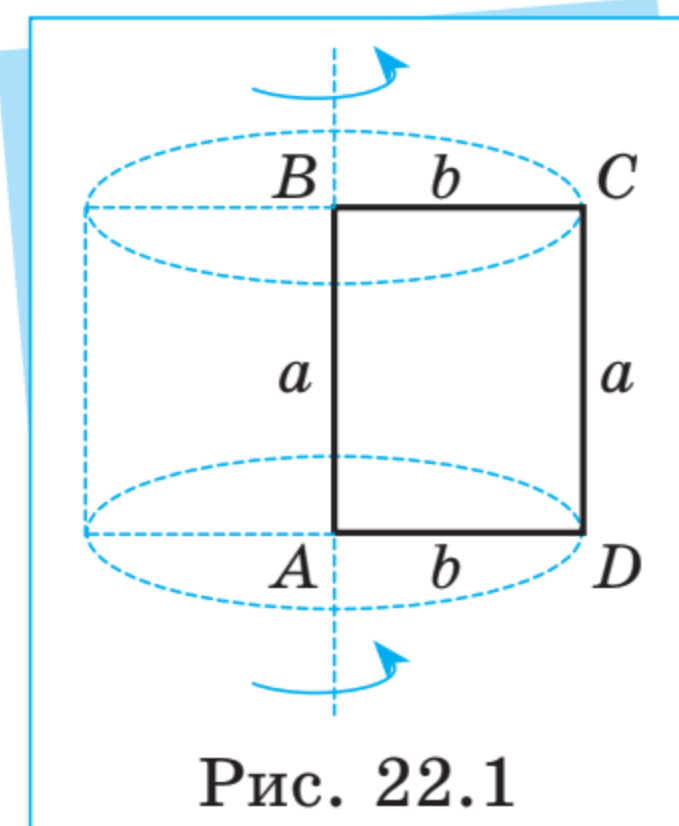


Рис. 22.1

Очевидно, що **довжина твірної циліндра дорівнює довжині його висоти**. У нашому випадку $L = H = a$.



Можна довести, що **розгорткою бічної поверхні циліндра є плоский прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює його висоті, а інша — довжині кола, що обмежує його основу**.

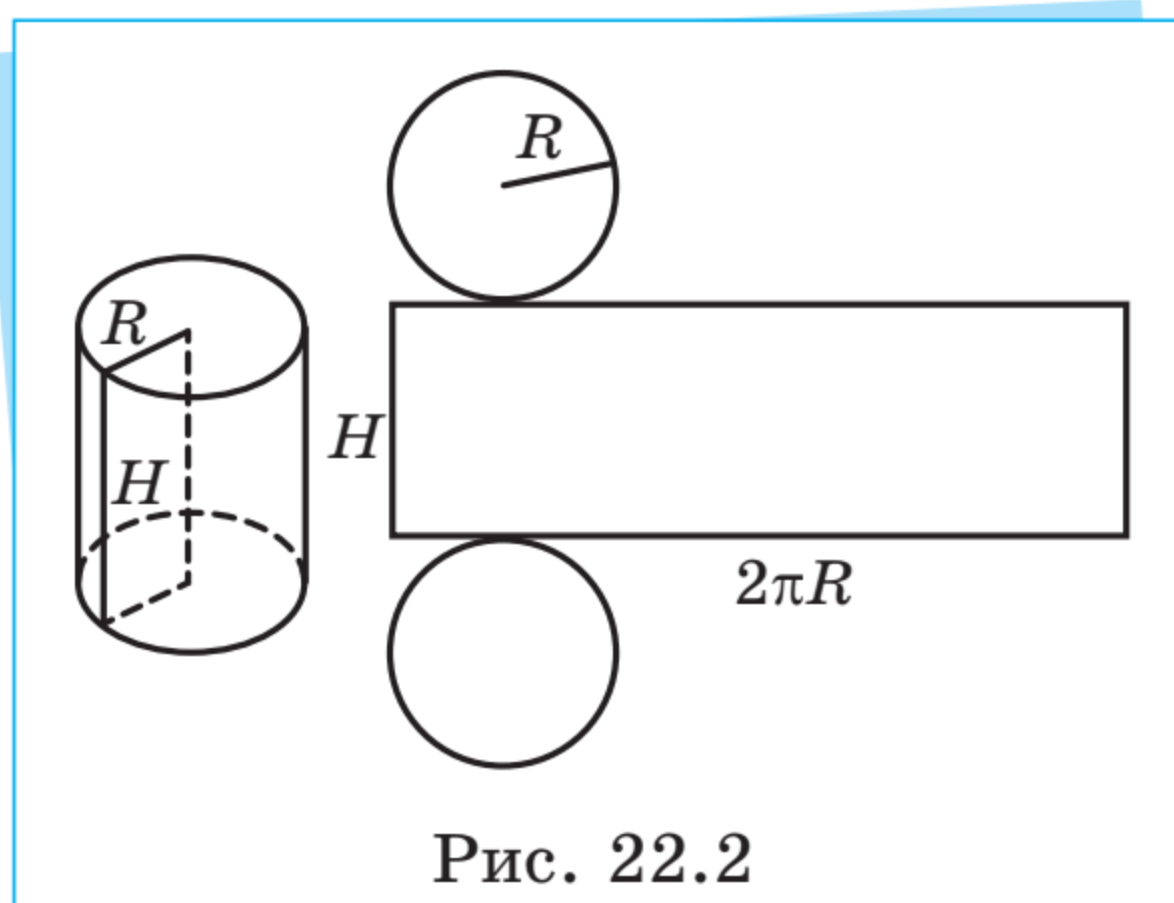


Рис. 22.2

Якщо радіус циліндра дорівнює R , а висота — H , то його бічну поверхню розгортаємо в плоский прямокутник зі сторонами $2\pi R$ і H (рис. 22.2). Площу $2\pi RH$ цієї розгортки приймають за **площу бічної поверхні циліндра** та позначають S_6 .

Наприклад, якщо у плоского прямокутника $ABCD$ (див. рис. 22.1) $a = 10$ см, а $b = 4$ см, то повна поверхня циліндра, утвореного обертанням цього прямокутника навколо прямої AB , складається

з двох кругів радіуса $R = b = 4$ см та бічної поверхні, розгортка якої є плоским прямокутником зі сторонами $a = H = 10$ см і $c = 2\pi R = 8\pi$ см. У цьому випадку площа бічної поверхні циліндра $S_{\text{б}} = 2\pi RH = 80\pi$ см².



Тому для виготовлення моделі циліндра можна взяти будь-який паперовий прямокутник зі сторонами x см і y см та згорнути із цього аркуша бічну поверхню циліндра таким чином, щоб одна зі сторін прямокутника стала його твірною. Наприклад, нехай це буде сторона довжиною x см. Для скріплення конструкції можна використати скотч або додаткову паперову смужку та клей.

Для виготовлення основ циліндра слід вирізати з паперу два круги, радіуси яких мають бути такими, щоб довжини кіл, які обмежують ці круги, дорівнювали стороні прямокутника завдовжки y см. Тобто радіуси цих кругів знаходять із рівності $2\pi R = y$, звідки $R = \frac{y}{2\pi}$. Далі ці круги можна приклеїти до основ за допомогою скотча чи додаткових паперових смужок і клею.

Процес створення паперової моделі циліндра:
rnk.com.ua/109404



Перевірте себе!

1. Дайте означення циліндра та його елементів.
2. Із чого складається повна поверхня циліндра?
3. Якою геометричною фігурою є: а) основа циліндра; б) розгортка бічної поверхні циліндра?
4. Як створити модель циліндра?



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Які з будівель мають форму циліндра?

А. Пізанська вежа (м. Піза, Італія)	Б. Дзвіниця Софійського собору (м. Київ)	В. Вежа в Йоркширі (Велика Британія)	Г. Вежа Корнякта (м. Львів)
			

2. Які з будівель мають форму циліндра?

А. Ейфелева вежа (м. Париж, Франція)	Б. Житловий будинок (м. Стокгольм, Швеція)	В. Будинок із химерами (м. Київ)	Г. Торговельний центр (м. Львів)
			

3. Який елемент іграшок, зображених на рис. 1, має форму циліндра?

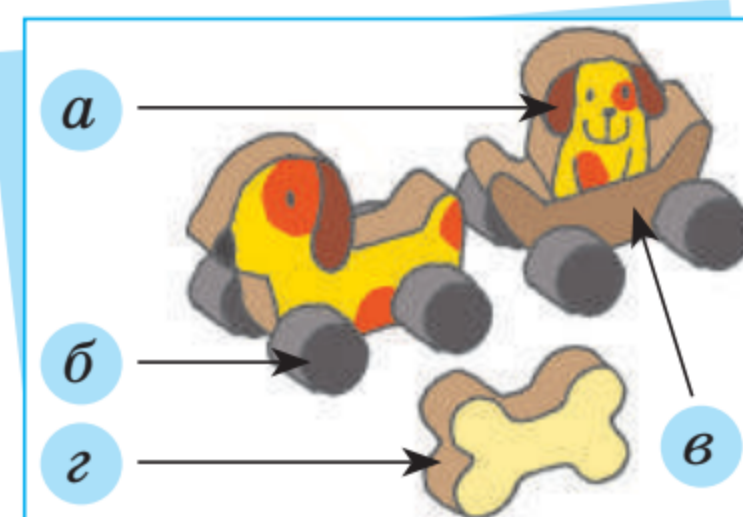


Рис. 1

4. Які з упаковок продуктів мають форму циліндра?

А. Рибні консерви	Б. Кава	В. Чай	Г. Томатна паста

5. Яка з розгорток на рис. 2 є розгорткою повної поверхні циліндра?

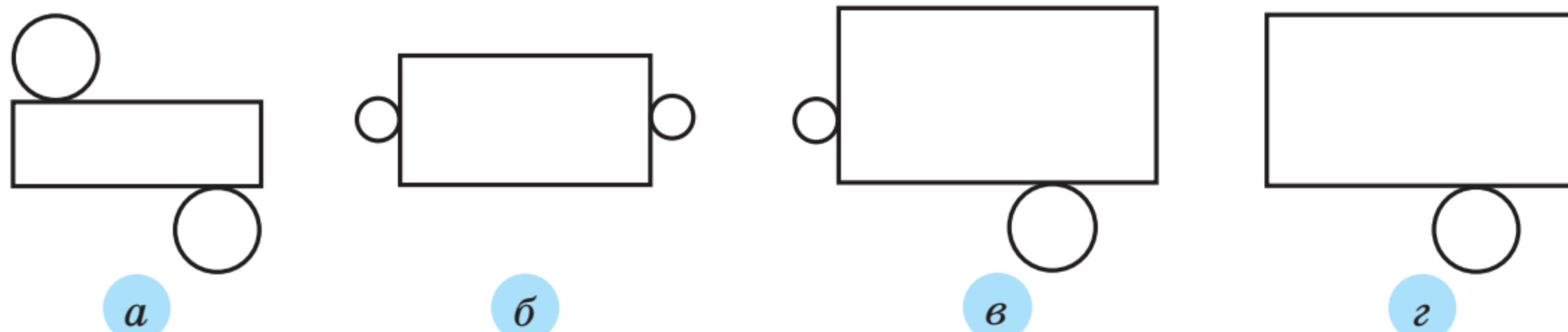


Рис. 2

6. Яка з розгорток на рис. 3 є розгорткою бічної поверхні циліндра?

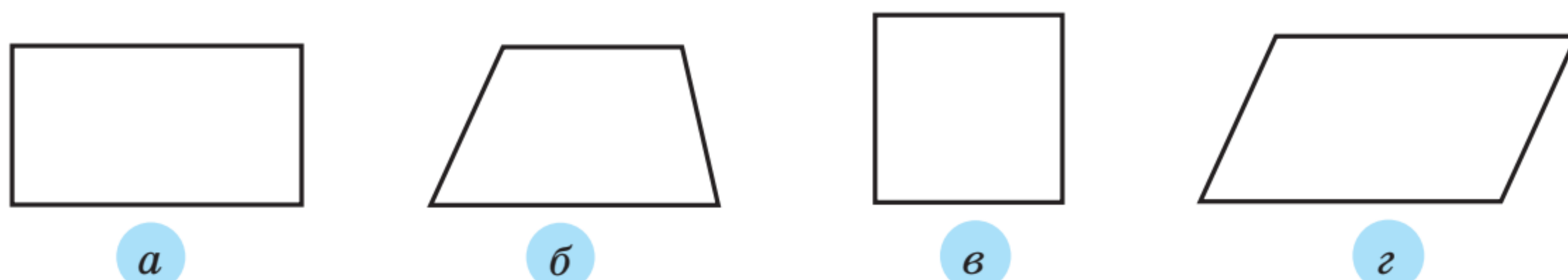


Рис. 3

7. Висота циліндра — 5 см, а радіус його основи — 8 см. Обчисліть площу бічної поверхні цього циліндра. (Згадайте, що площу бічної поверхні циліндра обчислюють за формулою $2\pi RH$.)

8. Висота циліндра — 7 см, а радіус його основи — 3 см. Обчисліть площу бічної поверхні цього циліндра. (Згадайте, що площу бічної поверхні циліндра обчислюють за формулою $2\pi RH$.)



Середній рівень

9. Виберіть правильні твердження*.

- а) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо прямої, що містить більшу його сторону, є циліндром.
- б) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо прямої, що містить його діагональ, є циліндром.
- в) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання трапеції навколо прямої, що містить більшу її основу, є циліндром.
- г) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання квадрата навколо прямої, що містить його сторону, є циліндром.

10. Виберіть правильні твердження.

- а) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо прямої, що містить меншу його сторону, є циліндром.
- б) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить його більший катет, є циліндром.
- в) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання трапеції навколо прямої, що містить меншу її основу, є циліндром.
- г) Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання квадрата навколо прямої, що містить його діагональ, є циліндром.

11. Відомо, що висота циліндра дорівнює a см, а радіус основи циліндра — b см. За якою формулою обчислюється площа бічної поверхні цього циліндра?

- а) $2\pi ab$; б) $2\pi ab + 2\pi b$; в) ab ; г) $2\pi + ab$.

* Зверніть увагу: тут і далі в завданнях, пов'язаних з обертанням, вважатимемо, що обертаються *плоскі многокутники*.

12. Відомо, що висота циліндра дорівнює x см, а радіус основи циліндра — y см. За якою формулою обчислюється площа бічної поверхні цього циліндра?

- а) $2\pi + xy$; б) πxy ; в) $2\pi xy$; г) xy .

13. Відомо, що висота циліндра дорівнює 4 см, а радіус основи циліндра — 11 см. Обчисліть площу бічної поверхні цього циліндра.

14. Відомо, що висота циліндра дорівнює 9 см, а радіус основи циліндра — 7 см. Обчисліть площу повної поверхні цього циліндра.

15. Знайдіть удома та сфотографуйте два тіла у формі циліндра. Обговоріть фото з однокласниками й однокласницями.

16. Знайдіть у школі та сфотографуйте два тіла у формі циліндра. Обговоріть фото з однокласниками й однокласницями.



Достатній рівень

17. Відомо, що площа бічної поверхні циліндра дорівнює 150π см², а радіус основи циліндра — 5 см. Обчисліть довжину твірної цього циліндра.

18. Відомо, що площа бічної поверхні циліндра дорівнює 256π см², а висота циліндра — 16 см. Обчисліть довжину радіуса основи цього циліндра.

19. На рис. 4 зображено розгортку циліндра. Знайдіть площу бічної поверхні цього циліндра.

20. Довжина кола, яке обмежує круг основи циліндра, становить 18π см. Визначте площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює 7 см.

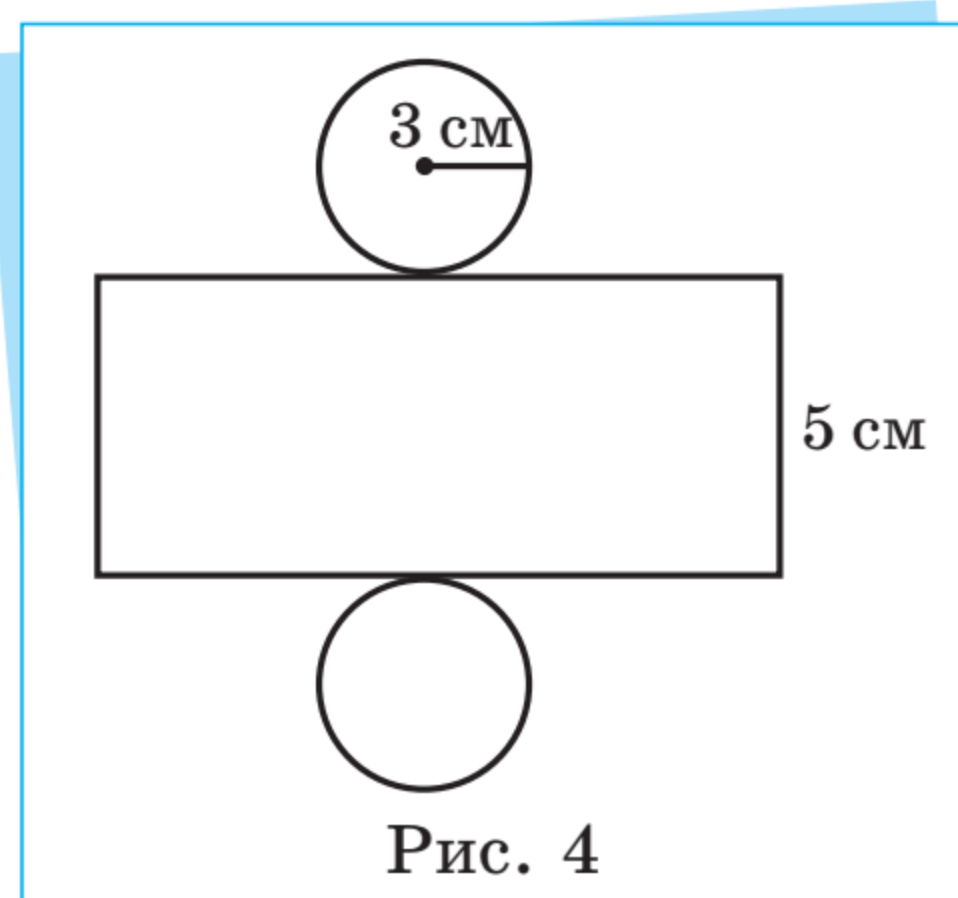


Рис. 4

21. Діаметр основи циліндра становить 1 м, а висота циліндра дорівнює довжині кола, яке обмежує круг основи циліндра. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

22. Радіус основи циліндра становить 1 м, а висота циліндра дорівнює половині довжини кола, яке обмежує круг основи циліндра. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

23. У пекарні для пакування тортів використовують коробки у формі куба трьох розмірів: із довжиною ребра 16 см; із довжиною ребра 24 см; із довжиною ребра 32 см. Марійка купує торт циліндричної форми, довжина твірної якого становить 14 см, а радіус основи — 10 см (рис. 5). Яка коробка є оптимальною для пакування?

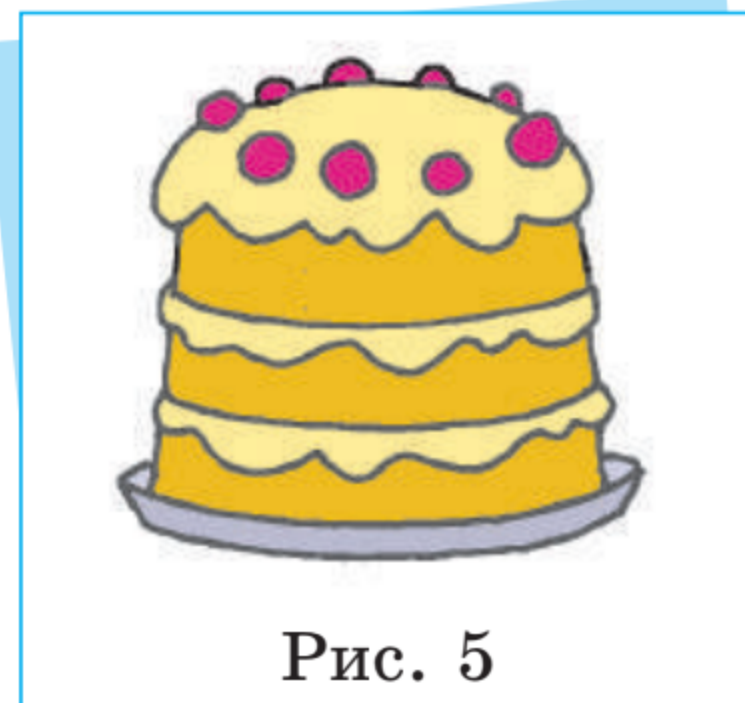


Рис. 5

24. Дмитрик має чудову подарункову коробку розмірами 15 см × 20 см × 25 см. Для подарунка він вибирає вазу, яка має циліндричну форму та повинна поміститися в коробку. Продавець пропонує йому червону вазу, яка має висоту 20 см і радіус основи 5 см; жовту вазу, яка має висоту 25 см і радіус основи 8 см; блакитну вазу, яка має висоту 22 см і радіус основи 8 см (рис. 6). Яка із запропонованих ваз поміститься в коробку Дмитрика?



Рис. 6

25. Меблева майстерня отримала замовлення на заміну бічної поверхні 10 м'яких пуфів циліндричної форми висотою 35 см (рис. 7). Скільки квадратних метрів тканини потрібно закупити майстерні для виконання цього замовлення, якщо радіус круга сидіння пуфа дорівнює 20 см? Відповідь округліть до десятих.

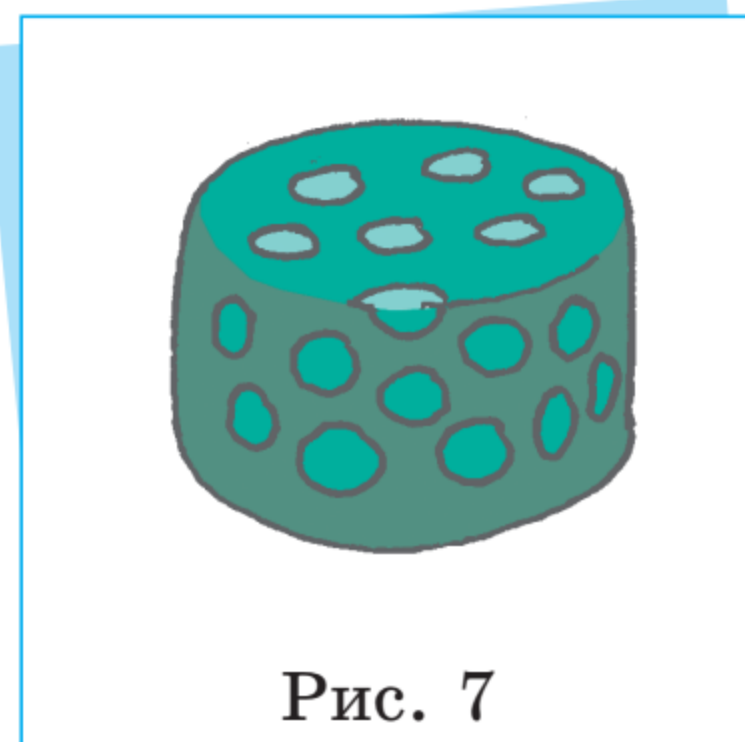


Рис. 7

26. Дитячий конструктор пакують у картонні коробки циліндричної форми (рис. 8). Висота кожної коробки дорівнює 30 см, діаметр основи — 20 см. На бічну поверхню коробки клеять в один шар яскравий папір, що повністю закриває картонну основу. На скільки коробок вистачить 1 м^2 такого паперу?



Рис. 8

27. Чи можна зробити циліндр із двох кругів радіуса 6 см кожний і прямокутника, виміри якого дорівнюють 27 см і 5 см? Відповідь поясніть.
28. Чи можна зробити циліндр із двох кругів радіуса 4 см кожний і прямокутника, виміри якого дорівнюють 25,5 см і 12,5 см? Відповідь поясніть.
29. Майстерня отримала замовлення на виготовлення 4 бочок циліндричної форми без кришок та 5 бочок циліндричної форми з кришками. Основи бочок є однаковими кругами радіуса R і площі S ; висота кожної бочки дорівнює H .
- Складіть вираз для розрахунку кількості квадратних метрів матеріалу, необхідного для виготовлення цього замовлення.
 - Спростіть одержаний вираз.
 - Знайдіть значення виразу, якщо $S = 0,785 \text{ м}^2$, $R = 0,5 \text{ м}$, $H = 1 \text{ м}$, $\pi = 3,14$.
30. Майстерня отримала замовлення на виготовлення 8 труб циліндричної форми довжиною l м і діаметром d м кожна, та 2 труб таких самих довжини й діаметра, але закритих з одного боку круглими кришками, площа кожної з яких дорівнює $S \text{ м}^2$.
- Складіть вираз для розрахунку кількості квадратних метрів матеріалу, необхідного для виготовлення цього замовлення.
 - Спростіть одержаний вираз.
 - Знайдіть значення виразу, якщо $S = 0,2826 \text{ м}^2$, $d = 0,6 \text{ м}$, $l = 2 \text{ м}$, $\pi = 3,14$.



Високий рівень

31. Висоту даного циліндра збільшили вдвічі, а його радіус зменшили в 4 рази. Як змінилася площа бічної поверхні циліндра? Відповідь обґрунтуйте.
32. Висоту даного циліндра зменшили втричі, а його радіус збільшили в 6 разів. Як змінилася площа бічної поверхні циліндра? Відповідь обґрунтуйте.
33. Скільки квадратних метрів жерсті знадобиться для виготовлення труби довжиною 4 м і діаметром 20 см, якщо на шви необхідно додатково передбачити 2,5 % площі? Вважайте, що $\pi = 3,14$. Відповідь округліть до сотих.
34. Для фарбування 1 м^2 труби потрібно 100 г фарби. Скільки кілограмів фарби потрібно для фарбування 20 м труби діаметром 26 см? Вважайте, що $\pi = 3,14$. Відповідь округліть до сотих.
35. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник із діагоналлю d , яка утворює з більшою стороною прямокутника кут α . Знайдіть радіус R і висоту H циліндра. Розгляньте всі можливі випадки.
36. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник із діагоналлю 10 см. Одна сторона прямокутника на 2 см більша за іншу. Знайдіть радіус R і висоту H циліндра. Розгляньте всі можливі випадки.



Цікавинки від дідуса Тараса

Назва геометричного тіла *циліндр* походить від грецького слова *κύλινδρος* — валик. Як бачимо, цей термін має побутове чи технічне походження. Як назва геометричного тіла циліндр уперше зустрічається в роботах *Евкліда* та *Аристарха Самоського* (IV–III ст. до н. е.).

Циліндри зустрічаються в різних сферах людського життя у вигляді різноманітних труб, держаків інструментів, деталей механізмів, елементів декору тощо. Наприкінці XIX — на початку XX ст. були

популярні капелюхи у вигляді циліндра (рис. 1). Нині їх також використовують, але переважно артисти, учасники костюмованих ретро-заходів, уболівальники на спортивних змаганнях тощо.

Серед відомих на весь світ об'єктів циліндричної форми не можна не згадати так званий *маніфест Кіра* — глиняний артефакт VI ст. до н. е., знайдений під час розкопок Вавилону наприкінці XIX ст. (рис. 2). Цей артефакт історики називають найпершою на планеті декларацією прав людини. Він вкритий клинописним текстом, у якому описано перемоги короля Персії Кіра, а також думки короля, що висловлювався за скасування рабства та свободу віросповідання.



Рис. 1



Рис. 2



Запитання і завдання від дідуса Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про використання циліндрів у побуті та техніці. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Чи доводилося вам у повсякденному житті користуватися об'єктами, що мають форму циліндра, та/або виготовляти такі об'єкти? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.

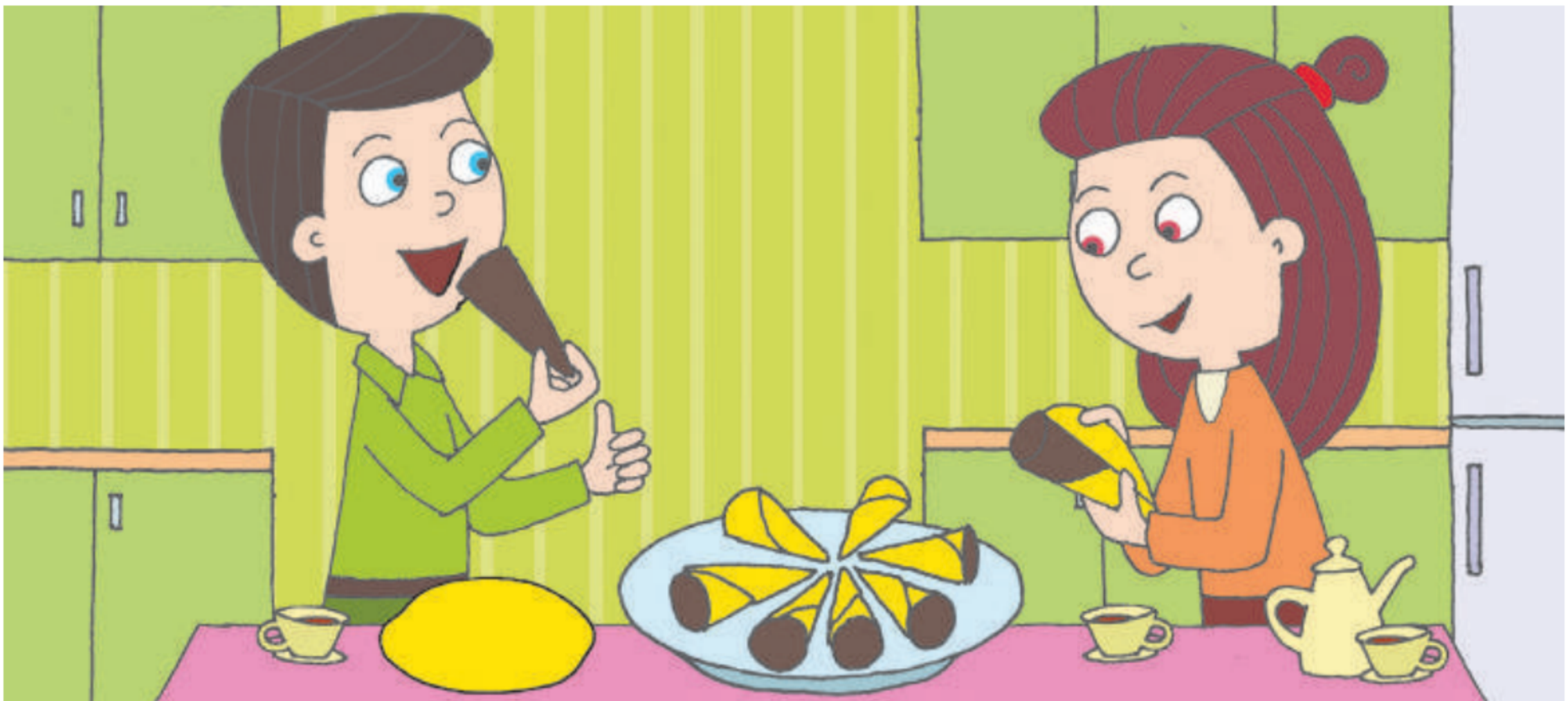


Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть вираз.
 - а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{54}$;
 - б) $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{6}}$.
2. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 5x - 7 = 0$. Знайдіть значення виразів.
 - а) $3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2$;
 - б) $(x_1 - x_2)^2$.

3. У ПДСК задано вершини трикутника ABC : $A(-1;1)$, $B(3;4)$, $C(3;1)$. Знайдіть довжини всіх сторін цього трикутника та градусні міри всіх його кутів (із точністю до градуса).
4. Фізіологічний розчин повинен містити 0,9 % солі. У відділенні лікарні в наявності є 400 г 4,5%-го розчину солі та велика кількість дистильованої води. Скільки грамів дистильованої води слід долити медичній сестрі Наталці в наявний розчин солі, щоб він став фізіологічним?
5. Мирон міркує: «За законом виключення третього із двох супротивних тверджень одне — хибне, а друге — правильне. Учора знайомий батьків сказав, що він працює в школі, але не вчителем. Отже, він працює в школі охоронцем». Чи правильно міркує Мирон? Відповідь поясніть.

§ 23. Розгортка поверхні конуса. Створення моделей конусів



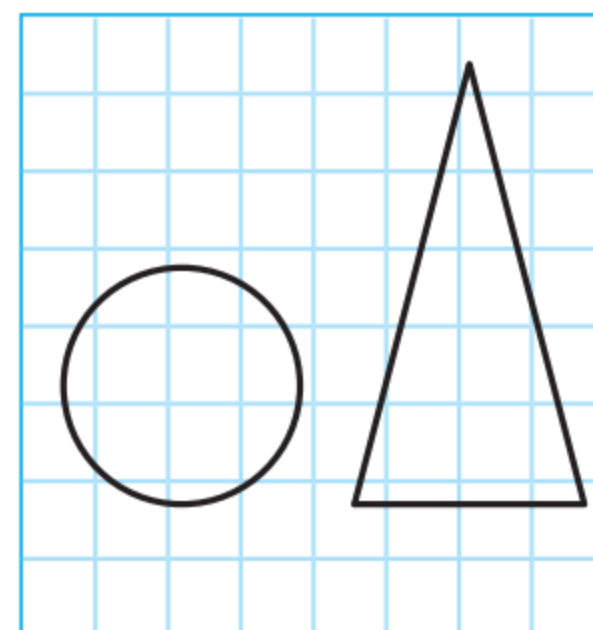
Тетянко, я такі цікаві цукерки в магазині купив! Пригощайся. Бачиш, яка в них незвичайна форма!



Дякую, це смачні цукерки, я знаю. Вони виготовлені у формі конуса, ми колись таке геометричне тіло вивчали. І що цікаво, обгортки в цих цукерок не прямокутні, а круглі.



Справді, круглі. Але мені здається, що простіше було б вирізати трикутні, бо якщо розгорнути поверхню конуса, то має вийти трикутник і круг. Ось, поглянь на мій рисунок: якщо на цукерку подивитися згори, то виходить круг, а якщо збоку, то рівнобічний трикутник. За аналогією із циліндром круг буде основою конуса, а трикутник — розгорткою його бічної поверхні.



Мені здається, тут щось не так. Якби розгортка бічної поверхні конуса справді була трикутником, то й обгортки були б теж трикутними — їх легше виготовляти, ніж круглі. Може, насправді розгортка бічної поверхні є частиною круга, а не трикутником? Наприклад, це може бути сектор...



Це легко перевірити: треба вирізати з паперу рівнобічний трикутник і спробувати згорнути з нього конічну обгортку для цукерки. Пішов по папір і ножиці.



Хороший спосіб. Ти поки що перевіряй, а я тим часом спробую дізнатися більше про конус у вчителів. Бо це надзвичайно популярне в застосуваннях геометричне тіло. Наприклад, я ледь не щодня на дорозі ось такі майже конуси зустрічаю, як на цьому фото (див. рис. 23.1).

Спробуйте і ви виконати те саме, що планує зробити Петрик: виріжте з паперу рівнобічний трикутник і спробуйте згорнути з нього конус.



Рис. 23.1



Так, Тетянко, конус дійсно надзвичайно цікаве геометричне тіло.



Конус — геометричне тіло, яке можна утворити внаслідок обертання плоского прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один із його катетів.

Поверхня конуса складається з *круга*, який називають **основною конуса**, та **бічної поверхні**. Бічну поверхню конуса разом із його основою називають **повною поверхнею** конуса.

Наприклад, на рис. 23.2 зображено плоский прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Якщо цей прямокутний трикутник обертати навколо прямої BC , то утвориться конус, основою якого є круг радіуса $R = b$ із центром у точці C . Точку B називають **вершиною** утвореного конуса, відрізок BC — **висотою** або **віссю** конуса, а всі відрізки, утворені під час обертання гіпотенузи AB , — **твірними** цього конуса. Зазвичай висоту конуса позначають літерою H , а будь-яку його твірну — літерою L .

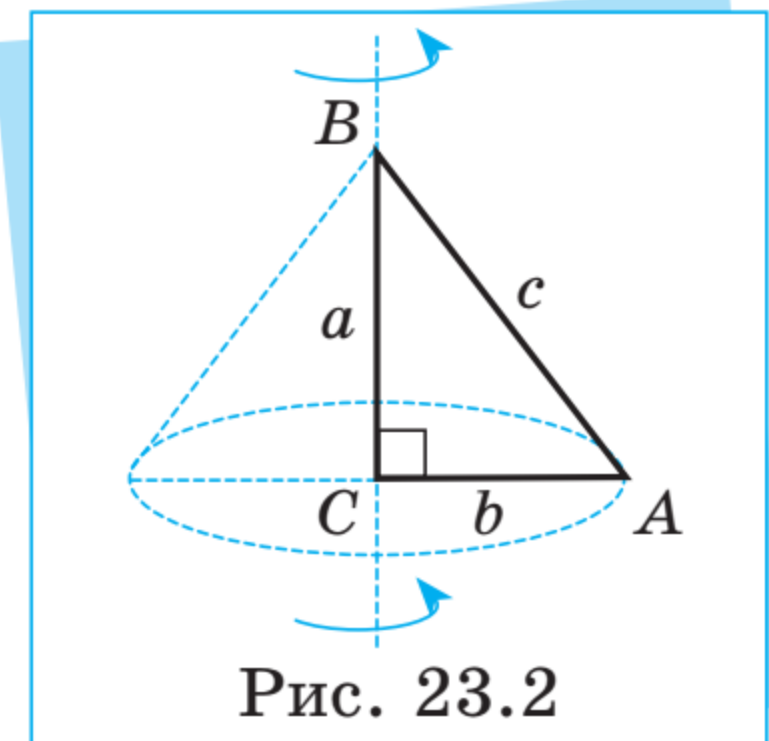


Рис. 23.2

Згідно з теоремою Піфагора, **для висоти H конуса, радіуса R його основи і твірної L правильною є рівність $H^2 + R^2 = L^2$.**



Я спробував виготовити з паперового рівнобічного трикутника бічну поверхню конуса, але мені не вдалося. Погляньте, вийшла якась дивна фігура: трохи схожа на конус, але ж все-таки не конус (див. рис. 23.3).

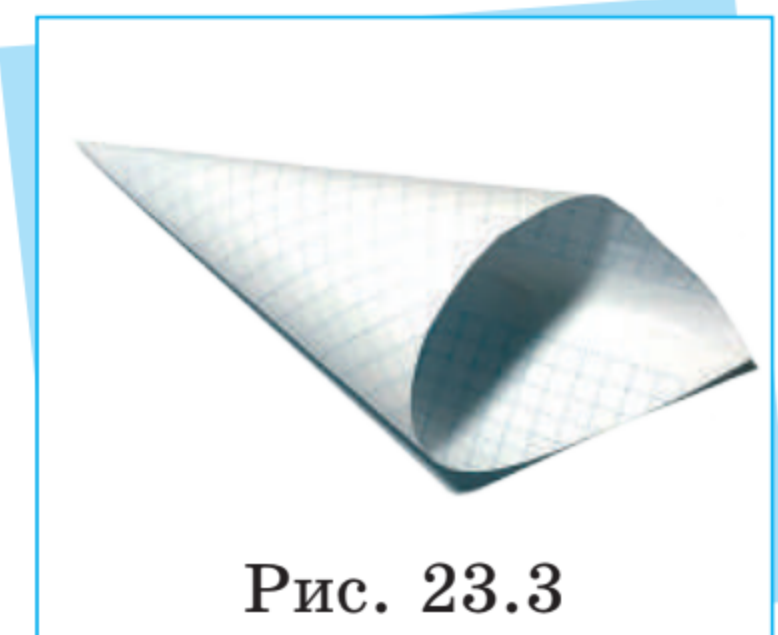


Рис. 23.3



Можна довести: розгорткою бічної поверхні конуса є сектор круга, радіус якого дорівнює твірній конуса.

Наприклад, якщо у плоского трикутника ABC (див. рис. 23.2) $a = 8$ см, $b = 6$ см, то повна поверхня конуса, утвореного обертанням цього трикутника навколо прямої BC , складається з круга радіуса $R = b = 6$ см і бічної поверхні, розгортка якої є сектором круга радіуса $L = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{H^2 + R^2} = 10$ см. При цьому довжина дуги, яка обмежує сектор, дорівнює довжині кола, яке обмежує круг основи конуса (рис. 23.4).

Один із варіантів розгортки повної поверхні конуса зображено на рис. 23.5.

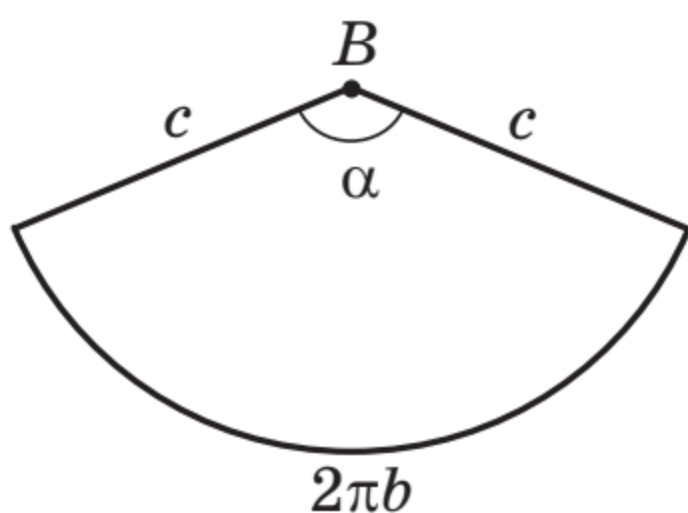


Рис. 23.4

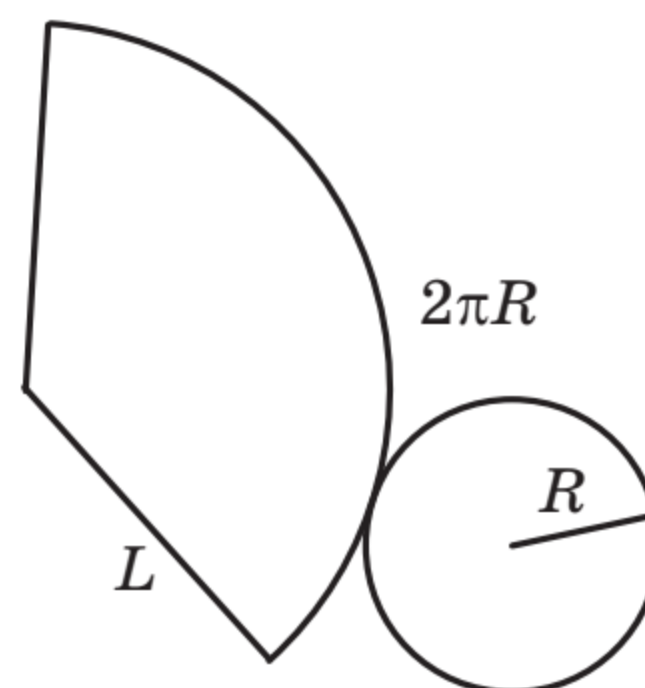
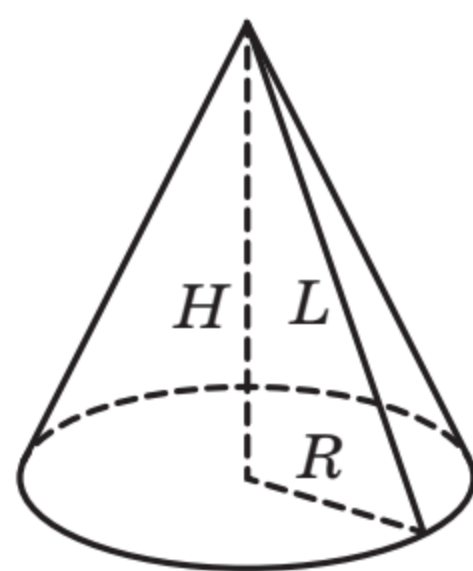


Рис. 23.5



Завдяки тому що бічна поверхня конуса є сектором круга, обгортки цукерок, якими Петрик пригощав Тетянку, справді зручніше виготовляти у формі круга.

Градусну міру центрального кута α , який визначає цей сектор, можна знайти з рівності $2\pi R = 2\pi L \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$, тобто:

$$\alpha = \frac{R}{L} \cdot 360^\circ$$

Наприклад, для поданого вище конуса (див. рис. 23.4):
 $\alpha = \frac{6}{10} \cdot 360^\circ = 216^\circ$, тобто насправді сектор бічної поверхні цього конуса мав би бути більшим за половину круга.



Для виготовлення паперової моделі конуса потрібно знати його висоту, радіус основи й твірну. Після цього слід виготовити круг основи, далі розрахувати градусну міру центрального кута для розгортки бічної поверхні, а потім вирізати з паперу цей сектор (нагадуємо, що його вирізають із круга, радіус якого дорівнює твірній конуса). Після цього, користуючись скотчем або додатковими паперовими смужками та клеєм, можна виготовити потрібну модель конуса.

Процес створення паперової моделі конуса:
rnk.com.ua/109405



Оскільки конус і циліндр утворені обертанням відповідно плоского прямокутного трикутника й плоского прямокутника, то ці геометричні тіла часто називають **тілами обертання**. Крім циліндра й конуса, існують інші тіла обертання, з якими ви ознайомитеся пізніше.



Перевірте себе!

1. Дайте означення конуса та його елементів.
2. Із чого складається повна поверхня конуса?
3. Якою геометричною фігурою є: а) основа конуса; б) розгортка бічної поверхні конуса?
4. Як виготовити модель конуса?



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Які з будівель мають форму конуса?

А. Вігвам (Нью-Мексико, США)	Б. Вежа Біг-Бен (м. Лондон, Ве- лика Британія)	В. Вежа Банку Китаю (Гонконг)	Г. Ратуша (м. Львів)
			

2. Які з будівель мають форму конуса?

А. Будівля Держпрому (м. Харків)	Б. Вежа церкви Св. Павла (м. Одеса)	В. Собор Маринги (Бразилія)	Г. Вежа замка Ластівчине гніздо (м. Ялта)
			

3. Які з предметів мають форму конуса?

А. М'яч для регбі	Б. Вафельний ріжок	В. Каструля	Г. Японський капелюх
			

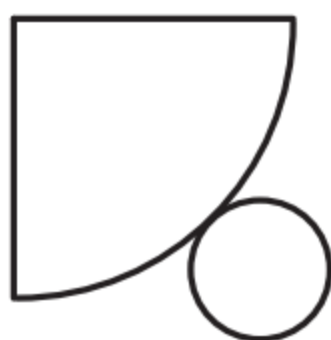
4. Які з предметів мають форму конуса?

А. Волан для бадмінтону	Б. Морозиво-брикет	В. Пожежне відро	Г. Капелюх канотье
			

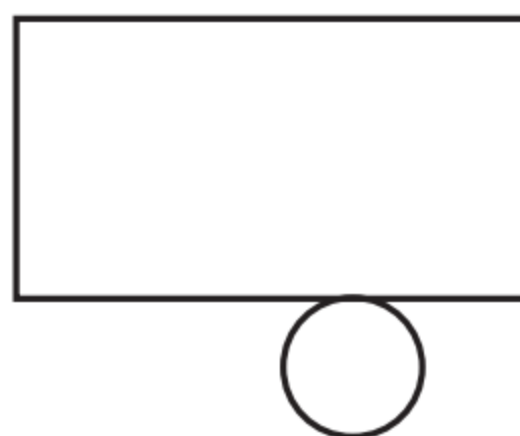
5. Яка з розгорток на рис. 1 є розгорткою повної поверхні конуса?



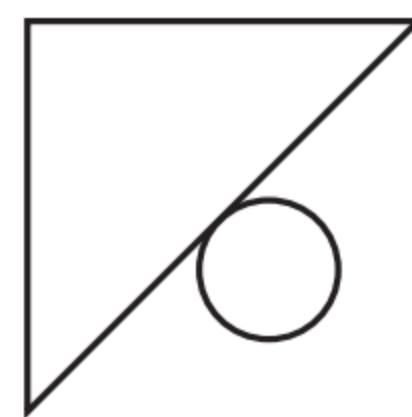
а



б



в



г

Рис. 1

6. Яка з розгорток на рис. 2 є розгорткою бічної поверхні конуса?



а



б



в



г

Рис. 2



Середній рівень

7. Прямокутний трикутник обертають навколо: а) гіпотенузи; б) більшого катета; в) медіани, проведеної до гіпотенузи. У якому випадку одержують конус?

8. Прямокутний трикутник обертають навколо: а) меншого катета; б) найбільшої сторони; в) бісектриси одного з гострих кутів. У якому випадку одержують конус?

9. Знайдіть довжину твірної конуса, висота якого дорівнює 12 см, а радіус основи — 5 см.

10. Знайдіть довжину твірної конуса, висота якого дорівнює 15 см, а радіус основи — 8 см.

11. Знайдіть довжину радіуса основи конуса, висота якого дорівнює 24 см, а твірна — 25 см.

12. Знайдіть довжину радіуса основи конуса, висота якого дорівнює 35 см, а твірна — 37 см.

13. Задано сектор, який є розгорткою бічної поверхні конуса з твірною 5 см. Знайдіть градусну міру центрального кута цього сектора, якщо радіус основи конуса дорівнює 3 см.

14. Задано сектор, який є розгорткою бічної поверхні конуса з твірною 12 см. Знайдіть градусну міру центрального кута цього сектора, якщо радіус основи конуса дорівнює 5 см.

15. Виготовте з паперу модель конуса, довжина твірної якого дорівнює 10 см, а градусна міра центрального кута сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса, — 288° . За допомогою сантиметрової стрічки або нитки виміряйте довжину кола, яке обмежує круг основи цього конуса, й обчисліть радіус основи.

16. Виготовте з паперу модель конуса, довжина твірної якого дорівнює 15 см, а градусна міра центрального кута сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса, — 216° . За допомогою сантиметрової стрічки або нитки виміряйте довжину кола, яке обмежує круг основи цього конуса, й обчисліть радіус основи.



Достатній рівень

17. Прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см обертають навколо меншого катета. Унаслідок цього утворюється конус, розгорткою бічної поверхні якого є круговий сектор. Знайдіть радіус кругового сектора та градусну міру його центрального кута. Зобразіть цей круговий сектор у зошиті.

18. Прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см обертають навколо більшого катета. Унаслідок цього утворюється конус, розгорткою бічної поверхні якого є круговий сектор. Знайдіть радіус кругового сектора та градусну міру його центрального кута. Зобразіть цей круговий сектор у зошиті.

19. Рівнобічний трикутник обертають навколо висоти, проведеної до основи. Чи отримають у цьому випадку конус? Відповідь поясніть.

20. Рівнобічний трикутник, відмінний від рівностороннього, обертають навколо медіани, проведеної до бічної сторони. Чи отримають у цьому випадку конус? Відповідь поясніть.

21. Рівносторонній трикутник обертають навколо медіани, проведеної до бічної сторони. Чи отримають у цьому випадку конус? Відповідь поясніть.

22. Рівносторонній трикутник обертають навколо однієї зі сторін. Чи отримають у цьому випадку конус? Відповідь поясніть.

23. Для костюмованого балу Тетянці потрібно виготовити капелюх конічної форми, висота якого становить 15 см. Обхват голови Тетянки дорівнює 50 см. Зробіть рисунок кругового сектора, який можна використати як викрійку для виготовлення такого капелюха. На рисунку підпишіть значення довжин твірної конуса, радіуса основи конуса, а також градусну міру центрального кута сектора. Вважайте, що $\pi = 3,14$. Одержані значення округліть до цілих.

24. Для пакування новорічного подарунка потрібно виготовити коробку конічної форми, висота якої дорівнює 20 см, а діаметр круга основи — 14 см. Зробіть рисунок кругового сектора, який можна використати як викрійку для виготовлення такої коробки. На рисунку підпишіть значення довжин твірної конуса, радіуса основи конуса, а також градусну міру центрального кута сектора. Вважайте, що $\pi = 3,14$. Одержані значення округліть до цілих.



Високий рівень

25. Прямокутний трикутник із гострим кутом 60° і протилежним катетом a обертають навколо більшого катета. Знайдіть твірну, радіус основи, висоту конуса та центральний кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні утвореного конуса.

26. Прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом 30° обертають навколо більшого катета. Знайдіть твірну, радіус основи, висоту конуса та центральний кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні утвореного конуса.

27. Розгорткою конуса є круговий сектор, центральний кут якого дорівнює 90° , а довжина його дуги — 20π см. Знайдіть твірну, радіус основи та висоту конуса.

28. Розгорткою конуса є круговий сектор, центральний кут якого дорівнює 120° , а довжина його дуги — 6π см. Знайдіть твірну, радіус основи та висоту конуса.

29. Півкруг із діаметром 20 см є розгорткою бічної поверхні конуса. Знайдіть твірну, радіус основи та висоту конуса.
30. Розгортка бічної поверхні конуса є сектором круга радіуса 30 см із центральним кутом 300° . Знайдіть твірну, радіус основи та висоту конуса.



Цікавинки від дідуся Тараса

Назва геометричного тіла *конус* походить від грецького слова *κώνος* — шпичак шолома, шишка. Як математичний термін конус (як і циліндр) уперше зустрічається в роботах *Евкліда*, *Архімеда*, *Евдокса* (IV–III ст. до н. е.). Конуси, утворені обертанням прямокутного трикутника навколо його катета, у сучасній математиці називають *прямими круговими конусами*. Саме такі конуси вивчали згадані давньогрецькі вчені.

Однак термін «конус» може вживатися й для іншого тіла. Розгляньмо деякий круг і точку, що не належить площині цього круга. *Геометричне тіло, утворене всіма відрізками, що сполучають цю точку з усіма точками цього круга, також називають конусом*. Зрозуміло, що прямий круговий конус є окремим випадком цього більш загального означення. Якщо конус не є прямим круговим, то його називають *похилим конусом* (рис. 1). Похилі конуси є досить складними, зазвичай їх вивчають лише у вищій школі.

Використання конусів є надзвичайно різноманітним: це елементи архітектурних споруд (див., наприклад, рис. 2), обмежувачі руху автотранспорту, стоги сіна, купи сипких матеріалів, лійки, піскові й водяні годинники, медичні прилади, елементи одягу тощо.

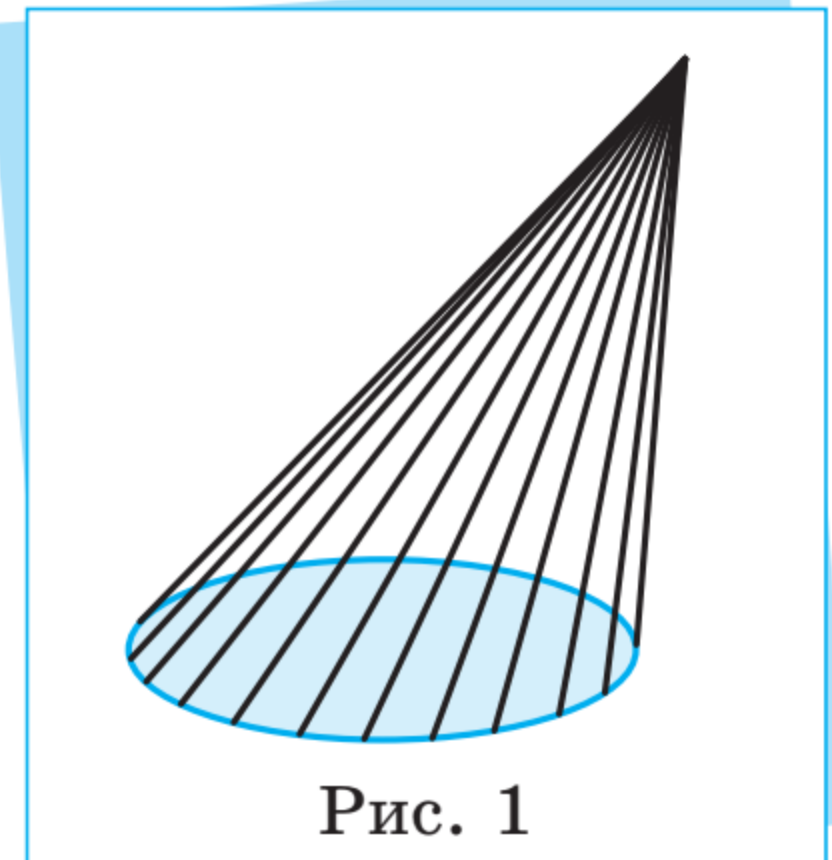


Рис. 1



Рис. 2. Будинок Підгорського (м. Київ)



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про використання конусів у побуті й техніці. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Чи доводилося вам у повсякденному житті користуватися об'єктами, що мають форму конуса, та/або виготовляти такі об'єкти? Якщо так, то поділіться своїм досвідом.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $\frac{3a - 3\sqrt{a}}{a - 1} + \frac{3}{\sqrt{a} + 1}$ і знайдіть його значення, якщо $a = 17$.
2. Графік лінійної функції $y = kx + b$ проходить через точки $A(-1; 2)$ і $B(2; 8)$. Знайдіть значення параметрів k і b та побудуйте графік цієї функції в ПДСК.
3. Івасик-Телесик, рятуючись від Баби Яги, спочатку біг 2 км до дуба зі швидкістю 6 км/год, потім летів 10 км на гусях-лебедях зі швидкістю 15 км/год і, нарешті, ішов 3 км до домівки зі швидкістю 3 км/год. Знайдіть середню швидкість руху Івасика протягом усієї подорожі.
4. Побудуйте прямокутник за кутом між його діагоналями та за радіусом кола, описаного навколо цього прямокутника.
5. Квиток вважають «математично щасливим», якщо між цифрами його номера можна вставити знаки арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) та дужки так, щоб після виконання всіх цих дій у підсумку вийшло 100. Переставляти місцями цифри номера не можна. Чи є «математично щасливим» квиток на рисунку?



ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 5

У завданнях 1–4 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Прямокутник $PQBS$ (рис. 1), у якого $PQ = 12$ см, $PS = 9$ см, обертають навколо прямої QB . З'ясуйте радіус R і висоту H циліндра, утвореного в результаті цього обертання.

А	Б	В	Г
$R = 12$ см $H = 9$ см	$R = 6$ см $H = 9$ см	$R = 9$ см $H = 12$ см	$R = 4,5$ см $H = 12$ см

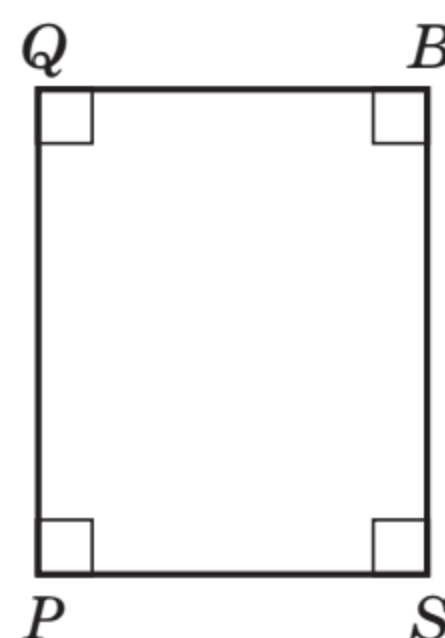


Рис. 1

2. Прямокутний трикутник KLM (рис. 2), у якого $\angle L = 90^\circ$, $KL = 5$ см, $LM = 12$ см, обертають навколо катета LM . З'ясуйте радіус R і висоту H конуса, утвореного в результаті цього обертання.

А	Б	В	Г
$R = 12$ см $H = 5$ см	$R = 5$ см $H = 12$ см	$R = 2,5$ см $H = 12$ см	$R = 6$ см $H = 5$ см

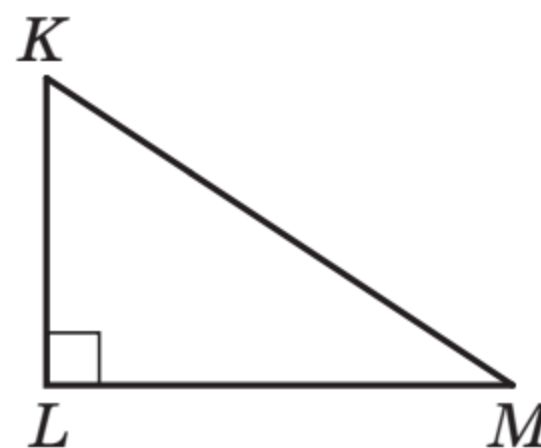
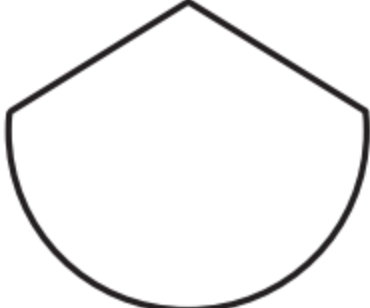


Рис. 2

3. Із прямокутного аркуша паперу розмірами 15 см і 21 см згортають без перекриттів бічну поверхню циліндра так, щоб менша сторона прямокутника стала твірною цього циліндра. Укажіть формулу, за якою обчислюють діаметр d основи цього циліндра (у см).

А	Б	В	Г	Д
$d = \frac{15}{\pi}$	$d = \frac{15}{2\pi}$	$d = \frac{21}{\pi}$	$d = \frac{21}{2\pi}$	$d = \frac{36}{\pi}$

4. Радіус основи конуса вдвічі менший за його твірну. На якому з рисунків може бути зображена розгортка бічної поверхні цього конуса?

А	Б	В	Г	Д
				

У завданнях 5–6 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

5. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра (у см^2), радіус основи якого дорівнює 5 см, а висота — 6 см. Відповідь округліть до десятих, вважаючи, що $\pi \approx 3,14$.
6. Розгортка бічної поверхні конуса є сектором круга радіуса 10 см із центральним кутом 270° . Знайдіть радіус основи цього конуса (у см).

Завдання 7–10 розв'яжіть із повним поясненням.

7. Прямокутник $ABCD$ обертають навколо сторони AB . Площа бічної поверхні утвореного циліндра дорівнює $240\pi \text{ см}^2$. Знайдіть сторони прямокутника $ABCD$, якщо AB на 2 см більша за AD .
8. Капелюх клоуна має форму конуса, радіус основи якого дорівнює 12 см, а висота — 9 см. Під час вистави клоун розрізає капелюха по твірній конуса й показує глядачам сектор. Знайдіть: а) довжину твірної конуса; б) наближене значення кута, який утворює твірна конуса з його висотою (з точністю до градуса); в) градусну міру центрального кута сектора, який клоун показує глядачам.
9. Виготовте паперову модель циліндра, діаметр основи якого дорівнює 10 см, а висота — теж 10 см.

10. Виготовте паперову модель конуса, висота якого дорівнює 5 см, а радіус основи — теж 5 см.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Прямокутник із довжиною діагоналі d обертають навколо прямої, яка проходить через одну з його сторін. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного циліндра, якщо відомо, що в заданий прямокутник можна вписати коло.
2. Прямокутник із довжиною діагоналі d і кутом між діагоналями φ обертають навколо прямої, яка проходить через середини двох протилежних його сторін. Обґрунтуйте, що в результаті обертання утвориться циліндр. Знайдіть радіус R основи циліндра, висоту H циліндра та площу $S_{\text{біч.}}$ його бічної поверхні. Розгляньте всі можливі випадки.
3. Задано прямокутний трикутник, у якого один катет на 4 см більший за другий; радіус кола, описаного навколо даного трикутника, дорівнює 10 см. Цей трикутник обертають навколо прямої, яка проходить через більший катет. Знайдіть твірну, радіус основи, висоту утвореного конуса та центральний кут сектора, який є розгорткою бокової поверхні утвореного конуса.
4. Рівнобічний трикутник обертають навколо прямої, яка проходить через висоту, проведену до основи трикутника. Обґрунтуйте, що в результаті такого обертання утвориться конус. Знайдіть твірну, радіус основи та висоту утвореного конуса, якщо кут при основі даного трикутника дорівнює α , а радіус вписаного в трикутник кола дорівнює r .
5. Заданий прямокутний трикутник має гіпотенузу c . Коли цей трикутник обертають навколо одного з катетів, утворюється конус. Коли цей трикутник обертають навколо висоти, проведеної до гіпотенузи c , теж утворюється конус. Знайдіть гострі кути заданого трикутника. Знайдіть твірну L , радіус R основи та висоту H конуса, утвореного в кожному з двох випадків.

6. Прямокутну трапецію з більшою бічною стороною b й гострим кутом α обертають навколо більшої основи. Обґрунтуйте, що бічна поверхня утвореного тіла обертання складається з бічних поверхонь циліндра та конуса. Знайдіть радіус R_1 і висоту H_1 циліндра, а також твірну L , радіус R_2 основи та висоту H_2 конуса, якщо відомо, що в задану трапецію можна вписати коло.

Словничок

Циліндр — cylinder

Конус — cone

Висота циліндра (конуса) — cylinder (cone) height

Твірна циліндра (конуса) — cylinder (cone) generatrix

Основа циліндра (конуса) — base of cylinder (cone)

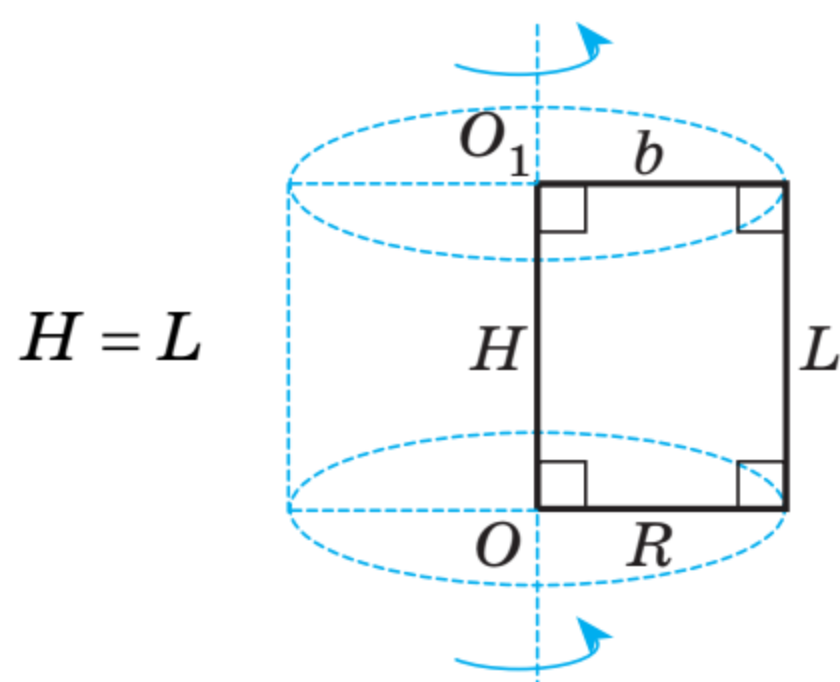
Вершина конуса — top of the cone

Бічна поверхня циліндра (конуса) — side surface of cylinder (cone)

Повна поверхня циліндра (конуса) — full surface of the cylinder (cone)

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 5

Циліндр

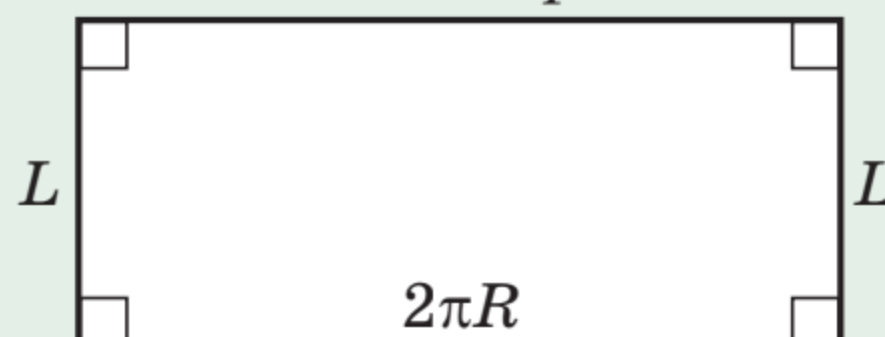


$$H = L$$

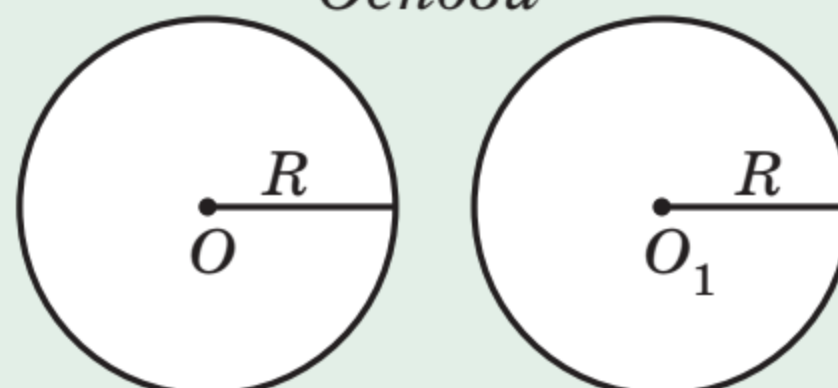
H — висота (вісь) циліндра
 L — твірна циліндра
 R — радіус основи циліндра
 O, O_1 — центри основ циліндра

Розгортка поверхні циліндра

Бічна поверхня



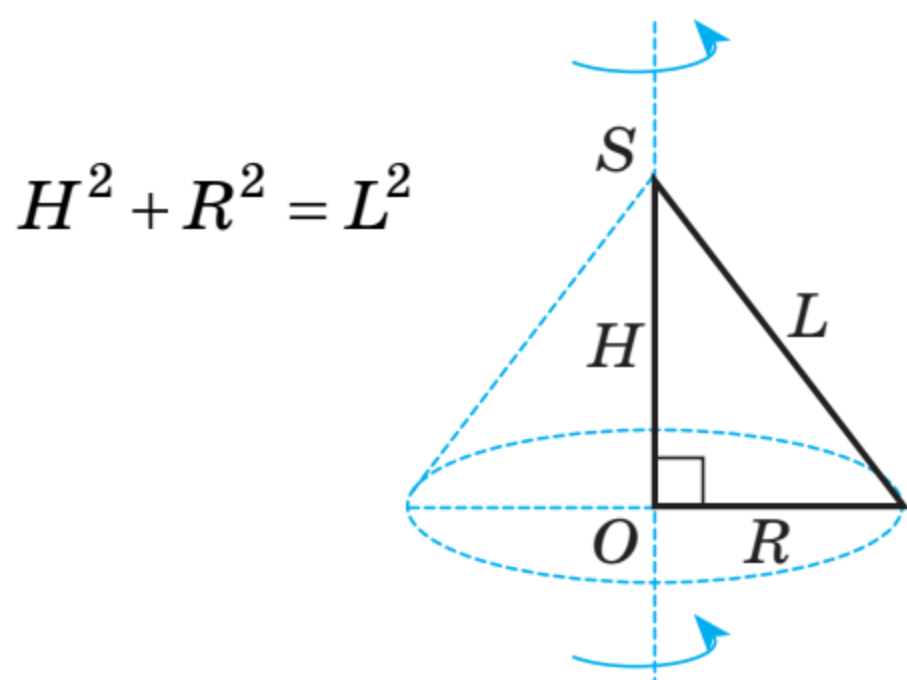
Основи



Нижня

Верхня

Конус

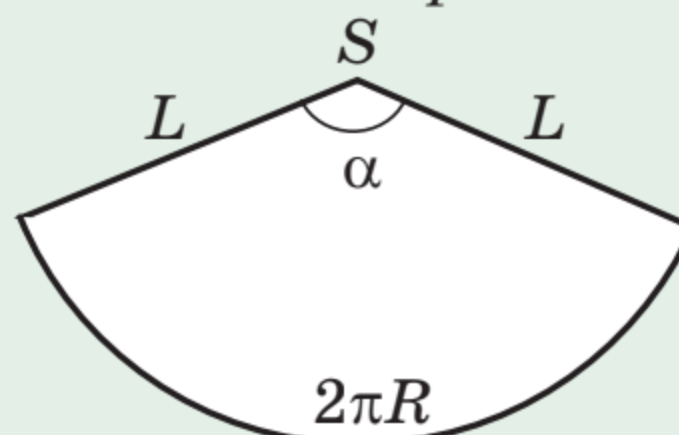


$$H^2 + R^2 = L^2$$

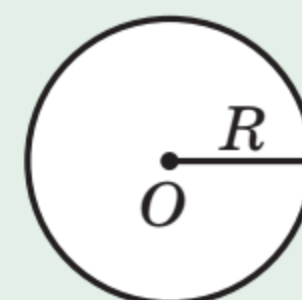
H — висота (вісь) конуса
 L — твірна конуса
 R — радіус основи конуса
 S — вершина конуса
 O — центр основи конуса

Розгортка поверхні конуса

Бічна поверхня



Основа



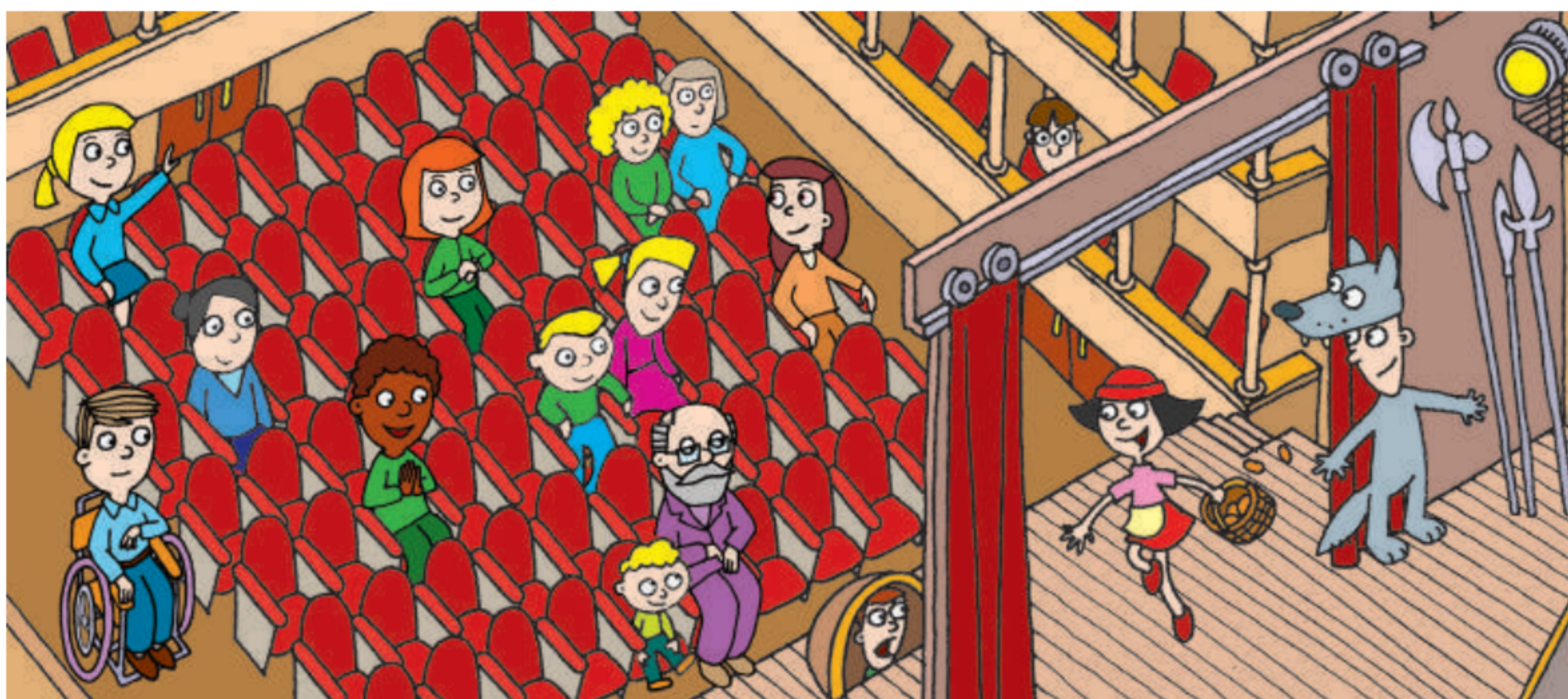
Сектор круга

$$\alpha = \frac{R}{L} \cdot 360^\circ$$

РОЗДІЛ 6. КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

CHAPTER 6. COORDINATES AND VECTORS ON THE PLANE

§ 24. Система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками з даними координатами. Рівняння кола



Учора ходили з подружками в театр й вирішили заради розваги купити квитки випадковим чином. І вийшло, що в мене квиток на 3-й ряд, 10-те місце, у Маринки — на 7-й ряд, 2-ге місце, а в Іринки — на 5-й ряд, 6-те місце. Розсілися та з подивом помітили, що сидимо ніби на одній прямій, причому Іринка точно посередині між мною і Маринкою. Після цікавої вистави я про це забула, а зараз думаю, чи це справді так?



Подумаймо разом. Колись давно Рене Декарт придумав систему координат саме для того, щоб глядачам у залі театру було зручно розсідатися. Якщо номер місця вважати абсцисою точки, а номер ряду — його ординатою, то ваші координати в залі кінотеатру будуть такими: $T(10; 3)$, $M(2; 7)$, $I(6; 5)$ (точки я позначив першими літерами ваших імен). Тепер треба перевірити, чи належить точка I прямій TM .



А можна я спробую? Прямую TM можна задати рівнянням $y = kx + b$. Якщо підставити в це рівняння замість змінних x і y координати точок T і M , то отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 10k + b = 3, \\ 2k + b = 7. \end{cases}$ Тепер можна відняти від першого рівняння друге, отримаємо $8k = -4$, звідки $k = -0,5$. Далі підставляємо це значення в перше рівняння: $-5 + b = 3$ й одержуємо, що $b = 8$. Отже, пряму TM задає рівняння $y = -0,5x + 8$.



А тепер підставимо в це рівняння замість змінних x і y координати точки $I(6; 5)$ і побачимо, що виходить правильна рівність, бо $-0,5 \cdot 6 + 8 = -3 + 8 = 5$. Тобто ви всі й справді сиділи ніби на одній прямій — фантастика!



Але чи справді Іринка була точно посередині між мною і Маринкою? Інтуїтивно здається, що так, бо Іринка сиділа на 2 ряди далі від сцени, ніж я, і на 2 ряди ближче до сцени, ніж Маринка. Також Іринка сиділа на 4 місця лівіше від мене і на 4 місця правіше, ніж Маринка. Здається, що посередині.



Мені теж так здається, але хотілося б знати точно. От якби знайти відстань між вами, знаючи ваші координати в залі театру, то можна було б навіть не сумніватися. Пропоную запитати про це в учителів.

Координати середини відрізка. Відстань між двома точками з даними координатами



Справді, цікавий випадок стався в Тетянки з подружками. Зараз усе розповімо. У 7 класі ви вже розглядали **прямокутну декартову систему координат (ПДСК)**. Нагадаємо, що ПДСК визначається двома перпендикулярними координатними прямими (осями координат) зі спільним початком відліку (початком координат — точкою O). Зазвичай масштабні одиниці (одичні відрізки) на обох осях координат обирають однакові (рис. 24.1). Нагадаємо також, що горизонтальну вісь (вісь Ox , або вісь x) називають **віссю абсцис**, а вертикальну (вісь Oy , або вісь y) — **віссю ординат**.

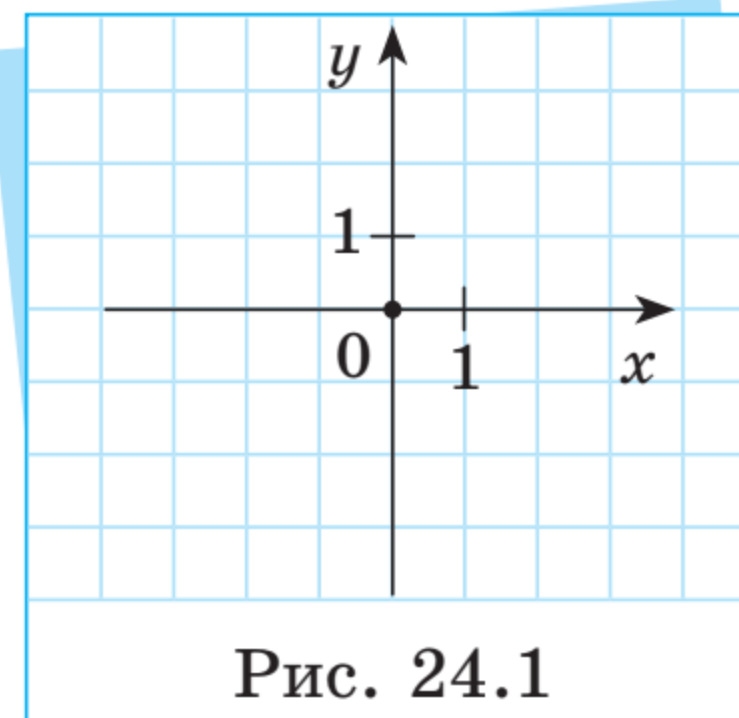


Рис. 24.1

Ви вже вмієте розв'язувати дві *найпростіші задачі* ПДСК:

- 1) визначати координати даної точки;
- 2) будувати точку з даними координатами.

До найпростіших задач ПДСК відносять іще дві задачі:

- 3) знаходження відстані між точками з відомими координатами (довжини відрізка);
- 4) знаходження координат середини відрізка за відомими координатами його кінців.



Щоб вивести формули координат середини відрізка та відстані між точками, доведемо два допоміжні твердження.

ЛЕМА 1 (про відстань між точками на координатній прямій).

Якщо на деякій координатній прямій задано дві різні точки $A(a)$ і $B(b)$, то $AB = |b - a|$.



Доведення леми 1:
rnk.com.ua/109654





ЛЕМА 2 (про координати середини відрізка на координатній прямій).

Якщо на деякій координатній прямій задано дві різні точки $A(a)$ і $B(b)$, а точка $C(c)$ є серединою відрізка AB , то $c = \frac{a+b}{2}$.

Доведення. Розглянемо на координатній прямій точку $C_1\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

За лемою 1 $AC_1 = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$, а $C_1B = \left|b - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$, тобто

$AC_1 = C_1B$. Тому $C_1\left(\frac{a+b}{2}\right)$ — середина відрізка AB . Але точка $C(c)$ — також середина відрізка AB , а отже, точки C_1 і C збігаються. Тому $c = \frac{a+b}{2}$, що й вимагалось довести.



Зауважимо, що твердження обох лем залишаються правильними й у разі, коли точки A і B збігаються, тобто $a = b$. У такому випадку відрізок «вироджується» в точку й природно вважати, що його довжина дорівнює нулю, а його середина збігається із цією точкою.



Тепер ми можемо задовольнити цікавість Петрика й Тетянки за допомогою такого твердження.



ТЕОРЕМА (про найпростіші задачі ПДСК).

Нехай у ПДСК задано точки $K(x_1; y_1)$ і $M(x_2; y_2)$. Нехай також точка $L(x_0; y_0)$ — середина відрізка KM . Тоді:

$$1) \quad KM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$2) \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Доведення. Проведемо через точки K, M, L прямі, перпендикулярні до обох координатних осей. Точки перетину цих прямих із осями координат позначимо $K_x, M_x, L_x, K_y, M_y, L_y$, точку перетину прямих MM_y і KK_x позначимо P , точку перетину прямих LL_y і KK_x — S , а точку перетину прямих MM_y і LL_x — T (рис. 24.2).

1) Очевидно, що трикутник KPM — прямокутний із прямим кутом P . Тоді за теоремою Піфагора $KM^2 = KP^2 + PM^2$. За побудовою $KP = K_y M_y$, а $PM = K_x M_x$. Точки K_x і M_x належать координатній прямій Ox , причому $K_x(x_1)$, $M_x(x_2)$. Тому за лемою про відстань між точками на координатній прямій $PM = K_x M_x = |x_2 - x_1|$. Аналогічно $KP = K_y M_y = |y_2 - y_1|$. Тому $KM^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. Оскільки $|a|^2 = a^2$ для будь-якого числа a , то $KM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, що й вимагалось довести.

2) Оскільки прямі LL_x і KK_x перпендикулярні до осі абсцис, то вони паралельні між собою. Ці прямі перетинають сторони кута PMK в точках T і P відповідно. За умовою $KL = LM$, а отже, за теоремою Фалеса $PT = TM$. За побудовою $PT = K_x L_x$ і $TM = L_x M_x$, тому $K_x L_x = L_x M_x$, тобто точки K_x, M_x і L_x лежать на координатній прямій Ox , причому точка L_x — середина відрізка $K_x M_x$. Оскільки $K_x(x_1), M_x(x_2), L_x(x_0)$, то за лемою про координати середини відрізка на координатній прямій $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогічно доводять, що

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

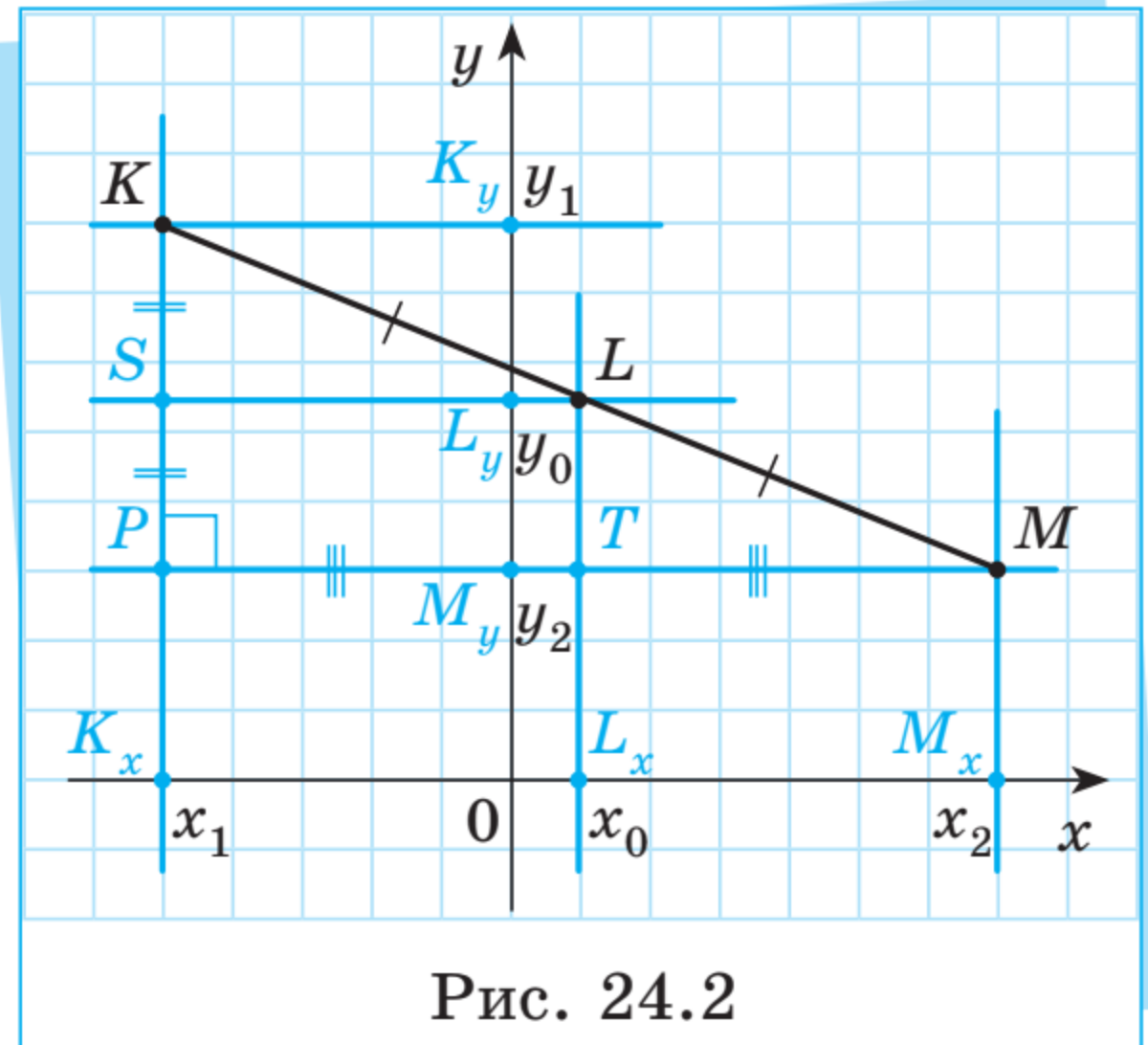


Рис. 24.2



Зверніть увагу на те, що в наведеному вище доведенні міркування здійснено лише для випадку, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Якщо

$x_1 = x_2$, то пряма KM паралельна до осі ординат, а якщо $y_1 = y_2$, то пряма KM паралельна до осі абсцис. *Доведіть теорему для цих двох випадків самостійно.*

Також зрозуміло, що теорема залишається правильною і для випадку, коли точки K і M збігаються, тобто якщо рівності $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$ виконуються одночасно.



Тепер нескладно переконатися в тому, що в залі театру Іринка справді сиділа посередині між Тетянкою та Маринкою. Дійсно, знайдемо координати точки $C(x_0; y_0)$, що є серединою відрізка TM , де $T(10; 3)$, $M(2; 7)$. Отримаємо: $x_0 = \frac{10+2}{2} = 6$, $y_0 = \frac{3+7}{2} = 5$, тобто $C(6; 5)$. Але місце Іринки в залі театру — це точка $I(6; 5)$, тобто точки C та I збігаються.

Також можна знайти й відстань між будь-якими двома дівчатами в залі. Наприклад, якщо відстань між будь-якими двома рядами та будь-якими двома місцями залу дорівнює 1 метр, то відстань між місцями Тетянки й Маринки $TM = \sqrt{(2-10)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \approx 8,94$ метра.



Найпростіші задачі ПДСК можна використати також для доведення властивостей геометричних фігур.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/109655



Рівняння кола



Одним із застосувань формули відстані між точками з відомими координатами у ПДСК є складання рівнянь ліній на площині. Нагадаємо, що **графік рівняння з двома змінними** — це геометрична фігура, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння. Тому **скласти**

рівняння деякої лінії на площині (ГМТ площини) означає пов'язати відомі параметри цієї лінії з координатами її довільної точки.

Наприклад, ви вже знаєте, що рівняння $2x - 7y + 3 = 0$ задає в ПДСК пряму. При цьому точка $M(x; y)$ — довільна точка цієї прямої, а числа 2, -7 і 3 — відомі її параметри, що дають змогу зобразити цю пряму в ПДСК.



Складемо в ПДСК рівняння кола із центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R . Тут числа x_0 , y_0 і R — відомі параметри, які дають змогу зобразити коло в ПДСК. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка даного кола. Тоді за означенням кола як ГМТ площини, рівновіддалених від даної точки, $M_0M = R$. За формулою відстані між двома точками в ПДСК $M_0M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Отже, для всіх точок $M(x; y)$, що належать даному колу, має виконуватись рівність $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. Цю рівність уже можна вважати рівнянням кола, але для зручності сприйняття обидві (додатні!) частини цього рівняння підносять до квадрата й записують у вигляді:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Таке рівняння називають **канонічним рівнянням кола** із центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R .



Розглянемо кілька прикладів.

Приклади

1. Запишемо канонічне рівняння кола із центром у точці $M_0(3; -2)$ і радіусом $R = 7$. Одержимо $(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 7^2$, тобто $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$.
2. Коло задано канонічним рівнянням $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 38$. Знайдемо центр і радіус кола. Оскільки $x - x_0 = x + 6 = x - (-6)$, то $x_0 = -6$.

Аналогічно $y - y_0 = y - 1$, звідки $y_0 = 1$. Крім того, $R^2 = 38$, а отже, $R = \sqrt{38}$. Таким чином, це канонічне рівняння задає коло із центром у точці $M_0(-6; 1)$ і радіусом $R = \sqrt{38}$.

3. Запишемо рівняння кола радіуса R із центром у початку координат $O(0; 0)$. Одержимо $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = R^2$ або $x^2 + y^2 = R^2$. *Запам'ятайте це рівняння, воно часто зустрічається в різноманітних задачах.*



Якщо задано канонічне рівняння кола, то в ньому завжди можна розкрити дужки й звести подібні доданки. Наприклад, рівняння кола $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$ можна записати у вигляді: $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 49$, або $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 36 = 0$. Останнє рівняння називають **загальним рівнянням кола**. Нескладно показати, що будь-яке канонічне рівняння кола можна звести до загального, причому останнє матиме вигляд $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. *Покажіть це самостійно.*



Рівняння вигляду $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ шляхом виділення повних квадратів завжди можна *спробувати* звести до вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, але не завжди ця спроба буде успішною. Наприклад, розглянемо рівняння $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$. Запишемо його у вигляді $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + 2 = 0$, або $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = -2$. Може здатися, що це канонічне рівняння деякого кола, проте це не так, бо тоді $R^2 = -2$, що неможливо. Отже, рівняння $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$ хоч і має вигляд загального рівняння кола, насправді коло не задає.



На заняттях математичного гуртка дізнайтеся більше, за яких умов на параметри a, b, c рівняння $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ задає коло, а за яких — інші множини точок і які саме.



Перевірте себе!

1. Сформулюйте чотири найпростіші задачі ПДСК.
2. Запишіть формулу відстані між двома точками з даними координатами.
3. Запишіть формулу координат середини відрізка за даними координатами його кінців.
4. Запишіть канонічне рівняння кола. Як зміниться це рівняння, якщо центр кола збігатиметься з початком координат?
5. Яким чином звести канонічне рівняння кола до загального? Наведіть приклади.



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. На координатній площині позначено точки (рис. 1). Запишіть координати цих точок.
2. На координатній площині позначено точки (рис. 2). Запишіть координати цих точок.

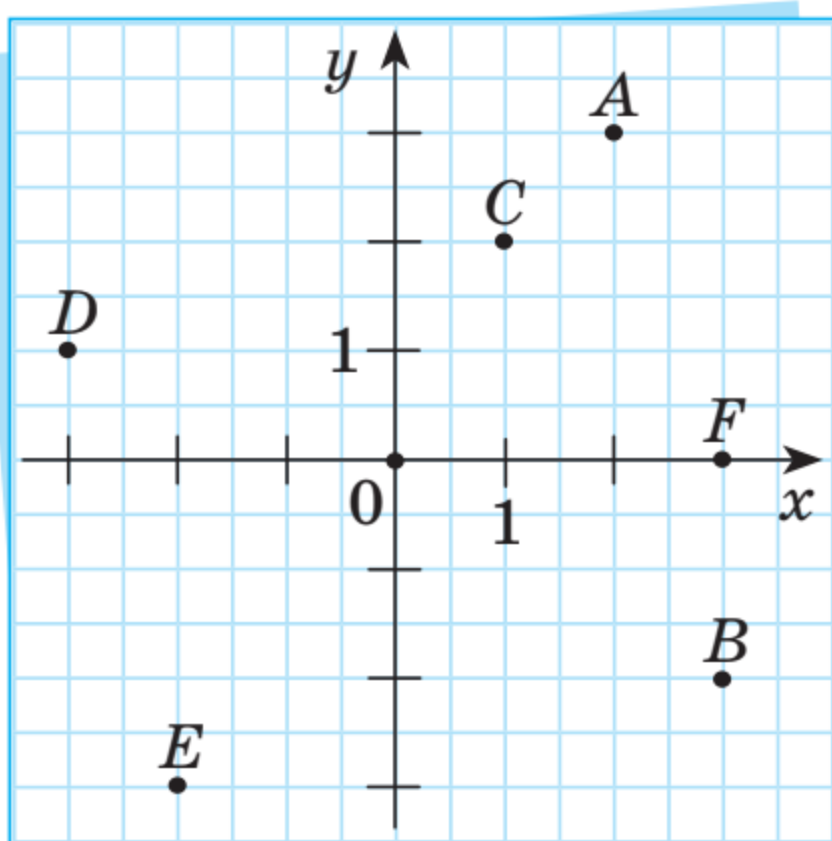


Рис. 1

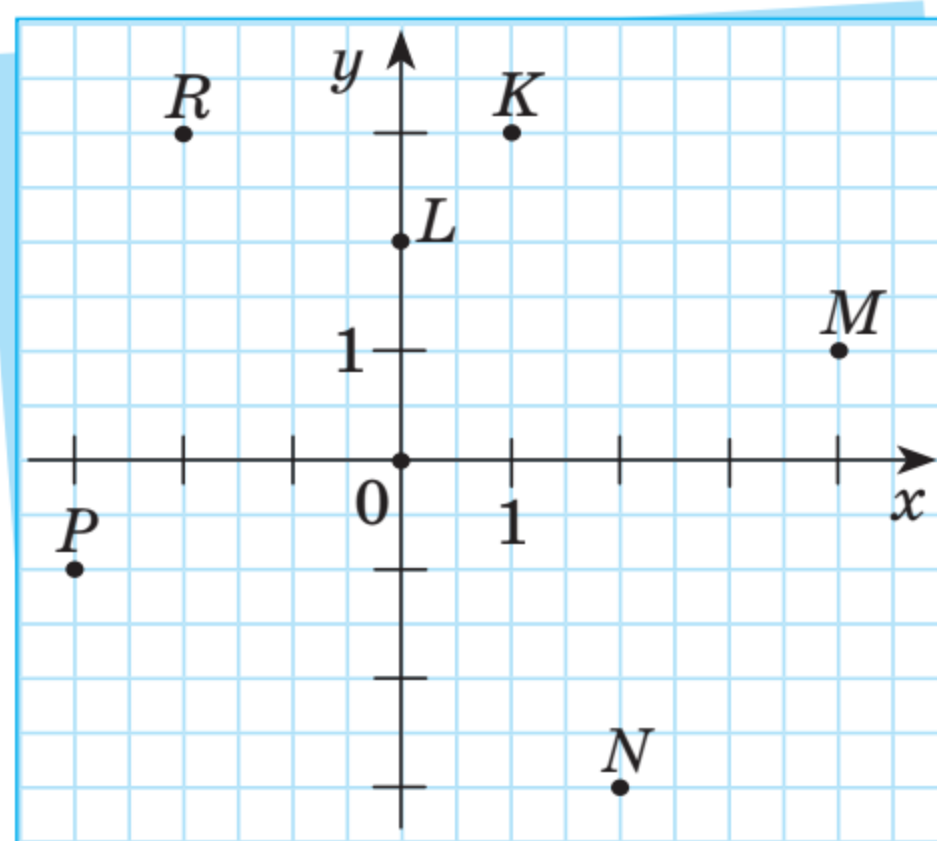


Рис. 2

3. Побудуйте в координатній площині точки $K(4; 2)$, $L(-4; 2)$, $M(3; -2)$, $N(-3; -2)$.
4. Побудуйте в координатній площині точки $A(3; 5)$, $B(-3; -5)$, $C(-1; 4)$, $N(4; -1)$.
5. Побудуйте в координатній площині точки $A(-1; 1)$, $B(-1; 5)$. Проведіть відрізок AB . За побудовою знайдіть довжину відрізка AB .
6. Побудуйте в координатній площині точки $K(1; -1)$, $N(4; -1)$. Проведіть відрізок KN . За побудовою знайдіть довжину відрізка KN .
7. Побудуйте в координатній площині точки $K(1; 5)$, $M(1; 1)$. Проведіть відрізок KM . За побудовою знайдіть точку, яка є серединою відрізка KM , і запишіть координати цієї точки.
8. Побудуйте в координатній площині точки $A(-2; -1)$, $C(-6; -1)$. Проведіть відрізок AC . За побудовою знайдіть точку, яка є серединою відрізка AC , і запишіть координати цієї точки.
9. Точки A і B мають координати $A(1; 2)$, $B(4; 6)$. Знайдіть довжину відрізка AB , скориставшись формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
10. Точки N і M мають координати $N(0; 5)$, $M(8; 11)$. Знайдіть довжину відрізка NM , скориставшись формулою $NM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
11. Точки N і K мають координати $N(10; 3)$, $K(18; 5)$. Знайдіть координати середини відрізка NK , скориставшись формулами $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.
12. Точки B і C мають координати $B(9; 30)$, $C(11; 24)$. Знайдіть координати середини відрізка BC , скориставшись формулами $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.



Середній рівень

13. Побудуйте в координатній площині точки $A(-3; -4)$, $B(-3; 5)$. Проведіть відрізок AB . Знайдіть довжину відрізка AB за побудовою і за формулою. Чи збігаються знайдені два числа?
14. Побудуйте в координатній площині точки $M(-5; 2)$, $K(3; 2)$. Проведіть відрізок MK . Знайдіть довжину відрізка MK за побудовою і за формулою. Чи збігаються знайдені два числа?
15. Побудуйте в координатній площині точки $M(-5; 3)$, $P(1; 3)$. Проведіть відрізок MP . Визначте координати середини відрізка MP за побудовою і за формулою. Чи збігаються визначені координати точок?
16. Побудуйте в координатній площині точки $A(-4; -3)$, $B(-4; 5)$. Проведіть відрізок AB . Визначте координати середини відрізка AB за побудовою і за формулою. Чи збігаються визначені координати точок?
17. Запишіть рівняння кола радіуса 6 із центром у точці $O(4; 7)$.
18. Запишіть рівняння кола радіуса 4 із центром у точці $O(5; 2)$.
19. Визначте координати центра й радіус кола, яке задано рівнянням $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 81$.
20. Визначте координати центра й радіус кола, яке задано рівнянням $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 64$.
21. Рівнобічний прямокутний трикутник ABC розташований у декартовій системі координат так, як показано на рис. 3. Визначте координати вершини C і довжину гіпотенузи AC .

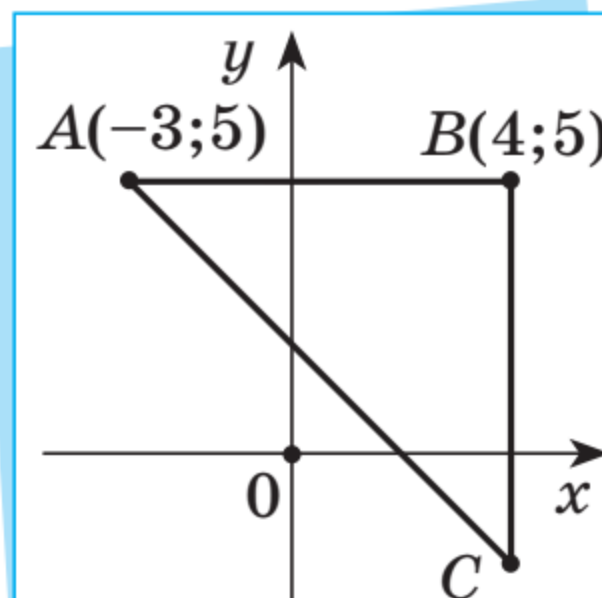


Рис. 3

22. Прямокутний трикутник ABC розташований у декартовій системі координат так, як показано на рис. 4. Визначте координати вершин і знайдіть довжини сторін цього трикутника.

23. Коло задано рівнянням $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$. Визначте, чи буде точка $A(4; 2)$ належати цьому колу.

24. Коло задано рівнянням $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 45$. Визначте, чи буде точка $A(5; 1)$ належати цьому колу.

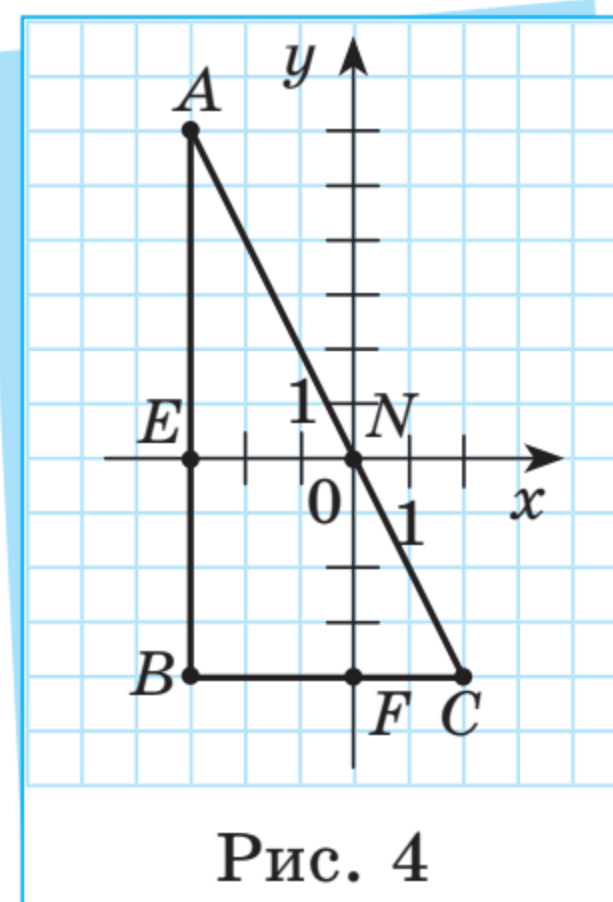


Рис. 4



Достатній рівень

25. Визначте координати центра та радіус кола, яке задано рівнянням $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 24$.

26. Визначте координати центра та радіус кола, яке задано рівнянням $(x-3,5)^2 + (y+11)^2 = 27$.

27. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 16$ задає коло. Визначте центр і радіус цього кола.

28. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 36$ задає коло. Визначте центр і радіус цього кола.

29. Задано точки $O(0; 0)$, $L(4; 0)$, $K(2; 2)$. Доведіть, що точка K лежить на серединному перпендикулярі відрізка OL .

30. Задано точки $N(4; 4)$, $L(4; 0)$, $K(2; 2)$ (рис. 5). Доведіть, що точка K лежить на серединному перпендикулярі відрізка NL .

31. Задано точки $A(4; 5)$ і $B(-2; -3)$. Запишіть рівняння кола із центром у точці B , яке проходить через точку A .

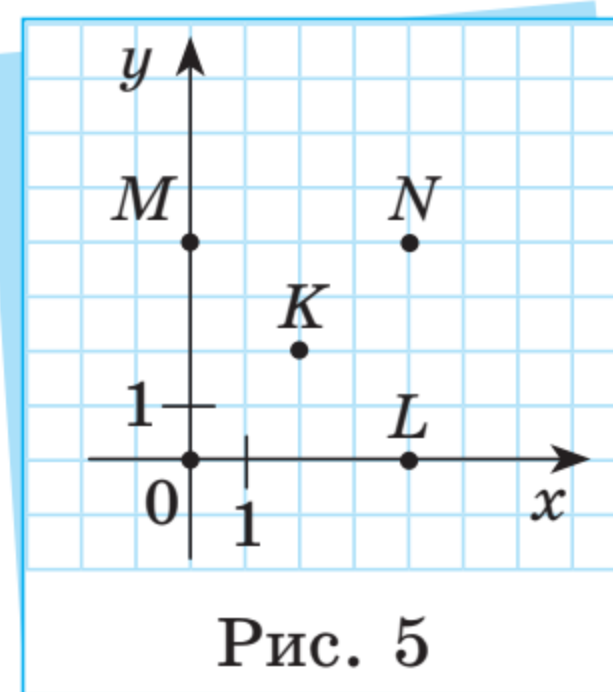


Рис. 5

32. Запишіть рівняння кола із центром у точці $(-3; -4)$, яке проходить через початок координат.

33. Точка $A(3; 1)$ належить колу із центром у точці $O(-2; 1)$. Знайдіть радіус цього кола.

34. Точка $B(4; 2)$ належить колу із центром у точці $O(-3; 2)$. Знайдіть радіус цього кола.

35. Відомо, що точка M є серединою відрізка AB . Закінчіть заповнення таблиці, додавши координати відповідних точок.

A	$(1; 7)$	$(1; -2)$		$(1; 6)$
B	$(5; 3)$		$(3; 1)$	
M		$(4; 0)$	$(2; 2)$	$(2; 4)$

36. Відомо, що точка D є серединою відрізка FK . Закінчіть заповнення таблиці, додавши координати відповідних точок.

F	$(-3; -5)$	$(-4; 7)$		$(-2; 1)$
K	$(1; 3)$		$(1; 1)$	
D		$(0; 0)$	$(-2; -3)$	$(-3; 2)$



Високий рівень

37. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(2; -1)$, $B(5; -4)$, $C(4; -1)$, $D(1; 2)$ є паралелограмом. Знайдіть координати точки перетину його діагоналей.

38. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(3; -3)$, $B(4; 0)$, $C(5; -1)$. Знайдіть координати четвертої вершини $D(x; y)$ і точки перетину діагоналей паралелограма.

39. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(5; 2)$, $B(1; 5)$, $C(-2; 1)$, $D(2; -2)$ є квадратом.

40. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ з вершинами в точках $K(3; 0)$, $L(-1; 3)$, $M(-4; -1)$, $N(0; -4)$ є квадратом.
41. Знайдіть координату точки, рівновіддаленої від осей координат і від точки $(3; 6)$.
42. Знайдіть на осі Ox точку, рівновіддалену від точок $(2; 3)$ і $(3; 4)$.
43. Задано точки $A(-4; -5)$ і $B(2; 3)$. Запишіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB .
44. Запишіть рівняння кола із центром у точці $(-4; -6)$, яке дотикається до осі Ox .
45. З'ясуйте, чи є дане рівняння рівнянням кола. Якщо так, знайдіть координати центра й радіус цього кола.
 а) $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 5 = 0$;
 б) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 15 = 0$.
46. Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, та знайдіть координати центра й радіус цього кола.
 а) $x^2 + 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$;
 б) $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 41 = 0$.
47. Запишіть рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами в точках $A(-6; 0)$, $B(0; -8)$, $O(0; 0)$.
48. Запишіть рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами в точках $K(0; -12)$, $M(16; 0)$, $O(0; 0)$.



Цікавинки від дідуся Тараса

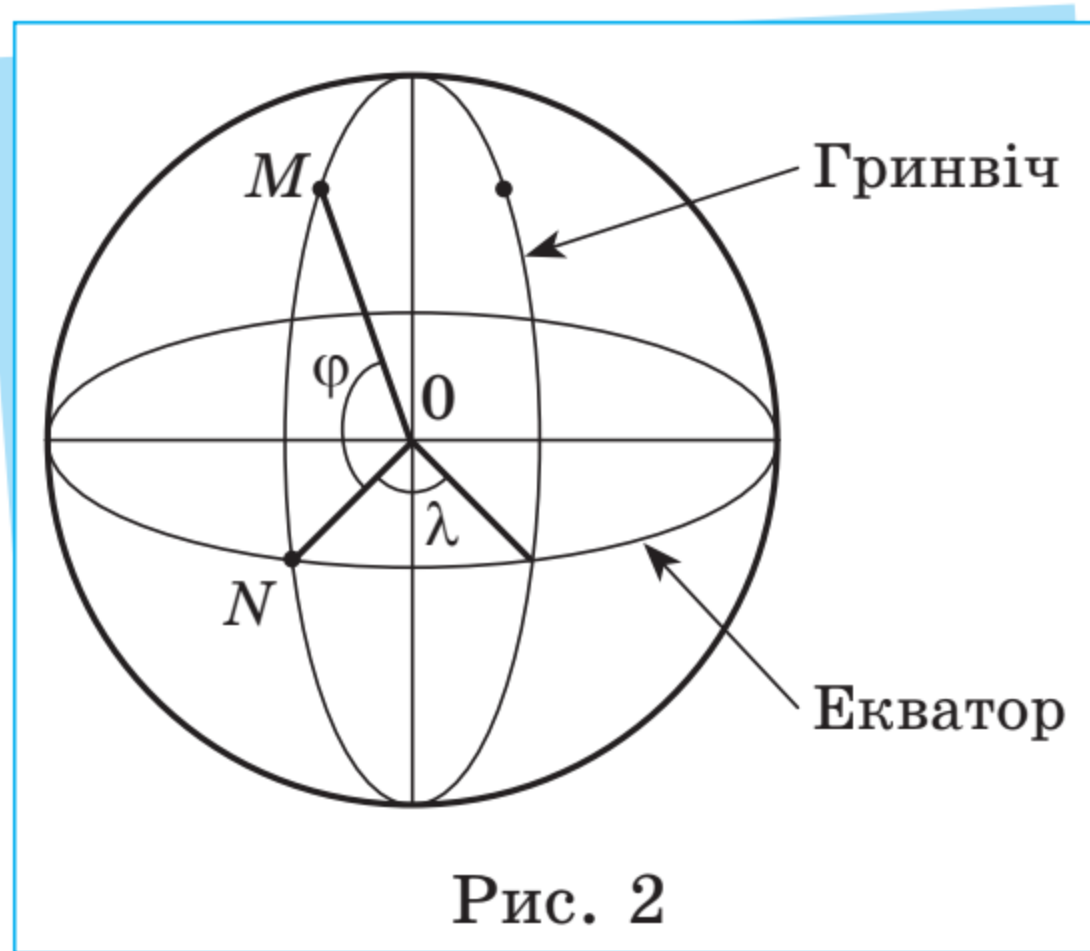
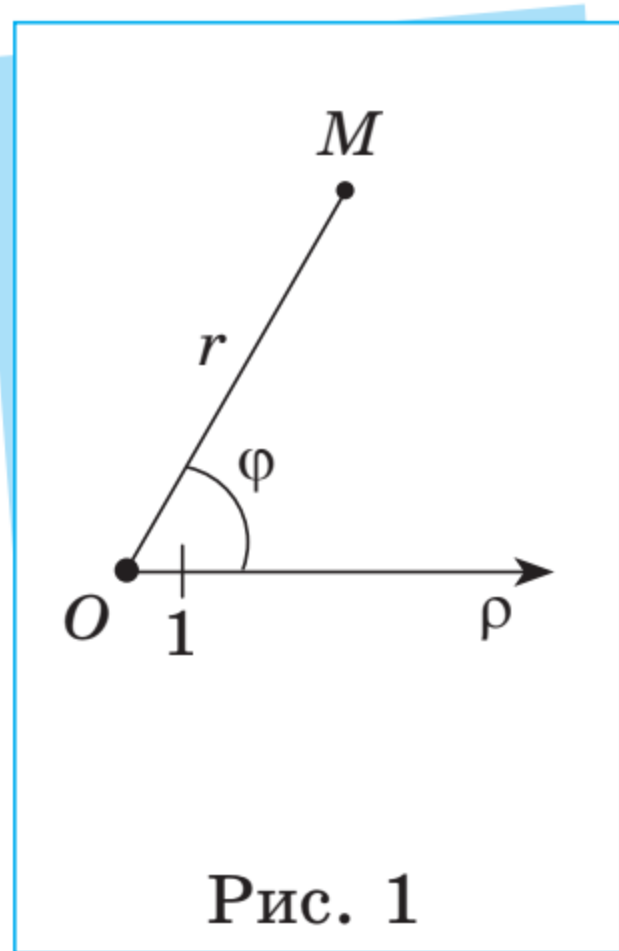
Крім прямокутної декартової системи координат існують *інші способи визначення положення точок на площині*. Одним із таких способів є *полярна система координат*. Вона визначається точкою O (полюсом), променем Op (полярною віссю), а також *лінійною та кутковою*

масштабними одиницями. Розмір лінійної масштабної одиниці (одичного відрізка) зазвичай указують на полярній осі, а за кутову масштабну одиницю можна взяти градус.

Положення будь-якої точки M на площині в цій системі координат визначається впорядкованою парою чисел $(r; \varphi)$, де $r = OM$ (довжина відрізка OM в обраних масштабних одиницях), φ — градусна міра плоского кута між відрізком OM і полярною віссю (див. рис. 1). Традиційно всі плоскі кути відкладають *лише проти руху годинникової стрілки*. На рис. 1 $M(5; 60^\circ)$. Також домовляються, що полюс має координати $O(0; 0)$.

Цікаво, що ГМТ усіх точок площини, перші полярні координати r яких однакові, — це коло із центром у полюсі. Іншими словами, рівняння кола в полярній системі координат можна записати у вигляді $r = R$, де R — радіус цього кола. Наприклад, якщо $R = 4$, то $r = 4$ — це рівняння кола в полярній системі координат.

Полярні координати широко застосовують в астрономії та географії для визначення положення точки на земній поверхні чи на небесній сфері. Наприклад, відомі вам географічні координати (широта й довгота) є кутами двох різних полярних систем координат у певних площинах, що перетинають Землю. На рис. 2 кут φ — географічна широта, а кут λ — географічна довгота. Зазвичай вважають, що всі точки на поверхні Землі лежать на однаковій відстані від її центра, а отже, першу полярну координату r можна не вказувати.





Запитання і завдання від дідуся Тараса

- Зобразіть на площині полярну систему координат.
 - Позначте на цій площині кілька точок. Знайдіть координати цих точок у зображеній полярній системі координат.
 - Побудуйте на площині точки, що мають такі полярні координати: $A(2; 45^\circ)$, $B(6; 120^\circ)$, $C(4; 270^\circ)$.
- Дізнайтеся географічні координати вашого населеного пункту. Визначте, на скільки градусів ці координати відрізняються від географічних координат столиці Італії — міста Рим. Який висновок можна зробити щодо взаємного розташування вашого населеного пункту й міста Рим?
- Чи доводилося вам використовувати полярні координати в повсякденному житті? Якщо так, то поділіться досвідом.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

- Знайдіть значення виразу $\frac{1-a}{a+\sqrt{a}} : \frac{2-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}^3}$, якщо $a = 1,44$.
- Розв'яжіть рівняння.
 - $x + \sqrt{x} - 20 = 0$;
 - $x^4 - x^2 - 20 = 0$.
- На таці лежать однакові за формою цукерки із чорного та молочного шоколаду в обгортках однакового кольору. Скільки цукерок лежить на таці, якщо ймовірність того, що навмання обрана цукерка із цієї таці буде із чорного шоколаду, дорівнює 0,4, а цукерок із молочного шоколаду на ній 18?
- Периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, а $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$. Точка K належить стороні AB . Знайдіть довжини відрізків AK і KB , якщо CK — бісектриса кута C трикутника ABC .

5. Тетянка влаштувала для Андрійка пошуковий квест із призом. Під час цього квесту Андрійко мав від великого дуба в парку пройти спочатку 50 м на схід, потім 120 м на північ, далі 60 м на захід і, нарешті, 80 м на південь. І в цьому місці під кущем хлопець мав знайти приз. Знайдіть відстань (у метрах) від місця, де був захований приз для Андрійка, до великого дуба. Відповідь округліть до сотих.

§ 25. Вектор. Модуль вектора. Колінеарні та рівні вектори. Дії над векторами

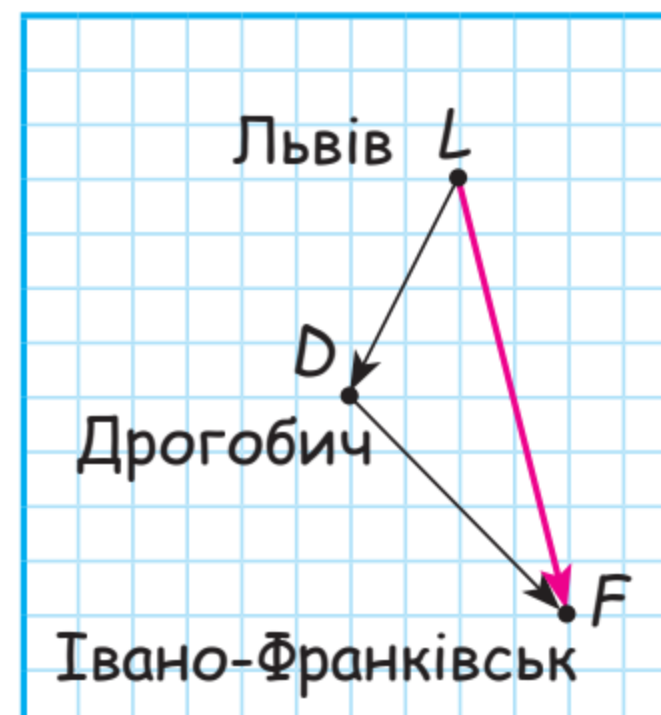


.....

Послухай, Тетянко, оце згадав, як на канікулах подорожував Україною разом із батьками та помітив цікаву річ. Ми зранку виїхали зі Львова й поїхали до Дрогобича, а звідти — до Івано-Франківська. Приїхавши туди, я замислився: а на яку відстань я зараз *перемістився* відносно Львова? Як її виміряти: як суму відстаней від Львова до Дрогобича та від Дрогобича до Івано-Франківська чи одразу як відстань від Львова до Івано-Франківська?



Здається, у 7 класі ми це вчили на уроках фізики. Довжина твого шляху від Львова до Івано-Франківська через Дрогобич — це довжина *траєкторії* твого руху, а відстань між Львовом і Івано-Франківськом по прямій — це довжина твого *переміщення*. Схематично це можна позначити приблизно так, як на рисунку. Стрілки позначають напрямок твого руху під час подорожі із точки L (Львів) до точки D (Дрогобич), а потім звідти до точки F (Івано-Франківськ). Траєкторія твого руху визначається ламаною LDF , а твоє переміщення — відрізком LF .



Що цікаво, для відрізка LF суттєво, яка точка є початковою, а яка кінцевою. Бо стрілка LF позначає переміщення зі Львова до Івано-Франківська, а стрілка FL — навпаки, з Івано-Франківська до Львова. І, хоч обидві ці стрілки мають однакову довжину, вони не однакові, а зовсім різні. Я би назвав їх *протилежними*.



Твоя правда. До того ж між стрілками LD , DF і LF є певний зв'язок. І хоч сума довжин відрізків LD і DF не дорівнює довжині відрізка LF , стрілка FL ніби є підсумковим результатом дій стрілок LD і DF , тобто їх *сумою*. Упевнена, математики вже давно придумали, як назвати ці стрілки та як їх використовувати!

Вектор. Модуль вектора. Колінеарні та рівні вектори



Звісно придумали, Тетянко! Зараз усе розповімо.



Відрізок, у якого вказано, яка з точок є початковою, а яка кінцевою, називають **напрямленим відрізком** або **вектором**.

Вектор із початком у точці A й кінцем у точці B позначають $\overrightarrow{AB}$. Кінцеву точку вектора на рисунку позначають стрілкою. Вектори також можна позначати й однією малою латинською буквою: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$, $\vec{y}$ тощо (рис. 25.1). Зазвичай під час запису векторів над двома чи однією буквою ставлять стрілку, але іноді можна зустріти й позначення з рискою замість стрілки: $\overline{AB}$, $\overline{a}$ тощо.

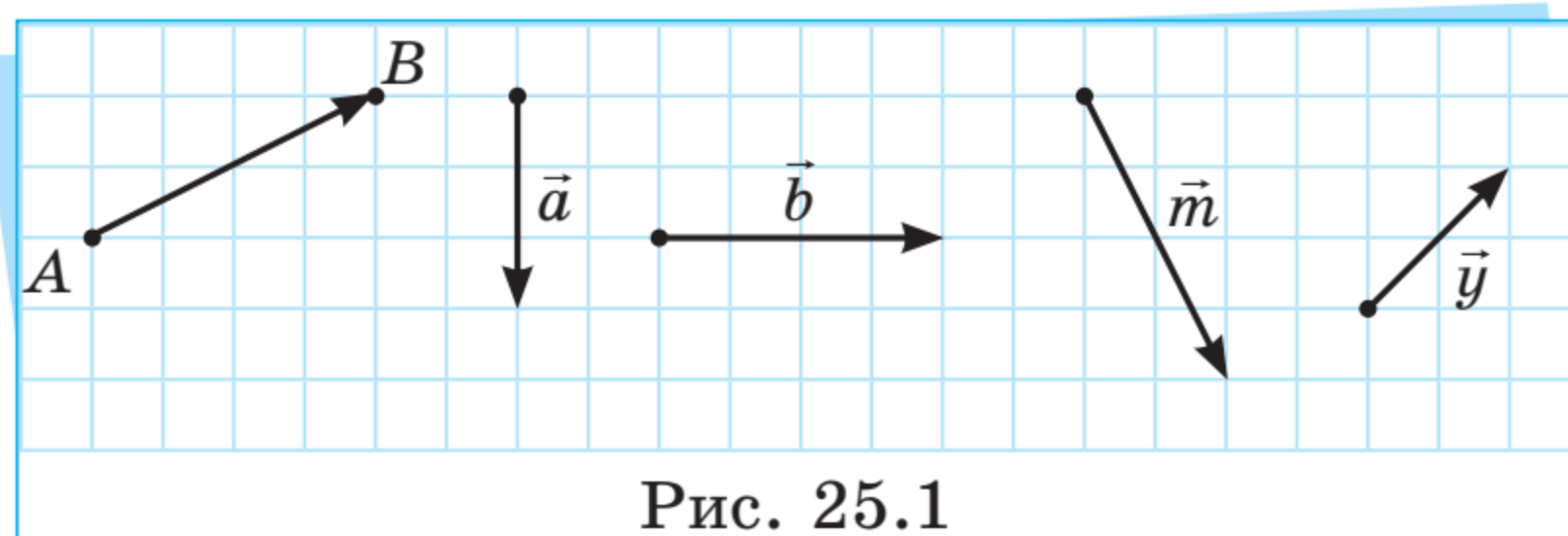


Рис. 25.1

Вектори часто використовують для позначення величин, які мають не лише числове значення, а ще й напрямок. До таких величин, зокрема, належить і *переміщення*, про яке згадували Петрик і Тетянка. Наприклад, переміщення Петрика зі Львова до Івано-Франківська можна позначити вектором $\overrightarrow{LF}$.

Дізнайтеся більше про скалярні та векторні величини у вчителя або вчительки фізики.



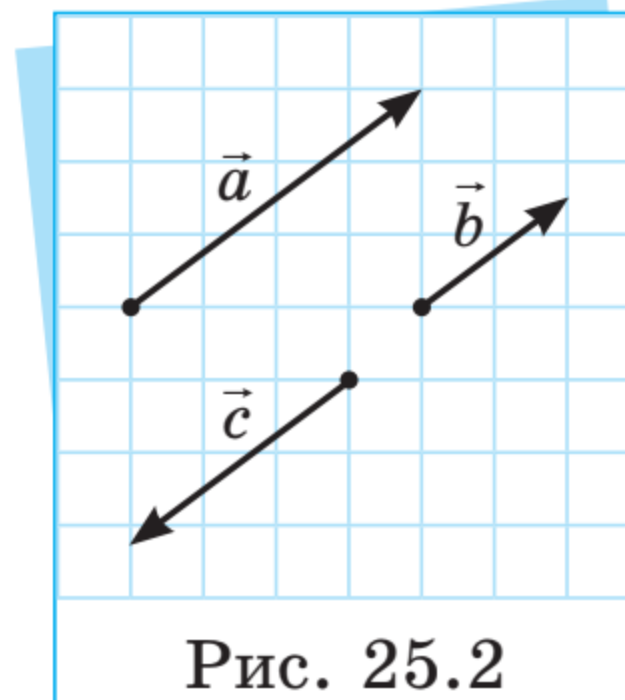
Довжину відрізка, за допомогою якого визначається вектор, називають або його **довжиною**, або **абсолютною величиною**, або **модулем**. Довжину вектора $\vec{a}$ позначають $|\vec{a}|$.

Зауважимо, що модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ рівні, тобто $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$, оскільки ці два вектори визначаються за допомогою того самого відрізка. Однак очевидно, що ці два вектори не можна вважати рівними, бо в них різні початкові та кінцеві точки. Для того щоб дати означення рівних векторів, потрібно ввести ще одне допоміжне означення.



Два вектори називають **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то це записують так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Наприклад, на рис. 25.2 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$ і $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Зверніть увагу на те, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та $\vec{a}$ і $\vec{c}$ лежать на паралельних прямих, а вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — на одній прямій.



Також звернімо увагу на те, що колінеарність векторів буває двох видів. Якщо колінеарні вектори *лежать на паралельних прямих* і їхні кінці лежать в одній півплощині відносно прямої, проведеної через їхні початки, то такі вектори називають **співнапрямленими** або **однаково напрямленими**. На рис. 25.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — співнапрямлені. Символічно це записують так: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.

Якщо ж колінеарні вектори *лежать на паралельних прямих* і їхні кінці лежать у різних півплощинах відносно прямої, проведеної через їхні початки, то такі вектори називають **різнонапрямленими** або **протилежно напрямленими**. На рис. 25.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ — різнонапрямлені. Символічно це записують так: $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{c}$.



На рис. 25.2 колінеарні вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ належать одній прямій і є протилежно напрямленими.

Визначення видів колінеарності для векторів, що належать одній прямій:
rnk.com.ua/109656





Тепер можна дати означення рівних і протилежних векторів.



Два вектори називають **рівними**, якщо вони мають однакові довжини і є співнапрямленими. Два вектори називають **протилежними**, якщо вони мають однакові довжини і є різнонапрямленими.

Наприклад, на рис. 25.3 вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ — рівні, а вектори $\vec{x}$ і $\vec{w}$ — протилежні. Це записують так: $\vec{x} = \vec{y}$, $\vec{x} = -\vec{w}$. До речі, для будь-якого вектора $\overrightarrow{AB}$ вектор $\overrightarrow{BA}$ є йому протилежним, тобто $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

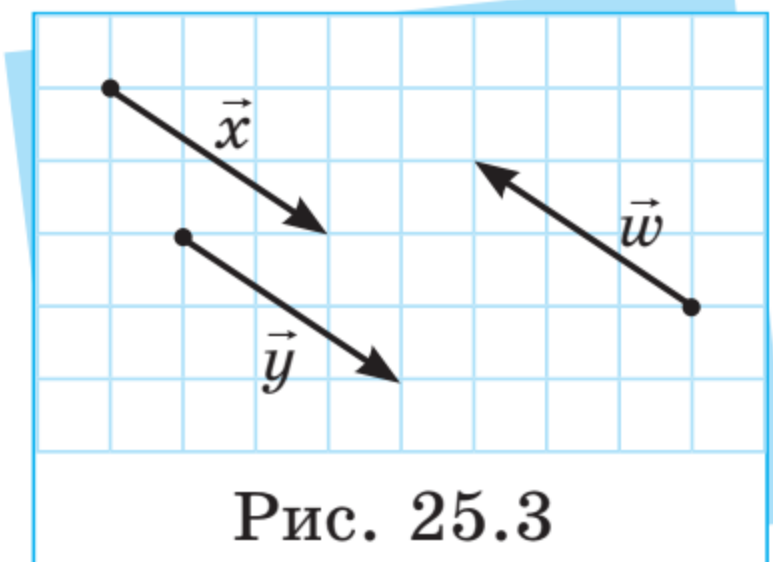


Рис. 25.3



Корисною у застосуваннях є така властивість векторів.

Властивість відкладання векторів.



Яким би не був вектор $\vec{a}$, його завжди можна єдиним чином відкласти від будь-якої точки площини. Іншими словами, для будь-якого вектора $\vec{a}$ і для будь-якої точки M площини існує єдина точка K , що $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$.

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ — заданий вектор, а M — задана точка на площині (рис. 25.4). Нехай точка M не належить прямій AB . Проведемо через точку M пряму $l \parallel AB$. Проведемо пряму AM і відкладемо на прямій l від точки M відрізок $MK = AB = |\vec{a}|$ так, щоб точки K і B лежали в одній півплощині відносно прямої AM . За означенням $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB}$, що й вимагалось довести.

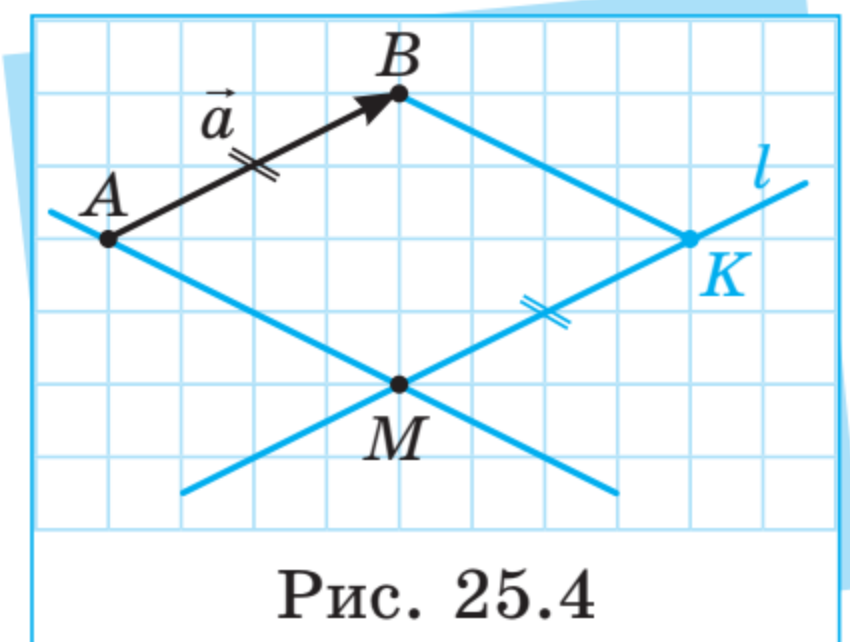


Рис. 25.4

Єдиність точки K випливає з того, що через дану точку до даної прямої можна провести єдину пряму, паралельну даній (аксіома

паралельних), а також із того, що на даному промені від його початкової точки можна відкласти єдиний відрізок даної довжини (аксіома відкладання відрізків).

Випадок, коли точка M належить прямій AB , розгляньте самостійно.

Зауважимо також, що чотирикутник $ABKM$ — паралелограм, оскільки в нього дві протилежні сторони паралельні й рівні.

Дії над векторами



Над векторами можна виконувати дії, як і над числами.

Правило трикутника додавання двох векторів.

Сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ називають вектор $\overrightarrow{AC}$, тобто $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 25.5).

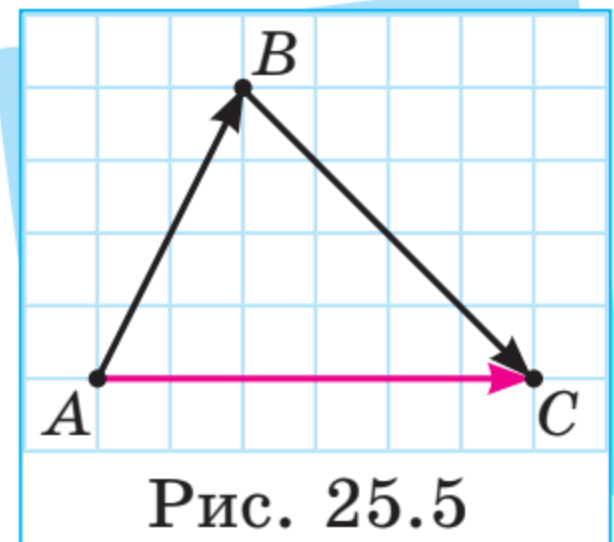


Рис. 25.5

Це означення природно впливає з фізичного тлумачення векторів як переміщення з однієї точки в іншу. Наприклад, Петрик під час своєї подорожі перемістився з точки L (Львів) до точки D (Дрогобич), а потім звідти до точки F (Івано-Франківськ). У підсумку він перемістився з точки L у точку F , тобто $\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{LF}$.



Вектори можна додавати й іншими способами.

Правило паралелограма додавання двох векторів.

Сумою двох неколінеарних векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ є вектор $\overrightarrow{OC}$, який є діагоналлю паралелограма $OACB$, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ як на суміжних сторонах: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 25.6).

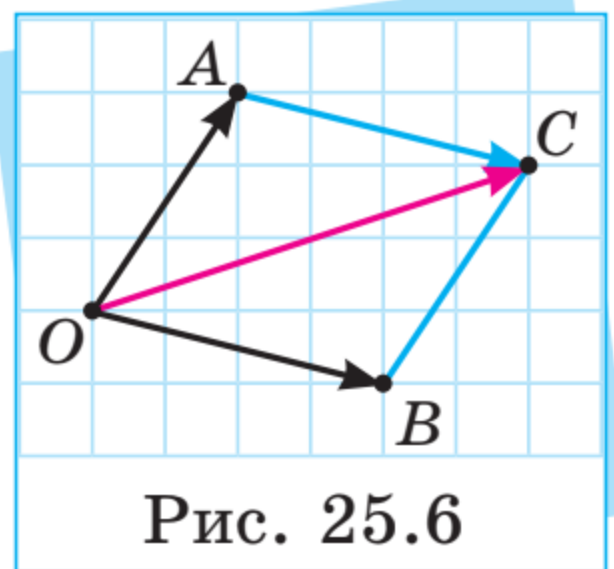


Рис. 25.6

Справді, оскільки $OACB$ — паралелограм, то $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$. За правилом трикутника $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$, а отже, дійсно, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Цим способом зручно додавати неколінеарні вектори, які мають спільний початок. Саме таким способом у фізиці визначають напрямки сили, що є рівнодієюною двох сил, прикладених до однієї точки.



Якщо два вектори не розташовані один за одним і не мають спільного початку, то завдяки властивості відкладання їх завжди можна розташувати на площині одним із цих двох способів. Наприклад, додамо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ (рис. 25.7). Для цього побудуємо вектор $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CD}$. За правилом трикутника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK}$, а отже, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AK}$.

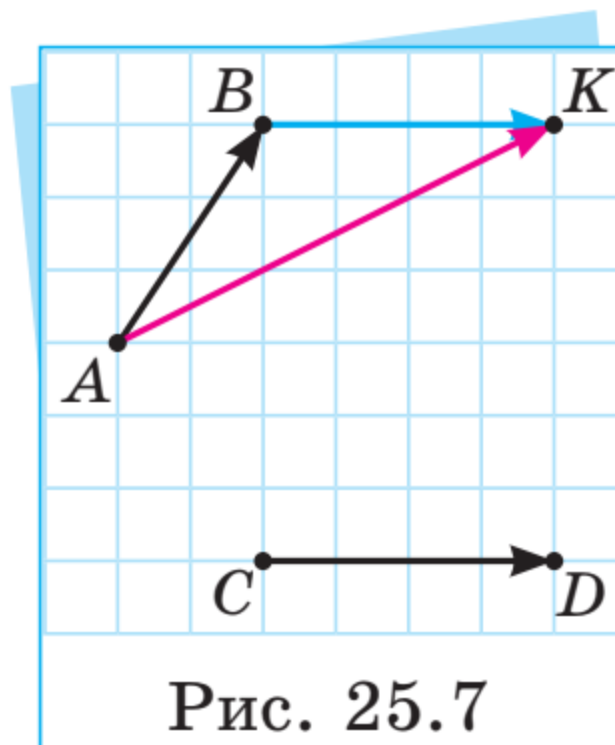


Рис. 25.7

Якщо відкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ не від точки B , а від точки A , скориставшись потім правилом паралелограма, то як суму векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ отримаємо той самий вектор $\overrightarrow{AK}$. *Переконайтеся в цьому самотійно.*

Підсумовуючи, *правило додавання векторів* можна сформулювати так.

Щоб додати два вектори, можна:

- відкласти другий вектор від кінця першого і сполучити початок першого вектора з кінцем другого;
- відкласти вектори від однієї точки, побудувати на цих векторах паралелограм як на сторонах, а потім сполучити цю точку з протилежною вершиною побудованого паралелограма.



Додавання кількох векторів можна виконувати за правилом, що узагальнює правило трикутника.

Правило ламаної додавання більш ніж двох векторів.



Сумою векторів $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ є вектор $\overrightarrow{A_1A_n}$, тобто $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ (див. рис. 25.8).

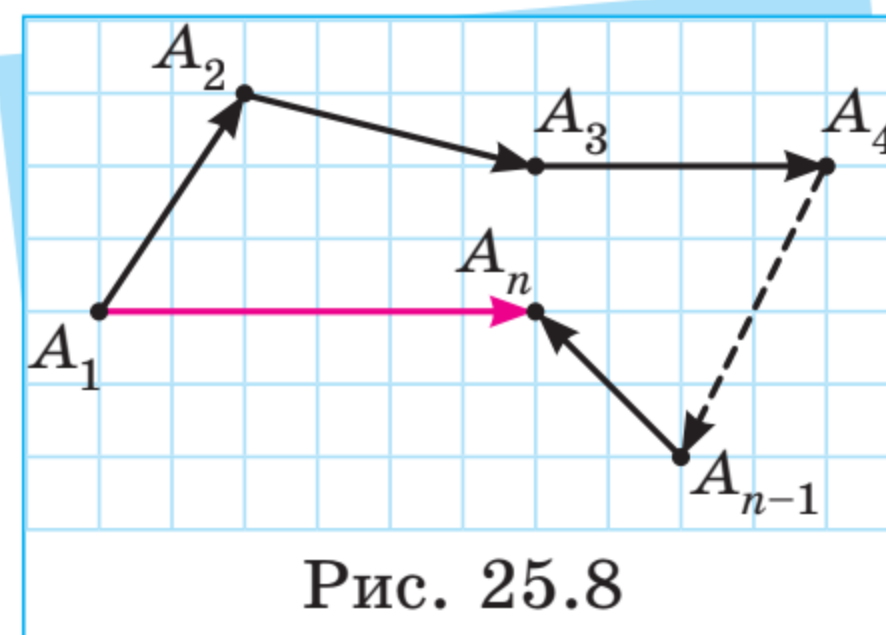


Рис. 25.8

Справді, зі Львова до Івано-Франківська Петрик міг подорожувати через Дрогобич (точка D), Трускавець (точка T), Стрий (точка S) і Калуш (точка K). Тоді правильною буде векторна рівність $\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SK} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{LF}$.



Іноді трапляється, що в правилі ламаної початок ламаної збігається з її кінцем. Наприклад, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}$. У вектора $\overrightarrow{AA}$ початкова точка збіглася з кінцевою. Такий вектор називають **нульовим вектором**. Його записують так: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Природно вважати, що **довжина нульового вектора дорівнює нулю**, тобто $|\vec{0}| = 0$. Також вважають, що будь-які два нульові вектори рівні.



Вектори можна також і віднімати. Для чисел зрозуміло, що $5 - 3 = 2$, бо $3 + 2 = 5$. Тобто різницею двох чисел a і b вважають таке третє число $c = a - b$, для якого $b + c = a$. Аналогічне правило використовують і для означення різниці двох векторів.



Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, для якого $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Щоб відняти два вектори зручно використовувати таке правило.

**Правило віднімання двох векторів.**

Різницею двох векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ є вектор $\overrightarrow{BA}$, тобто $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Справді, за правилом трикутника $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$, а отже, за означенням $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.



Зрозуміло, що у випадку коли вектори не мають спільного початку, перед виконанням дії віднімання цих векторів їх потрібно відкласти від однієї точки.

Наприклад, знайдемо різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ (див. рис. 25.9). Для цього побудуємо вектор $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD}$. За правилом віднімання векторів $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, а отже, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB}$.

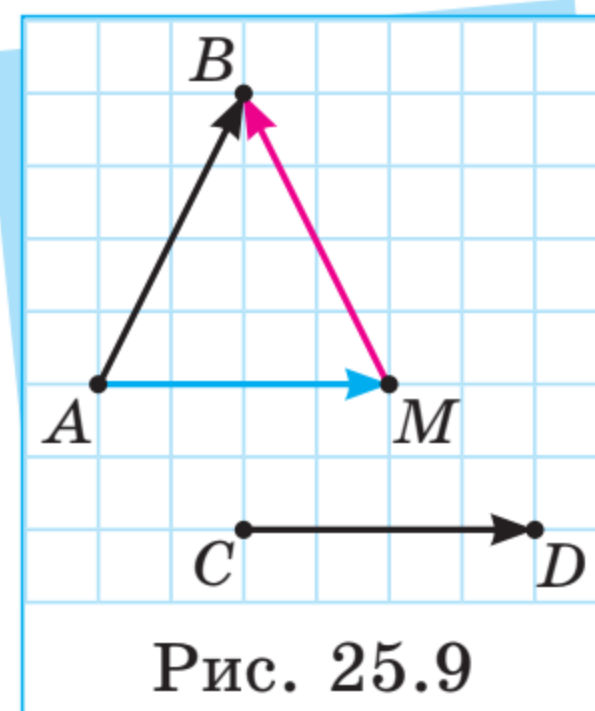


Рис. 25.9

Ураховуючи наведені міркування, *правило віднімання векторів* іноді формують у такому вигляді: **щоб відняти два вектори, потрібно відкласти їх від однієї точки, потім сполучити кінці відкладених векторів і направити стрілку до вектора, від якого віднімають.**



Додавання й віднімання колінеарних векторів має свої особливості.

Ознайомтеся з ними:
rnk.com.ua/109657



Вектори можна множити на число.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називають вектор $\vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda = \lambda \cdot \vec{a}$, для якого:

- 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) якщо $\lambda > 0$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — співнаправлені;
якщо $\lambda < 0$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — різнонаправлені;
якщо $\lambda = 0$, вектор $\vec{b}$ є нульовим, тобто $\vec{b} = \vec{0}$.



Щоб побудувати вектор, який є добутком вектора на число, відмінне від нуля, зручно використовувати таке правило.

Правило множення вектора на число, відмінне від нуля.

Щоб помножити вектор $\overrightarrow{AB}$ на додатне число λ , слід на промені AB відкласти від точки A відрізок $AC = \lambda \cdot AB$. Тоді $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ (рис. 25.10, а).

Щоб помножити вектор $\overrightarrow{AB}$ на від'ємне число λ , слід на промені, доповняльному до променя AB , відкласти від точки A відрізок $AD = \lambda \cdot AB$. Тоді $\overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ (рис. 25.10, б).

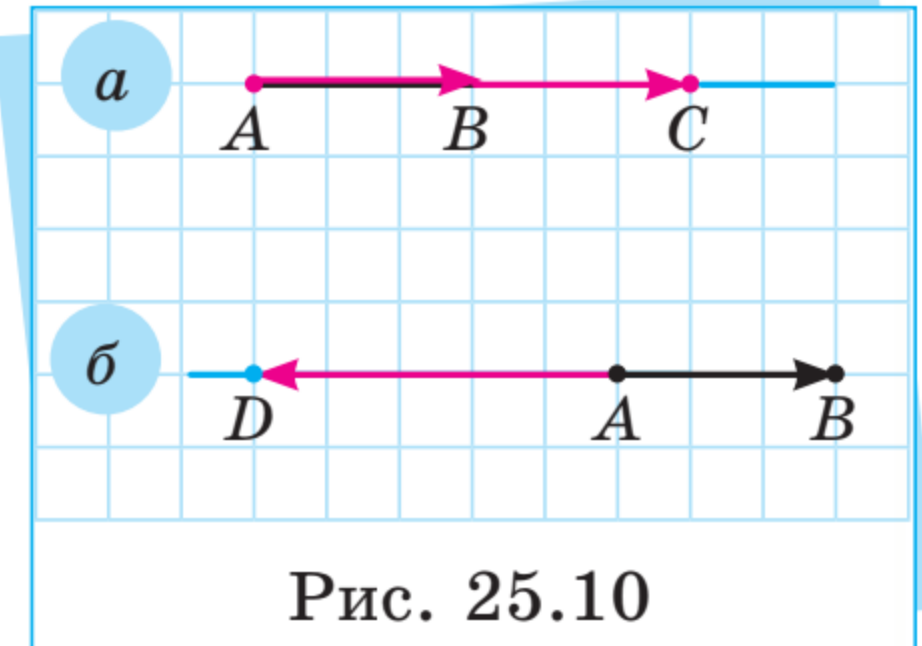


Рис. 25.10



Дії над векторами можна комбінувати. Нехай задано (зображено) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Дізнатися, як побудувати вектори

$$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \text{ і } \vec{d} = \frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}, \text{ можна тут:}$$

rnk.com.ua/109658



Звернімо увагу на те, що вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ колінеарний до ненульового вектора $\vec{a}$ за будь-якого $\lambda \neq 0$. Тому очевидно, що **3 двох колінеарних векторів один завжди можна виразити через інший**. Тобто, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то існує єдине число λ , для якого $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$. Зрозуміло,

що $|\lambda| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, а знак визначається залежно від виду колінеарності

векторів: якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — співнаправлені, то $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, а якщо $\vec{a}$

і $\vec{b}$ — різнонаправлені, то $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Приклад

Нехай у паралелограмі $ABCD$ проведено діагоналі AC і BD , які перетинаються в точці O (рис. 25.11). Виразимо вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

Одразу зауважимо, що за правилом паралелограма $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{CO} \parallel \overrightarrow{AC}$. Тому $\overrightarrow{CO} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$. Крім того, за властивістю діагоналей паралелограма O — середина AC , тобто $CO = \frac{1}{2} AC$. Оскільки вектори $\overrightarrow{CO}$ і $\overrightarrow{AC}$ — різнонаправлені, то $\lambda = -\frac{|\overrightarrow{CO}|}{|\overrightarrow{AC}|} = -\frac{1}{2}$. Отже,

$$\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC}, \text{ звідки } \overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

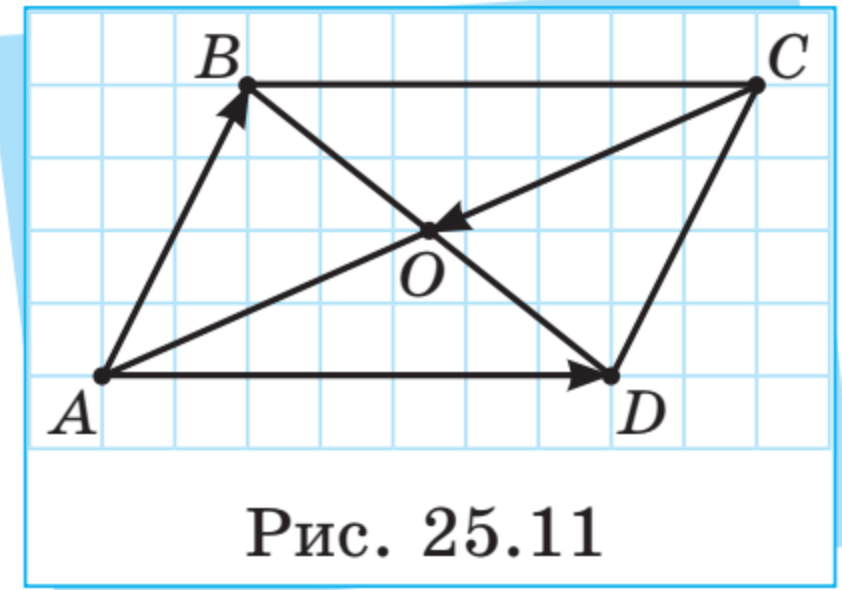


Рис. 25.11



В останньому прикладі природно було б розкрити дужки, тобто вважати, що $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$. Це справді можна зробити, оскільки властивості наведених вище дій над векторами аналогічні до властивостей чисел. Сформулюємо їх.

Властивості дій над векторами.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-яких чисел λ , μ виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переставна властивість додавання векторів);
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сполучна властивість додавання векторів);
- 3) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ (сполучна властивість множення вектора на число);
- 4) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ (перша розподільна властивість);
- 5) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$ (друга розподільна властивість).

Обґрунтування властивостей
дій над векторами:
rnk.com.ua/109659



Перевірте себе!

1. Дайте означення: а) вектора; б) довжини вектора; в) колінеарних векторів; г) співнапрямлених векторів; д) різнонапрямлених векторів.
2. Сформулюйте властивість відкладання векторів.
3. Наведіть усі відомі вам способи додавання двох або більше векторів.
4. Яким чином можна знайти різницю двох даних векторів?
5. Яким чином можна знайти добуток вектора на число?
6. Сформулюйте властивості дій над векторами.



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Назвіть початкову точку вектора.
а) $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AK}$;
б) $\overrightarrow{BM}$; г) $\overrightarrow{KA}$.
2. Назвіть кінцеву точку вектора.
а) $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AK}$;
б) $\overrightarrow{BM}$; г) $\overrightarrow{KA}$.
3. На якому рисунку зображено вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1)?

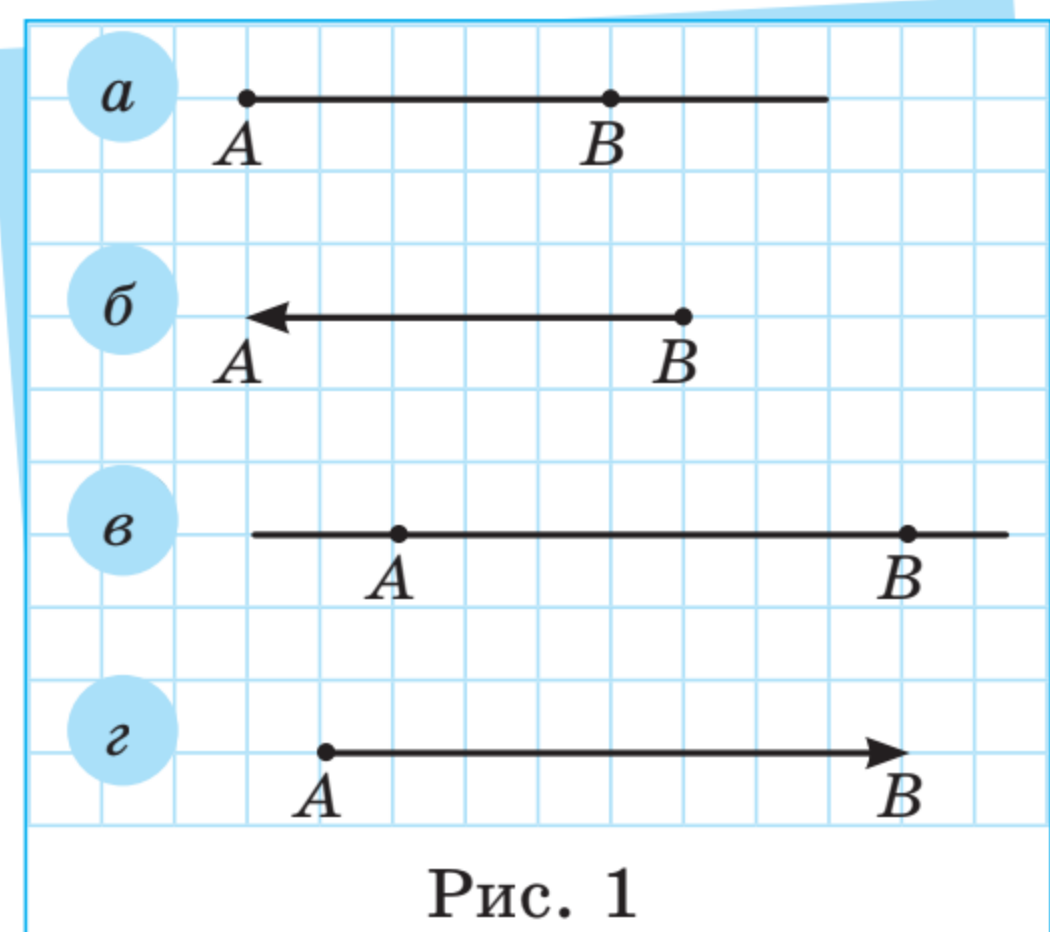
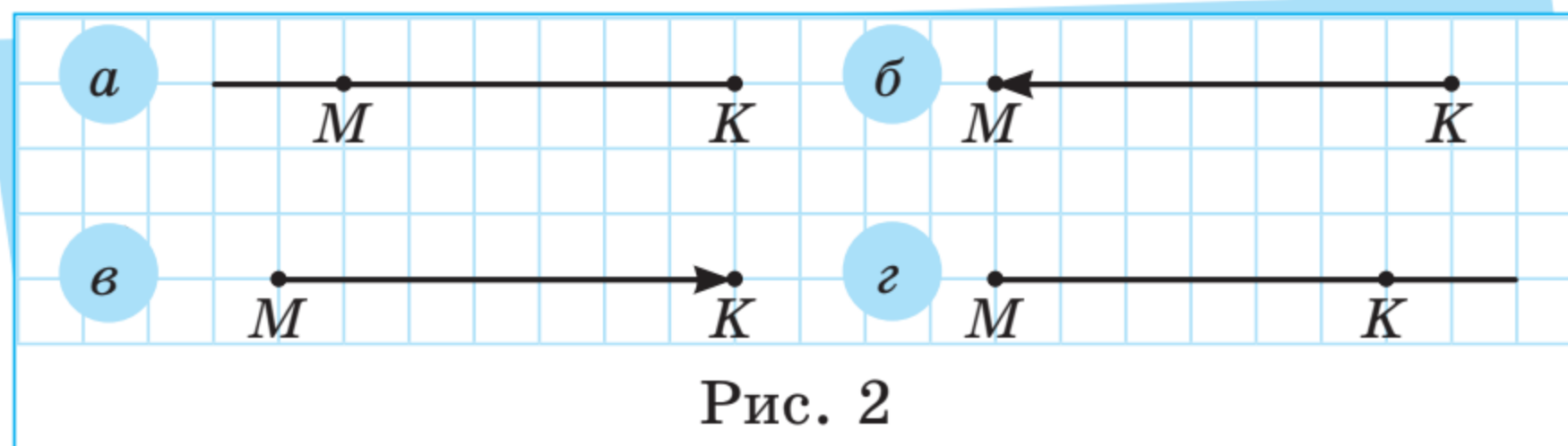


Рис. 1

4. На якому рисунку зображено вектор $\overrightarrow{MK}$ (рис. 2)?



5. Яке з тверджень є правильним?

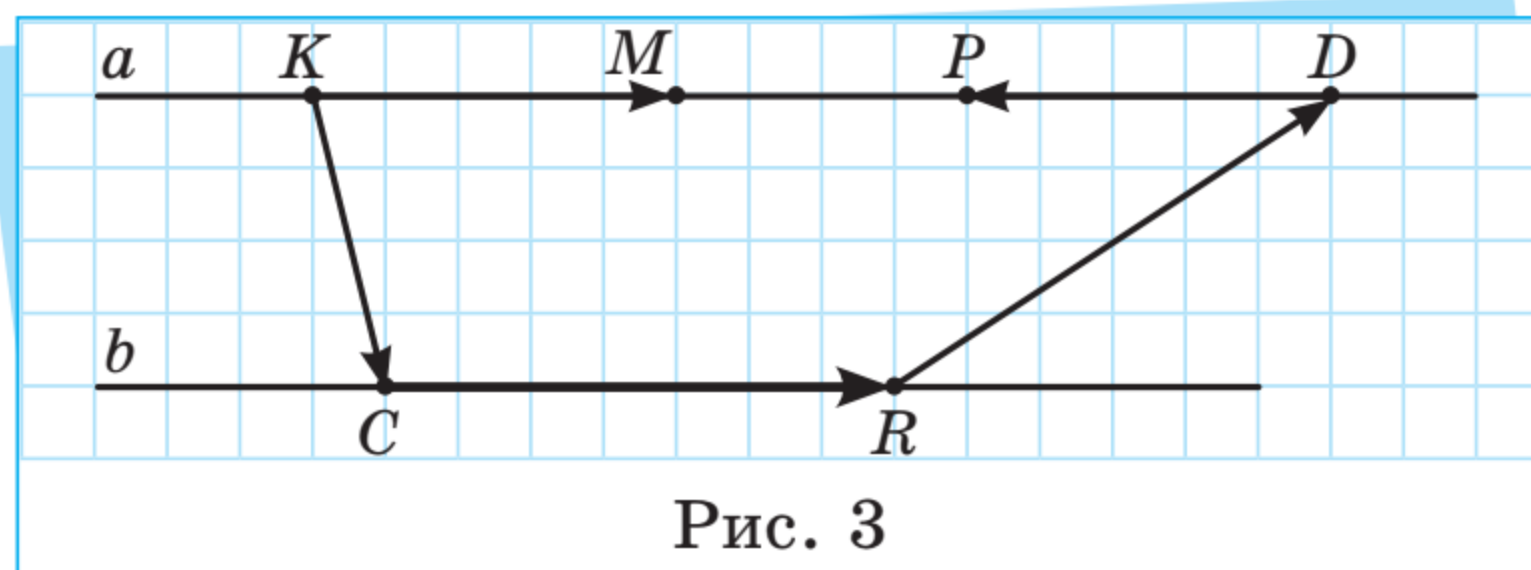
- а) Відрізок, для якого вказано, яка з точок є початковою, а яка — кінцевою, називають напрямленим відрізком.
 б) Відрізок, для якого вказано, яка з точок є початковою, а яка — кінцевою, називають вектором.

6. Яке з тверджень є правильним?

- а) Довжину відрізка, за допомогою якого визначається вектор, називають довжиною вектора.
 б) Довжину відрізка, за допомогою якого визначається вектор, називають модулем вектора.

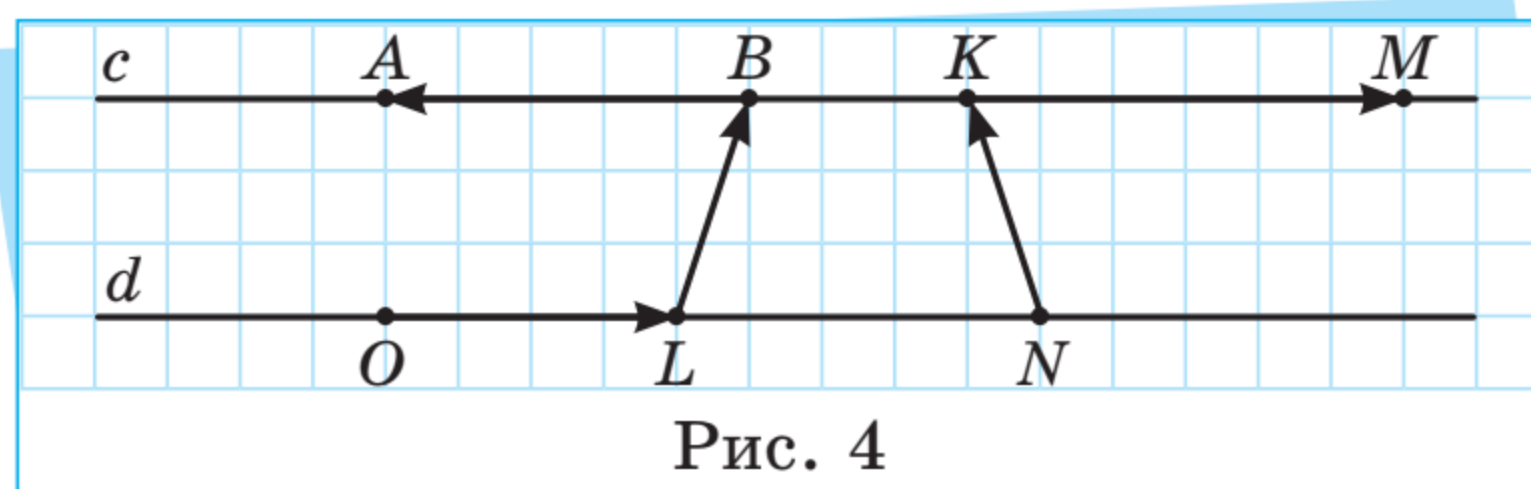
7. Прямі a і b паралельні (рис. 3). Чи є колінеарними вектори?

- а) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{DP}$; б) $\overrightarrow{CR}$ і $\overrightarrow{DP}$; в) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KS}$; г) $\overrightarrow{CR}$ і $\overrightarrow{RD}$.



8. Прямі c і d паралельні (рис. 4). Чи є колінеарними вектори?

- а) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{OL}$; в) $\overrightarrow{OL}$ і $\overrightarrow{LB}$; г) $\overrightarrow{NK}$ і $\overrightarrow{KM}$.



9. Прямі c і d паралельні (див. рис. 4). Чи є співнапрямленими вектори?

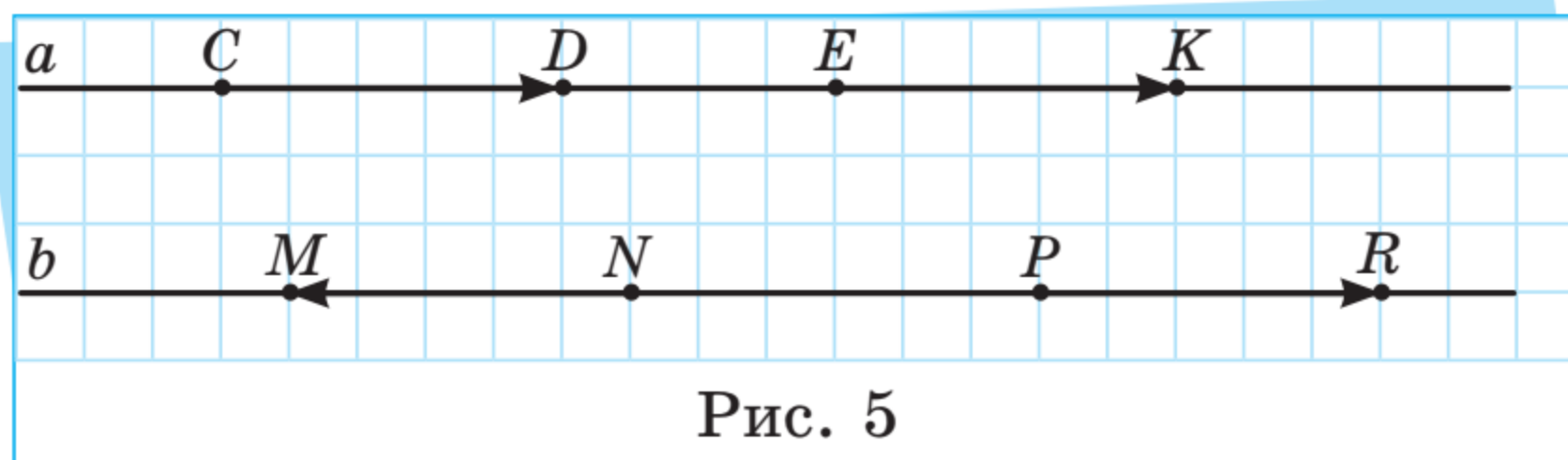
а) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{OL}$; в) $\overrightarrow{OL}$ і $\overrightarrow{LB}$; г) $\overrightarrow{NK}$ і $\overrightarrow{KM}$.

10. Прямі a і b паралельні (див. рис. 3). Чи є різнонапрямленими вектори?

а) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{DP}$; б) $\overrightarrow{CR}$ і $\overrightarrow{DP}$; в) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KS}$; г) $\overrightarrow{CR}$ і $\overrightarrow{RD}$.

11. Прямі a і b паралельні (рис. 5). Усі вектори мають однакову довжину. Чи є рівними вектори?

а) $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EK}$; б) $\overrightarrow{EK}$ і $\overrightarrow{PR}$; в) $\overrightarrow{PR}$ і $\overrightarrow{NM}$; г) $\overrightarrow{NM}$ і $\overrightarrow{EK}$.

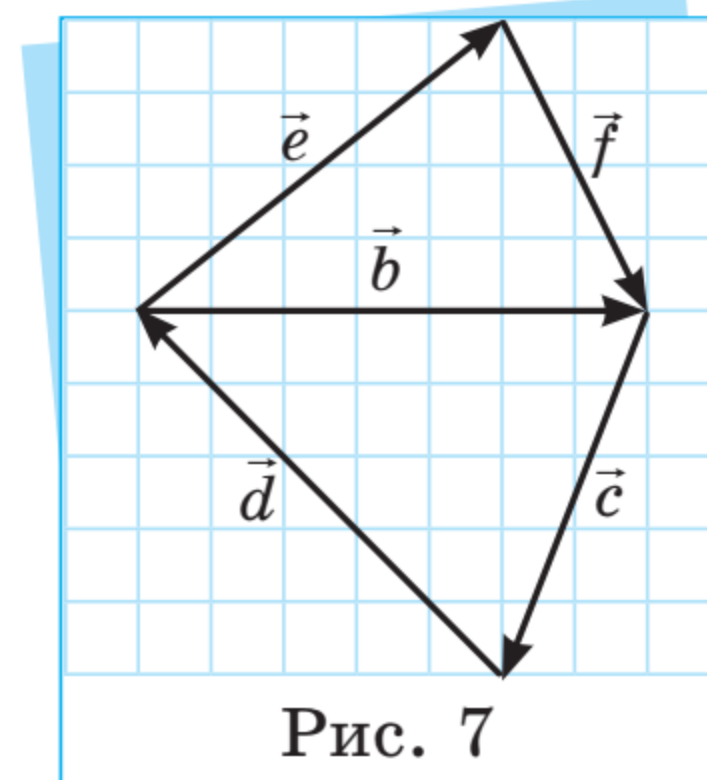
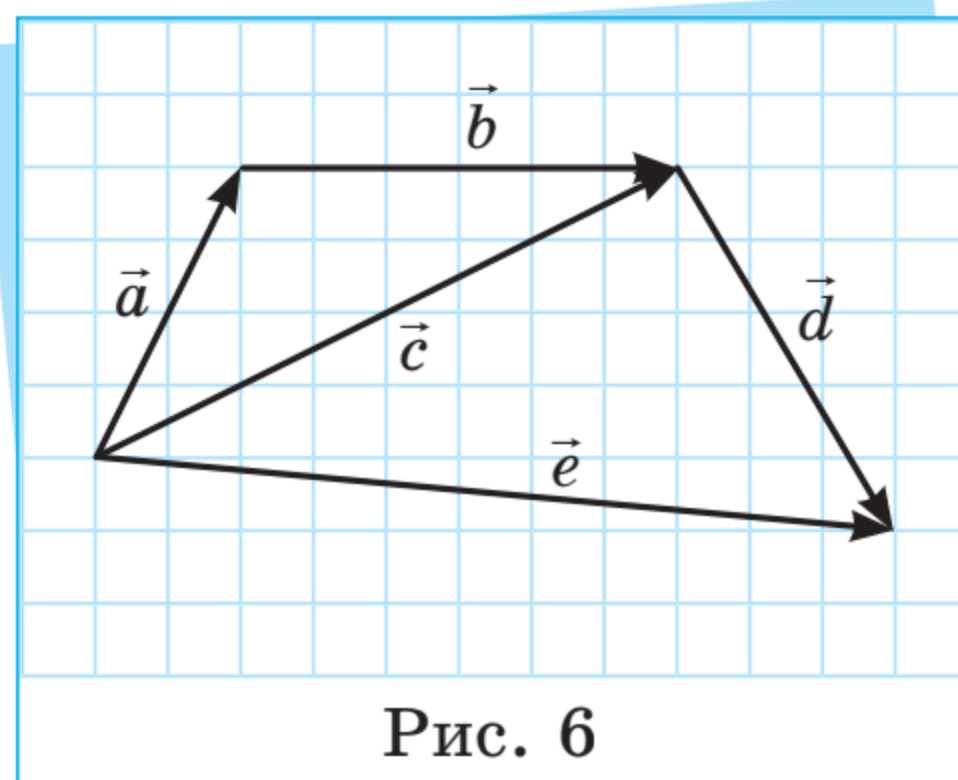


12. Прямі a і b паралельні (див. рис. 5). Усі вектори мають однакову довжину. Чи є протилежними вектори?

а) $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EK}$; б) $\overrightarrow{EK}$ і $\overrightarrow{PR}$; в) $\overrightarrow{PR}$ і $\overrightarrow{NM}$; г) $\overrightarrow{NM}$ і $\overrightarrow{EK}$.

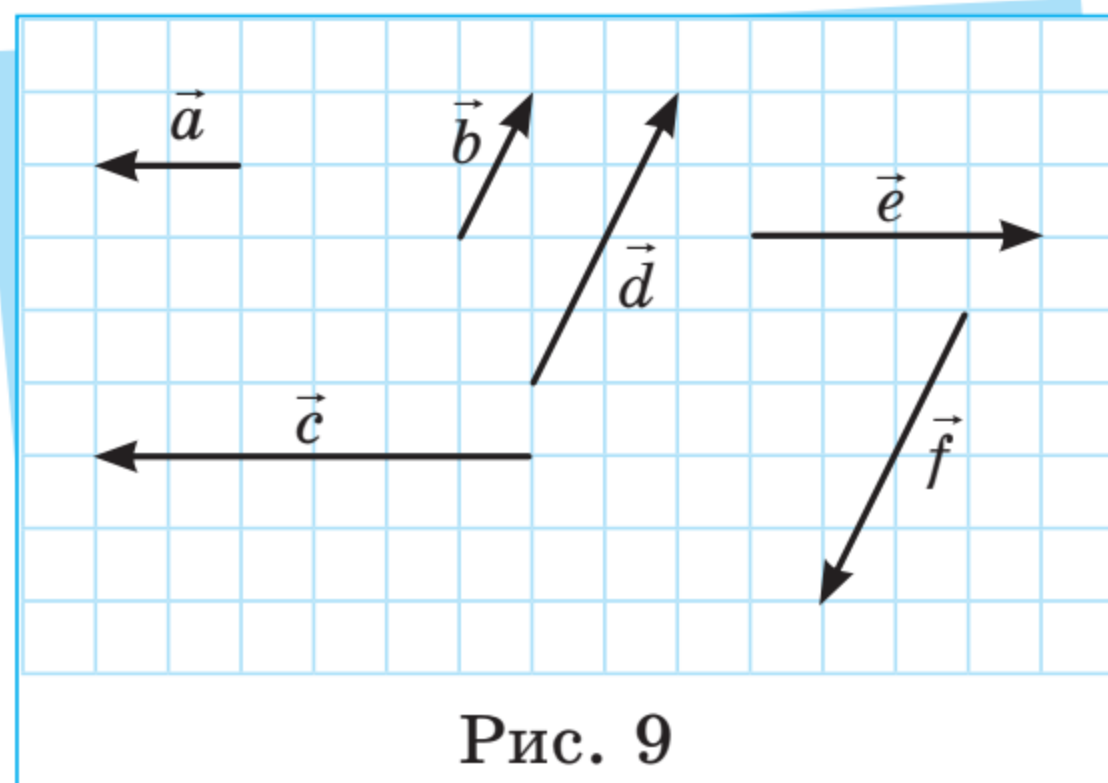
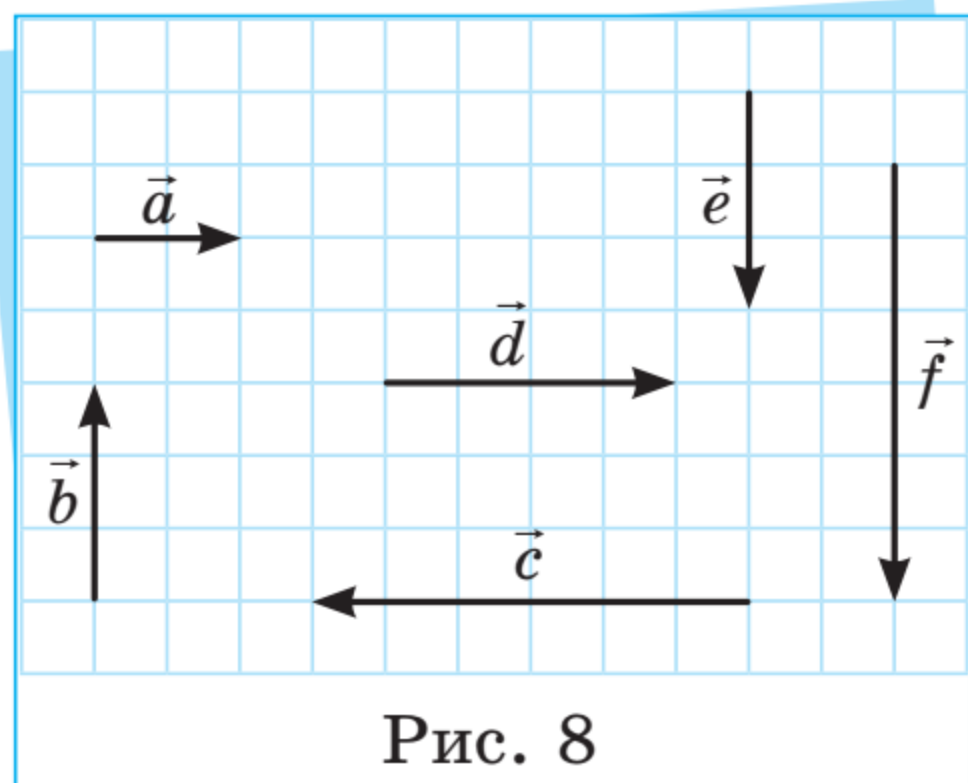
13. Який вектор на рис. 6 є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

14. Який вектор на рис. 7 є сумою векторів $\vec{e}$ і $\vec{f}$?



15. На рис. 8 зображено 6 векторів. Які з них дорівнюють векторам: $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-2\vec{b}$?

16. На рис. 9 зображено 6 векторів. Які з них дорівнюють векторам: $3\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $-2\vec{b}$, $2\vec{b}$?



Середній рівень

17. Яке твердження є правильним?

- Якщо колінеарні вектори лежать на паралельних прямих і їхні кінці лежать в одній півплощині відносно прямої, проведеної через їхні початки, то такі вектори називають співнаправленими.
- Якщо колінеарні вектори лежать на паралельних прямих і їхні кінці лежать в різних півплощинах відносно прямої, проведеної через їхні початки, то такі вектори називають різнонаправленими.

18. Яке твердження є правильним?

- Якщо колінеарні вектори лежать на паралельних прямих і їхні кінці лежать в одній півплощині відносно прямої, проведеної через їхні початки, то такі вектори називають однаково направленими.
- Якщо колінеарні вектори лежать на паралельних прямих і їхні кінці лежать у різних півплощинах відносно прямої, проведеної через їхні початки, то такі вектори називають протилежно направленими.

19. Зобразіть у зошиті вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 10). Побудуйте вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

20. Зобразіть у зошиті вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 11). Побудуйте вектор $\vec{c} + \vec{d}$.

21. Зобразіть у зошиті вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (див. рис. 10). Побудуйте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

22. Зобразіть у зошиті вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (див. рис. 10). Побудуйте вектор $\vec{b} - \vec{a}$.

23. Зобразіть у зошиті вектор $\vec{a}$ (рис. 12). Побудуйте вектори $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-2\vec{a}$.

24. Зобразіть у зошиті вектор $\vec{b}$ (рис. 13). Побудуйте вектори $2\vec{b}$, $3\vec{b}$, $-\vec{b}$, $-2\vec{b}$.

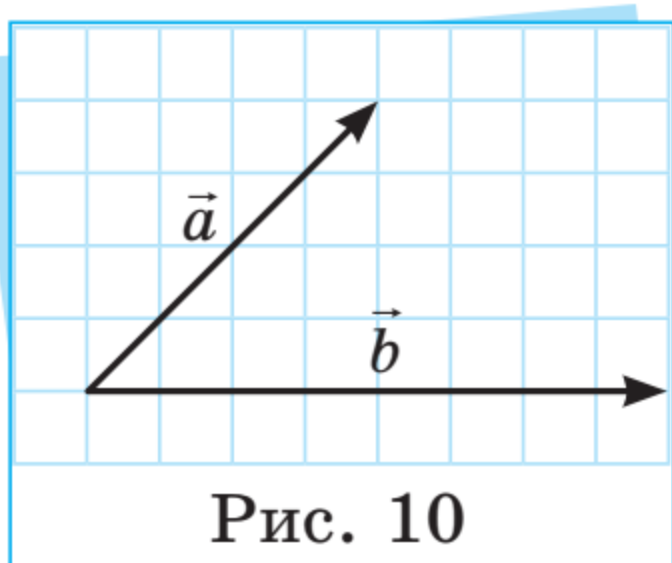


Рис. 10

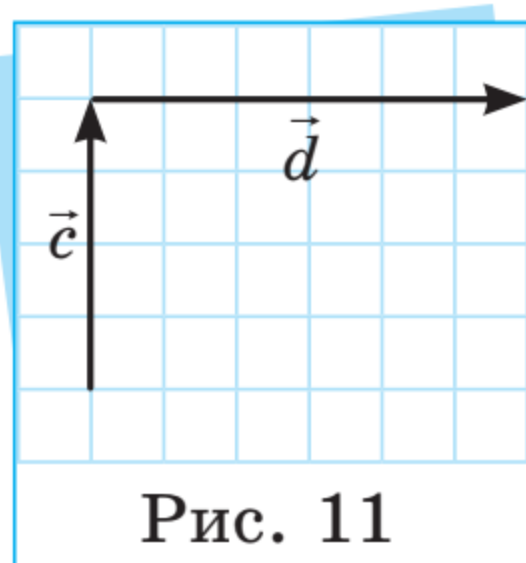


Рис. 11

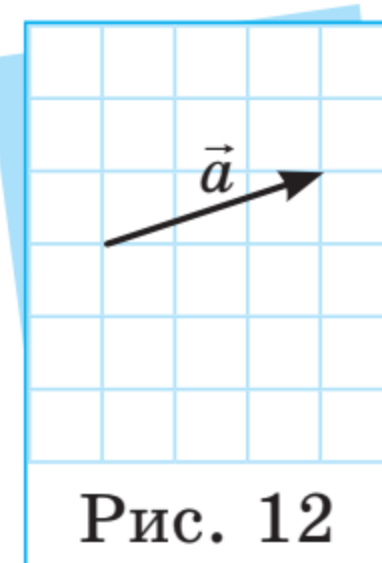


Рис. 12

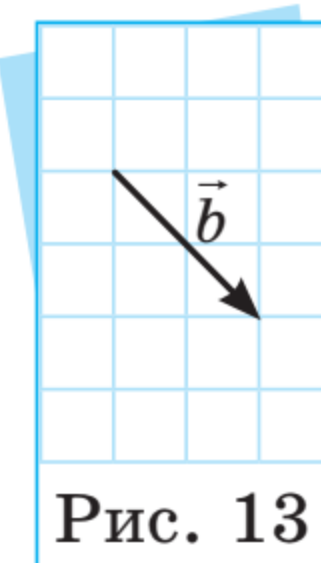


Рис. 13

25. Задано квадрат $ABCD$.

а) Побудуйте вектор, який дорівнює вектору $\overrightarrow{AD}$ і має початок у точці B . Назвіть цей вектор.

б) Який вектор буде протилежним до побудованого?

26. Задано квадрат $ABCD$.

а) Побудуйте вектор, який дорівнює вектору $\overrightarrow{BA}$ і має початок у точці C . Назвіть цей вектор.

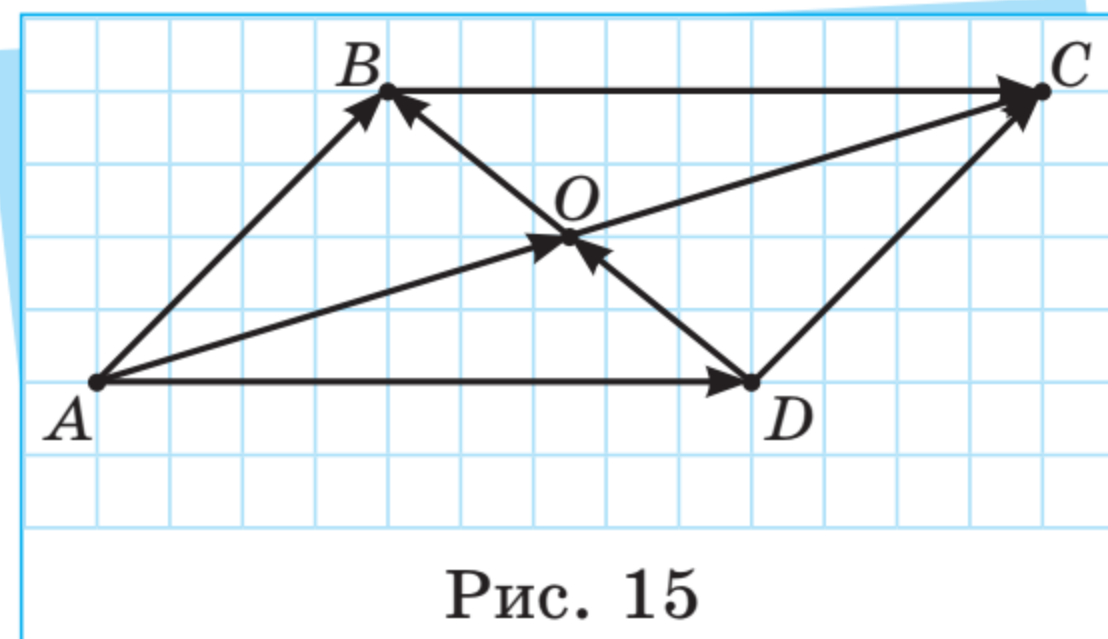
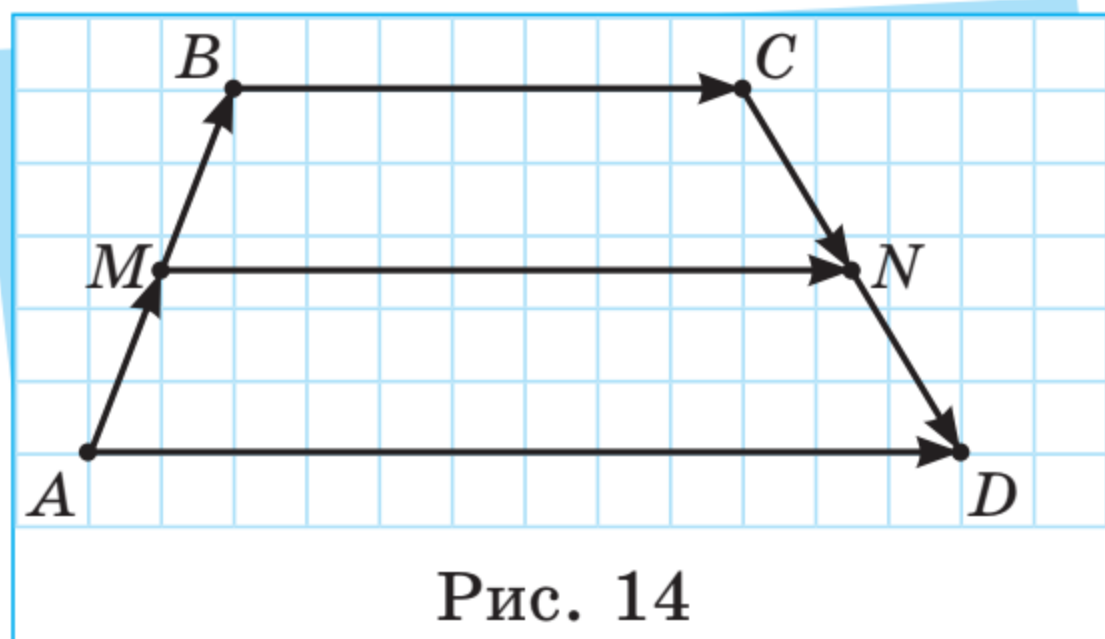
б) Який вектор буде протилежним до побудованого?

27. MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 14).

- а) Назвіть усі вектори, колінеарні вектору $\overrightarrow{AD}$.
 б) Назвіть усі вектори, колінеарні вектору $\overrightarrow{AM}$.

28. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 15).

- а) Назвіть усі вектори, колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$.
 б) Назвіть усі вектори, колінеарні вектору $\overrightarrow{AO}$.



29. Накресліть у зошиті вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ так, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарними, причому $|\vec{a}| = 1$ см, $|\vec{b}| = 2,5$ см, а вектор $\vec{c}$ був протилежно напрямленим до вектора $\vec{a}$ і $|\vec{c}| = 3$ см.

30. Накресліть у зошиті вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{k}$ так, щоб вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ були неколінеарними, а вектори $\vec{m}$ і $\vec{k}$ — колінеарними, причому $|\vec{m}| = 2$ см, $|\vec{n}| = 3$ см, $|\vec{k}| = 4$ см.

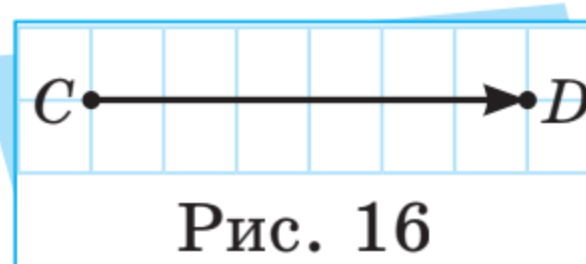


Достатній рівень

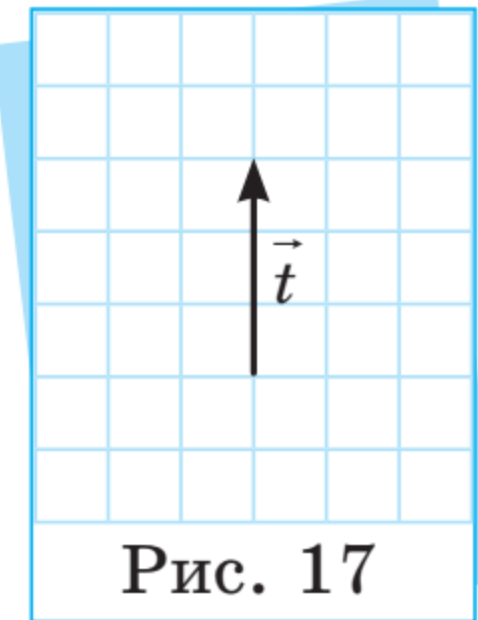
31. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Побудуйте вектор, рівний вектору $\overrightarrow{OA}$, якщо його початок розташований: а) в точці C ; б) в точці B .

32. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Побудуйте вектор, рівний вектору $\overrightarrow{OD}$, якщо його початок розташований: а) у точці B ; б) у точці C .

33. На рис. 16 зображено вектор $\overrightarrow{CD}$. Побудуйте в зошиті вектори: а) $2\overrightarrow{CD}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; в) $-\overrightarrow{CD}$.



34. На рис. 17 зображено вектор $\vec{t}$. Побудуйте в зошиті вектори: а) $3\vec{t}$; б) $-2\vec{t}$; в) $\frac{2}{3}\vec{t}$.

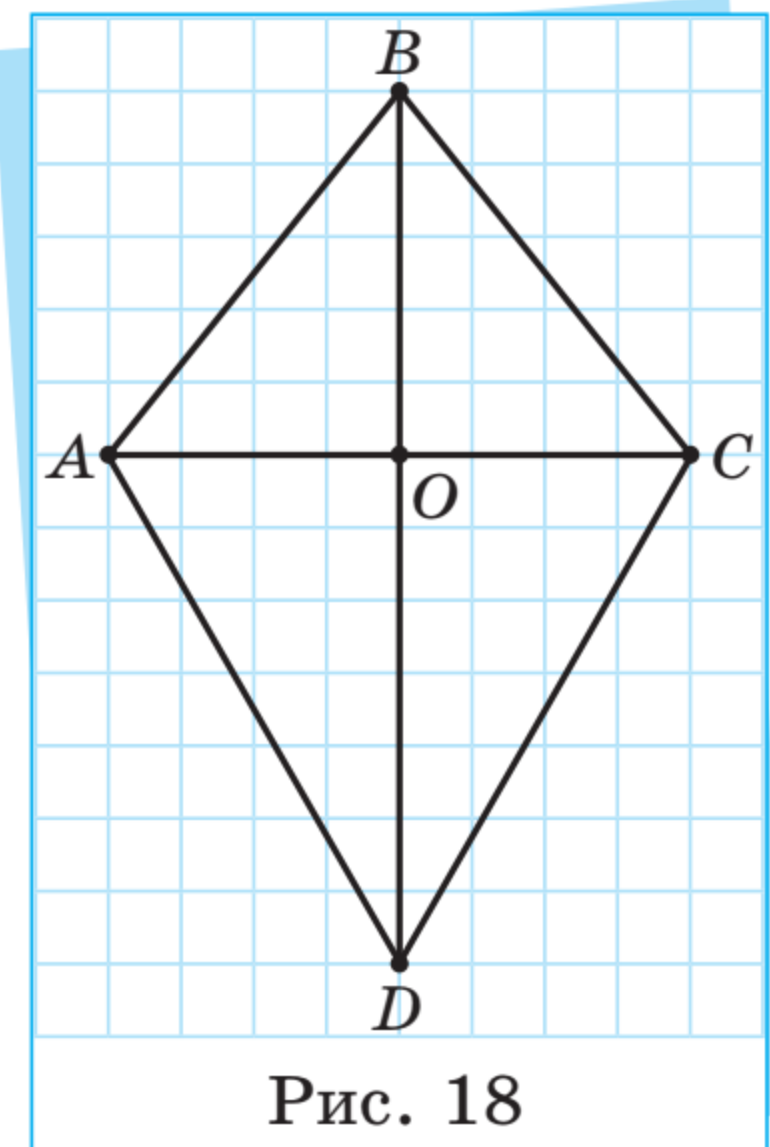


35. Зобразіть у зошиті рівнобічну трапецію $ABCD$ і побудуйте: а) вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) вектор $\vec{b} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; в) вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; г) вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

36. Зобразіть у зошиті ромб $ABCD$ і побудуйте: а) вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; б) вектор $\vec{b} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$; в) вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; г) вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

37. Діагоналі дельтоїда $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 18). Перевірте, чи є правильними твердження.

- а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA}$;
 б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$;
 в) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$;
 г) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$.

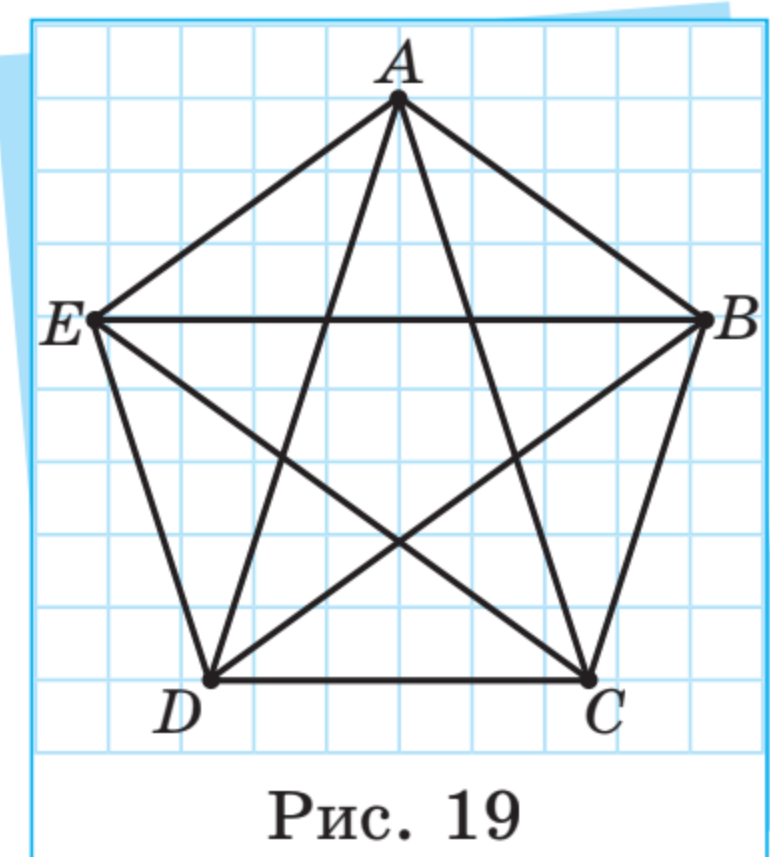


38. Діагоналі дельтоїда $ABCD$ перетинаються в точці O (див. рис. 18). Перевірте, чи є правильними твердження.

- а) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DO}$;
 б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;
 в) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DA}$;
 г) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.

39. На рис. 19 зображено п'ятикутник $ABCDE$. Користуючись рисунком, знайдіть:

- а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
 б) $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{ED}$;
 в) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$;
 г) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BE}$.



40. На рис. 20 зображено п'ятикутник $ABCDE$. Користуючись рисунком, знайдіть:

- а) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
б) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$; г) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BE}$.

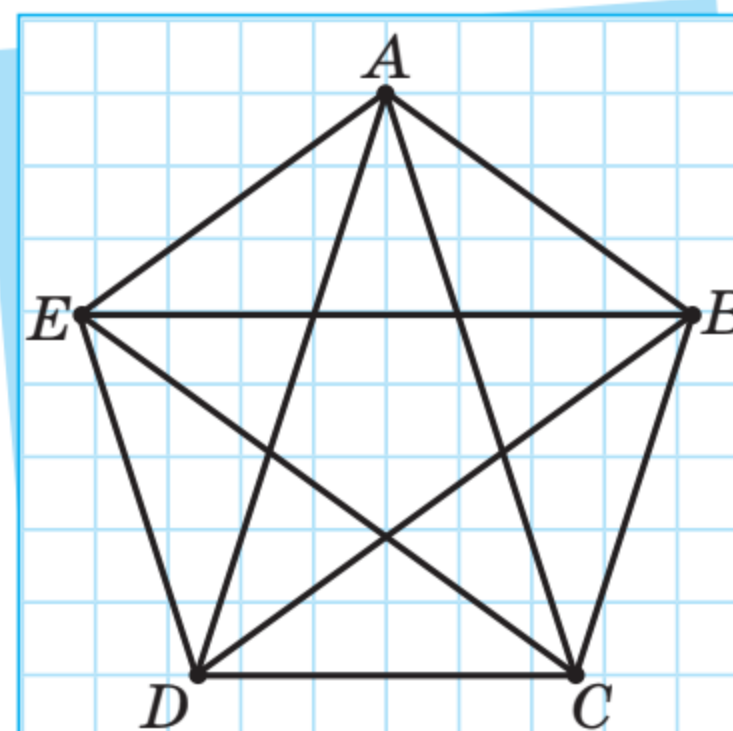


Рис. 20

41. Розвідувальний дрон піднявся у повітря з бази в точці A й пролетів спочатку 20 км на схід до об'єкта B , потім 30 км на північ до об'єкта C . Накресліть схему руху дрона в масштабі $1:1\,000\,000$. Який вектор відповідає переміщенню дрона з бази до пункту C ? На якій відстані від бази в кілометрах перебуває дрон? Відповідь округліть до цілих.

42. Автомобіль виїхав зі стоянки в точці S і проїхав по прямій 30 км на південь до об'єкта M , потім 40 км по прямій на захід до об'єкта T . Накресліть схему руху автомобілю в масштабі $1:1\,000\,000$. На якій відстані від стоянки у км перебуває автомобіль? Відповідь округліть до цілих.

43. Доведіть: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

44. Доведіть: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.



Високий рівень

45. Доведіть: а) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$; б) $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

46. Доведіть: а) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$; б) $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

47. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

48. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

49. Спростіть вираз $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$.

50. Спростіть вираз $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

51. Точки M і N — середини сторін відповідно AB і AC трикутника ABC . Виразіть через вектори $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$ вектори: а) $\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{NB}$; в) $\overrightarrow{BM}$; г) $\overrightarrow{BC}$.

52. Відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 — медіани трикутника ABC . Виразіть через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ вектори: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{B_1C_1}$.

53. Доведіть: якщо точка M — середина відрізка AB , то для довільної точки O виконується рівність $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

54. Доведіть: якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC , то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



Цікавинки від дідуся Тараса

Термін *вектор* походить від латинського слова *vector* — той, що несе, або той, що везе. Першим цей термін почав систематично вживати у своїх наукових працях ірландський математик *Вільям Ровен Гамільтон*. Найдавніше з відомих позначень вектора (риска над літерою) запропонував швейцарський математик *Жан-Робер Арган*. Нині вектори використовують у дослідженнях не лише математики, а й фізики, хіміки, біологи, інженери тощо.

У школі вектори найчастіше застосовують у фізиці. Однак, слід зауважити, що вектори у фізиці й математиці — не зовсім однакові

Сер Вільям Ровен Гамільтон (1805–1865) — ірландський вчений, один із найкращих математиків XIX ст. Зробив значний внесок у розвиток алгебри, теорії диференціальних рівнянь, фізики та астрономії.

Жан-Робер Арган (1768–1822) — швейцарський математик-аматор. Відомий як автор першого строгого доведення основної теореми алгебри й геометричної інтерпретації комплексних чисел, відомої як *діаграма Аргана*.

об'єкти. Як ви вже знаєте, для векторів у математиці притаманна *властивість відкладання*. Вона дає змогу, так би мовити, «рухати» вектори по площині, обираючи початок вектора там, де це зручно. Іншими словами, вектори в математиці є «вільними». У багатьох задачах із фізики така властивість не виконується, тобто співнаправлені вектори однакової довжини, відкладені від різних точок, вважають різними. Особливо це стосується сил, прикладених до різних точок. Таким чином, у фізиці вектори здебільшого «прив'язані», тобто характеризуються не лише абсолютною величиною та напрямком, як у математиці, а ще й точкою прикладання. Дізнайтеся більше про це у вчителя або вчительки фізики.



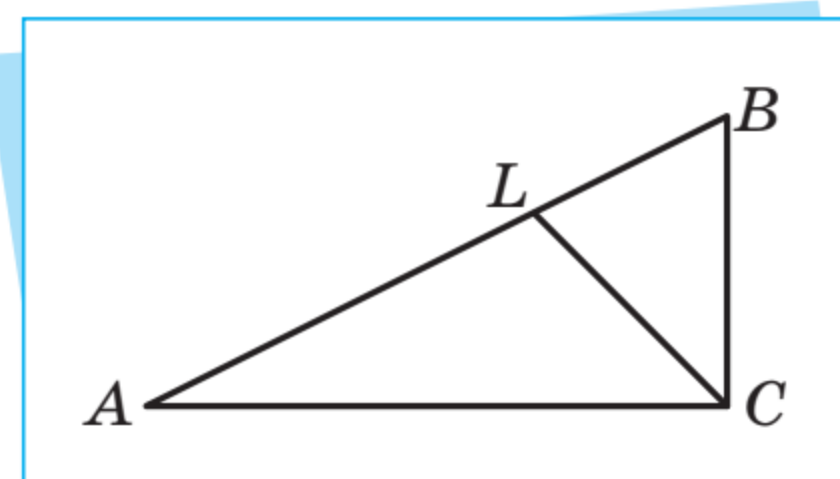
Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про використання векторів у природничих науках. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Чи доводилося вам використовувати вектори в повсякденному житті? Якщо так, то поділіться досвідом.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $(4^{-2})^{-4} \cdot (2^3)^{-5}$.
2. Спростіть вираз $\frac{2x^2 - 5x + 3}{4x^2 - 9}$ і знайдіть його значення, якщо $x = 2,5$.
3. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C проведено бісектрису CL . Відомо також, що $AL = 5,5$ см, $BL = 2,5$ см (див. рисунок). Знайдіть $\operatorname{tg} \angle A$.



4. Пряма проходить через точки $A(-2; 4)$ і $B(1; 3)$. Складіть рівняння цієї прямої, побудуйте її в ПДСК. Знайдіть координати точок перетину цієї прямої з осями координат.
5. Знайдіть закономірність і вкажіть невідоме число (завдання а) або слово (завдання б). Кількість крапок відповідає кількості букв у слові або цифр у числі.
 а) КОРОНА (КАША) (ШОПКА) б) 2193 (1927) 362756
 2345 (. . . .) 897 ВІТРЯК (. . . .) КОЛОНАДА

§ 26. Координати вектора. Дії над векторами в координатній формі



Недавно знову згадала, як ми з Іринкою та Маринкою в театр ходили. Щоб з'ясувати, що ми всі сиділи на одній прямій, причому Іринка точно посередині між мною і Маринкою, довелося багато обчислень робити. Інтуїція мені підказує, що має бути простіший спосіб.



А спробуймо використати вектори, про які ми щойно дізналися. Для того щоб ви всі в залі театру перебували на одній прямій, а Іринка (точка I) була точно посередині між тобою (точка T) і Маринкою (точка M), досить, щоб $\overline{MI} = \overline{IT}$. Але в цьому ще потрібно переконатися, знаючи координати всіх трьох точок у залі: $T(10;3)$, $M(2;7)$, $I(6;5)$. Цікаво, як це зробити?



Мабуть, потрібно знайти якусь закономірність між координатами точок, що визначають вектори $\overline{MI}$ та $\overline{IT}$. Здається, я здогадалася! Зверни увагу на те, що $6-2=10-6=4$ і $5-7=3-5=-2$. Тобто, якщо від координат кінця вектора відняти координати його початку, то отримаємо однакові числа для обох векторів. Думаю, що ці числа мають якесь особливе значення.



Пам'ятаєш, у формулі знаходження відстані між точками $KM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ми під коренем перед піднесенням до квадрата також віднімали від координат кінця координати початку. Мені здається, що це не випадково. Але думаю, що вчителі знають більше, запитаймо в них.



Так, ваші міркування цілком слушні. Розглянемо у ПДСК точки $O(0;0)$, $A(1;0)$ і $B(0;1)$. Позначимо $\overline{OA} = \vec{i}$, $\overline{OB} = \vec{j}$ (рис. 26.1). Упорядкований набір векторів $(\vec{i}, \vec{j})$ називають **базисом**, який відповідає даній ПДСК.

Розглянемо також у цій самій ПДСК довільну точку $M(x_0; y_0)$, яка не належить жодній із координатних осей, і точки $M_x(x_0; 0)$, $M_y(0; y_0)$. Вектор $\overline{OM}$ називають **радіус-вектором** точки M . За правилом паралелограма $\overline{OM} = \overline{OM}_x + \overline{OM}_y$. Оскільки $\overline{OM}_x \parallel \vec{i}$, а $\overline{OM}_y \parallel \vec{j}$, то $\overline{OM}_x = x_0 \cdot \vec{i}$, а $\overline{OM}_y = y_0 \cdot \vec{j}$. Отже, $\overline{OM} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$.

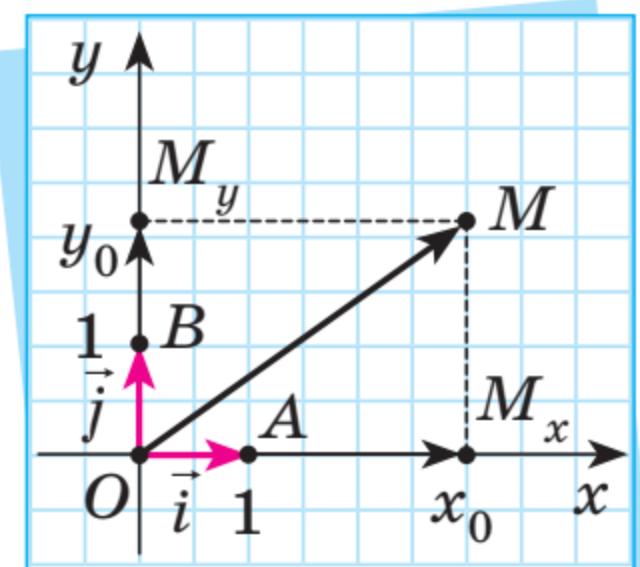


Рис. 26.1

Якщо точка $M(x_0; y_0)$ належить одній із координатних осей, то або $x_0 = 0$, або $y_0 = 0$. Якщо $x_0 = 0$, то $\overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$, а якщо $y_0 = 0$, то $\overrightarrow{OM} = x_0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$.

Таким чином, у будь-якому випадку **радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ будь-якої точки $M(x_0; y_0)$ координатної площини можна розкласти через вектори базису $(\vec{i}, \vec{j})$, причому координати цієї точки є коефіцієнтами цього розкладу.**



Після попередніх міркувань природним видається таке означення.



Координатами вектора в деякій ПДСК на площині називають коефіцієнти розкладу цього вектора через вектори базису $(\vec{i}, \vec{j})$, який відповідає даній ПДСК. Іншими словами, якщо $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$, то **впорядковану пару чисел $(a_1; a_2)$ називають координатами вектора $\vec{a}$ і записують $\vec{a}(a_1; a_2)$ або $\vec{a} = \overline{(a_1; a_2)}$.**

Наприклад, нехай $K(-5; 2)$. Тоді для її радіус-вектора $\overrightarrow{OK}$ правильною є рівність $\overrightarrow{OK} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$, тобто вектор $\overrightarrow{OK}$ матиме координати $\overrightarrow{OK} = \overline{(-5; 2)}$.



Визначимо координати вектора $\overrightarrow{AB}$, для якого відомі координати його початку й кінця в деякій ПДСК: $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Зобразимо радіус-вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ точок A і B (рис. 26.2). Тоді $\overrightarrow{OA} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$, а $\overrightarrow{OB} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{AB} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} - (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j})$.

Використовуючи властивості дій над векторами, у підсумку отримаємо: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$, тобто $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

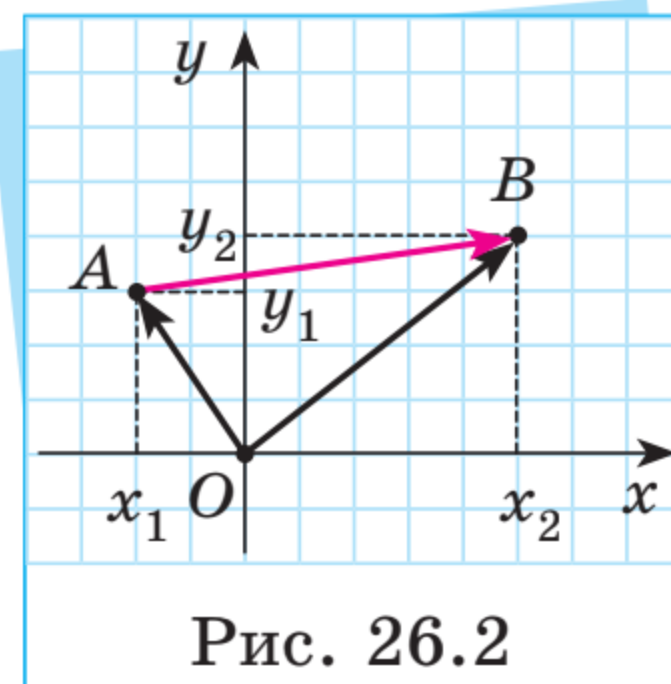


Рис. 26.2

Отже, правильним є таке твердження.

Правило знаходження координат вектора.



Якщо у деякій ПДСК $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Іншими словами: щоб знайти координати вектора, потрібно від координат його кінця відняти відповідні координати його початку.



Знайдемо координати векторів для прикладу Петрика й Тетянки. Нехай у деякій ПДСК задано точки $T(10; 3)$, $M(2; 7)$, $I(6; 5)$. Тоді $\overrightarrow{MI} = (6 - 2; 5 - 7) = (4; -2)$, $\overrightarrow{IT} = (10 - 6; 3 - 5) = (4; -2)$. Таким чином, вектори $\overrightarrow{MI}$ та $\overrightarrow{IT}$ у даній ПДСК мають однакові координати. Оскільки кожна точка має лише одні координати в даній ПДСК, то розклад кожного радіус-вектора за векторами базису $(\vec{i}, \vec{j})$ єдиний. Користуючись цим, можна показати, що **рівні вектори мають однакові координати**, і навпаки — **якщо вектори мають рівні координати, то вони рівні**. Отже, $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IT}$, тобто в залі театру всі дівчата сиділи на одній прямій, причому Іринка точно посередині між Тетянкою та Маринкою.



Вектори можна додавати, віднімати й множити на число в координатній формі. Сформулюємо відповідні правила.

Правила дій над векторами в координатній формі.



Нехай у деякій ПДСК задано координати векторів: $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$. Тоді:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$;
- 2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$;
- 3) $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$.

Обґрунтування цих правил:
rnk.com.ua/109664



Із правила множення вектора на число в координатній формі випливає важливий висновок: **якщо два вектори колінеарні, то їхні координати є пропорційними.**

Справді, нехай $\vec{a}(a_1; a_2) \parallel \vec{b}(b_1; b_2)$. Тоді вектор $\vec{b}$ можна виразити через вектор $\vec{a}$, тобто існує число λ , за якого $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$. Тоді $\overline{(b_1; b_2)} = \overline{(\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)}$, звідки $b_1 = \lambda \cdot a_1$ і $b_2 = \lambda \cdot a_2$, тобто координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — пропорційні. Якщо жодна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю, то цю пропорційність можна записати у вигляді: $\lambda = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

Обернене твердження також є правильним: **якщо координати двох векторів пропорційні, то вектори є колінеарними.** *Переконайтеся в його правильності самостійно.*



Якщо відомі координати вектора, то легко визначити його довжину.



Правило знаходження довжини вектора за відомими його координатами.

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Справді, нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, причому $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Оскільки $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, а $x_2 - x_1 = a_1$ і $y_2 - y_1 = a_2$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.



Розглянемо приклад використання наведених формул.

Приклад

Знайдіть довжину вектора $\vec{m} = 3\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{s}$, якщо $\vec{p}(1; -2)$, $\vec{s}(-4; 6)$.
 Оскільки $3\vec{p} = \overrightarrow{(3 \cdot 1; 3 \cdot (-2))} = \overrightarrow{(3; -6)}$, $\frac{1}{2}\vec{s} = \overrightarrow{\left(\frac{1}{2} \cdot (-4); \frac{1}{2} \cdot 6\right)} = \overrightarrow{(-2; 3)}$,
 $\vec{m} = \overrightarrow{(3 - (-2); (-6 - 3))} = \overrightarrow{(5; -9)}$, то $|\vec{m}| = \sqrt{5^2 + (-9)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$.

**Перевірте себе!**

1. Дайте означення базису, що відповідає даній ПДСК.
2. Що таке радіус-вектор точки в ПДСК і яким чином він розкладається через вектори базису, що відповідає даній ПДСК?
3. Сформулюйте правило знаходження координат вектора.
4. Сформулюйте правила дій над векторами в координатній формі.
5. Яку властивість мають координати рівних векторів?
6. Яку властивість мають координати колінеарних векторів?
7. Запишіть формулу довжини вектора за його координатами.

**Тренажерний зал****Початковий рівень**

1. Знайдіть координати радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$, якщо точка A має координати $(-3; 8)$.
2. Знайдіть координати точки B , якщо радіус-вектора $\overrightarrow{OB}$ має координати $(5; -2)$.
3. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо точка A має координати $(2; 5)$, а точка B — $(8; 7)$. Згадайте: щоб знайти координати вектора, потрібно від координат його кінця відняти відповідні координати його початку.

4. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо точка C має координати $(6; 1)$, а точка D — $(10; 8)$. Згадайте: щоб знайти координати вектора, потрібно від координат його кінця відняти відповідні координати його початку.

5. Знайдіть суму векторів $\vec{a}(4; -1)$ і $\vec{c}(5; 8)$, скориставшись формулою $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

6. Знайдіть суму векторів $\vec{b}(-6; 2)$ і $\vec{n}(3; 7)$, скориставшись формулою $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

7. Знайдіть різницю векторів $\vec{m}(3; 2)$ і $\vec{d}(5; -4)$, скориставшись формулою $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

8. Знайдіть різницю векторів $\vec{k}(-3; 8)$ і $\vec{c}(2; 6)$, скориставшись формулою $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

9. Знайдіть добуток числа 4 на вектор $\vec{b}(-5; 7)$, скориставшись формулою $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$.

10. Знайдіть добуток числа 3 на вектор $\vec{c}(6; -7)$, скориставшись формулою $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$.

11. Знайдіть довжину вектора $\vec{d}(6; -8)$, скориставшись формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

12. Знайдіть довжину вектора $\vec{m}(-4; 3)$, скориставшись формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.



Середній рівень

13. Заповніть таблицю.

A	$(3; 5)$	$(0; 7)$	$(2; -5)$	$(-6; -9)$
B	$(1; 8)$	$(6; -5)$	$(2; 6)$	$(-3; -9)$
$\overrightarrow{AB}$				
$\overrightarrow{BA}$				

14. Заповніть таблицю.

C	$(8; 6)$	$(-3; 0)$	$(6; -4)$	$(9; -1)$
D	$(2; 5)$	$(4; -2)$	$(-6; -4)$	$(9; -5)$
$\overrightarrow{CD}$				
$\overrightarrow{DC}$				

15. Укажіть координати вектора $\vec{a}$, якщо:

а) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; б) $\vec{a} = -2\vec{i} + 7\vec{j}$; в) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$; г) $\vec{a} = -8\vec{i} - 9\vec{j}$.

16. Укажіть координати вектора $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{b} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$; б) $\vec{b} = 6\vec{i} - 7\vec{j}$; в) $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$; г) $\vec{b} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$.

17. Запишіть розклад вектора за базисом, якщо:

а) $\vec{a}(1; 2)$; б) $\vec{b}(3; -1)$; в) $\vec{c}(-3; 7)$; г) $\vec{d}(-2; -10)$.

18. Запишіть розклад вектора за базисом, якщо:

а) $\vec{a}(4; 1)$; б) $\vec{b}(1; -1)$; в) $\vec{c}(-2; -5)$; г) $\vec{d}(-1; 6)$.

19. Заповніть таблицю.

$\vec{a}$	$\overrightarrow{(1; 3)}$	$\overrightarrow{(-1; 3)}$	$\overrightarrow{(1; -3)}$	$\overrightarrow{(-1; -3)}$
$\vec{b}$	$\overrightarrow{(2; 4)}$	$\overrightarrow{(2; -4)}$	$\overrightarrow{(-2; 4)}$	$\overrightarrow{(-2; -4)}$
$\vec{a} + \vec{b}$				
$\vec{a} - \vec{b}$				

20. Заповніть таблицю.

$\vec{c}$	$\overrightarrow{(3; 5)}$	$\overrightarrow{(-3; 5)}$	$\overrightarrow{(3; -5)}$	$\overrightarrow{(-3; -5)}$
$\vec{d}$	$\overrightarrow{(2; 2)}$	$\overrightarrow{(2; -2)}$	$\overrightarrow{(-2; 2)}$	$\overrightarrow{(-2; -2)}$
$\vec{c} + \vec{d}$				
$\vec{c} - \vec{d}$				

21. Заповніть таблицю.

$\vec{b}$	$\overrightarrow{(2; 1)}$	$\overrightarrow{(-2; 5)}$	$\overrightarrow{(5; -2)}$	$\overrightarrow{(4; 0)}$
$5\vec{b}$				
$-3\vec{b}$				

22. Заповніть таблицю.

$\vec{c}$	$\overrightarrow{(1; 3)}$	$\overrightarrow{(-5; 2)}$	$\overrightarrow{(2; -4)}$	$\overrightarrow{(0; 7)}$
$2\vec{c}$				
$-4\vec{c}$				

23. Заповніть таблицю.

$\vec{n}$	$\overrightarrow{(-3; -4)}$	$\overrightarrow{(4; -3)}$	$\overrightarrow{(5; -12)}$	$\overrightarrow{(8; 0)}$
$ \vec{n} $				

24. Заповніть таблицю.

$\vec{k}$	$\overrightarrow{(-6; 8)}$	$\overrightarrow{(8; -6)}$	$\overrightarrow{(0; -7)}$	$\overrightarrow{(12; -5)}$
$ \vec{k} $				



Достатній рівень

25. Знайдіть координати й довжину вектора $\overrightarrow{AP}$, якщо: а) $A(1; 2)$, $P(0; 3)$; б) $A(-3; 1)$, $P(4; 2)$; в) $A(-8; 3)$, $P(1; 1)$.

26. Знайдіть координати й довжину вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо: а) $M(0; 4)$, $N(-2; -3)$; б) $M(2; -1)$, $N(-7; 3)$; в) $M(2; 3)$, $N(-2; -3)$.
27. Задано точки $A(3; -4)$, $B(-2; 7)$, $C(-4; 16)$, $D(1; 5)$. Визначте, чи будуть рівними вектори: а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{CB}$. Поясніть свою відповідь.
28. Задано точки $A(1; -5)$, $B(2; 3)$, $C(3; -1)$, $D(4; 7)$. Визначте, чи будуть рівними вектори: а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{BC}$. Поясніть свою відповідь.
29. Знайдіть усі значення x , за яких модуль вектора $\vec{a}(x; -6)$ дорівнює 10.
30. Знайдіть усі значення y , за яких модуль вектора $\vec{b}(5; y)$ дорівнює 13.
31. Задано вектори $\vec{b}(-2; 3)$ та $\vec{d}(-4; m)$. За яких значень m вектори $\vec{b}$ і $\vec{d}$ будуть колінеарними?
32. Задано вектори $\vec{m}(6; 8)$ та $\vec{n}(-3; y)$. За яких значень y вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ будуть колінеарними?
33. Вектор $\vec{a}$ має координати $(15; 21)$. Які координати матиме вектор $-\frac{2}{3}\vec{a}$?
34. Вектор $\vec{b}$ має координати $(8; -24)$. Які координати матиме вектор $1\frac{1}{2}\vec{b}$?
35. Задано трикутник ABC , у якого $A(1; 1)$, $B(3; 4)$, $C(5; 1)$. Знайдіть довжину середньої лінії цього трикутника, яка паралельна стороні AC .
36. Задано трикутник ABC , у якого $A(1; 1)$, $B(3; 4)$, $C(5; 1)$. Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини A .



Високий рівень

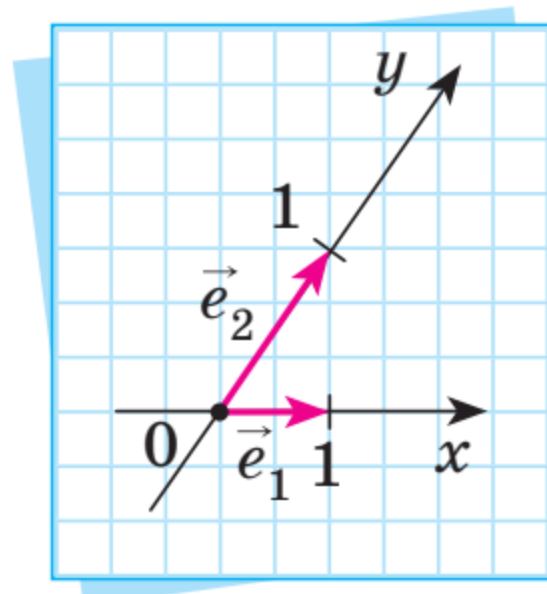
37. Знаючи розклад вектора через вектори базису $(\vec{i}, \vec{j})$, який відповідає даній ПДСК, запишіть координати цього вектора та знайдіть його довжину.
а) $\vec{a} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$; б) $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$; в) $\vec{m} = 3\vec{i}$; г) $\vec{p} = -15\vec{j}$.
38. Знаючи розклад вектора через вектори базису $(\vec{i}, \vec{j})$, який відповідає даній ПДСК, запишіть координати цього вектора та знайдіть його довжину.
а) $\vec{a} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$; б) $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$; в) $\vec{m} = 3\vec{i}$; г) $\vec{p} = -15\vec{j}$.
39. Задано координати трьох точок $A(5; -3)$, $B(-2; 4)$, $C(-6; 7)$. Знайдіть координати точки $D(x; y)$, щоб вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ були рівними.
40. Задано координати трьох точок $M(-1; -6)$, $N(3; 2)$, $K(4; -7)$. Знайдіть координати точки $E(x; y)$, щоб вектори $\overline{MN}$ і $\overline{EK}$ були рівними.
41. Знайдіть довжину вектора $6\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2; 3)$ і $\vec{b}(-5; 4)$.
42. Знайдіть довжину вектора $7\vec{m} - 5\vec{n}$, якщо $\vec{m}(6; -2)$ і $\vec{n}(8; -2)$.
43. Відомо, що вектори $\vec{a}(y; -2)$ і $\vec{b}(-8; y)$ є колінеарними. Знайдіть усі значення y .
44. Відомо, що вектори $\vec{m}(-3; x)$ і $\vec{n}(x; -12)$ є колінеарними. Знайдіть усі значення x .
45. Використовуючи вектори, доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — трапеція, якщо $A(-2; 3)$, $B(3; 4)$, $C(6; 1)$, $D(-6; -2)$.
46. Використовуючи вектори, доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(-1; 2)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$, $D(4; 5)$.
47. Знайдіть вектор $\vec{a}$, якщо він колінеарний вектору $\vec{b}(-1; 7)$ і його довжина дорівнює довжині вектора $\vec{c}(-1; 1)$.
48. Знайдіть вектор $\vec{m}$, якщо він протилежно напрямлений до вектора $\vec{p}(7; 9)$ і його довжина дорівнює довжині вектора $\vec{q}(6; -22)$.



Цікавинки від дідуса Тараса

Базис $(\vec{i}, \vec{j})$, що відповідає системі ПДСК, має певні особливості: обидва його вектори мають довжину 1 і є перпендикулярними. Такі базиси в математиці називають *ортонормованими*. Термін походить від поєднання слів «ортогональний» (перпендикулярний) і «нормований» (має одиничну довжину). До речі, кожен вектор ортонормованого базису також має спеціальну назву — *орт*.

Вектори базису не обов'язково мають бути однакової довжини й перпендикулярними. Головне, щоб через вектори базису виражалися всі вектори площини, а також жоден вектор базису не виражався через інші його вектори. Наприклад, на рисунку зображено базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, який не є ортонормованим. Він відповідає іншій системі координат на площині — *афінній*. У цій системі координат кут між осями координат не обов'язково прямий, а одиничні відрізки на кожній із осей можуть мати різну довжину. Зрозуміло також, що ПДСК є частковим випадком афінної системи координат.



В афінній системі координат можна:

- 1) знаходити координати даної точки;
- 2) будувати точку з даними координатами;
- 3) знаходити координати середини відрізка.

Ці задачі розв'язують так само, як і в ПДСК. Однак прості формули відстані між двома точками з даними координатами в афінній системі координат немає. Проте для розв'язування багатьох задач ця система координат є зручнішою, ніж ПДСК.

Сам термін «афінний» походить від латинського *affinis* — зв'язний. Він уперше введений *Леонардом Ойлером* у 1748 р. Афінною системою координат активно користувалися в своїх дослідженнях не лише математики, а й представники інших наук. Зокрема, у 1912 р. американські фізики *Едвін Бідвел Вілсон* і *Гілберт Ньютон Льюїс* використали афінну систему координат для опису спеціальної теорії відносності.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Із додаткових джерел інформації дізнайтеся більше про афінну систему координат і задачі, які зручно розв'язувати з її допомогою. Підготуйте невелике повідомлення на цю тему.
2. Спробуйте придумати власну систему координат на площині, відмінну від ПДСК, афінної та полярної систем. Які задачі зручно розв'язувати за допомогою цієї системи координат?



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть вираз.

$$\text{а) } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{24}}{\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{(\sqrt{5})^3}{\sqrt{20}}.$$

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

3. Унаслідок збільшення температури повітря морозиво «Кольоровий сніжок» спочатку подорожчало на 40 % порівняно із ціною виробника. Однак за певний час через спливання терміну зберігання воно подешевшало на 25 % від нової ціни. Знайдіть ціну виробника для одного ріжка морозива «Кольоровий сніжок», якщо після вказаних двох змін ціни один ріжок коштував 21 грн.



4. Знайдіть точку перетину прямих $x - 2y + 1 = 0$ і $3x + y - 4 = 0$. Розв'яжіть задачу двома способами — графічним і аналітичним.
5. У рівнобічній трапеції $ABCD$ нижня основа AD дорівнює 16 см, середня лінія KM — 11,5 см. Знайдіть висоту цієї трапеції, проведеної з вершини B , якщо $\angle A = 45^\circ$.

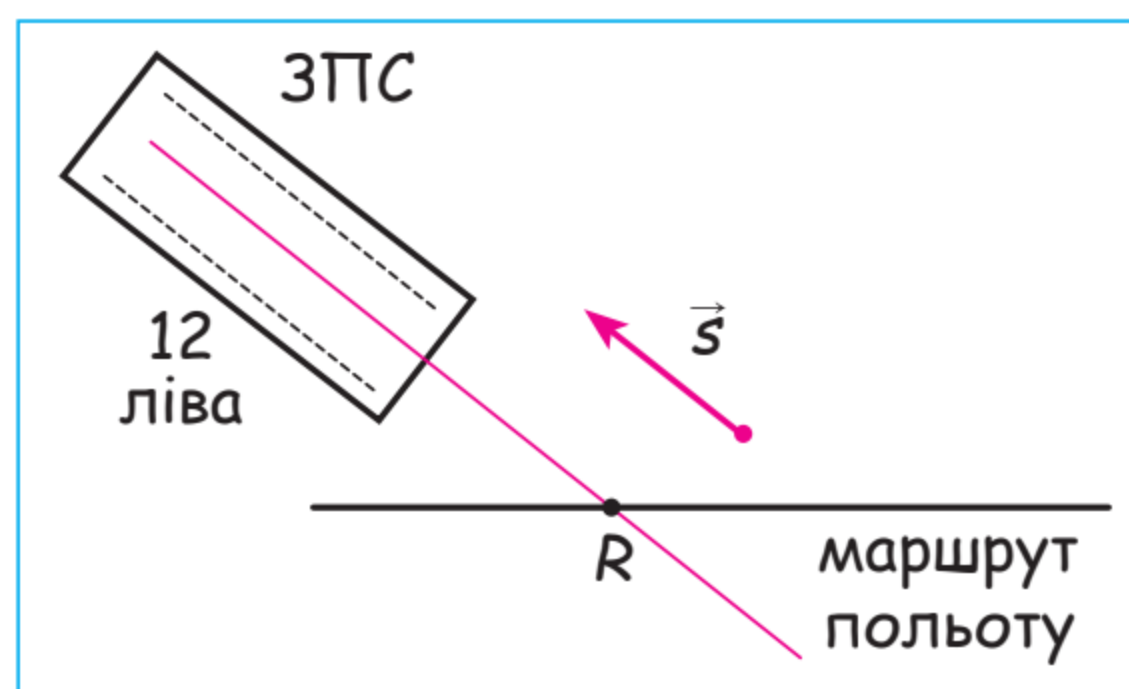
§ 27. Рівняння прямої. Взаємне розташування кола і прямої. Взаємне розташування двох кіл



Тетянко, учора дивився пригодницький фільм і звернув увагу на те, як льотчик в екстремальній ситуації кричав у мікрофон до диспетчера: «Вектори! Дайте вектори на аеропорт!» А диспетчер відповів: «Прямуйте до точки Ромео, а звідти курс у напрямку 310 до ЗПС 12 ліва». І от я задумався, а чи досить лише однієї точки й вектора напрямку польоту для того, щоб однозначно визначити пряму, по якій слід летіти до ЗПС (злітно-посадкової смуги)?



Думаю, що так. Через будь-які дві точки можна провести лише одну пряму, тому через початок і кінець даного вектора теж можна провести лише одну пряму. А якщо раптом дана точка не лежить на цій прямій, то через неї також можна провести лише одну пряму, паралельну даному вектору. Отже, якщо задано якусь точку і якийсь вектор, то можна провести лише одну пряму, що проходить через цю точку паралельно цьому вектору.



Я би назвала цей вектор *вектором напрямку* прямої. Ось, поглянь, на рисунку я зобразила епізод із твого фільму: літак летів до точки R (Ромео), а потім повернув у напрямку, який визначається вектором $\vec{s}$ до ЗПС 12 ліва.



Цікаво: отже, пряму однозначно можна задати не лише двома точками, а ще й точкою та вектором, паралельним їй (вектором напрямку). Ми недавно вивчили координати вектора й умову колінеарності двох векторів у координатній формі. Чомусь упевнений, що має бути простий спосіб написати рівняння прямої, якщо дано точку на цій прямій та вектор її напрямку.



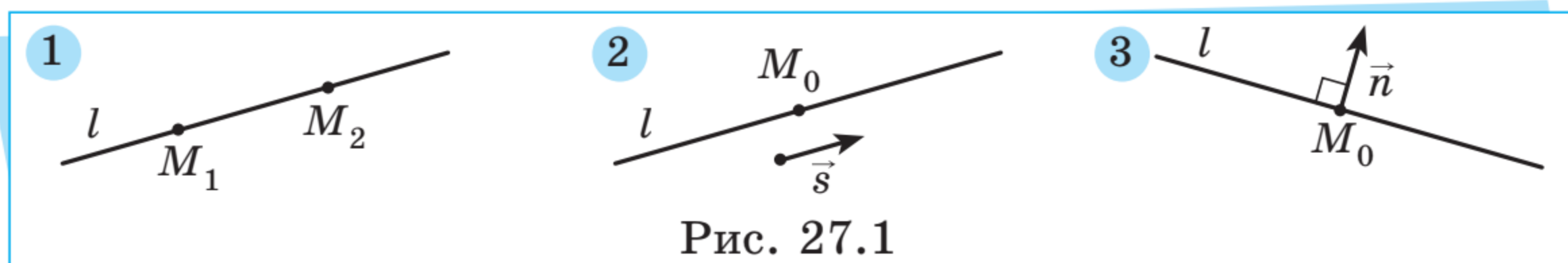
Я теж так вважаю. Причому думаю, що це не єдиний спосіб однозначно задати пряму за допомогою точки й вектора. Якщо дано точку на прямій і вектор, перпендикулярний до цієї прямої, то пряма також визначається однозначно, бо ми знаємо теорему: «Через точку, що не належить даній прямій, можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж лише одну». Думаю, що і в цьому випадку можна якось скласти рівняння прямої, якщо знати координати точки й перпендикулярного до неї вектора. Запитаймо вчителів про це.

Рівняння прямої



Справді, Тетянко, можна виділити **три основні способи задання прямої на площині** (див. рис. 27.1):

- 1) через дві дані точки цієї прямої;
- 2) через дану точку прямої і вектор, паралельний цій прямій;
- 3) через дану точку прямої і вектор, перпендикулярний до цієї прямої.



У кожному з випадків пряма визначається однозначно, бо Тетянка правильно зауважила, що через будь-які дві точки можна провести *лише одну* пряму (аксіома); через точку, яка не належить даній прямій, можна провести *лише одну* пряму, паралельну даній (аксіома), і через точку, що не належить даній прямій, можна провести *лише одну* пряму, перпендикулярну до даної (теорема).



Нехай у деякій ПДСК задано точку $M_0(x_0; y_0)$, яка належить прямій l , і ненульовий вектор $\vec{s}(t; p)$, паралельний прямій l (див. рис. 27.2). Вектор $\vec{s}$ називають **вектором напрямку** прямої l .

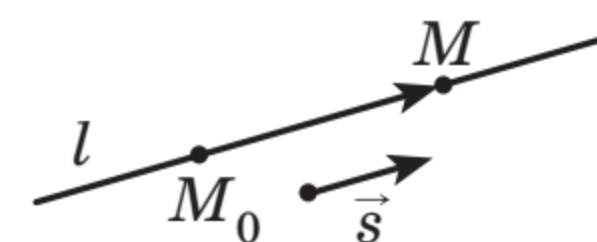


Рис. 27.2

Складемо рівняння прямої l . Для цього розглянемо довільну точку $M(x; y)$ цієї прямої. Очевидно, що $M \in l$ тоді й тільки тоді, коли $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$. Оскільки $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ тоді й тільки тоді, коли координати цих векторів пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{t} = \frac{y - y_0}{p}$$

Це рівняння називають **рівнянням прямої через точку прямої та її вектор напрямку**.



Якщо одна з координат вектора напрямку прямої $\vec{s}$ дорівнює нулю, то зрозуміло, що запис пропорційності координат векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ не можна записати у вигляді рівності двох дробів.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/109665



Маючи рівняння прямої через точку й вектор напрямку, досить легко вивести рівняння прямої через дві дані точки цієї прямої.

Дійсно, нехай у деякій ПДСК $M_1(x_1; y_1) \in l$ і $M_2(x_2; y_2) \in l$. Тоді очевидно, що $\overrightarrow{M_1M_2}$ можна вважати вектором напрямку $\vec{s}(m; p)$ прямої l , тобто $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, то $x_2 - x_1 = m$, $y_2 - y_1 = p$. Запишемо рівняння прямої l як рівняння прямої через точку M_1 і вектор напрямку $\overrightarrow{M_1M_2}$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Це рівняння називають **рівнянням прямої через дві точки цієї прямої**.



Розглянемо приклад. Запишемо рівняння прямої AB , якщо $A(2; -1)$, $B(-3; 2)$. У нас $x_1 = 2$; $y_1 = -1$; $x_2 = -3$; $y_2 = 2$. Застосуємо рівняння прямої через дві точки: $\frac{x - 2}{-3 - 2} = \frac{y - (-1)}{2 - (-1)}$, $\frac{x - 2}{-5} = \frac{y + 1}{3}$.

З цієї рівності бачимо, що вектор $\vec{s}(-5; 3)$ є вектором напрямку прямої AB .

Застосуємо до останньої рівності *основну властивість пропорції*: $3(x - 2) = -5(y + 1)$, $3x - 6 = -5y - 5$, $3x + 5y - 1 = 0$. Останнє рівняння має вигляд $ax + by + c = 0$ (у нас $a = 3$, $b = 5$, $c = -1$) і є відомим вам з курсу математики 7 класу рівнянням прямої.



Нескладно показати, що будь-яке рівняння прямої через дві точки чи через точку й вектор напрямку можна звести до рівняння прямої виду $ax + by + c = 0$. Це рівняння називають **загальним рівнянням прямої**.

Далі, якщо в задачах вимагатиметься скласти рівняння прямої, то вважатимемо, що потрібно отримати саме загальне рівняння прямої.



Складання рівняння прямої для випадку, коли пряма задана своєю точкою і вектором, перпендикулярним до неї (3),

розглянуто в § 28. Більш детально цей випадок ви розглянете в старшій школі. Лише зауважимо, що вектор, перпендикулярний до даної прямої, називають **вектором нормалі** цієї прямої і традиційно позначають $\vec{n}$.

Взаємне розташування кола і прямої та двох кіл



Як ви вже знаєте з курсу математики 7 класу, існує три види взаємного розташування кола і прямої на площині (рис. 27.3):

- 1) пряма є січною кола;
- 2) пряма є дотичною до кола;
- 3) пряма не має з колом спільних точок.

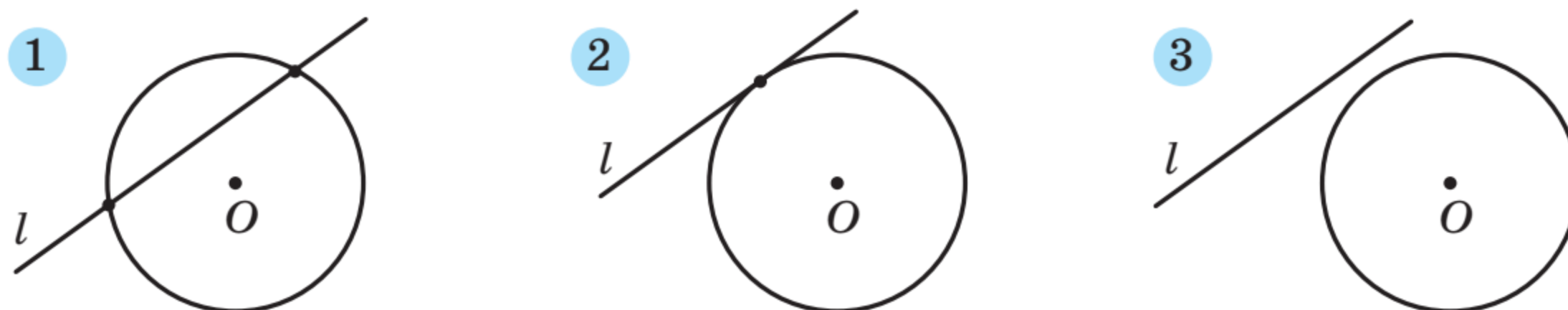


Рис. 27.3

Якщо коло і пряма задані рівняннями у певній ПДСК, то для визначення виду їхнього взаємного розташування на площині можна зобразити їх у цій ПДСК вручну чи за допомогою графічного калькулятора. Однак в окремих випадках цей спосіб може не дати результату — коло може проходити біля прямої настільки «близько», що за рисунком буде важко визначити, чи є в них спільні точки та скільки їх. У цьому випадку краще скористатися *аналітичним способом*.



Розглянемо *приклад*. Нехай у деякій ПДСК пряма задана загальним рівнянням $2x - y - 1 = 0$, а коло — канонічним рівнянням $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Щоб знайти координати спільних точок прямої і кола (якщо вони є), потрібно фактично розв'язати систему рівнянь $2x - y - 1 = 0$ і $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Запишемо рівняння прямої у вигляді $y = 2x - 1$. Підставимо цей вираз у рівняння кола: $(x-4)^2 + (2x-1-2)^2 = 9$, $(x-4)^2 + (2x-3)^2 = 9$. Після перетворень отримаємо рівняння $5x^2 - 20x + 16 = 0$. Знайдемо дискримінант цього рівняння: $D = (-20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 16 = 400 - 320 = 80$. Отже, дане квадратне рівняння має *два корені*. Тоді й система рівнянь матиме два розв'язки, а отже, *пряма перетинає коло у двох точках*, тобто є січною кола.

Можна знайти й координати цих точок. Корені квадратного рівняння: $x_1 = \frac{20 + \sqrt{80}}{10} = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Тоді

$$y_1 = 2 \cdot \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 1 = 5 + \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad y_2 = 2 \cdot \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 1 = 5 - \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Таким

чином, пряма перетинає дане коло в точках $M_1\left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}; 5 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

і $M_2\left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}; 5 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.



Щоб з'ясувати взаємне розташування прямої і кола аналітичним способом, можна скористатися й іншим підходом. Відомо, що відстань h від центра кола до прямої, яка є дотичною до цього кола, дорівнює його радіусу R , тобто $h = R$. Очевидно, якщо пряма не має з колом спільних точок, то $h > R$, а якщо пряма є січною цього кола, то $h < R$. У вищій школі доводять формулу відстані від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

За цією формулою просто знайти відстань від центра кола до прямої та зробити відповідний висновок. Наприклад, з'ясуємо взаємне розташування прямої $2x - y - 1 = 0$ і кола $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$ цим способом. Центр кола розташований у точці $M_0(4; 2)$.

Знайдемо відстань від цієї точки до прямої $2x - y - 1 = 0$:

$$h = \frac{|2 \cdot 4 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}. \text{ Оскільки радіус кола } R = 3 \text{ і } \sqrt{5} < 3, \text{ то}$$

$h < R$, тобто пряма дійсно є січною кола.



Також із курсу математики 7 класу ви знаєте, що існує п'ять видів взаємного розташування двох кіл (рис. 27.4):

- 1) кола мають зовнішній дотик;
- 2) кола мають внутрішній дотик;
- 3) кола мають дві спільні точки;
- 4) кола не мають спільних точок і одне з них розташоване всередині круга, обмеженого іншим;
- 5) кола не мають спільних точок і жодне з них не розташоване всередині круга, обмеженого іншим.

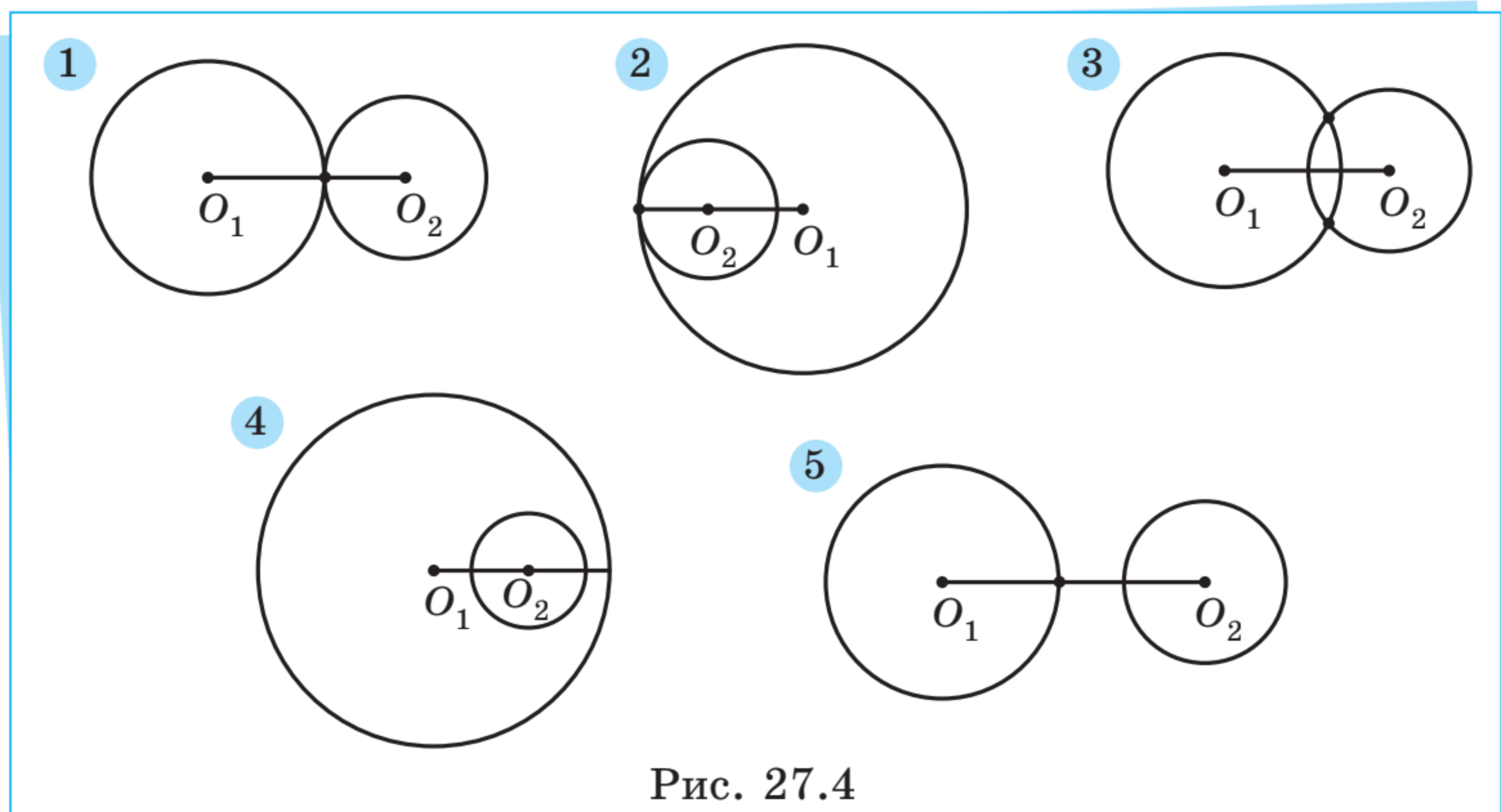


Рис. 27.4

Щоб з'ясувати взаємне розташування двох кіл, також можна зобразити їх у ПДСК вручну чи за допомогою графічного калькулятора. Однак *аналітичний спосіб* з'ясування взаємного розташування двох кіл є досить простим. Нехай у деякій ПДСК $O_1(x_1; y_1)$ і $O_2(x_2; y_2)$ — центри двох кіл, а R_1

і R_2 — відповідно їх радіуси. Знайдемо відстань між центрами кіл: $h = O_1O_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Тепер легко помітити, що випадок 1 справедливий за умови $h = R_1 + R_2$, випадок 2 — за умови $h = |R_1 - R_2|$, випадок 3 — за умови $|R_1 - R_2| < h < R_1 + R_2$; випадок 4 — за умови $h < |R_1 - R_2|$ і, нарешті, випадок 5 — за умови $h > R_1 + R_2$.



Розглянемо *приклад*. З'ясуємо взаємне розташування двох кіл, заданих канонічними рівняннями: $(x-3)^2 + y^2 = 16$ і $x^2 + (y+7)^2 = 9$. Перше коло із центром у точці $O_1(3; 0)$ радіуса $R_1 = 4$. Друге коло із центром у точці $O_2(0; -7)$ радіуса $R_2 = 3$. Знайдемо $h = O_1O_2 = \sqrt{(0-3)^2 + (-7-0)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$. Оскільки $|R_1 - R_2| = 1$, $R_1 + R_2 = 7$, а $\sqrt{58} > 7$, то $h > R_1 + R_2$. Отже, два дані кола не мають спільних точок, причому жодне з них не розташоване в крузі, обмеженому іншим (випадок 5).



Про використання графічного калькулятора для з'ясування взаємного розташування кола і прямої та двох кіл:
rnk.com.ua/109666



Перевірте себе!

1. Перелічіть основні способи задання прямої на площині.
2. Дайте означення вектора напрямку прямої. Запишіть рівняння прямої через точку прямої та її вектор напрямку.
3. Запишіть рівняння прямої через дві точки цієї прямої.
4. Яке рівняння називають загальним рівнянням прямої?

5. Яким чином звести рівняння прямої через точку прямої та вектор її напрямку й рівняння прямої через дві точки до загального рівняння прямої?
6. Які існують випадки взаємного розташування прямої та кола на площині?
7. Якими способами можна з'ясувати взаємне розташування кола і прямої на площині?
8. Які існують випадки взаємного розташування двох кіл на площині?
9. Якими способами можна з'ясувати взаємне розташування двох кіл на площині?



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{7}$. Який вектор є вектором напрямку цієї прямої?
а) $\vec{s}(-2; -5)$; б) $\vec{s}(2; 5)$; в) $\vec{s}(3; 7)$; г) $\vec{s}(7; 3)$.
2. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5}$. Який вектор є вектором напрямку цієї прямої?
а) $\vec{s}(-1; -2)$; б) $\vec{s}(1; 2)$; в) $\vec{s}(5; 4)$; г) $\vec{s}(4; 5)$.
3. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4; 1)$ та паралельна вектору $\vec{s}(3; 7)$, скориставшись формулою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p}$.
4. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $C(5; 9)$ та паралельна вектору $\vec{k}(2; 4)$, скориставшись формулою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p}$.

5. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{6}$. Через які точки проходить ця пряма?

- а) $A(1; -4)$; в) $C(0; 6)$;
б) $B(-1; 4)$; г) $D(5; 16)$.

6. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{4}$. Через які точки проходить ця пряма?

- а) $A(3; 7)$; в) $C(5; 11)$;
б) $B(-3; -7)$; г) $D(0; 1)$.

7. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2; 6)$ та $B(5; 11)$, скориставшись формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

8. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 3)$ та $B(7; 5)$, скориставшись формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

9. Чи проходить пряма, задана рівнянням $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{4}$, через точки $A(3; 7)$ та $B(4; 9)$? Чи проходить пряма, задана рівнянням $y = 2x + 1$, через ці самі точки? Чи можна зробити із цього висновок, що дані два рівняння задають одну пряму?

10. Чи проходить пряма, задана рівнянням $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{6}$, через точки $A(-1; 4)$ та $B(2; 10)$? Чи проходить пряма, задана рівнянням $y = 2x + 6$, через ці самі точки? Чи можна зробити із цього висновок, що дані два рівняння задають одну пряму?

11. Скільки спільних точок можуть мати пряма і коло?
а) 0; б) 1; в) 2; г) 4.

12. Скільки спільних точок можуть мати два кола?
а) 0; б) 1; в) 2; г) 4.



Середній рівень

13. Які з тверджень є правильними?

- а) Пряму на площині можна задати через дві дані точки цієї прямої.
- б) Пряму на площині можна задати через дану точку прямої і вектор, паралельний цій прямій.
- в) Через три точки площини завжди можна провести пряму.
- г) Через точку, що не належить даній прямій, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.

14. Які з тверджень є правильними?

- а) Пряму на площині можна задати через одну дану точку цієї прямої.
- б) Пряму на площині можна задати через дану точку прямої і вектор, перпендикулярний до цієї прямої.
- в) Через одну точку площини завжди можна провести пряму.
- г) Через точку, яка не належить даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.

15. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x+4}{5} = \frac{y-6}{7}$. Запишіть координати точки, через яку проходить ця пряма, і вектор напрямку цієї прямої.

16. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x-3}{6} = \frac{y+5}{8}$. Запишіть координати точки, через яку проходить ця пряма, і вектор напрямку цієї прямої.

17. Запишіть рівняння $\frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{5}$ у вигляді $ax + by + c = 0$, скориставшись основною властивістю пропорції.

18. Запишіть рівняння $\frac{x+3}{7} = \frac{y-5}{4}$ у вигляді $ax + by + c = 0$, скориставшись основною властивістю пропорції.

19. Прямую a задано рівнянням $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1}$. Не виконуючи побудови, визначте, чи належать прямій точки: а) $A(-5; 0)$; б) $B(3; 2)$; в) $C(-2; 1)$; г) $D(2; -1)$.

20. Прямую b задано рівнянням $\frac{x+4}{8} = \frac{y-2}{-4}$. Не виконуючи побудови, визначте, чи належать прямій точки: а) $A(0; 0)$; б) $B(2; -1)$; в) $C(-1; 2)$; г) $D(-2; 1)$.

21. Задано коло із центром у точці $O(0; 2)$ та пряму $x + y - 5 = 0$. Знайдіть відстань від центра кола до цієї прямої, скориставшись формулою $h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

22. Задано коло із центром у точці $O(-3; 1)$ та пряму $x + 2y - 4 = 0$. Знайдіть відстань від центра кола до цієї прямої, скориставшись формулою $h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

23. Точки $O_1(2; 3)$ і $O_2(-1; 4)$ — центри двох кіл. Знайдіть відстань між центрами цих кіл, скориставшись формулою $O_1O_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

24. Точки $O_1(-1; 2)$ і $O_2(5; -1)$ — центри двох кіл. Знайдіть відстань між центрами цих кіл, скориставшись формулою $O_1O_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Достатній рівень

25. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3; 4)$ та $B(5; 6)$, і вкажіть вектор напрямку цієї прямої.

26. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-2; 8)$ та $B(3; -1)$, і вкажіть вектор напрямку цієї прямої.

27. У паралелограмі $ABCD$ відомі координати вершин $A(1;1)$ і $C(7;4)$. Запишіть рівняння прямих, які містять сторони цього паралелограма, якщо відомо, що сторона AD паралельна вектору $\vec{m}(3;1)$, а сторона AB — вектору $\vec{n}(4;5)$.

28. У ромбі $MNPQ$ відомі координати вершин $Q(0;3)$ і $N(2;3)$. Запишіть рівняння прямих, які містять сторони цього ромба, якщо відомо, що сторона QM паралельна вектору $\vec{a}(2;2)$, а сторона NM — вектору $\vec{b}(-1;2)$.

29. Установіть відповідність між рівнянням прямої за точкою та вектором напрямку і рівнянням прямої в загальному вигляді.

1.	$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4}$
2.	$\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3}$
3.	$\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1}$

А	$x-2y-11=0$
Б	$4x-3y+1=0$
В	$3x-4y-5=0$
Г	$x-2y-1=0$

30. Установіть відповідність між рівнянням прямої за точкою та вектором напрямку і рівнянням прямої в загальному вигляді.

1.	$\frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{2}$
2.	$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1}$
3.	$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3}$

А	$2x-2y-4=0$
Б	$3x-2y-12=0$
В	$x-3y+10=0$
Г	$2x-2y=0$

31. Задано коло із центром у точці $O(2; 0)$ і $R=2$, а також пряму, яка проходить через точки $A(0; 0)$ і $B(3; 3)$.
- Запишіть рівняння кола.
 - Запишіть рівняння прямої в загальному вигляді.
 - З'ясуйте, чи перетинаються пряма та коло; якщо так, знайдіть координати точок перетину.

32. Задано коло із центром у точці $O(-4; 2)$ і $R=3$, а також пряму, яка проходить через точку $A(-1; -4)$ паралельно вектору $\vec{a}(-2; 2)$.
- Запишіть рівняння кола.
 - Запишіть рівняння прямої в загальному вигляді.
 - З'ясуйте, чи перетинаються пряма та коло; якщо так, знайдіть координати точок перетину.

33. Задано коло $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ і пряму $y=1$. З'ясуйте взаємне розташування кола і прямої, використовуючи: а) систему рівнянь; б) формулу відстані від центра кола до прямої.

34. Задано коло $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 4$ і пряму $x+y+4=0$. З'ясуйте взаємне розташування кола і прямої, використовуючи: а) систему рівнянь; б) формулу відстані від центра кола до прямої.

35. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл, заданих канонічними рівняннями.
- $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ і $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$;
 - $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ і $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

36. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл, заданих канонічними рівняннями.
- $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ і $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 13$;
 - $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ і $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$.



Високий рівень

37. Пряма задана рівнянням $2x + 3y - 6 = 0$. Укажіть координати двох різних точок цієї прямої та вектор напрямку прямої.
38. Пряма задана рівнянням $4x - y + 8 = 0$. Укажіть координати двох різних точок цієї прямої та вектор напрямку прямої.
39. Точки $A(1; 3)$, $B(3; 1)$, $C(5; 5)$, $D(7; 15)$ є вершинами трапеції $ABCD$. Запишіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції.
40. Точки $A(2; 2)$, $B(4; 8)$, $C(-6; 10)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. Запишіть рівняння прямої AD .
41. Точки $A(-2; 0)$, $C(6; 0)$ є вершинами рівностороннього трикутника ABC . Запишіть рівняння: а) прямих AC і AB ; б) прямих, які містять висоти трикутника, проведені з вершин B і C . Скільки розв'язків має задача?
42. Точки $K(0; -1)$, $M(0; 7)$ є вершинами рівностороннього трикутника KMN . Запишіть рівняння: а) прямих KM і MN ; б) прямих, які містять висоти трикутника, проведені з вершин N і K . Скільки розв'язків має задача?
43. Запишіть рівняння кола із центром у точці $A(2; -1)$, яке дотикається до прямої $3x - 4y + 5 = 0$.
44. Запишіть рівняння кола із центром у точці $A(-2; 3)$, яке дотикається до прямої $12x + 5y - 17 = 0$.
45. Знайдіть координати центрів і довжини радіусів заданих кіл та з'ясуйте взаємне розташування заданих кіл.
 а) $x^2 + y^2 + 8x = 9$ і $x^2 + y^2 - 6y = 7$;
 б) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$ і $x^2 + y^2 - 8x - 12y = -48$.
46. Знайдіть координати центрів і довжини радіусів заданих кіл та з'ясуйте взаємне розташування цих кіл.
 а) $x^2 + y^2 - 10x = -24$ і $x^2 + y^2 - 14y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = -4$ і $x^2 + y^2 - 12x - 14y = 36$.

47. Трикутник $МОК$ утворений перетином прямої $5x - 12y - 120 = 0$ з осями координат (точка O — початок координат). Знайдіть рівняння: а) кола, описаного навколо трикутника $МОК$; б) кола, вписаного в трикутник $МОК$.

48. Трикутник $ЕОF$ утворений перетином прямої $3x - 4y + 24 = 0$ з осями координат (точка O — початок координат). Знайдіть рівняння: а) кола, описаного навколо трикутника $ЕОF$; б) кола, вписаного в трикутник $ЕОF$.



Цікавинки від дідуся Тараса

Існують й *інші рівняння прямої*, крім наведених у цьому параграфі. Розглянемо кілька прикладів.

1. Якщо пряма проходить через дві точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, то рівняння прямої можна записати у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Це рівняння називають *рівнянням прямої у відрізках на осях*. До такого вигляду рівняння прямої зручно зводити з метою побудови прямої в ПДСК. Наприклад, якщо потрібно побудувати в ПДСК пряму $2x - 5y - 20 = 0$, то запишемо її рівняння у вигляді $2x - 5y = 20$ або $\frac{x}{10} + \frac{y}{-4} = 1$. Тепер досить побудувати на осях точки $A(10; 0)$ і $B(0; -4)$ та провести через них пряму.

2. Якщо розглянути рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ цієї прямої паралельно до вектора напрямку $\vec{s}(t; p)$ (до речі, таке рівняння часто називають *канонічним рівнянням прямої*), і позначити коефіцієнт пропорційності через t , то отримаємо:

$\frac{x - x_0}{t} = \frac{y - y_0}{p} = t$, звідки $x = tx_0 + x_0$, $y = pt + y_0$. Останні два рівняння

називають *параметричними рівняннями прямої*. Їх зручно використовувати, наприклад, у фізиці для опису залежності траєкторії матеріальної точки від часу t .



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про різні рівняння прямої. Підготуйте невелике повідомлення.
2. Як ви вважаєте, навіщо потрібно так багато різних рівнянь прямої? Висловіть свою гіпотезу й спробуйте навести аргументи на її користь.
3. Чи доводилось вам у повсякденному житті чи під час вивчення інших навчальних дисциплін використовувати рівняння прямої? Якщо так, то поділіться досвідом.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $\frac{a+3}{a^2-1} + \frac{1}{a+1}$ і знайдіть його значення, якщо $a=1,25$.
2. Розв'яжіть рівняння.
а) $\sqrt{2x+3} = x$; б) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$.
3. У колі по один бік від його центра проведено дві паралельні хорди $AB=12$ см і $CD=16$ см. Знайдіть радіус цього кола, якщо відстань між прямими AB і CD дорівнює 2 см.
4. Тамара підрахувала, що за останній місяць їй дзвонили 8 друзів і подруг, причому кількість дзвінків від них була такою: 12, 6, 9, 3, 5, 7, 10, 3. Знайдіть для цієї вибірки: а) середнє арифметичне; б) моду; в) медіану.
5. Микола поклав у банк 2000 грн під 10 % річних. Знайдіть суму, яка буде на рахунку Миколи через 2 роки, якщо:
а) відсотки увесь час нараховувалися від початкової суми внеску; б) кожного наступного року відсотки нараховувалися від суми, яка була на рахунку на початку року.



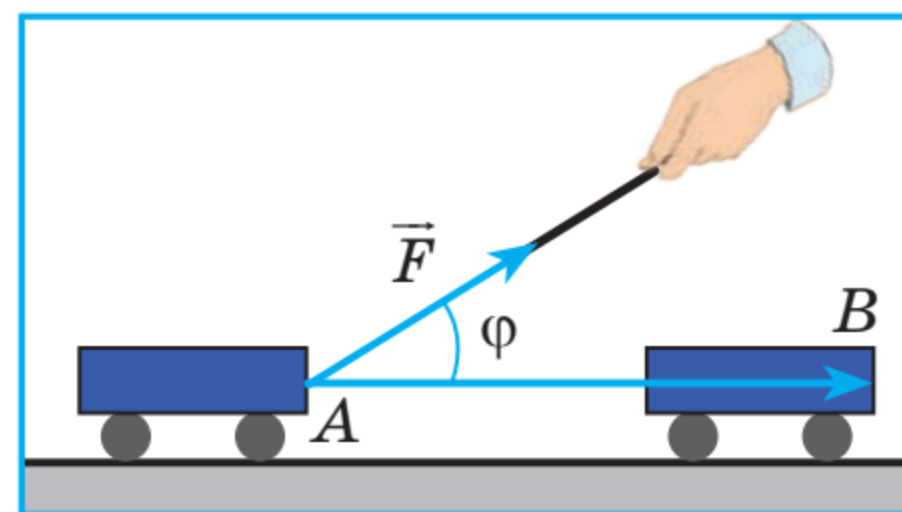
§ 28. Скалярний добуток векторів і його застосування (опційно)



Слухай, Петрику, колись на дачі я допомагала батькам вивозити з городу овочі та помітила цікаву річ. Я використовувала візок на колесах, який тягла на мотузці, причому що ближче ставала до візка, то важче мені було тягнути! Не знаєш, чому воно так?



Здається, ми вчили про це на уроках фізики. Зараз подивлюся в інтернеті. Ось, поглянь, навіть рисунок є, що схожий на твою ситуацію. Бачиш, робота A , яку виконує постійна сила $\vec{F}$ під час переміщення тіла з точки A в точку B , тобто на вектор $\overrightarrow{AB}$, дорівнює: $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$, де φ — кут між напрямком дії сили і напрямком переміщення.



Я здогадалася: що більшим є кут φ , то менший прилеглий катет відповідного прямокутного трикутника, а отже, і значення $\cos \varphi$.

Тому за тієї самої прикладеної сили робота, яку я виконую, буде меншою, а отже, і тягнути візок буде важче. Дякую!



Будь ласка. Але я от іще про що подумав. Сила та переміщення — це векторні величини, а робота — величина скалярна. Ці три величини пов'язані формулою роботи, яку я щойно знайшов. По суті маємо, що результатом дії над двома векторами є число. Якась містична дія виходить, бо раніше результатом дії над двома векторами ми вважали третій вектор. Розпитаймо про це вчителів.



Справді, дія доволі нетрадиційна. Ми, безумовно, розповімо про неї, але для цього нам доведеться розглянути декілька нових понять і навчитися знаходити тригонометричні функції не тільки гострих кутів, а й довільних кутів від 0° до 180° .

Для цього у верхній півплощині ПДСК розглянемо півколо із центром у початку координат і радіусом 1 (так зване **одиничне півколо**) і від додатного напрямку осі Ox у цю півплощину відкладемо кут α (від 0° до 180°). Будемо говорити, що **куту** α **відповідає точка** $M(x; y)$ одиничного півкола, якщо $\angle AOM = \alpha$ (рис. 28.1). Наприклад, кути 90° відповідає точка $B(0; 1)$, кути 180° — точка $C(-1; 0)$, кути 0° — точка $A(1; 0)$.

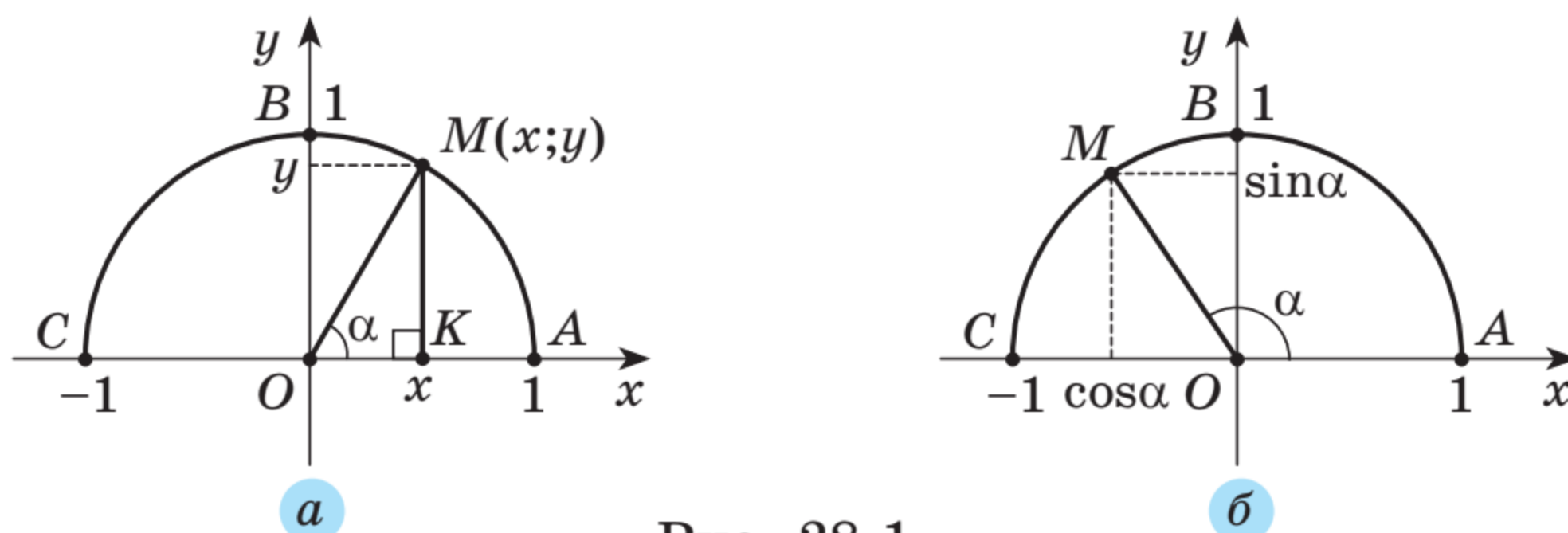


Рис. 28.1

Якщо α — гострий кут, то відповідна точка $M(x; y)$ розташована в першій координатній чверті (рис. 28.1, а) і тригонометричні функції кута α можна визначити з прямокутного

трикутника $ОКМ$ (катети якого $ОК = x$, $МК = y$, а гіпотенуза $ОМ = 1$). Тоді:

$$\cos \alpha = \frac{ОК}{ОМ} = \frac{x}{1} = x, \quad \sin \alpha = \frac{МК}{ОМ} = \frac{y}{1} = y,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{МК}{ОК} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{ОК}{МК} = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$



Отримані результати підказують, як означити тригонометричні функції довільного кута α від 0° до 180° (див. рис. 28.1, б):



Косинусом кута α (від 0° до 180°) називають абсцису, а **синусом** — ординату відповідної точки $M(x; y)$ одиничного півкола, тобто $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$. **Тангенсом** кута α (від 0° до 180°) називають відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, а **котангенсом** кута α називають відношення $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$,

$$\text{тобто } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Зокрема, за цими означеннями: $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$; $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$; $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$. Зауважимо також, що $\operatorname{tg} 90^\circ$ не існує, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати 0. Із тієї самої причини також не існують $\operatorname{ctg} 0^\circ$ і $\operatorname{ctg} 180^\circ$.

Тригонометричні функції інших кутів можна знаходити за допомогою калькулятора (див. § 20). Наприклад, $\sin 150^\circ = 0,5$; $\cos 120^\circ = -0,5$; $\cos 130^\circ \approx -0,643$ (з точністю до тисячних).



Згадаємо, що рівняння кола із центром у початку координат і радіусом 1 має вигляд: $x^2 + y^2 = 1$. Тоді координати всіх точок одиничного півкола задовольняють цій рівності і, враховуючи означення синуса й косинуса кута α від 0° до 180° , одержуємо рівність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, яку називають **основною тригонометричною тотожністю**.



Тепер повернемося до питання про запис механічної роботи як дії над двома векторами. Дамо таке означення.



Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ називають **число** $a_1b_1 + a_2b_2$. Скалярний добуток векторів позначають $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$. Тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Якщо хоча б один із векторів буде нульовим $\vec{0}(0; 0)$, то за означенням одержуємо, що скалярний добуток дорівнюватиме нулю: $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$.



Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають **скалярним квадратом вектора** $\vec{a}$. Очевидно, що $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$, тобто **скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини**. З означення скалярного добутку векторів випливають такі твердження.

Властивості скалярного добутку векторів.

Для довільних векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$, $\vec{c}(c_1; c_2)$ і числа k :

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.



Доведемо рівність 3. Ліва частина рівності дорівнює $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2) \cdot (c_1; c_2) = (a_1 + b_1) \cdot c_1 + (a_2 + b_2) \cdot c_2$, а права частина дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$. Очевидно, що ліва та права частини рівні.

Рівності 1 і 2 доведіть самостійно.

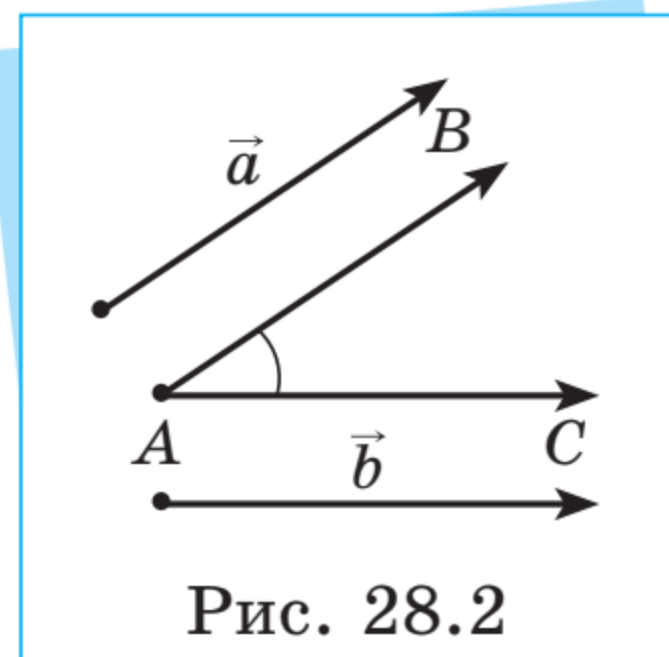


Введемо також поняття кута між векторами, щоб навчитися знаходити скалярний добуток векторів не лише через їх координати.

Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (рис. 28.2).

Кутом між довільними двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають кут між рівними їм векторами зі спільним початком (див. рис. 28.2).

Кут між однаково напрямленими векторами вважають рівним нулю.



Позначають кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так: $\angle(\vec{a}; \vec{b})$. Якщо кут між векторами дорівнює 90° , то вектори називають **перпендикулярними** та позначають $\vec{a} \perp \vec{b}$.

ТЕОРЕМА (про скалярний добуток векторів).

Скалярний добуток ненульових векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

Доведення теореми про скалярний добуток векторів:
rnk.com.ua/109667



Тепер ми бачимо, що Петрик мав рацію, і робота A , яку виконує незмінна сила $\vec{F}$ під час переміщення тіла з точки A в точку B , тобто на вектор $\overrightarrow{AB}$ і яка дорівнює $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{F}$ і $\overrightarrow{AB}$, може бути записана як скалярний добуток цих векторів: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.



З теореми про скалярний добуток векторів можна отримати корисні наслідки.

Наслідок 1. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові вектори, то $\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Наслідок 2. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є перпендикулярними, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, і навпаки, якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то вектори є перпендикулярними. Обґрунтуйте ці наслідки самостійно.



Розглянемо приклад застосування скалярного добутку векторів до обчислення градусної міри кутів.

Приклад 1. Знайдіть кути трикутника ABC , знаючи координати його вершин: $A(0; 7)$, $B(4\sqrt{3}; 7)$, $C(3\sqrt{3}; 4)$.

Для знаходження кута C запишемо координати векторів $\overrightarrow{CA}(-3\sqrt{3}; 3)$ і $\overrightarrow{CB}(\sqrt{3}; 3)$ та знайдемо їх скалярний добуток: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 3 = 0$.

Тоді за наслідком 2: $\angle C = 90^\circ$.

Для знаходження кута B запишемо координати векторів $\overrightarrow{BA}(-4\sqrt{3}; 0)$ і $\overrightarrow{BC}(-\sqrt{3}; -3)$ та знайдемо їх скалярний добуток: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$ і довжини цих векторів: $|\overrightarrow{BA}| = 4\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{3}$.

Тоді за формулою з наслідку 1: $\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{12}{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

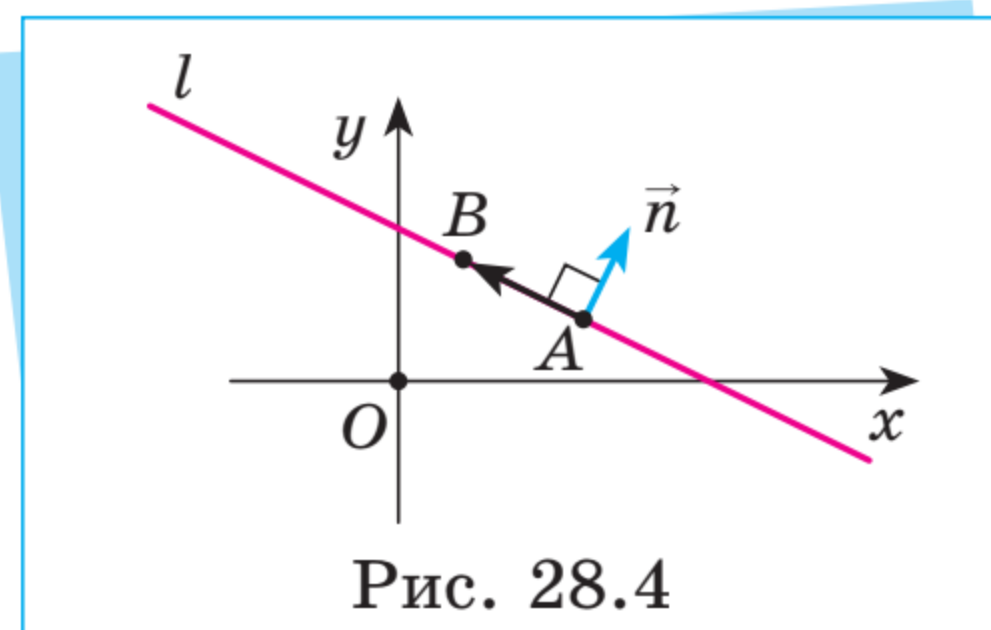
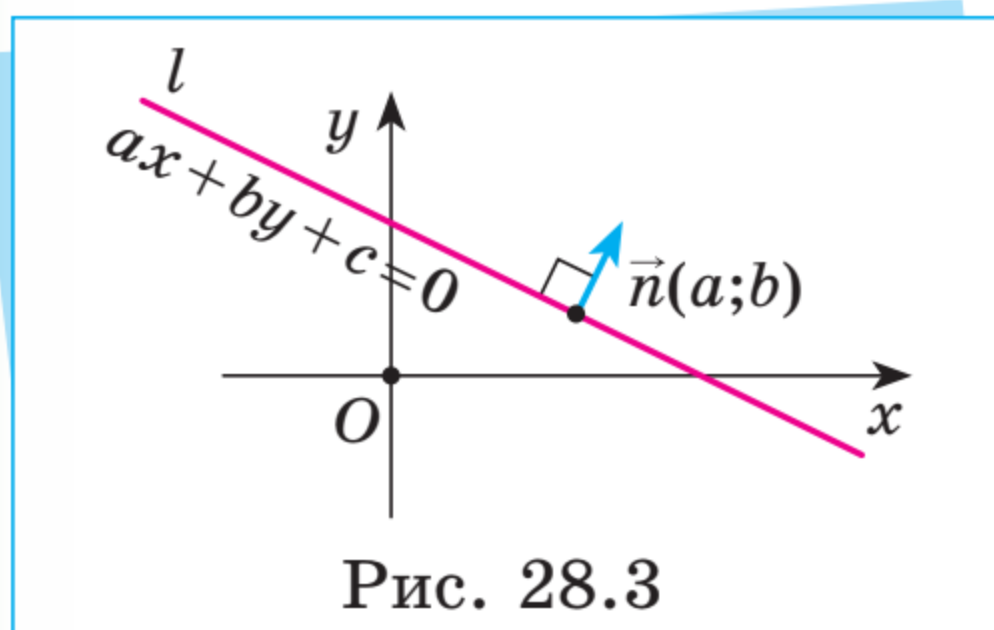
Ураховуючи, що кут B — гострий кут прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), одержуємо, що $\angle B = 60^\circ$. Зрозуміло, що тоді $\angle A = 30^\circ$.



Скалярний добуток векторів використовують також у теорії прямих на площині.

Приклад 2. Доведіть, що пряма l , яка задана рівнянням $ax + by + c = 0$ (де a і b одночасно не дорівнюють нулю), перпендикулярна до вектора $\vec{n}(a; b)$ — вектора нормалі до прямої (рис. 28.3).

Візьмемо дві довільні точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на прямій l (рис. 28.4). Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ матиме координати $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.



Оскільки точки B і A лежать на прямій l , то виконуються рівності $ax_2 + by_2 + c = 0$, $ax_1 + by_1 + c = 0$. Віднімаючи ці рівності, одержуємо: $a(x_2 - x_1) - b(y_2 - y_1) = 0$. Але остання рівність означає, що $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Ураховуючи, що вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{AB}$ ненульові, одержуємо $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, тобто $l \perp \vec{n}$.

Приклад 3. Доведіть, що рівняння прямої l , яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора нормалі $\vec{n}(a; b)$, має вигляд $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Візьмемо на прямій l довільну точку $B(x; y)$, відмінну від точки A (див. рис. 28.4). Тоді $\overrightarrow{AB}(x - x_0; y - y_0)$. Ураховуючи, що точка B буде належати прямій l тоді й тільки тоді, коли $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, тобто коли $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, одержуємо: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ — рівняння прямої l .



Перевірте себе!

1. Поясніть, використовуючи одиничне півколо, як означаються тригонометричні функції кутів від 0° до 180° . Поясніть, як знайти тригонометричні функції кутів: 0° , 90° , 180° .

2. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами.
3. Поясніть, як означається кут між векторами. Які вектори називають перпендикулярними?
4. Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів.
5. Чому дорівнює скалярний добуток перпендикулярних векторів?
6. Що можна сказати про розміщення двох ненульових векторів, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю?



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. На одиничному півколі позначено точки, які відповідають заданим кутам (рис. 1). Укажіть відповідну точку для кожного заданого кута.

- | | |
|------------------|-----------------|
| а) 180° ; | г) 60° ; |
| б) 45° ; | д) 90° . |
| в) 120° ; | |

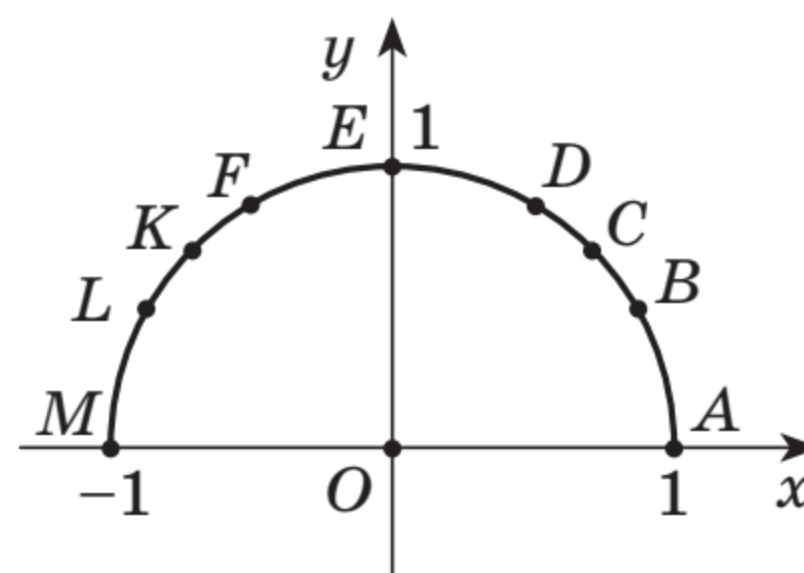


Рис. 1

2. На одиничному півколі позначено точки, які відповідають заданим кутам (див. рис. 1). Укажіть відповідну точку для кожного заданого кута.

- а) 0° ; б) 135° ; в) 30° ; г) 150° .

3. Чи може абсциса одиничного півкола дорівнювати числу:
а) $-0,7$; б) $1,3$; в) $0,9$; г) $-1,1$? Поясніть свою відповідь.

4. Чи може ордината одиничного півкола дорівнювати числу:
а) $-0,3$; б) $0,3$; в) $1,2$; г) $0,1$? Поясніть свою відповідь.

5. На одиничному півколі задано точку $K(-0,6; 0,8)$, яка відповідає куту α (рис. 2). Запишіть значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

6. На одиничному півколі задано точку $M(0,8; 0,6)$, яка відповідає куту β (див. рис. 2). Запишіть значення $\sin \beta$ і $\cos \beta$.

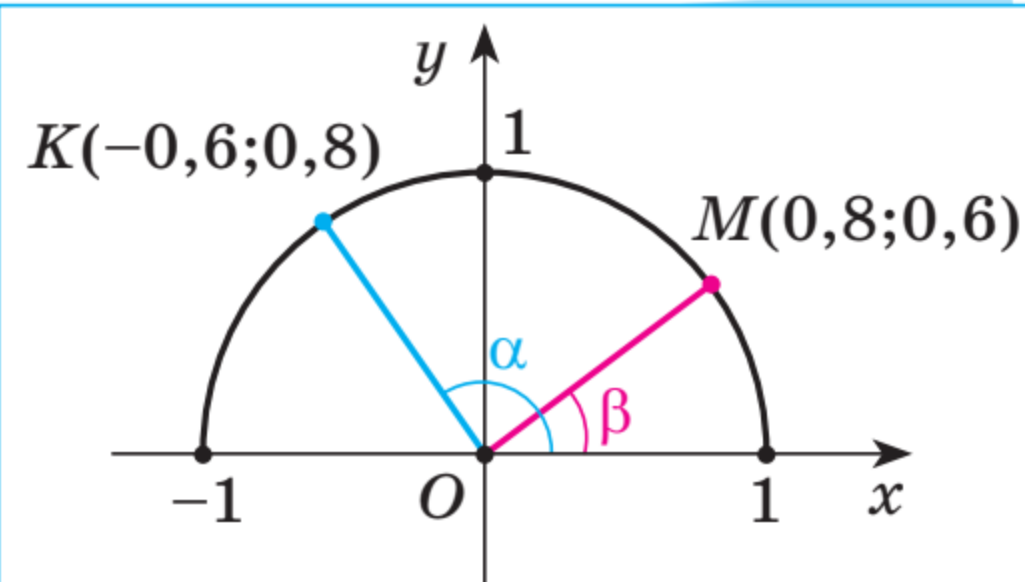


Рис. 2

7. У трикутнику ABC : $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 40^\circ$ (рис. 3). Знайдіть кут між векторами:

- а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$;
- б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$;
- в) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$.

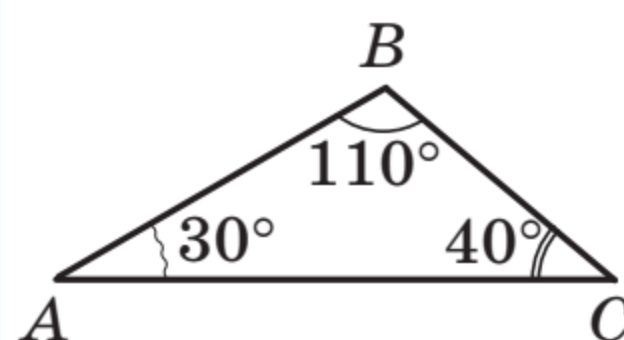


Рис. 3

8. У трикутнику EKM : $\angle E = 50^\circ$, $\angle K = 70^\circ$, $\angle M = 60^\circ$ (рис. 4). Знайдіть кут між векторами:

- а) $\overrightarrow{EK}$ і $\overrightarrow{EM}$;
- б) $\overrightarrow{ME}$ і $\overrightarrow{KM}$;
- в) $\overrightarrow{EK}$ і $\overrightarrow{MK}$.

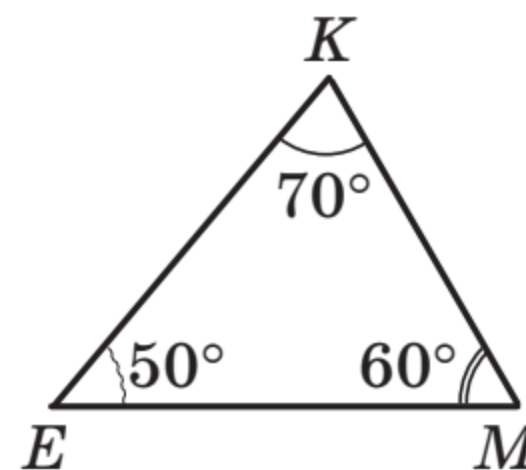


Рис. 4

9. Знаючи координати векторів $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(5; 3)$, знайдіть скалярний добуток векторів за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}(a_1; a_2) \cdot \vec{b}(b_1; b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

10. Знаючи координати векторів $\vec{a}(-3; -5)$ і $\vec{b}(2; 7)$, знайдіть скалярний добуток векторів за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}(a_1; a_2) \cdot \vec{b}(b_1; b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

11. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$, знайдіть скалярний добуток векторів за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

12. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$, знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$.



Середній рівень

13. На одиничному півколі задано точку $T(-0,8; 0,6)$, яка відповідає куту α (рис. 5). Знайдіть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

14. На одиничному півколі задано точку $E\left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$, яка відповідає куту β (див. рис. 5). Знайдіть $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$.

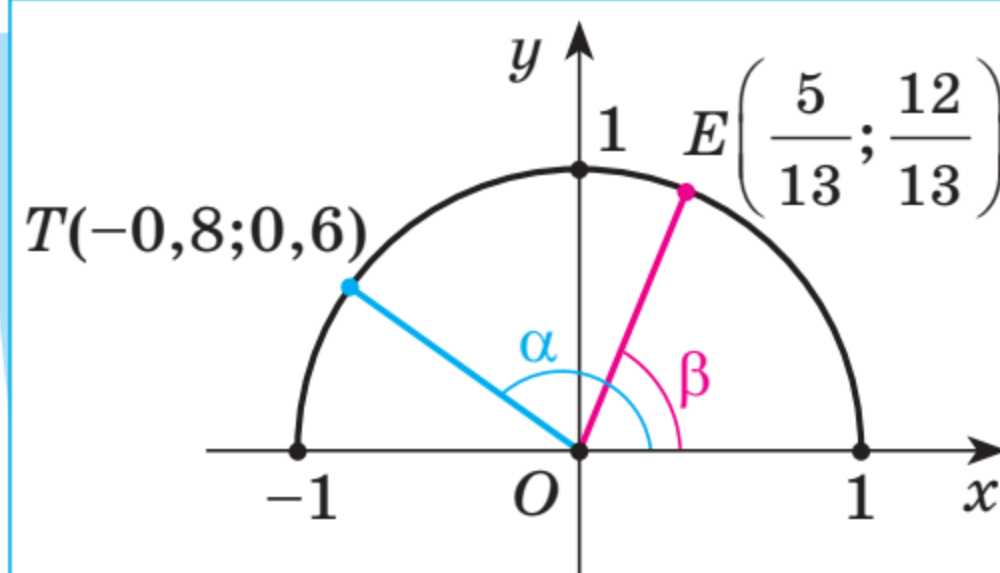


Рис. 5

15. Знайдіть значення виразу.

а) $\sin 0^\circ + 2\sin 90^\circ$; б) $3\cos 0^\circ + 2\sin 180^\circ$.

16. Знайдіть значення виразу.

а) $3\cos 90^\circ + 5\cos 0^\circ$; б) $5\cos 180^\circ - 3\sin 90^\circ$.

17. За допомогою калькулятора знайдіть (із точністю до тисячних):

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 160^\circ$; в) $\operatorname{tg} 95^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 170^\circ$.

18. За допомогою калькулятора знайдіть (із точністю до тисячних):

а) $\sin 175^\circ$; б) $\cos 140^\circ$; в) $\operatorname{tg} 165^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 100^\circ$.

19. У трикутнику ABC : $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть кут між векторами: а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$.

20. У паралелограмі $ABCD$: $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть кут між векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

21. Знаючи координати векторів $\vec{a}(-6; 4)$ і $\vec{b}(3; -5)$, знайдіть їх скалярний добуток.

22. Знаючи координати векторів $\vec{a}(7; -3)$ і $\vec{b}(-2; 4)$, знайдіть їх скалярний добуток.

23. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$, знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

24. Знаючи, що $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=12$, $\angle(\vec{a};\vec{b})=45^\circ$, знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Достатній рівень

25. Спираючись на означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° , укажіть знаки тригонометричних функцій тупих кутів α . Відповідь поясніть.

26. Зобразіть задані кути на одиничному півколі і, користуючись означенням тригонометричних функцій, порівняйте значення:
а) $\sin 20^\circ$ і $\sin 50^\circ$; б) $\sin 110^\circ$ і $\sin 140^\circ$; в) $\cos 10^\circ$ і $\cos 70^\circ$; г) $\cos 100^\circ$ і $\cos 160^\circ$. Відповідь поясніть.

27. Укажіть знак виразу. Відповідь поясніть.
а) $\sin 130^\circ$; б) $\cos 170^\circ$; в) $\operatorname{tg} 80^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 140^\circ$.

28. Укажіть знак виразу. Відповідь поясніть.
а) $\sin 100^\circ$; б) $\cos 130^\circ$; в) $\operatorname{tg} 135^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 40^\circ$.

29. Знайдіть значення виразу.
а) $4\operatorname{tg} 0^\circ - 6\sin 90^\circ - 9\cos 180^\circ$;
б) $4\operatorname{ctg} 90^\circ + 2\sin 180^\circ - 4\cos 0^\circ$.

30. Знайдіть значення виразу.
а) $2\sin 0^\circ - 5\operatorname{ctg} 90^\circ - 4\cos 180^\circ$;
б) $7\sin 90^\circ - 3\operatorname{tg} 180^\circ - 5\cos 0^\circ$.

31. У прямокутної трапеції $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 40^\circ$. Знайдіть кут між векторами: а) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

32. У ромба $ABCD$ $\angle B = 50^\circ$. Знайдіть кут між векторами: а) $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$.

33. Доведіть, що вектори $\vec{a}(5; -2)$ і $\vec{b}(-4; -10)$ є перпендикулярними.

34. Доведіть, що вектори $\vec{m}(-6;3)$ і $\vec{n}(5;10)$ є перпендикулярними.

35. Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $A(3;2)$, $B(1;6)$, $C(9;5)$ є прямокутним із прямим кутом A .

36. Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $M(-2;2)$, $N(0;5)$, $K(6;1)$ є прямокутним із прямим кутом N .



Високий рівень

37. Укажіть знак виразу. Відповідь поясніть.

а) $\cos 100^\circ \cdot \operatorname{tg} 160^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{ctg} 110^\circ$;

б) $\sin 105^\circ \cdot \operatorname{ctg} 170^\circ$;

г) $\cos 140^\circ \cdot \sin 160^\circ$.

38. Укажіть знак виразу. Відповідь поясніть.

а) $\sin 175^\circ \cdot \operatorname{ctg} 125^\circ$;

в) $\cos 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 145^\circ$;

б) $\cos 95^\circ \cdot \operatorname{tg} 165^\circ$;

г) $\cos 115^\circ \cdot \operatorname{ctg} 107^\circ$.



39. Користуючись рис. 6, доведіть, що для всіх кутів α від 0° до 180° :

а) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

б) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.



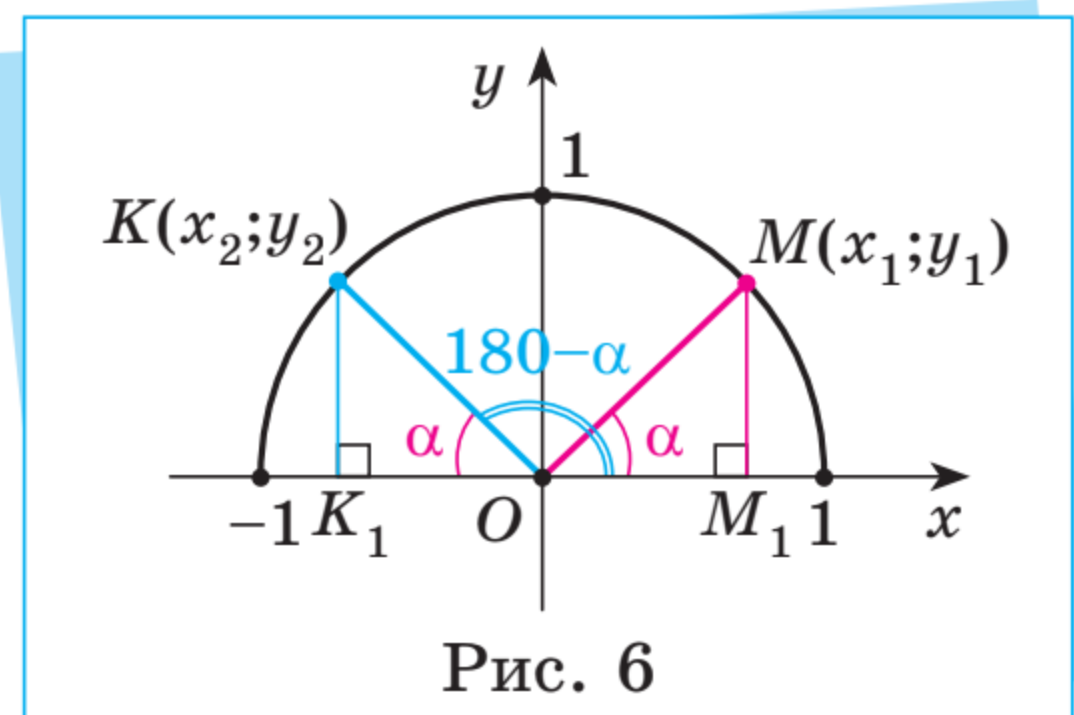
40. Користуючись результатами завдання 39, доведіть, що для всіх кутів α від 0° до 180° :

а) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ (для $\alpha \neq 90^\circ$);

б) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ (для $\alpha \neq 0^\circ$ і $\alpha \neq 180^\circ$).



41. Користуючись результатами завдань 39, 40 і табличними значеннями тригонометричних функцій, наведеними у § 20, обґрунтуйте правильність значень тригонометричних функцій, поданих у таблиці нижче.



α	120°	135°	150°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

42. Доведіть, що для всіх указаних кутів α від 0° до 180° виконуються рівності:

а) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ);$

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ \text{ і } \alpha \neq 180^\circ).$

43. Знайдіть градусні міри кутів трикутника PKM , якщо $P(3\sqrt{3}; 1-3\sqrt{3})$, $K(-3; -2)$, $M(0; 1)$.

44. Знайдіть градусні міри кутів трикутника DEF , якщо $D(1; 2)$, $E(4; 1)$, $F(3; 3)$.

45. Знайдіть усі значення x , за яких вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть перпендикулярними: $\vec{a}(2x; -6)$, $\vec{b}(3x; 25)$.

46. Знайдіть усі значення y , за яких вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ будуть перпендикулярними: $\vec{m}(10; -y)$, $\vec{n}(18; 5y)$.

47. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$, знайдіть $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

48. Знаючи, що $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 5$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$, знайдіть $|3\vec{m} + 2\vec{n}|$.

49. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(4; -5)$.

50. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2; 4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(3; 7)$.

51. Доведіть: дві прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

52. Доведіть: дві прямі $y = k_1x + b$ і $y = k_2x + b$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

53. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо $A(-3; -1)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 2)$, $D(1; -2)$.

54. Доведіть, що чотирикутник $EFKM$ — прямокутник, якщо $E(1; -3)$, $F(-2; -2)$, $K(0; 4)$, $M(3; 3)$.

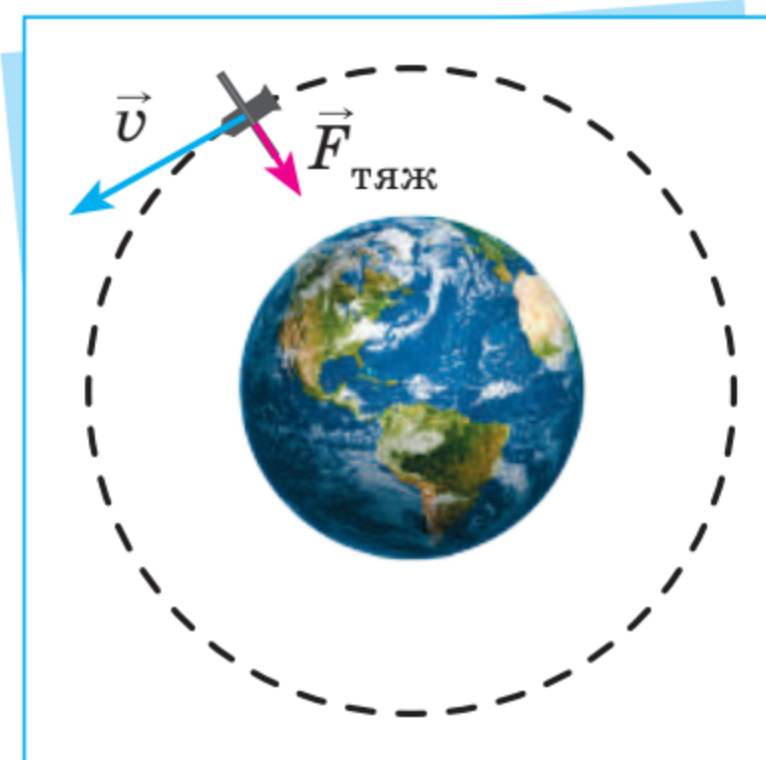


Цікавинки від дідуса Тараса

Ми з'ясували, що робота A , яку виконує незмінна сила $\vec{F}$ під час переміщення тіла з точки A в точку B , тобто на вектор $\overrightarrow{AB}$, дорівнює скалярному добутку цих векторів: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{F}$ і $\overrightarrow{AB}$. Зазначимо: коли $\varphi = 90^\circ$, то $\cos \varphi = 0$ і тоді робота $A = 0$. Тобто, якщо напрямок дії сили $\vec{F}$ весь час буде перпендикулярним до напрямку вектора переміщення, сила не буде виконувати роботу.

Наприклад, під час руху супутника по орбіті навколо Землі (див. рисунок) сила тяжіння, яка діє на супутник, не виконує ніякої роботи (поясніть чому). Саме тому супутник не втрачає свою енергію і може залишатися на орбіті багато років.

Також зазначимо, що у вищій математиці розглядають не лише скалярний, а й векторний, косий, мішаний та інші добутки векторів, які використовують у різних галузях математики та природничих



наук. Поняття скалярного добутку векторів (разом із поняттям векторного добутку векторів) було вперше введено ірландським математиком *Вільямом Ровеном Гамільтоном* у 1846 р.



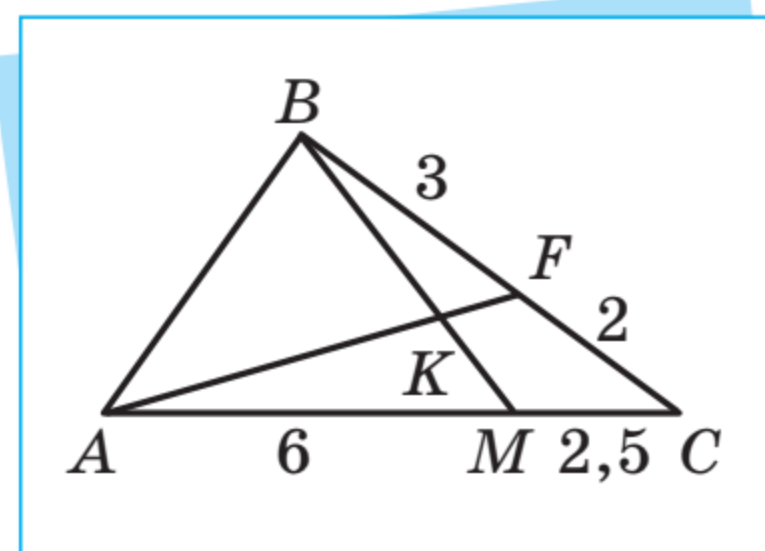
Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Якщо кут φ між напрямком сили і переміщення буде тупим (або 180°), то за формулою $A = \vec{F} \cdot \vec{AB} = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \varphi$ робота A , яку виконує незмінна сила $\vec{F}$, виражатиметься від'ємним числом. Запитайте у вчителя / вчительки фізики, який фізичний зміст має таке значення роботи? Підготуйте невелике повідомлення на цю тему.
2. Наведіть приклади використання скалярного добутку векторів у природничих науках. Підготуйте невеликі повідомлення щодо кожного такого використання.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $\frac{3x_1 + 3x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$, де x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 + 5x - 2 = 0$.
2. Побудуйте в одній ПДСК графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = -\frac{2}{x}$. Скільки спільних точок мають ці графіки?
3. Використовуючи дані рисунку, знайдіть $AK : KF$.
4. Відомо, що розгортка бічної поверхні циліндра є прямокутником зі сторонами 10π см і 8π см. Знайдіть радіус основи цього циліндра. Розгляньте всі можливі варіанти. Виготовте модель циліндра за цією розгорткою.



5. Укажіть слово, яке є початком (а) або закінченням (б) слів (кількість крапок у дужках дорівнює кількості букв у цьому слові):

а) (. . . .) → ДА
→ СОК
→ НІСТ

б) СТА → (. . . .)
ЛІТЕРА →
ПАРТИ →

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 6

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть рисунок, на якому зображено вектор $\overrightarrow{PS}$.

А	Б	В	Г

2. Укажіть точку, що є серединою відрізка AB , якщо $A(-2; 6)$, $B(4; 8)$.

А	Б	В	Г
$C(2; 14)$	$D(1; 7)$	$E(6; 2)$	$K(3; 1)$

3. Укажіть рівняння прямої, що проходить через точку $P(3; -2)$ паралельно вектору $\vec{s}(5; 4)$.

А	В
$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{4}$	$\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{4}$
Б	Г
$5(x-3) + 4(y+2) = 0$	$5(x+3) + 4(y-2) = 0$

4. Коло задано рівнянням $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$. Знайдіть координати центра O і радіус R цього кола.

А	Б	В	Г	Д
$O(-2; 4)$ $R = 25$	$O(2; -4)$ $R = 5$	$O(0; 0)$ $R = 5$	$O(-2; 4)$ $R = 5$	$O(2; -4)$ $R = 25$

5. На рисунку зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Укажіть правильну векторну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$	$\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$	$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$	$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$	$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$

6. Відомо, що $\overline{KM}(2; 5)$, а $M(3; 1)$. Укажіть координати точки K .

А	Б	В	Г	Д
$(5; 6)$	$(1; -4)$	$(1; 9)$	$(-1; 4)$	$(2; 18)$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

7. У партері Театру сучасної драми відстань між будь-якими двома сусідніми глядачами в одному ряду становить 1 метр, а відстань між рядами — теж 1 метр. Іван і Марічка купили два квитки в партер, причому Іван сидітиме в 5-му ряду, місце 8, а Марічка — у 3-му ряду, місце 4. Знайдіть відстань між Іваном і Марічкою під час вистави (у метрах). Відповідь округліть до сотих.
8. Відомо, що $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(4; 1)$. Знайдіть квадрат довжини вектора $\vec{c} = 2\vec{b} - \vec{a}$.
9. Відомо, що $A(2; 3)$, $B(1; -1)$, $C(x; 2)$, $D(-2; 0)$. Знайдіть значення x , якщо $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Дано трикутник MPS , причому $M(-2; 1)$, $P(0; -4)$, $S(4; 7)$. Знайдіть довжину медіани PL цього трикутника.

11. У паралелограмі $ABCD$ точка O є точкою перетину діагоналей AC і BD , точка K — середина сторони BC , а точка M — середина сторони CD . Виразіть через вектори $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$ такі вектори: а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{OC}$; д) $\overrightarrow{DK}$; е) $\overrightarrow{BM}$.
12. Запишіть рівняння кола із центром у точці $O_1(2; -7)$ і радіусом $R_1 = 7$ та прямої MK , якщо $M(-1; 3)$, $K(2; 0)$. Установіть взаємне розташування цього кола та прямої MK з колом, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 = 9$.
13. Знайдіть довжину кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.
14. Трикутник AOB утворений перетином прямої $3x + 4y - 12 = 0$ з осями координат (точка O — початок координат). Знайдіть рівняння: а) кола, вписаного в трикутник AOB ; б) кола, описаного навколо трикутника AOB .

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ із вершинами в точках $A(5; -1)$, $B(-7; -6)$, $C(-12; 6)$, $D(0; 11)$ є квадратом.
2. Визначте вид трикутника ABC з вершинами в точках $A(1; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 2)$ та знайдіть координати центра й радіус описаного навколо трикутника кола.
-  3. Доведіть: дві прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (з ненульовими коефіцієнтами) є паралельними тоді й тільки тоді, коли $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.
-  4. Доведіть: дві прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.
5. Вершини трикутника ABC мають координати $A(1; 2)$, $B(2; 1)$, $C(3; 4)$. Знайдіть координати точки перетину його медіан.

6. На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки B , M і N лежать на одній прямій.
7. Знайдіть усі значення a , за яких задані кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x = a^2 - 9$ дотикаються.
8. Знайдіть усі значення a , за яких задані кола $x^2 + y^2 + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 - 4y = a^2 - 2a - 3$ мають: а) зовнішній дотик; б) внутрішній дотик.
9. Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.
10. Доведіть, що відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$ дорівнює $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

СЛОВНИЧОК

Рівняння кола (прямої) — equation of a circle (straight line)

Колінеарні (рівні) вектори — collinear (equal) vectors

Додавання (віднімання) векторів — adding (subtracting) vectors

Множення вектора на число — multiplication of a vector by a number

Координати вектора — coordinates of a vector

Рівняння прямої проходить через точку прямої та її вектор напрямку — the equation of a straight line through a point on a line and its direction vector

Рівняння прямої проходить через дві точки цієї прямої — the equation of a straight line through two points of this straight line

Взаємне розташування прямої та кола — mutual location of a straight line and a circle (two circles)

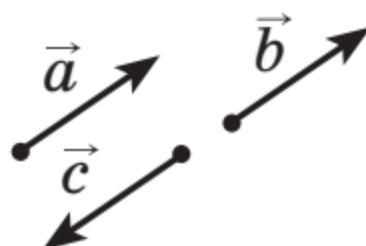
ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 6

Вектори (направлені відрізки)

Колінеарні вектори



$$\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$$



$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ — співнаправлені
 $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{c}$ — різнонаправлені

Рівні вектори



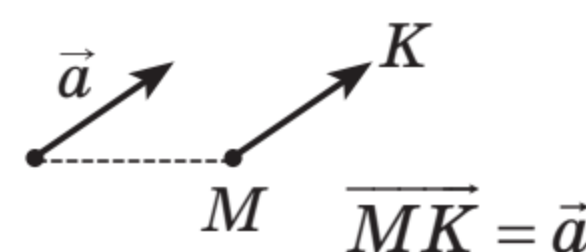
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| & (\text{довжини векторів рівні}) \\ \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} & (\text{вектори співнаправлені}) \end{cases}$$



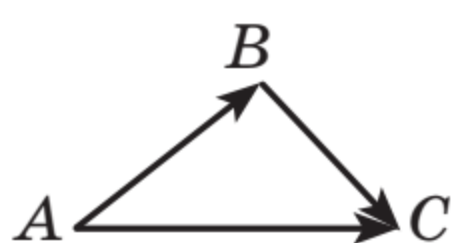
Властивість відкладання векторів



будь-який вектор $\vec{a}$ можна єдиним чином відкласти від будь-якої точки M площини

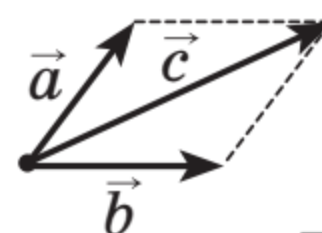


Додавання векторів



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(правило трикутника)



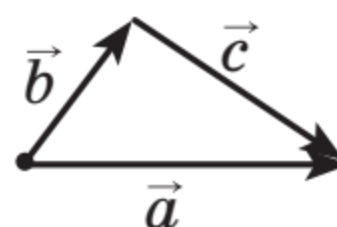
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

(правило паралелограма)

Віднімання векторів



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} : \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

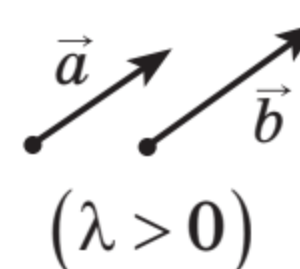


Множення вектора на число

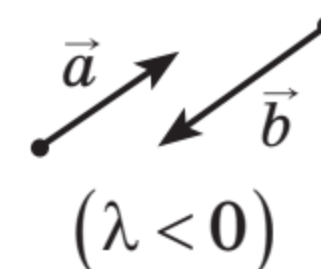


$$\vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda = \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow |\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

якщо $\lambda > 0$, $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$,
 якщо $\lambda < 0$, $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda = 0$, $\vec{b} = \vec{0}$



$$(\lambda > 0)$$



$$(\lambda < 0)$$

Основні задачі ПДСК на площині

➔ **1** Знаходження координат даної точки

➔ **2** Побудова точки з даними координатами

➔ **3** Знаходження відстані між точками $K(x_1; y_1)$, $M(x_2; y_2)$

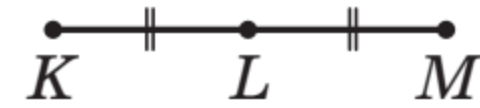


$$KM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

➔ **4** Знаходження координат середини відрізка

$K(x_1; y_1)$, $M(x_2; y_2)$; $L(x_0; y_0)$ — середина відрізка KM

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Координати вектора

➔ **1** Обчислення координат $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$
 $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

➔ **2** Дії над векторами $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$
 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$; $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2)$

➔ **3** Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$
 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \lambda \cdot a_1 \\ b_2 = \lambda \cdot a_2 \end{cases} \text{ або } \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \quad (a_1 \neq 0; a_2 \neq 0)$

➔ **4** Довжина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Рівняння ліній на площині

1 Рівняння кола

$M_0(x_0; y_0)$ — центр кола, R — радіус кола,

$M(x; y)$ — довільна точка кола

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

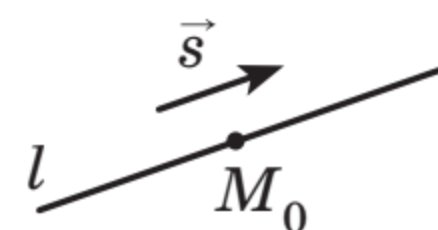
2 Рівняння прямої через точку та вектор напрямку

$M_0(x_0; y_0) \in l$

$\vec{s}(m; p) \parallel l$

$M(x; y)$ — довільна точка прямої l

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

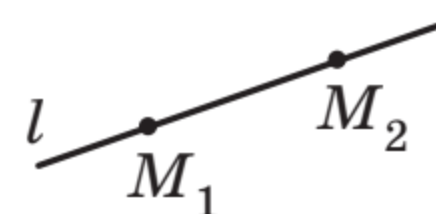
**3 Рівняння прямої через дві точки**

$M_1(x_1; y_1) \in l$

$M_2(x_2; y_2) \in l$

$M(x; y)$ — довільна точка прямої l

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



РОЗДІЛ 7. ОСНОВИ ФІНАНСОВОЇ ГРАМОТНОСТІ

CHAPTER 7. BASICS OF FINANCIAL LITERACY

§ 29. Формули простих і складних відсотків. Формули простих і складних дисконтів



Слухай, Тетянко, вчора бачив дивну рекламу: «Поспішайте оформити депозити в нашому банку! Гарантуємо 24 % річних щомісячно у гривні та 8 % річних щопіврічно в доларах і євро!» Ти часом не знаєш, що це означає?



Чесно кажучи, мені теж дивно, як *річні* відсотки можуть бути щомісячними чи щопіврічними. Я теж у цих фінансових оголошеннях не завжди розуміюся. Наприклад, нещодавно чула від батьків, що один із інтернет-провайдерів для постійних клієнтів пропонує вигідний дисконт — 18 % річних на 4 місяці. Надзвичайно цікаво, що це означає!



Я знаю, що в перекладі з англійської *discount* — знижка. А про депозит я колись читав у інтернеті. Це гроші, які банк прийняв від вкладника на визначений термін зберігання під відсоток. Тому мені здається, що в разі оформлення депозитів кількість грошей на рахунку клієнта із часом певним чином збільшується, а в разі оформлення дисконту вартість послуг на деякий час певним чином зменшується.



Усе логічно, але краще запитаймо в учителів, бо знати точно завжди краще, ніж здогадуватися.

Прості відсотки і дисконти



Петрику і Тетянко, описані вами ситуації стосуються розділу науки, який називають **фінансова математика**. Детальніше з нею ви познайомитеся у старшій і вищій школах. А зараз розглянемо лише основні поняття цього розділу науки.



Прибуток від вкладених коштів або винагороду за користування грошима називають **відсотковими коштами** або просто **відсотками**. При цьому самі вкладені кошти або гроші, що надаються в користування, називають **початковою (основною) сумою**, а початкову суму разом із відсотковими коштами називають **кінцевою сумою**. Зазвичай початкову суму позначають буквою P , кінцеву — буквою S , відсоткові кошти — буквою I .



Відношення відсоткових коштів до основної суми, виражене у відсотках, називають **нормою відсотка**.

Норму відсотка зазвичай позначають буквою i . Із означення випливає, що $i = \frac{I}{P} \cdot 100 \%$. Норму відсотка можна також записувати десятковим або звичайним дробом.

Наприклад, якщо Петрик позичить у банку 1000 грн на пів року, а банк за користування цими коштами нараховує 50 грн відсоткових коштів, то $P=1000$ грн, $S=1050$ грн, $i = \frac{50}{1000} \cdot 100 \% = 5 \% = 0,05$.



Якщо відсотки за користування коштами нараховуються *лише* з основної суми, то такі відсотки називають **простими відсотками**. Позначимо буквою r норму відсотка за один рік, тобто **річну відсоткову ставку**, а буквою t — **час позики** в роках. Тоді норма відсотка $i = rt$, відсоткові кошти I можна обчислити за формулою $I = Prt$, а кінцеву суму — за формулою $S = P + I$, або $S = P + Prt$. Останню формулу зручно записати у вигляді:

$$S = P(1 + rt)$$

Цю формулу часто називають **формулою простих відсотків**.

Наприклад, якщо Тетянка позичить у банку 500 грн на 3 місяці під 8 % річних, то $P=500$ грн, $r=8\% = 0,08$, $t = \frac{3}{12} = 0,25$. Тоді за формулою простих відсотків через 3 місяці вона має повернути банку кінцеву суму $S = 500 \cdot (1 + 0,08 \cdot 0,25) = 500 \cdot 1,02 = 510$ (грн).



Нарахування відсотків за **простою схемою** здебільшого використовуються фінансовими установами для позик на невеликий період часу — зазвичай до 1 року. Якщо термін позики виражають у днях, то для зручності обчислення норми відсотка вважають, що рік має 360 днів. Наприклад, якщо позику взято на 72 дні, то час позики $t = \frac{72}{360} = 0,2$.



Дисконт у фінансовій математиці — будь-яке зменшення кількості грошей: суми оплати за послуги, кількості грошей на рахунку, суми боргу тощо. У банківській справі дисконт розуміють у більш вузькому сенсі.



Банківський дисконт — це кошти, що віднімають від суми, яку слід сплатити під час погашення зобов'язань перед банком, якщо це погашення відбувається раніше запланованого терміну. При цьому кошти, які залишаються після віднімання дисконту від **суми погашення**, називають **виручкою**.

Зазвичай дисконт позначають буквою D , суму погашення — буквою S , виручку — буквою P .

Наприклад, нехай пан Дмитро має сплатити банку 10 000 грн. Якщо за 5 місяців до погашення банк продасть це зобов'язання пані Оксані за 9500 грн, то сума погашення $S = 10\,000$ грн, виручка банку $P = 9500$ грн, а дисконт $D = S - P = 500$ грн.



Для процедури дисконтування вводиться аналогічна термінологія — як для нарахування відсотків.



Норма дисконту для даного періоду часу — відношення дисконту за цей період до суми погашення зобов'язань. Норму дисконту зазвичай виражають у відсотках і позначають буквою j , тобто $j = \frac{D}{S} \cdot 100\%$. Норму дисконту також можна подати десятковим або звичайним дробом.

Для розглянутого прикладу норма дисконту становить:

$$j = \frac{500}{10\,000} \cdot 100\% = 5\% = 0,05.$$

Якщо дисконти розглядають *лише* від суми погашення зобов'язань і ця сума весь час залишається незмінною, то такі дисконти називають **простими дисконтами**. Аналогічно до простих відсотків прості дисконти розраховують на основі **річної дисконтної ставки**, яку зазвичай позначають буквою d , а норму дисконту j обчислюють за формулою $j = dt$, де t — **час дисконтування** в роках.

Для розглянутого прикладу річна дисконтна ставка становить:

$$d = \frac{j}{t} = 5\% : \frac{5}{12} = 12\% = 0,12.$$



Тепер я розумію, що означає дисконт на послуги інтернет-провайдерів із річною ставкою 18 % на 4 місяці! Виходить, що норма дисконту j становитиме $18 \% \cdot \frac{4}{12} = 6 \%$ і наша родина отримає 6 % знижки за користування інтернетом протягом 4 місяців.



Саме так, Тетянко. Крім того, між сумою погашення S , виручкою P і дисконтом D існує зв'язок, який виражається формулою $P = S - D$. Оскільки $D = Sj = Sdt$, то $P = S - Sdt$, або

$$P = S(1 - dt)$$

Останню формулу називають **формулою простих дисконтів**.



Формули простих відсотків і простих дисконтів між собою пов'язані, а буквені позначення початкової та кінцевої сум у формулі простих відсотків не випадково збігаються відповідно з позначенням виручки і суми погашення у формулі простих дисконтів. Повернімось до прикладу з паном Дмитром, банком і пані Оксаною. Коли пані Оксана купує зобов'язання пана Дмитра до дати його погашення, то вона фактично позичає гроші банку і володіє цим зобов'язанням як цінним папером. У день погашення пані Оксана отримає від пана Дмитра 10 000 грн, а також 500 грн прибутку на свою інвестицію 9500 грн. Для пані Оксани 9500 грн може вважатися початковою сумою внеску, дисконт банку в 500 грн — власними відсотковими коштами, сума погашення в 10 000 грн — кінцевою сумою.

Однак при цьому очевидно, що *норма відсотка, яку отримує від своєї інвестиції пані Оксана, не збігатиметься з нормою банківського дисконту*. Справді, ми вже визначили, що норма банківського дисконту в цьому випадку становить 5 %. Якщо ж розглядати 500 грн як відсоткові кошти на інвестицію пані Оксани

в 9500 грн, то норма відсотка $i = \frac{500}{9500} \cdot 100 \% = \frac{100}{19} \% \approx 5,26 \%$.

Річна відсоткова ставка також буде відрізнятися від річної дисконтної ставки. Раніше ми обчислили, що річна дисконтна ставка

$$d = 12 \% . \text{ Річна відсоткова ставка } r = \frac{100}{19} \% : \frac{5}{12} = \frac{240}{19} \% \approx 12,63 \% .$$

Зв'язок між річними відсотковими та дисконтними ставками виводиться з рівності $I = D$, тобто $Prt = Sdt$, або в підсумку:

$$Pr = Sd$$

У своїй фінансовій діяльності банки можуть використовувати при дисконтуванні обидві ці ставки, тому слід бути уважними та не плутати їх.



Розглянемо приклади.

Приклади

1. Зобов'язання на 20 350 грн, що погашається через 90 днів, продане банку, який установив 7 % річну норму простого відсотка при дисконтуванні. Якою буде виручка?

Розв'язання. У нас $S = 20\,350$ грн, $t = \frac{90}{360} = 0,25$, $r = 7 \% = 0,07$, потрібно знайти виручку P . За формулою простих відсотків $S = P(1 + rt)$. Тому $P = \frac{S}{1 + rt} = \frac{20\,350}{1 + 0,07 \cdot 0,25} = 20\,000$ (грн). Отже, виручка становитиме 20 000 грн.

2. Родина Ковальчуків бажає отримати в банку позику на 120 днів. Банк надає позики з річною нормою простого дисконту 7 %. Яку суму потрібно просити Ковальчукам, щоб отримати на руки 20 000 грн?

Розв'язання. У нас $P = 20\,000$ грн, $t = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$, $d = 7 \% = 0,07$, потрібно знайти суму погашення S . За формулою простих дисконтів

$$P = S(1 - dt). \text{ Тому } S = \frac{P}{1 - dt} = \frac{20\,000}{1 - 0,07 \cdot \frac{1}{3}} = 20\,477,82 \text{ (грн). Отже, Ко-}$$

вальчукам потрібно просити 20 477 грн 82 коп. Саме цю суму їм потім потрібно буде повернути банку.

Складні відсотки і дисконти



У випадках обчислення простих відсотків і простих дисконтів ми вважали, що сума, від якої вони обчислювалися, залишалася незмінною. Однак існує інший підхід до нарахування відсотків і дисконтів.



Якщо відсоткові кошти періодично додаються до початкової суми, а ця нова сума використовується як початкова для наступного інтервалу часу, причому така процедура повторюється певну кількість інтервалів часу, то останню кінцеву суму коштів називають **складним підсумком**. Різницю між складним підсумком і першою початковою сумою називають **складним відсотком**. Інтервал часу між двома послідовними нарахуваннями відсотків називають **періодом конверсії**.

Зазвичай в разі нарахування складних відсотків першу початкову суму позначають буквою P , останню кінцеву суму — буквою S , а як період конверсії розглядають місяць, квартал (3 місяці), півріччя (6 місяців) або рік (12 місяців).



Для прикладу обчислимо складний підсумок на банківському депозитному рахунку наприкінці року, якщо перша початкова сума $P = 1000$ грн, а річна відсоткова ставка становить 8 % і виплачується щокварталу. Це означає, що після кожних 3 місяців року потрібно нараховувати $8\% : 4 = 2\%$ від суми, яка буде на той час на рахунку. Наприкінці першого періоду конверсії (через 3 місяці року) на рахунку буде $1000 + 1000 \cdot 0,02 = 1000 \cdot (1 + 0,02) = 1020$ (грн). Наприкінці другого

періоду конверсії (через 6 місяців року) на рахунку буде вже $1020 + 1020 \cdot 0,02 = 1020 \cdot (1 + 0,02) = 1000 \cdot (1 + 0,02)^2 = 1040,4$ (грн). Наприкінці третього періоду конверсії (через 9 місяців року) отримаємо $1040,4 \cdot (1 + 0,02) = 1000 \cdot (1 + 0,02)^3 = 1061,208$ (грн). Нарешті, наприкінці четвертого періоду конверсії (через рік) на рахунку буде $1061,208 \cdot (1 + 0,02) = 1061,208 \cdot (1 + 0,02)^4 = 1082,43216$ (грн). Тобто складний підсумок S після округлення становитиме 1082 грн 43 коп., а складний відсоток $I = S - P = 82,43216$ грн, або 82 грн 43 коп.



Зрозуміло, що в такий спосіб обчислювати складні підсумки та складні відсотки незручно, але щойно розглянутий приклад показує, як можна вивести формулу обчислення складного підсумка в загальному випадку.

Нехай P — початкова сума, i — норма відсотка за період конверсії. Тоді наприкінці першого періоду конверсії кінцева сума становитиме $P(1+i)$, наприкінці другого періоду конверсії — $P(1+i)^2$, наприкінці третього — $P(1+i)^3$ і так далі. Якщо n — кількість періодів конверсії, то *остання кінцева сума*:

$$S = P(1+i)^n$$

Останню формулу називають **формулою складних відсотків**.



Як і в разі простих відсотків, під час обчислення складного підсумка користуються **річною відсотковою ставкою**, зазначаючи при цьому кількість періодів конверсії на рік. Якщо кількість періодів конверсії *на рік* дорівнює m , то річну відсоткову ставку позначають r_m . При цьому очевидно, що норма відсотка за період конверсії $i = \frac{r_m}{m}$.

У розглянутому вище прикладі річна відсоткова ставка для обчислення складного підсумка $r_4 = 8\%$, а норма відсотка

$$i = \frac{r_4}{4} = 2\%.$$

Петрик розповідав Тетянці, що банк гарантує своїм вкладникам 24 % річних щомісячно у гривні та 8 % річних щопіврічно в доларах та євро. Отже, для внесків у гривнях річна відсоткова ставка становить $r_{12} = 24\%$, норма відсотка за період конверсії $i = \frac{r_{12}}{12} = 2\%$; для внесків у доларах і євро $r_2 = 8\%$, $i = \frac{r_2}{2} = 4\%$.



Чудово, тепер я розумію, що означає реклама банку, яку я бачив! Якщо я покладу на депозит у той банк суму $P = 1000$ грн, то за формулою складних відсотків через 2 роки (24 місяці) матиму на рахунку суму $S = 1000 \cdot (1 + 0,02)^{24} \approx 1608,44$ (грн).



Молодець, Петрику, ти все правильно зрозумів. Лише додам: якщо період конверсії становить один рік, то відповідну річну відсоткову ставку r_1 називають **ефективною річною нормою** і позначають буквою r без індекса. Вона показує, скільки відсоткових коштів отримає наприкінці року вкладник на кожную вкладену ним гривню (чи іншу одиницю валюти).

Ефективну річну норму можна визначити й у випадку, коли кількість періодів конверсії на рік більша, ніж один. Для цього треба обчислити складний підсумок для початкової суми P наприкінці року та прирівняти його до суми, яка отримувалася б для цієї суми у випадку лише однієї конверсії на рік. Іншими словами, якщо для початкової суми P задано річну відсоткову ставку r_m , то ефективна річна норма визначається з рівності

$$P(1+r) = P\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m, \text{ звідки } r = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m - 1.$$



Для фінансових розрахунків, зокрема для обчислення відсотків, нарахованих за **складною схемою**, необхідно використовувати калькулятор або інші засоби для полегшення обчислень.

Детальніше про це:
rnk.com.ua/109734





Доволі часто потрібно знати, яку початкову суму P слід інвестувати при заданій нормі відсотка, щоб отримати складний підсумок S . За таких умов суму P називають **теперішньою вартістю** суми S . При цьому різницю $S - P$ називають **складним дисконтом** від суми S , а процес визначення теперішньої вартості P для суми S називають **дисконтуванням**.

Іншими словами, при дисконтуванні з формули складних відсотків $S = P(1+i)^n$ змінну P виражають через змінну S . Після перетворень одержуємо **формулу складних дисконтів**:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}, \text{ або } P = S(1+i)^{-n}$$



Розглянемо *приклад використання формули складних дисконтів*.

Приклад

Родина Сидоренків бажає отримати на депозитному рахунку 100 000 грн через 10 років. Знайдіть теперішню вартість цих коштів і складний дисконт, якщо гроші на рахунку конвертуються за річною ставкою $r_4 = 20\%$.

Розв'язання. За умовою $S = 100\,000$ грн,
 $i = \frac{r_4}{4} = 5\% = 0,05$, $n = 4 \cdot 10 = 40$. Тоді за формулою простих дисконтів:

$$P = 100\,000 \cdot 1,05^{-40} \approx 14\,204,57 \text{ грн.}$$

Тобто для отримання через 10 років бажаної суми Сидоренкам необхідно зараз внести на рахунок 14 204 грн 57 коп. Складний дисконт при цьому становитиме 85 795 грн 43 коп.





Перевірте себе!

1. Запишіть формулу простих відсотків і дайте означення всіх понять, які стосуються змінних, що входять у цю формулу.
2. Запишіть формулу простих дисконтів і дайте означення всіх понять, які стосуються змінних, що входять у цю формулу.
3. Запишіть формули складних відсотків і дисконтів та дайте означення всіх понять, які стосуються змінних, що входять у цю формулу.
4. Дайте означення річної ефективної норми. Як її визначають?



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Пан Дмитро позичив у пані Аліни 500 грн, а через 3 місяці віддав їй 600 грн. Для цього випадку знайдіть: а) основну (початкову) суму; б) кінцеву суму; в) відсоткові кошти; г) норму відсотка; д) час позики в роках; е) річну відсоткову ставку.
2. Пані Еліза позичила в пана Костянтина 800 грн, а через 6 місяців віддала йому 1000 грн. Для цього випадку знайдіть: а) основну (початкову) суму; б) кінцеву суму; в) відсоткові кошти; г) норму відсотка; д) час позики в роках; е) річну відсоткову ставку.
3. За угодою фірма «Кактус» повинна була повернути банку 10 000 грн позики, але банк за 5 місяців до завершення угоди продав це зобов'язання фірмі «Соняшник» за 9000 грн. Для цього випадку знайдіть: а) суму погашення; б) виручку банку; в) дисконт банку; г) норму дисконту; д) річну дисконтну ставку.



4. За угодою компанія «Сильні та спритні» повинна була повернути банку 20 000 грн кредиту, але за 7 місяців до завершення угоди банк продав це зобов'язання мерії міста за 17 200 грн. Для цього випадку знайдіть: а) суму погашення; б) виручку банку; в) дисконт банку; г) норму дисконту; д) річну дисконтну ставку.

5. Банк дає кредити в гривнях під 12 % річних щопівроку. Знайдіть:

- а) тривалість періоду конверсії в місяцях;
- б) кількість періодів конверсії на рік;
- в) норму відсотка за період конверсії.

6. Банк бере кошти на депозити в гривнях під 10 % річних. Знайдіть:

- а) тривалість періоду конверсії в місяцях;
- б) кількість періодів конверсії на рік;
- в) норму відсотка за період конверсії.

7. Обчисліть складний підсумок $S = P(1+i)^n$ і складний відсоток $I = S - P$, якщо перша початкова сума $P = 1000$ грн, норма відсотка при одній конверсії $i = 5\% = 0,05$, а кількість конверсій $n = 10$. Для обчислень використайте калькулятор.

8. Обчисліть складний підсумок $S = P(1+i)^n$ і складний відсоток $I = S - P$, якщо перша початкова сума $P = 1500$ грн, норма відсотка при одній конверсії $i = 4\% = 0,04$, а кількість конверсій $n = 20$. Для обчислень використайте калькулятор.



Середній рівень

9. Пан Василь позичив пану Петру 5000 грн під 20 % річних на 4 місяці. Знайдіть суму, яку має повернути пан Петро пану Василю.

10. Пані Оксана позичила пані Катерині 3000 грн під 10 % річних на 2 місяці. Знайдіть суму, яку має повернути пані Катерина пані Оксані.

11. Зобов'язання, що погашається через 3 місяці, продане банку, який установив 8 % річну норму простого відсотка при дисконтуванні. Знайдіть суму погашення, якщо виручка банку становила 5000 грн.

12. Зобов'язання, що погашається через 8 місяців, продане банку, який установив 9 % річну норму простого відсотка при дисконтуванні. Знайдіть суму погашення, якщо виручка банку становила 6500 грн.

13. Родина Мироненків бажає отримати в банку позику на 150 днів. Банк надає позики з річною нормою простого дисконту 12 %. Мироненки отримали на руки 25 000 грн. Яку суму вони мають повернути банку?

14. Родина Ковалів бажає отримати в банку позику на 200 днів. Банк надає позики з річною нормою простого дисконту 9 %. Ковалі отримали на руки 12 500 грн. Яку суму вони мають повернути банку?

15. Вкладник поклав до банку 20 000 грн. Банк нараховує на цей внесок відсотки за ставкою: а) 18 % річних щопівроку; б) 16 % річних щокварталу; в) 12 % річних щомісяця. Для кожного з випадків *a—в* знайдіть складний підсумок, який матиме вкладник на своєму рахунку через 2 роки.

16. Вкладниця поклала до банку 30 000 грн. Банк нараховує на цей внесок відсотки за ставкою: а) 14 % річних щопівроку; б) 12 % річних щокварталу; в) 6 % річних щомісяця. Для кожного з випадків *a—в* знайдіть складний підсумок, який матиме на своєму рахунку вкладниця через 3 роки.



Достатній рівень

17. Пані Олена має можливість повернути пані Ірині 10 000 грн через 5 місяців, знаючи, що пані Ірина позичає гроші під 15 % річних. Яку суму грошей може попросити зараз пані Олена в пані Ірини за цих умов?



18. Пан Кузьма має можливість повернути пану Сидору 2000 грн через 3 місяці, знаючи, що пан Сидор позичає гроші під 10 % річних. Яку суму грошей може попросити зараз пан Кузьма в пана Сидора за цих умов?

19. Зобов'язання на 14 280 грн, що погашається через 72 дні, продане банку, який установив 10 % річну норму простого відсотка при дисконтуванні. Знайдіть виручку банку.



20. Зобов'язання на 8336 грн, що погашається через 126 днів, продане банку, який установив 12 % річну норму простого відсотка при дисконтуванні. Знайдіть виручку банку.

21. Пан Олег бажає отримати в банку позику на 7 місяців. Банк надає позики з річною нормою простого дисконту 6 %. Яку суму потрібно просити пану Олегу, щоб отримати на руки 60 000 грн?



22. Пані Каміла бажає отримати в банку позику на 10 місяців. Банк надає позики з річною нормою простого дисконту 8 %. Яку суму потрібно просити пані Камілі, щоб отримати на руки 100 000 грн?

23. Родина Онищенко прагне накопичити на депозитному рахунку суму в 50 000 грн через 3 роки. Знайдіть теперішню вартість цих коштів і складний дисконт, якщо гроші на рахунку конвертуються щопівроку за річною ставкою 12 %.



24. Родина Новиків прагне накопичити на депозитному рахунку суму 40 000 грн через 2 роки. Знайдіть теперішню вартість цих коштів і складний дисконт, якщо гроші на рахунку конвертуються щомісяця за річною ставкою 12 %.



Високий рівень

25. Банк дисконтує векселі з річною дисконтною ставкою 12 %. Пан Семен позичив у пана Дмитра 10 000 грн і виписав йому вексель на 8 місяців під 6 % річних. Через 5 місяців пан Дмитро продав цей вексель згаданому банку. Знайдіть:

- а) суму грошей, яку отримав пан Дмитро;
- б) суму, яку втратив (чи виграв) пан Дмитро від дисконтування порівняно із сумою, яку він міг отримати, якби пан Семен погасив вексель за тих самих умов у момент продажу векселя банку.

26.

Банк дисконтує векселі з річною дисконтною ставкою 9 %. Пані Дарина позичила в пані Валентини 8000 грн і виписала їй вексель на 10 місяців під 12 % річних. Через 6 місяців пані Валентина продала цей вексель згаданому банку. Знайдіть:

- а) суму грошей, яку отримала пані Валентина;
- б) суму, яку втратила (чи виграла) пані Валентина від дисконтування порівняно із сумою, яку вона могла отримати, якби пані Дарина погасила вексель за тих самих умов у момент продажу векселя банку.

27.

Банк пропонує 9 % річних щомісяця на свої депозити в євро. Визначте ефективну річну норму r для цієї пропозиції банку. Скільки відсоткових коштів отримає вкладник цього банку наприкінці року, якщо зробить внесок 1000 євро на цих умовах?

28.

Банк пропонує 10 % річних щокварталу на свої депозити в доларах. Визначте ефективну річну норму r для цієї пропозиції банку. Скільки відсоткових коштів отримає вкладник цього банку наприкінці року, якщо зробить внесок 500 доларів на цих умовах?

29.

Кредитна спілка надає кредити під певну річну ставку щопівроку. Відомо, що ФОП Данильченко отримав кредит на суму 20 000 грн і через 2 роки має повернути за умовами цього кредиту суму 24 776 грн 49 коп. Визначте річну відсоткову ставку кредитної спілки.

30.

Кредитна спілка надає кредити під певну річну ставку щокварталу. Відомо, що ФОП Омелян отримав кредит на суму 30 000 грн і через 2 роки має повернути за умовами цього кредиту суму 41 057 грн 07 коп. Визначте річну відсоткову ставку кредитної спілки.



Цікавинки від дідуса Тараса

Традиція позичання грошей приватними особами в інших приватних осіб чи організацій під письмову розписку є звичною справою в багатьох країнах. У XII–XIII ст. в Італії виник *вексель* — цінний папір, який засвідчує грошове зобов'язання векселедавця сплатити визначену суму грошей власнику векселя після спливання певного терміну. Спочатку вексель використовувався для здійснення обміну валют (у буквальному перекладі слово «вексель» означає «розмін») та подолання незручностей і небезпеки транспортування грошей (монет чи банкнот). Банкір виписував свідоцтво про отримання грошової суми, за умови подання якого кореспонденту банкіра за кордоном клієнт отримував кошти в місцевій валюті. Із вдосконаленням тексту векселя й розвитком вексельного права сфера використання векселя поширювалась, і з часом вексель перетворився на універсальний кредитний, платіжний і розрахунковий документ.

Уніфікований закон про переказні векселі та прості векселі, який є додатком I до Женевської конвенції від 7 червня 1930 р., визначає, що простий вексель має містити сім обов'язкових реквізитів:

- 1) назву «простий вексель»;
- 2) безумовне зобов'язання сплатити певну суму;
- 3) зазначення строку платежу;
- 4) зазначення місця платежу;
- 5) найменування того, кому або за наказом кого має бути здійснений платіж;
- 6) дату і місце видачі векселя;
- 7) підпис векселедавця.

Приклад тексту векселя: *«Простий вексель. 10 липня 2024 року, м. Вінниця, вул. Зелена, 17. Я, Костянтин Петренко, зобов'язуюся через 8 місяців після зазначеної дати сплатити Олені Михайленко за місцем її проживання (м. Одеса, вул. Весела, 11) суму 2000 грн і прості відсотки в розмірі 6 % річних. Підпис: Петренко».*

Тепер паперові векселі, виписані приватними особами, зустрічаються значно рідше, ніж раніше, приватні особи віддають перевагу оформленню позик у спеціальних фінансових установах (банках, кредитних спілках тощо), причому здебільшого в електронній формі з використанням кредитних платіжних карток.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи знайомі ви з паперовими векселями? Якщо так, то поділіться своїм досвідом. Складіть текст векселя від свого імені за зразком, наведеним у рубриці «Цікавинки від дідуся Тараса».
2. Як ви вважаєте, коли було безпечніше брати й давати гроші в борг: раніше, з використанням паперових векселів, чи нині, за допомогою електронних кредитних карток? Поясніть свою відповідь.
3. Як ви вважаєте, чи є морально виправданим нарахування відсотків на суму позики під час кредитування? Чому ви вважаєте саме так?



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть рівняння.
а) $2x^2 + 7x - 9 = 0$; б) $4x^2 + 3x + 1 = 0$.
2. Вартість тижневої путівки в санаторій «Смерека» у «високий» сезон (травень — вересень) на 20 % дорожча, ніж у «низький» сезон (решта місяців року). Знайдіть вартість тижневої путівки в цей санаторій у «низький» сезон, якщо у «високий» сезон вона коштує 11 640 грн.
3. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте прямокутний трикутник за даними гострим кутом і радіусом вписаного кола.
4. Протягом кожного з наступних 10 днів о 17:00 вимірюйте температуру повітря у вашій кімнаті з точністю до градуса. Для одержаної вибірки визначте: а) середнє арифметичне значення; б) моду; в) медіану; г) розмах вибірки.
5. Кожного разу змінюючи *лише одну* букву в слові, побудуйте ланцюжок слів, який починається зі слова КУБ і закінчується словом ТОР.

§ 30. Датовані суми. Еквівалентні суми за даної відсоткової ставки



Слухай, Петрику, недавно почула в автобусі дивну фразу, яку сказала одна пані по телефону: «Бери краще зараз 1000 грн, ніж 1500 грн через рік, бо гроші зараз не так багато коштують, як раніше». Як це можуть гроші щось коштувати? Як на мене, це продукти чи речі щось коштують, їх здебільшого за гроші й купують.



Фраза дійсно трохи дивна, але згоден, що порівнювати між собою суми грошей, не знаючи дати, коли вони були отримані, не вийде. Бо гроші із часом можуть *знецінюватися*. Наприклад, в оповіданнях американського письменника О. Генрі, а він писав у кінці XIX — на початку XX ст., можна прочитати, що квартиру можна було зняти за 8 доларів на тиждень, а нині в США за такі гроші навіть пообідати в кафе складно!



Це дійсно так. Мій тато говорить, що *гроші мають працювати*. Тобто немає сенсу просто накопичувати готівку на тривалий час, а краще покласти її в банк чи вкласти в якийсь проект під певний відсоток. Тоді відсоткові кошти принаймні

компенсуватимуть знецінення грошей, а можливо, ще й дадуть певний прибуток.



Логічно. А банк отримані кошти вкладників, у свою чергу, теж кудись вкладе під певний відсоток і отримає прибуток, з якого і сплачуватиме вкладникам відсотки. Слухай, виходить, що банк за користування коштами також сплачує кошти! Тобто для банку твій внесок на депозитний рахунок буде коштувати певних грошей за користування ним, а отже, твої гроші можуть коштувати інших грошей. Дуже цікаво, хочеться про це дізнатися більше!



Справді, використання грошових сум без зазначення дати не має жодного сенсу, оскільки гроші в різний час мають різну купівельну спроможність. Суму платежу разом із датою його сплати називають **датованою сумою**. Наприклад, якщо позичальнику слід сплатити 3000 грн 3 лютого 2030 р., то це — датована сума. Для порівняння датованих сум потрібно знати норму відсотка. Наприклад, якщо Петрик має можливість вкласти свої кошти за річною відсотковою ставкою 16 % щоквартально, то говорять, що його **гроші коштують** $r_4 = 16\%$.

За таких умов 1000 грн через 2 роки і 1368,57 грн через 4 роки можна вважати **еквівалентними**, бо між цими двома датами від-

будеться 8 періодів конверсії, а $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^8 \approx 1368,57$. Тоб-

то, маючи на руках 1000 грн через 2 роки, через 4 роки можна накопичити 1368 грн 57 коп. Також ці самі 1000 грн через 2 роки можна вважати еквівалентними 730,69 грн, які є в наявності зараз, бо за формулою складних дисконтів теперішня вартість 1000 грн при річній відсотковій ставці $r_4 = 16\%$ становить

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{-8} \approx 730,69 \text{ грн.}$$



У загальному випадку:



Дві датовані суми називають **еквівалентними**, якщо за даної норми відсотка їх теперішні вартості однакові.

Із цього означення випливає таке правило.



Правило еквівалентності двох датованих сум

Нехай за норми відсотка i суми A і B потрібно виплатити відповідно через a і b періодів конверсії від теперішнього часу. Тоді суми A і B будуть еквівалентними, якщо

$$B = A \cdot (1+i)^{b-a}.$$

Справді, за означенням, суми A і B будуть еквівалентними, якщо їхні теперішні вартості однакові, тобто за формулою складних дисконтів $B \cdot (1+i)^{-b} = A \cdot (1+i)^{-a}$. Звідси й випливає рівність $B = A \cdot (1+i)^{b-a}$ — **основне рівняння еквівалентності датованих сум**.



Основне рівняння еквівалентності використовують для визначення еквівалентних виплат під час позик, депозитних внесків тощо.

Приклад 1

Пані Васирина оформила позику в кредитній спілці та через 3 роки має повернути 20 000 грн. Гроші коштують $r_2 = 6\%$. Знайдемо, скільки пані Васирина має повернути кредитній спілці, якщо термін виплати позики зміниться: а) на 2 роки від теперішнього часу; б) на 5 років від теперішнього часу.

Розв'язання

а) За умовою задачі $i = \frac{6\%}{2} = 3\% = 0,03$, $A = 20\,000$ грн, $a = 3 \cdot 2 = 6$, $b = 2 \cdot 2 = 4$. Потрібно знайти суму B , еквівалентну A . З основного рівняння еквівалентності: $B = 20\,000 \cdot (1+0,03)^{4-6} \approx 18\,851,92$ грн.

б) За умовою задачі $i = 0,03$, $A = 20\,000$ грн, $a = 6$. Знайдемо суму C , еквівалентну A , якщо $c = 5 \cdot 2 = 10$. З основного рівняння еквівалентності: $C = 20\,000 \cdot (1 + 0,03)^{10-6} \approx 22\,510,18$ грн.



Зауважимо: якщо датована сума A еквівалентна датованій сумі B , а датована сума B еквівалентна датованій сумі C , то датовані суми A і C — також еквівалентні. *Переконайтеся в цьому самостійно.*



Очевидно, що додавання датованих сум, які сплачуються в різні моменти часу, не має сенсу. Наприклад, нехай 2000 грн слід сплатити через рік, а ще 3000 грн — через 3 роки. Зрозуміло, що дія $2000 + 3000 = 5000$ є некоректною, бо не пов'язана з жодною з дат. Однак, якщо обидві ці суми перетворити в еквівалентні датовані суми з однаковою датою сплати, а потім додати, то отримана сума вже матиме сенс і буде називатися **еквівалентною сумою серії платежів**.

Щоб обчислити еквівалентну суму серії платежів, користуються таким правилом.

Правило обчислення еквівалентної суми серії платежів



Нехай за норми відсотка i суми A , B і C потрібно виплатити відповідно через a , b і c періодів конверсії від теперішнього часу. Тоді сума C буде еквівалентною серії платежів A і B , якщо:

$$C = A \cdot (1+i)^{c-a} + B \cdot (1+i)^{c-b}$$

Справді, згідно з основним рівнянням еквівалентності, суми, еквівалентні A і B через c періодів конверсії від теперішнього часу, становлять відповідно $A \cdot (1+i)^{c-a}$ і $B \cdot (1+i)^{c-b}$. Для знаходження еквівалентної суми C потрібно додати ці два вирази.



Очевидно, що рівність із правила обчислення еквівалентної серії платежів можна узагальнити й на більшу кількість доданків.

Приклад 2

Банк надає позики за річною відсотковою ставкою $r_4 = 12\%$. Пан Михайло мав повернути цьому банку 5000 грн через рік, ще 5000 грн через 2 роки та ще 5000 грн через 3 роки, але вирішив погасити позику одним платежем через 2,5 року. Знайдемо, яку суму має сплати пан Михайло відповідно до свого рішення.

Розв'язання. Скористаємося правилом обчисленням еквівалентної суми серії платежів. За умовою задачі $i = \frac{12\%}{4} = 3\% = 0,03$, $A = B = C = 5000$ грн, $a = 4$, $b = 8$, $c = 12$, $d = 10$. Визначимо суму D , еквівалентну сумам A , B і C :

$$D = 5000 \cdot (1,03)^{10-4} + 5000 \cdot (1,03)^{10-8} + 5000 \cdot (1,03)^{10-12} \approx \\ \approx 5970,25 + 5304,50 + 4712,98 = 15987,73 \text{ (грн)}.$$



Еквівалентність можна встановлювати й між двома серіями платежів.



Дві серії платежів називають **еквівалентними**, якщо суми, еквівалентні кожній із цих серій платежів на ту саму дату, збігаються.

Нехай за норми відсотка i суми $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ потрібно виплатити відповідно через $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ періодів конверсії від теперішнього часу, а u — довільний момент часу. Тоді серії платежів $A_1, A_2, \dots, A_n$ і $B_1, B_2, \dots, B_m$ будуть еквівалентними, якщо:

$$A_1 (1+i)^{u-a_1} + \dots + A_n (1+i)^{u-a_n} = B_1 (1+i)^{u-b_1} + \dots + B_m (1+i)^{u-b_m}$$

Це рівняння називають **рівнянням еквівалентності для двох серій платежів**.

Детальніше про рівняння еквівалентності
для двох серій платежів:
rnk.com.ua/109668



Перевірте себе!

1. Яку суму називають датованою? Наведіть приклади датованих сум.
2. Що означає вислів «гроші коштують»? Наведіть приклади.
3. Які дві датовані суми називають еквівалентними?
4. Запишіть основне рівняння еквівалентності датованих сум.
5. Сформулюйте правило обчислення еквівалентної суми серії платежів.
6. Які дві серії платежів називають еквівалентними?
7. Запишіть рівняння еквівалентності для двох серій платежів.



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Знайдіть, скільки періодів конверсії мине протягом 5 років від теперішнього часу, якщо гроші коштують: а) $r_2 = 10\%$; б) $r_4 = 8\%$; в) $r_{12} = 6\%$.
2. Знайдіть, скільки періодів конверсії мине протягом 7 років від теперішнього часу, якщо гроші коштують: а) $r_2 = 12\%$; б) $r_4 = 10\%$; в) $r_{12} = 9\%$.
3. Знайдіть норму відсотка за період конверсії i , якщо гроші коштують: а) $r_2 = 9\%$; б) $r_4 = 10\%$; в) $r_{12} = 6\%$.
4. Знайдіть норму відсотка за період конверсії i , якщо гроші коштують: а) $r_2 = 11\%$; б) $r_2 = 12\%$; в) $r_2 = 9\%$.

5. Пан Данило має отримати за внеском 1000 грн через 1 рік від теперішнього часу. Запишіть рівняння для знаходження суми, еквівалентної даній датованій сумі, через 3 роки від теперішнього часу. Гроші коштують $r_2 = 6\%$.

6. Пані Анастасія має отримати за внеском 4000 грн через 2 роки від теперішнього часу. Запишіть рівняння для знаходження суми, еквівалентної даній датованій сумі, через 3 роки від теперішнього часу. Гроші коштують $r_4 = 8\%$.



Середній рівень

7. Банк позичає гривні під 12 % річних щокварталу. Клієнт повинен повернути цьому банку 10 000 грн через 1,5 року*. Знайдіть:

- а) суму, яку отримав клієнт у банку;
- б) суму, яку повинен сплатити клієнт, якщо він захоче погасити позику через 1 рік;
- в) суму, яку повинен сплатити клієнт, якщо він захоче погасити позику через 2 роки.

8. Банк позичає євро під 6 % річних щопівроку. Клієнтка повинна повернути цьому банку 1000 євро через 2 роки. Знайдіть:

- а) суму, яку отримала клієнтка в банку;
- б) суму, яку повинна сплатити клієнтка, якщо вона захоче погасити позику через 1 рік;
- в) суму, яку повинна сплатити клієнтка, якщо вона захоче погасити позику через 3,5 року.

9. Родина Проценків оформила в кредитній спілці позику, за умовами якої має повернути 20 000 грн через 2 роки та ще 20 000 грн через 4 роки. Однак родина вирішила повернути всю позику через 3 роки. Запишіть рівняння для знаходження еквівалентної суми S серії платежів, якщо в цій кредитній спілці гроші коштують $r_4 = 10\%$.

* Тут і далі, якщо не зазначено інше, усі періоди конверсії рахують від теперішнього часу.



10. Родина Хоменків оформила в кредитній спілці позику, за умовами якої має повернути 30 000 грн через 1 рік і ще 20 000 грн через 2 роки. Однак родина вирішила повернути всю позику через 1,5 року. Запишіть рівняння для знаходження еквівалентної суми C серії платежів, якщо в цій кредитній спілці гроші коштують $r_{12} = 12\%$.



Достатній рівень

11. Пан Олександр повинен був сплатити банку 2000 грн через 1 рік і ще 2500 грн через 2 роки, але вирішив здійснити всі виплати одним платежем через 1,5 року. Знайдіть розмір X цього платежу, якщо гроші коштують 16% річних щопівроку. Визначте, яку суму P пан Олександр отримав у банку.



12. Пані Яна мала сплатити банку 1000 доларів через 1,5 року та ще 500 доларів через 2 роки, але вирішила здійснити всі виплати одним платежем через 1 рік. Знайдіть розмір X цього платежу, якщо гроші коштують 8% річних щокварталу. Визначте, яку суму P пані Яна отримала в банку.

13. Гроші коштують $r_4 = 10\%$. Серію платежів у 2000 доларів через 1 рік і ще 1000 доларів через 2 роки потрібно замінити на серію однакових платежів у A доларів через пів року і через півтора року. Запишіть відповідне рівняння еквівалентності для цих двох серій платежів.



14. Гроші коштують $r_2 = 6\%$. Платіж у 3000 євро через 1,5 року потрібно замінити на серію однакових платежів у B євро через 1 рік і через 2 роки. Запишіть відповідне рівняння еквівалентності для цього випадку.



Високий рівень

15. Пані Вікторія мала сплатити банку 2000 євро через 2 роки після позики, але вирішила здійснити цю виплату двома однаковими платежами — через 1 рік і через 2,5 року після позики.

Знайдіть розмір цих однакових платежів, якщо гроші коштують $r_4 = 6\%$.

16. Пан Костянтин мав сплатити банку 50 000 грн через 1,5 року після позики, але вирішив здійснити цю виплату двома однаковими платежами — через 1 рік і через 2 роки після позики. Знайдіть розмір цих однакових платежів, якщо гроші коштують $r_2 = 10\%$.

17. Замініть серію платежів: по 1000 євро через пів року і через півтора року на серію однакових платежів у A євро через рік і через два роки. Гроші коштують 12% річних щомісяця.

18. Замініть серію платежів: по 20 000 грн через 2 роки і через 3 роки на серію однакових платежів у B грн через 1,5 року та через 2,5 року. Гроші коштують 8% річних щопівроку.



Цікавинки від дідуся Тараса

Термін «еквівалентність» для двох датованих сум, що мають однакову теперішню вартість при заданій нормі відсотка, не є випадковим. Очевидно, що будь-яка датована сума еквівалентна сама собі. Таку властивість у математиці називають *рефлексивністю*. Також якщо датована сума A еквівалентна датованій сумі B , то й датована сума B еквівалентна датованій сумі A . Цю властивість у математиці називають *симетричністю*. Нарешті, якщо датована сума A еквівалентна датованій сумі B , а датована сума B еквівалентна датованій сумі C , то датовані суми A і C — також еквівалентні. Таку властивість у математиці називають *транзитивністю*.

Загалом у математиці будь-яке співвідношення між елементами деякої множини, яке має властивості рефлексивності, симетричності й транзитивності називають *відношенням еквівалентності*. Більш детально із цим поняттям ви ознайомитеся у вищій школі. Наразі ж відзначимо, що відношеннями еквівалентності є колінеарність векторів на площині, рівність і подібність трикутників, рівність чисел тощо.

Поняття еквівалентності є надзвичайно важливим, бо дозволяє *отожнювати* (вважати в певному розумінні однаковими) всі елементи множини, які між собою еквівалентні. У цьому випадку говорять,

що всі еквівалентні між собою елементи множини належать одному класу еквівалентності. У кожному окремому випадку всі елементи множини, що належать одному класу еквівалентності, зазвичай мають спеціальну назву. Наприклад, вважають, що всі колінеарні вектори на площині задають *певний напрямок*; усі подібні трикутники мають *однакову форму*; усі еквівалентні датовані суми за даної норми відсотка визначають *певний капітал*, тощо.



Запитання і завдання від дідуса Тараса

1. Покажіть, що поділ учнів на класи в школі визначає на множині всіх учнів однієї паралелі (наприклад, 8 класів) відношення еквівалентності. Як ви назвали б усіх учнів паралелі 8 класів, які належать одному класу еквівалентності?
2. Наведіть приклади відношень еквівалентності та відповідних класів еквівалентності зі свого повсякденного життя та з досвіду вивчення математики й інших навчальних дисциплін. Як ви вважаєте, чи корисним є розбиття множини певних об'єктів на класи еквівалентності? Поясніть свою відповідь.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab}$, якщо числа a і b є коренями рівняння $x^2 - 8x - 2 = 0$.
2. В одній ПДСК побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$ і графік рівняння $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. За рисунком установіть, скільки спільних точок мають ці два графіки.
3. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$), належить більшій основі AD трапеції; AC — діагональ трапеції. Знайдіть периметр цієї трапеції, якщо $\angle CAD = 30^\circ$, а радіус описаного кола $R = 10$ см.

4. Протягом останнього місяця в кондитерському магазині продали 490 плиток молочного шоколаду, 340 плиток чорного шоколаду та 170 плиток білого шоколаду. З'ясуйте, ймовірність якої події більша: A = «Людина, що зайшла в магазин за шоколадом, купить плитку молочного шоколаду» чи B = «Людина, що зайшла в магазин за шоколадом, купить плитку чорного або білого шоколаду». Відповідь поясніть.

5. Використовуючи аналогію, знайдіть невідоме число, позначене знаком питання.

ВОКАЛ	КОРАЛІ	НАБІР	КРАБ
451934	178	3045182	?

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 7

У завданнях 1–4 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Пан Андрій поклав до банку 5000 грн, а наприкінці року отримав за цим внеском 5400 грн. Сума 400 грн є...

А	Б	В	Г
початковою сумою	кінцевою сумою	нормою відсотка	відсотковими коштами

2. Якщо банк нараховує на внесок 12 % річних щокварталу, то норма відсотка за період конверсії становить...

А	Б	В	Г
3 %	6 %	1 %	4 %

3. Зобов'язання в 2000 грн викуплене за 1600 грн банком А в банку Б за 6 місяців до терміну погашення. Укажіть норму дисконту для банку Б за цієї операції.

А	Б	В	Г	Д
40 %	50 %	10 %	25 %	20 %

4. Пані Людмила поклала на депозитний рахунок a грн. Укажіть формулу, за якою обчислюється складний підсумок b , який буде на рахунку пані Людмили через 2 роки, якщо банк нараховує за цим внеском 8 % річних щопівроку.

А	Б	В	Г	Д
$b = a \cdot 1,08^2$	$b = 1,16a$	$b = a \cdot 1,04^4$	$b = 1,04a$	$b = a \cdot 1,04^2$

У завданнях 5–7 запишіть відповідь десятковим дробом або цілим числом.

5. Семен виписав Улянці вексель, за яким зобов'язується повернути через 8 місяців суму 3000 грн і прості відсотки в розмірі 9 % річних. Знайдіть суму (у грн), яку має повернути Семен Улянці за цим векселем.
6. Кредитна спілка дає позики під 10 % річних щокварталу. Який складний підсумок (у грн) потрібно буде сплатити, якщо взяти в цій спілці 1500 грн на 2,5 року? Відповідь округліть до сотих.
7. Пан Омелян взяв кредит у банку й мав повернути 10 000 грн через два роки від теперішнього часу. Однак він вирішив погасити цей кредит через півтора року. Яку суму (в грн) повинен сплатити Омелян банку згідно зі своїм рішенням, якщо гроші коштують $r_2 = 10$ %? Відповідь округліть до сотих.

Завдання 8–10 розв'яжіть із повним поясненням.

8. Прості відсотки нараховуються за річною ставкою $r = 12$ %. Знайдіть кінцеву суму для початкового внеску в розмірі:
- 800 грн на 4 місяці;
 - 700 грн на 2 місяці;
 - 1200 грн на 240 днів.
9. ФОП Панасюк викупив у банку за 2000 грн вексель ФОП Клименко на 2500 грн, який має бути погашеним через 9 місяців. Знайдіть: а) виручку банку; б) дисконт банку; в) річну дисконтну ставку, яку реалізує банк; г) прибуток ФОП Клименко; д) річну відсоткову ставку для інвестиції ФОП Клименко.

10. Пані Катерина взяла кредит у банку на придбання холодильника. За угодою з банком вона має сплатити 10 000 грн через рік і ще 10 000 грн через 2 роки від теперішнього часу. Гроші коштують 6 % річних щомісяця. Знайдіть:
- теперішню вартість холодильника;
 - суму, яку має сплатити пані Катерина банку, якщо вирішить погасити кредит одним платежем через півтора року від теперішнього часу.
- Відповіді запишіть із точністю до копійок.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

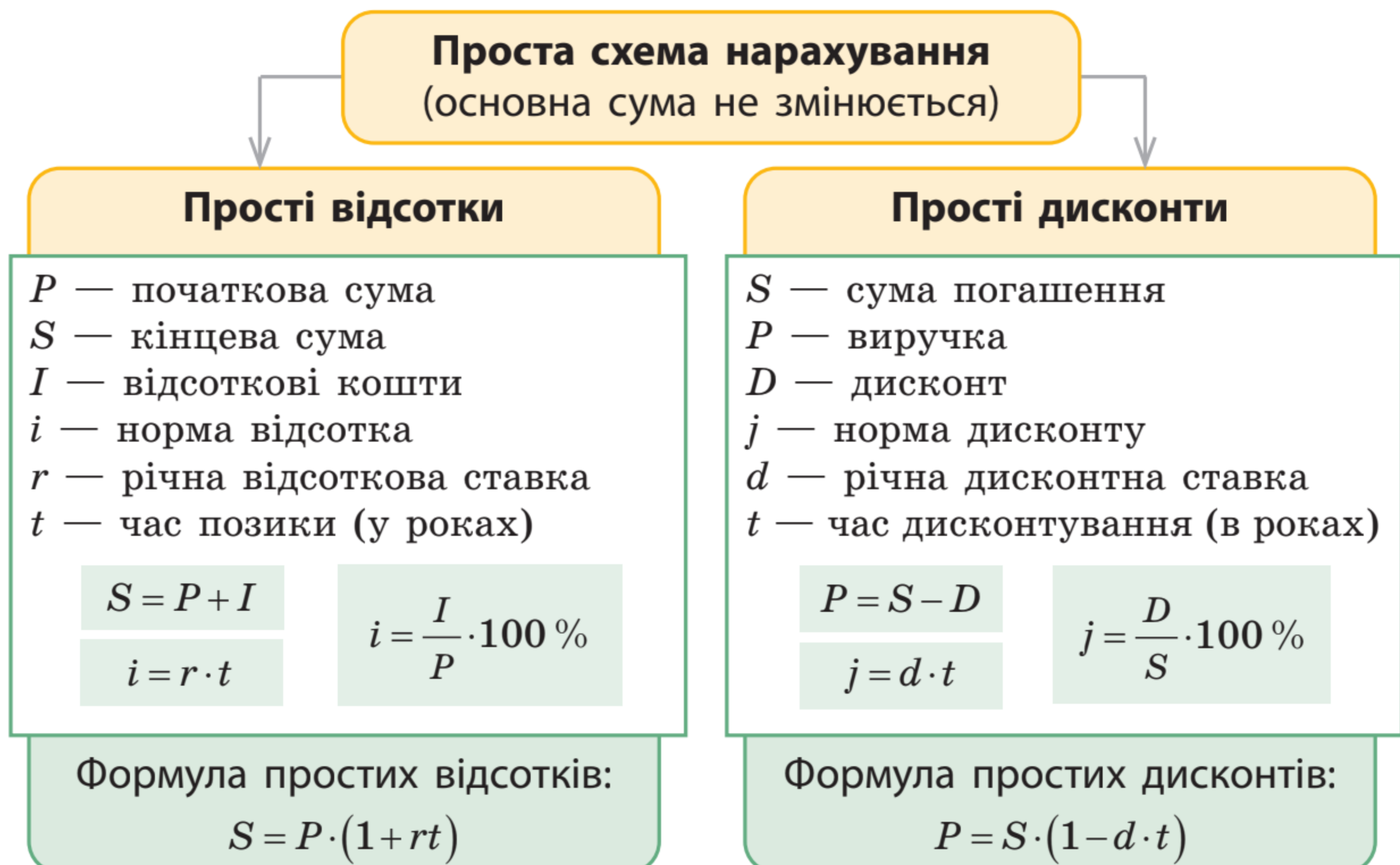
- Дві річні відсоткові ставки при обчисленні складного підсумка називають *еквівалентними*, якщо вони дають однаковий складний підсумок наприкінці року. Доведіть: якщо задано дві річні відсоткові ставки r_m і r_k , то вони будуть еквівалентними за умови $\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{r_k}{k}\right)^k$.
- Користуючись відомостями з попередньої задачі річної відсоткової ставки $r_2 = 4\%$ (кошти конвертуються щопівроку), знайдіть еквівалентну їй ефективну річну норму r і річну відсоткову ставку r_4 (кошти конвертуються щоквартально).
- Клієнт планував внести на депозит певну суму коштів у гривні під 10 % річних щокварталу й отримати через 5 років на цьому рахунку суму 100 000 грн. Однак банк запропонував клієнту конвертувати гроші за річною ставкою 11 % річних щопівроку. Яку суму повинен внести клієнт на депозитний рахунок у кожному з випадків? Знайдіть річну відсоткову ставку r_2 , еквівалентну річній ставці $r_4 = 10\%$. Чи вигідною є пропозиція банку для клієнта?
- Холодильник коштує 50 000 грн. Щоб придбати цей холодильник, родина Климчуків планує оформити кредит у банку, за яким збирається сплатити його вартість чотирма однаковими платежами — через 3, 6, 9 і 12 місяців від теперішнього часу. Обчисліть розмір цих платежів, якщо гроші в цьому банку коштують $r_{12} = 6\%$.
- Два однакові платежі в розмірі A грн через 2 роки і через 4 роки, що виплачуються за умови, що гроші коштують $r_2 = 8\%$,

потрібно замінити на три однакові платежі в розмірі B грн через 1 рік, 3 роки і 5 років за умови, що гроші конвертуються щокварталу. Знайдіть відповідну еквівалентну відсоткову ставку та залежність між B і A .

СЛОВНИЧОК

Фінансова математика — financial mathematics
 Відсоткові кошти — interest funds
 Норма відсотка — rate of interest
 Річна відсоткова ставка — annual interest rate
 Формула простих (складних) відсотків — the formula of simple (compound) interest
 Прості (складні) дисконти — simple (complex) discounts
 Теперішня вартість — the present value
 Еквівалентні датовані суми — equivalent dated amounts

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 7



Складна схема нарахування (основна сума не змінюється)

Складні відсотки

S — складний підсумок
 P — перша початкова сума
 i — норма відсотка за період конверсії
 r_m — річна відсоткова ставка за m конверсій на рік
 n — кількість періодів конверсії

$$i = \frac{r_m}{m}$$

Формула складних відсотків:

$$S = P \cdot (1 + i)^n$$

Складні дисконти

S — складний підсумок (сума)
 P — теперішня вартість суми
 D — складний дисконт
 i — норма відсотка
 r_m — річна відсоткова ставка за m конверсій на рік
 n — кількість періодів конверсії

$$D = S - P$$

$$i = \frac{r_m}{m}$$

Формула складних дисконтів:

$$P = S \cdot (1 + i)^{-n}$$

Рівняння еквівалентності

Дві датовані суми

A, B — суми коштів
 a, b — відповідна кількість періодів конверсії від теперішнього часу

Основне рівняння еквівалентності датованих сум:

$$B = A \cdot (1 + i)^{b-a}$$

i — норма відсотка за період конверсії

Еквівалентна сума серії платежів

A, B, C — суми коштів
 a, b, c — відповідна кількість періодів конверсії від теперішнього часу

Рівняння еквівалентної суми серії платежів (датованих сум):

$$C = A \cdot (1 + i)^{c-a} + B \cdot (1 + i)^{c-b}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ КУРСУ 8 КЛАСУ



Початковий рівень

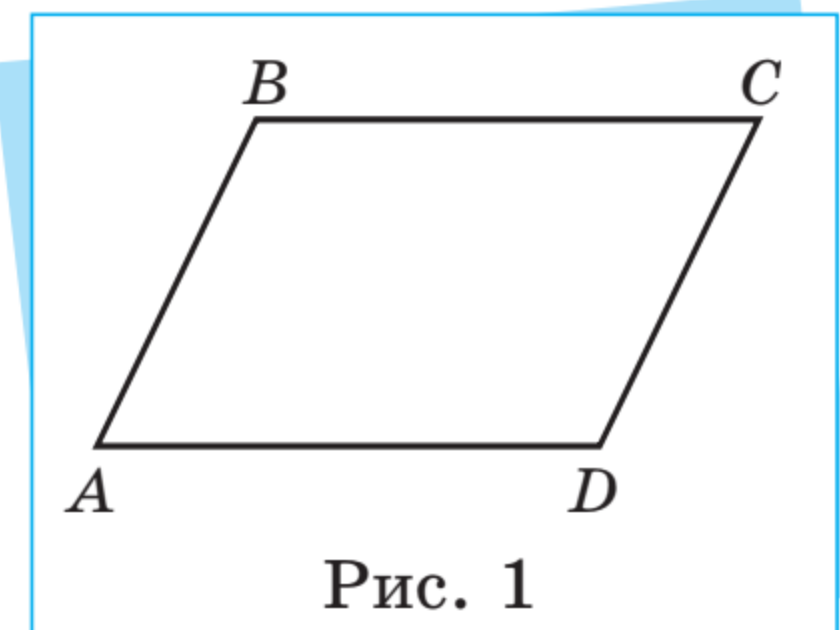
1. Фотопринтер надрукував 25 світлин за x хвилин. Складіть вираз для обчислення швидкості друку фотопринтера (у світлинах за хвилину). Запишіть цей вираз раціональним дробом.
2. Знайдіть спільний множник у чисельнику та знаменнику раціонального дробу.
а) $\frac{2a}{3abc}$; б) $\frac{4kn^2m}{5m}$; в) $\frac{6abc^3}{7nmc^3}$; г) $\frac{2kc^2 \cdot 5n}{5ac^2}$.
3. Запишіть добуток і частку степенів у вигляді степеня.
а) $a^7 \cdot a^{-5}$; б) $b^{-2} \cdot b^{-6}$; в) $c^{-3} : c^2$; г) $d^7 : d^{-4}$.
4. Запишіть у вигляді степеня.
а) $(x^{-2})^5$; б) $(y^{-4})^{-2}$; в) $\frac{n^9}{m^9}$; г) $\frac{k^{-6}}{a^{-6}}$.
5. Вставте пропущене слово: «Відстань від дому до школи 2,5 км. Що швидше буде йти Микола з дому до школи, то ... часу він витратить на подолання цієї відстані».
6. Заповніть таблицю значень функції $y = \frac{10}{x}$.

x	-10	-2	-1	1	5	10
y						

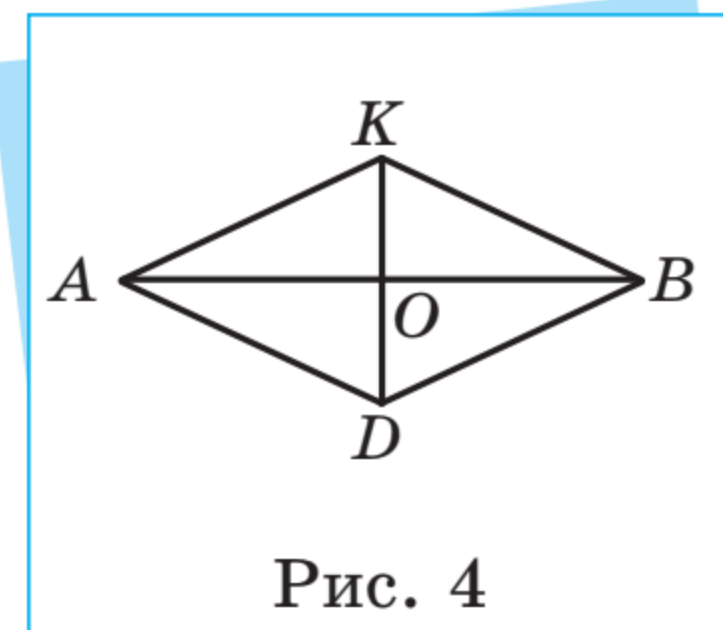
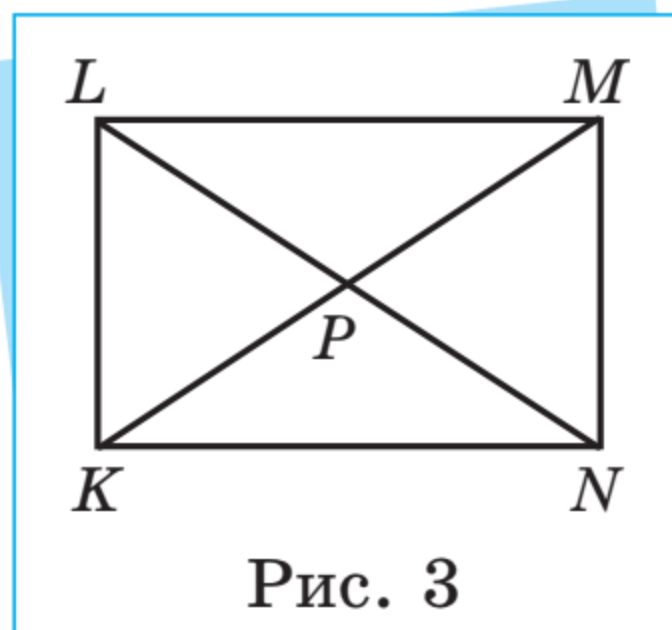
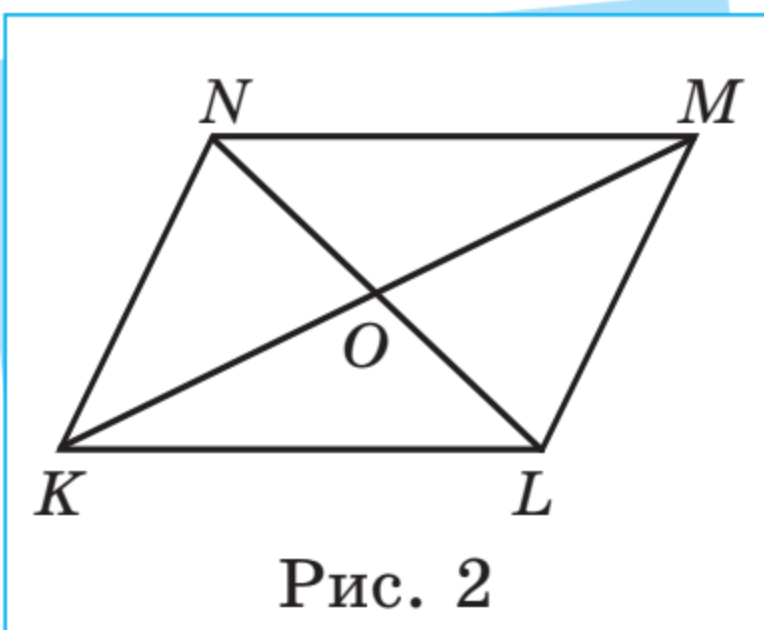
7. Знайдіть значення функції $f(x) = x^2$, якщо:
а) $x = 1$; б) $x = 4$; в) $x = -2$; г) $x = -5$.
8. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку з такими координатами?
а) $A(0; 0)$; б) $B(3; 3)$; в) $C(5; 25)$; г) $D(16; 4)$.

9. Запишіть числа, у разі піднесення яких до квадрату отримаємо число:
а) 0; б) 16; в) 81; г) 100.
10. Які з рівностей правильні?
а) $\sqrt{-16} = -4$; б) $\sqrt{16} = -4$; в) $\sqrt{-16} = 4$; г) $\sqrt{16} = 4$.
11. Скориставшись властивістю $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, обчисліть значення виразу.
а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$; б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$; в) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; г) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$.
12. Розв'яжіть рівняння.
а) $\sqrt{x} = 2$; б) $\sqrt{x} = 5$; в) $\sqrt{x} = -16$; г) $\sqrt{x} = -5$.
13. Знайдіть значення функції $y = \sqrt{x}$ для таких значень аргументу x :
а) 0; б) 16; в) 25; г) 100.
14. Скориставшись властивістю, що функція $y = \sqrt{x}$ зростає на множині всіх невід'ємних дійсних чисел, порівняйте:
а) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{8}$ і $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{15}$ і $\sqrt{14}$; г) $\sqrt{1}$ і $\sqrt{10}$.
15. Площа прямокутної ділянки для вирощування суниць дорівнює 14 м^2 . Ширина ділянки на 5 м менша від її довжини. Позначимо ширину ділянки змінною x . Якщо потрібно знайти ширину ділянки, то яке з рівнянь є математичною моделлю цієї задачі?
а) $x(x+5)=14$; в) $x(x-5)=14$;
б) $x+x+5=14$; г) $2(x+x-5)=14$.
16. Які з рівнянь є квадратними рівняннями?
а) $x^2 - 12x + 4 = 0$; в) $13x - 7 = 0$;
б) $5y^2 + 9y - 1 = 0$; г) $x^4 - 5x + 2 = 0$.
17. Які з рівнянь є зведеними квадратними рівняннями?
а) $x^2 - 5x + 2 = 0$; в) $-2x^2 + 7x - 1 = 0$;
б) $3y^2 - 7y + 5 = 0$; г) $y^2 + 9y + 1 = 0$.

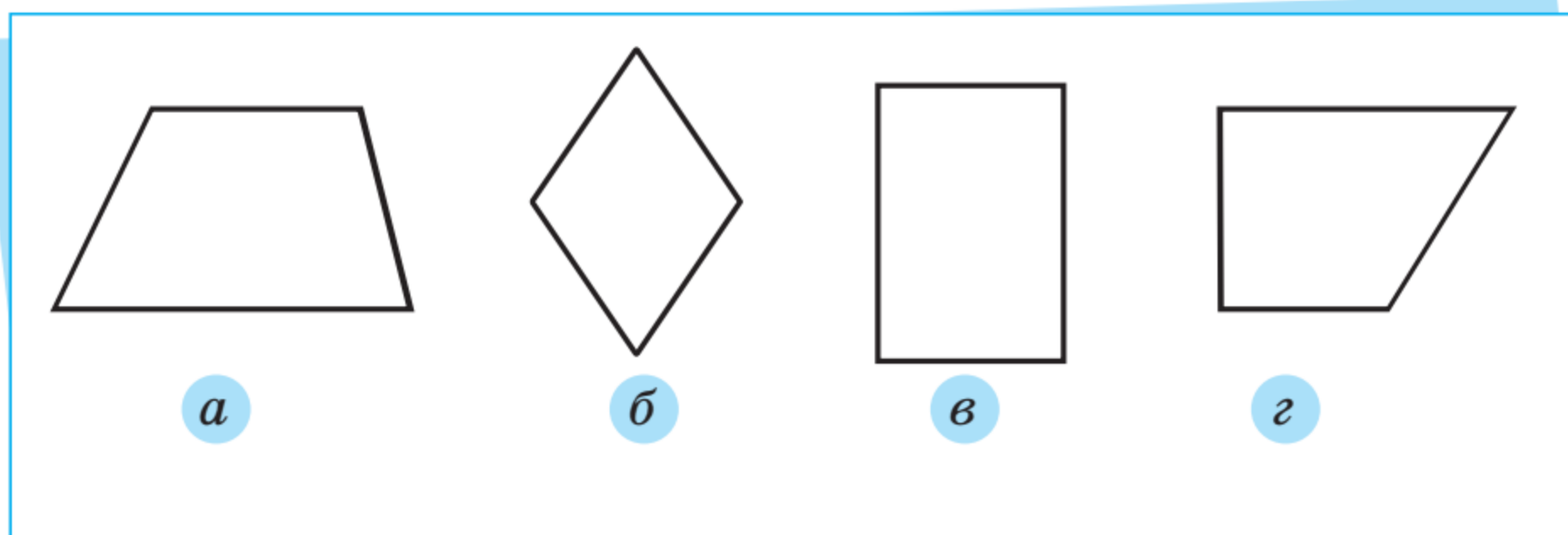
18. Використавши теорему Вієта, запишіть суму і добуток коренів рівняння.
 а) $x^2 - 6x + 1 = 0$; б) $y^2 + 4y - 9 = 0$; в) $x^2 - 6x - 4 = 0$.
19. Який вираз є квадратним триномом?
 а) $x^3 - 2x + 3$; б) $4x^2 + 5x - 6$; в) $7x - 8$; г) $9y^2 - 10y + 11$.
20. Якщо $x_1 = 3$ і $x_2 = 7$ — корені деякого квадратного тринома і $a = 1$, то на які множники можна розкласти цей квадратний трином?
 а) $(x + 3)(x + 7)$; в) $(x + 3)(x - 3)$;
 б) $(x - 3)(x + 7)$; г) $(x - 3)(x - 7)$.
21. Які з рівнянь є біквадратними?
 а) $y^2 + 3y + 1 = 0$; в) $y^4 + 3y^2 + 1 = 0$;
 б) $8x^4 - 12x + 5 = 0$; г) $5x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.
22. Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$.
 а) $4x(1 - 2x) = 3$; в) $4x + 6 = 3x^2$;
 б) $5x(x - 3) = -7$; г) $9 = x(4x - 2)$.
23. Побудуйте трапецію $ABCD$. Запишіть: а) дві її сусідні вершини; б) дві її протилежні вершини; в) дві її сусідні сторони; г) дві її протилежні сторони.
24. Які з наступних тверджень є правильними?
 а) У прямокутника всі кути рівні;
 б) У паралелограма всі кути тупі;
 в) У квадрата всі сторони рівні;
 г) У трапеції дві сторони паралельні, а дві інші — не паралельні.
25. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 55^\circ$ (рис. 1). Градусна міра якого з його кутів теж дорівнює 55° ?
 а) $\angle D$;
 б) $\angle B$;
 в) $\angle C$.



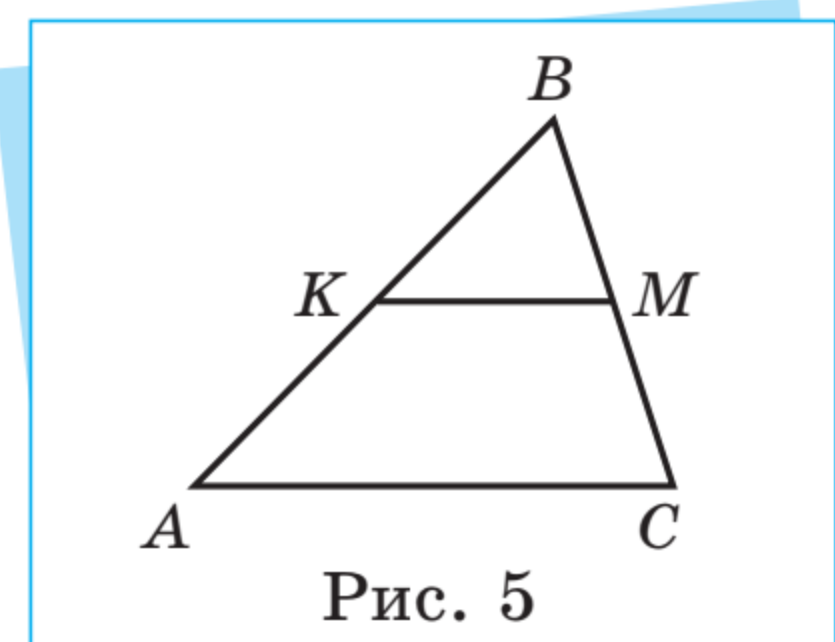
26. У паралелограмі $KLMN$ проведено діагоналі, які перетинаються в точці O (рис. 2). $KO = 13$ см. Довжина якого з відрізків теж дорівнює 13 см?
а) MO ; б) NO ; в) LO ; г) KN .
27. У прямокутнику $KLMN$ проведено діагоналі, які перетинаються в точці P (рис. 3); $KM = 29$ см. Довжина якого з відрізків теж дорівнює 29 см?
а) KL ; б) LM ; в) MN ; г) LN .
28. У ромбі $AKBD$ проведено діагоналі, які перетинаються в точці O (рис. 4); $\angle KAO = 25^\circ$. Яка градусна міра $\angle OAD$?



29. Який із поданих чотирикутників є трапецією?



30. KM — середня лінія трикутника ABC (рис. 5); $AC = 26$ см. Обчисліть довжину відрізка KM . Чи буде чотирикутник $АСМК$ трапецією?



31. Які вписані кути спираються на жовту дугу (див. рис. 6)? Обчисліть градусну міру кута ACB , якщо градусна міра центрального кута AOB дорівнює 86° .

32. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло; $\angle A = 68^\circ$, $\angle B = 130^\circ$. Обчисліть градусні міри двох інших кутів чотирикутника $ABCD$.

33. Прямі b_1 і b_2 перетинають сторони кута; $OA = AB$ (див. рис. 7). Прямі b_1 і b_2 будуть паралельними, якщо...

- а) $OC = CD$; в) $OB = OD$;
б) $OA = OC$; г) $AB = CD$.

34. Відомо, що $AB = 40$ см, $CD = 70$ см, $A_1B_1 = 8$ см, $C_1D_1 = 14$ см. Чи є відрізки AB і CD пропорційними відрізкам A_1B_1 і C_1D_1 ?

35. Відомо, що $\triangle KBC \sim \triangle K_1B_1C_1$, $\angle K = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Обчисліть усі кути трикутника $K_1B_1C_1$. Скористайтесь властивістю, що сума всіх кутів трикутника дорівнює 180° .

36. Відстані на карті між українськими містами Херсон і Керч дорівнює 33 см, Керч і Полтава — 48 см, Полтава і Херсон — 35 см. Відстані між відповідними містами в реальності дорівнюють 330 км, 480 км і 350 км відповідно. Чи подібні трикутники Херсон — Керч — Полтава на карті та в реальності? Якщо так, то за якою ознакою ці трикутники подібні?

37. У прямокутному трикутнику KBC ($\angle C = 90^\circ$) висота CH розбиває цей трикутник на два прямокутні трикутники: KCH ($\angle H = 90^\circ$) і BCH ($\angle H = 90^\circ$) (рис. 8). Які з поданих рівностей відповідають твердженню: «У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи»?

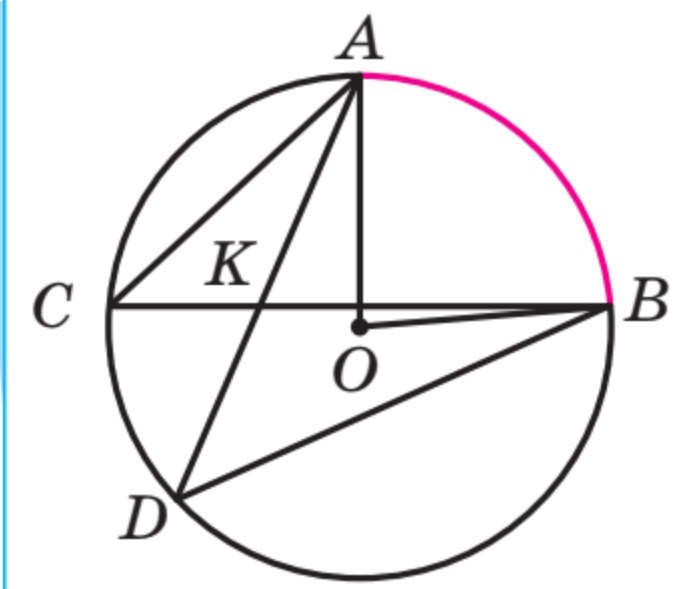


Рис. 6

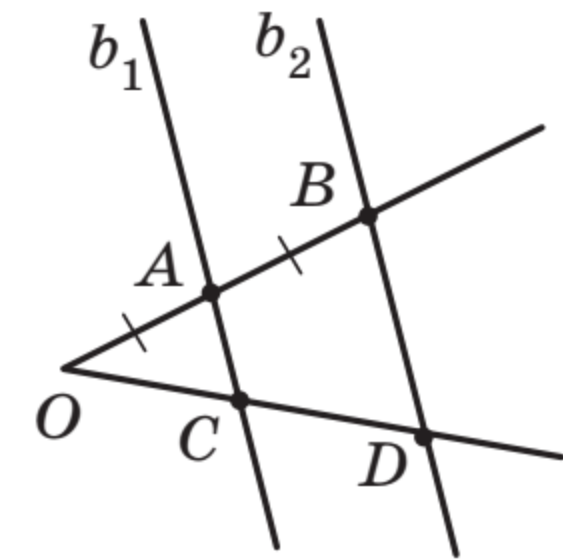


Рис. 7

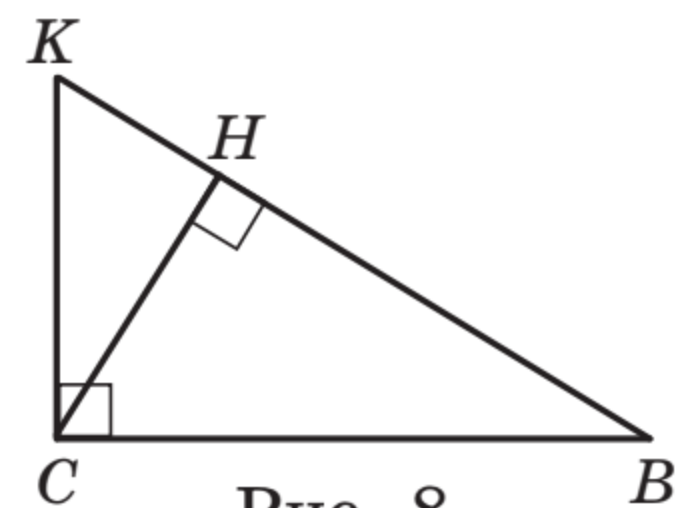


Рис. 8

- а) $KC^2 + BC^2 = KB^2$; в) $HC^2 + KH^2 = BC^2$;
 б) $KH^2 + HC^2 = KC^2$; г) $CH^2 + HB^2 = BC^2$.

38. У прямокутному трикутнику KBC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH (рис. 9). Які з поданих рівностей відповідають твердженню: «Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи на проєкцію цього катета на гіпотенузу»?

- а) $KC^2 = KB \cdot BH$; в) $BC^2 = KB \cdot BH$;
 б) $KC^2 = KB \cdot KH$; г) $BC^2 = KH \cdot BH$.

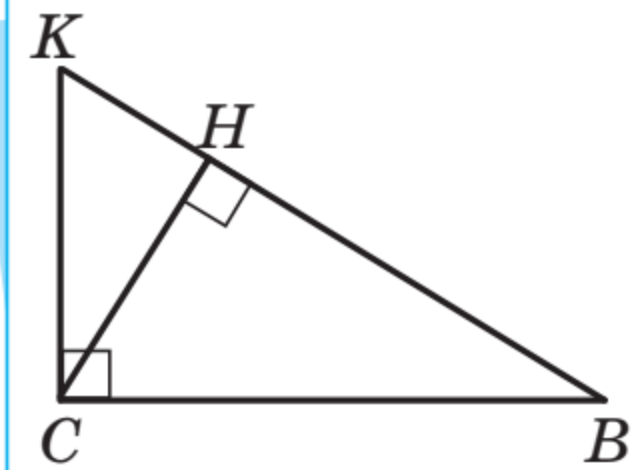


Рис. 9

39. У прямокутному трикутнику CED ($\angle D = 90^\circ$) $\angle E = \beta$ (рис. 10).

- а) Який катет є прилеглим до кута β ?
 б) Який катет є протилежним до кута β ?

40. У прямокутному трикутнику CED ($\angle D = 90^\circ$) $\angle E = \beta$ (див. рис. 10). Яке з поданих відношень дорівнює $\sin \beta$? Згадайте, що синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

- а) $\frac{CD}{CE}$; б) $\frac{CD}{DE}$; в) $\frac{CE}{CD}$; г) $\frac{ED}{CE}$.

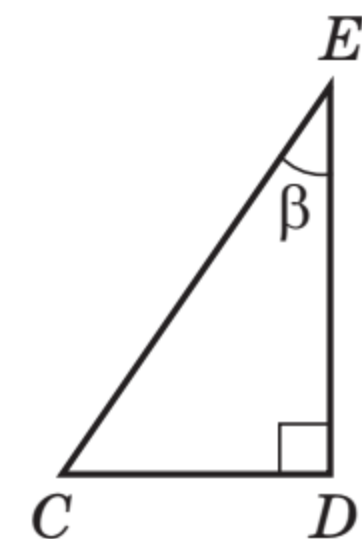


Рис. 10

41. У прямокутному трикутнику відомі катет і протилежний до цього катета гострий кут. Що означає розв'язати цей прямокутний трикутник?

42. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 9$ см, $BC = 12$ см (рис. 11). Скориставшись теоремою Піфагора, знайдіть довжину гіпотенузи AB . Згадайте, що синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи. Обчисліть $\sin \angle A$; $\sin \angle B$.

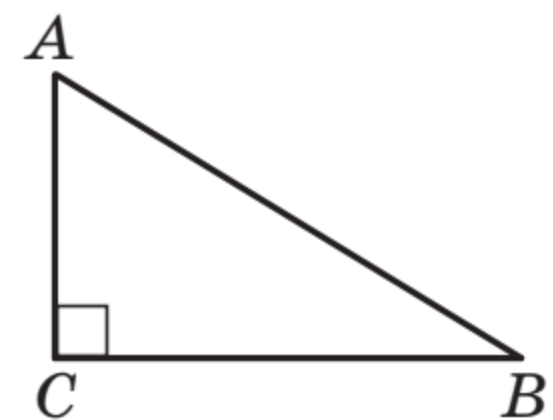
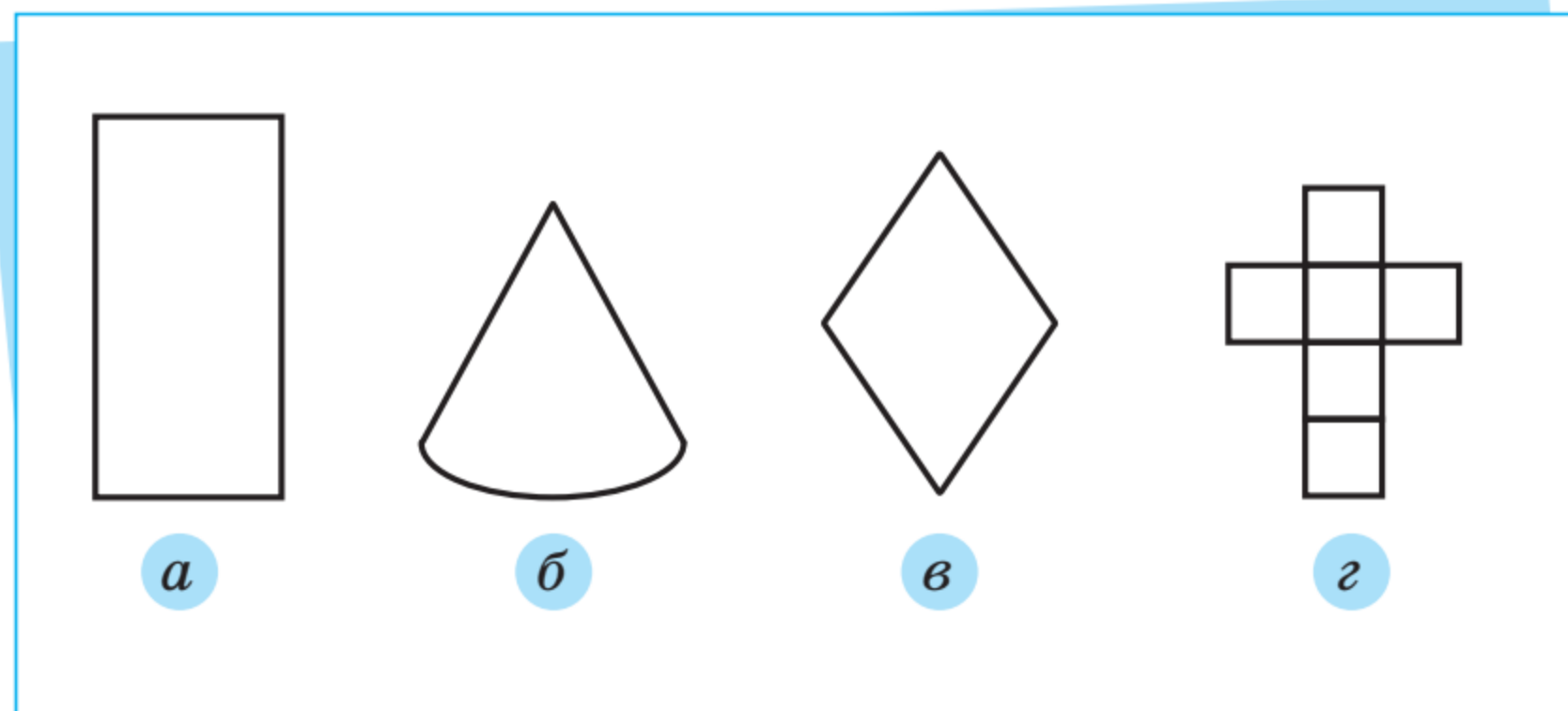


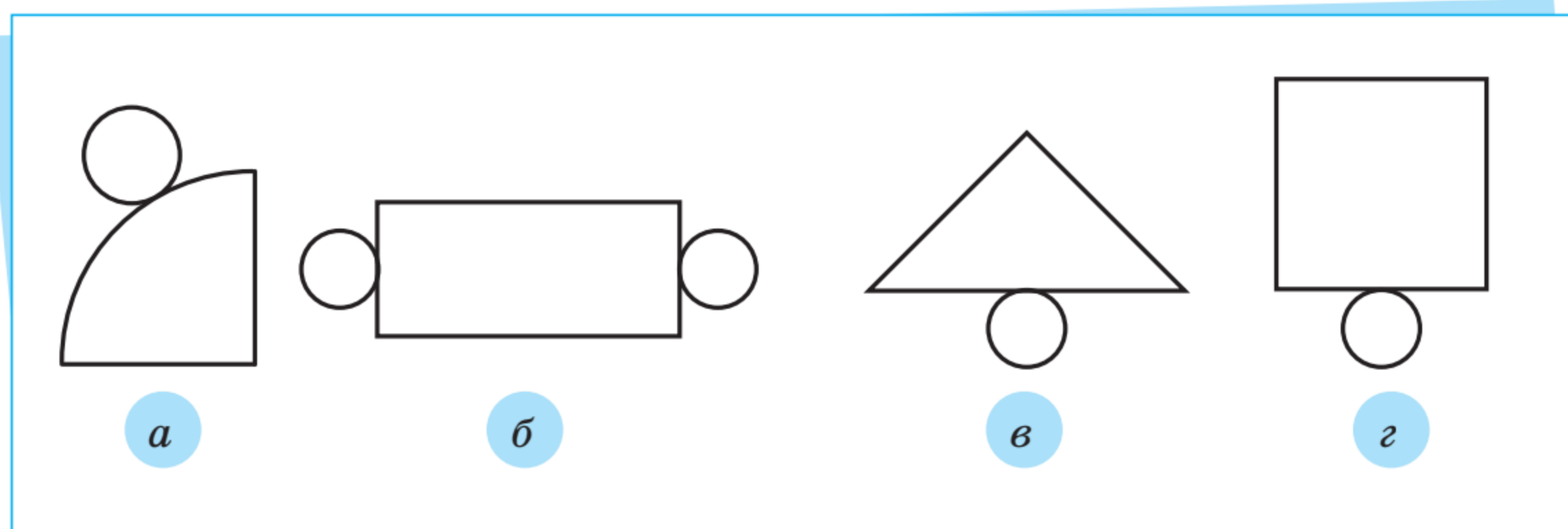
Рис. 11

43. Укажіть розгортку бічної поверхні циліндра.



44. Відомо, що висота циліндра дорівнює 4 см, а радіус його основи — 5 см. Згадайте, що площу бічної поверхні циліндра обчислюють за формулою $2\pi RH$. Знайдіть площу бічної поверхні цього циліндра.

45. Укажіть розгортку повної поверхні конуса.



46. Які з поданих тверджень є правильними?
- а) Якщо обертати прямокутний трикутник навколо його гіпотенузи, то одержимо конус;
 - б) Якщо обертати прямокутник навколо його діагоналі, то одержимо циліндр;
 - в) Якщо обертати прямокутний трикутник навколо його катета, то одержимо конус;
 - г) Якщо обертати прямокутний трикутник навколо його сторони, то одержимо циліндр.

47. Побудуйте в координатній площині точки $A(1; -2)$, $B(7; -2)$. Проведіть відрізок AB . За рисунком знайдіть: а) довжину відрізка AB ; б) точку, яка є серединою відрізка AB , і запишіть координати цієї точки.

48. Точки N і K мають координати $N(4; 3)$, $K(18; 9)$. Знайдіть координати середини відрізка NK , скориставшись формулою $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

49. Назвіть кінцеву точку вектора.

- а) $\overrightarrow{KB}$; б) $\overrightarrow{AM}$; в) $\overrightarrow{CK}$; г) $\overrightarrow{MA}$.

50. Прямі a і b паралельні (див. рис. 12). Чи є колінеарними зазначені вектори?

- а) $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{RP}$;
б) $\overrightarrow{RP}$ і $\overrightarrow{RS}$;
в) $\overrightarrow{KR}$ і $\overrightarrow{RS}$;
г) $\overrightarrow{RN}$ і $\overrightarrow{RS}$.

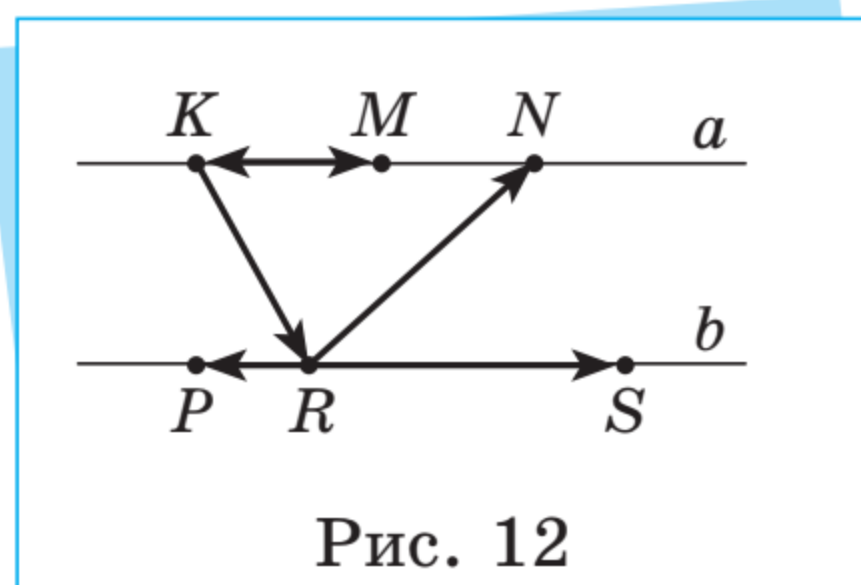


Рис. 12

51. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо точка A має координати $(3; 1)$, а точка B — координати $(10; 5)$. Згадайте: щоб знайти координати вектора, потрібно від координат його кінця відняти відповідні координати його початку.

52. Знайдіть суму векторів $\vec{d}(-5; 8)$ і $\vec{c}(2; 4)$, використавши формулу $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

53. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B(5; 9)$ і паралельна вектору $\vec{s}(4; 3)$, скориставшись формулою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$.

54. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3; 4)$ і $B(5; 10)$, скориставшись формулою $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

55. Визначте, чи може абсциса одиничного півкола дорівнювати числу: а) $-0,99$; б) $1,001$; в) $0,2$; г) -2 .

56. У трикутнику ABC : $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 300^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ (рис. 13). Знайдіть кут між векторами:

- а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$;
- б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
- в) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CA}$.

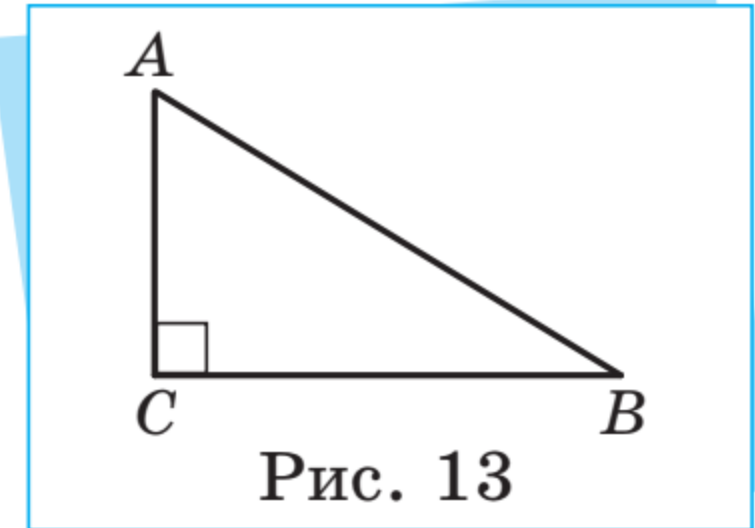


Рис. 13

57. Пані Мирослава позичила в пані Орисі 400 грн, а через 4 місяці віддала їй 500 грн. Для цього випадку знайдіть: а) основну (початкову) суму; б) кінцеву суму; в) відсоткові кошти; г) норму відсотка; д) час позики в роках; е) річну відсоткову ставку.

58. За угодою вкладник повинен був повернути банку А 30 000 грн позики, але банк за 8 місяців до завершення угоди продав це зобов'язання банку Б за 27 000 грн. Для цього випадку знайдіть: а) суму погашення; б) виручку банку; в) дисконт банку; г) норму дисконта; д) річну дисконтну ставку.

59. Пан Іван поклав на депозит 10 000 грн під 10 % річних щопівроку. Знайдіть:

- а) тривалість періоду конверсії в місяцях;
- б) кількість періодів конверсії на рік;
- в) норму відсотка за період конверсії. Запишіть формулу, за якою обчислюватиметься складний підсумок S через 3 роки.

60. Вкладниця має отримати в банку за внеском суму 2000 грн через 2 роки від теперішнього часу. Гроші коштують $r_4 = 8\%$. Знайдіть:

- а) кількість періодів конверсії на рік;
- б) норму відсотка за один період конверсії;
- в) скільки періодів конверсії мине від теперішнього часу до терміну отримання датованої суми через 2 роки. Запишіть рівняння для знаходження суми B , еквівалентної даній датованій сумі, через 3 роки від теперішнього часу.





Середній рівень

61. Ціна акції підприємства «Чисті вікна» минулого тижня становила y грн, а цього тижня зменшилася на 3 грн. Бізнесмен Петро придбав на 300 тис. грн акцій за новою ціною. Складіть вираз для знаходження кількості придбаних бізнесменом Петром акцій підприємства «Чисті вікна». Знайдіть цю кількість, якщо $y = 28$.
62. Виконайте дії з раціональними дробами.
 а) $\frac{3}{a} + \frac{4}{b}$; б) $\frac{5}{x} - \frac{2}{x+1}$; в) $\frac{5a^3}{9b} \cdot \frac{3}{2a}$; г) $\frac{6}{k^2n} : \frac{36}{akn}$.
63. Запишіть у вигляді степеня.
 а) $a^3 \cdot a^{-4} \cdot a^{-5}$; б) $b^{-3} : b^7 \cdot b^6$; в) $\frac{a^7 b^7}{n^7}$; г) $\frac{1}{k^3 \cdot m^3 \cdot n^3}$.
64. Запишіть числа у стандартному вигляді.
 а) 0,000 0006; б) 0,03; в) 0,000 02; г) 0,0008.
65. Дмитрик планує витратити 350 грн, щоб купити шоколадні батончики за ціною x грн. Запишіть формулою залежність кількості k батончиків від їхньої ціни. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?
66. Побудуйте графік функції $y = \frac{-10}{x}$.
67. Чи проходить графік функції $g(x) = x^2$ через зазначену точку?
 а) $K(-5; 25)$; б) $L(0,3; 0,9)$; в) $M(-4; -16)$; г) $N(1; 2)$.
68. Для функції $y = x^2$ визначте значення аргументу x , якому відповідає таке значення функції y : а) $y = 36$; б) $y = 81$.
69. Запишіть числа, у разі піднесення яких до квадрата одержимо число:
 а) 0,04; б) 8100; в) 0,25; г) -0,49.
70. Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня.
 а) $\sqrt{0,01}$; б) $\sqrt{6400}$; в) $\sqrt{0,25}$; г) $\sqrt{40\,000}$.

71. Знайдіть значення виразу.

а) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{180}$; б) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,32}$; в) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$; г) $\frac{\sqrt{810}}{\sqrt{0,1}}$.

72. Спростіть вираз.

а) $\sqrt{25x}$; б) $\sqrt{81y}$; в) $\sqrt{0,01z}$; г) $\sqrt{1,21k}$.

73. У країні Лотергінія податок з лотерейного виграшу сплачують за формулою $p = \sqrt{v}$, де p — сплачений особою податок (у лотергінських шилінгах), v — лотерейний виграш особи (у лотергінських шилінгах). Іван Щасливий виграв у лотерею 250 тисяч лотергінських шилінгів, а Марія Везуча — 160 тисяч. На скільки податок, сплачений Іваном, більший за податок, сплачений Марією?

74. Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точку: а) $A(16;2)$; б) $B(5;25)$; в) $C(0,25;0,5)$; г) $D(900;30)$.

75. Розв'яжіть рівняння.

а) $x^2 - 7^2 = 0$; г) $y^2 - 8y = 0$;
б) $x^2 + 16 = 0$; д) $y^2 + 8y = 0$;
в) $x^2 - 16 = 0$; е) $x^2 - 0,25 = 0$.

76. Розв'яжіть рівняння.

а) $x^2 - 4x - 12 = 0$; г) $t^2 + 2t + 1 = 0$;
б) $y^2 + 8y + 15 = 0$; д) $3m^2 - 3m + 1 = 0$;
в) $2x^2 + 11x - 6 = 0$; е) $b^2 + b + 2 = 0$.

77. Подайте рівняння у вигляді зведеного квадратного рівняння.

а) $2x^2 - 8x + 3 = 0$; б) $-y^2 + 9y - 14 = 0$; в) $4x^2 - 10x + 14 = 0$.

78. Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого будуть подані числа.

а) 4 і 9; б) 2 і -3; в) -5 і -7.

79. Розкладіть квадратний трином на лінійні множники.

а) $y^2 - 16$; б) $x^2 + 10x$; в) $z^2 + 25z$; г) $x^2 - 49$.

80. Розкладіть квадратний трином на лінійні множники.
а) $x^2 + 4x - 5$; б) $y^2 - y - 6$; в) $x^2 + 6x - 16$; г) $y^2 - 10y + 21$.
81. Укажіть, яку заміну доцільно запропонувати для розв'язування рівняння.
а) $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
б) $(x^2 - 5)^2 + 7(x^2 - 5) + 3 = 0$;
в) $(x^2 + 6x + 3)^2 - 7(x^2 + 6x + 3) - 2 = 0$;
г) $(x^2 - 5x - 1)(x^2 - 5x + 1) = 8$.
82. Виконайте рівносильні перетворення та розв'яжіть рівняння.
а) $\frac{x^2 - 5}{4} = 5$; б) $7 = \frac{x^2 + 4}{3}$; в) $\frac{x^2 + 9}{3} = 2$; г) $\frac{x^2 - 1}{5} = 16$.
83. У чотирикутнику $ABCD$ градусна міра кута A дорівнює 70° , кута B — 80° , кута C — 90° . Знайдіть градусну міру кута D .
84. Які з наступних тверджень є правильними?
а) Усі прямокутники є паралелограмами;
б) Усі квадрати є прямокутниками;
в) Усі ромби є квадратами;
г) Усі трапеції є паралелограмами.
85. Знайдіть градусні міри всіх кутів паралелограма $ABCD$, якщо $\angle B = 75^\circ$.
86. Знайдіть периметр паралелограма $ABKL$, якщо $AB + KL = 50$ см, а довжина сторони BK на 10 см менша від довжини сторони AB .
87. У ромбі $AKBD$ проведено діагоналі, які перетинаються в точці O (рис. 14); $\angle OAK = 28^\circ$. Визначте градусні міри всіх кутів ромба.
88. Точки $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(7; 2)$ є вершинами ромба $ABCD$. Побудуйте ці точки в координатній площині. Знайдіть координати точки D і довжину діагоналі AC ромба.

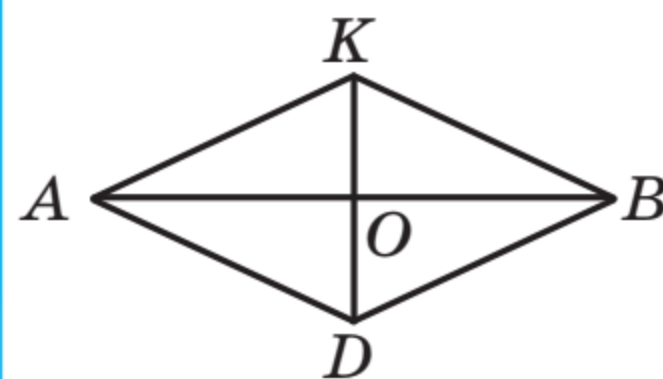
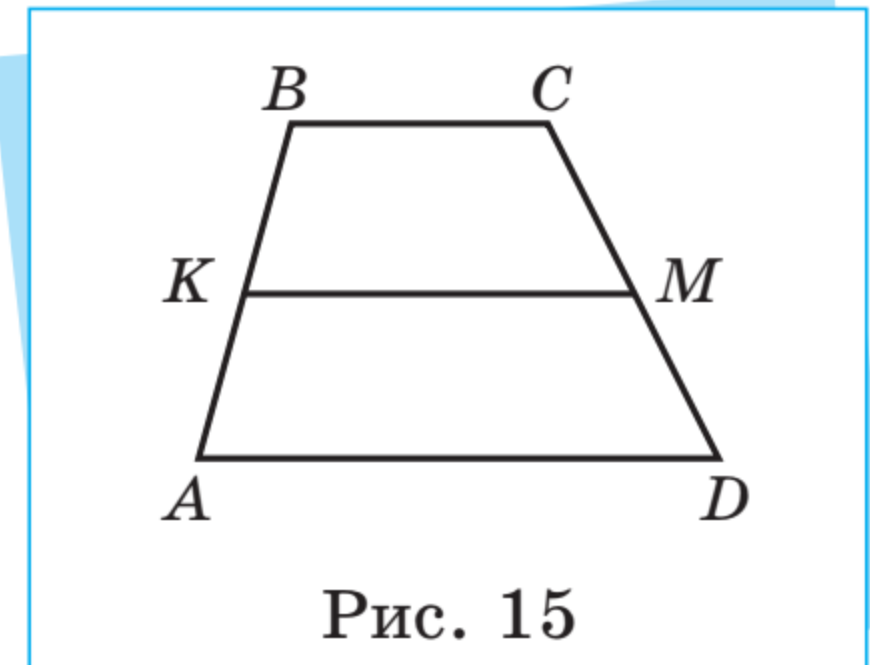


Рис. 14

89. У рівнобічній трапеції градусна міра одного з кутів дорівнює 77° . Знайдіть градусні міри всіх інших кутів цієї трапеції.

90. У трапеції $ABCD$ проведено середню лінію KM (рис. 15); $KB=12$ см; $CD=36$ см. Обчисліть довжини відрізків AK і MD .

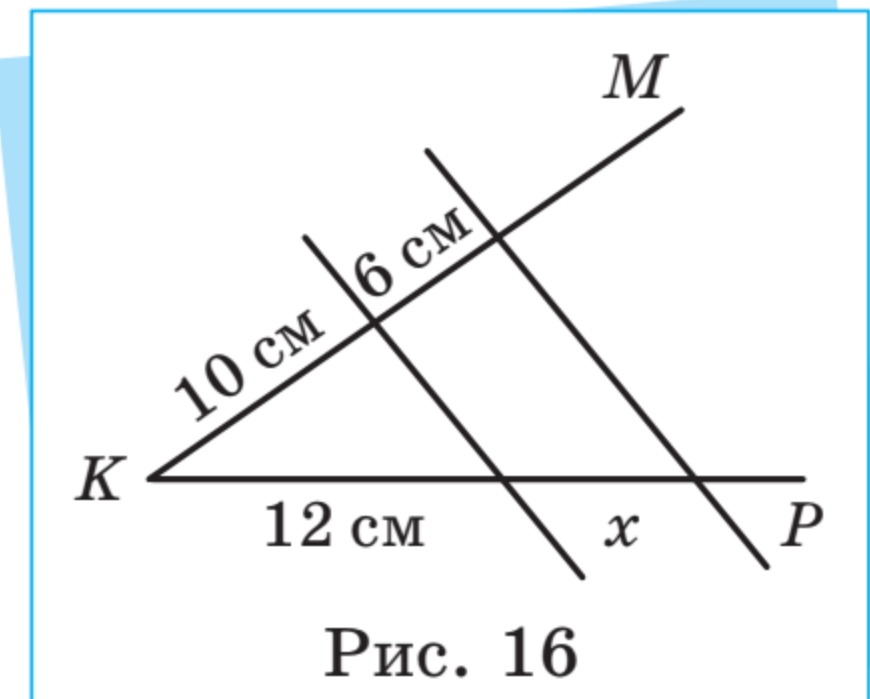


91. Вписаний кут AMC і центральний кут AOC спираються на ту саму дугу. Знайдіть градусну міру кута AOC , якщо: а) $\angle AMC=30^\circ$; б) $\angle AMC=42^\circ$.

92. У чотирикутник $ABCD$ вписано коло. Відомо, що $AB=4$ см, $BC=6$ см, $CD=7$ см. Знайдіть довжину четвертої сторони чотирикутника.

93. Точка A ділить відрізок MC на частини так, що $MA:AC=3:4$. З'ясуйте, чому дорівнює відношення: а) $MC:AC$; б) $MA:MC$.

94. Паралельні прямі відтинають на сторонах кута MKP відрізки так, як показано на рис. 16. Знайдіть довжину невідомого відрізка x .



95. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\frac{AC}{A_1C_1}=4$, $AB=20$ см, $BC=16$ см, $AC=10$ см. Знайдіть довжини сторін трикутника $A_1B_1C_1$.

96. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle MNK$, $AB=40$ см, $BC=35$ см, $MN=8$ см, $MK=9$ см. Знайдіть довжини сторін AC і NK .

97. Знайдіть довжину гіпотенузи прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: а) 5 см і 12 см; б) 4 см і 8 см.

98. Сторона квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть діагональ цього квадрата.

99. Для трикутника KBM (див. рис. 17) запишіть $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

100. У прямокутного трикутника ABD ($\angle D = 90^\circ$) $AD = 9$ см, $BD = 13$ см (рис. 18). Порівняйте:

- а) $\sin\angle B$ і $\cos\angle B$;
- б) $\sin\angle B$ і $\cos\angle A$;
- в) $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{ctg}\angle B$;
- г) $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{ctg}\angle A$.

101. За допомогою калькулятора знайдіть: а) $\sin 25^\circ$; б) $\cos 35^\circ$; в) $\operatorname{tg} 55^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 65^\circ$. Одержані значення округліть до тисячних.

102. У прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та тангенси гострих кутів цього трикутника.

103. Відомо, що висота циліндра дорівнює a см, а діаметр основи — b см. За якою формулою обчислюється площа бічної поверхні цього циліндра?

- а) πab ;
- б) $\pi a + \pi b$;
- в) ab ;
- г) $\pi + ab$.

104. Висота циліндра дорівнює 10 см, а радіус основи — 5 см. Обчисліть площу повної поверхні цього циліндра.

105. Висота конуса дорівнює 6 см, а радіус основи — 8 см. Знайдіть довжину твірної конуса.

106. Розгорткою бічної поверхні конуса з твірною 15 см є сектор; радіус основи конуса — 5 см. Знайдіть градусну міру центрального кута цього сектора.

107. Побудуйте в координатній площині точки $A(-2; 1)$, $B(6; 7)$. Проведіть відрізок AB . Знайдіть довжину відрізка AB і координати його середини за рисунком; за формулою. Чи збігаються результати?

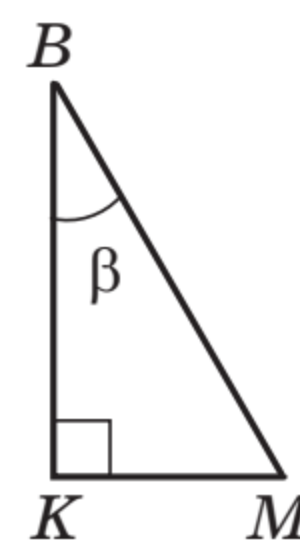


Рис. 17

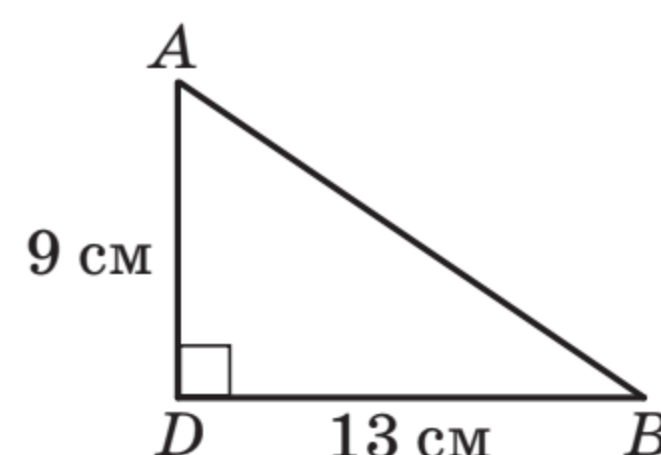


Рис. 18

108. Визначте координати центра та радіус кола, яке задане рівнянням $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$.

109. Перенесіть у зошит вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 19). Побудуйте вектори $2\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$.

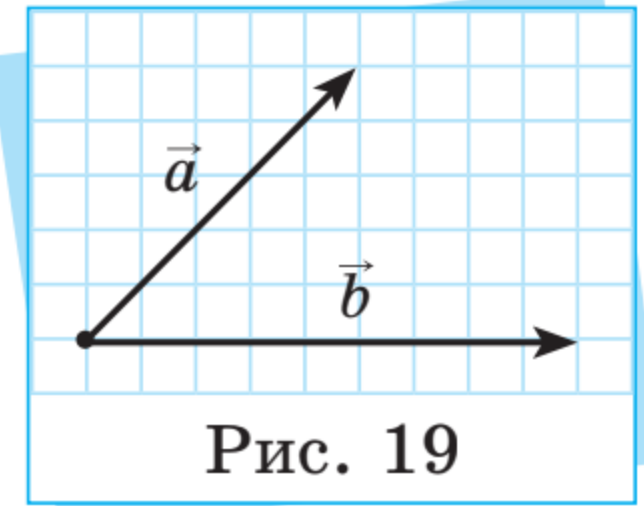


Рис. 19

110. Задано прямокутник $ABCD$.

- Побудуйте вектор, який дорівнює вектору $\overrightarrow{BC}$ і має початок у точці A . Назвіть цей вектор.
- Побудуйте вектор, який дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$ і має початок у точці D .

111. Укажіть координати вектора $\vec{b}$, якщо: а) $\vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$; б) $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

112. Заповніть таблицю:

$\vec{c}$	$\overrightarrow{(1; 7)}$	$\overrightarrow{(-1; 7)}$	$\overrightarrow{(1; -7)}$	$\overrightarrow{(-1; -7)}$
$\vec{d}$	$\overrightarrow{(4; 2)}$	$\overrightarrow{(4; -2)}$	$\overrightarrow{(-4; 2)}$	$\overrightarrow{(-4; -2)}$
$\vec{c} + \vec{d}$				
$\vec{c} - \vec{d}$				

113. Рівняння прямої має вигляд $\frac{x-7}{2} = \frac{y+9}{5}$. Запишіть координати точки, через яку проходить ця пряма, і вектор напрямку цієї прямої.

114. Запишіть рівняння $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$ у вигляді $ax + by + c = 0$, скориставшись основною властивістю пропорції.

115. У трикутника ABC $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Знайдіть кут між векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

116. Відомі координати векторів: $\vec{a}(5; -4)$ і $\vec{b}(6; 7)$. Знайдіть скалярний добуток цих векторів.

117. Пан Володимир позичив пані Тамарі 2000 грн під 10 % річних на 3 місяці. Знайдіть суму, яку має повернути пані Тамара пану Володимирі.
118. Зобов'язання, що погашається через 2 місяці, продане банку, який установив 6 % річну норму простого дисконта при дисконтуванні. Знайдіть виручку банку, якщо сума погашення становила 5000 грн.
119. Вкладник поклав до банку 8000 грн. Банк нараховує на цей внесок відсотки за ставкою 12 % річних щоквартала. Знайдіть складний підсумок, який матиме вкладник на своєму рахунку через 4 роки. Відповідь округліть до сотих гривні.
120. Банк позичає євро під 8 % річних щокварталу. Клієнтка повинна повернути цьому банку 40 000 грн через 2 роки. Знайдіть:
- суму, яку отримала клієнтка в банку;
 - суму, яку повинна сплатити клієнтка, якщо вона захоче погасити позику через 1 рік;
 - суму, яку повинна сплатити клієнтка, якщо вона захоче погасити позику через 3 роки.



Достатній рівень

121. Із формули $\frac{1}{F} = \frac{d+f}{fd}$, де F — фокусна відстань, f — відстань від зображення до лінзи, d — відстань від предмета до лінзи, виразіть F і d .
122. Скоротіть раціональний дріб.
- | | | |
|------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| а) $\frac{xy-y}{xy}$; | б) $\frac{m^6-2m^4}{(m^2-2)^2}$; | в) $\frac{2+t+t^2}{2t^2+t^4+t^3}$. |
|------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
123. Запишіть у вигляді степеня.
- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| а) $3^2 \cdot \frac{1}{81}$; | б) $\frac{1}{8^5} \cdot 64$; | в) $10^{-2} : 10\,000$. |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|

124. Порівняйте числа.

- а) $3 \cdot 10^{-3}$ і $3 \cdot 10^3$; в) $3 \cdot 10^{-2}$ і $3 \cdot 10^{-3}$;
 б) $2 \cdot 10^{-3}$ і $3 \cdot 10^{-3}$; г) $3 \cdot 10^{-3}$ і $4 \cdot 10^{-4}$

125. Які із зазначених точок належать графіку функції $y = \frac{-12}{x}$?

- а) $(-4; 3)$; б) $(6; 2)$; в) $(2; -6)$; г) $(-3; -4)$

126. Побудуйте в зошиті графік функції $y = \frac{-9}{x}$.

127. Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції дорівнює: а) 1; б) 0; в) 225; г) $-0,01$.

128. Для кожного з випадків $a—г$ побудуйте графіки функцій в одній системі координат. Чи перетинаються графіки цих функцій? Якщо так, то знайдіть координати всіх точок їх перетину.

- а) $y = x^2$ і $y = 9$; в) $y = x^2$ і $y = \frac{1}{x}$;
 б) $y = x^2$ і $y = -4$; г) $y = x^2$ і $y = 0$.

129. Укажіть вирази, які мають зміст.

- а) $\sqrt{-16}$; б) $\sqrt{(-0,2)^2}$; в) $(\sqrt{-0,2})^2$; г) $\sqrt{(-0,03) \cdot (-0,27)}$.

130. Розв'яжіть рівняння.

- а) $6x^2 = -6$; б) $2x^2 = 20$; в) $0,5x^2 = 0$; г) $5x^2 = 35$.

131. Розв'яжіть рівняння.

- а) $\sqrt{x-2} = 4$; б) $\sqrt{x+4} = -5$; в) $2\sqrt{x+3} = 12$; г) $3\sqrt{x-8} = 0$.

132. Які рівності є правильними?

- а) $5\sqrt{a} + 2\sqrt{b} = 7\sqrt{a+b}$; в) $\sqrt{(-11)^2} = |-11|$;
 б) $\sqrt{(-7)^2 b^4} = 7b^2$; г) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = 5$.

133. Спростіть вираз.

а) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$; в) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{8})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2}$.

134. Внесіть множник під знак квадратного кореня.

а) $6\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{3}$; в) $8\sqrt{5}$; г) $-6\sqrt{7}$.

135. Впишіть правильні числа в таблицю значень функції $y = \sqrt{x}$.

x		$\frac{1}{9}$	1,44		3,61	4,41	9	
y	0,5	$\frac{1}{3}$		1,7				4

136. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка функції $y = \sqrt{x}$ і графіка функції: а) $y = 9$; б) $y = 2,5$; в) $y = \frac{8}{9}$; г) $y = -0,25$.

137. Задано функцію $y = \sqrt{x+5}$. Назвіть два додатних та два від'ємних числа, які входять до області визначення цієї функції (якщо такі числа існують). Назвіть найменше число, яке входить до області визначення даної функції.

138. Розв'яжіть рівняння.

а) $0,1x^2 - 1,6x + 7,1 = 0$; в) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
 б) $y^2 - 6y = 7$; г) $t + 15 - 2t^2 = 0$.

139. Знайдіть невідомий коефіцієнт квадратного рівняння, якщо відомо значення дискримінанта цього рівняння.

а) $x^2 + x + c = 0$, $D = 121$;
 б) $x^2 + bx + 15 = 0$, $D = 4$;
 в) $ax^2 - x - 1 = 0$, $D = 25$.

140. Використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, знайдіть корені рівняння. Виконайте перевірку.

а) $x^2 - 4x - 21 = 0$; в) $t^2 + 15t + 56 = 0$;
 б) $y^2 - 7y + 6 = 0$; г) $u^2 - 10u + 24 = 0$.

141. Скоротіть дріб, попередньо розклавши його чисельник на множники.

а) $\frac{2x^2 - x - 6}{x + 1}$; б) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; в) $\frac{2x^2 + x - 3}{2x + 3}$; г) $\frac{2x^2 + 11x + 5}{x + 5}$.

142. Розкладіть поліном на множники.

а) $x^3 - 3x^2 - 18x$; в) $x^4 + x^3 - 6x^2$;
б) $x^3 + x^2 - 6x$; г) $-6x^4 + 14x^3 + 12x^2$.

143. Розв'яжіть рівняння $(x - 3)^2 + 4(x - 3) - 5 = 0$ двома способами.

144. Розв'яжіть рівняння.

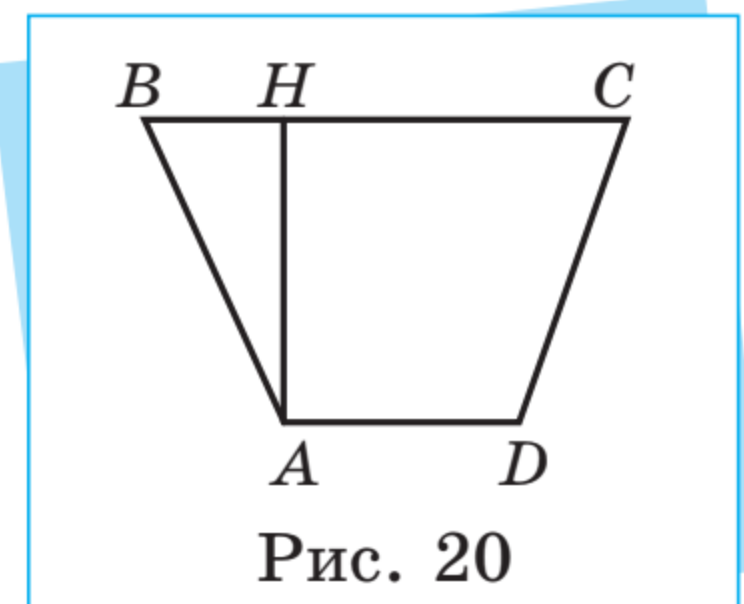
а) $x^2 - 10|x| + 9 = 0$; в) $\frac{2x^2 + 5x + 2}{x} = 0$;
б) $(x - 7)^2 - (x - 7) - 12 = 0$; г) $\frac{7}{x} = \frac{x - 5}{2}$.

145. Від шматка тканини квадратної форми по периметру відрізали стрічку, ширина якої дорівнює 5 см. Після цього площа тканини, що залишилась, стала дорівнювати 1600 см^2 . Знайдіть початкові розміри шматка тканини.

146. Відомо, що в опуклому чотирикутнику два кути — рівні, третій кут на 20° менший, ніж перший і другий разом, а четвертий дорівнює 60° . Знайдіть градусні міри невідомих кутів цього чотирикутника.

147. Задано дельтоїд $ABCD$, у якого $AD = DC$, $BC = AB$ і діагоналі перетинаються в точці O . Доведіть, що $AO = OC$.

148. У трапеції $ABCD$ проведено висоту AH (рис. 20). Чи правильне твердження, що сума внутрішніх кутів трапеції $ABCD$ більша, ніж сума внутрішніх кутів трапеції $AHCD$? Поясніть свою відповідь.



149. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайдіть периметр паралелограма, якщо периметр трикутника $BAD = 33$ см, $AO = 10$ см, $BO = 8$ см. Чи всі дані, наведені в умові, ви використали? Поясніть свою відповідь.

150. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці K . Доведіть, що $AB = BK$.

151. У прямокутнику $ABCD$ проведено бісектрису кута A , яка перетинає сторону BC в точці M (рис. 21). Відомо, що $AB = 7$ см, $MC = 8$ см. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$.

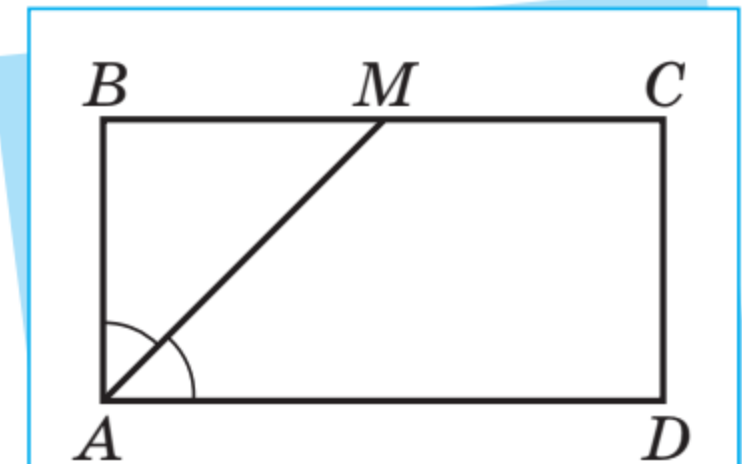


Рис. 21

152. Більша діагональ ромба $ABCD$ має довжину 40 см, а менша — 32 см. Кут A вдвічі більший за кут B . Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до сторони AD .

153. Периметр квадрата $ABCD$ дорівнює 60 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.

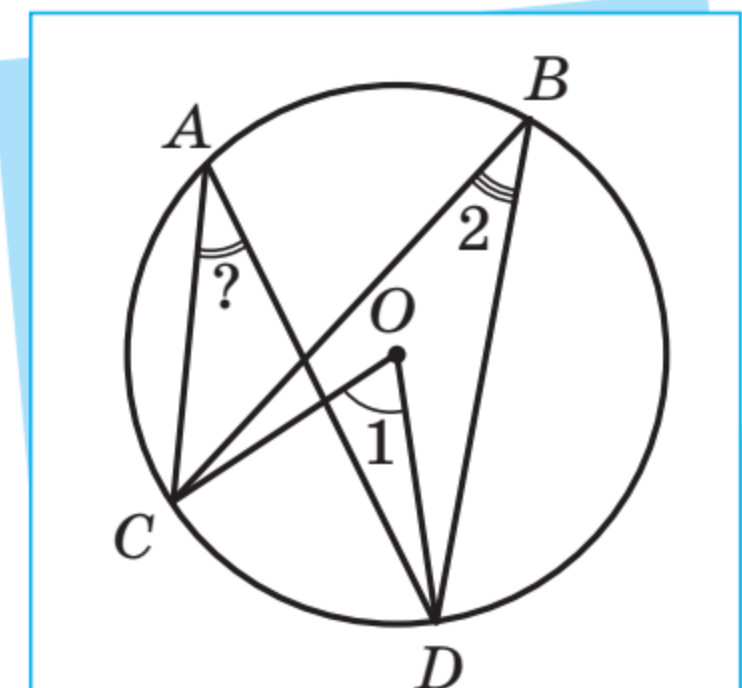


Рис. 22

154. У трапеції $ABCD$ проведено середню лінію EF (точка E належить AB). Відомо, що $AE = 15$ см, $CF = 10$ см, $EF = 25$ см. Знайдіть периметр трапеції $ABCD$.

155. За даними рис. 22 знайдіть градусну міру кута A , якщо відомо, що $\angle 1 + \angle 2 = 156^\circ$.

156. На серединах сторін трикутника ABC взято точки M , K і N так, як показано на рис. 23. Доведіть, що $MKNB$ — паралелограм. Знайдіть периметр паралелограма $MKNB$, якщо $AB = 16$ см, $NC = 9$ см.

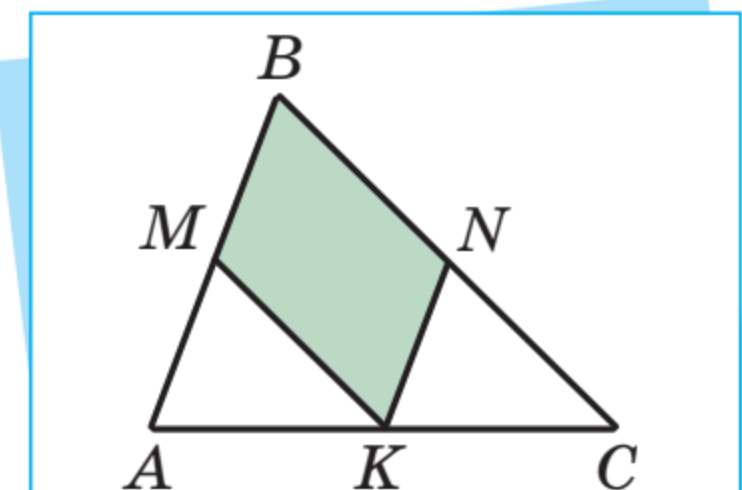


Рис. 23

157. У подібних трикутників ABC і PQR $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $AB = 36$ см, $BC = 27$ см, $AC = 18$ см, $PR = 8$ см. Знайдіть довжини сторін PQ і QR .
158. Із точки A до прямої b проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть довжину проєкції цієї похилої на пряму b , якщо довжина перпендикуляра дорівнює 55 см, а довжина похилої — 73 см.
159. У трапеції $ABCD$ проведено висоту BH . Запишіть вирази для знаходження довжин висоти BH і сторони AB , якщо $\angle A = \alpha$, $AH = x$. Знайдіть довжини BH і AB , якщо: а) $\alpha = 60^\circ$, $x = 3$ см; б) $\alpha = 30^\circ$, $x = 4$ см.
160. Знайдіть значення виразу, не використовуючи калькулятор.
а) $\frac{2\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ}$; б) $\sin 60^\circ - \sin 15^\circ + \cos 75^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 33^\circ \cdot \operatorname{ctg} 57^\circ$.
161. У трикутнику AMD проведено висоту MH . Знайдіть довжини невідомих сторін трикутника AMH і градусні міри невідомих кутів трикутника AMD , якщо $MH = 6$ см, $HD = 6\sqrt{3}$ см, а кут $AMH = 30^\circ$.
162. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 63 см^2 , а довжина кола основи циліндра — 18π см. Визначте довжину висоти цього циліндра та радіус кола основи.
163. Скільки різних конусів можна отримати в результаті обертання прямокутного трикутника зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см навколо кожної з його сторін? Поясніть свою відповідь.
а) один; б) два; в) три.
164. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 16$ задає коло. Визначте центр і радіус цього кола.
165. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Побудуйте вектор, рівний вектору $\overrightarrow{OD}$, якщо його початок розташований: а) у точці A ; б) у точці B .
166. Знайдіть координати та довжину вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо:
а) $C(1; 3)$, $D(-3; -4)$; б) $C(-2; -1)$, $D(-5; 2)$; в) $C(1; 0)$, $D(0; -1)$.

167. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2; 5)$ і $B(3; 7)$, і вкажіть вектор напрямку цієї прямої.
168. З'ясуйте, чи перпендикулярні подані вектори.
а) $\vec{m}(-5; -3)$ і $\vec{n}(-6; 10)$; б) $\vec{p}(2; 5)$ і $\vec{q}(-5; -2)$.
169. Пан Олександр має можливість повернути пані Надії 4000 грн через 6 місяців, знаючи, що пані Надія позичає гроші під 20 % річних. Яку суму грошей може попросити зараз пан Олександр у пані Надії на цих умовах?
170. Пані Людмила бажає отримати в банку позику на 8 місяців. Банк надає позики з річною нормою простого дисконту 12 %. Яку суму потрібно просити пані Людмилі, щоб одержати на руки 30 000 грн?
171. Фірма «Колісниця» прагне накопичити на депозитному рахунку 500 000 грн через 3 роки. Знайдіть теперішню вартість P цих коштів і складний дисконт D , якщо гроші на рахунку конвертуються щоквартально за річною ставкою 10 %.
172. ФОП Тарасенко має сплатити банку 20 000 грн через пів року і ще 20 000 грн через півтора року, але хоче здійснити всі виплати одним платежем через 1 рік. Знайдіть розмір цього платежу, якщо гроші коштують 6 % річних щомісяця.



Високий рівень

173. Доведіть тотожність.

а) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{6x}{x^2-1}$; б) $\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} = \frac{(a+b)^2}{a-b}$.

174. Знайдіть:

а) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, якщо $x + \frac{1}{x} = 5$;
б) $x^3 + \frac{1}{x^3}$, якщо $x + \frac{1}{x} = 4$.

175. Спростіть вираз.

а) $(a^{-1} - b^{-1})^{-1} : (a^{-2} - b^{-2})^{-1}$; б) $\frac{(x-1)^{-2} - (x+1)^{-2}}{(x-1)^{-2} + (x+1)^{-2}}$.

176. Відомо, що k_1 і k_2 — різні числа. Чи можуть графіки функцій $y = \frac{k_1}{x}$ і $y = \frac{k_2}{x}$ перетинатися? Відповідь поясніть.

177. Побудуйте графік функції.

а) $y = \frac{2}{|x|}$; б) $y = -\frac{2}{|x|}$.

178. Побудуйте графік функції.

а) $y = \begin{cases} x+6, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq -2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 3-2x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

179. Спростіть вираз.

а) $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

180. Скоротіть дріб.

а) $\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$; б) $\frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x^2 - 3}$.

181. Скоротіть дріб.

а) $\frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}$; б) $\frac{5\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{25x - 4y}$.

182. Спростіть вираз.

а) $\left(\frac{\sqrt{m}}{m-n} - \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} \right) : \frac{\sqrt{m}}{n-m}$; б) $\sqrt{\frac{(\sqrt{z}-1)^2}{z-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}}$.

183. Визначте, як розміщена відносно графіка $y = \sqrt{x}$ кожна із зазначених точок (належить графіку; лежить вище графіка; лежить нижче графіка). Відповідь поясніть.

$A(144; 12)$, $B(81; 10)$, $C(11; \sqrt{11})$, $D(100; 9)$.

184. Укажіть всі цілі числа, які розташовані на числовій прямій між двома даними числами. Відповідь поясніть.

а) $\sqrt{13}$ і 6;

в) $-\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$;

б) $\sqrt{1,2}$ і $\sqrt{60}$;

г) $-\sqrt{23}$ і $-\sqrt{2}$.

185. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x+2)^2 = 8x+1$;

б) $(x-3)^2 = 5(13-x)$.

186. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x+3)^2 + (x-4)^2 = 25$;

б) $(5x-3)^2 - (3x-1)^2 = 24$.

187. Знайдіть усі значення q , за яких для рівняння $3x^2 - 6x + q = 0$ виконується умова: а) $x_1 + 2x_2 = 0$; б) $x_1 - 2x_2 = 0$; в) $6x_1 - x_2 = 0$.

188. Скоротіть дріб.

а) $\frac{5a^2 - 7a - 24}{7a^2 - 24a + 9}$;

б) $\frac{5a^2 - 13a + 6}{a^2 - 4a + 4}$;

в) $\frac{6b^2 - 19b + 13}{2b^2 + 7b - 9}$.

189. Усі однокласники й однокласниці обмінялися рукоштовнаннями. Скільки учениць і учнів у класі, якщо всього відбулося 210 рукоштовнань?

190. Скоротіть дріб.

а) $\frac{a - 5\sqrt{a} + 6}{2 - \sqrt{a}}$;

б) $\frac{b - 6\sqrt{a} + 8}{\sqrt{b} - 4}$;

в) $\frac{m - 2\sqrt{m} - 3}{3 - \sqrt{m}}$.

191. Розв'яжіть рівняння: а) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$; б) $2t^2 - 5|t| + 3 = 0$.

192. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x+2)^4 - 2(x+2)^2 - 3 = 0$;

б) $(x-3)^4 - 3(3-x)^2 + 2 = 0$.

193. Розв'яжіть рівняння.

а) $3(x^2 + 2x)^2 + 5(x^2 + 2x) - 2 = 0$;

б) $(x^2 - 5x + 7)^2 - 2(x^2 - 5x + 7) - 3 = 0$.

194. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x} = 0;$

в) $\frac{x^2 + 6x + 8}{\sqrt{x + 3}} = 0;$

б) $\frac{2x^2 + 7x - 22}{x^2 - 4} = 0;$

г) $\frac{7x^2 - 6x - 1}{\sqrt{2 - 3x}} = 0.$

195. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{10}{x - 3} - \frac{8}{x} = 1;$

б) $\frac{20}{x + 3} + \frac{20}{x} = 3.$

196. Відстань між двома містами 60 км. Із першого міста до другого виїжджають одночасно два автомобілі. Швидкість руху першого автомобіля була на 20 км/год більшою, і він дістався другого міста на пів години раніше, ніж другий автомобіль. Визначте швидкість руху кожного автомобіля.

197. До сплаву міді і цинку, який містить 5 кг цинку, додали ще 15 кг цинку. Число, яке виражає процентний вміст міді в новому сплаві, на 30 менше від числа, яке виражає процентний вміст міді в початковому сплаві. Скільки кілограмів міді було в початковому сплаві?

198. Відомо, що перший робітник витратить на виконання певної роботи на 2 год більше, а другий робітник на 4 год 30 хв більше, ніж знадобилося б їм для сумісної роботи. За який час кожен робітник може виконати цю роботу, працюючи окремо?

199. У прямокутнику менша сторона дорівнює 20 см і утворює з діагоналлю кут 60° . Середини сторін прямокутника послідовно з'єднали. Знайдіть периметр утвореного чотирикутника.

200. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба. І навпаки: середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

201. Пряма, проведена паралельно бічній стороні трапеції через кінець меншої основи, що дорівнює 3 см (див. рис. 24), відтинає трикутник, периметр якого дорівнює 17 см. Знайдіть периметр трапеції.

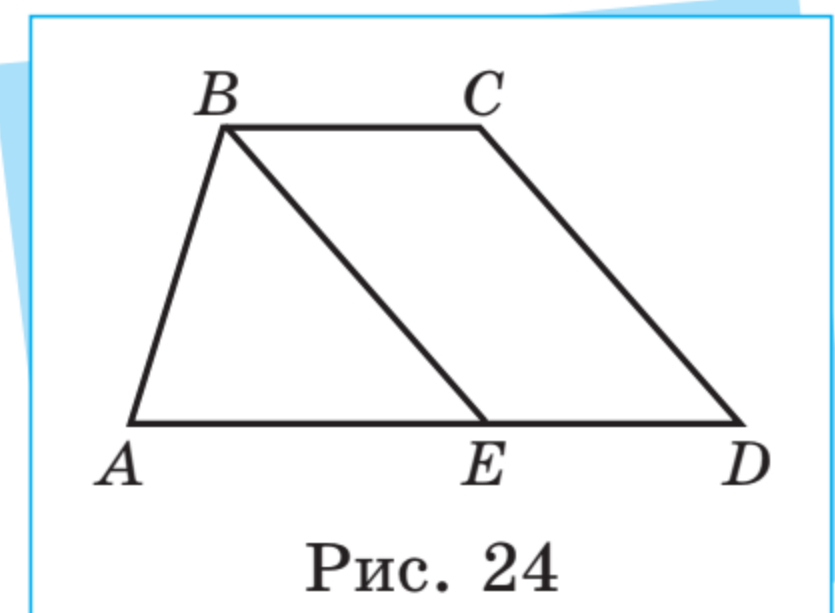


Рис. 24

202. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть довжини відрізків, на які ділить середню лінію трапеції одна з діагоналей трапеції.
203. Середня лінія трапеції дорівнює 14 см. Одна з діагоналей трапеції ділить середню лінію трапеції на два відрізки, різниця яких дорівнює 4 см. Знайдіть довжини основ трапеції.
204. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть градусні міри кутів трапеції.
205. Через кінці дуги, градусна міра якої дорівнює 60° , проведено дотичні до кола. Знайдіть градусну міру кута між ними.
206. У кут ABC вписано коло. Точки дотику ділять це коло на дуги, градусні міри яких відносяться як 5 : 4. Знайдіть величину кута ABC .
207. Навколо трапеції описано коло. Периметр трапеції дорівнює 26 см, середня лінія — 6 см. Знайдіть бічні сторони трапеції.
208. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Кут при основі дорівнює 60° . Де розташований центр описаного навколо трапеції кола?
209. Бічні сторони трапеції, яка описана навколо кола, дорівнюють 2 см і 6 см. Знайдіть периметр і довжину середньої лінії трапеції.
210. У трикутнику ABC проведено медіану AM і поділено її точкою K у відношенні 5:2, рахуючи від точки A (див. рис. 25). Пряма CK перетинає сторону AB в точці L . Знайдіть відношення $AL:LB$.
211. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E розташована на стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = c$, $AC = b$.

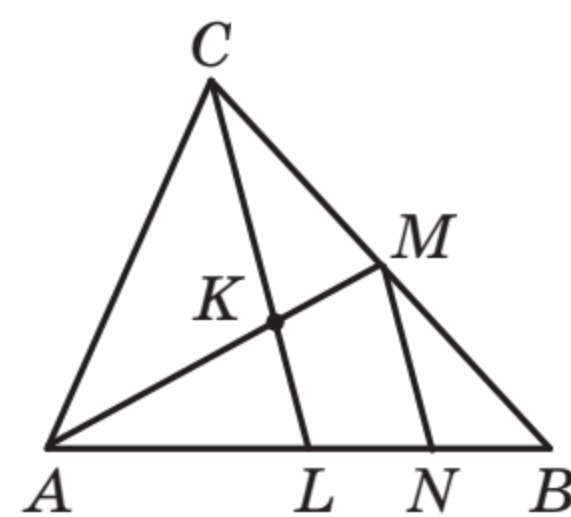
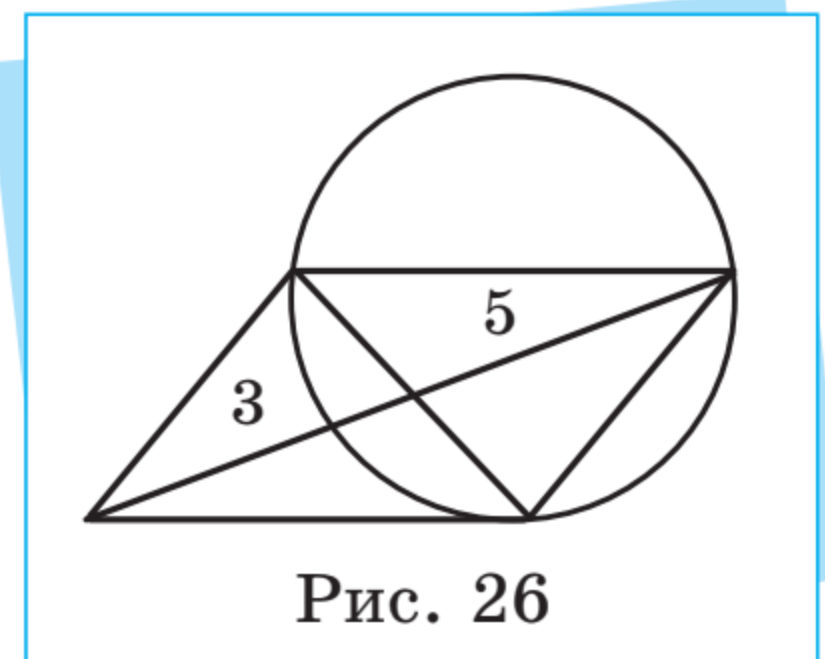


Рис. 25

212. Відрізок MN , кінці якого лежать на сторонах AB і AC трикутника ABC , паралельний стороні BC . Доведіть, що медіана трикутника, проведена з вершини A , ділить відрізок MN навпіл.
213. Висота рівнобічного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 2 см і 8 см, рахуючи від основи трикутника. Знайдіть основу трикутника.
214. У рівнобічну трапецію вписано коло, радіус якого дорівнює 12 см. Знайдіть основи трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 25 см.
215. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні й дорівнюють 1 см і $\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.
216. Медіана і висота, проведені до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнюють відповідно 25 см і 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.
217. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC до сторони BC проведено висоту AD . Доведіть, що $AC^2 = 2CD \cdot BC$.
218. Бічні сторони рівнобічного трикутника дорівнюють a , а його основа дорівнює b . Знайдіть відстань між основами двох бісектрис, проведених до бічних сторін цього трикутника.
219. Коло, що проходить через три вершини паралелограма, ділить його діагональ на відрізки, які дорівнюють 3 см і 5 см (рис. 26). Знайдіть довжину іншої діагоналі паралелограма.
220. У прямокутному трикутнику висота і медіана, проведені з вершини прямого кута, відносяться як 40:41. Знайдіть тангенси гострих кутів цього трикутника.
221. Медіани прямокутного трикутника, які проведені до катетів, дорівнюють a і b . Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.
222. Два кути трикутника дорівнюють 45° і 60° , а сторона між ними становить 2 см. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до цієї сторони.



223. Знайдіть на осі Oy точку, яка рівновіддалена від точок з координатами $(1; 3)$ і $(5; 1)$.
224. Коло, яке описане навколо трикутника ABC з вершинами в точках $A(2; 1)$, $B(3; 8)$, $C(10; 1)$, має центр у точці $O(6; 4)$. Запишіть рівняння цього кола.
225. Точки M і K є серединами відрізків AB і CD відповідно. Доведіть векторну рівність $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.
226. Доведіть, що точки $M(-1; 2)$, $N(2; -1)$, $K(1; -3)$, $L(-5; 3)$ є вершинами трапеції.
227. З'ясуйте, чи паралельні прямі, які задані рівняннями.
а) $11x - 4y - 5 = 0$ і $-11x + 4y - 3 = 0$;
б) $3x - 5y - 1 = 0$ і $-6x + 10y + 2 = 0$;
в) $7x - 3y - 8 = 0$ і $3x - 7y + 3 = 0$.
228. Перевірте, чи паралельні прямі, задані рівняннями $4x - 3y - 1 = 0$ і $8x - 6y + 12 = 0$, і знайдіть відстань між ними.
229. Банк пропонує 15 % річних щомісяця на свої депозити в гривні. Визначте ефективну річну норму r для цієї пропозиції банку. Скільки відсоткових коштів одержить клієнт цього банку наприкінці року, якщо за цих умов зробить внесок 50 000 грн?
230. Банк надає кредити під певну річну ставку щокварталу. Клієнтка одержала кредит на суму 20 000 грн. За умовами цього кредиту вона має через рік повернути 22 076 грн 26 коп. Яка річна відсоткова ставка банку?
231. Пан Олег повинен був сплатити банку 200 000 грн через рік після позики, але вирішив здійснити цю виплату двома однаковими платежами — через пів року і через півтора року після позики. Знайдіть розмір цих однакових платежів, якщо гроші коштують $r_2 = 8\%$.
232. Пані Христина мала сплатити банку 10 000 грн через рік після позики і ще 10 000 грн через 2 роки, але вирішила здійснити ці виплати двома однаковими сумами — через пів року і півтора року після позики. Знайдіть ці однакові суми, якщо гроші коштують 10 % річних щокварталу.

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Проект до інтегрованого модуля 3. Прямокутні трикутники в побуті та техніці



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проект за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя/вчительки сформууйте групи для виконання проекту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть у групах разом з учителем/вчителькою тематику доцільного та цікавого дослідження щодо використання прямокутних трикутників у побуті та техніці (предмети побуту, будівництво й архітектура, машини й механізми, твори мистецтва тощо), складіть план дослідження та спрогнозуйте можливі результати.

Етап 3. Проведіть дослідження щодо використання прямокутних трикутників у побуті та техніці у формі спостереження, пошуку ілюстративних матеріалів, аналізу історії розвитку предметів побуту, технічних новацій і мистецьких творів.

Етап 4. Проаналізуйте, як ефективно застосовувати прямокутні трикутники та їхні властивості для досягнення кінцевої мети їх використання у вашій проектній групі. Обґрунтуйте, чому саме прямокутні трикутники зручно використовувати для досягнення цієї мети.

Етап 5. За можливості виготовте самостійно певні предмети побуту чи твори мистецтва або виконайте технічне креслення архітектурних форм чи механізмів, які містять прямокутні трикутники. Поясніть, як саме ви використали в цих виробах чи кресленнях властивості прямокутних трикутників.

Етап 6. Оформте результати дослідження у вигляді презентації, відеоролика або театралізованого виступу. Представте результати дослідження учням і ученицям свого класу на уроці математики, технологій, мистецтва, бінарному уроці тощо.

Етап 7. Обговоріть підсумки проекту спочатку у своїй групі (якщо група складалася з однієї особи, треба провести саморефлексію), а потім з учителем/вчителькою та ученицями й учнями класу. Визначте позитивні й проблемні моменти, напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності щодо виконання та представлення проектів.

Проект до інтегрованого модуля 4. Координатний і векторний методи в науці та житті



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проект за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно або з допомогою вчителя/вчительки сформууйте групи для виконання проекту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть у групах разом з учителем/вчителькою тематику доцільного та цікавого для кожної групи дослідження щодо використання координат і векторів у повсякденному житті та наукових дослідженнях (математичні моделі реальних життєвих ситуацій, задач природничих, суспільних і гуманітарних наук тощо), складіть план дослідження та спрогнозуйте його можливі результати.

Етап 3. Проведіть дослідження щодо використання різних систем координат і/або векторів у задачах повсякденного життя, а також у природничих, суспільних і гуманітарних науках у формі спостереження, пошуку належних джерел з історії науки.

Етап 4. Проаналізуйте, яким чином ефективно застосовувати координати і вектори для досягнення кінцевої мети їх використання для вашої проектної групи. Обґрунтуйте, чому саме такий метод зручно використовувати для досягнення цієї мети.

Етап 5. Сформулюйте задачі, пов'язані з повсякденним життям чи якоюсь галуззю науки, і розв'яжіть їх за допомогою координатного або векторного методу. Поясніть, як саме ви використали в цьому розв'язанні основні задачі певної системи координат і/або властивості векторів.

Етап 6. Оформте результати дослідження у вигляді презентації, відеоролика або театралізованого виступу. Представте результати дослідження учням і ученицям свого класу на уроці математики, фізики, хімії, біології, історії, української мови та літератури, іноземної мови тощо або на відповідних бінарних уроках.

Етап 7. Обговоріть підсумки проекту спочатку у своїй групі (якщо група складалася з однієї особи, проведіть саморефлексію), а потім з учителем/вчителькою та ученицями й учнями класу. Визначте позитивні й проблемні моменти, напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності щодо виконання та представлення проектів.

Розділ 4. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§ 17. Теорема Фалеса та її узагальнення.

Властивість медіан трикутника.

Властивість бісектриси трикутника

Тренажерний зал

1. г. 2. в. 3. а. 4. б.
5. а) 1,6; б) 3,75; в) 4; г) 400. 6. а) 1,5; б) 1,75; в) 70; г) 6.
7. Так. 8. Так. 9. Так. 10. Так.
11. 14 см, 5 см. 12. 12 см, 18 см.
13. а. 14. б.
15. а) 3:5; б) 5:8. 16. а) 2:3; б) 3:5.
17. 6 см. 18. 5 см.
19. $DL_1 = 16$ см, $L_1L_2 = 14$ см. 20. 3 см.
21. 4 см. 22. 6 см.
23. $AM = 8$ см, $CM = 7$ см. 24. $AM = 9$ см, $CM = 10$ см.
25. 6 см. 26. 2,5 см.
27. 9 см, 6 см. 28. 4 см, 8 см.
29. 20 см. 30. 2,4 см.
33. 30 см. 34. 42 см.
35. 32 см. 36. 25 см.
37. 3 см; 6 см. 38. 6 см; 9 см.
41. 36 см. 42. 28 см.
43. 16 см; 20 см; 9 см. 44. 8 см; 10 см.
45. Ні. 46. Так, якщо одна основа трапеції вдвічі більша за іншу.
49. 3:2. Вказівка. Проведіть через точку A пряму, паралельну висоті MD , і скористайтесь теоремою про пропорційні відрізки.
50. 14:5.
51. Ні. 52. 8 см.
56. Ні.
57. 3 см; 6 см. 58. 15 см; 20 см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $x = 1,5$; $y = -0,5$. 2. $-1,76$. 3. 200 марок про транспорт, 210 марок — про природу. 4. 5 см.

§ 18. Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників

Тренажерний зал

1. $\frac{LB}{L_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{LC}{L_1C_1}$. 2. $\angle D = \angle B$; $\angle M = \angle C$; $\angle K = \angle P$.
3. 5. 4. 7.
5. а) $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ за двома кутами; б) $\triangle KLM \sim \triangle NPM$ за двома кутами.
6. а) $\triangle ABC \sim \triangle MLK$ за двома кутами; б) $\triangle PRS \sim \triangle FTS$ за двома кутами; в) $\triangle KLP \sim \triangle KMN$ за двома кутами.
7. $\angle F_1 = 50^\circ$; $\angle B_1 = 70^\circ$; $\angle C_1 = 60^\circ$. 8. $\angle K_1 = 40^\circ$; $\angle P_1 = 75^\circ$; $\angle L_1 = 65^\circ$.
9. Так, за кутом і двома пропорційними сторонами; 7.
10. Так, за кутом і двома пропорційними сторонами; 4.
11. Так, за трьома пропорційними сторонами; 6.
12. Так, за трьома пропорційними сторонами; 2.
13. Так, за трьома пропорційними сторонами.
14. Так, за трьома пропорційними сторонами.
15. 2 см; 2,5 см; 3 см. 16. 1 см; 2 см; 2 см.
17. 9 см. 18. 3,5 см.
19. $\triangle ABC \sim \triangle EBD$, $\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED}$.
20. $\triangle ACB \sim \triangle MKB$, $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BK} = \frac{AC}{MK}$.
21. Так, тому що три сторони є пропорційними. 22. Ні.
23. а) 92° ; б) 13 см. 24. а) 57° ; б) $4\frac{1}{3}$ см.
25. $\frac{MB}{AB} = \frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC}$; 9 см. 26. $\frac{KH}{AB} = \frac{HC}{BC} = \frac{KC}{AC}$; 6 см.
27. 27 см; 36 см. 28. 5,4 см; 4,8 см.
29. 14 см. 30. 34 см.
31. $BC = 15$ см, $FG = 12$ см. 32. $BC = 12$ см, $A_1C_1 = 8$ см.
37. 4,5 м. 38. 50 м.

39. $2\frac{2}{3}$ см; 3 см; $3\frac{1}{3}$ см. 40. 22 см; 18 см; 14 см.
41. Довжина основи — 10,8 см, відрізки діагоналі — 10 см, 18 см.
42. Менша основа — 28 см, більша основа — 44 см.
43. Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню довжин основ трапеції.
47. 4 см і 8 см. 48. 9,6 см. 49. 29,7 м. 50. 13 м.
55. $\frac{2ab}{a+b}$.
56. $x = \frac{ah}{a+h}$. Вказівка. Скористайтесь результатом задачі № 55.
59. 6 см. 60. 2 см.
61. 6 см. 62. 42 см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 24; б) 5. 2. $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1,5$. 3. 71,4 %. 4. 220. 5. 31,4 см.

§ 19. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора. Перпендикуляр, похила та їх властивості

Тренажерний зал

1. BH . 2. KH . 3. LM . 4. AC .
5. в. 6. а. 7. а; б. 8. б; в.
9. а; б; г. 10. б; в; г.
11. а) K ; б) AB ; в) KB ; г) AK . 12. а) M ; б) BH ; в) MH , г) BM .
13. $6\sqrt{2}$ см. 14. $5\sqrt{2}$ см.
15. а) $\sqrt{5}$ см; б) 17 см; в) 6 см. 16. а) $\sqrt{13}$ см; б) 25 см; в) 5 см.
17. 6 см. 18. 40 см.
19. $7\sqrt{2}$ см. 20. $5\sqrt{2}$ см.
21. 4 см. 22. 3 см.
23. $\sqrt{10}$ см; $\sqrt{15}$ см. 24. 4 см; $4\sqrt{3}$ см.
25. а) BD ; б) похила AD — проєкція AB , похила OD — проєкція OB , похила DC — проєкція BC ; в) AD .
26. а) BM ; б) похила AM — проєкція AB , похила MC — проєкція BC ; в) BC .

27. 6 м. **28.** 7,8 м.

29. 18 см; 24 см. **30.** 36 см; 15 см.

31. 13 см. **32.** 25 см.

33. $x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$; $\begin{cases} a^2 + b^2 = 15^2, \\ a + b = 21; \end{cases}$ 6 м і 15 м.

34. $x^2 + (1 + x)^2 = 29^2$; $\begin{cases} a^2 + b^2 = 29^2, \\ a - b = 1; \end{cases}$ 20 м і 21 м.

37. $4\sqrt{3}$ см. **38.** $5\sqrt{3}$ см. **39.** $a\sqrt{2}$. **40.** $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

41. 12 см. **42.** 10 см.

43. 19 см. **44.** 84 см.

45. Вказівка. Розгляньте прямокутний трикутник із катетами a і b та доведіть, що він дорівнює заданому трикутнику (за трьома сторонами).

49. 6 см. **50.** 13 см.

51. $8\sqrt{5}$ см. **52.** $8\sqrt{13}$ см.

53. 8 см. **54.** 12 см.

55. 16 см; 21 см або 11 см. **56.** $12\sqrt{2}$ см; 21 см або 3 см.

59. 18 футів. **60.** 3,75 фута.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $2 \cdot 10^6$; б) $4 \cdot 10^{-16}$. **2.** а) 16; б) -6. **3.** $a = \frac{8}{7}$. **4.** 84. **5.** $\angle A = 75^\circ$;

$\angle B = 40^\circ$; $\angle C = 105^\circ$; $\angle D = 140^\circ$; описати коло можна; для з'ясування, чи можна вписати коло в чотирикутник, бракує даних.

§ 20. Синус, косинус, тангенс, котангенс гострого кута прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса деяких кутів

Тренажерний зал

1. а) AC ; б) BC . **2.** а) BK ; б) KM . **3.** а. **4.** б.

5. г. **6.** а.

7. а) 0,342; б) 0,364; в) 0,766; г) 1,192.

8. а) 0,87; б) 0,57; в) 0,58; г) 0,36.

9. г. 10. б.

11. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) 1. 12. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $\sqrt{3}$.

13. в. 14. в.

15. а) $\sin \alpha = \frac{SO}{SK}$, $\cos \alpha = \frac{OK}{SK}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{OK}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OK}{SO}$;

б) $\sin \alpha = \frac{MF}{MP}$, $\cos \alpha = \frac{FP}{MP}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MF}{FP}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{FP}{MF}$;

в) $\sin \alpha = \frac{b}{c}$, $\cos \alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$.

16. а) $\sin \beta = \frac{CD}{CE}$, $\cos \beta = \frac{DE}{CE}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{CD}{ED}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{ED}{CD}$;

б) $\sin \beta = \frac{BD}{AD}$, $\cos \beta = \frac{AB}{AD}$, $\operatorname{tg} \beta = AB$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{AB}{BD}$;

в) $\sin \beta = \frac{l}{m}$, $\cos \beta = \frac{n}{m}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{l}{n}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{n}{l}$.

17. а) $\sin \angle B < \cos \angle B$; б) $\sin \angle B = \cos \angle A$.

18. $\sin \angle M > \cos \angle M$; $\sin \angle K = \cos \angle M$.

19. $\operatorname{tg} \angle M > \operatorname{ctg} \angle M$; $\operatorname{tg} \angle K = \operatorname{ctg} \angle M$.

20. $\operatorname{tg} \angle B < \operatorname{ctg} \angle B$; $\operatorname{tg} \angle B = \operatorname{ctg} \angle A$.

21. а) 16, б) 16; так. 22. а) 10, б) 10; так.

23. а) 1; б) $2\sqrt{3}$; в) $-0,5$; г) $0,5$. 24. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 2; в) $-0,5$; г) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

25. а. 26. б. 27. $\frac{15}{17}$. 28. $\frac{12}{13}$.

29. $4\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{3}$ см. 30. 10 см; 10 см.

31. а) $AB = 4,5$ см, $AC = 1,5\sqrt{5}$ см; б) $BC = 2$ см, $AB = 2\sqrt{5}$ см.

32. а) $AB = 16$ см, $BC = 4\sqrt{15}$ см; б) $AC = 5$ см, $CB = \sqrt{39}$ см.

33. $BH = a \sin \alpha$; $AH = a \cos \alpha$; а) $BH = 3$ см; $AH = 3\sqrt{3}$ см;

б) $BH = 2,5\sqrt{3}$ см; $AH = 2,5$ см.

34. $BH = b \operatorname{tg} \beta$; $AB = \frac{b}{\cos \beta}$; а) $BH = 3\sqrt{3}$ см; $AB = 6\sqrt{3}$ см;

б) $BH = 4\sqrt{2}$ см; $AB = 8$ см.

37. а) 1; б) 0,5; в) 0. **38.** а) 2; б) 0,5; в) 0.

39. 2. **40.** $\frac{1}{3}$. **41.** $\frac{15}{17}$; $\frac{8}{17}$; $\frac{15}{8}$. **42.** $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$.

43. $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. **44.** $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$.

49. 60° ; 120° . **50.** 30° ; 60° .

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

- 1.** 6. **2.** а) $x = \pm 2\sqrt{2}$; б) коренів немає. **3.** 8. **4.** 70° , 90° , 110° .
5. а) Фон; б) пора; в) молот.

§ 21. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.

Розв'язування прямокутних трикутників

Тренажерний зал

- 1.** Знайти гіпотенузу, невідомі катет і гострий кут.
- 2.** Знайти невідомі гострий кут і два катети.
- 3.** Знайти гіпотенузу та два гострі кути.
- 4.** Знайти невідомий катет і два гострі кути.
- 5.** $AB = 10$ см; $\operatorname{tg} \angle A = \frac{4}{3}$; ні; гострі кути.
- 6.** $KL = 13$ см; $\operatorname{tg} \angle K = 2,4$; ні; гострі кути.
- 7.** $ML = 9$ см; $\sin \angle L = 0,8$; ні; гострі кути.
- 8.** $BC = 12$ см; $\cos \angle A = \frac{5}{13}$; ні; гострі кути.
- 9.** $\angle A = 65^\circ$; $\sin \angle B = 0,423$; $AB = 18,9$ см; ні; катет.
- 10.** $\angle K = 20^\circ$; $\cos \angle L = 0,342$; $LM = 8,55$ см; ні; катет.
- 11.** а) 0,616; б) 0,259; в) 0,325; г) 0,509.
- 12.** а) 0,988; б) 0,616; в) 0,966; г) 1,429.
- 13.** 17 см; $\frac{8}{17}$; $\frac{15}{17}$. **14.** 15 см; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$.
- 15.** 35 см; $\frac{12}{35}$; $2\frac{11}{12}$. **16.** 24 см; $\frac{7}{24}$; $3\frac{3}{7}$.
- 17.** 5 см; $5\sqrt{3}$ см; 60° . **18.** 9 см; $9\sqrt{3}$ см; 30° .

19. 10,4 см; 6,7 см; 50° . 20. 26,3 см; 24,4 см; 70° .
 21. $AD = 14\sqrt{3}$ см; $AM = MD = 14$ см; $\angle AMD = 120^\circ$; $\angle MAD = \angle MDA = 30^\circ$.
 22. $ST = TL = SL = 12$ см; $\angle S = \angle T = \angle L = 60^\circ$.
 23. 7,28 см; 3,36 см. 24. 14,4 см; 6,8 см.
 25. 21 см; $\operatorname{tg} \angle AHO = \frac{20}{21}$. 26. 28 см; $\sin \angle MKN = \frac{28}{53}$.
 27. 59,7 м. 28. 67,4 см; 132° і 48° .
 29. До сьомого. 30. $50 \sin 72^\circ + 1 \approx 48,5$ м.
 31. $\frac{c}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$. 32. $2R \sin \alpha \cos \alpha$.
 33. $\frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$; $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 34. $\frac{a}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$.
 35. $50(\sqrt{3} + 1) \approx 136,6$ м. 36. $50(\sqrt{3} - 1) \approx 36,6$ м.
 37. $\frac{2r}{\sin \alpha}$; $\frac{2r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2r}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. 38. $\frac{2r}{\sin \alpha}$; $\frac{2r}{\sin \alpha}$; $2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
 39. $\sin^2 \varphi$ — відношення меншої основи до більшої.
 40. $\frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

2. $x = 4$. 4. 9 будинків. 5. 144 см^2 .

Готуємося до контрольної роботи до розділу 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	Б	Г	Д	Б	Г	6	48	63

10. $DE = 6$ см, $EF = 9$ см, $DF = 10$ см. 11. $\angle A = 62^\circ$, $AC = 3,8$ см, $BC = 7,1$ см; 12. Вказівка. Побудуйте спочатку відрізок довжиною $\sqrt{ab}$, а потім скористайтесь формулою скороченого множення.
 13. 20π см. 14. 1,5 м.

Завдання підвищеної складності

4. $2:\sqrt{3}$ (рахуючи від вершини меншого кута).

9. $\frac{2}{9}a$.
10. $\frac{2ab}{b-a\sqrt{3}}$. *Вказівка.* Продовжте бічні сторони трапеції до перетину й обґрунтуйте, що вони перетинаються під прямим кутом.

Розділ 5. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

§ 22. Розгортка поверхні циліндра. Створення моделей циліндрів

Тренажерний зал

1. А, В. 2. Б, Г. 3. б. 4. А, Б.
5. а, б. 6. а, в. 7. 80π . 8. 42π .
9. а, г. 10. а.
11. а. 12. в.
13. 88π . 14. 224π .
17. 15 см. 18. 8 см.
19. 30π . 20. 63 см^2 .
21. $\pi^2 \text{ м}^2$. 22. $\pi^2 \text{ м}^2$.
23. Із довжиною ребра 24 см. 24. Червона.
25. $4,4 \text{ м}^2$. 26. На 5.
27. Ні, оскільки довжина кола більша, ніж більша сторона прямокутника.
28. Так, оскільки довжина кола менша, ніж більша сторона прямокутника.
29. а) $4(S+2\pi RH)+5(2S+2\pi RH)$; б) $14S+18\pi RH$; в) $39,25 \text{ м}^2$.
30. а) $8\pi dl+2(\pi dl+S)$; б) $2S+10\pi dl$; в) $38,2452 \text{ м}^2$.
31. Зменшилася вдвічі. 32. Збільшилася вдвічі.
33. $2,57 \text{ м}^2$. 34. 1,63 кг.
35. $R_1 = \frac{d \cos \alpha}{2\pi}$, $H_1 = d \sin \alpha$; $R_2 = \frac{d \sin \alpha}{2\pi}$, $H_2 = d \cos \alpha$.
36. $R_1 = \frac{3}{\pi} \text{ см}$, $H_1 = 8 \text{ см}$; $R_2 = \frac{4}{\pi} \text{ см}$, $H_2 = 6 \text{ см}$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 36; б) 5. 2. а) -29; б) 53. 3. $AC = 4$, $BC = 3$, $AB = 5$; $\angle A \approx 39^\circ$, $\angle B \approx 51^\circ$; $\angle C = 90^\circ$. 4. 1600 г. 5. Неправильно.

§ 23. Розгортка поверхні конуса. Створення моделей конусів

Тренажерний зал

1. А. 2. В. 3. Б, Г. 4. А, В.
 5. а, б. 6. а, б, в. 7. б. 8. а.
 9. 13 см. 10. 17 см. 11. 7 см. 12. 12 см.
 13. 216° . 14. 150° .
 15. 50,24 см; 8 см. 16. 56,52 см; 9 см.
 17. 10 см; 288° . 18. 10 см; 216° .
 19. Так. 20. Ні. 21. Так. 22. Ні.
 23. Твірна 17 см; радіус основи 8 см; 170° .
 24. Твірна 21 см; радіус основи 7 см; 120° .
 25. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; $\frac{a}{\sqrt{3}}$; a ; 180° . 26. c ; $\frac{c}{2}$; $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; 180° .
 27. 40 см; 10 см; $10\sqrt{15}$ см. 28. 9 см; 3 см; $6\sqrt{2}$ см.
 29. 10 см; 5 см; $5\sqrt{3}$ см. 30. 30 см; 25 см; $5\sqrt{11}$ см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 3. 2. $k = 2$, $b = 4$. 3. 7,5 км/год. 5. Так.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 5

1	2	3	4	5	6
А	Б	В	Д	188,4	7,5

7. $AB = CD = 12$ см, $AD = BC = 10$ см. 8. а) 15 см; б) 53° ; в) 288° .

Завдання підвищеної складності

1. πd^2 .
 2. $R_1 = \frac{d}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$, $H_1 = d \sin \frac{\varphi}{2}$; $R_2 = \frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$, $H_2 = d \cos \frac{\varphi}{2}$;
 $S_6 = \pi d^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$.

3. 20 см; 12 см; 16 см; 216° .

4. $\frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$; $r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

5. 45° , 45° ; перший випадок: $L = c$, $R = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $H = \frac{c\sqrt{2}}{2}$; другий випадок: $L = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $R = \frac{c}{2}$, $H = \frac{c}{2}$.

6. $R_1 = b \sin \alpha$, $H_1 = \frac{b}{2}(1 + \sin \alpha - \cos \alpha)$; $L = b$, $R_2 = b \sin \alpha$, $H_2 = b \cos \alpha$.

Розділ 6. КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

§ 24. Система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками з даними координатами. Рівняння кола

Тренажерний зал

1. $A(2; 3)$, $B(3; -2)$, $C(1; 2)$, $D(-3; 1)$, $E(-2; -3)$, $F(3; 0)$, $O(0; 0)$.
2. $K(1; 3)$, $L(0; 2)$, $M(4; 1)$, $N(2; -3)$, $P(-3; -1)$, $R(-2; 3)$, $O(0; 0)$.
5. 4. 6. 3. 7. $(1; 3)$. 8. $(-4; -1)$.
9. 5. 10. 10. 11. $(14; 4)$. 12. $(10; 27)$.
13. 9; 9; так. 14. 8; 8; так.
15. $(-2; 3)$, $(-2; 3)$; так. 16. $(-4; 1)$, $(-4; 1)$; так.
17. $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 36$. 18. $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$.
19. Центр $(2; 5)$; радіус 9. 20. Центр $(4; 7)$; радіус 8.
23. Ні. 24. Так.
25. Центр $(-3; 1)$; радіус $\sqrt{24}$. 26. Центр $(3,5; -11)$; радіус $3\sqrt{3}$.
27. Центр $(1; 2)$; радіус 4. 28. Центр $(3; 1)$; радіус 6.
31. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 100$. 32. $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$.
33. 5. 34. 7.
35. $M(3; 5)$, $B(7; 2)$, $A(1; 3)$, $B(3; 2)$.
36. $D(-1; -1)$, $K(4; -7)$, $F(-5; -7)$, $K(-4; 3)$.

37. $(3; -1)$. **38.** $(4; -4)$, $(4; -2)$.

41. $(3; 3)$ і $(15; 15)$. **42.** $(6; 0)$.

43. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 25$. **44.** $(x+4)^2 + (y+6)^2 = 36$.

45. а) Так; $(1; -2)$; $\sqrt{10}$; б) Ні. **46.** а) $(-5; 4)$; 3; б) $(2; 6)$; 1.

47. $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$. **48.** $(x-8)^2 + (y+6)^2 = 100$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 0,72. **2.** а) $x=16$; б) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$. **3.** 30 цукерок. **4.** $AK=6,4$ см, $KB=9,6$ см. **5.** 41,23 м.

§ 25. Вектор. Модуль вектора. Колінеарні та рівні вектори. Дії над векторами

Тренажерний зал

1. а) А; б) В; в) А; г) К. **2.** а) В; б) М; в) К; г) А.

3. г. **4.** в. **5.** а; б. **6.** а; б.

7. а) Так; б) так; в) ні; г) ні. **8.** а) Так; б) так; в) ні; г) ні.

9. а) Ні; б) так; в) ні; г) ні. **10.** а) Так; б) так; в) ні; г) ні.

11. а) Так; б) так; в) ні; г) ні. **12.** а) Ні; б) ні; в) так; г) так.

13. $\vec{c}$. **14.** $\vec{b}$. **15.** $\vec{d}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. **16.** $\vec{c}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{d}$.

17. а; б. **18.** а; б.

25. а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{DA}$. **26.** а) $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{DC}$ або $\overrightarrow{AB}$.

27. а) $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{AB}$. **28.** а) $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AC}$.

37. а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **38.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні.

39. а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{ED}$. **40.** а) $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{EA}$.

41. $\overrightarrow{BC}$, 36 км. **42.** $\overrightarrow{ST}$, 50 км.

49. $\overrightarrow{AB}$. **50.** $\overrightarrow{AC}$.

51. а) $\vec{b} - \vec{a}$; б) $2\vec{a} - \vec{b}$; в) $-\vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$; г) $2\vec{b} - 2\vec{a}$.

52. а) $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$; б) $\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$; в) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$; г) $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 2. **2.** $\frac{3}{16}$. **3.** $\frac{5}{11}$. **4.** $x+3y-10=0$; $\left(0; \frac{10}{3}\right)$; $(10; 0)$. **5.** а) 2587;
б) ТРОН.

§ 26. Координати вектора. Дії над векторами в координатній формі

Тренажерний зал

1. $\overrightarrow{OA}(-3; 8)$. 2. $B(5; -2)$. 3. $\overrightarrow{AB}(6; 2)$. 4. $\overrightarrow{CD}(4; 7)$.
5. $\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{(9; 7)}$. 6. $\vec{b} + \vec{n} = \overrightarrow{(-3; 9)}$.
7. $\vec{m} - \vec{d} = \overrightarrow{(-2; 6)}$. 8. $\vec{k} - \vec{c} = \overrightarrow{(-5; 2)}$.
9. $4\vec{b} = \overrightarrow{(-20; 28)}$. 10. $3\vec{c} = \overrightarrow{(18; -21)}$.
11. $|\vec{d}| = 10$. 12. $|\vec{m}| = 5$.
13. $\overrightarrow{AB}: \overrightarrow{(-2; 3)}, \overrightarrow{(6; -12)}, \overrightarrow{(0; 11)}, \overrightarrow{(3; 0)}$; $\overrightarrow{BA}: \overrightarrow{(2; -3)}, \overrightarrow{(-6; 12)}, \overrightarrow{(0; -11)}, \overrightarrow{(-3; 0)}$.
14. $\overrightarrow{CD}: \overrightarrow{(-6; -1)}, \overrightarrow{(7; -2)}, \overrightarrow{(-12; 0)}, \overrightarrow{(0; -4)}$; $\overrightarrow{DC}: \overrightarrow{(6; 1)}, \overrightarrow{(-7; 2)}, \overrightarrow{(12; 0)}, \overrightarrow{(0; 4)}$.
15. а) $(3; 4)$; б) $(-2; 7)$; в) $(5; -4)$; г) $(-8; -9)$.
16. а) $(5; 5)$; б) $(6; -7)$; в) $(-2; -4)$; г) $(-7; 2)$.
17. а) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$; б) $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$; г) $\vec{d} = -2\vec{i} - 10\vec{j}$.
18. а) $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$; б) $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; в) $\vec{c} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$; г) $\vec{d} = -\vec{i} + 6\vec{j}$.
19. $\vec{a} + \vec{b}: \overrightarrow{(3; 7)}, \overrightarrow{(1; -1)}, \overrightarrow{(-1; 1)}, \overrightarrow{(-3; -7)}$; $\vec{a} - \vec{b}: \overrightarrow{(-1; -1)}, \overrightarrow{(-3; 7)}, \overrightarrow{(3; -7)}, \overrightarrow{(1; 1)}$.
20. $\vec{c} + \vec{d}: \overrightarrow{(5; 7)}, \overrightarrow{(-1; 3)}, \overrightarrow{(1; -3)}, \overrightarrow{(-5; -7)}$; $\vec{c} - \vec{d}: \overrightarrow{(1; 3)}, \overrightarrow{(-5; 7)}, \overrightarrow{(5; -7)}, \overrightarrow{(-1; -3)}$.
21. $5\vec{b}: \overrightarrow{(10; 5)}, \overrightarrow{(-10; 25)}, \overrightarrow{(25; -10)}, \overrightarrow{(20; 0)}$; $-3\vec{b}: \overrightarrow{(-6; -3)}, \overrightarrow{(6; -15)}, \overrightarrow{(-15; 6)}, \overrightarrow{(-12; 0)}$.
22. $2\vec{c}: \overrightarrow{(2; 6)}, \overrightarrow{(-10; 4)}, \overrightarrow{(4; -8)}, \overrightarrow{(0; 14)}$; $-4\vec{c}: \overrightarrow{(-4; -12)}, \overrightarrow{(20; -8)}, \overrightarrow{(-8; 16)}, \overrightarrow{(0; -28)}$.
23. 5, 5, 13, 8. 24. 10, 10, 7, 13.
25. а) $(-1; 1), \sqrt{2}$; б) $(7; 1), 5\sqrt{2}$; в) $(9; -2), \sqrt{85}$.
26. а) $(-2; -7), \sqrt{53}$; б) $(-9; 4), \sqrt{97}$; в) $(-4; -6), \sqrt{52}$.

- 27.** а) Ні, координати векторів не рівні; б) так, вектори мають однакові координати.
- 28.** а) Так, вектори мають однакові координати; б) ні, координати векторів не рівні.
- 29.** 8 і -8. **30.** 12 і -12. **31.** 6. **32.** -4.
- 33.** $(-10; -14)$. **34.** $(12; -36)$. **35.** 2. **36.** $\sqrt{11,25}$.
- 37.** а) $(-5; 12)$, 13; б) $(6; -8)$, 10; в) $(3; 0)$, 3; г) $(0; -15)$, 15.
- 38.** а) $(-5; 12)$, 13; б) $(6; -8)$, 10; в) $(3; 0)$, 3; г) $(0; -15)$, 15.
- 39.** $(-13; 14)$. **40.** $(0; -15)$.
- 41.** $2\sqrt{26}$. **42.** $2\sqrt{5}$.
- 43.** $(-4; 4)$ **44.** $(-6; 6)$.
- 47.** $(-0,2; 1,4)$ або $(0,2; -1,4)$. **48.** $(-14; -18)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

- 1.** а) 4; б) 2,5. **2.** $x_1 = 1$, $x_2 = -0,4$. **3.** 20 грн. **4.** $(1; 1)$. **5.** 4,5 см.

§ 27. Рівняння прямої. Взаємне розташування кола і прямої. Взаємне розташування двох кіл

Тренажерний зал

- 1.** в. **2.** г.
- 3.** $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{7}$. **4.** $\frac{x-5}{2} = \frac{y-9}{4}$.
- 5.** б, в, г. **6.** а, в, г.
- 7.** $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{5}$. **8.** $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{2}$.
- 9.** Так; так; так. **10.** Так; так; так.
- 11.** а, б, в. **12.** а, б, в.
- 13.** а, б, г. **14.** б, в, г.
- 15.** $A(-4; 6)$, $\vec{s}(5; 7)$. **16.** $A(3; -5)$, $\vec{s}(6; 8)$.
- 17.** $5x - 4y - 29 = 0$. **18.** $4x - 7y + 47 = 0$.
- 19.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **20.** а) Так; б) так; в) ні; г) так.
- 21.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **22.** $\sqrt{5}$.
- 23.** $\sqrt{10}$. **24.** $\sqrt{45}$.

25. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{2}$; $\vec{s}(2; 2)$. 26. $\frac{x+2}{-5} = \frac{y-8}{-9}$; $\vec{s}(-5; -9)$.
27. $AD: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1}$; $BC: \frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{1}$; $AB: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{5}$; $CD: \frac{x-7}{4} = \frac{y-4}{5}$.
28. $QM: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2}$; $NM: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2}$; $NP: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2}$; $PQ: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2}$.
29. 1 — Б; 2 — В; 3 — А. 30. 1 — Г; 2 — В; 3 — Б.
31. а) $(x-2)^2 + y^2 = 4$; б) $x-y=0$; в) коло і пряма перетинаються в точках $(0; 0)$ і $(2; 2)$.
32. а) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$; б) $x+y+5=0$; в) коло і пряма перетинаються в точках $(-4; -1)$ і $(-7; 2)$.
33. Пряма дотикається до кола. 34. Пряма перетинає коло.
35. а) Кола мають внутрішній дотик; б) кола не мають спільних точок і одне з них розташоване всередині круга, обмеженого іншим.
36. а) Кола перетинаються; б) кола мають зовнішній дотик.
37. Наприклад, $(0; 2)$, $(3; 0)$, $\vec{s}(3; -2)$.
38. Наприклад, $(0; 8)$, $(1; 12)$, $\vec{s}(1; 4)$.
39. $2x - y - 2 = 0$. 40. $x + 5y - 12 = 0$.
41. а) $y = 0$; $x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} = 0$ або $x\sqrt{3} + y + 2\sqrt{3} = 0$; б) $x = 2$; $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ або $x - \sqrt{3}y - 6 = 0$; два розв'язки.
42. а) $x = 0$; $x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} = 0$ або $x - \sqrt{3}y + 7\sqrt{3} = 0$; б) $y = 3$; $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ або $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$; два розв'язки.
43. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. 44. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.
45. а) $(-4; 0)$ і $(0; 3)$; 5 і 4; перетинаються; б) $(1; 2)$ і $(4; 6)$; 3 і 2; дотикаються (зовнішній дотик).
46. а) $(5; 0)$ і $(0; 7)$; 1 і 7; не перетинаються; б) $(-2; 1)$ і $(6; 7)$; 1 і 11; дотикаються (внутрішній дотик).
47. а) $(x-12)^2 + (y+5)^2 = 169$; б) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$.
48. а) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$; б) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 8. 2. а) $x = 3$; б) $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. 3. 10 см. 4. а) 6,875; б) 3; в) 6,5.
5. а) 2400 грн; б) 2420 грн.

§ 28. Скалярний добуток векторів і його застосування (опційно)

Тренажерний зал

1. а) M ; б) C ; в) F ; г) D ; д) E . 2. а) A ; б) K ; в) B ; г) L .
 3. а) Так; б) ні; в) так; г) ні. 4. а) Ні; б) так; в) ні; г) так.
 5. 0,8; -0,6. 6. 0,6; 0,8.
 7. а) 110° ; б) 150° ; в) 40° . 8. а) 50° ; б) 120° ; в) 70° .
 9. -2. 10. -41. 11. 10. 12. 6.
 13. 0,6; -0,8; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$. 14. $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{5}{12}$.
 15. а) 2; б) 3. 16. а) 5; б) -8.
 17. а) 0,966; б) -0,940; в) -11,430; г) -5,671.
 18. а) 0,087; б) -0,766; в) -0,268; г) -0,176.
 19. а) 50° ; б) 90° ; в) 140° . 20. а) 30° ; б) 150° ; в) 180° .
 21. -38. 22. -26. 23. $24\sqrt{3}$. 24. $60\sqrt{2}$.
 25. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$.
 26. а) $\sin 20^\circ < \sin 50^\circ$; б) $\sin 110^\circ > \sin 140^\circ$; в) $\cos 10^\circ > \cos 70^\circ$; г) $\cos 100^\circ > \cos 160^\circ$.
 27. а) $\sin 130^\circ > 0$; б) $\cos 170^\circ < 0$; в) $\operatorname{tg} 80^\circ > 0$; г) $\operatorname{ctg} 140^\circ < 0$.
 28. а) $\sin 100^\circ > 0$; б) $\cos 130^\circ < 0$; в) $\operatorname{tg} 135^\circ < 0$; г) $\operatorname{ctg} 40^\circ > 0$.
 29. а) 3; б) -4. 30. а) 4; б) 2.
 31. а) 140° ; б) 90° ; в) 40° . 32. а) 50° ; б) 90° ; в) 65° .
 37. а) $\cos 100^\circ \cdot \operatorname{tg} 160^\circ > 0$; б) $\sin 105^\circ \cdot \operatorname{ctg} 170^\circ < 0$; в) $\operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{ctg} 110^\circ < 0$; г) $\cos 140^\circ \cdot \sin 160^\circ < 0$.
 38. а) $\sin 175^\circ \cdot \operatorname{ctg} 125^\circ < 0$; б) $\cos 95^\circ \cdot \operatorname{tg} 165^\circ > 0$; в) $\cos 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 145^\circ < 0$; г) $\cos 115^\circ \cdot \operatorname{ctg} 107^\circ > 0$.
 43. 30° , 60° , 90° . 44. 45° , 45° , 90° . 45. -5; 5. 46. -6; 6.
 47. $6\sqrt{3}$. 48. $2\sqrt{91}$. 49. $4x - 5y - 23 = 0$. 50. $3x + 7y - 22 = 0$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. -3,75. 2. Жодної. 3. 4:1. 4. 5 см або 4 см. 5. а) Коло; б) тура.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Г	Б	А	Г	В	Б	4,47	41	-1,5

10. $\sqrt{65}$. 11. а) $\overrightarrow{BD} = \vec{y} - \vec{x}$; б) $\overrightarrow{CA} = -\vec{x} - \vec{y}$; в) $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$; г) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$; д) $\overrightarrow{DK} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$; е) $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$. 12. $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 49$, $x+y-2=0$; кола перетинаються у двох точках, пряма MK є січною до кола. 13. 10π . 14. а) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; б) $(x-2)^2 + (y-1,5)^2 = 6,25$.

Завдання підвищеної складності

2. Прямокутний із прямим кутом A ; $(0,5; 1,5)$; $0,5\sqrt{10}$. 5. $\left(2; 2\frac{1}{3}\right)$.
7. -3 ; 3 ; -7 ; 7. 8. а) -1 ; 3 ; б) -3 ; 5 .

Розділ 7. ОСНОВИ ФІНАНСОВОЇ ГРАМОТНОСТІ

§ 29. Формули простих і складних відсотків.

Формули простих і складних дисконтів

Тренажерний зал

1. а) 500 грн; б) 600 грн; в) 100 грн; г) 0,2, або 20 %; д) 0,25 року; е) 0,8, або 80 %.
2. а) 800 грн; б) 1000 грн; в) 200 грн; г) 0,25, або 25 %; д) 0,5 року; е) 0,5, або 50 %.
3. а) 10 000 грн; б) 9000 грн; в) 1000 грн; г) 0,1, або 10 %; д) 0,24, або 24 %.
4. а) 20 000 грн; б) 17 200 грн; в) 2800 грн; г) 0,14 або 14 %; д) 0,24 або 24 %.
5. а) 6 місяців; б) 2; в) 6 %. 6. а) 3 місяці; б) 4; в) 2,5 %.
7. $S = 1628$ грн 89 коп; $I = 628$ грн 89 коп.
8. $S = 3286$ грн 68 коп; $I = 1786$ грн 68 коп.
9. 5333 грн 33 коп. 10. 3050 грн.
11. 5100 грн. 12. 6890 грн.
13. 26 315 грн 79 коп. 14. 13 157 грн 89 коп.
15. а) 28 231,63 грн; б) 27 371,38 грн; в) 25 394,69 грн.
16. а) 45 021,91 грн; б) 42 772,83 грн; в) 35 900,42 грн.
17. 9411,76 грн. 18. 1951,22 грн.
19. 14 000 грн. 20. 8000 грн.

- 21.** 62 176 грн 17 коп. **22.** 107 181 грн 14 коп.
23. 35 248 грн 03 коп.; 14 751 грн 97 коп.
24. 31 502 грн 65 коп.; 8497 грн 35 коп.
25. а) 10 088 грн; б) втратив 162 грн.
26. а) 8536 грн; б) виграла 56 грн.
27. $r \approx 9,38 \%$; 93,8 євро. **28.** $r \approx 10,38 \%$; 51,9 долара.
29. 11 %. **30.** 16 %.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $x_1 = 1$, $x_2 = -4,5$; б) немає коренів. **2.** 9700 грн. **3.** Вказівка. Спочатку побудуйте прямокутний трикутник, катетом якого є радіус вписаного кола, а протилежний до цього катета гострий кут є половиною даного гострого кута. **5.** Наприклад: КУБ — КУТ — КІТ — ПІТ — ПАТ — ПАН — ТАН — ТОН — ТОР.

§ 30. Датовані суми. Еквівалентні суми за даної відсоткової ставки

Тренажерний зал

- 1.** а) 10; б) 20; в) 60. **2.** а) 14; б) 28; в) 84.
3. а) 4,5 %; б) 2,5 %; в) 0,5 %. **4.** а) 5,5 %; б) 3 %; в) 0,75 %.
5. $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^4$. **6.** $4000 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4$.
7. а) 8374 грн 84 коп.; б) 9425 грн 96 коп.; в) 10 609 грн.
8. а) 888,49 євро; б) 942,60 євро; в) 1092,73 євро.
9. $C \cdot 1,025^{-6} = 20\,000 \cdot (1,025)^4 + 20\,000 \cdot (1,025)^{-4}$.
10. $C \cdot 1,01^{-18} = 30\,000 \cdot (1,01)^6 + 20\,000 \cdot (1,01)^{-6}$.
11. $X = 4474,81$ грн; $P = 3552,25$ грн.
12. $X = 1423,09$ доларів; $P = 1314,72$ доларів.
13. $A(1,025^{-2} + 1,025^{-6}) = 2000 \cdot 1,025^{-4} + 1000 \cdot 1,025^{-8}$.
14. $B(1,03^{-2} + 1,03^{-4}) = 3000 \cdot 1,03^{-3}$.
15. 984,24 євро. **16.** 24 970 грн 27 коп.
17. $A = 1061,52$ євро. **18.** $B = 19\,230$ грн 77 коп.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. -3,5. **2.** Дві. **3.** 50 см. **4.** За статистичним підходом $P(A) \approx 0,49$; $P(B) \approx 0,51$. Отже, імовірність події B більша. **5.** 1975.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 7

1	2	3	4	5	6	7
Г	А	Д	В	3180	1920,13	9523,81

8. а) 824 грн; б) 714 грн; в) 1296 грн. 9. а) 2000 грн; б) 500 грн; в) $22\frac{2}{3}\%$; г) 500 грн; д) $33\frac{1}{3}\%$. 10. а) 18 290 грн 91 коп.; б) 19 410 грн 36 коп.

Задачі підвищеної складності

2. $r = 4,04\%$; $r_4 \approx 3,98\%$.

3. У першому випадку клієнт має внести 61 027,09 грн, у другому — 59 543,06 грн; еквівалентна ставка $r_2 = 10,125\%$; пропозиція вигідна клієнту.

4. 12 974 грн 62 коп.

5. $r_4 \approx 7,92\%$; $B = 0,663\,27 \cdot A$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ
КУРСУ 8 КЛАСУ

1. $\frac{25}{x}$.

2. а) a ; б) m ; в) c^3 ; г) $5c^2$.

3. а) a^2 ; б) b^{-8} ; в) c^{-5} ; г) d^{11} .

4. а) x^{-10} ; б) y^8 ; в) $\left(\frac{n}{m}\right)^9$; г) $\left(\frac{k}{a}\right)^{-6}$.

5. Менше.

7. а) 1; б) 16; в) 4; г) 25.

8. а) Так; б) ні; в) так; г) ні.

9. а) 0; б) -4 і 4 ; в) -9 і 9 ; г) -10 і 10 .

10. г.

11. а) 6; б) 5; в) 8; г) 4.

12. а) 4; б) 25; в) немає коренів; г) немає коренів.

13. а) 1; б) 2; в) 6; г) 9.

14. а) $\sqrt{5} < \sqrt{8}$; б) $\sqrt{8} > \sqrt{3}$; в) $\sqrt{15} > \sqrt{14}$; г) $\sqrt{1} < \sqrt{10}$.
15. а.
16. а; б.
17. а; г.
18. а) 6 і 1; б) -4 і -9; в) 6 і -4.
19. б; г.
20. г.
21. в; г.
22. а) $-8x^2 + 4x - 3 = 0$; б) $5x^2 - 15x + 7 = 0$; в) $-3x^2 + 4x + 6 = 0$;
г) $-4x^2 + 2x + 9 = 0$.
24. а; в; г.
25. в.
26. а.
27. г.
28. 25° .
29. а; г.
30. 13 см; так.
31. $\angle ACB$, $\angle ADB$; 43° .
32. $\angle C = 112^\circ$, $\angle D = 50^\circ$.
33. а.
34. Так.
35. $\angle K_1 = 40^\circ$, $\angle B_1 = 80^\circ$, $\angle C_1 = 60^\circ$.
36. Так, за трьома пропорційними сторонами.
37. а; б; г.
38. б; в.
39. а) ED ; б) CD .
40. а.
41. Знайти гіпотенузу, невідомий катет і невідомий гострий кут.
42. $AB = 15$ см; $\sin \angle A = \frac{4}{5}$; $\sin \angle B = \frac{3}{5}$.
43. а.
44. 40π см².
45. а.
46. в; г.
47. а) 6; б) $(4; -2)$.
48. $(11; 6)$.
49. а) B ; б) M ; в) K ; г) A .

50. а) Так; б) так; в) ні; г) ні.

51. $\overrightarrow{AB}(7; 4)$.

52. $\vec{d} + \vec{c} = (-3; 12)$.

53. $\frac{x-5}{4} = \frac{y-9}{3}$.

54. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{6}$.

55. а) Так; б) ні; в) так; г) ні.

56. а) 30° ; б) 60° ; в) 90° .

57. а) 400 грн; б) 500 грн; в) 100 грн; г) 25 %; д) $\frac{1}{3}$ року; е) 75 %.

58. а) 30 000 грн; б) 27 000 грн; в) 3000 грн; г) 10 %; д) 15 %.

59. а) 6 місяців; б) 2; в) 5 %; $S = 10000 \cdot 1,05^6$.

60. а) 4; б) 2 %; в) 8; $B = 2000 \cdot 1,02^4$.

61. $\frac{300\,000}{y-3}$; 12 000.

62. а) $\frac{3b+4a}{ab}$; б) $\frac{3x+5}{x(x+1)}$; в) $\frac{5a^2}{6b}$; г) $\frac{a}{6k}$.

63. а) a^{-6} ; б) b^{-4} ; в) $\left(\frac{ab}{n}\right)^7$; г) $\left(\frac{1}{kmn}\right)^3$.

64. а) $6 \cdot 10^{-8}$; б) $3 \cdot 10^{-2}$; в) $2 \cdot 10^{-5}$; г) $8 \cdot 10^{-4}$.

65. $k = \frac{350}{x}$; так.

67. а) Так; б) ні; в) ні; г) ні.

68. а) -6 і 6; б) -9 і 9.

69. а) -0,2 і 0,2; б) -90 і 90; в) -0,5 і 0,5; г) таких чисел не існує.

70. а) 0,1; б) 80; в) 0,5; г) 200.

71. а) 60; б) 0,4; в) 5; г) 90.

72. а) $5\sqrt{x}$; б) $9\sqrt{y}$; в) $0,1\sqrt{z}$; г) $1,1\sqrt{k}$.

73. На 100 лотергінських шилінгів.

74. а) Ні; б) ні; в) так; г) так.

75. а) ± 7 ; б) не має коренів; в) ± 4 ; г) 0; 8; д) 0; -8; е) $\pm 0,5$.

76. а) -2; 6; б) -3; -5; в) 0,5; -6; г) -1; д) не має коренів; е) не має коренів.

77. а) $x^2 - 4x + 1,5 = 0$; б) $y^2 - 9y + 14 = 0$; в) $x^2 - 2,5x + 3,5 = 0$.
78. а) $x^2 - 13x + 36 = 0$; б) $x^2 + x - 6 = 0$; в) $x^2 + 12x + 35 = 0$.
79. а) $(y-4)(y+4)$; б) $x(x+10)$; в) $z(z+25)$; г) $(x-7)(x+7)$.
80. а) $(x-1)(x+5)$; б) $(y-3)(y+2)$; в) $(x+8)(x-2)$; г) $(y-3)(y-7)$.
81. а) $x^2 = t$; б) $x^2 - 5 = t$; в) $x^2 + 6x + 3 = t$; г) $x^2 - 5x = t$.
82. а) ± 5 ; б) $\pm\sqrt{17}$; в) немає розв'язків; г) ± 9 .
83. 120° .
84. а; б.
85. $\angle D = 75^\circ$, $\angle A = 105^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.
86. 80 см.
87. 124° ; 56° ; 124° ; 56° .
88. $(4; -2)$; 6.
89. 77° ; 103° ; 103° .
90. 12 см; 18 см.
91. а) 600° ; б) 84° .
92. 5 см.
93. а) $7:4$; б) $3:7$.
94. 7,2 см.
95. 5 см; 4 см; 2,5 см.
96. 45 см; 7 см.
97. а) 13 см; б) $\sqrt{80}$ см.
98. $12\sqrt{2}$ см.
99. $\sin \beta = \frac{KM}{BM}$; $\cos \beta = \frac{KB}{BM}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{KM}{KB}$; $\operatorname{ctg} \beta = \frac{KB}{KM}$.
100. а) $\sin \angle B < \cos \angle B$; б) $\sin \angle B = \cos \angle A$; в) $\operatorname{tg} \angle B < \operatorname{ctg} \angle B$; г) $\operatorname{tg} \angle B = \operatorname{ctg} \angle A$.
101. а) 0,423; б) 0,819; в) 1,428; г) 0,466.
102. 20 см; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$.
103. а.
104. 100π см².
105. 10 см.
106. 120° .
107. 10; $(2; 4)$; так.
108. Центр $(-4; 2)$, радіус 4.

110. а) $\overline{AD}$.

111. а) $(7; -5)$; б) $(3; 4)$.

112. $\vec{c} + \vec{d}$: $\overline{(5; 9)}$, $\overline{(3; 5)}$, $\overline{(-3; -5)}$, $\overline{(-5; -9)}$; $\vec{c} - \vec{d}$: $\overline{(-3; 5)}$, $\overline{(-5; 9)}$, $\overline{(5; -9)}$, $\overline{(3; -5)}$.

113. $A(7; -9)$; $\vec{s}(2; 5)$.

114. $4x - 3y + 10 = 0$.

115. а) 50° ; б) 70° .

116. 2.

117. 2050 грн.

118. 4950 грн.

119. 12 837,65 грн.

120. а) 34 139 грн 61 коп.; б) 36 953 грн 81 коп.; в) 43 297 грн 29 коп.

121. $F = \frac{fd}{f+d}$; $d = \frac{Ff}{f-F}$.

122. а) $\frac{x-1}{x}$; б) $\frac{m^4}{m^2-2}$; в) $\frac{1}{t^2}$.

123. а) 3^{-2} ; б) 8^{-3} ; в) 10^{-6} .

124. а) $3 \cdot 10^{-3} < 3 \cdot 10^3$; б) $2 \cdot 10^{-3} < 3 \cdot 10^{-3}$; в) $3 \cdot 10^{-2} > 3 \cdot 10^{-3}$; г) $3 \cdot 10^{-3} > 4 \cdot 10^{-4}$.

125. а; в.

127. а) 1 і -1; б) 0; в) 15 і -15; г) таких значень немає.

128. а) Так, $(-3; 9)$ і $(3; 9)$; б) ні; в) так, $(1; 1)$; г) так, $(0; 0)$.

129. б; г.

130. а) Коренів немає; б) $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$; в) 0; г) $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$.

131. а) 18; б) коренів немає; в) 33; г) 8.

132. б; в; г.

133. а) $\sqrt{2} - 1$; б) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; в) $\sqrt{8} - \sqrt{7}$ г) $5 - \sqrt{11}$.

134. а) $\sqrt{72}$; б) $-\sqrt{27}$; в) $\sqrt{320}$; г) $-\sqrt{252}$.

135. 0,25; 1,2; 2,89; 1,9; 2,1; 3; 16.

136. а) $(81; 9)$; б) $(6,25; 2,5)$; в) $\left(\frac{64}{81}; \frac{8}{9}\right)$; г) немає точок перетину.

137. Додатні числа, наприклад, 1; 2; від'ємні числа, наприклад -1; -2; найменше число -5.

138. а) Немає розв'язків; б) -1; 7; в) $-\frac{2}{3}$; 3; г) $-2\frac{1}{2}$; 3.

139. а) $c = -30$; б) $b = 8$; в) $a = 6$.
140. а) -3 і 7 ; б) 1 і 6 ; в) -7 і -8 ; г) 6 ; 4 .
141. а) $2x - 3$; б) $x - 2$; в) $x - 1$; г) $2x + 1$.
142. а) $x(x - 6)(x + 3)$; б) $x(x + 3)(x - 2)$; в) $x^2(x + 3)(x - 2)$; г) $-x^2(6x + 4)(x - 3)$.
143. -2 ; 4 .
144. а) ± 1 ; ± 9 ; б) 4 ; 11 ; в) -2 ; $-0,5$; г) 7 ; -2 .
145. 50×50 см.
146. 80° ; 80° ; 140° .
149. 34 см.
151. 44 см.
152. 10 см.
153. $7,5$ см.
154. 100 см.
155. 32° .
156. 34 см.
157. 16 см; 12 см.
158. 48 см.
159. $BH = x \operatorname{tg} \alpha$; $AB = \frac{x}{\cos \alpha}$; а) $BH = \sqrt{3}$ см; $AB = 2\sqrt{3}$ см;
 б) $BH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ см; $AB = 8$ см.
160. а) 2 ; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1 .
161. $AH = 2\sqrt{3}$ см; $AM = 4\sqrt{3}$ см; $\angle AMD = 90^\circ$; $\angle MAD = 60^\circ$.
162. 7 см; 9 см.
163. Два різні конуси: з висотою 3 см і з висотою 4 см. У результаті обертання трикутника навколо гіпотенузи прямий круговий конус отримати не вийде.
164. Центр $(-3; 2)$; радіус 4 .
166. а) $(-4; -7)$, $\sqrt{65}$; б) $(-3; 3)$, $\sqrt{18}$; в) $(-1; -1)$, $\sqrt{2}$.
167. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2}$; $\vec{s}(1; 2)$.
168. а) Так; б) ні.
169. $3636,36$ грн.
170. $32\ 608$ грн 70 коп.

171. $P = 371\,777,94$ грн; $D = 128\,222,06$ грн.

172. 40 017 грн 91 коп.

174. а) 23; б) 52.

175. а) $\frac{a+b}{ab}$; б) $\frac{2x}{x^2+1}$.

176. Ні.

179. а) 0; б) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

180. а) $\sqrt{a} + 1$; б) $\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}$.

181. а) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; б) $\frac{1}{5\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$.

182. а) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; б) $\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}$.

183. А і С належать на графіку; В лежить вище графіка; D лежить нижче графіка.

184. а) 4; 5; б) 2; 3; 4; 5; 6; в) -1; 0; 1; 2; 3; г) -4; -3; -2.

185. а) 1; 3; б) -7; 8.

186. а) -2; 3; б) -0,5; 2.

187. а) -24; б) $\frac{8}{3}$; в) $\frac{72}{49}$.

188. а) $\frac{5a+8}{7a-3}$; б) $\frac{5a-3}{a-2}$; в) $\frac{6b-13}{2b+9}$.

189. 21.

190. а) $3 - \sqrt{a}$; б) $\sqrt{b} - 2$; в) $-\sqrt{m} - 1$.

191. а) $\pm 1, \pm 3$; б) $\pm 1, \pm 1,5$.

192. а) $-2 \pm \sqrt{3}$; б) 2; 4; $3 \pm \sqrt{2}$.

193. а) $\frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$; б) 1; 4.

194. а) -3; б) -5,5; в) -2; г) $-\frac{1}{7}$.

195. а) -3; 8; б) 12; $-\frac{5}{3}$.

196. 40 км/год; 60 км/год.

197. 5 кг або 20 кг.

198. 5 год; 7,5 год.

199. 80 см.
201. 23 см.
202. 3 см; 6 см.
203. 10 см; 18 см.
204. 60° ; 60° ; 120° ; 120° .
205. 120° .
206. 20° .
207. 7 см і 7 см.
208. На середині більшої основи.
209. 16 см; 4 см.
210. 5:4. Вказівка. Проведіть $MK \parallel CL$.
211. $\frac{bc}{b+c}$.
213. $2\sqrt{10}$ см.
214. 18 см; 32 см.
215. 1 см.
216. 10 см.
218. $\frac{ab}{a+b}$.
219. 4 см.
220. $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{4}$.
221. $2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.
222. $3-\sqrt{3}$.
223. $(0; -4)$.
224. $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$.
227. а) Так; б) ні; в) ні.
228. 1,4.
229. $r = 16,075\%$; 8037 грн 73 коп.
230. 10 %.
231. 99 923 грн 14 коп.
232. 9518 грн 14 коп.

Зміст

Вступ	3
-----------------	---

Розділ 4. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§ 17. Теорема Фалеса та її узагальнення. Властивість медіан трикутника. Властивість бісектриси трикутника	5
§ 18. Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників	25
§ 19. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора. Перпендикуляр, похила та їх властивості.	44
§ 20. Синус, косинус, тангенс, котангенс гострого кута прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса деяких кутів	59
§ 21. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Розв'язування прямокутних трикутників.	77
Готуємося до контрольної роботи до розділу 4	89
Завдання підвищеної складності.	92
Головне в розділі 4	94

Розділ 5. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

§ 22. Розгортка поверхні циліндра. Створення моделей циліндрів . . .	97
§ 23. Розгортка поверхні конуса. Створення моделей конусів	109
Готуємося до контрольної роботи до розділу 5	121
Завдання підвищеної складності.	123
Головне в розділі 5	125

Розділ 6. КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

§ 24. Система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками з даними координатами. Рівняння кола	126
---	-----

§ 25. Вектор. Модуль вектора. Колінеарні та рівні вектори. Дії над векторами	142
§ 26. Координати вектора. Дії над векторами в координатній формі	163
§ 27. Рівняння прямої. Взаємне розташування кола і прямої. Взаємне розташування двох кіл	176
§ 28. Скалярний добуток векторів і його застосування (опційно).	193
Готуємося до контрольної роботи до розділу 6	208
Завдання підвищеної складності.	210
Головне в розділі 6	212

Розділ 7. ОСНОВИ ФІНАНСОВОЇ ГРАМОТНОСТІ

§ 29. Формули простих і складних відсотків. Формули простих і складних дисконтів.	215
§ 30. Датовані суми. Еквівалентні суми за даної відсоткової ставки	232
Готуємося до контрольної роботи до розділу 7	242
Завдання підвищеної складності.	244
Головне в розділі 7	245

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ КУРСУ 8 КЛАСУ	247
--	-----

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

<i>Проект до інтегрованого модуля 3.</i> Прямокутні трикутники в побуті та техніці.	275
<i>Проект до інтегрованого модуля 4.</i> Координатний і векторний методи в науці та житті.	276
ВІДПОВІДІ	277

**Підручник інтегрованого курсу для 8 класу
закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)**

МАТЕМАТИКА

8

ЧАСТИНА 2

Підручник написаний в інноваційному стилі та містить такі матеріали:

- діалоги між учнями та вчителями для мотивації навчальної діяльності
- відповідь на запитання «Навіщо ми це вивчаємо?» для кожного параграфа
- запитання для самоперевірки засвоєння теоретичних знань
- завдання різних рівнів для формування практичних навичок з математики
- завдання для повторення та підготовки до вивчення нового матеріалу
- завдання підвищеної складності
- логічні блок-схеми «Головне в розділі» для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу
- «цікавинки» — матеріал щодо історії виникнення математичних знань і їх застосування
- відомості про досягнення українських математиків і їх внесок у науку

Інтерактивний електронний додаток до підручника містить:

- інтерактивні тести за кожною темою з автоматичною перевіркою результату
- авторські відео, що доповнюють і поглиблюють навчальний матеріал, сприяють його кращому усвідомленню та розширюють математичний кругозір