ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Миляник
Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

7

ЧАСТИНА 2



НОВА
УКРАЇНСЬКА
ШКОЛА

Пробний примірник макету видання

Олександр Школьний,
Євген Нелін,
Андрій Миляник,
Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

7

ЧАСТИНА 2

Підручник інтегрованого курсу для 7 класу
закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/106122
Електронний
інтерактивний додаток
до підручника

Київ • Харків
Видавництво «Ранок»
2024

підручник Проєкт Міністерства освіти і науки України
Видавництво "Ранок"

Зміст

Вступ 3

Розділ 6. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ. ТРИКУТНИКИ

§ 18. Паралельні та перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими 5

§ 19. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники. Висота, бісектриса, медіана трикутника 20

§ 20. Перша та друга ознаки рівності трикутників 33

§ 21. Рівнобічний і рівносторонній трикутники. Третя ознака рівності трикутників 47

Готуємося до контрольної роботи № 1 до розділу 6 63
Завдання підвищеної складності 66

§ 22. Ознаки паралельності прямих. Властивості кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною 67

§ 23. Сума кутів трикутника 81

§ 24. Прямокутний трикутник і його властивості. Ознаки рівності прямокутних трикутників 93

Готуємося до контрольної роботи № 2 до розділу 6 108
Завдання підвищеної складності 111
Головне в розділі 6 113

Розділ 7. КОЛО ТА КРУГ

§ 25. Коло, круг та їх частини. Довжини кола та дуги кола. Геометричне місце точок 117

§ 26. Січна та дотична. Властивість дотичної 136

§ 27. Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане в трикутник 149

§ 28. Задачі на побудову 163

Підручник Інтернет-видання

Готуємося до контрольної роботи до розділу 7 180
Завдання підвищеної складності 183
Головне в розділі 7 185

Розділ 8. СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

§ 29. Статистичне дослідження та його етапи 189
§ 30. Статистичний підхід до обчислення ймовірностей подій 207

Готуємося до контрольної роботи до розділу 8 220
Завдання підвищеної складності 223
Головне в розділі 8 225

Розділ 9. РОЗГОРТКИ МНОГОГРАННИКІВ

§ 31. Розгортки прямокутного паралелепіпеда, куба, правильної трикутної та чотирикутної пірамід. Виготовлення моделей 227

Готуємося до контрольної роботи до розділу 9 242
Завдання підвищеної складності 244
Головне в розділі 9 246

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ
Проєкт до інтегрованого модуля 3.
Многогранники в побуті 248

Проєкт до інтегрованого модуля 4.
Побудова статистичних діаграм і графіків за допомогою комп’ютераі 249

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ КУРСУ 7 КЛАСУ 250

ВІДПОВІДІ 284

Підручник придбано у ТОВ "Ранок"

Вельмишановне панство!

Ви продовжуєте вивчати математику — науку, що водночас є корисною та цікавою. Ви вже знаєте, що користь від вивчення математики подвійна: з одного боку, за її допомогою можна знаходити розв'язки багатьох проблем, що виникають у повсякденному житті, а з іншого боку, математика — це своєрідний фітнес для розуму, який допомагає тримати ваше мислення в тонусі, готовим до багатьох сюрпризів навколишнього світу.

Вам знову допомагатимуть у навчанні семикласники Петрик і Тетянка, а також учитель, учителька та дідусь Тарас. Нагадаємо їх аватарки:


Тетянка


Петрик


Учителька


Учитель


Дідусь Тарас

Теоретичний матеріал посібника подано у формі теоретичного чату, окремі частини якого виділено кольором.



Синьою плашкою виділено основні означення, аксіоми — їх формулювання необхідно запам'ятати.



Оранжевою плашкою виділено формулювання основних властивостей і теорем, зміст яких слід запам'ятати.

Одразу після теоретичного чату — рубрика Перевірте себе, яка містить *контрольні запитання*, що дозволять вам зрозуміти, чи добре ви засвоїли теоретичний матеріал.

Тренувальні вправи чотирьох рівнів (початкового, середнього, достатнього, високого) наведено в рубриці Тренажерний зал (не забуваємо, що математика — це фітнес для розуму!). Передбачається, що непарні номери ви будете опрацьовувати в класі, а парні номери (позначені «будиночком») — удома самостійно, як домашнє завдання. Серед тренувальних вправ вам будуть зустрічатися *ключові завдання* (позначені «ключем») — результати або методи розв'язування таких завдань можуть бути корисними під час розв'язування інших завдань.

Після Тренажерного залу на вас чекають Цікавинки від дідуся Тараса, де ви знайдете матеріал для розширення кругозору та додаткового вивчення. За можливості обов'язково опрацюйте Запитання і завдання від дідуся Тараса — це збагатить вас новими знаннями та вміннями!

Кожний параграф завершується рубрикою Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу, яка дозволить вам не забути вивчене раніше та бути готовими до нових сюжетних поворотів у вивченні математики 7 класу.

Наприкінці кожного розділу є рубрика Головне в розділі у вигляді блок-схем, призначених для систематизації вивченого матеріалу.

Рубрику Готуємося до контрольної роботи подано у формі тестових завдань із варіантами відповідей, короткою відповіддю та повним поясненням.

Завдання підвищеної складності допоможуть тим, хто хоче досягти більшого.

І нарешті, дідусь Тарас запропонує виконати навчальний проєкт, робота над яким допоможе вам ще раз усвідомити важливість математики в реальному житті.

Бажаємо вам успіхів у вивченні математики!
Усе у вас вийде, вірте в себе!

Підручник у процесі експертизи

РОЗДІЛ 6.
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ. ТРИКУТНИКИ

CHAPTER 6.
MUTUAL PLACEMENT OF STRAIGHT LINES ON A PLANE. TRIANGLES

§ 18. Паралельні та перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими



Петрику, а ти не знаєш, де розташовано кафе «Затишок»? Мене туди подруга на день народження запросила.

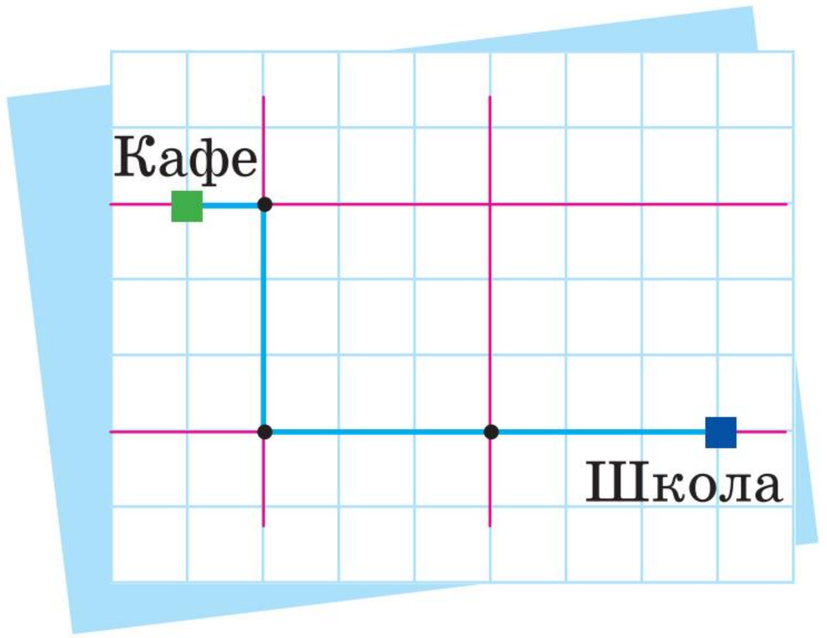


Знаю, це на вулиці, яка паралельна вулиці, де наша школа. Від школи треба пройти два квартали в напрямку центру, потім повернути направо — на перпендикулярну вулицю, пройти ще квартал і повернути наліво — це і буде потрібна вулиця, і за 20 метрів ти побачиш «Затишок».





Начебто зрозуміла, але краще намалюю схему. Паралельна вулиця — це та, яка не перетинається з вулицею, де розташована школа. Так? А перпендикулярна — це та, що утворює з двома паралельними прямий кут? Червоними лініями я позначила вулиці, а синьою — свій маршрут. Правильно?





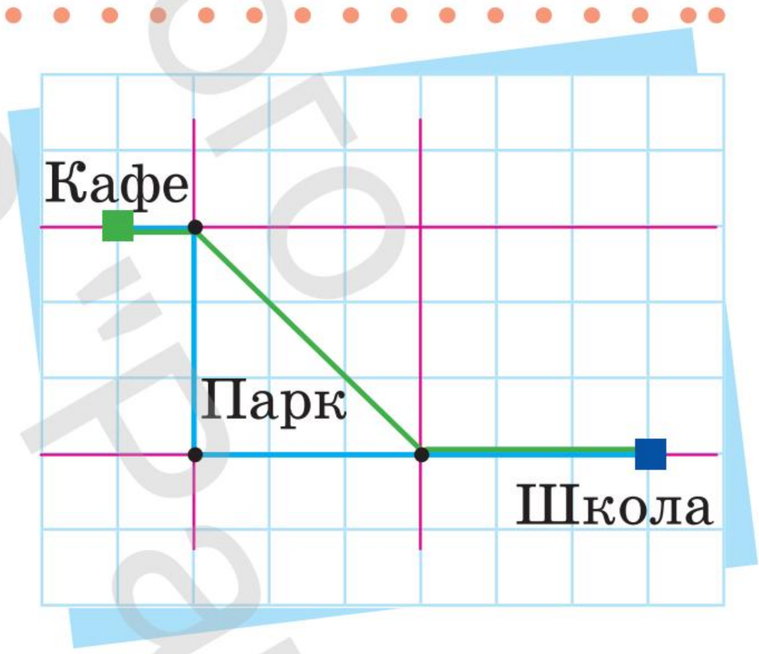
Так, усе правильно! Словом «паралельний» часто описують щось відокремлене від іншого. Наприклад, паралельний курс, паралельна реальність тощо. У математиці це поняття вживається в основному для позначення прямих і їх частин, які не мають спільних точок.



Цікаво, щоб потрапити в кафе на паралельну вулицю, треба було двічі повернути під прямим кутом! І ми також раніше на уроках математики для побудови паралельних прямих використовували лінійку та косинець. Мабуть, існує якесь твердження щодо паралельних і перпендикулярних прямих, яке описує цю залежність між ними. Запитаємо про це вчителів!



Проте зауважу, що для потрапляння на паралельну вулицю не обов'язково повертати під прямим кутом. Іноді можна пройти навпростець. Наприклад, до кафе «Затишок» є ще один маршрут, через доріжку парку, розташованого за квартал від школи.



Я позначив цей маршрут зеленим кольором. Тут кути вже не будуть прямими. Але, дійсно, запитаємо вчителів.



Із радістю розповім. Дві різні прямі на площині можуть або мати спільні точки, або не мати їх. Якщо дві прямі не мають спільних точок, то їх називають *паралельними*. Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони *перетинаються*. Наприклад, на рис. 18.1 прямі a і b — паралельні (це позначають так: $a \parallel b$), а прямі c і d — перетинаються в точці A.

Ви знаєте, що через дві точки можна провести лише одну пряму. Тому:

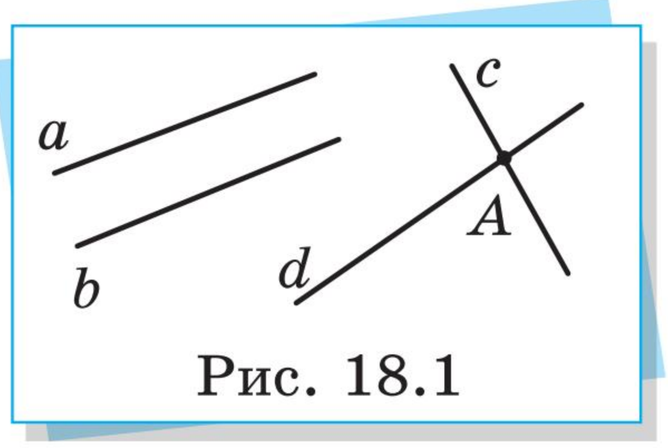


Рис. 18.1

Якщо дві прямі мають спільну точку, то ця точка перетину — єдина.



Ви вже вивчали кути, які утворюються в результаті перетину двох прямих. Наприклад, у результаті перетину прямих l і m утворюються кути, позначені цифрами 1, 2, 3, 4 (рис. 18.2).

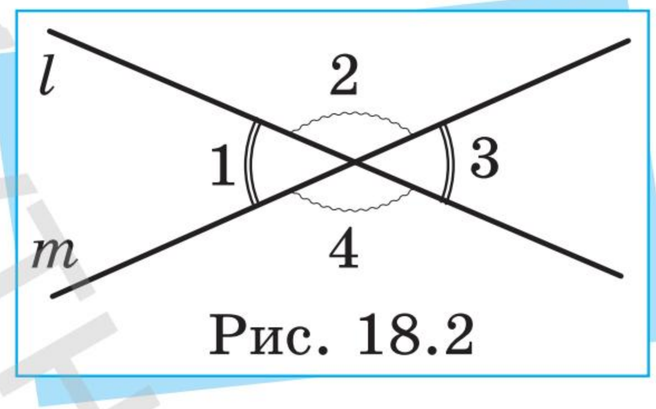


Рис. 18.2

Ви вже знаєте, що кути 1 і 3 та кути 2 і 4 є вертикальними. Ми довели *властивість вертикальних кутів*: вертикальні кути рівні між собою, тобто мають однакові градусні міри. На рис. 18.2 $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$.

Кути 1 і 2, 2 і 3, 3 і 4, 4 і 1 є суміжними. Ми довели *властивість суміжних кутів*: сума градусних мір суміжних кутів дорівнює 180°. На рис. 18.2, зокрема, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Кутом між двома прямими будемо називати гострий або прямий кут, який утворюється в результаті перетину цих двох прямих.

Наприклад, на рис. 18.2 кутом між прямими l і m є кут 1 або кут 3.



Із властивості суміжних кутів випливає:

Якщо в результаті перетину двох прямих утвориться хоча б один прямий кут, то всі інші кути, відмінні від розгорнутих, також будуть прямими.

Такі дві прямі *перетинаються під прямим кутом*, і їх називають перпендикулярними прямими. Якщо прямі a і b — перпендикулярні, то це записують так: $a \perp b$ (рис. 18.3).

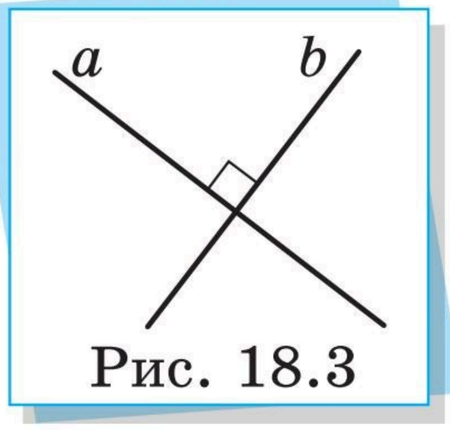


Рис. 18.3



Якщо два відрізки належать перпендикулярним прямим, то їх також називають перпендикулярними. На рис. 18.4 зображено різні варіанти перпендикулярних відрізків. Аналогічно можна дати означення перпендикулярних променів, перпендикулярних відрізка й прямої, відрізка й променя, променя й прямої. Наприклад, на рис. 18.5 зображено промінь MK, перпендикулярний до прямої l.

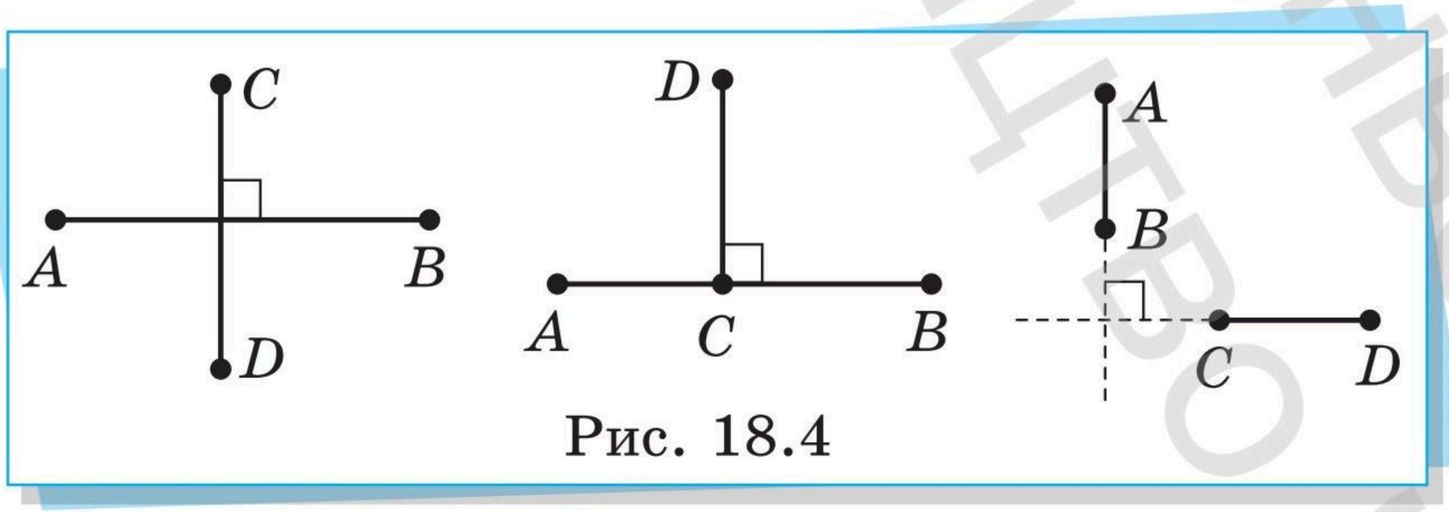


Рис. 18.4

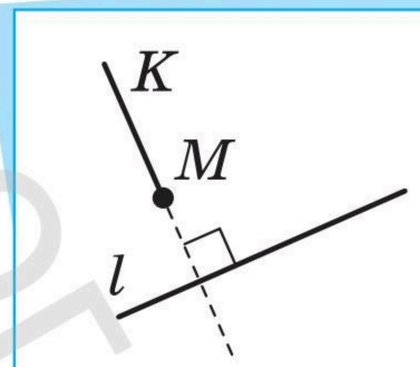


Рис. 18.5



Розглянемо пряму m, точку $P \notin m$ і дві різні точки $K \in m$, $S \in m$, причому $PS \perp m$ (рис. 18.6). Тоді відрізок PS називають перпендикуляром, проведеним із точки P до прямої m,

а відрізок PK — похилою, проведеною з точки P до прямої m. При цьому точку S називають основою перпендикуляра PS, а точку K — основою похилої PK. Відрізок KS при цьому називають проєкцією відрізка PK на пряму m.

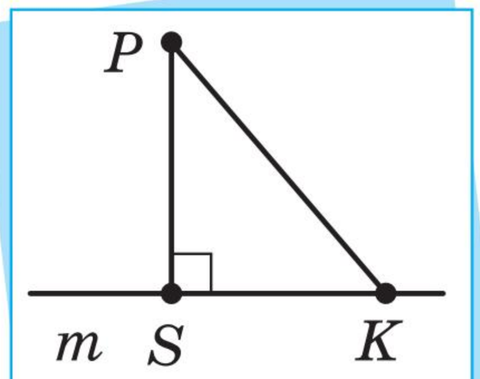


Рис. 18.6

Довжину перпендикуляра, проведеного з точки поза прямою до цієї прямої, називають відстанню між точкою і прямою. Наприклад, на рис. 18.6 довжина відрізка PS є відстанню від точки P до прямої m.



Доведемо важливу властивість перпендикулярних прямих.



ТЕОРЕМА (про єдиність перпендикулярної прямої, що проходить через точку на даній прямій).

Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.

Нехай на рис. 18.7 зображено пряму AB і точку $C \in AB$. Нехай також $KM \perp AB$ і $C \in KM$. *Припустимо*, що існує ще одна пряма $PS \perp AB$, яка проходить через точку C. Тоді градусні міри кутів PCB і KCB дорівнюють 90°. Але за основними властивостями кутів від будь-якого променя (а отже, і від променя CB) в дану півплощину можна відкласти лише один кут заданої градусної міри. Одержали *суперечність*. Отже, наше припущення неправильне, тобто через дану точку C проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до прямої AB.

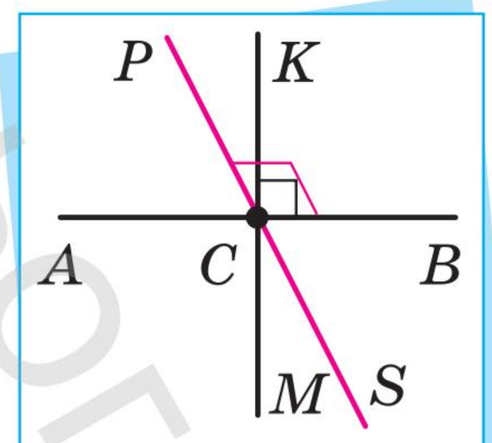


Рис. 18.7

У § 19 буде доведено таке твердження:



Через точку, яка не належить даній прямій, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.



Основну властивість паралельних прямих описує така *аксіома:*

Через точку, що не належить даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Наприклад, на рис. 18.8 зображено пряму a і точку $M \notin a$. Тоді пряма b, яка проходить через точку M, буде єдиною прямою, паралельною a.

Із наведеної аксіоми випливає твердження:

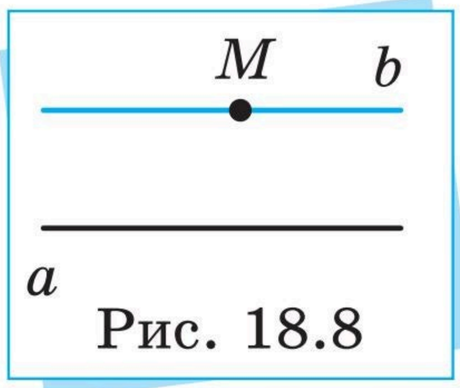


Рис. 18.8

ТЕОРЕМА (перша ознака паралельності прямих).

Дві прямі, паралельні третій прямій, є паралельними між собою.

Дійсно, нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (рис. 18.9). Доведемо, що $a \parallel b$. Для цього *припустимо* супротивне, тобто те, що прямі a і b перетинаються в деякій точці M. Тоді через точку M проходять дві різні прямі, паралельні прямій c. Це *суперечить* наведеній вище аксіомі. Отже, $a \parallel b$.

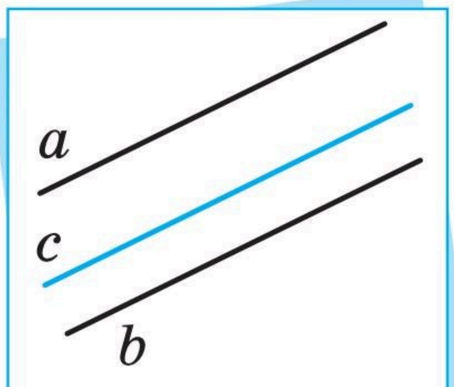


Рис. 18.9



Спосіб побудови паралельних прямих за допомогою лінійки та косинця ви знаєте ще з початкової школи (рис. 18.10).

Такий спосіб побудови прямої, паралельної даній, використав Петрик, пояснюючи спосіб потрапити на паралельну вулицю. Цей спосіб ґрунтується на твердженні:

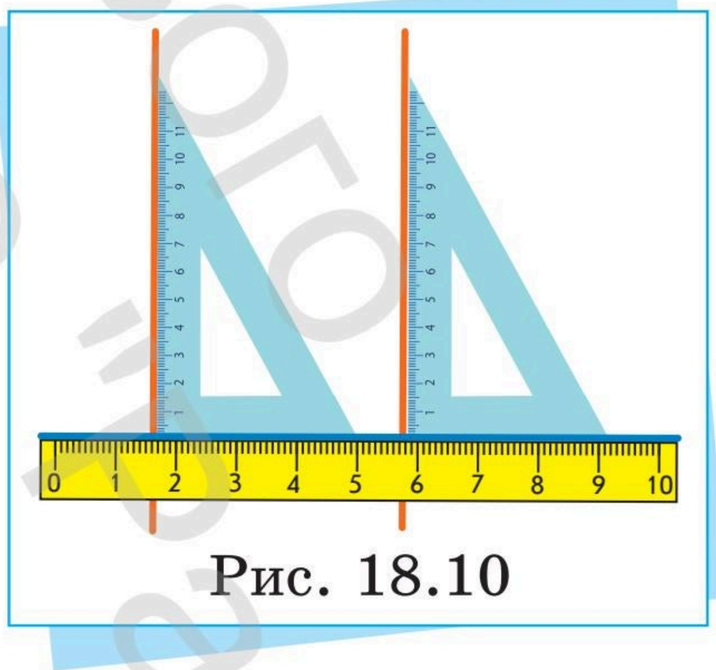


Рис. 18.10

ТЕОРЕМА (друга ознака паралельності прямих).

Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні між собою.

Нехай $a \perp c$ і $b \perp c$ (рис. 18.11). *Припустимо* супротивне, тобто те, що прямі a і b перетинаються в якійсь точці A. Тоді через цю точку A проведено дві прямі a і b, перпендикулярні до прямої c, що неможливо. Отримана *суперечність* показує, що припущення є неправильним, тобто насправді $a \parallel b$.

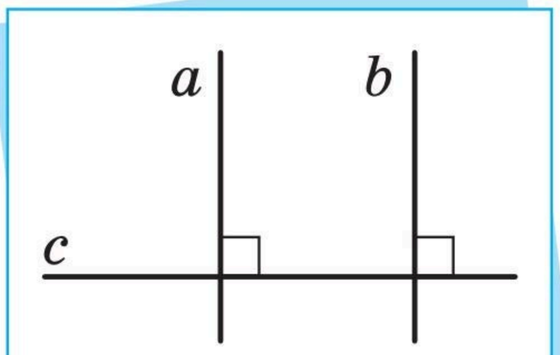


Рис. 18.11

Існують також інші ознаки паралельності прямих — їх ми розглянемо пізніше.



Зауважимо, що істинність другої ознаки паралельності прямих багаторазово підтверджується життєвим досвідом, але формально ми поки що *не можемо вважати, що довели це твердження*, оскільки наше доведення спирається на *гіпотезу* про те, що через точку, яка не належить даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну даній.

Перевірте себе!

1. Що називають кутом між двома прямими?
2. Які дві прямі називають перпендикулярними?
3. Поясніть поняття перпендикуляра, похилої та її проєкції на дану пряму.
4. Сформулюйте теорему про єдиність перпендикулярної прямої, проведеної через точку на даній прямій.

5. Сформулюйте аксіому, що описує основну властивість паралельних прямих.

6. Сформулюйте першу та другу ознаки паралельності прямих.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено дві прямі, які перетинаються. Чи є кут 1 кутом між прямими?

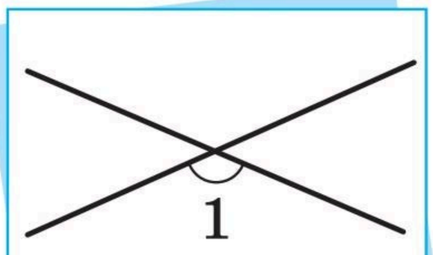


Рис. 1

2. Побудуйте дві прямі a і b, які перетинаються. Позначте дужкою кут 1 між прямими.

3. Для кожного випадку на рис. 2 виміряйте за допомогою транспортира суміжні кути 1 і 2 та обчисліть суму градусних мір цих кутів. Який висновок можна зробити про суму градусних мір суміжних кутів?

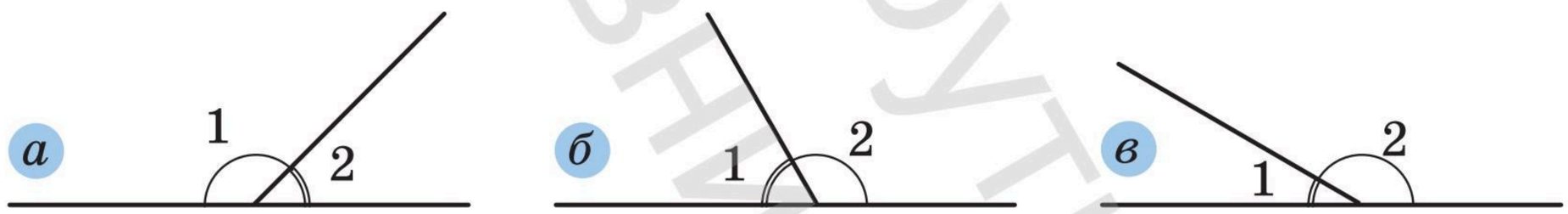


Рис. 2

4. Для кожного випадку на рис. 3 виміряйте за допомогою транспортира вертикальні кути 1 і 2. Який висновок можна зробити про градусні міри вертикальних кутів? У якому випадку чи випадках кут 1 є кутом між прямими?

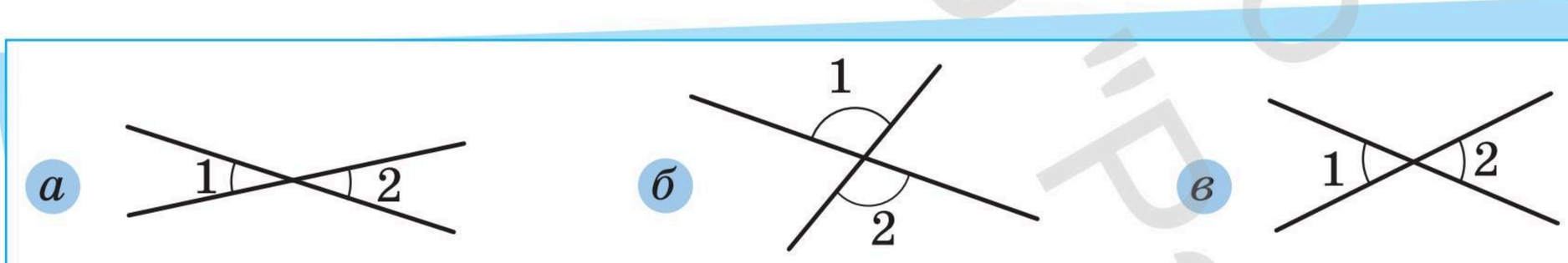


Рис. 3

5. На рис. 4* зображено дві прямі, які перетинаються під кутом 40°. Градусні міри яких кутів на рисунку дорівнюють 40°?

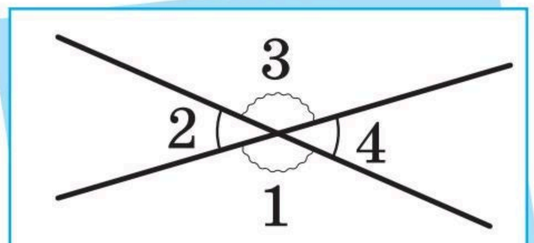


Рис. 4

6. За умовою та рисунком до завдання 5 визначте градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.

7. На рис. 5 зображено дві прямі, які перетинаються під кутом 65°. Градусні міри яких кутів дорівнюють 65°?

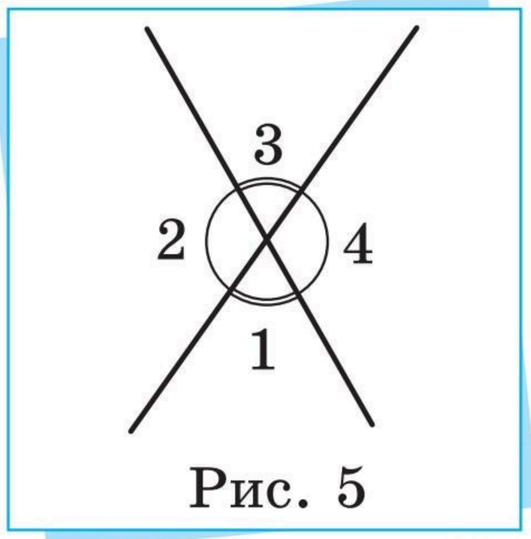


Рис. 5

8. За умовою та рисунком до завдання 7 визначте градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.

9. Укажіть на рис. 6:

а) відрізок, який є перпендикуляром, проведеним із точки A до прямої m;

б) відрізок, який є похилою, проведеною з точки A до прямої m;

в) відрізок, який є проєкцією похилої, проведеної з точки A до прямої m.

Довжина якого відрізка буде відстанню від точки A до прямої m?

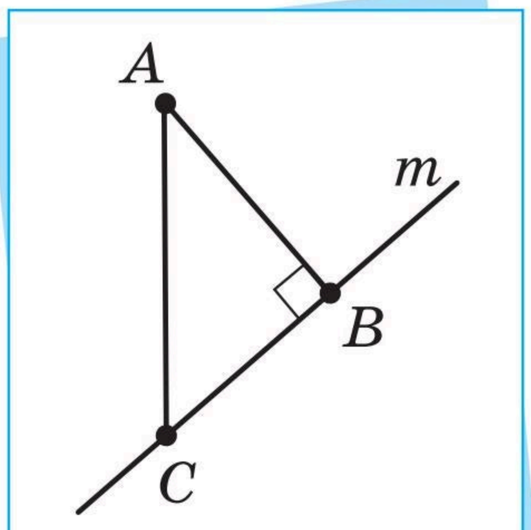


Рис. 6

10. Укажіть на рис. 7:

а) відрізок, який є перпендикуляром, проведеним із точки K до прямої c;

б) відрізок, який є похилою, проведеною з точки K до прямої c;

в) відрізок, який є проєкцією похилої, проведеної з точки K до прямої c.

Довжина якого відрізка буде відстанню від точки K до прямої c?

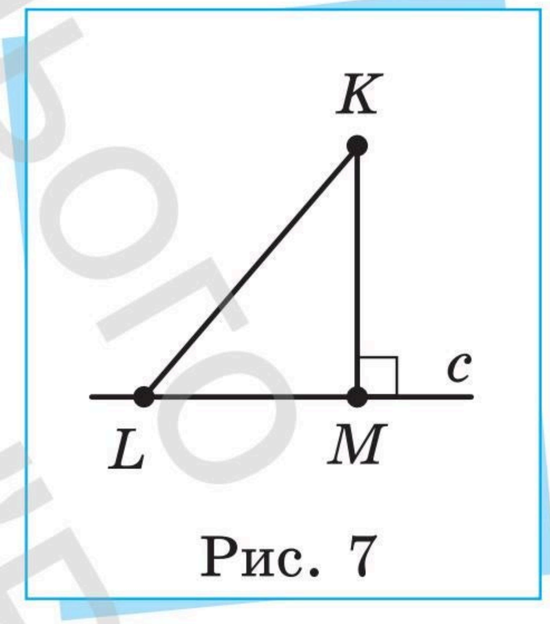


Рис. 7

* Зрозуміло, що в цьому й аналогічних випадках подані рисунки є схематичними.

11. Розгляньте рис. 8 і відновіть істинне твердження. Через точку A можна провести...
а) одну пряму, паралельну прямій b.
б) дві прямі, паралельні прямій b.
в) три прямі, паралельні прямій b.
г) безліч прямих, паралельних прямій b.

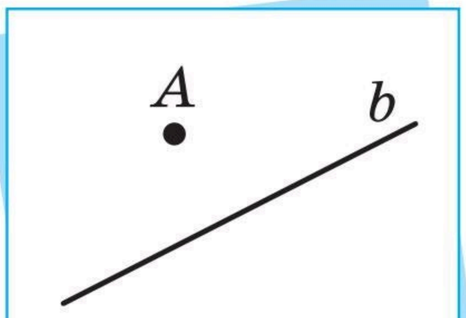


Рис. 8

12. Розгляньте рис. 9 і відновіть істинне твердження. Через точку C можна провести...
а) одну пряму, перпендикулярну до прямої n.
б) дві прямі, перпендикулярні до прямої n.
в) три прямі, перпендикулярні до прямої n.
г) безліч прямих, перпендикулярних до прямої n.

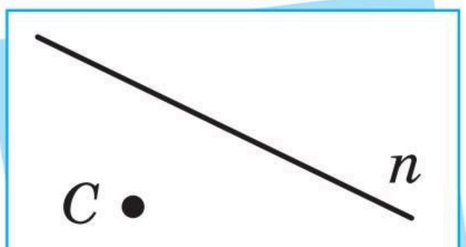


Рис. 9

Середній рівень

13. Визначте, чи може градусна міра кута між прямими дорівнювати: а) 5°; б) 90°; в) 125°; г) 12,5°.

14. Визначте, чи може градусна міра кута між прямими дорівнювати: а) 133°; б) 18°; в) 91°; г) 220°.

15. Задано пряму a та точку B, яка не належить цій прямій. Побудуйте: а) перпендикуляр із точки B до прямої a; б) похилу, яка проходить через точку B і перетинає пряму a; в) пряму c, яка проходить через точку B і паралельна прямій a.

16. Задано пряму d і точку M, яка не належить цій прямій. Побудуйте: а) дві похилі, які проходять через точку M і перетинають пряму d; б) пряму a, яка проходить через точку M і паралельна прямій d; в) пряму b, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої d.

17. На рис. 10 промінь BF перпендикулярний до прямої AC; $BK \perp BD$; $\angle FBK = 32°$. Знайдіть градусну міру кута ABD.

18. На рис. 11 $AC \perp BN$, $MB \perp BK$, $\angle CBK = 23°$. Знайдіть градусну міру кута ABM.

19. Прямі a та b перпендикулярні (рис. 12). Пряма c проходить через точку їх перетину й утворює з прямою a кут 50°. Знайдіть градусну міру кута між прямими b і c.

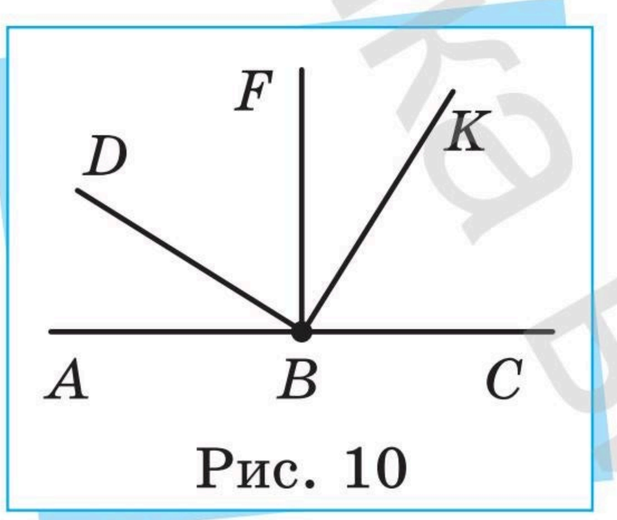


Рис. 10

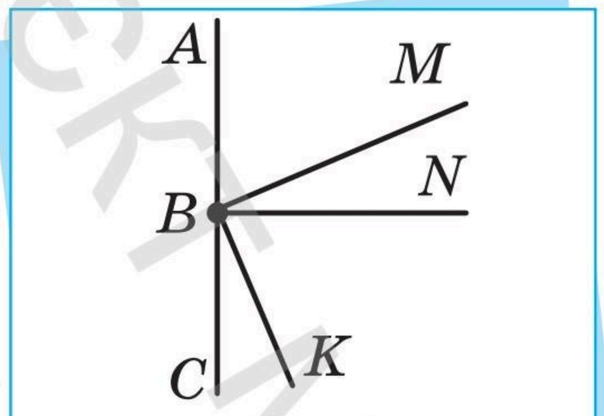


Рис. 11

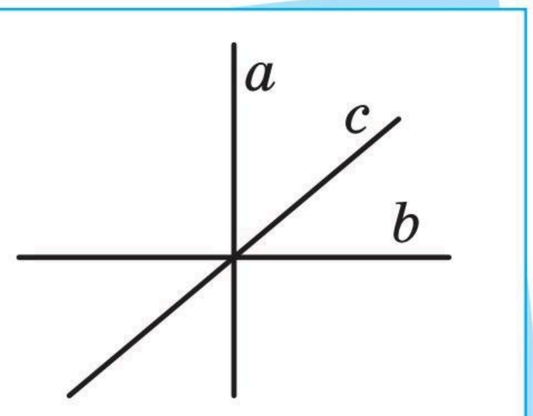


Рис. 12

20. Прямі a та b перпендикулярні (рис. 13). Пряма c проходить через точку їх перетину та утворює із прямою b кут 75°. Знайдіть градусну міру кута між прямими a і c.

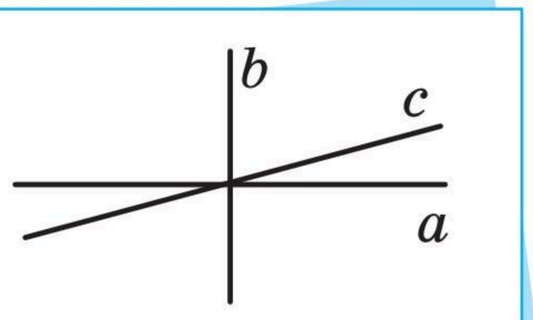


Рис. 13

Достатній рівень

21. У результаті перетину трьох прямих утворилися кути, два з яких дорівнюють 31° і 34° (рис. 14). Знайдіть градусні міри інших чотирьох кутів.

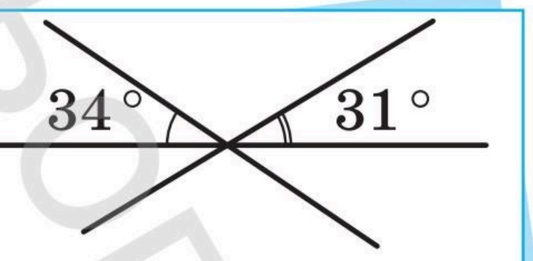


Рис. 14

22. У результаті перетину трьох прямих утворилися кути, два з яких дорівнюють 42° та 112° (рис. 15). Знайдіть градусні міри інших чотирьох кутів.

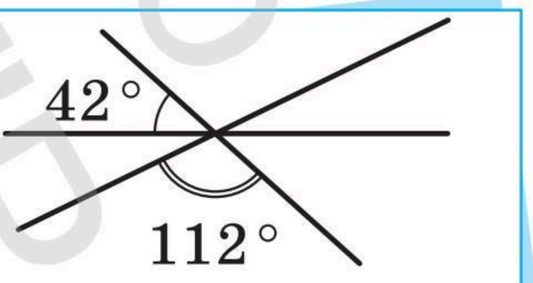


Рис. 15

23. Сума трьох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, дорівнює 310°. Знайдіть градусні міри кутів, які утворилися.

24. Сума трьох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, дорівнює 240°. Знайдіть градусні міри кутів, які утворилися.

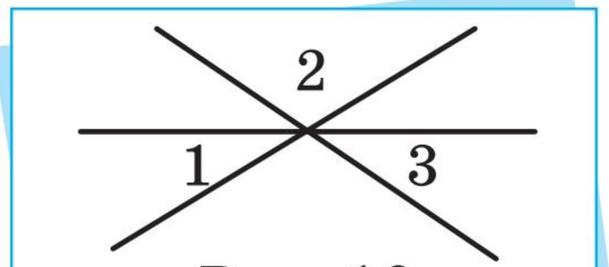


Рис. 16

25. Три прямі перетинаються в одній точці так, як показано на рис. 16. Доведіть, що сума градусних мір кутів 1, 2 і 3 дорівнює 180°.

26. Три прямі перетинаються так, як показано на рис. 17. Доведіть: якщо кут 2 дорівнює куту 4, то кут 1 дорівнює куту 3.

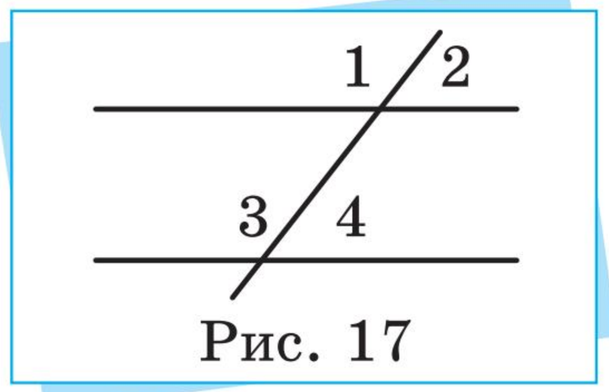


Рис. 17

27. Пан Тарас вирішив прогулятися. Вийшовши з будинку, він пройшов 20 м на північ, потім повернув на перпендикулярну вулицю й пройшов 40 м на схід. Знову звернув на перпендикулярну вулицю й пройшов 30 м на північ, повернув на захід під кутом 90°, пройшов 70 м, повернув на перпендикулярну вулицю в південному напрямку й опинився на вулиці, яка паралельна вулиці, де він мешкає. Нарисуй шлях пана Тараса в масштабі 1 : 2000. Скільки метрів і в якому напрямку треба ще пройти пану Тарасу, щоб якнайшвидше дістатися свого будинку?

28. Пані Орися з онукою вирушили на прогулянку. Вийшовши з будинку, вони пройшли 50 м на захід, повернули на перпендикулярну вулицю і пройшли ще 50 м на північ, потім знову повернули під кутом 90°, пройшли 50 м на схід і опинилися



на вулиці, яка перпендикулярна до вулиці, де вони мешкають. Нарисуй шлях пані Орисі та її онуки в масштабі 1 : 2000. Скільки метрів і в якому напрямку треба ще пройти пані Орисі з онукою, щоб якнайшвидше дістатися свого будинку?

29. В одній координатній площині побудуйте прямі a, b, c, d, які відповідно є графіками лінійних функцій $y = 2x - 1$, $y = 2x + 0{,}5$, $y = 0{,}5x - 2$, $y = -0{,}5x + 2$. Перевірте себе за допомогою графічного калькулятора. Чи є на одержаному рисунку паралельні прямі та перпендикулярні прямі? Опишіть за допомогою символів взаємне розташування прямих a, b, c, d.

30. В одній координатній площині побудуйте прямі a, b, c, d, які відповідно є графіками лінійних функцій $y = -x + 2$, $y = x - 2$, $y = x - 5$, $y = -x - 3$. Перевірте себе за допомогою графічного калькулятора. Чи є на одержаному рисунку паралельні прямі та перпендикулярні прямі? Опишіть за допомогою символів взаємне розташування прямих a, b, c, d.

Високий рівень

31. Сума градусних мір двох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, дорівнює 140°. Доведіть, що ці кути вертикальні.

32. Два рівні кути мають спільну вершину, а їх бісектриси лежать на одній прямій. Доведіть, що ці кути вертикальні.

33. Сума градусних мір двох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, на 60° менша від суми градусних мір двох інших кутів. Знайдіть градусні міри всіх цих кутів.

34. Визначте градусні міри кутів (відмінних від розгорнутих), утворених у результаті перетину двох прямих, якщо сума градусних мір трьох із цих кутів дорівнює 250°. Чому дорівнює градусна міра кута між даними прямими?

35. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайдіть градусну міру найменшого з тупих кутів, утворених у результаті перетину цих трьох прямих, якщо градусна міра найбільшого з утворених тупих кутів дорівнює $165°$.

36. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайдіть градусну міру найбільшого з тупих кутів, утворених у результаті перетину цих трьох прямих, якщо градусна міра найменшого з утворених тупих кутів дорівнює $110°$.

37. Через точку на площині проведено п'ять прямих. Знайдіть найбільшу кількість пар перпендикулярних прямих, які можуть бути серед цих прямих. Обґрунтуйте свою відповідь.

38. Через точку на площині проведено сім прямих. Знайдіть найбільшу кількість пар перпендикулярних прямих, які можуть бути серед цих прямих. Обґрунтуйте свою відповідь.

39. Доведіть, що коли деяка пряма перетинає одну з паралельних прямих, то вона перетинає й іншу пряму.

40. Доведіть, що коли дві прямі перетинаються, то будь-яка третя пряма перетинає хоча б одну із цих прямих.



Цікавинки від дідуся Тараса

Гіпотеза (з давньогрецької ὑπό — з приводу, θεσις — положення, місце) — це припущення, здогадка, яку вважають можливо істинною доти, доки її не підтвердили за допомогою логічного доведення або експерименту чи не спростували за допомогою контрприкладу.

Здебільшого гіпотези висувають на підставі інтуїції, спостережень чи конкретних прикладів, які її підтверджують. Наприклад, тривалий час на підставі візуальних спостережень вважалося, що Сонце обертається навколо Землі (ця гіпотеза дістала

Підручник перевірено і рекомендовано Міністерством освіти і науки України

назву *геоцентризм*). Із часом була висунута альтернативна гіпотеза — про те, що Земля обертається навколо Сонця (*геліоцентризм*). Експериментально гіпотезу про геоцентризм було спростовано, а гіпотезу про геліоцентризм — підтверджено.

Іноді підтвердження чи спростування наукових гіпотез займає досить тривалий час. Наприклад, гіпотеза про істинність Великої теореми Ферма́ була сформульована в 1637 р., а підтверджена лише в 1995 р. *Ендрю Вайлсом*. Досі не підтвердженими і не спростованими є гіпотези про походження життя на Землі, про утворення Всесвіту, про нескінченність множини простих чисел-«близнюків» (простих чисел, різниця між якими дорівнює 2) та інші.

Ендрю Джон Вайлс (народ. 1953) — британський математик, лауреат Абелівської премії 2016 р. за доведення Великої теореми Ферма́.

Абелівська премія з математики (заснована на честь норвезького математика XIX ст. Нільса Генріка Абеля) присуджується щорічно з 2003 р. видатним математикам сучасності. Грошовий розмір премії можна порівняти з розміром Нобелівської премії.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи доводилося вам висловлювати певні гіпотези в житті? Наведіть приклади таких ситуацій. Яким чином ви підтверджували чи спростовували ці гіпотези?
2. Користуючись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про визначні гіпотези математики. Зробіть невелике повідомлення про якусь із них. Чому саме ця гіпотеза вас зацікавила?
3. Як ви вважаєте, що простіше: підтвердити гіпотезу чи спростувати її? Наведіть аргументи на користь вашої позиції.
4. Як ви вважаєте, чи будуть колись доведені чи спростовані всі можливі гіпотези? Чому ви так вважаєте?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

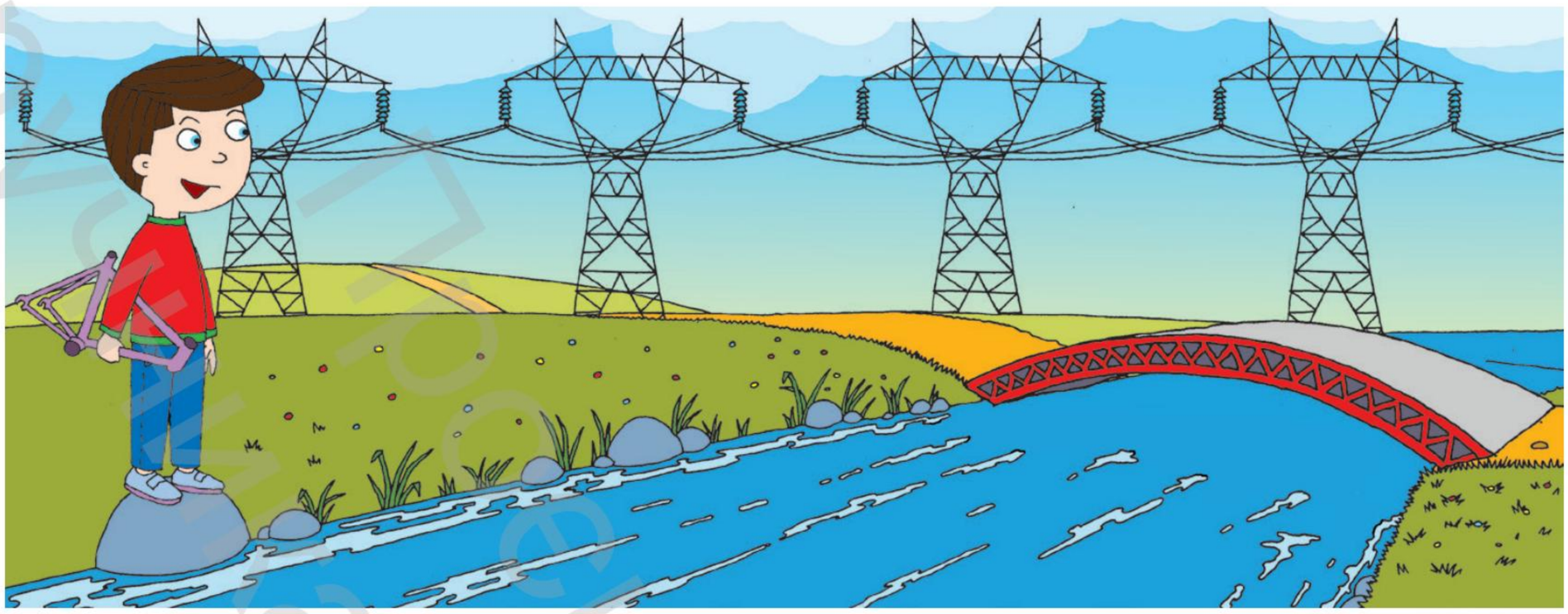
1. Розв'яжіть рівняння.
   а) $2x-3(1-x)=5x-2$; б) $4x+3=2(2x-1)+5$.
2. Побудуйте графік функції.
   а) $y=-2x+4$; б) $y=\frac{1}{3}x-2$.
3. Експериментатор Охрім змішав 500 г кефіру жирністю 2,5 % і 900 г кефіру жирністю 3,2 %. Знайдіть жирність суміші, отриманої Охрімом.
4. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел: а) 24 і 32; б) 120 і 108; в) 135 і 75.
5. Побудуйте довільний трикутник. Виміряйте довжини його сторін і знайдіть периметр. Складіть задачу на знаходження сторін цього трикутника за відомим периметром і співвідношеннями між довжинами його сторін.

§ 19. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники. Висота, бісектриса, медіана трикутника

Трикутник і його елементи. Рівні трикутники



Тетянко, помітив цікаву річ: дуже багато об'єктів навколо мають форму трикутника! Наприклад, рама мого велосипеда, балки мостів, опори ліній електропередачі — всі складаються з конструкцій трикутної форми! Цікаво, чому воно так?





Ти ще розкажи про Бермудський трикутник і любовний трикутник, але якщо серйозно, то мені здається, що ця геометрична фігура є надзвичайно «стійкою». Тобто із трьох металевих балок заданої довжини можна зробити лише один трикутник, і тому така конструкція не буде «хитатися», як інші многокутники.

Бермудський трикутник — територія в Атлантичному океані, яка утворює трикутник площею 4 тис. км^2 із вершинами в Бермудських островах, Пуерто-Рико й Південній Флориді (США).





А ще чотирикутні картонні коробки легко можна скласти, а з трикутними так не вийде! Дуже цікаво, чому так відбувається.



Із цього та кількох наступних параграфів це стане зрозумілим, Петрику.



Трикутник — це геометрична фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно з'єднують ці точки.

Наприклад, на рис. 19.1 зображено точки A, B, C, що не лежать на одній прямій, і відрізки AB, BC, AC, які попарно з'єднують ці точки.

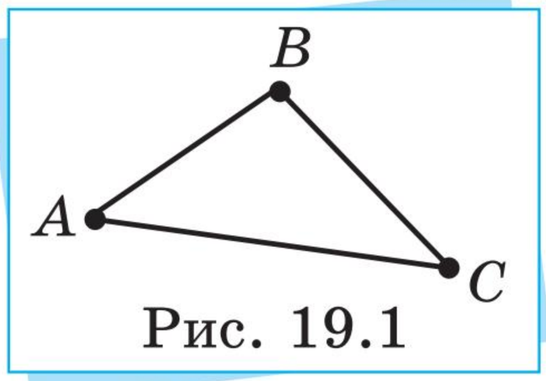


Рис. 19.1

Утворений трикутник можна позначати трьома літерами в будь-якому порядку: ABC, BAC, CAB тощо. Для позначення трикутника ABC можна використовувати спеціальний значок: $\triangle ABC$.

Точки A, B, C називають вершинами трикутника, а відрізки AB, BC, AC — сторонами трикутника.





Два трикутники називають рівними, якщо в них рівні градусні міри *відповідних* кутів і рівні довжини *відповідних* сторін.

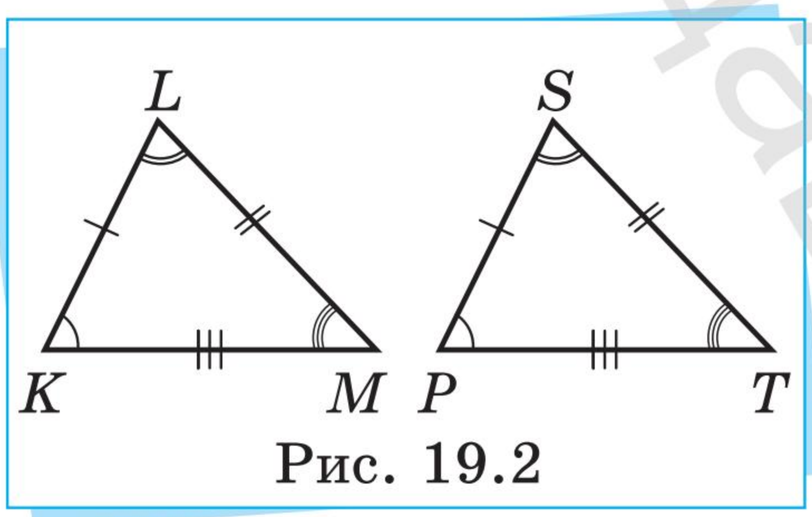


Рис. 19.2

У разі запису рівності трикутників є важливим порядок слідування вершин кожного з трикутників — відповідні елементи мають бути на тих самих місцях. Наприклад, якщо на рис. 19.2 $\triangle KLM = \triangle PST$, то $KL = PS$, $LM = ST$, $KM = PT$, $\angle K = \angle P$, $\angle L = \angle S$, $\angle M = \angle T$.

Нагадаємо, що на рисунках ми позначаємо рівні кути дужками однакового виду, а рівні відрізки — однаковою кількістю маленьких рисок.

Також замість того, щоб говорити, наприклад, «довжина сторони трикутника дорівнює 2 см», іноді будемо говорити, що «сторона трикутника дорівнює 2 см».



Зрозуміло, що рівні трикутники суміщаються при накладанні. *Основну властивість рівних трикутників* описує така аксіома:

Підручник Видавництва «Ранок»

Для даного трикутника ABC і даного променя з вершиною в точці A_1 *існує* трикутник $A_1B_1C_1$, рівний трикутнику ABC, для якого $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, причому точка B_1 є внутрішньою точкою заданого променя, а точка C_1 лежить у даній півплощині відносно прямої, яка містить цей промінь (рис. 19.3).

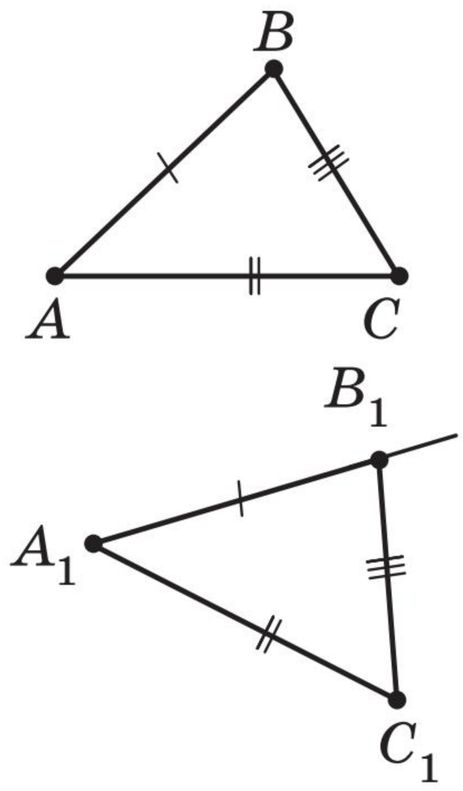


Рис. 19.3



Наведена аксіома дозволяє довести важливе твердження:

ТЕОРЕМА (про єдиність перпендикулярної прямої, проведеної через точку поза даною прямою).

Через точку, яка не належить даній прямій, проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.

Дійсно, нехай задано пряму m і точку $A \notin m$. Припустимо *супротивне*: через точку A проходить принаймні дві різні прямі — AB і AC, перпендикулярні до прямої m (точки B і C належать прямій m) (рис. 19.4).

Розглянемо трикутник ABC. За аксіомою про рівність трикутників існує $\triangle A_1BC = \triangle ABC$, причому $AB = A_1B$, $AC = A_1C$, $\angle ABC = \angle A_1BC = 90°$, $\angle ACB = \angle A_1CB = 90°$. Тоді $\angle ABA_1 = \angle ACA_1 = 180°$, тобто точки A, B, A_1 лежать на одній прямій і точки A, C, A_1 також лежать на одній прямій. Отже, через точки A і A_1 проведено дві різні прямі,

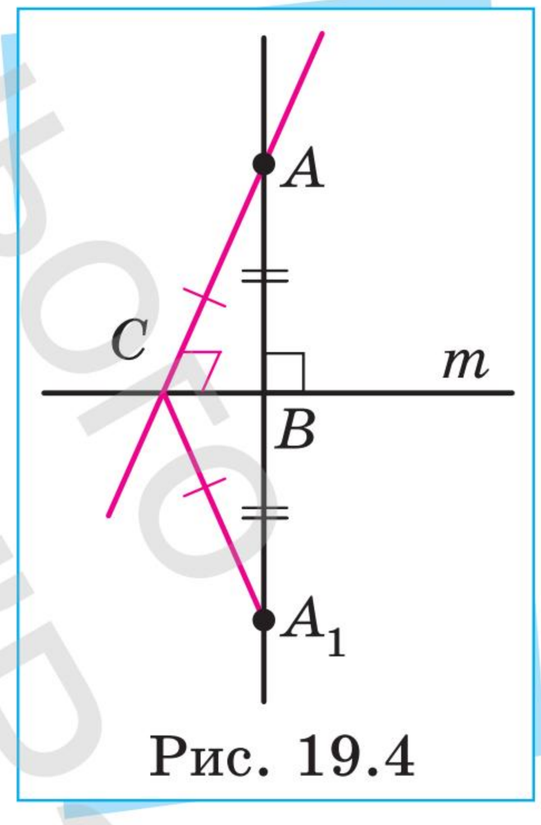


Рис. 19.4

що неможливо. Одержана *суперечність* показує, що наше припущення неправильне і що через точку $A \notin m$ проходить лише одна пряма, перпендикулярна до прямої m.

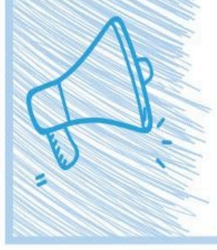


Наведене доведення підтверджує висловлену в § 18 гіпотезу про те, що через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної. Тому друга ознака паралельності прямих також є істинним твердженням і тепер ним можна користуватися для обґрунтування інших тверджень.

Види трикутників. Медіана, бісектриса, висота трикутника



Є три види трикутників залежно від градусних мір їх кутів:



- *гострокутний трикутник* (усі кути трикутника є гострими);
- *прямокутний трикутник* (один із кутів трикутника є прямим);
- *тупокутний трикутник* (один із кутів трикутника є тупим).

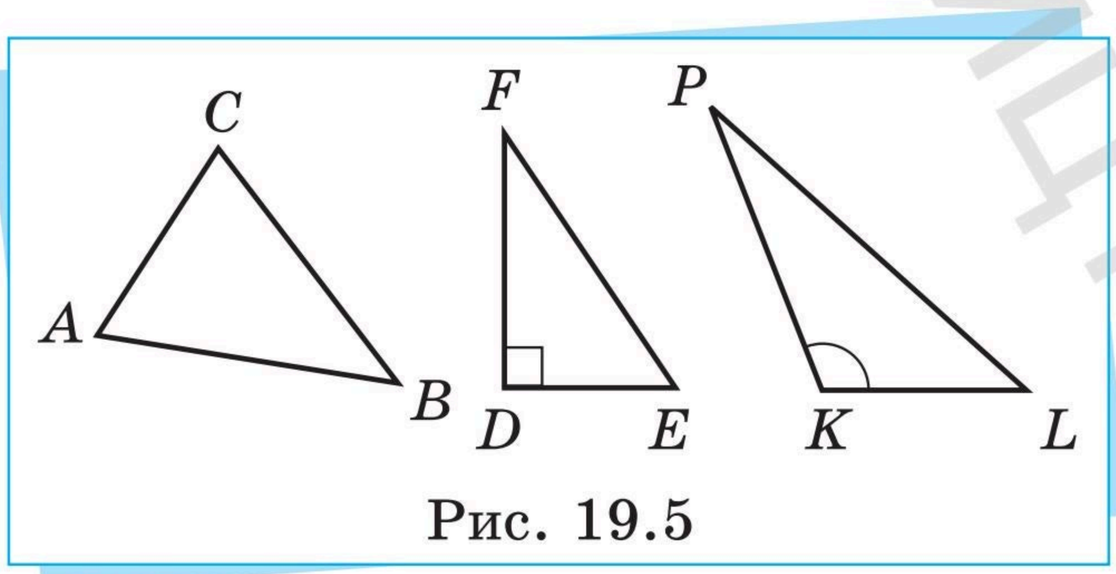


Рис. 19.5

Наприклад, на рис. 19.5 $\triangle ABC$ — гострокутний, $\triangle DEF$ — прямокутний ($\angle D$ — прямий), $\triangle KLP$ — тупокутний ($\angle K$ — тупий). Нагадаємо також, що периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.



Дамо означення трьох важливих понять, пов'язаних із трикутником.

Медіана трикутника — відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На рис. 19.6 AM — медіана трикутника ABC.

Висота трикутника — перпендикуляр, проведений із вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На рис. 19.7 KH — висота трикутника LKP, а SH — висота трикутника STR.

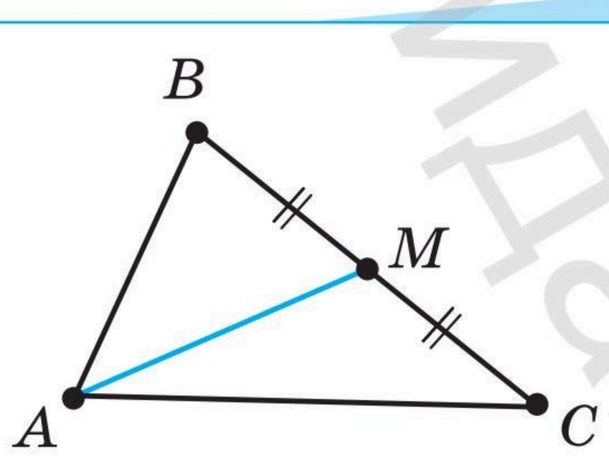
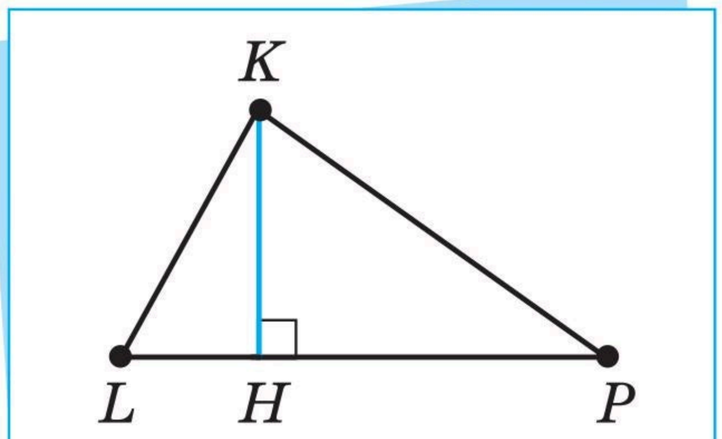


Рис. 19.6



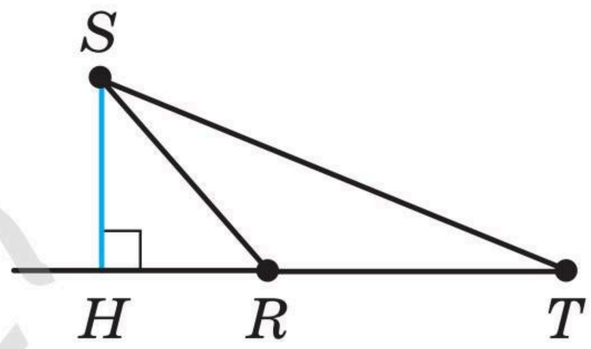


Рис. 19.7

Бісектриса трикутника — відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає його вершину з точкою протилежної сторони.

На рис. 19.8 NO — бісектриса трикутника NRF.

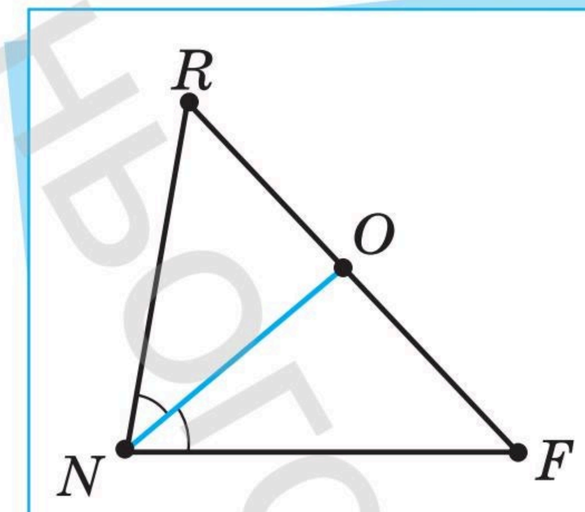


Рис. 19.8



Зверніть увагу на те, що *в прямокутному трикутнику дві з його висот збігаються зі сторонами трикутника*!

Також зауважимо, що ви *вже вивчили всі аксіоми, які описують основні властивості геометричних фігур на площині.*

Підсумкові міркування
щодо цих аксіом:
https://rnk.com.ua/106100



Перевірте себе!

1. Дайте означення трикутника. Із яких елементів складається трикутник?
2. Які два трикутники називають рівними?
3. Сформулюйте аксіому, яка описує основну властивість рівних трикутників.
4. Сформулюйте теорему про єдиність перпендикулярної прямої, проведеної через точку поза даною прямою.
5. Що називають медіаною, висотою та бісектрисою трикутника?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено трикутник. Визначте, чи можна цей трикутник позначити як...

а) $\triangle KMP$; в) $\triangle MPK$;
б) $\triangle KPM$; г) $\triangle PKM$.

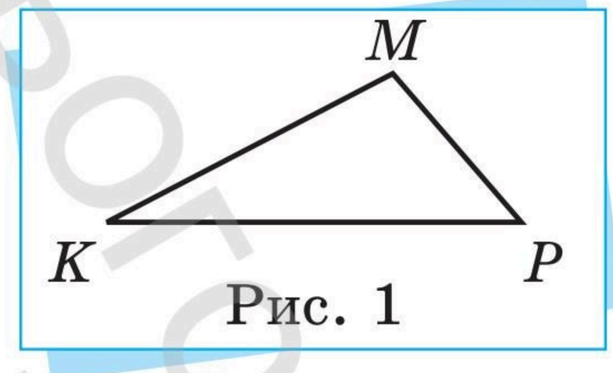


Рис. 1

2. На рис. 2 зображено кут. Визначте, чи можна цей кут позначити як...

а) $\angle ABC$; в) $\angle ACB$;
б) $\angle BCA$; г) $\angle CAB$.

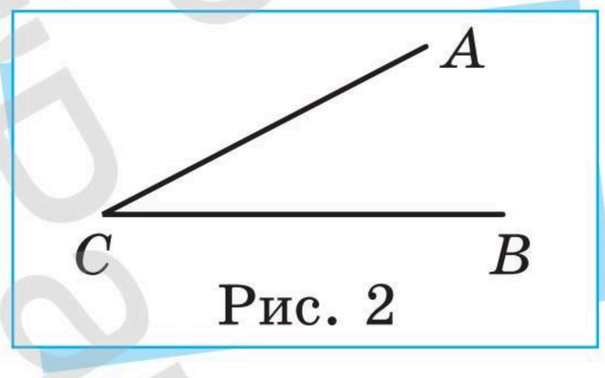


Рис. 2

3. На рис. 3 зображено рівні трикутники ABC і MKL. Які рівності з поданих є правильними?
а) $\angle A = \angle M$; б) $BC = LK$; в) $\angle C = \angle M$; г) $AB = MK$.

4. На рис. 4 зображено рівні трикутники BCD і AFN. Які рівності з поданих є правильними?
а) $\angle C = \angle F$; б) $BC = FN$; в) $\angle D = \angle N$; г) $BD = NA$.

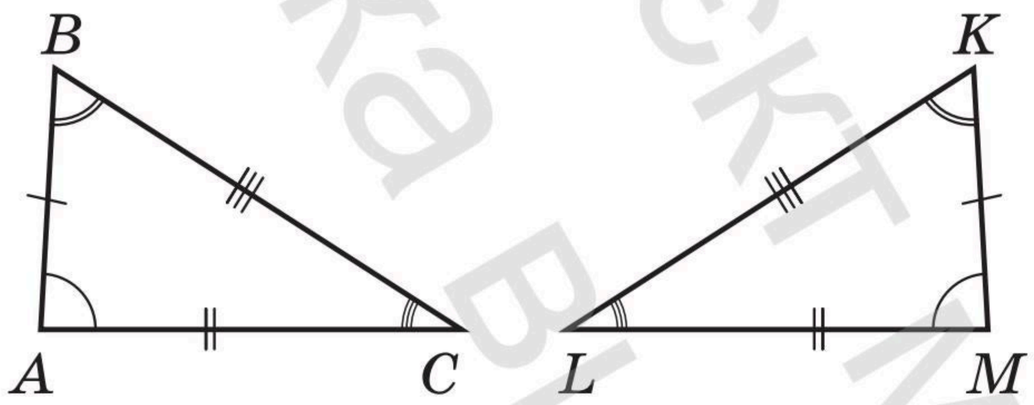


Рис. 3

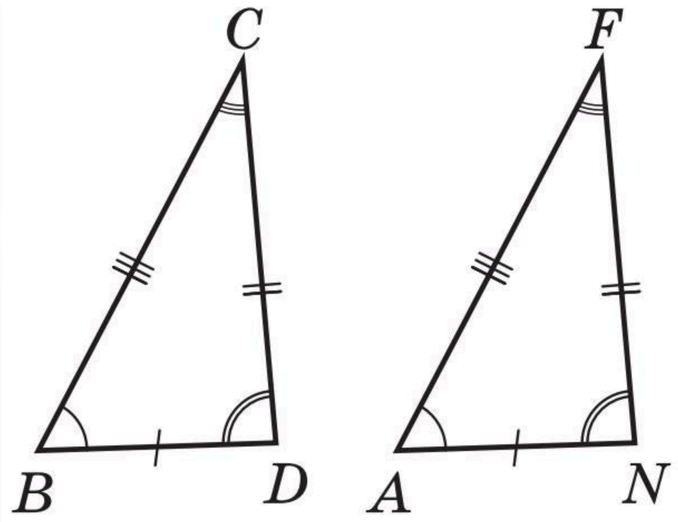


Рис. 4

5. Які з тверджень є правильними?
а) У гострокутного трикутника всі кути гострі.
б) У прямокутного трикутника всі кути прямі.
в) У тупокутного трикутника всі кути тупі.

6. Які з тверджень є правильними?
а) У гострокутного трикутника лише один із кутів гострий.
б) У прямокутного трикутника лише один із кутів прямий.
в) У тупокутного трикутника лише один із кутів тупий.

7. Розгляньте рис. 5.
У трикутнику KML відрізок LB — бісектриса, висота чи медіана?

8. Розгляньте рис. 6.
У трикутнику CDE відрізок DC — бісектриса, висота чи медіана?

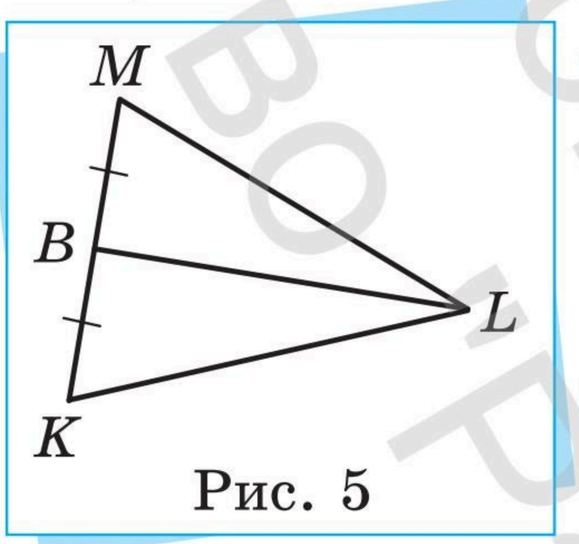


Рис. 5

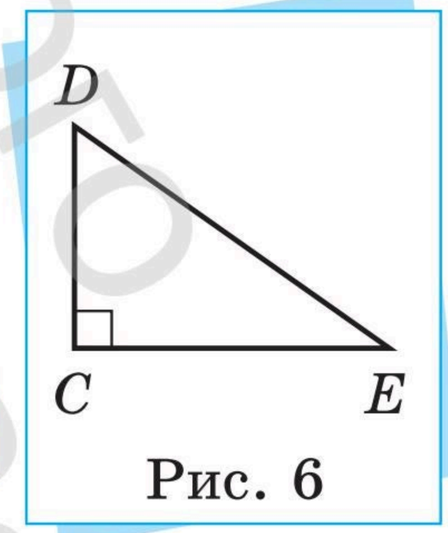


Рис. 6

9. Розгляньте рис. 7.
У трикутнику ABC відрізок BK — бісектриса, висота чи медіана?

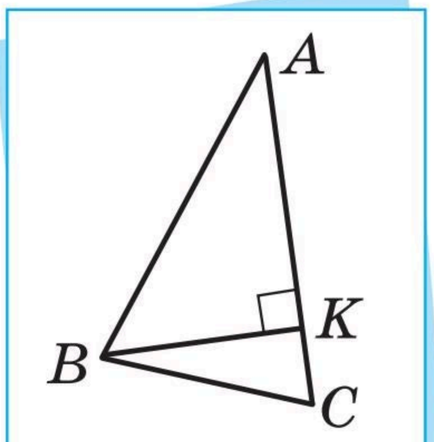


Рис. 7

10. Розгляньте рис. 8.
У трикутнику PRS відрізок RT — бісектриса, висота чи медіана?

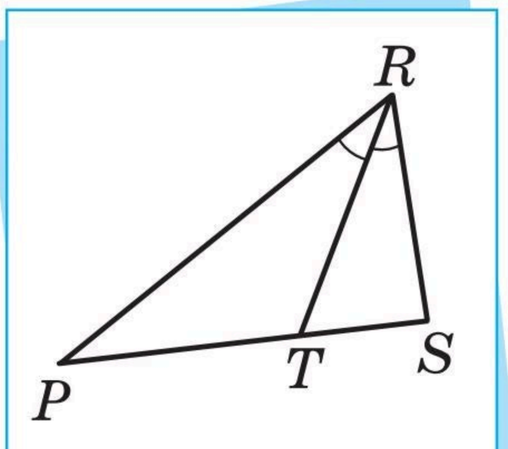


Рис. 8

Середній рівень

11. Побудуйте гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. У гострокутному трикутнику проведіть усі медіани. У прямокутному трикутнику проведіть усі бісектриси (за допомогою транспортира). У тупокутному трикутнику проведіть усі висоти.

12. Побудуйте гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. У гострокутному трикутнику проведіть усі висоти. У прямокутному трикутнику проведіть усі медіани. У тупокутному трикутнику проведіть усі бісектриси (за допомогою транспортира).

13. Побудуйте тупокутний трикутник ABC із тупим кутом B. З вершини B проведіть медіану, висоту та бісектрису трикутника ABC.

14. Побудуйте прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C. З вершини C проведіть медіану, висоту та бісектрису трикутника ABC.

15. На рис. 9 трикутники ABC і MNK рівні, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = 45°$, $MN = 5$ см. Визначте градусну міру кута K і довжину сторони AB.

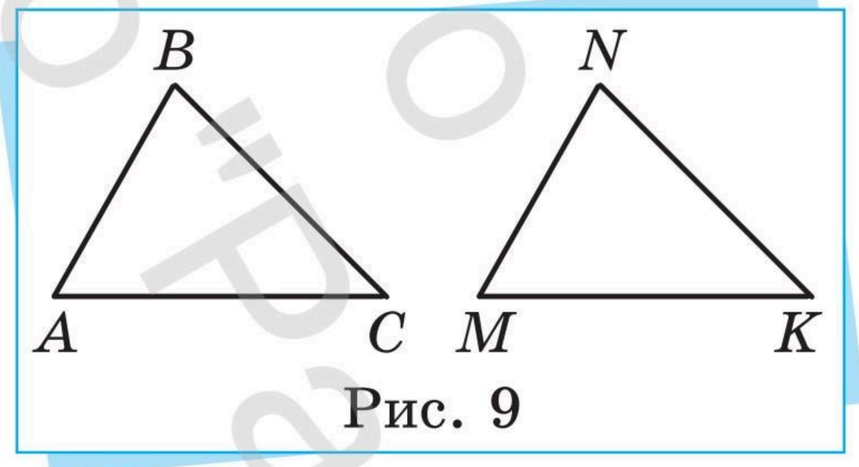


Рис. 9

16. На рис. 10 трикутники BDE і OPN рівні, $\angle B = \angle O$, $\angle N = \angle E$, $\angle P = 105°$, $DE = 12$ см. Визначте градусну міру кута D і довжину сторони PN.

17. Знайдіть периметр трикутника MNK (рис. 11), якщо довжина сторони MK дорівнює 13 см, а $MN = NK = 10$ см.

18. Знайдіть периметр трикутника ABD (рис. 12), якщо довжина сторони AB дорівнює 7 см, довжина сторони BD на 5 см більша за довжину AB, а довжина сторони AD на 2 см менша від довжини BD.

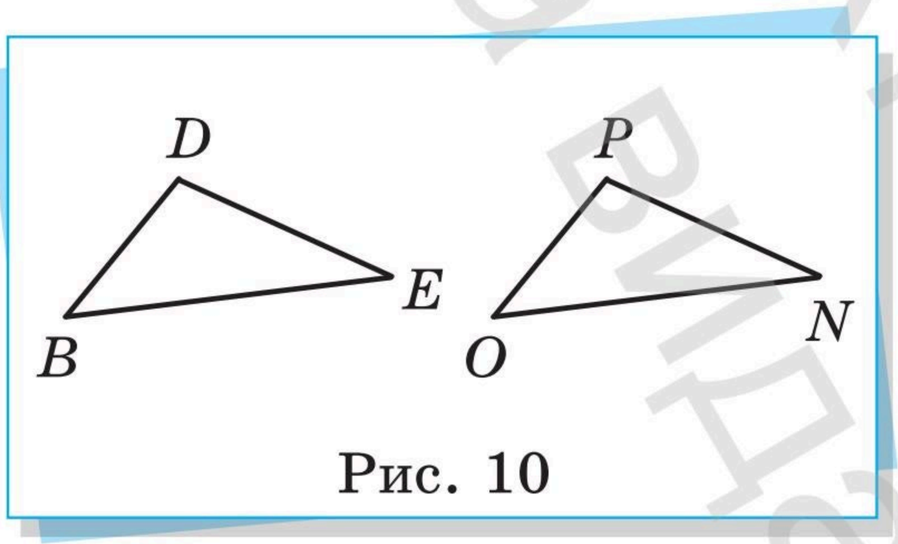


Рис. 10

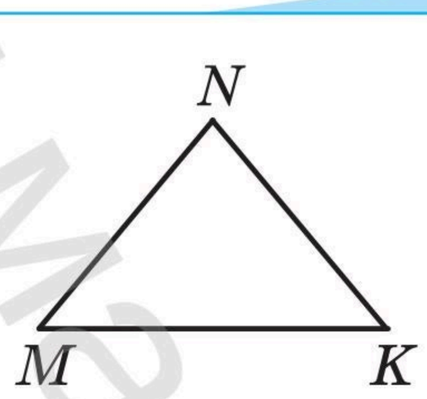


Рис. 11

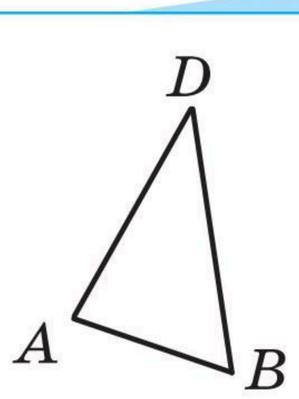


Рис. 12

19. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 24 см, а довжини всіх сторін рівні.

20. Знайдіть довжини сторін AB і BC трикутника ABC, якщо відомо, що периметр трикутника дорівнює 34 см, довжина сторони AC дорівнює 8 см, а $AB = BC$.

Достатній рівень

21. Довжина однієї зі сторін трикутника в 2 рази менша від довжини другої сторони та на 5 см менша від довжини третьої. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 33 см.

22. Довжина однієї зі сторін трикутника в 3 рази менша від довжини другої сторони та на 8 см менша від довжини третьої. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 48 см.

Електронний варіант підручника видавництва "Ранок"

23. Периметр трикутника дорівнює 60 см, а довжини його сторін відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть довжини сторін цього трикутника.

24. Периметр трикутника дорівнює 54 см, а довжини його сторін відносяться як 7 : 9 : 11. Знайдіть довжини сторін цього трикутника.

25. Сторони трикутника відносяться як 1 : 2 : 3, а сума довжин його найбільшої та найменшої сторін дорівнює 24 см. Обчисліть периметр трикутника.

26. Сторони трикутника відносяться як 2 : 5 : 7, а сума довжин його найбільшої та найменшої сторін дорівнює 27 см. Обчисліть периметр трикутника.

27. Задано трикутник ABC зі сторонами $AB = 10$ см, $BC = 14$ см, $AC = 18$ см. Знайдіть периметри трикутників, на які трикутник ABC розбиває медіана BM, довжина якої дорівнює 12 см.

28. Задано трикутник MNK зі сторонами $MN = 18$ см, $NK = 25$ см, $MK = 30$ см. Знайдіть периметри трикутників, на які трикутник ABC розбиває медіана MD, довжина якої дорівнює 21 см.

29. Сума довжин двох сторін трикутника дорівнює 22 см, а різниця довжин цих сторін становить 8 см. Знайдіть довжини всіх сторін трикутника, якщо його периметр — 35 см.

30. Сума довжин двох сторін трикутника дорівнює 32 см, а різниця довжин цих сторін становить 2 см. Знайдіть довжини всіх сторін трикутника, якщо його периметр — 42 см.

Високий рівень

31. Доведіть, що коли пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну зі сторін трикутника, то вона перетинає тільки одну з двох інших його сторін.

32. Доведіть, що з кожної вершини трикутника можна провести тільки одну висоту.

33. На рис. 13 $\triangle AOB = \triangle DOC$. Доведіть, що:

а) медіана OM трикутника AOD є також медіаною трикутника BOC;

б) бісектриса OK трикутника AOD є також бісектрисою трикутника BOC.

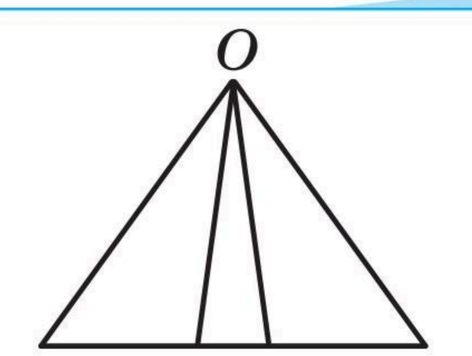


Рис. 13

34. У трикутнику ABC провели медіану AD. Знаючи, що периметри трикутників ABD і ACD рівні, доведіть, що $AC = AB$.

35. У трикутнику, периметр якого дорівнює 24 см, провели медіану. Периметри утворених менших трикутників дорівнюють 16 см і 18 см. Знайдіть довжину медіани.

36. У трикутнику провели медіану, довжина якої дорівнює 10 см. Периметри утворених менших трикутників дорівнюють 32 см і 36 см. Знайдіть периметр заданого трикутника.

37. Знайдіть периметр трикутника, якщо він більший за довжину першої сторони цього трикутника на 10 см, за довжину другої сторони — на 9 см, за довжину третьої сторони — на 7 см.

38. Знайдіть периметр трикутника ABC, у якому $AB + BC = 9$ см, $AB + AC = 11$ см, $AC + BC = 12$ см.



Цікавинки від дідуся Тараса

У побутових розмовах можна почути приблизно таке: «Це лише теорія! Насправді нічого не доведено!» При цьому зазвичай ідеться про якесь припущення, не підтверджене наукою.

Але ви вже знаєте, що не підтверджені наукою припущення, які здаються правдоподібними на основі окремих спостережень, називають *гіпотезами*. Тож у чому відмінність між гіпотезою і теорією?

Існує досить багато означень теорії. Найбільш вдалим, на мою думку, є таке: *теорія — це система наукових знань про якусь сукупність об'єктів, яка описує, пояснює та передбачає явища певної предметної галузі*. Теорією стає та гіпотеза, яка або логічно обґрунтована, або багаторазово підтверджена практичними спостереженнями й дозволяє прогнозувати наслідки дій чи зміни стану об'єкта спостережень.

До визначних теорій сучасної науки відносять: теорію Великого вибуху (астрономія); теорію еволюції (біологія); теорію груп, теорію ймовірностей, теорію графів, теорію чисел, теорію наближень (математика); теорію відносності (фізика), кінетичну теорію газів (хімія) тощо.

Більшість математичних теорій є аксіоматичними й побудованими за зразком геометрії Евкліда на основі неозначуваних понять, означуваних понять, аксіом і теорем.

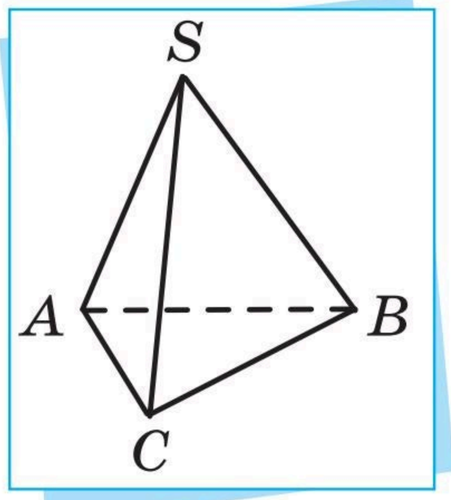


Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Ознайомтеся з якоюсь із визначних наукових теорій та зробіть невелике повідомлення на цю тему. Як ви вважаєте, чи з'являться в майбутньому нові наукові теорії? Чому ви так вважаєте?
2. Як ви вважаєте, чи є насправді теорією теорія змови? Відповідь обґрунтуйте.
3. Наведіть приклади сукупності положень, які в побуті називають «теоріями», хоча насправді вони такими не є. Як ви вважаєте, чому відбувається така підміна понять?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $2{,}7 \cdot 1\frac{2}{3} + 3{,}6 : 1\frac{4}{5}$.
2. Розкладіть вирази на множники.
   а) $4a^4b^2 - 6ab^4$; б) $27x^4 - 12y^6$.
3. На оптовій базі «Фруктова» 4 кг яблук і 3 кг груш коштують разом 320 грн, а 2 кг яблук і 5 кг груш коштують разом 370 грн. Знайдіть (у грн) вартість 1 кг яблук і вартість 1 кг груш на цій оптовій базі.
4. До твердження «Олекса одягнув на свято білу сорочку» наведіть супротивне твердження та приклади двох протилежних тверджень.
5. На рисунку зображено трикутну піраміду $SABC$, для якої $SA = SB = SC = x$ (см), а $AB = AC = BC = y$ (см). Знайдіть x і y, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, а периметр трикутника SAB — 42 см.



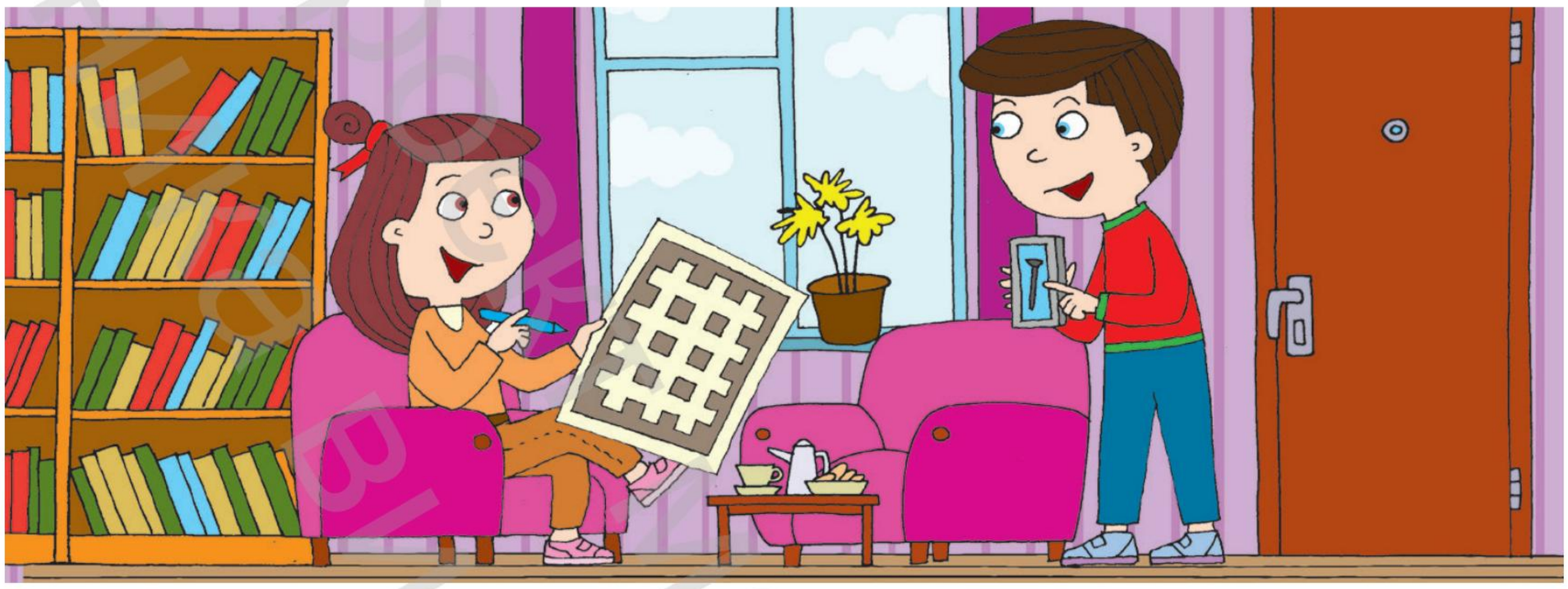
§ 20. Перша та друга ознаки рівності трикутників



Петрику, ось розгадую жартівливий кросворд і натрапила на таке завдання: «Брат гвіздка, який дружить із викруткою». Я вирішила, що як брат гвіздка, то значить пристрій для скріплення якихось частин: болт, гвинт, шуруп, дюбель тощо. Якщо дружить із викруткою, то не болт і не дюбель, бо болт закручують за допомогою гайкового ключа, а дюбель забивають молотком. Отже, гвинт або шуруп. Але не підходить, бо має бути аж 7 букв! Що б це могло бути?



Сказав би, що це «шурупчик» чи «гвинтяра», але в цих словах аж по 8 букв, а якщо серйозно, то я вважаю, що це *саморіз*. Є такий вид шурупа, який можна закрутити в дошку без використання дрилю. Ось, поглянь, який вигляд він має.





Цікаво, дякую! Люблю розгадувати кросворди, це досить весело — за відомими властивостями встановлювати, про що йдеться. До речі, в математиці ми теж дещо подібне вивчали, пам'ятаєш? Зовсім недавно нам розповідали про ознаку паралельності прямих: якщо $a \parallel c$ і $b \parallel c$, то $a \parallel b$. Щось дуже схоже на кросворд: тобі говорять певні властивості чогось, а ти встановлюєш, про який математичний факт іде мова. У даному випадку — про паралельність прямих.



Виходить, що ознака — це властивість «навпаки». Тобто, якщо говорять про властивість, то є якийсь об'єкт чи факт і ми наводимо твердження, що його певним чином характеризують. А коли говорять про ознаку, то все навпаки: є якісь характеристики, за якими ми маємо встановити, що це за об'єкт (як у випадку із саморізом) чи який факт має місце (як у випадку з паралельністю прямих). Хотілося б вивчити ще якісь ознаки, щоб зрозуміти це краще!



Якраз сьогодні, Петрику, ми вивчимо *дві ознаки рівності трикутників*. Ви вже знаєте, що два трикутники називають рівними, якщо в них рівні відповідні довжини сторін і градусні міри відповідних кутів. Наприклад, якщо $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Тобто повинні виконуватися шість рівностей: три для довжин сторін і три — для градусних мір кутів. Однак виявляється, що кількість рівностей може бути меншою, ніж шість, а трикутники все одно будуть рівними — решта рівностей будуть виконуватися «автоматично».



ТЕОРЕМА (перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами та кутом між ними).

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Нехай задано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 20.1). Покажемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

За аксіомою про існування трикутника, рівного даному, існує трикутник $A_1B_2C_2$, рівний трикутнику ABC, причому точка B_2 належить променю A_1B_1, а точка C_2 лежить у тій самій півплощині, що й точка C_1, відносно прямої, яка проходить через промінь A_1B_1. Тоді для трикутника $A_1B_2C_2$ виконуються, зокрема, такі рівності: $A_1B_2 = AB$, $A_1C_2 = AC$ і $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$.

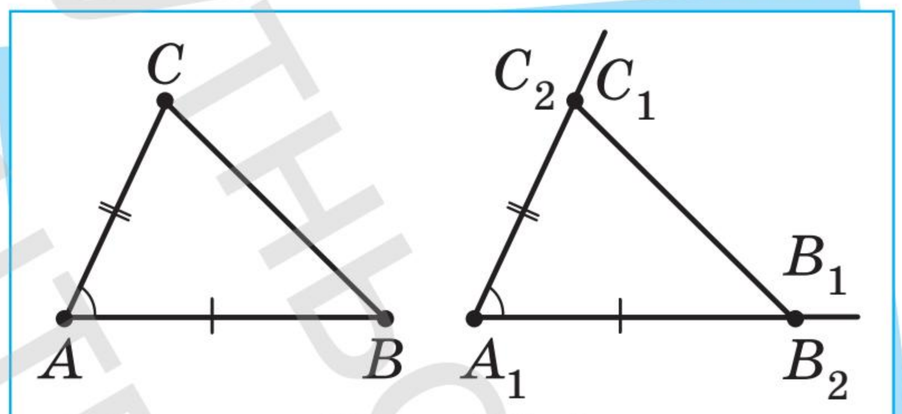


Рис. 20.1

Оскільки $A_1B_2 = AB$, а за умовою $AB = A_1B_1$, то $A_1B_2 = A_1B_1$. Але, за аксіомою про відкладання відрізка, на промені A_1B_1 можна відкласти лише один відрізок, довжина якого дорівнює довжині відрізка AB. Отже, точки B_2 і B_1 збігаються.

Оскільки $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$, а за умовою $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$. Але, за аксіомою про відкладання кутів, у дану півплощину відносно прямої, що проходить через промінь A_1B_1, можна відкласти лише один кут, який дорівнює куту BAC. Отже, промені A_1C_1 і A_1C_2 збігаються.

Ураховуючи єдиність відкладання відрізка на промені, одержуємо, що точки C_2 і C_1 теж збігаються. Отже, трикутник $A_1B_2C_2$, який рівний трикутнику ABC, збігається з трикутником $A_1B_1C_1$, тобто $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, що й потрібно було довести.



Рівності трикутників використовують для доведення інших властивостей геометричних фігур.

Нехай точка P є серединою відрізка KM, а пряма l — перпендикулярна до прямої KM і проходить через точку P (рис. 20.2). Тоді пряму l називають серединним перпендикуляром до відрізка KM. За теоремою про єдиність перпендикулярної прямої, що проходить через певну точку на даній прямій, до даного відрізка можна провести лише один серединний перпендикуляр.

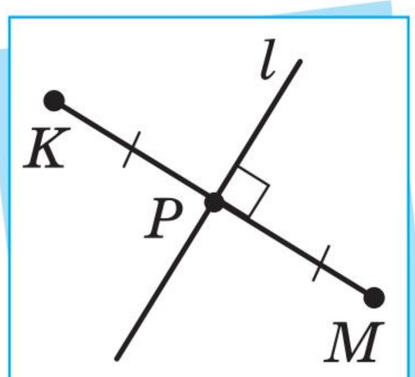


Рис. 20.2

Доведемо ще одну властивість серединного перпендикуляра.

ТЕОРЕМА (властивість серединного перпендикуляра).

Будь-яка точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

Нехай l — серединний перпендикуляр до відрізка KM, а P — середина відрізка KM (рис. 20.3). Розглянемо довільну точку $A \in l$ і сполучимо її з кінцями відрізка KM. Доведемо, що $AK = AM$.

Розглянемо трикутники AKP і AMP. Сторона AP є спільною для цих двох трикутників, за

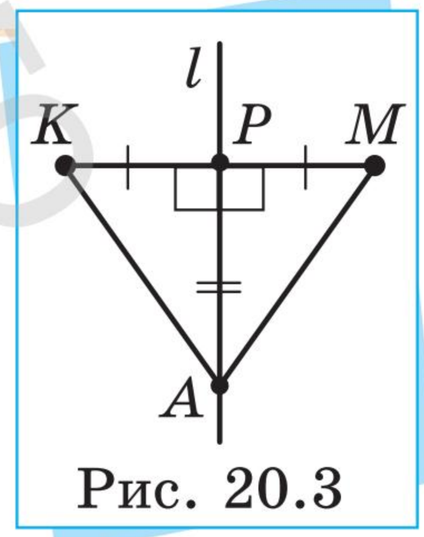


Рис. 20.3

умовою $KP = MP$, а $\angle APK = \angle APM = 90°$. Отже, за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AKP = \triangle AMP$. Тому $AK = AM$, що й потрібно було довести.



Сформулюємо ще одну ознаку рівності трикутників.



ТЕОРЕМА (друга ознака рівності трикутників — за стороною та двома прилеглими кутами).

Якщо сторона й два прилеглі кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні й двом прилеглим кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення другої ознаки рівності трикутників (воно багато в чому подібне до доведення першої ознаки): https://rnk.com.ua/106101





Наведемо приклад застосування другої ознаки рівності трикутників.

Задача. Відрізки AB і CD перетинаються в точці M; $AM = MB$, $CA \perp AB$ і $DB \perp AB$ (рис. 20.4). Доведіть, що $CM = MD$.

Розглянемо трикутники CAM і DBM. За умовою $AM = MB$ і $\angle CAM = \angle DBM = 90°$, а $\angle CMA = \angle DMB$ як вертикальні кути. Отже, $\triangle CAM = \triangle DMB$ за другою ознакою рівності трикутників. Тому $CM = MD$.

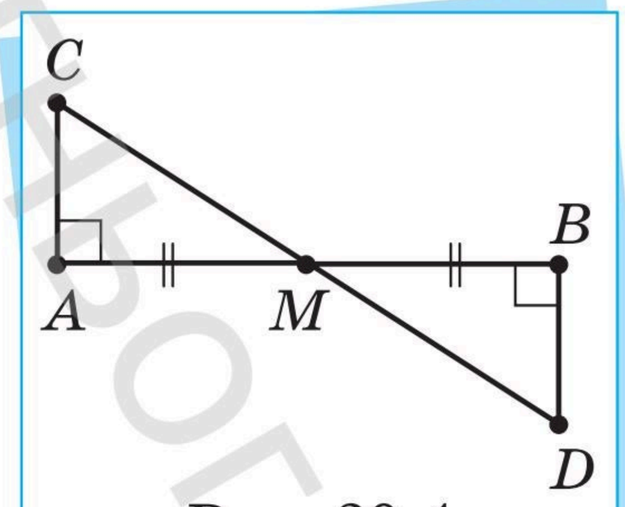


Рис. 20.4

Для доведення рівності довжин відрізків ми *розглянули їх як відповідні сторони двох трикутників*, а потім *довели рівність цих трикутників* за ознакою рівності, яка не використовує ці відрізки, а вже з рівності трикутників випливає рівність потрібних нам відрізків. Аналогічно доводять і рівність двох кутів.

Перевірте себе!

1. Сформулюйте першу та другу ознаки рівності трикутників.
2. Дайте означення серединного перпендикуляра до даного відрізка.
3. Сформулюйте теорему про властивість серединного перпендикуляра.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 наведено пари трикутників. Запишіть пари рівних трикутників.

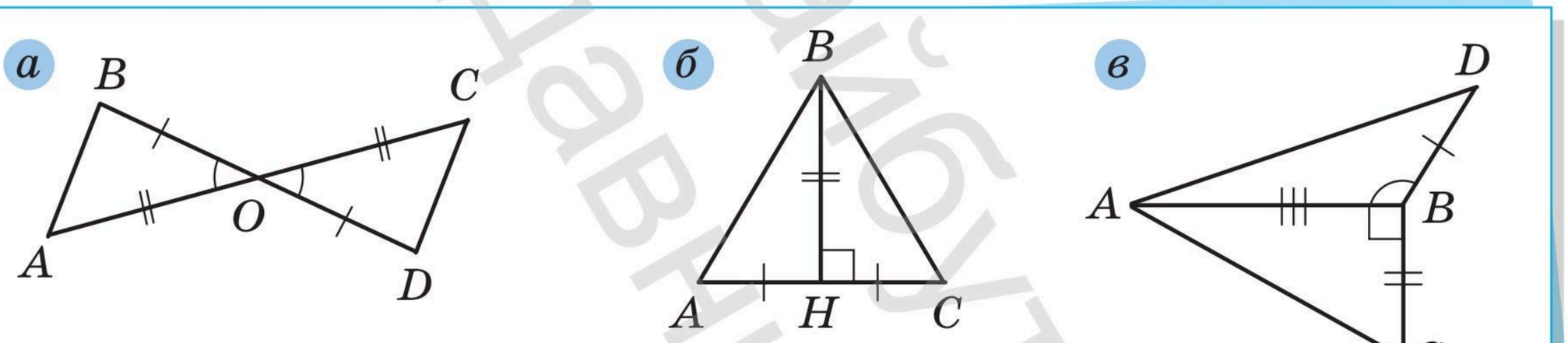


Рис. 1

2. На рис. 2 наведено пари трикутників. Запишіть пари рівних трикутників.

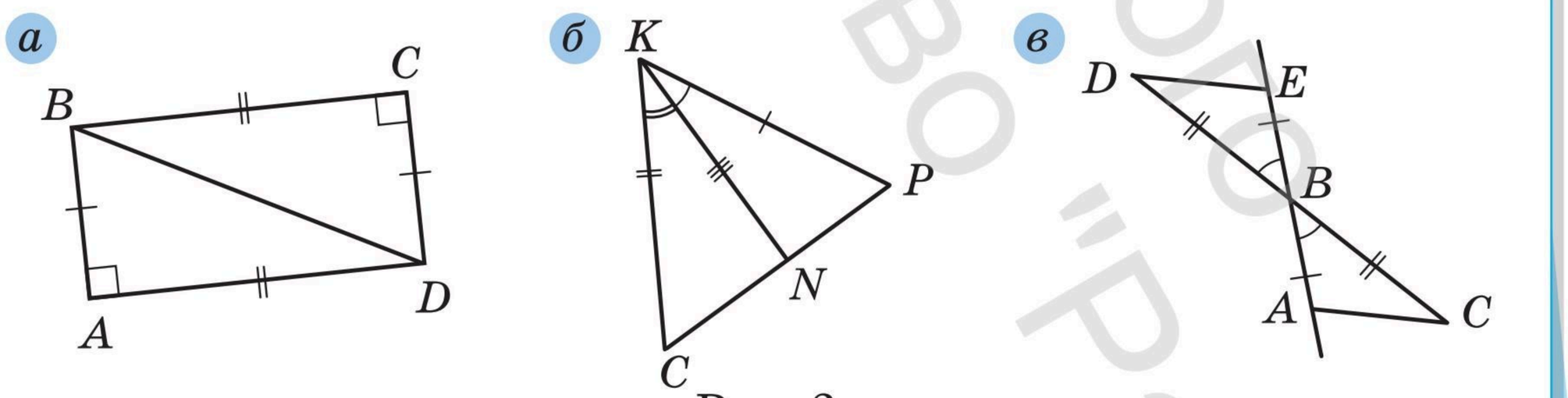


Рис. 2

3. На рис. 3 наведено пари трикутників. Запишіть пари рівних трикутників.

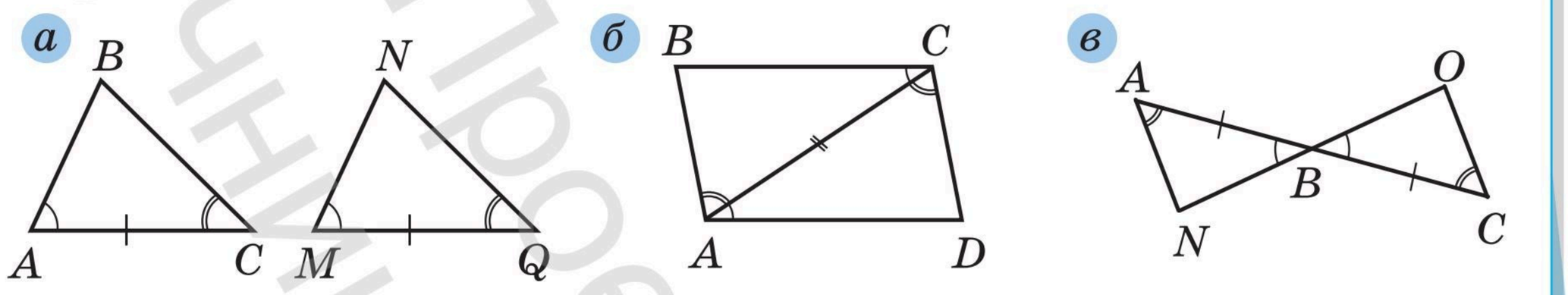


Рис. 3

4. На рис. 4 наведено пари трикутників. Запишіть пари рівних трикутників.

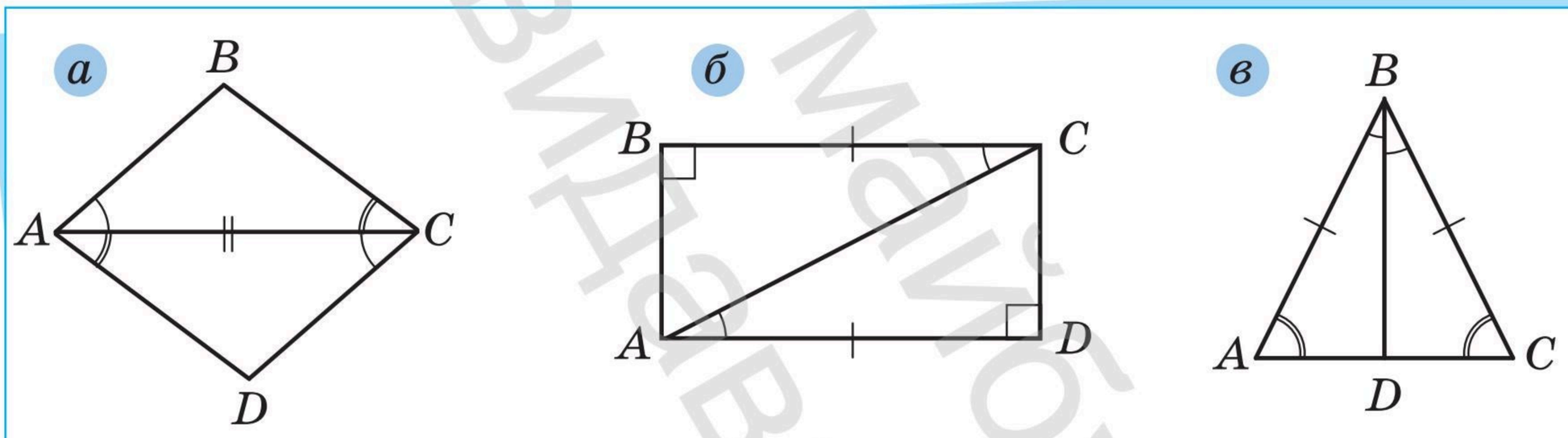


Рис. 4

5. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle MNK$ (рис. 5). Знайдіть довжину сторони NK і градусну міру кута A, якщо $BC = 2$ см, $\angle M = 50°$.

6. Відомо, що $\triangle FKP = \triangle DON$ (рис. 6). Знайдіть довжину сторони DN і градусну міру кута K, якщо $FP = 3$ см, $\angle O = 60°$.

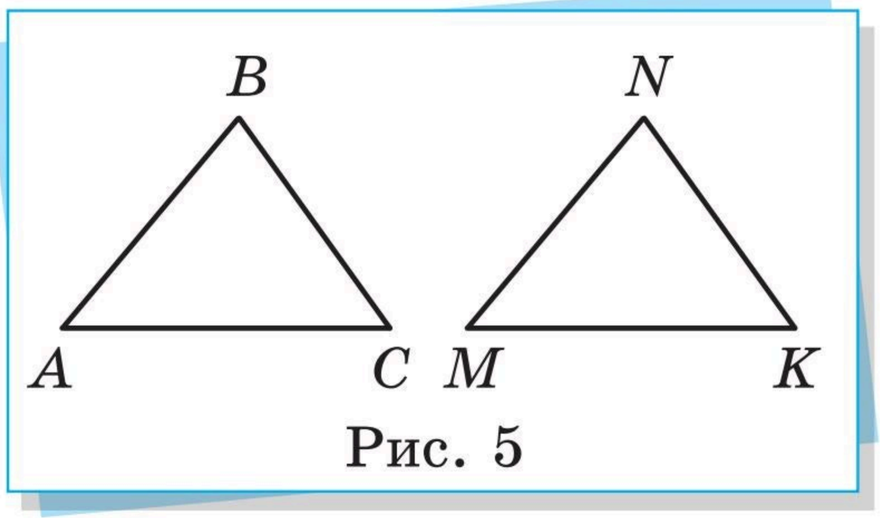


Рис. 5

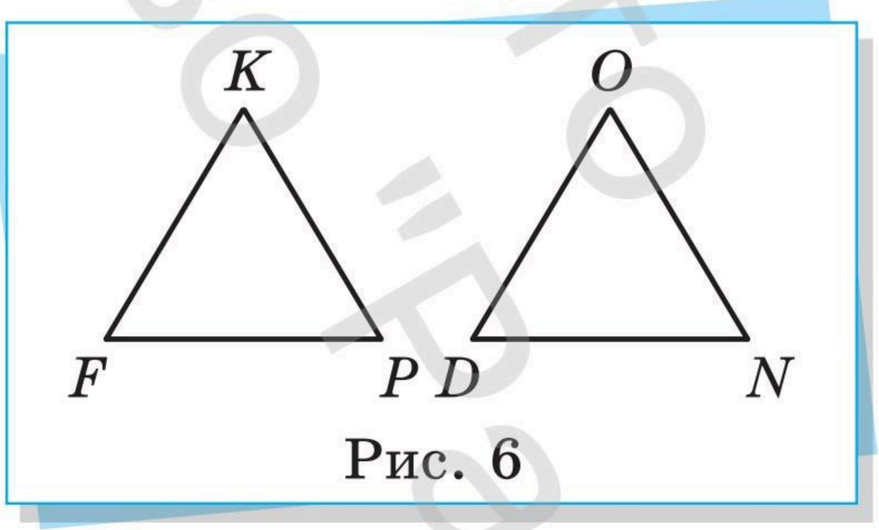


Рис. 6

7. Трикутники ABC і MLN рівні (рис. 7). Відомо, що $\angle C = \angle L = 100°$, $AB = MN$. У трикутника ABC $\angle A = 55°$, $\angle B = 25°$. Знайдіть градусну міра кута N.

8. Трикутники ABC і MLN рівні (рис. 8). Відомо, що $AC = 2$ см, $LN = 3$ см, $\angle C = 95°$, $\angle M = 35°$ і $AB = MN$. Знайдіть градусні міри кутів A та L і довжини сторін ML і CB.

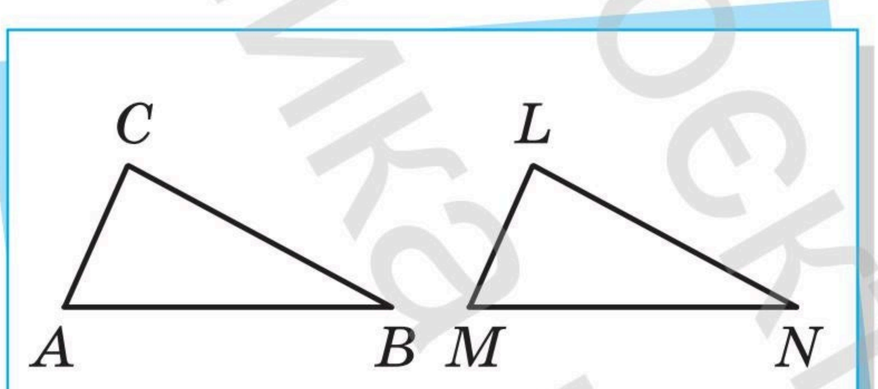


Рис. 7

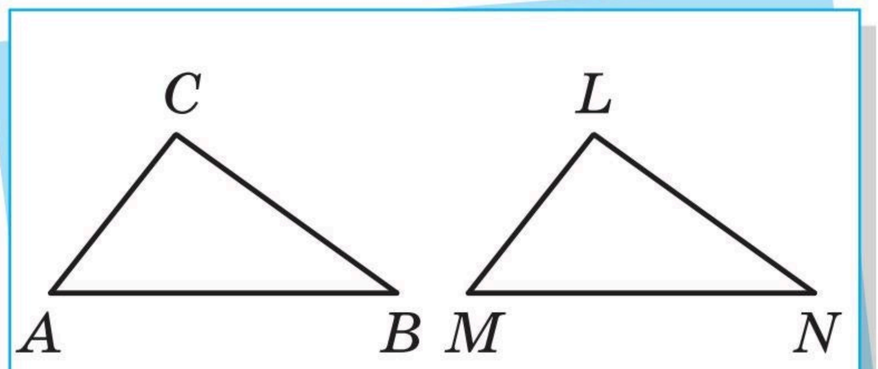


Рис. 8

9. Побудуйте в зошиті трикутник, рівний трикутнику на рис. 9.

10. Побудуйте в зошиті трикутник, рівний трикутнику на рис. 10.

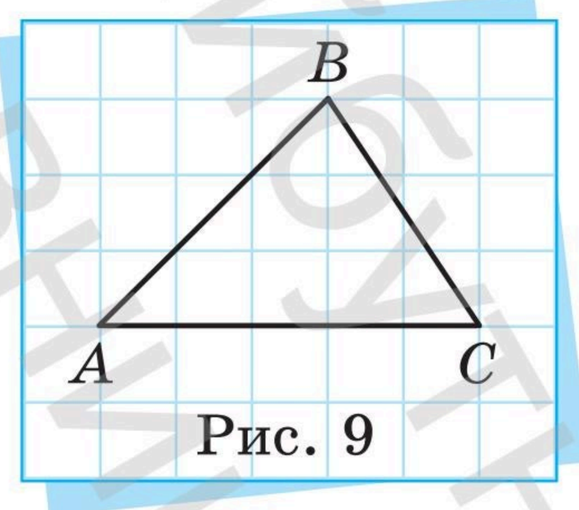


Рис. 9

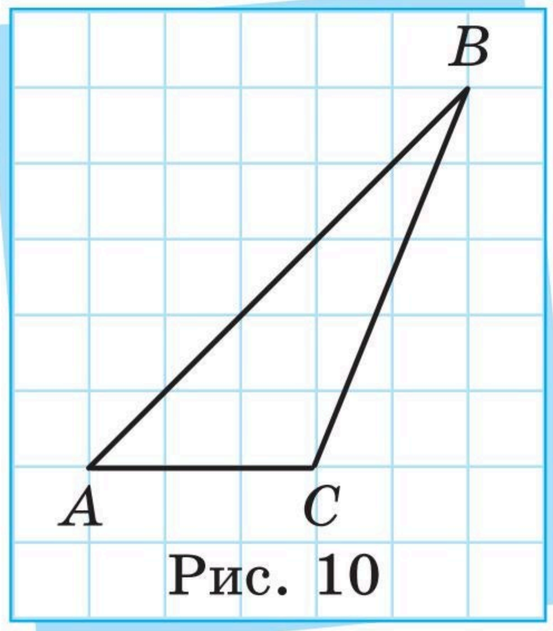


Рис. 10

Середній рівень

11. На рис. 11 зображено $\triangle ABC$ і $\triangle CDB$ такі, що $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$; сторона BD спільна. Чи є рівними трикутники ABD і CDB? Поясніть свою відповідь.

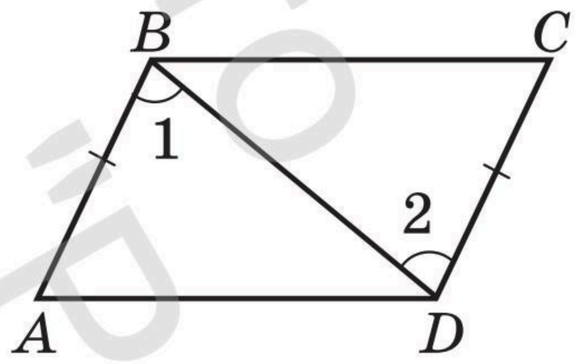


Рис. 11

12. На рис. 12 зображено $\triangle AOB$ і $\triangle DOC$ такі, що $AO = OD$, $BO = OC$. Чи є рівними трикутники AOB і DOC? Поясніть свою відповідь.

13. На рис. 13 $\angle OAD = \angle OBD$, $AO = OB$, а кути DOA і DOB суміжні та рівні. Чи є рівними трикутники AOD і DOB? Поясніть свою відповідь.

14. На рис. 14 зображено $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$ такі, що сторона AC — спільна, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Чи є рівними $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$? Поясніть свою відповідь.

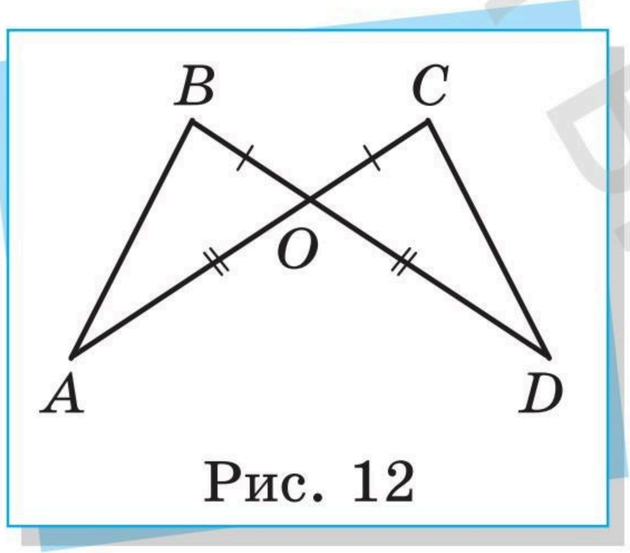


Рис. 12

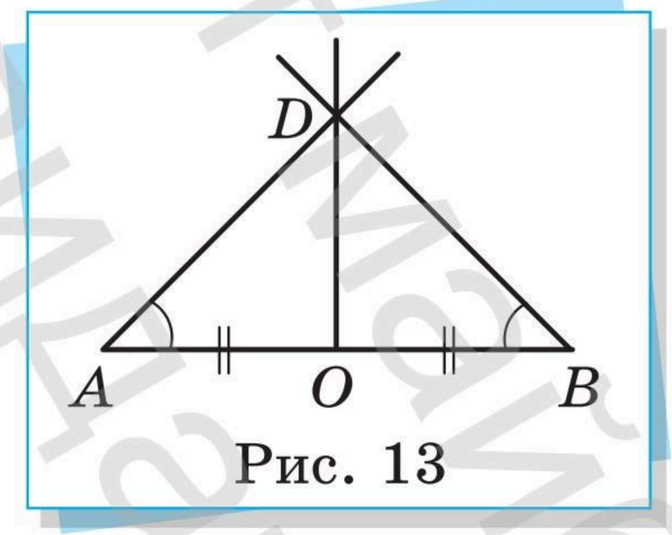


Рис. 13

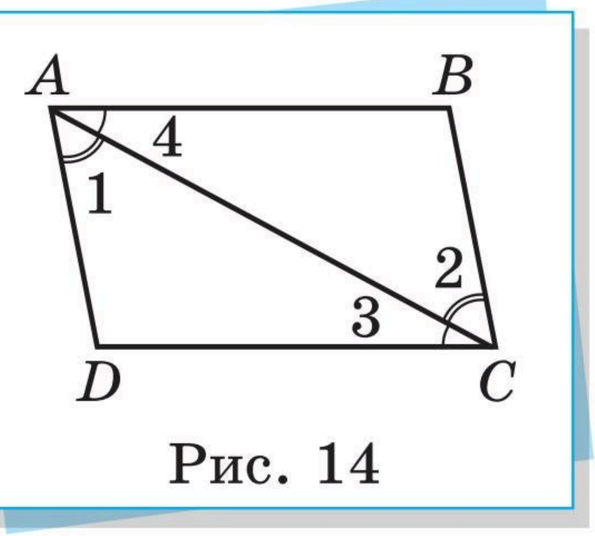


Рис. 14

15. На рис. 15 зображено $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ такі, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Чи є рівними $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$? Поясніть свою відповідь.

16. На рис. 16 зображено $\triangle ABC$ і $\triangle MNP$ такі, що $BC = MP$, $\angle A = \angle M = 90°$, $\angle B = \angle N$. Чи є рівними $\triangle ABC$ і $\triangle MNP$? Поясніть свою відповідь.

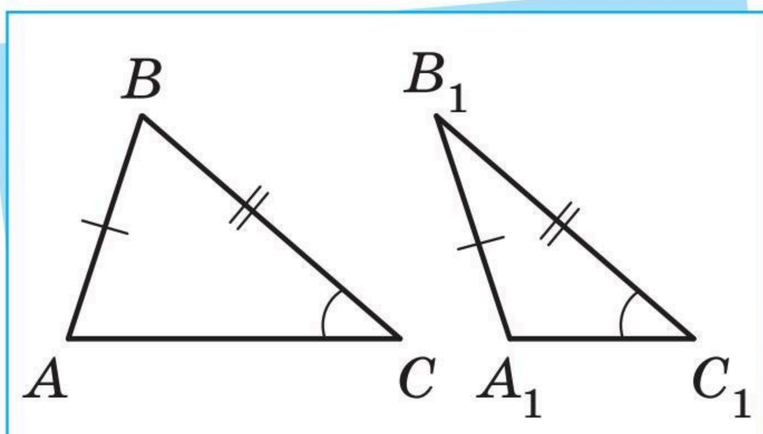


Рис. 15

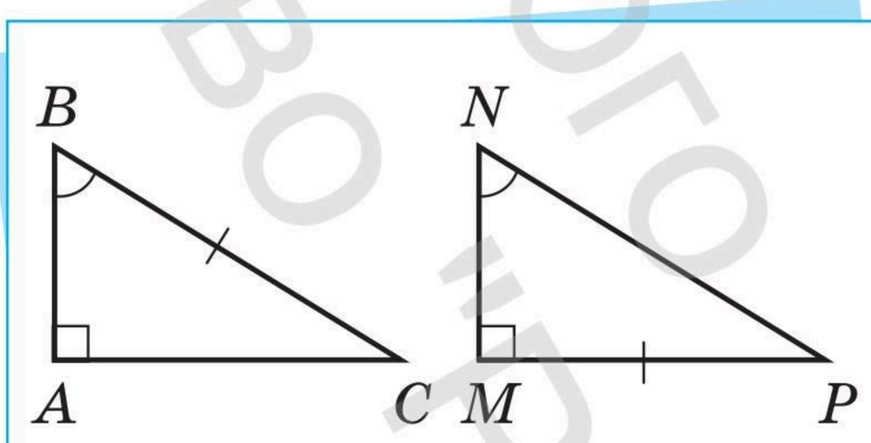


Рис. 16

17. Відрізок AM перетинає відрізок PQ у точці O так, що точка O є серединою і відрізка AM, і відрізка PQ (рис. 17). Знайдіть довжину відрізка AQ, якщо довжина відрізка $PM = 4$ см.

18. Промінь BD є бісектрисою $\angle B$ (рис. 18). Із точки D до сторін кута проведено перпендикуляри DA і DC. Знайдіть довжину перпендикуляра AD, якщо перпендикуляр $DC = 2$ см.

19. У трикутника ABC $AB = BC$ (рис. 19). Бісектриса кута B перетинає сторону AC у точці D. Знайдіть довжину сторони AC, якщо $AD = 4$ см.

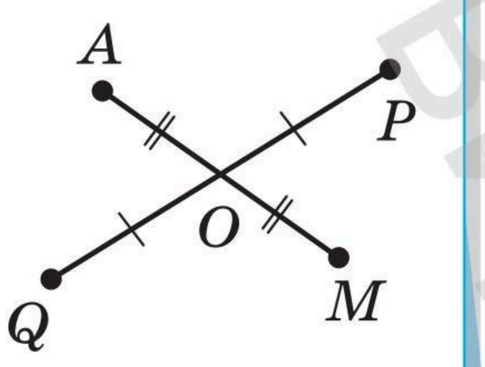


Рис. 17

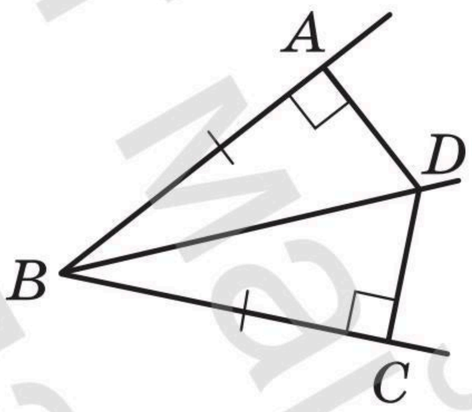


Рис. 18

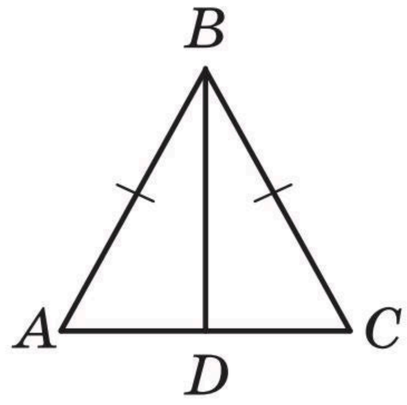


Рис. 19

20. На рис. 20 зображено $\triangle ABC$ і $\triangle CDE$ такі, що $AB = DE$, $AC = CE$, $\angle 1 = \angle 2$. Знайдіть довжину сторони BC, якщо $CD = 3$ см.

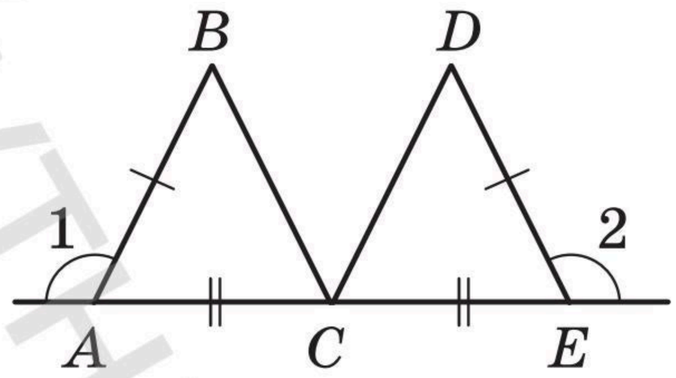


Рис. 20

Достатній рівень

21. На рис. 21 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, $DC = 7$ см. Знайдіть довжину сторони BD.

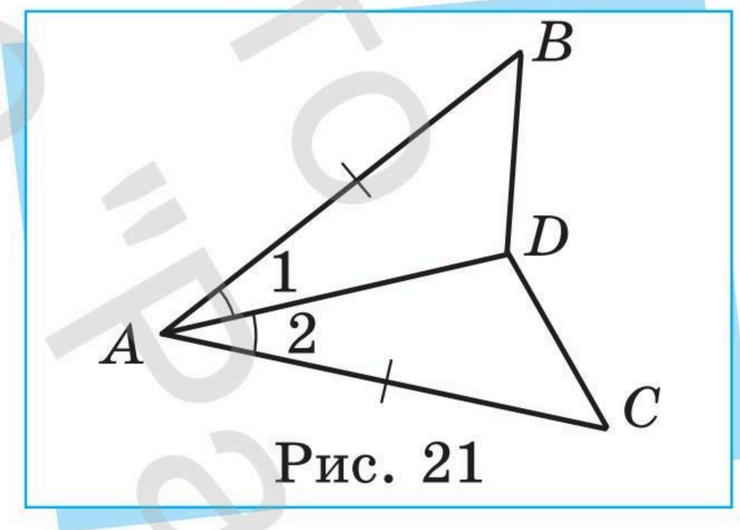


Рис. 21

22. На рис. 22 $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $DC = 6$ см. Знайдіть довжину AB.

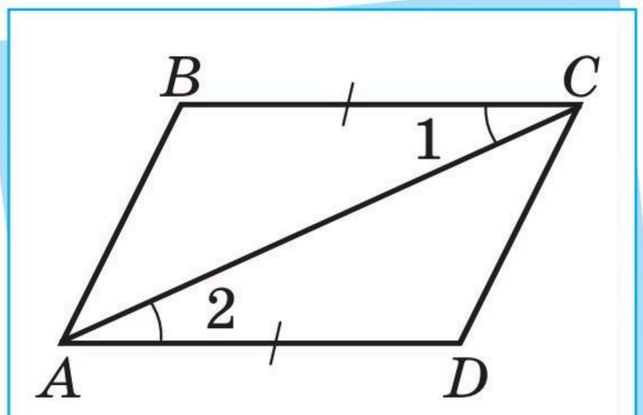


Рис. 22

23. Знайдіть градусну міру кута B (рис. 23), якщо $AC = DB$, $\angle CAD = \angle BDA$, $\angle C = 85°$.

24. Знайдіть градусну міру кута C (рис. 23), якщо $AB = CD$, $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle B = 87°$.

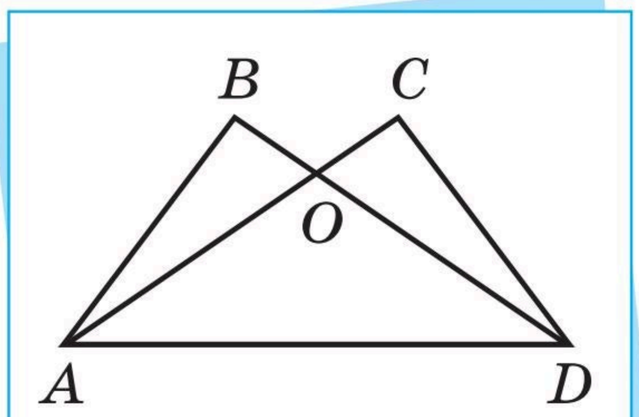


Рис. 23

25. Зобразіть на координатній площині точки $A(-3;5)$, $B(-3;-3)$, $C(-3;1)$, $D(7;1)$ і трикутники ACD і BCD. Доведіть, що ці трикутники рівні.

26. Зобразіть на координатній площині точки $A(-2;-1)$, $B(6;-1)$, $C(2;-1)$, $D(2;5)$ і трикутники ACD і BCD. Доведіть, що ці трикутники рівні.

27. Знайдіть довжини відрізків OD і AB (рис. 24), якщо $AO = OC$, $\angle OAB = \angle OCD$, $BO = 7$ см, $CD = 10$ см.

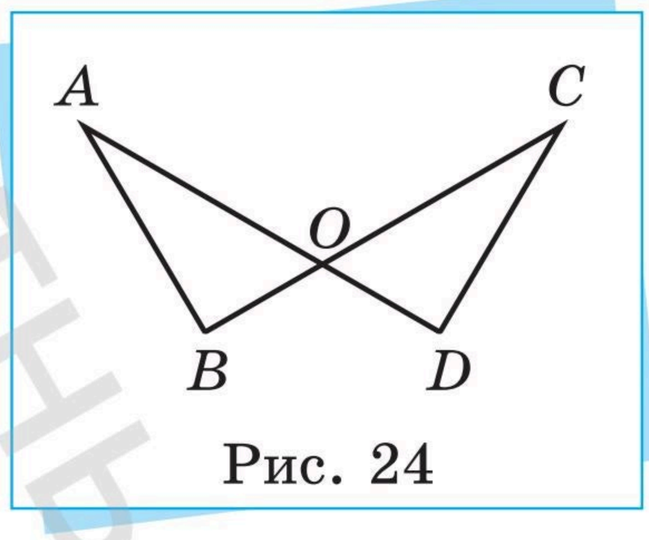


Рис. 24

28. Знайдіть довжини відрізків CD і AO (рис. 24), якщо $OB = OD$, $\angle OBA = \angle ODC$, $AB = 5$ см, $OC = 6$ см.

29. Знайдіть градусну міру кута B (рис. 25), якщо $AO = OD$, $\angle OAB = \angle ODC$, $\angle C = 92°$.

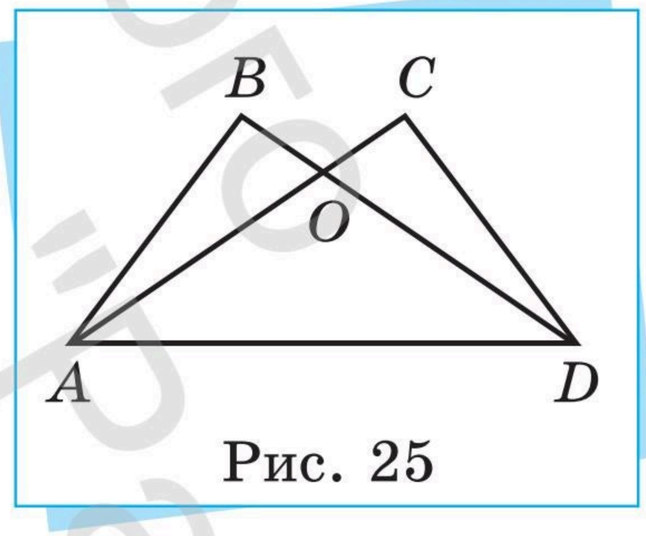


Рис. 25

30. Знайдіть градусну міру кута C (рис. 25), якщо $BO = OC$, $\angle ABO = \angle DCO$, $\angle B = 88°$.

Високий рівень

31. Знайдіть довжину BO на рис. 26, якщо $CO = OD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AO = 7$ см.

32. Знайдіть $\angle A$ на рис. 26, якщо $CO = OD$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle B = 32°$.

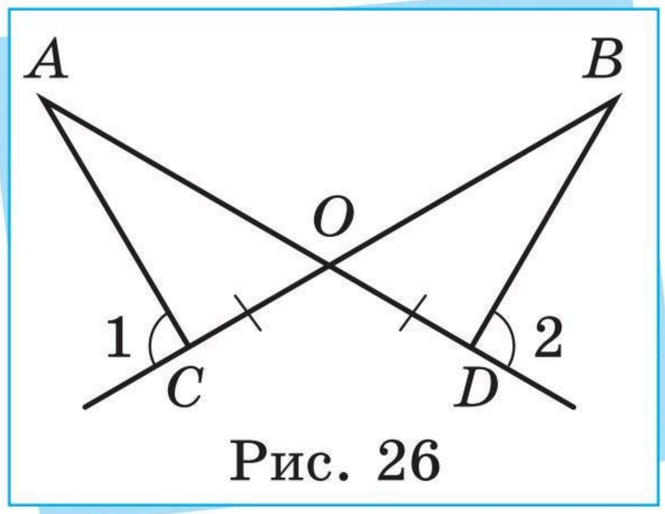


Рис. 26

33. Доведіть, що на рис. 27 $\triangle COP = \triangle COR$, якщо $OP = OR$ і $\angle POQ = \angle ROQ$.

34. Доведіть, що на рис. 27 $\triangle CAP = \triangle CBR$, якщо $AC = BC$ і $AR = BP$.

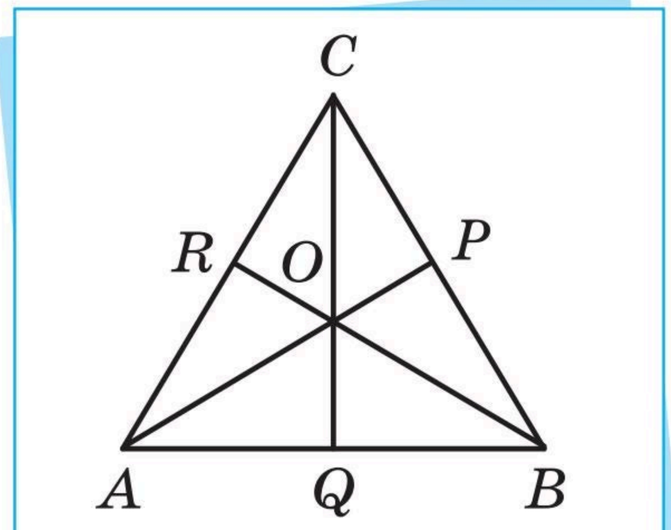


Рис. 27

35. Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.

36. Доведіть, що в рівних трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, рівні.

37. Через точку N, яка належить бісектрисі кута з вершиною в точці O, провели пряму, перпендикулярну до цієї бісектриси. Проведена пряма перетинає сторони даного кута в точках M і K. Доведіть, що $OM = OK$.

38. На сторонах кута з вершиною в точці O відклали рівні відрізки OA і OB. Довільну точку M, що належить бісектрисі даного кута, з'єднали з точками A і B. Доведіть, що $AM = BM$.

39. Точки A, B, C, D лежать на одній прямій (рис. 28). Доведіть, що коли трикутники ABE і ABF рівні, то трикутники CDE і CDF також рівні.

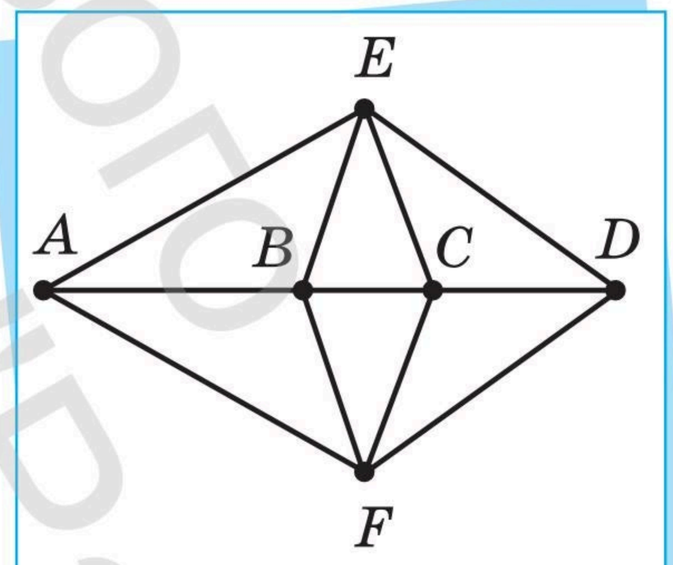


Рис. 28

40. На рис. 29 $OA = OB$ і $OC = OD$. Доведіть, що $OF = OE$.

41. На рис. 30 $PQ = RQ$ і $\angle PQC = \angle RQC$. Доведіть, що $\angle CPR = \angle CRP$.

42. На рис. 30 $CP = CR$ і $\angle PCQ = \angle RCQ$. Доведіть, що $CQ \perp RP$.

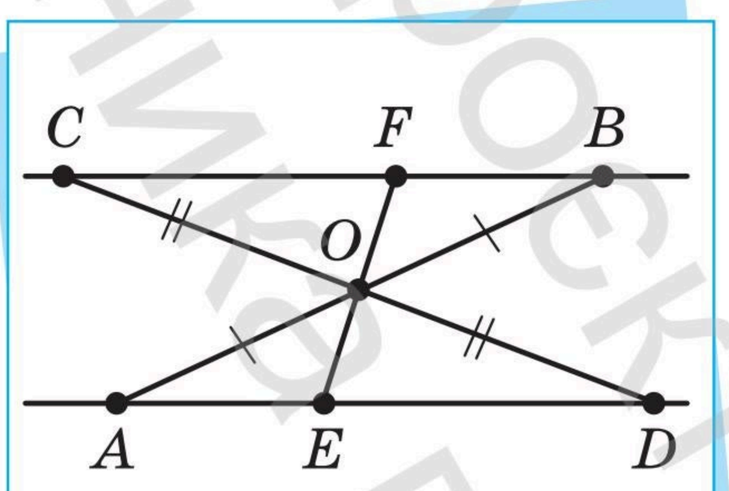


Рис. 29

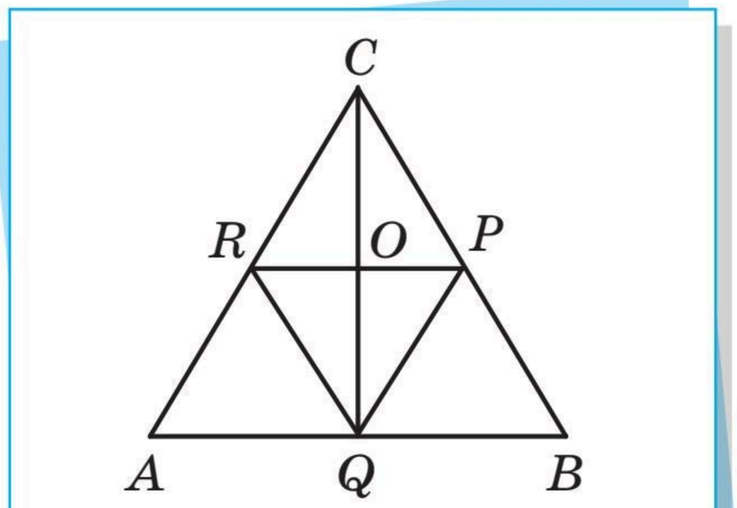


Рис. 30



Цікавинки від дідуся Тараса

В українській мові слова «означення» й «ознака» схожі за звучанням, тому, вивчаючи курс математики, їх інколи плутають. Нагадаємо, що означення — це фактично *домовленість* називати певний об'єкт, явище, процес тощо тим чи іншим словом (терміном). Означення є роз'ясненням змісту поняття через його суттєві особливості, які відрізняють його від інших понять. Очевидно, що *означення не потребує доведення*.

Натомість ознакою в математиці *називають особливий вид твердження, яке* обов'язково *потребує доведення*. Найчастіше за допомогою ознаки встановлюють, чи має той чи інший математичний об'єкт певну властивість.

Наприклад, ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників. Ці твердження дозволяють визначити, чи є рівними два трикутники за певних умов. Ознаки паралельності прямих дозволяють визначити, чи є дві прямі паралельними, якщо відомі певні факти про ці прямі. У курсі математики ви вивчите ще багато різних ознак.

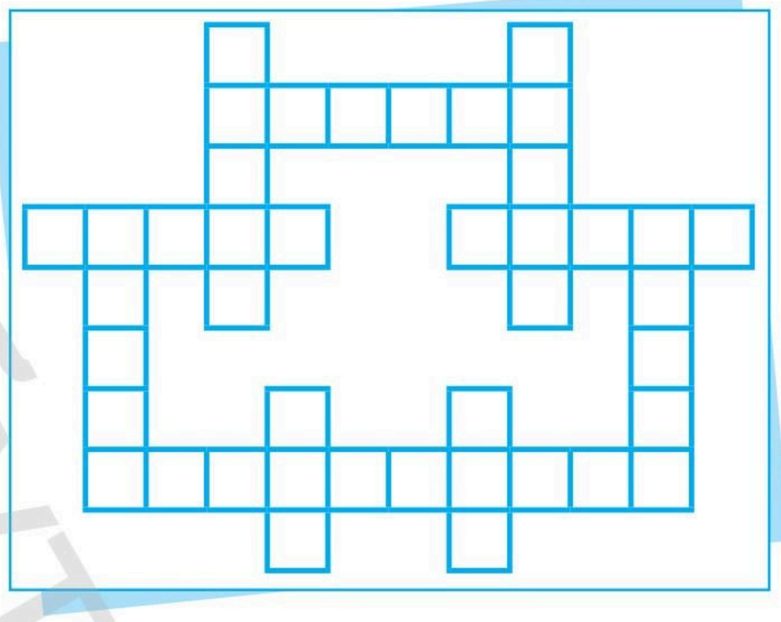
Означеннями та ознаками користуються й у побуті. Наприклад, за означенням саморіз — це кріпильний виріб у вигляді стрижня з головкою та спеціальною зовнішньою гвинтовою нарізкою. Натомість твердження «Назва предмета, який має 7 букв у записі українською мовою і є «братом» гвіздка, що дружить із викруткою» також стосується саморіза, але його потрібно певним чином обґрунтовувати. Це твердження можна вважати ознакою саморіза, і його довів Петрик на прохання Тетянки.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Наведіть приклади означень і ознак окремих побутових предметів навколо вас. У чому відмінність між наведеними ознаками й означеннями?

2. Складіть невеликий кросворд за наведеною сіткою. Для опису слів, що його мають заповнити, використайте як означення, так і ознаки.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз.

   а) $(1-b)^2 \cdot b + 2b(b-1)$; б) $c(c-4)(c+4) - c^2(c+2)$.

2. Не виконуючи побудов, з'ясуйте, чи мають спільні точки графіки рівнянь. Якщо так, знайдіть координати цих точок.

   а) $x+y+3=0$ і $2x-y-6=0$; б) $x-2y=0$ і $2x-4y+3=0$.

Підручник Інтерактивний

3. Торт «Смачний» коштує 250 грн, а торт «Елітний» — 350 грн. Пані Одарка розрахувала, що в неї саме стільки грошей, що без решти вистачить для купівлі як кількох тортів «Смачний», так і кількох тортів «Елітний». Яка найменша сума грошей (у грн) може бути в пані Одарки?

4. Як за допомогою посудин місткістю 4 літри й 7 літрів, крану з водою та раковини для зливу води набрати в 10-літрову посудину 6 літрів води?

5. Пан Олесь міркує: «Кожен прямокутний трикутник має прямий кут. Кожен прямокутний трикутник є трикутником. Отже, кожен трикутник має прямий кут». Чи правильно міркує пан Олесь? Відповідь обґрунтуйте.

§ 21. Рівнобічний і рівносторонній трикутники. Третя ознака рівності трикутників

Рівнобічний трикутник і його властивості



Послухай, Тетянко, цікаву річ нещодавно виявив. Коли ми були в туристичному поході, я взяв із собою крокомір. І за його допомогою виявив, що довжина схилу, яким ми піднімалися на гору, була приблизно такою самою, як довжина схилу, яким ми спускалися. То чи можна із цього зробити висновок, що крутість обох схилів приблизно однакова?

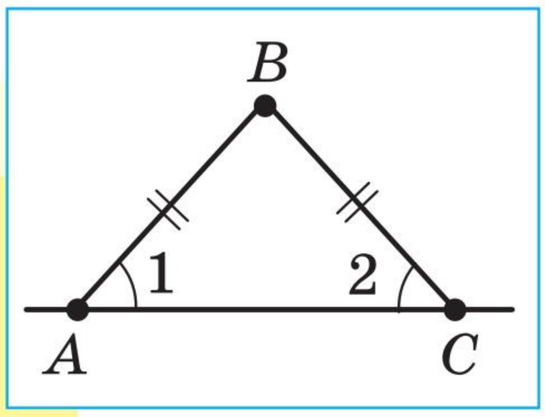
Крокомір — механічний, електронно-механічний або електронний пристрій для підрахунку кількості зроблених кроків під час ходи.





Цікаво! А спробуємо зробити схематичний рисунок. Нехай точка A — початок маршруту, B — вершина гори, C — кінець маршруту. Довжини схилів AB і BC однакові, а крутість цих схилів позначають кути 1 і 2. За рисунком здається, що кути 1 і 2 рівні, тобто крутість спуску та крутість підйому приблизно однакові. Але чи це дійсно так, краще запитати в учителів.







Обов'язково розповімо, Тетянко! Трикутники на кшталт трикутника ABC зустрічаються в побуті досить часто і мають спеціальну назву.

Трикутник, довжини двох сторін якого однакові, називають рівнобічним або рівнобедреним. При цьому дві рівні сторони трикутника називають бічними сторонами, а третю — основою.

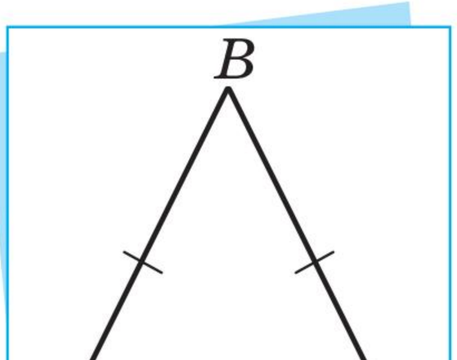


Рис. 21.1

Наприклад, якщо в трикутнику ABC $AB = BC$, то цей трикутник — рівнобічний (рис. 21.1). Сторони AB і BC — бічні сторони трикутника, сторона AC — основа трикутника. Точку B при цьому називають вершиною рівнобічного трикутника, а кут B — кутом при вершині. Кути A і C називають кутами при основі рівнобічного трикутника.

Якщо всі три сторони трикутника мають однакову довжину, то такий трикутник називають рівностороннім.

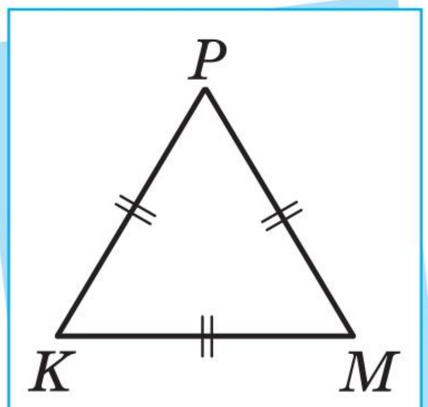


Рис. 21.2

На рис. 21.2 зображено трикутник KMP, у якого $KM = MP = PK$. Трикутник KMP — рівносторонній.

Кожен рівносторонній трикутник є рівнобічним, але не навпаки.

Властивості рівнобічного трикутника сформулюємо у вигляді теореми.

ТЕОРЕМА (властивості рівнобічного трикутника).

У рівнобічного трикутника:

- **кути при основі рівні** *(властивість кутів при основі)*;
- **бісектриса кута при вершині є медіаною та висотою** *(властивість бісектриси кута при вершині)*.

Справді, нехай трикутник ABC є рівнобічним, причому $AB = BC$ (рис. 21.3). Проведемо з його вершини B бісектрису BM.

Розглянемо трикутники ABM і CBM. Сторона BM у них спільна, за умовою $AB = BC$, а $\angle ABM = \angle CBM$, бо BM — бісектриса. Отже, $\triangle ABM = \triangle CBM$ за двома сторонами й кутом між ними.

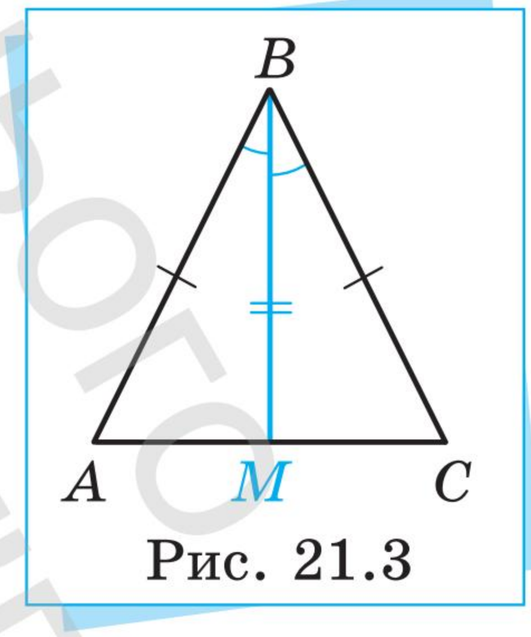


Рис. 21.3

Тоді $AM = CM$, $\angle BAM = \angle BCM$ і $\angle AMB = \angle CMB$.

Перша рівність означає, що відрізок BM є медіаною, а друга означає, що в рівнобічного трикутника кути при основі рівні.

Оскільки кути AMB і CMB є суміжними, то $\angle AMB + \angle CMB = 180°$. Водночас ці кути рівні, а отже, $\angle AMB = \angle CMB = 90°$, тобто відрізок BM є висотою. Теорему доведено.



Із властивості кутів при основі рівнобічного трикутника випливає, що в поході туристки й туристи рухалися й угору, й униз по схилах приблизно однакової крутості.



Наслідки із властивостей рівнобічного трикутника

- У трикутнику навпроти рівних сторін лежать рівні кути.
- У рівносторонньому трикутнику всі його кути рівні між собою.
- У рівнобічному трикутнику медіана, бісектриса та висота, проведені з його вершини, збігаються.
- У рівносторонньому трикутнику медіана, бісектриса та висота, проведені з будь-якої його вершини, збігаються.



Доведення сформульованих вище тверджень: https://rnk.com.ua/106102





Трикутник, у якого довжини всіх сторін різні, називають різностороннім.

Таким чином, нагадаємо, що всі трикутники за градусними мірами їх кутів поділяють на *гострокутні, прямокутні й тупокутні*, а за довжинами сторін — на *рівнобічні (зокрема, рівносторонні) та різносторонні*.

Підручник Електронний варіант

Ознаки рівнобічного трикутника



Сформулюємо твердження, які дозволяють розпізнати рівнобічний трикутник, тобто ознаки рівнобічного трикутника.

ТЕОРЕМА (ознаки рівнобічного трикутника).

Трикутник є рівнобічним, якщо в ньому:

1) **медіана й висота, проведені з однієї вершини, збігаються;**
2) **бісектриса й висота, проведені з однієї вершини, збігаються;**
3) **бісектриса й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються;**
4) **два кути рівні.**

Наведена теорема містить чотири різні твердження. Нижче доведемо твердження 1 і 4.

Доведення тверджень 2 і 3:
https://rnk.com.ua/106103.





Доведення твердження 1. Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BH є одночасно і медіаною, і висотою (рис. 21.4). Це означає, що $AH = CH$ і $\angle AHB = \angle CHB = 90°$. Тоді трикутники AHB і CHB рівні за двома сторонами та кутом між ними, бо відрізок BH є їх спільною стороною. Отже, $AB = BC$ і трикутник ABC — рівнобічний.

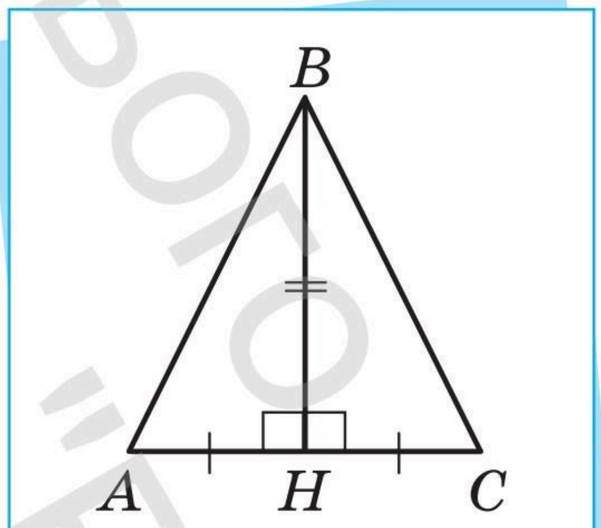


Рис. 21.4

Доведення твердження 4. Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle A = \angle C$. Покажемо, що $AB = BC$.

Припустимо, що трикутник ABC — різносторонній (див. рис. 21.5). Проведемо до сторони AC серединний перпендикуляр l (P — середина сторони AC. Якщо трикутник ABC — різносторонній, то l перетне одну зі сторін — AB або BC — у її внутрішній точці. Нехай, не порушуючи загальності, пряма l перетинає сторону BC у точці M. (Випадок, коли пряма l перетинає сторону AB, розглядається аналогічно.)

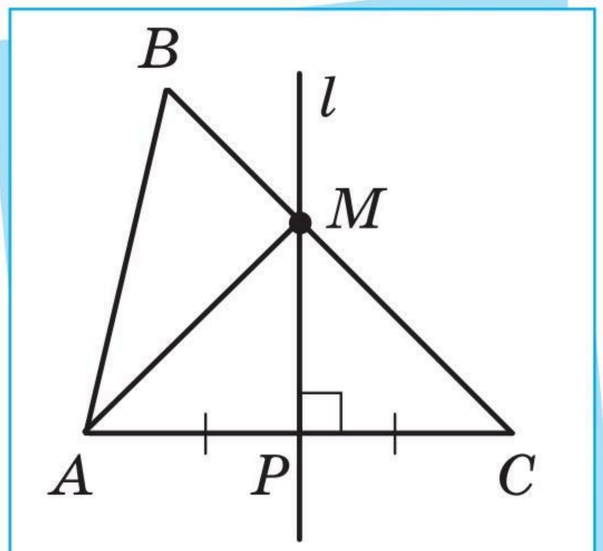


Рис. 21.5

За властивістю серединного перпендикуляра $AM = MC$, тобто трикутник AMC — рівнобічний. Тоді за властивістю кутів рівнобічного трикутника $\angle MAC = \angle MCA$. Але за умовою $\angle MCA = \angle BAC$. Тобто від даного променя AC в одну півплощину відкладено два різних кути MAC і BAC однакової градусної міри, що *суперечить* аксіомі про відкладання кутів. Отже, трикутник ABC — рівнобічний.

Третя ознака рівності трикутників



Опанований матеріал дозволяє нам сформулювати й довести ще одну ознаку рівності трикутників.



ТЕОРЕМА (третя ознака рівності трикутників — за трьома сторонами).

Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Нехай задано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 21.6). Покажемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

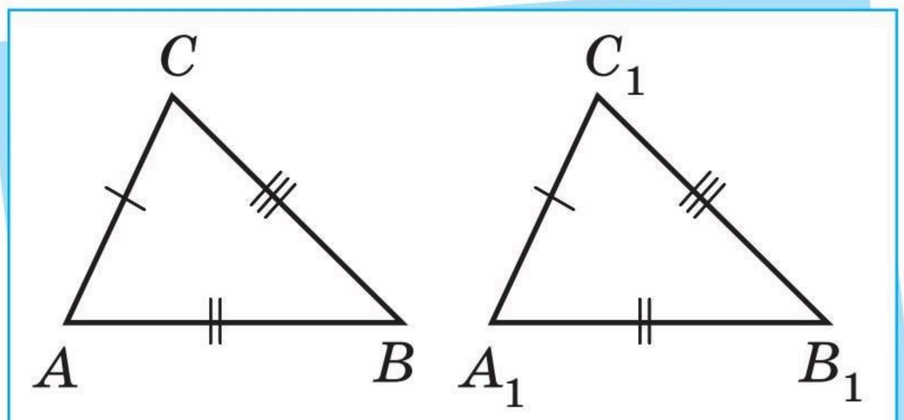


Рис. 21.6

За аксіомою про існування трикутника, рівного даному, існує трикутник $A_2B_2C_2$, рівний трикутнику $A_1B_1C_1$, розташований так, що його вершина A_2 збігається з вершиною A, точка B_2 належить променю AB, а точка C_2 лежить у іншій півплощині відносно прямої AB, ніж точка C (див. рис. 21.7). При цьому за означенням рівних трикутників $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$.

Оскільки на даному промені від його початкової точки можна відкласти лише один відрізок даної довжини, то точка B_2 збігається з точкою B. Проведемо відрізок CC_2 і позначимо утворені кути 1, 2, 3, 4.

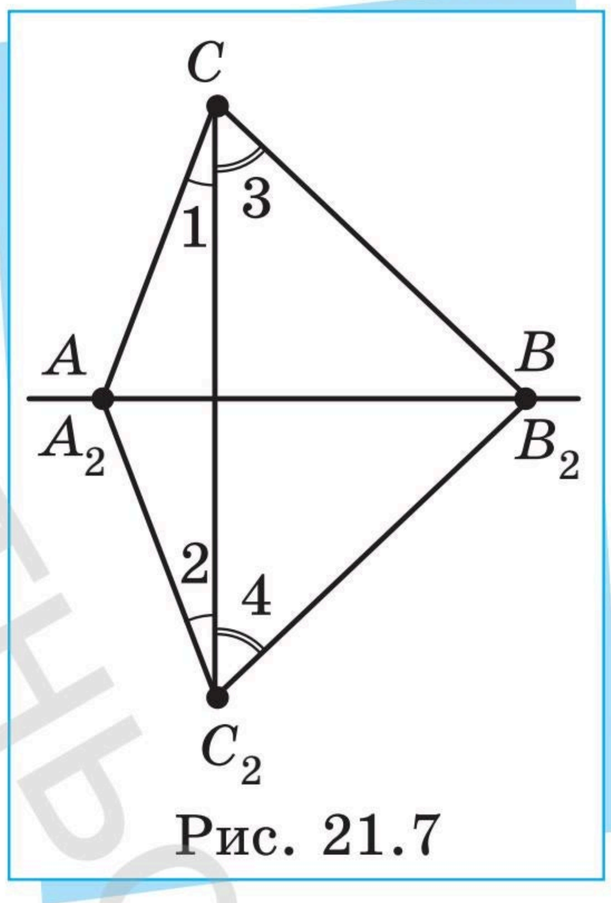


Рис. 21.7

Оскільки $AC = A_1C_1 = A_2C_2$, то трикутник CA_2C_2 — рівнобічний. Отже, $\angle 1 = \angle 2$. Оскільки $BC = B_1C_1 = B_2C_2$, то трикутник CB_2C_2 — також рівнобічний. Тому $\angle 3 = \angle 4$. Таким чином, $\angle A_2CB_2 = \angle A_2C_2B_2$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_2$ за двома сторонами та кутом між ними. Але $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$, а тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, що й потрібно було довести.



Зауважимо, що на рис. 21.7 розглянуто випадок, коли відрізок CC_2 перетинає пряму AB у внутрішній точці відрізка AB.

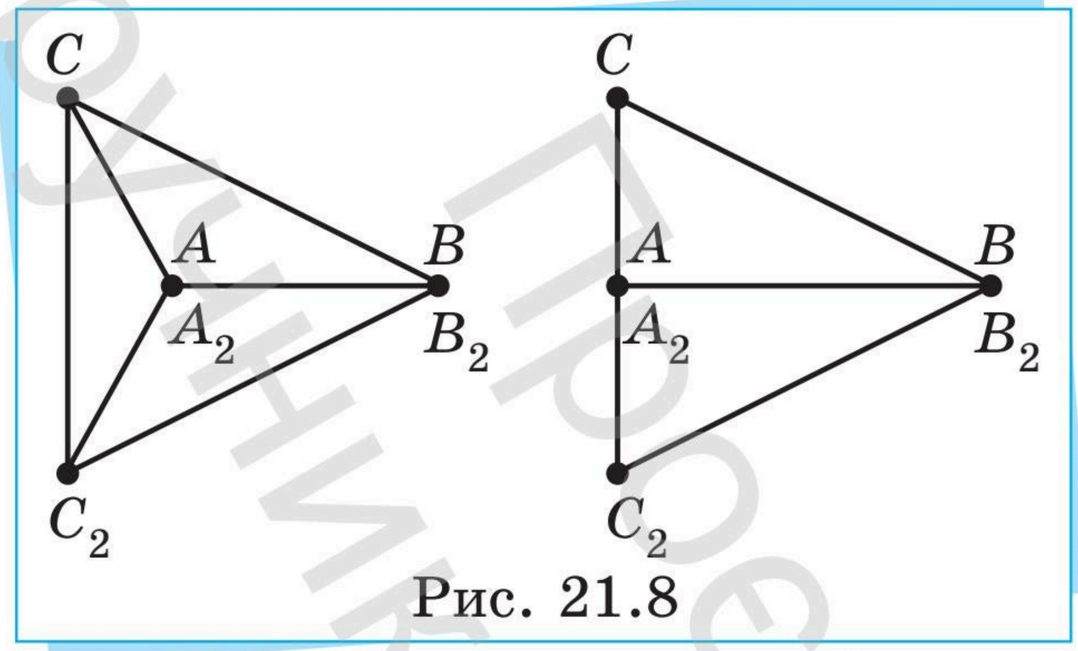


Рис. 21.8

Якщо відрізок CC_2 не має спільних точок із відрізком AB або проходить через один із кінців відрізка AB (наприклад, через точку A), то рисунки матимуть вигляд, поданий на рис. 21.8. Міркування для кожного із цих випадків є подібними, але їх слід проводити окремо.

Ці міркування наведено в матеріалі щодо третьої ознаки рівності трикутників: https://rnk.com.ua/106104



Перевірте себе!

1. Дайте означення рівнобічного трикутника. Як називають сторони та кути цього трикутника?
2. Який трикутник називають рівностороннім трикутником? Чи кожний рівносторонній трикутник є рівнобічним? А навпаки?
3. Перелічіть властивості рівнобічного трикутника.
4. Сформулюйте теорему про ознаки рівнобічного трикутника.
5. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.

Підручник майбутнього
Проєкт Міністерства освіти і науки України

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з трикутників, наведених на рис. 1, є рівнобічними?

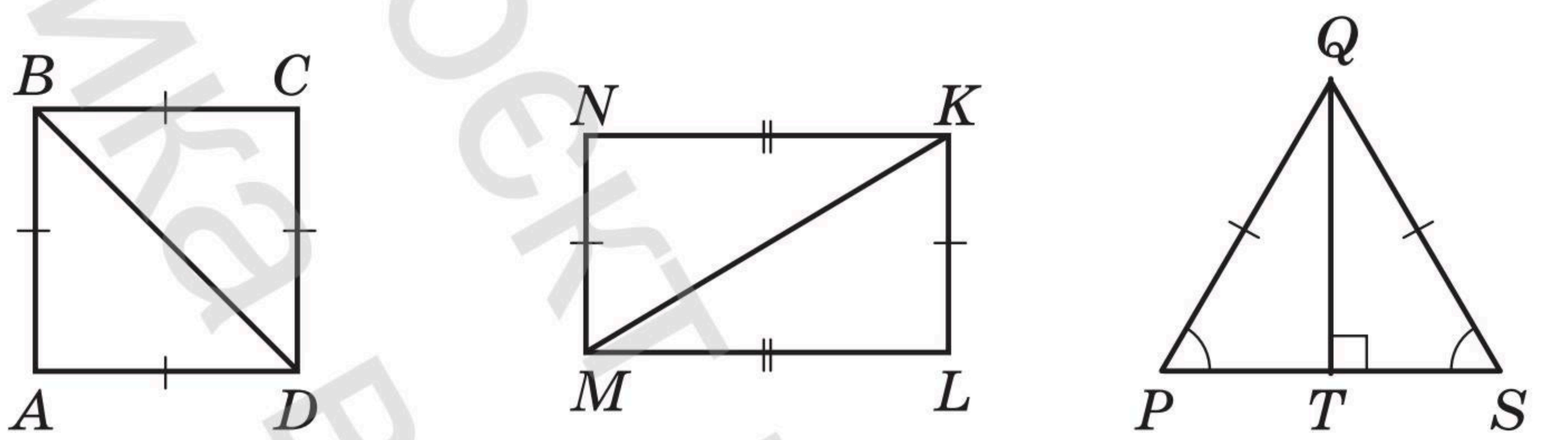


Рис. 1

2. Які з трикутників, наведених на рис. 2, є рівнобічними?

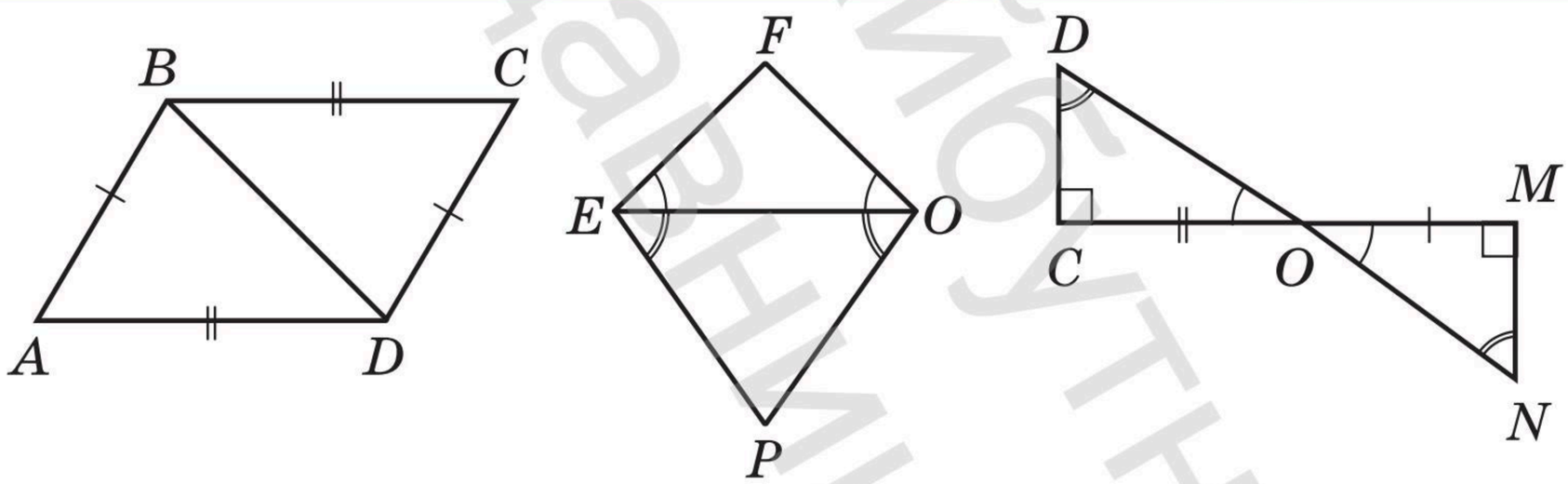


Рис. 2

3. На рис. 3 $AC = AB$, $AM = AN$, $NC = BM$. Чи є рівними трикутники CNA й BMA?

4. На рис. 4 $AD = CB$, $DC = AB$. Чи є рівними трикутники ABC і CDA?

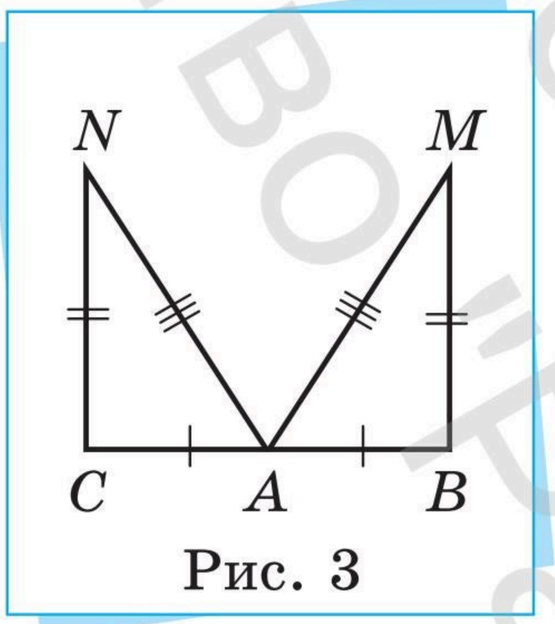


Рис. 3

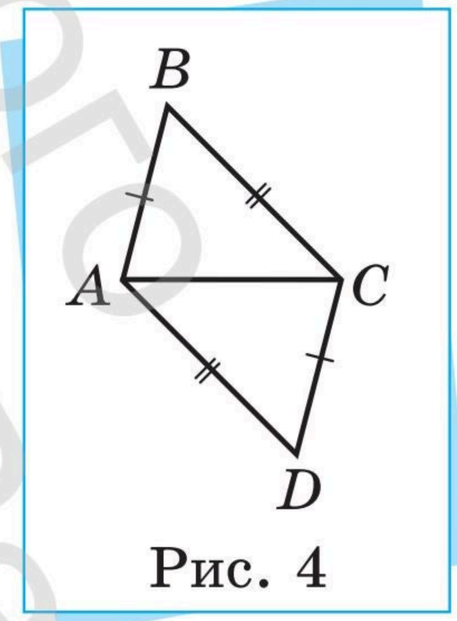


Рис. 4

5. У гострокутному трикутнику ABC, у якого $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $AC = 15$ см, провели медіану BM (рис. 5). Чи є рівними трикутники ABM і CBM?

6. У тупокутному трикутнику ABC, у якого $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $AC = 20$ см, провели медіану BM (рис. 6). Чи є рівними трикутники ABM і BCM?

7. У трикутників ABC і RST $AB = ST$, $AC = RT$, $RS = BC$ (рис. 7). Чи є рівними трикутники ABC і RST? Знайдіть: а) кут R, якщо $\angle C = 60°$; б) кут A, якщо $\angle T = 25°$; в) довжину сторони BC, якщо $RS = 2{,}5$ см; г) довжину сторони ST, якщо $AB = 4$ см.

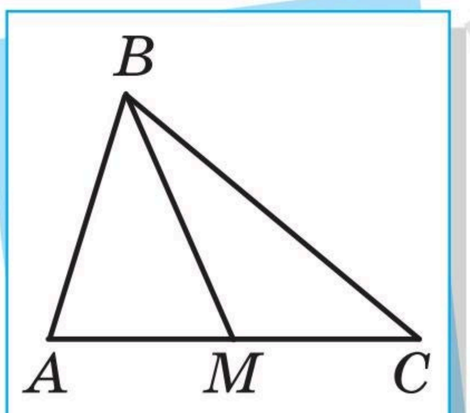


Рис. 5

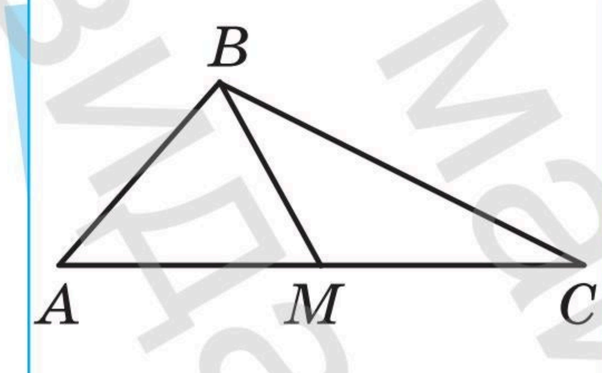


Рис. 6

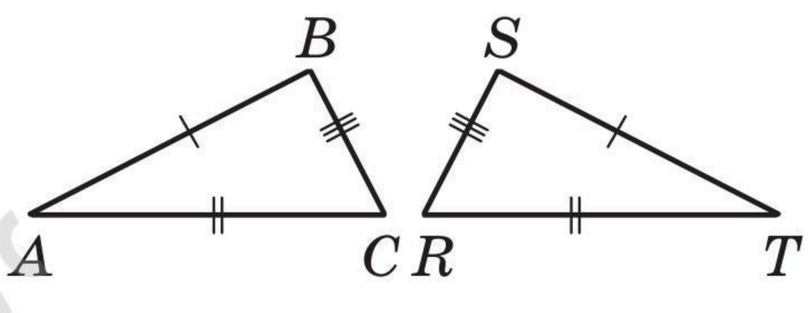


Рис. 7

8. У трикутників COM і POQ $MO = QO$, $CO = OP$, $MC = PQ$ (рис. 8). Чи є рівними трикутники COM і POQ? Знайдіть: а) кут P, якщо $\angle C = 55°$; б) кут M, якщо $\angle Q = 70°$; в) довжину сторони OC, якщо $OP = 5$ см; г) довжину сторони MC, якщо $PQ = 4{,}5$ см.

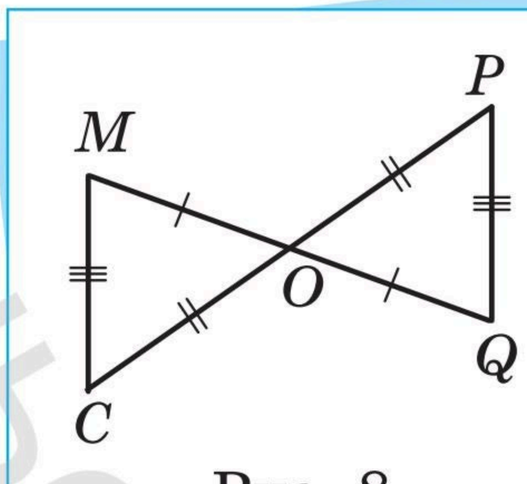


Рис. 8

Середній рівень

9. Знайдіть периметр рівностороннього трикутника ABC, у якого $AB = 4$ см.

10. Периметр рівностороннього трикутника MNK дорівнює 15 см. Знайдіть довжини сторін цього трикутника.

11. Трикутник ABC — рівнобічний. Бічні сторони цього трикутника дорівнюють 8 см, а основа — 5 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

12. Периметр рівнобічного трикутника дорівнює 20 см, а його основа — 6 см. Знайдіть довжини бічних сторін цього трикутника.

13. На рис. 9 наведено трикутник ABC. Чи рівнобічний цей трикутник? Відповідь поясніть.

14. На рис. 10 наведено трикутник ABC. Чи рівнобічний цей трикутник? Відповідь поясніть.

15. У рівнобічному трикутнику ABC, у якого $AB = BC = 10$ см і $AC = 12$ см, проведено висоту BH (рис. 11). Знайдіть периметр трикутника CBH, якщо $BH = 8$ см.

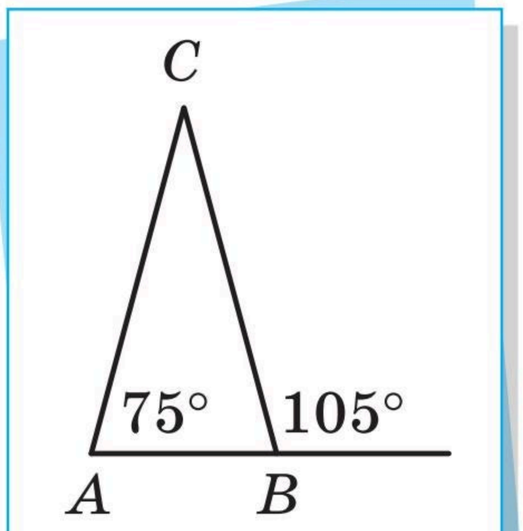


Рис. 9

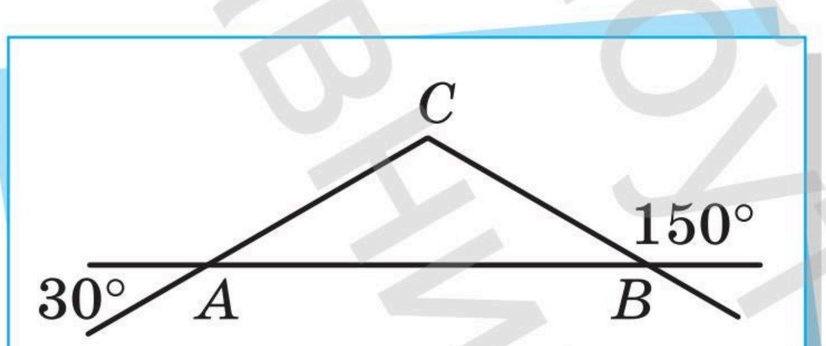


Рис. 10

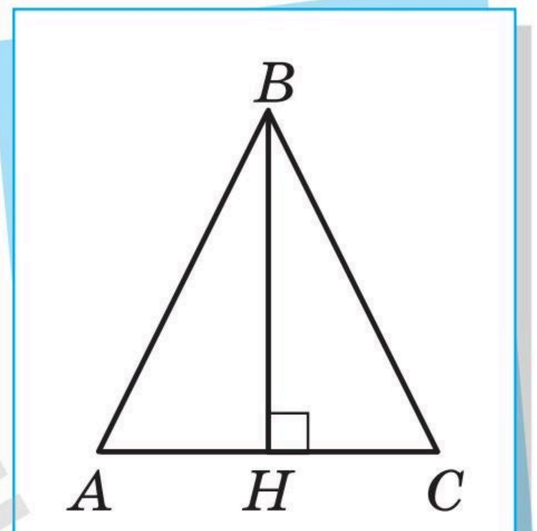


Рис. 11

16. У рівнобічному трикутнику AEN, у якого $AE = EN = 13$ см і $AN = 10$ см, проведено бісектрису EL (рис. 12). Знайдіть периметр трикутника NEL, якщо $EL = 12$ см.

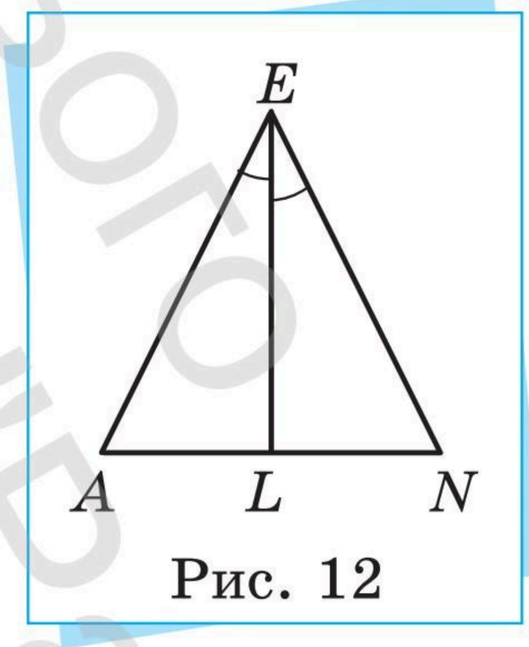


Рис. 12

17. На рис. 13 зображено рівнобічний трикутник ABC $(AB = BC)$. Як за допомогою лише лінійки розділити кут B навпіл?

18. На рис. 13 зображено рівнобічний трикутник ABC $(AB = BC)$. Як за допомогою лише косинця розділити кут B навпіл?

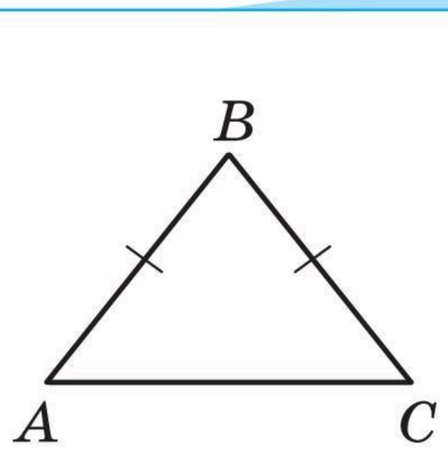


Рис. 13

19. Дано рівнобічний трикутник ABC з основою AC. Точки M і K є серединами сторін AB і BC відповідно (рис. 14). Чи є трикутник MBK рівнобічним? Відповідь поясніть.

20. Бісектриси кутів B і C рівнобічного трикутника ABC з основою BC перетинаються в точці O (рис. 15). Чи є трикутник BOC рівнобічним? Відповідь поясніть.

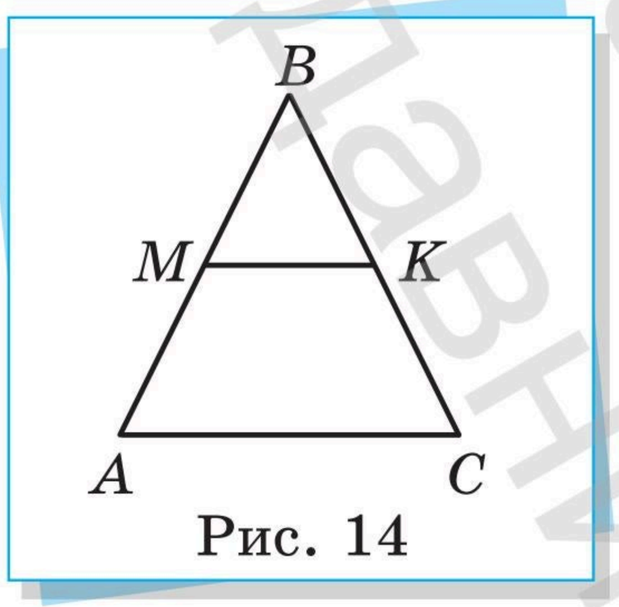


Рис. 14

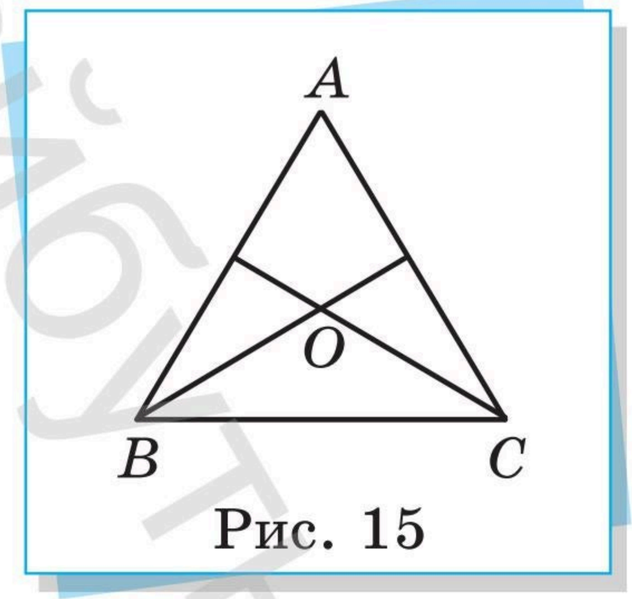


Рис. 15

Достатній рівень

21. На рис. 16 $AB = BC$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

22. На рис. 16 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $AB = BC$.

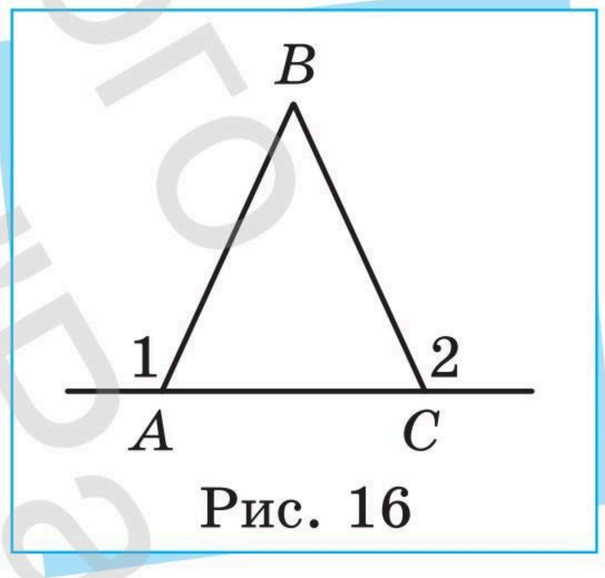


Рис. 16

23. На рис. 17 $AB = AC$ і $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

24. На рис. 17 $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $AB = AC$.

25. Периметр рівнобічного трикутника дорівнює 12,6 м. Знайдіть сторони трикутника, якщо довжина його основи:
а) менша від бічної сторони на 3 м;
б) більша за бічну сторону на 3 м.

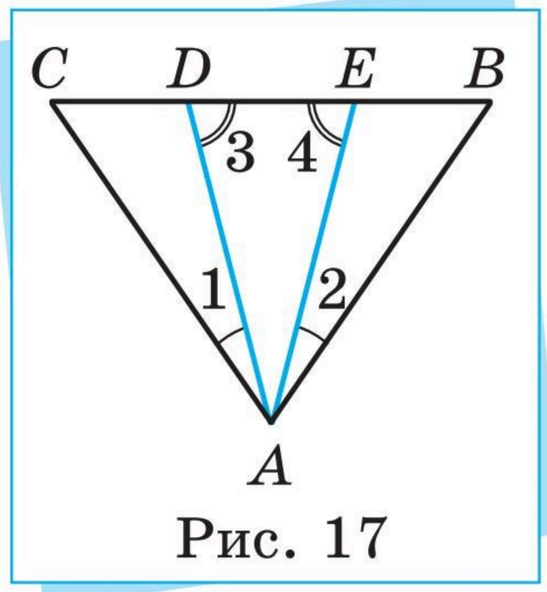


Рис. 17

26. Периметр рівнобічного трикутника дорівнює 56 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо довжина його основи:
а) менша від бічної сторони в 1,5 разу;
б) більша за бічну сторону в 1,5 разу.

27. На рис. 18 $AB = DC$, $BC = AD$, $\angle B = 120°$. Знайдіть градусну міру $\angle D$.

28. На рис. 18 $AB = DC$, $BC = AD$, $\angle BAC = 36°$. Знайдіть градусну міру $\angle ACD$.

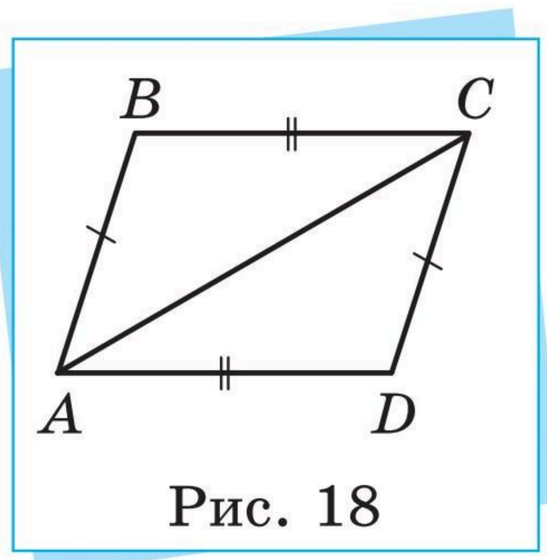


Рис. 18

Високий рівень

29. Доведіть, що бісектриси рівнобічного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

30. Доведіть, що медіани рівнобічного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

31. На рис. 19 $AB = 6$ см, $CB = CD$, $\angle B = \angle D$. Знайдіть довжину AD.

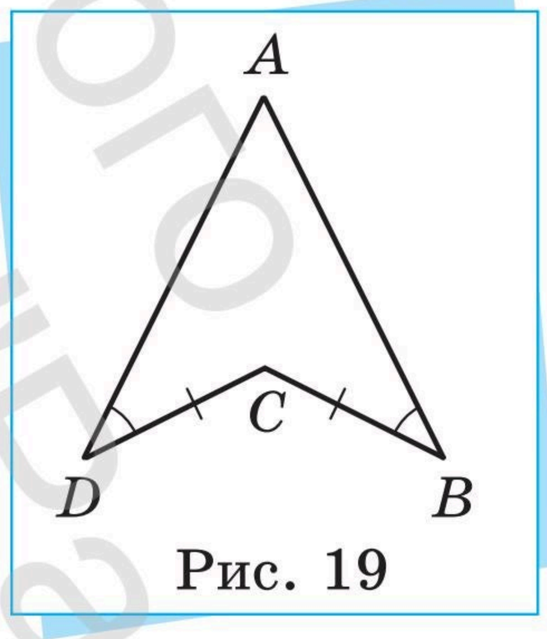


Рис. 19

32. На рис. 20 $AB = AD$, $CB = CD$, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть градусну міру кута BAC.

33. На рис. 21 $AB = CD$, $AC = BD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle ADB = 30°$. Знайдіть градусну міру кута BAD.

34. На рис. 22 $AN = CM$, $AM = CN$. Доведіть, що $AB = BC$.

35. На рис. 22 $AB = BC$, $AM = CN$. Доведіть, що $AN = CM$.

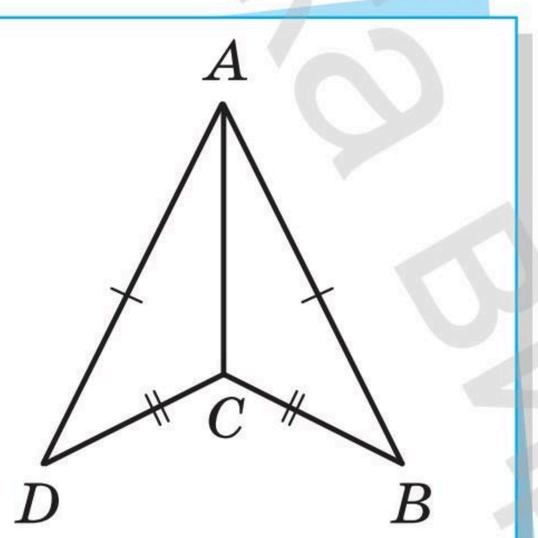


Рис. 20

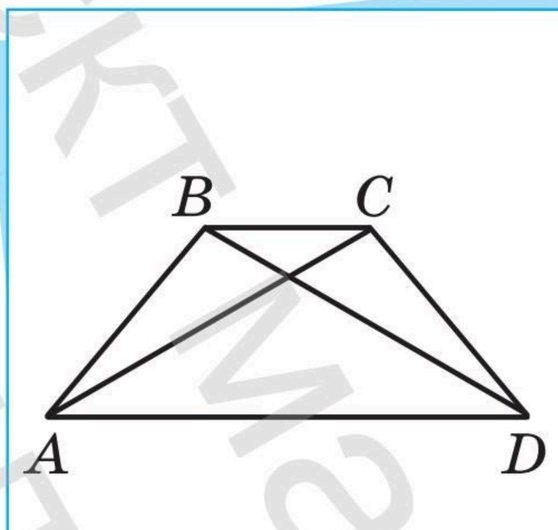


Рис. 21

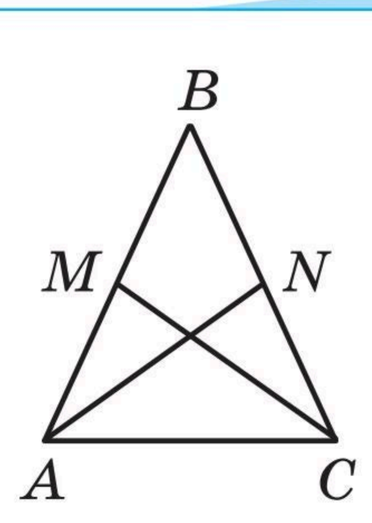


Рис. 22

36. На рис. 23 рівнобічні трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC. Відрізок BD перетинає AC в точці O. Доведіть, що O — середина AC.

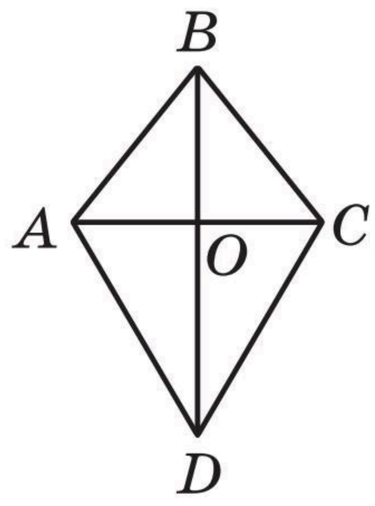


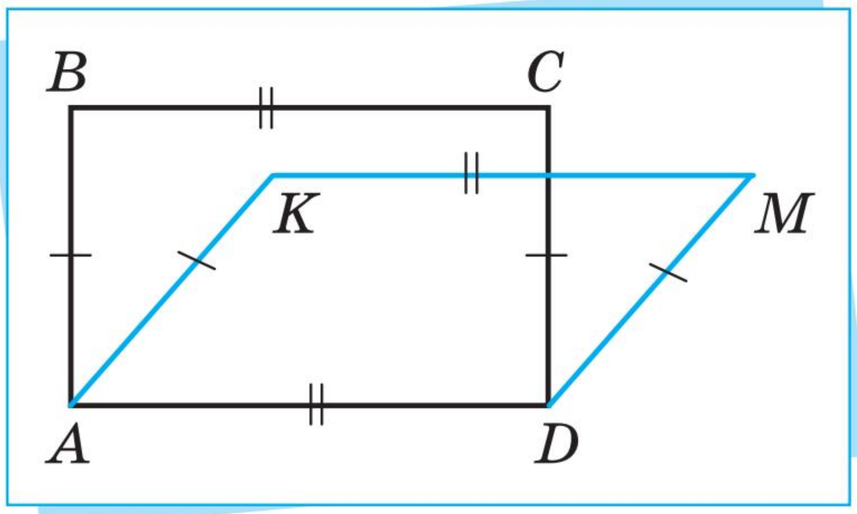
Рис. 23



Цікавинки від дідуся Тараса

Третя ознака рівності трикутника підтверджує гіпотезу Тетянки про те, що трикутник є «стійкою» фігурою (див. § 19). Дійсно, існує лише один трикутник зі сторонами заданих довжин. Три задані сторони трикутника однозначно визначають його кути.

А от для чотирикутника це не так: існує багато різних чотирикутників, сторони яких мають ті самі довжини, але різні кути. Наприклад, на рисунку зображено прямокутник $ABCD$ і паралелограм $AKMD$, довжини сторін яких однакові.



Саме тому чотирикутні конструкції можуть «складатися». На практиці їх часто укріплюють, додаючи діагональну пластину, що розбиває їх на два трикутники, які вже не можуть змінювати кутів, зберігаючи довжини всіх сторін сталими.

Тому опори розкладних стільців і столів мають трикутну форму, де як одна зі сторін трикутника використовується підлога.



Також для зміцнення конструкції столи та стільці із чотирма опорами мають діагональні кріплення, які розбивають ці чотирикутники на трикутники.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Наведіть приклади використання трикутних конструкцій у повсякденному житті. Чи доводилося вам використовувати «стійкість» трикутників для укріплення меблів чи інших речей? Якщо так, то як саме ви це робили?

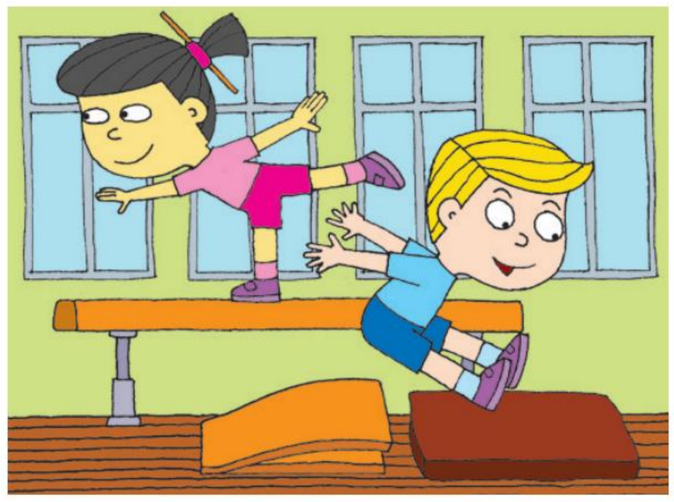
2. Наведіть приклади об'єктів реального світу, які мають форму: а) прямокутного трикутника; б) гострокутного трикутника; в) тупокутного трикутника; г) рівнобічного трикутника; д) рівностороннього трикутника. Чи правда, що об'єктів, які мають форму рівнобічного та прямокутного трикутників, навколо нас найбільше? Відповідь обґрунтуйте.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть рівняння.

а) $3x-12x^2=0$; б) $49-y^2=0$; в) $t^2-8t+16=0$.

2. У 4-А класі навчаються 30 дітей, а в 4-Б — 34 дитини. 40 % дітей 4-А класу та 50 % дітей 4-Б класу відвідують спортивні секції. Який відсоток дітей цих двох класів відвідує спортивні секції? Відповідь округліть до десятих відсотка.



3. Задано функцію $f(x)=2x^2-3x+1$. Знайдіть $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$. Побудуйте графік цієї функції за допомогою графічного калькулятора. За побудованим графіком знайдіть координати точок перетину графіка $f(x)$ із віссю абсцис.

4. Вікторія міркує: «У рівнобічного трикутника довжини двох сторін рівні. Кожен рівнобічний трикутник є трикутником. Отже, окремі трикутники мають дві сторони, довжини яких рівні». Чи правильно міркує Вікторія? Відповідь обґрунтуйте.

5. Автобусний квиток називають математично щасливим, якщо між цифрами його номера можна поставити знаки арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) і дужки так, що після виконання дій одержимо число 100. На рисунку зображено автобусний квиток. Чи є він математично щасливим? Відповідь обґрунтуйте.



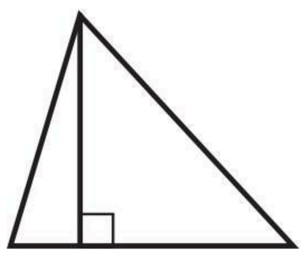
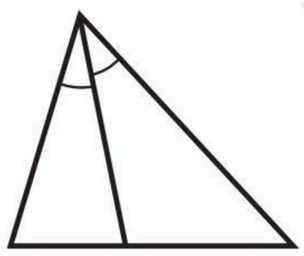
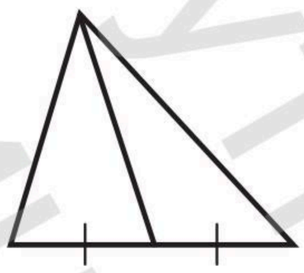
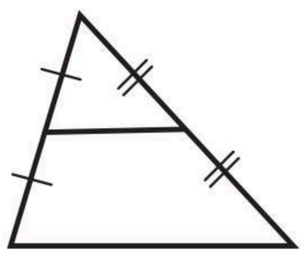
ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1 ДО РОЗДІЛУ 6

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

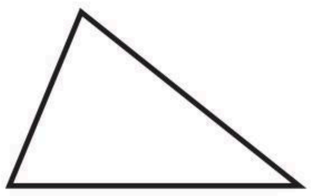
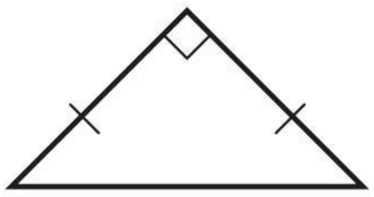
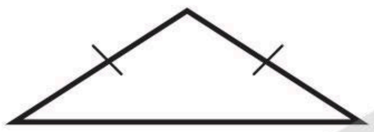
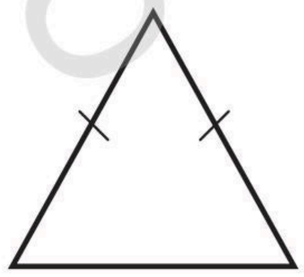
1. Якої з ознак рівності трикутників НЕ існує?

А	За трьома сторонами
Б	За трьома кутами
В	За двома сторонами і кутом між ними
Г	За стороною і двома прилеглими кутами.

2. На якому рисунку зображено трикутник із проведеною в ньому медіаною?

А	Б	В	Г
			

3. На якому рисунку зображено рівнобічний тупокутний трикутник?

А	Б	В	Г
			

Підручник проєкт Мій вибір Навчання Державного стандарту

4. Укажіть НЕправильне твердження.

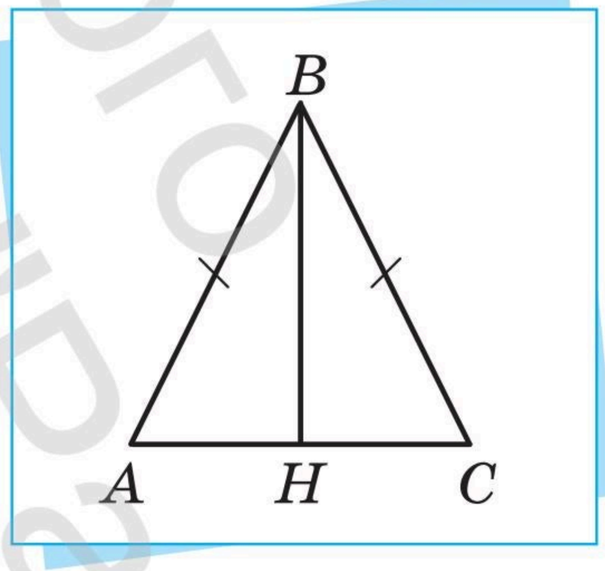
А	Через кожну точку, що належить даній прямій, можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної.
Б	Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.
В	Через кожну точку, що не належить даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.
Г	Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, перпендикулярні між собою.
Д	Через кожну точку, що не належить даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної.

5. Укажіть твердження, яке є *ознакою* рівнобічного трикутника.

А	Трикутник, дві сторони якого рівні між собою, називають рівнобічним трикутником.
Б	У рівнобічного трикутника кути при основі рівні.
В	Медіана й висота рівнобічного трикутника, проведені до основи, збігаються.
Г	У рівнобічного трикутника бісектриса й висота, проведені до основи, збігаються.
Д	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він є рівнобічним трикутником.

6. На рисунку зображено рівнобічний трикутник ABC, який не є рівностороннім; BH — висота трикутника. Укажіть НЕправильне твердження.

А	$\angle BAH = \angle CAH$
Б	$AH = HC$
В	$\angle AHB = \angle CHB$
Г	$AB = AC$
Д	$\angle ABH = \angle CBH$



У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. Відомо, що $\triangle KPS = \triangle LKM$, причому $KP = 10$ см, $KS = 12$ см, $PS = 8$ см. Знайдіть довжину сторони MK (у см).

8. Відомо, що $\triangle PRL = \triangle DFN$, причому $\angle R = 70°$, $\angle L = 80°$, $\angle P = 30°$. Знайдіть градусну міру кута H.

9. Якщо градусну міру більшого із суміжних кутів збільшити на $20°$, то вона стане в $1{,}5$ разу більшою за градусну міру меншого суміжного кута. Знайдіть градусну міру меншого суміжного кута.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Побудуйте в ПДСК точки $A(-2;-3)$, $B(4;-3)$ і $C(1;6)$. Покажіть, що ці точки є вершинами рівнобічного трикутника. Знайдіть довжину: а) основи трикутника; б) висоти, проведеної до основи трикутника.

11. Побудуйте пряму a, що є графіком функції $y = 2x$. Через початок координат проведіть пряму b, перпендикулярну до прямої a. Знайдіть рівняння прямої b.

12. На рис. 2 зображено чотирикутник $ABCD$; BD — бісектриса кута ABC, $AB = BC$. Доведіть, що $\angle A = \angle C$.

13. За рис. 2 доведіть, що: а) трикутник ADC — рівнобічний; б) $BD \perp AC$.

14. Доведіть, що в рівнобічному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін: а) мають однакові довжини; б) утворюють рівні кути з бічними сторонами.

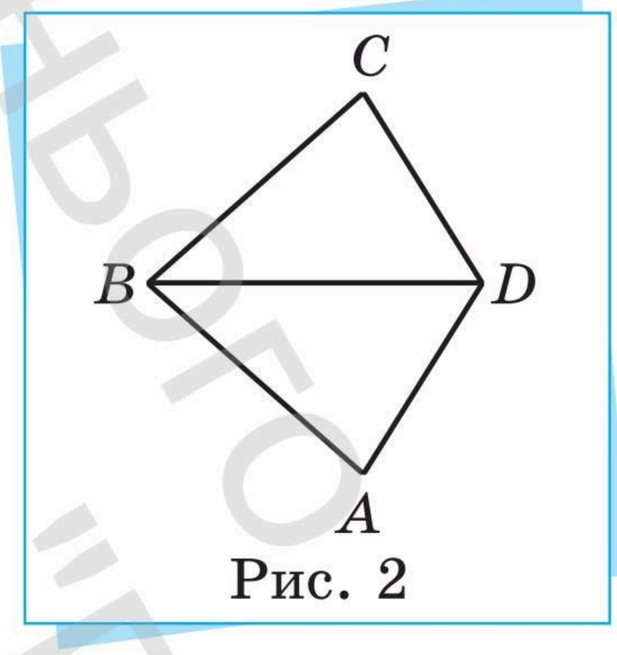


Рис. 2

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Серединний перпендикуляр до бічної сторони AB рівнобічного трикутника ABC з основою AC перетинає сторону BC у точці D. Знайдіть довжину AC, якщо периметр трикутника ADC дорівнює 24 см і $AB = 16$ см.

2. Серединний перпендикуляр до бічної сторони AB рівнобічного трикутника ABC з основою AC перетинає сторону BC в точці D. Знайдіть довжину AC, якщо периметр трикутника ADC дорівнює 26 см, а периметр трикутника ABC — 42 см.

3. Доведіть рівність рівнобічних трикутників за бічною стороною та проведеною до неї медіаною.

4. Доведіть рівність рівнобічних трикутників за периметром і основою.

5. Пряма, яка перпендикулярна до бісектриси кута O, перетинає сторони кута O в точках A і B. Доведіть, що трикутник OAB рівнобічний.

6. Точки F і E лежать відповідно на бічних сторонах AB і BC рівнобічного трикутника так, що $\angle BAE = \angle FCB$. Доведіть, що $AF = CE$.

7. На рис. 1 $CP = CQ$, $AP = BQ$, $AM = BN$. Доведіть, що $MP = NQ$.

8. На рис. 1 кути AQC і BPC рівні; $AQ = BP$. Доведіть, що $\angle ACP = \angle BCQ$.

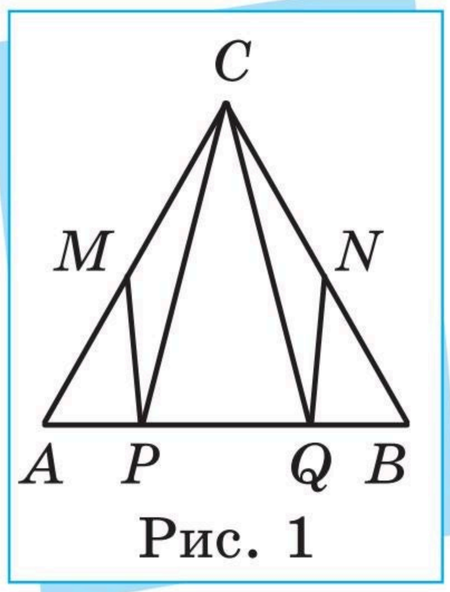


Рис. 1

9. У трикутнику ABC провели бісектрису BK і перпендикуляри KT і KP до сторін AB і BC відповідно. Доведіть, що $BK \perp PT$.

10. На рис. 2 ABC — рівнобічний трикутник з основою AC. Поза трикутником на променях AB і CB лежать відповідно точки K і F так, що $BK = BF$; точка O — середина основи AC. Доведіть, що трикутник FKO рівнобічний.

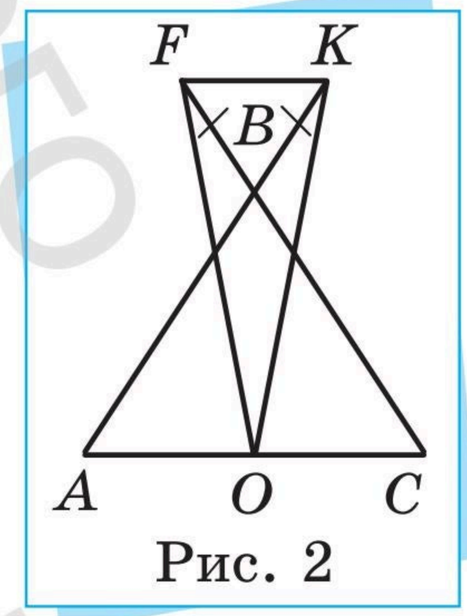


Рис. 2

§ 22. Ознаки паралельності прямих. Властивості кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною

Ознаки паралельності прямих



Привіт, Тетянко, як враження від дня народження в кафе «Затишок»? Швидко знайшла дорогу до кафе?



Так, усе було чудово! До речі, йшла не вулицями, а парком. І помітила, що в парку є багато доріжок, які перетинаються біля центрального водограю і виходять з іншого боку парку. Відзначила, що яким би чином я не йшла, щоб потрапити на паралельну вулицю, потрібно зробити спочатку поворот праворуч, а потім поворот ліворуч приблизно на ту саму кількість градусів.



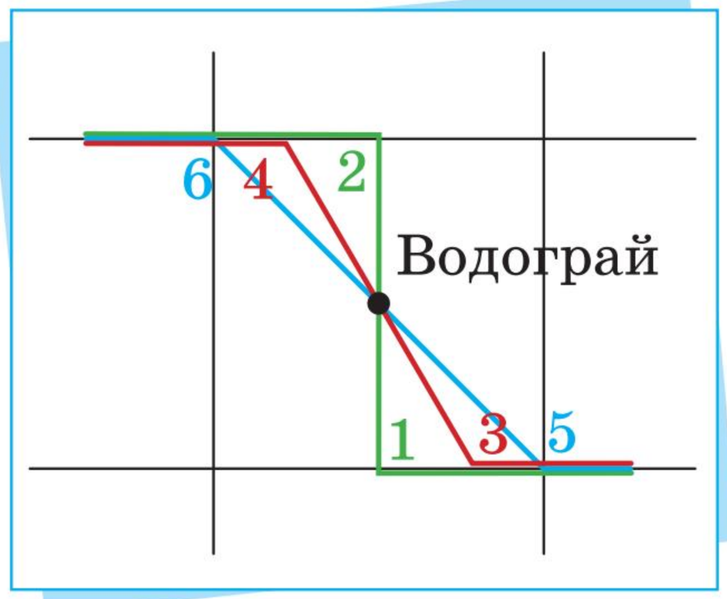
Спробуємо зобразити парк і його доріжки на схемі. Від школи на паралельну вулицю зручно йти трьома доріжками — синьою, червоною та зеленою. При цьому ти кажеш, що кути 1 і 2, 3 і 4 та 5 і 6 мають бути однакові, правильно?



Підручник проєкту «Інтерактивний підручник»



Так, все правильно. Ці пари кутів розташовані ніби між двома паралельними вулицями, але з різного боку доріжки парку. Я назвала б їх *внутрішніми різносторонніми кутами*. І виходить, якщо вулиці паралельні, то ці кути мають бути рівними.





А можливо, і навпаки правильно? Тобто якщо ці кути рівні, то вулиці будуть паралельними! А запитаємо про це у вчителів, вони точно повинні знати.



Звичайно, знаємо! Спочатку розглянемо дві прямі a і b, перетнуті третьою прямою c. Пряму c будемо називати січною прямою або січною стосовно прямих a і b. (рис. 22.1).

Унаслідок перетину прямою c прямих a і b утворилися 8 кутів, позначених на рисунку цифрами від 1 до 8. Кути 1, 2, 7, 8 називають зовнішніми кутами, а кути 3, 4, 5, 6 — внутрішніми. Кути, які розташовані по один бік від січної, природно назвати односторонніми, а кути, розташовані по різні боки від січної, — різносторонніми.

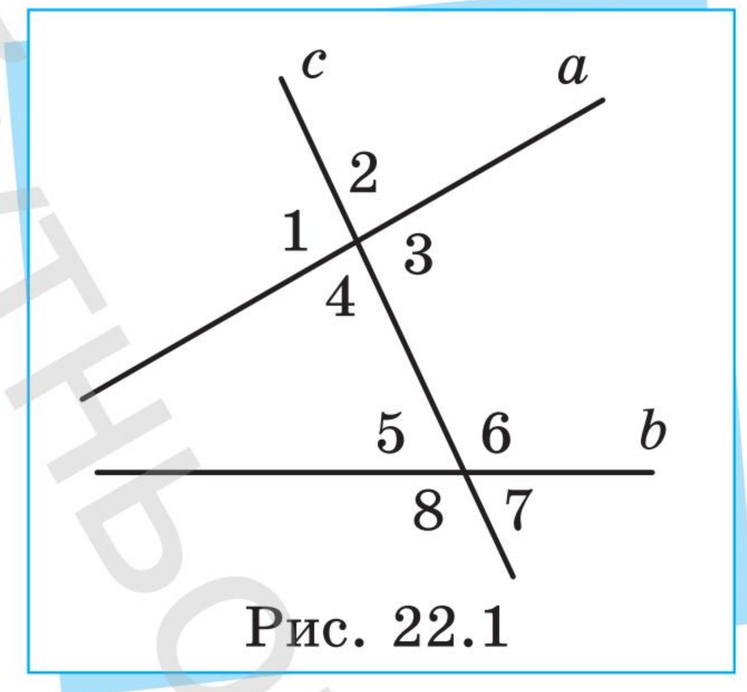


Рис. 22.1

Наприклад, кути 3 і 5 — внутрішні різносторонні, кути 3 і 6 — внутрішні односторонні, кути 1 і 7 — зовнішні різносторонні, а кути 1 і 8 — зовнішні односторонні.

Пари кутів 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8 мають окрему назву — відповідні кути.

Про назви кутів:
https://rnk.com.ua/106105





Сформулюємо теорему про ознаки паралельності прямих за властивостями зазначених кутів.

ТЕОРЕМА (ознаки паралельності прямих за кутами, утвореними в результаті перетину цих прямих січною).

Нехай січна c перетинає прямі a і b. Тоді прямі a і b будуть паралельними, якщо:

1) **внутрішні різносторонні кути рівні;**
2) **сума градусних мір внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;**
3) **зовнішні різносторонні кути рівні;**
4) **сума градусних мір зовнішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;**
5) **відповідні кути рівні.**

Нижче доведемо твердження 1 і 2.
Доведення тверджень 3–5:
https://rnk.com.ua/106106



Доведення твердження 1.

Покажемо: якщо в результаті перетину прямих a і b січною c внутрішні різносторонні кути рівні, то $a \parallel b$. Нехай пряма c перетинає прямі a і b у точках A і B відповідно (див. рис. 22.2). Через середину C відрізка AB проведемо пряму l, перпендикулярну до прямої b. Нехай l перетинає прямі a і b у точках K і M відповідно.

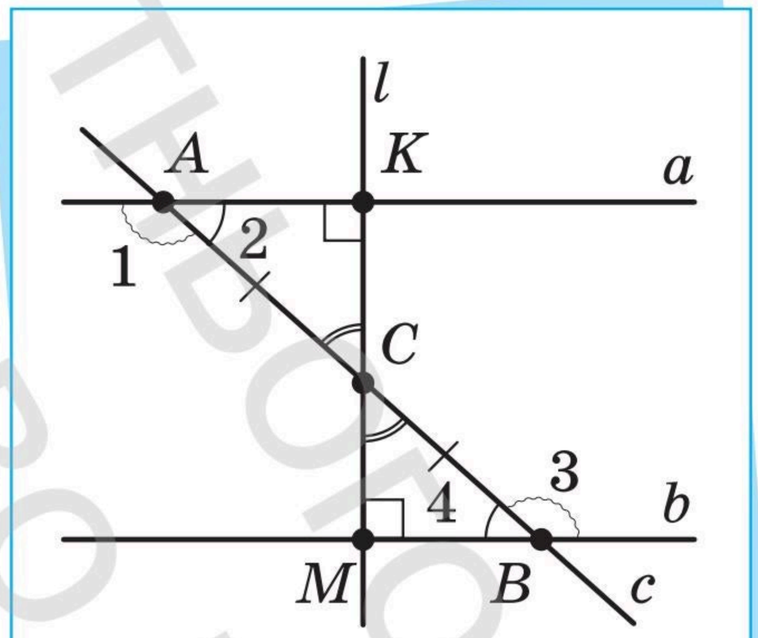


Рис. 22.2

Оскільки за побудовою $AC = CB$, за умовою $\angle 2 = \angle 4$, а $\angle ACK = \angle BCM$ як вертикальні, то трикутники ACK і BCM рівні за стороною й двома прилеглими кутами. Тому $\angle AKC = \angle CMB = 90°$,

тобто прямі a і b перпендикулярні до прямої l. Отже, за другою ознакою паралельності прямих $a \parallel b$.

Зауважимо, що наведене доведення не стосується випадку, коли $\angle 2 = \angle 4 = 90°$. Але в такому разі січна — пряма c — перпендикулярна до прямих a і b, а отже, $a \parallel b$ за другою ознакою паралельності прямих.

Доведення твердження 2. Нехай, наприклад, $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Покажемо, що $a \parallel b$. За властивістю суміжних кутів $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Тоді $\angle 2 = 180° - \angle 1$ і $\angle 4 = 180° - \angle 1$, тобто $\angle 2 = \angle 4$. Тому за щойно доведеним твердженням 1 прямі a і b — паралельні.

Властивості кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною



Властивості кутів, утворених паралельними прямими, перетнутими січною, наведено у твердженні:

ТЕОРЕМА (властивості кутів, утворених паралельними прямими, перетнутими січною).

Нехай січна c перетинає паралельні прямі a і b. Тоді:

1) **внутрішні різносторонні кути рівні;**
2) **сума градусних мір внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;**
3) **зовнішні різносторонні кути рівні;**
4) **сума градусних мір зовнішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;**
5) **відповідні кути рівні.**

Доведемо тільки твердження 1 і 2.

Доведення тверджень 3–5:
https://rnk.com.ua/106107



Доведення твердження 1. Нехай на рис. 22.3 прямі a і b — паралельні, пряма c — січна, точки A і B — точки перетину прямих a і c та b і c відповідно. Покажемо, що внутрішні різносторонні кути 2 і 4 рівні.

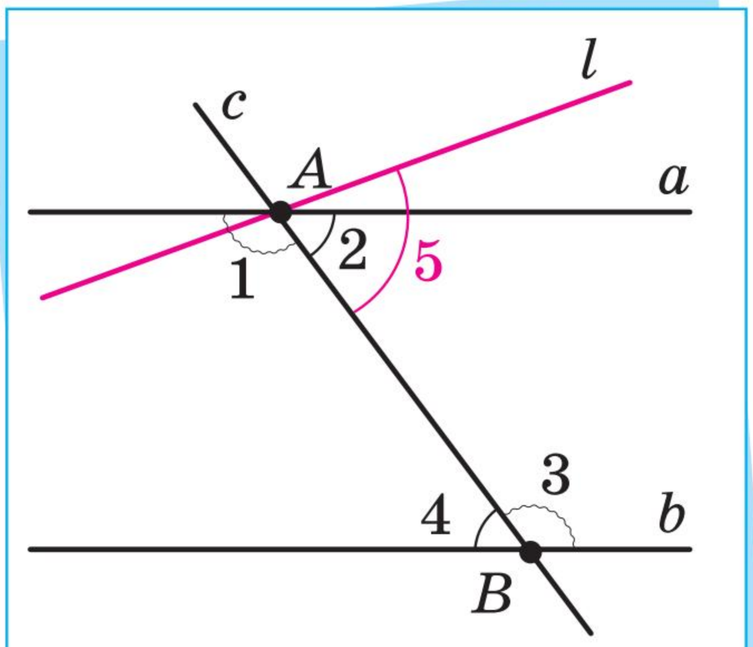


Рис. 22.3

Припустимо *супротивне*, тобто що $\angle 2 \neq \angle 4$. Тоді відкладемо від променя AB $\angle 5 = \angle 4$ в ту саму півплощину відносно прямої c, утворивши пряму l. Кути 4 і 5 — внутрішні різносторонні кути, утворені в результаті перетину прямих l і b січною c. Тому за ознакою паралельності прямих $l \parallel b$. Отже, через точку A проведено дві різні прямі a і l, паралельні прямій b. Але це *суперечить* аксіомі щодо основної властивості паралельних прямих. Отже, наше припущення неправильне, тобто $\angle 2 = \angle 4$, що й треба було довести.

Доведення твердження 2. Покажемо: якщо $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (див. рис. 22.3). Дійсно, за властивістю суміжних кутів $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Але за щойно доведеним твердженням 1 маємо, що $\angle 2 = \angle 4$, а отже, рівність $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ має місце.

Зауважимо: якщо, наприклад, $\angle 1 = 90°$, то за щойно доведеним твердженням 2 маємо, що $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90°$. Тобто:

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до іншої прямої.



Розглянемо ще одну важливу властивість паралельних прямих.

ТЕОРЕМА (про відстань між паралельними прямими).

Усі точки однієї з двох паралельних прямих розташовані на однаковій відстані від іншої прямої.

Дійсно, нехай $a \parallel b$, а A_1 і A_2 — дві *довільні* точки прямої a (див. рис. 22.4). Покажемо, що відстані від точок A_1 і A_2 до прямої b однакові. Оскільки відстань між точкою і прямою — це довжина перпендикуляра, проведемо перпендикуляри A_1B_1 і A_2B_2 до прямої b. Одразу зауважимо, що прямі A_1B_1 і A_2B_2 — паралельні, бо є перпендикулярними до прямої b.

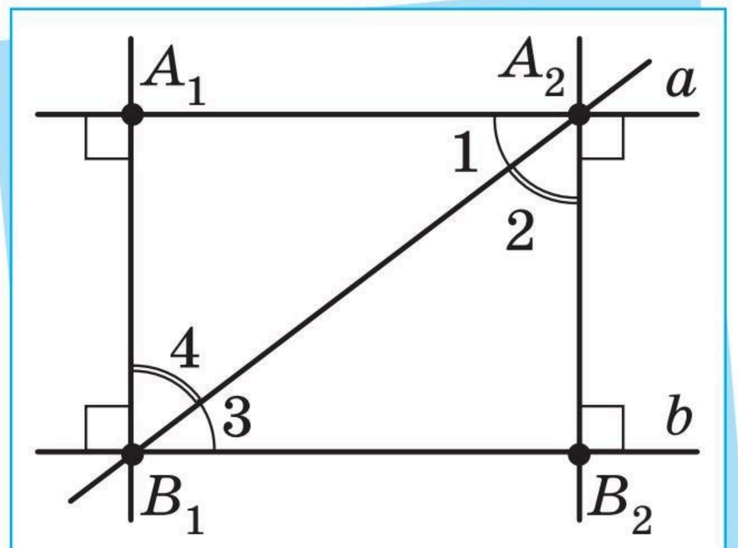


Рис. 22.4

Розглянемо пряму A_2B_1. Вона є січною до паралельних прямих a і b. Отже, $\angle 1 = \angle 3$. Але пряма A_2B_1 також є січною до паралельних прямих A_1B_1 і A_2B_2. Тому $\angle 2 = \angle 4$. Таким чином, трикутники $B_1A_1A_2$ і $A_2B_2B_1$ мають спільну сторону A_2B_1 і по дві пари відповідно рівних кутів, прилеглих до неї. Тому $\triangle B_1A_1A_2 = \triangle A_2B_2B_1$ за другою ознакою рівності трикутників. Отже, $A_1B_1 = A_2B_2$, що й потрібно було довести.

Щойно доведена теорема пояснює доречність такого означення:

Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї із прямих до іншої прямої.

Перевірте себе!

1. Дві прямі перетнуті січною. Укажіть назви кутів, які утворилися.
2. Сформулюйте ознаки паралельності прямих за кутами, утвореними в результаті перетину цих прямих січною.
3. Сформулюйте властивості кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих третьою прямою — січною.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено прямі a, b і c так, що пряма c перетинає дві інші прямі. Запишіть, які з утворених кутів є: а) внутрішніми різносторонніми; б) зовнішніми односторонніми; в) відповідними; г) вертикальними.

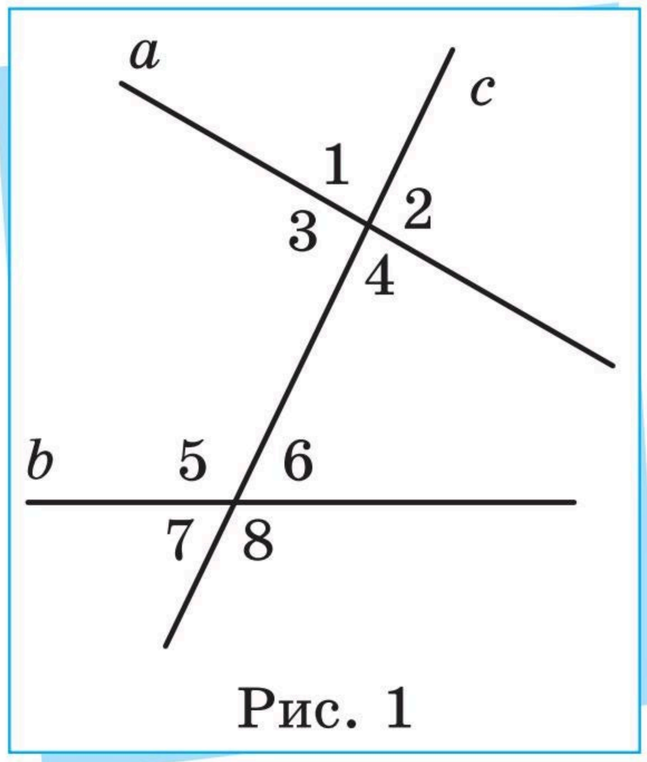


Рис. 1

2. На рис. 1 зображено прямі a, b і c так, що пряма c перетинає дві інші прямі. Запишіть, які з утворених кутів є: а) внутрішніми односторонніми; б) зовнішніми різносторонніми; в) суміжними; г) рівними.

3. Прямі a, b і c перетинаються так, як показано на рис. 2. Вкажіть кут, який разом із кутом 6 утворює: а) пару внутрішніх різносторонніх кутів; б) пару внутрішніх односторонніх кутів; в) пару відповідних кутів.

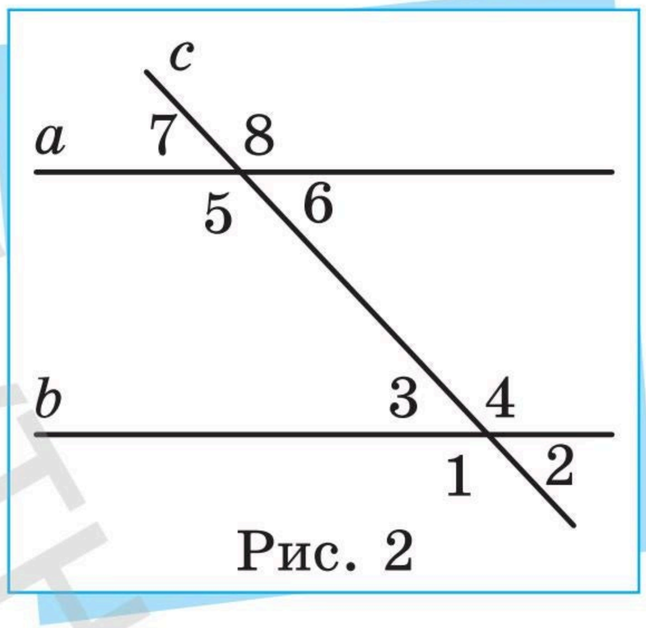


Рис. 2

4. Прямі a, b і c перетинаються так, як показано на рис. 2. Вкажіть кут, який разом із кутом 5 утворює: а) пару внутрішніх різносторонніх кутів; б) пару внутрішніх односторонніх кутів; в) пару відповідних кутів.

5. На рис. 3 зображено дві прямі, що перетинаються третьою, та позначено кут α. Перенесіть рисунок у зошит і позначте кут, який є: а) відповідним до кута α; б) разом

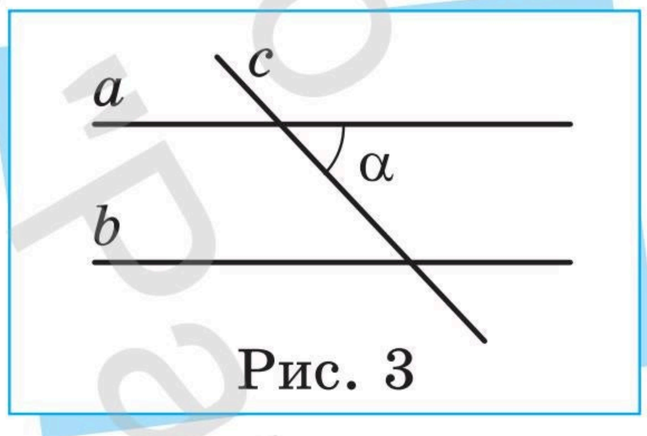


Рис. 3

із кутом α утворює пару внутрішніх односторонніх кутів; в) разом із кутом α утворює пару внутрішніх різносторонніх кутів.

6. На рис. 4 зображено дві прямі, що перетинаються третьою, та позначено кут β. Перенесіть рисунок у зошит і позначте кут, який є: а) відповідним до β; б) разом із β утворює пару внутрішніх односторонніх кутів; в) разом із β утворює пару внутрішніх різносторонніх кутів.

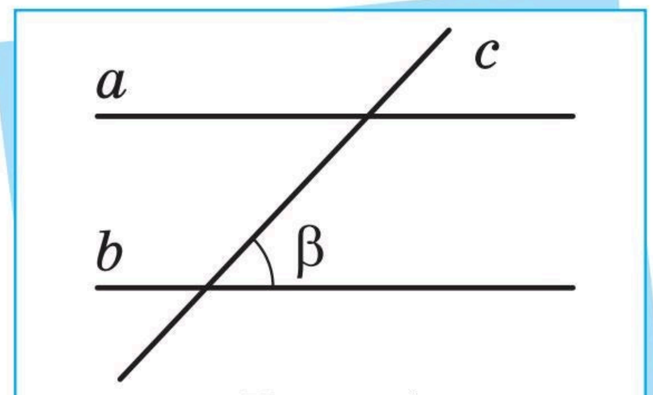


Рис. 4

7. Визначте, чи є паралельними прямі a і b у кожному з випадків на рис. 5.

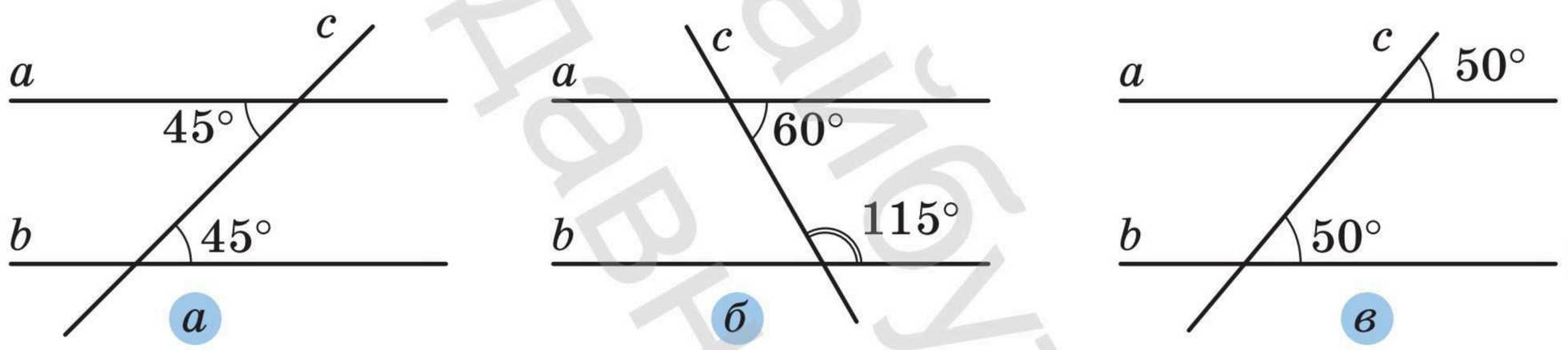


Рис. 5

8. Визначте, чи є паралельними прямі m і n у кожному з випадків на рис. 6.

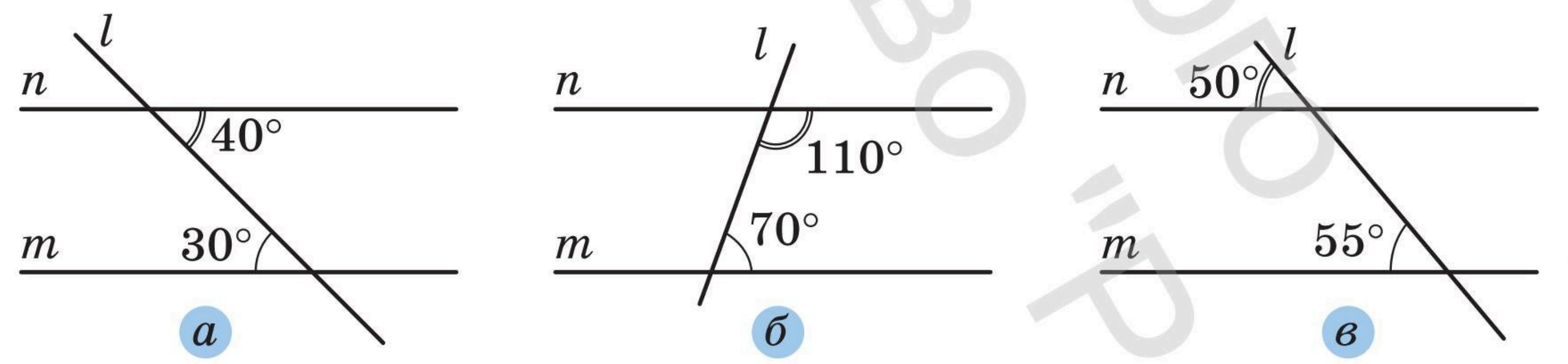


Рис. 6

9. За рис. 7 знайдіть відстань між паралельними прямими a і b.

10. За рис. 8 знайдіть відстань між паралельними прямими a і b.

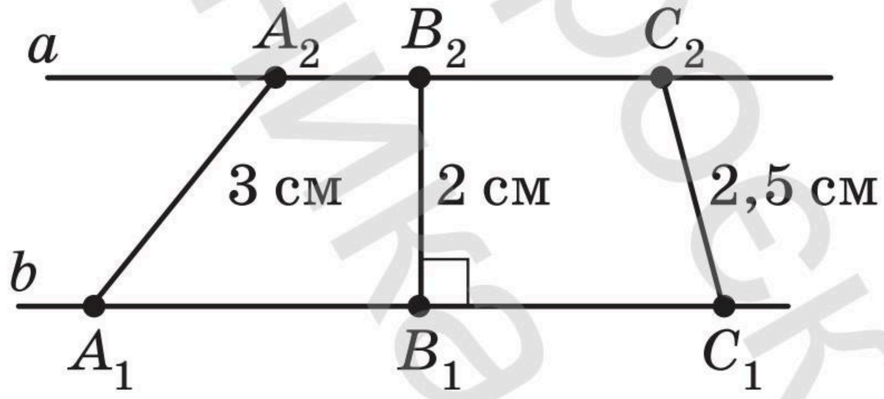


Рис. 7

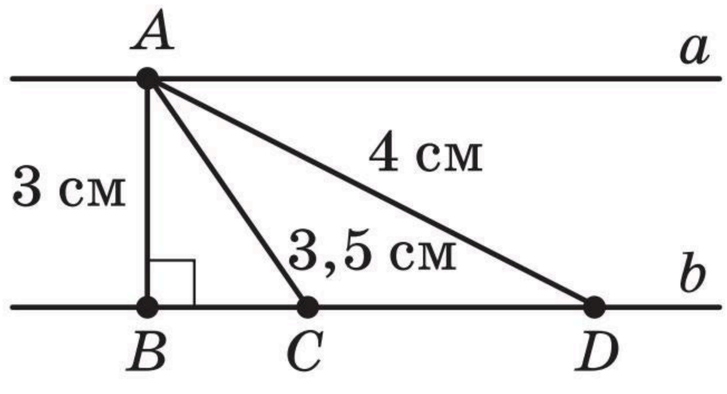


Рис. 8

Середній рівень

11. Накресліть у зошиті дві паралельні прямі та січну, яка перетинає ці прямі. Кути, які утворилися, позначте цифрами від 1 до 8. Запишіть за вашим рисунком, які кути є: а) внутрішніми односторонніми; б) зовнішніми односторонніми; в) відповідними.

12. Накресліть у зошиті дві паралельні прямі та січну, яка перетинає ці прямі. Кути, які утворилися, позначте цифрами від 1 до 8. Запишіть за вашим рисунком, які кути є: а) внутрішніми різносторонніми; б) зовнішніми різносторонніми; в) внутрішніми односторонніми.

13. Накресліть у зошиті дві паралельні прямі та січну, яка перетинає ці прямі. Кожну пару рівних кутів позначте на рисунку однаковим кольором.

14. Накресліть у зошиті дві паралельні прямі та січну, яка перетинає ці прямі. Кути, які утворилися, позначте цифрами від 1 до 8. Випишіть пари кутів, сума яких дорівнює 180°.

15. Визначте, чи є паралельними прямі a і b у кожному з випадків на рис. 9.

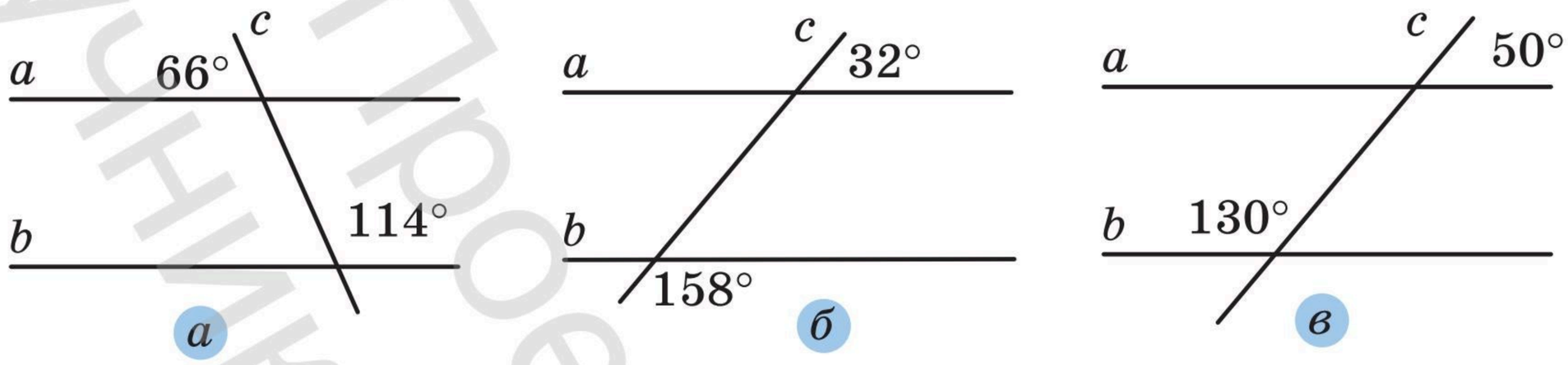


Рис. 9

16. Визначте, чи є паралельними прямі a і b у кожному з випадків на рис. 10.

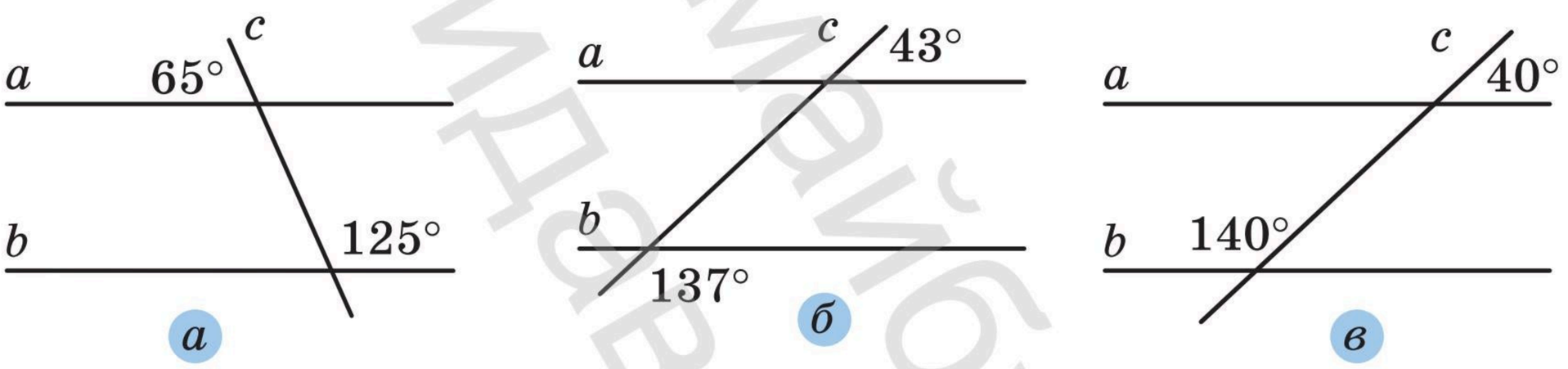


Рис. 10

17. На рис. 11 прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x.

18. На рис. 12 прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x.

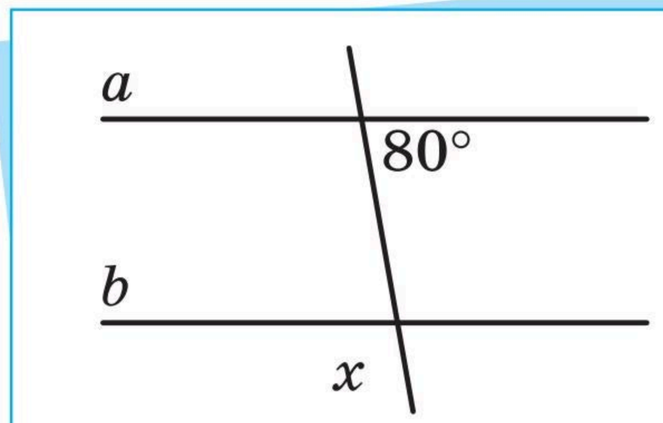


Рис. 11

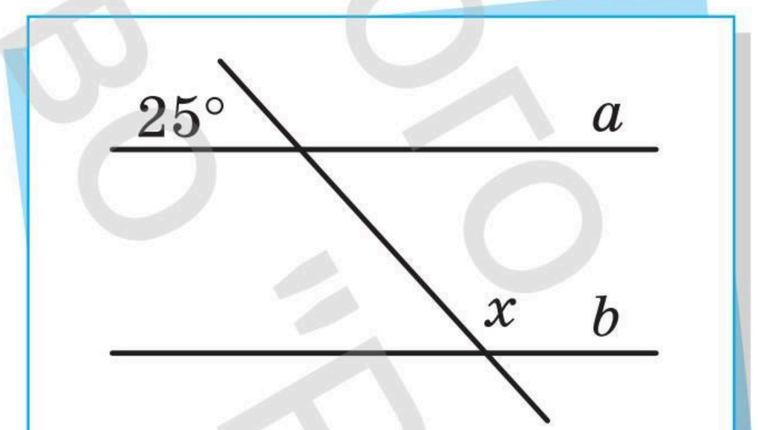


Рис. 12

19. Чи паралельні прямі AD і BC на рис. 13, якщо $AB = AD$? Поясніть свою відповідь.

20. Чи є рівнобічним $\triangle DAB$ на рис. 13, якщо прямі AD і BC паралельні? Поясніть свою відповідь.

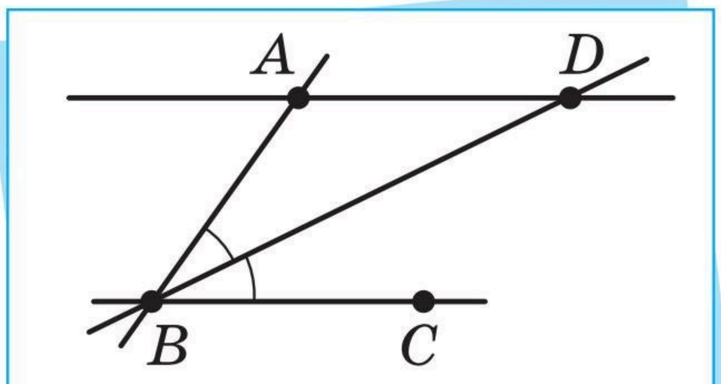


Рис. 13

Достатній рівень

21. На рис. 14 зображено креслярський пристрій, який називають *рейсшина*. Цей пристрій дозволяє креслити паралельні відрізки. Спираючись на ознаку паралельності прямих, поясніть, чому накреслені відрізки паралельні.

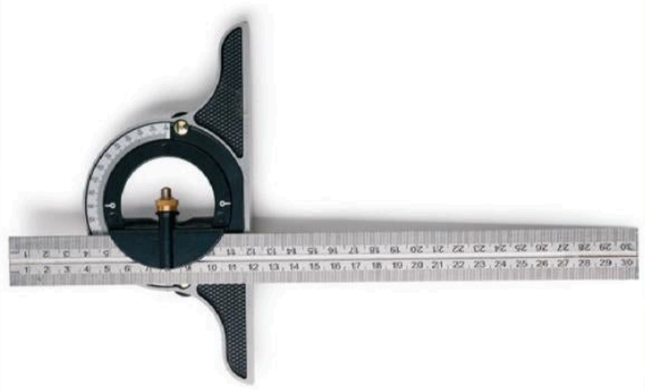
22. На рис. 15 зображено рівні трикутники ABD і FOC, у яких $AD = CF$. Доведіть паралельність прямих AB і OF.

23. Прямі a і b перетинає січна. Чи можна стверджувати, що коли утворені при цьому відповідні кути не рівні, то прямі a і b не паралельні. Обґрунтуйте свою відповідь.

24. Прямі a і b не паралельні прямій c. Чи можна стверджувати, що прямі a і b не паралельні? Обґрунтуйте свою відповідь.

25. На рис. 16 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

26. На рис. 16 $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.


Рис. 14

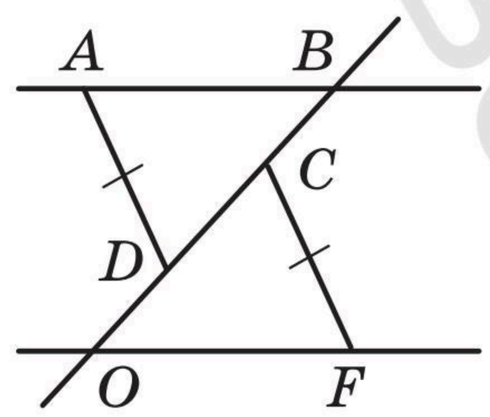


Рис. 15

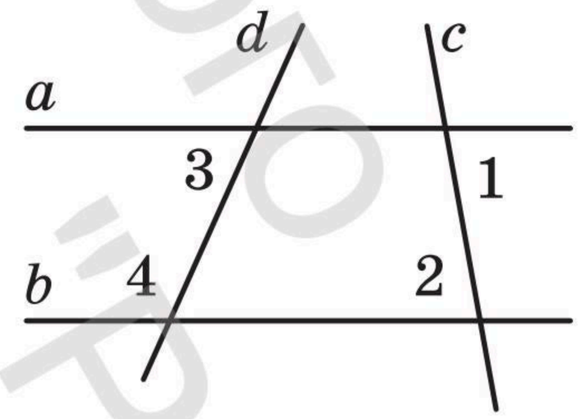


Рис. 16

27. Один із зовнішніх односторонніх кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, на 30° більший за інший. Знайдіть градусні міри цих кутів.

28. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, у чотири рази більший за інший. Знайдіть градусні міри цих кутів.

29. Сума градусних мір двох кутів, утворених у результаті перетину паралельних прямих січною, дорівнює 80°. Знайдіть градусні міри всіх восьми утворених кутів (відмінних від розгорнутих).

30. Сума градусних мір трьох кутів, утворених у результаті перетину паралельних прямих січною, дорівнює 90°. Знайдіть градусні міри всіх восьми утворених кутів (відмінних від розгорнутих).

Високий рівень

31. Сума градусних мір трьох кутів, утворених у результаті перетину паралельних прямих січною, дорівнює 246°. Знайдіть градусні міри всіх восьми утворених кутів (відмінних від розгорнутих). Скільки розв'язків має задача?

32. Сума градусних мір трьох кутів, утворених у результаті перетину паралельних прямих січною, дорівнює 258°. Знайдіть градусні міри всіх восьми утворених кутів (відмінних від розгорнутих). Скільки розв'язків має задача?

33. Доведіть, що бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених у результаті перетину паралельних прямих січною, паралельні.

34. Доведіть, що бісектриси відповідних кутів, утворених у результаті перетину паралельних прямих січною, паралельні.

35. На рис. 17 прямі AB і CD — паралельні. Знайдіть градусну міру кута AOC, якщо $\angle OAB = 28°$, $\angle OCD = 52°$.

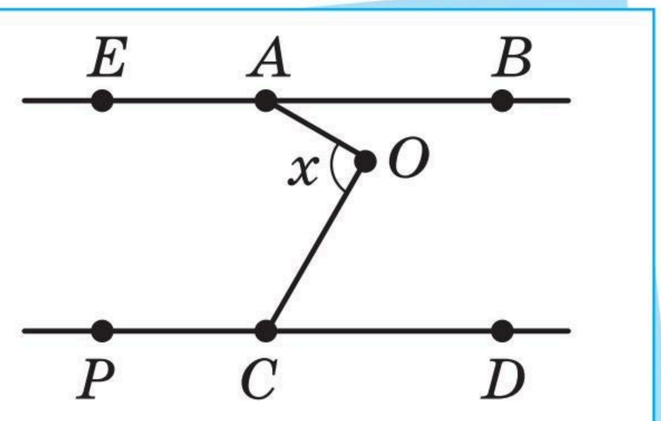


Рис. 17

36. На рис. 17 прямі AB і CD — паралельні. Знайдіть градусну міру кута AOC, якщо $\angle OAE = 150°$, $\angle OCP = 120°$.

37. Пряма a паралельна основі BC рівнобічного трикутника ABC і перетинає його бічні сторони AB і AC у точках D і E. Доведіть, що трикутник ADE рівнобічний.

38. Через середину бічної сторони рівнобічного трикутника проходить пряма, паралельна його основі. Доведіть, що ця пряма проходить через середину другої бічної сторони трикутника.

39. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC. Через точку D проведено пряму, що перетинає сторону BC у точці O так, що $BO = OD$. Доведіть, що $DO \parallel AB$.

40. У трикутнику ABC градусна міра кута A дорівнює $30°$, а кута B — $75°$. Через вершину B проведено пряму BD так, що промінь BC є бісектрисою кута ABD. Доведіть, що прямі BD і AC паралельні.



Цікавинки від дідуся Тараса

Наведені в розділі 6 властивості й ознаки є прикладами взаємно обернених тверджень. Якщо «пряме» твердження сформульовано у вигляді «Якщо P, то S», то обернене до нього твердження формулюється у вигляді «Якщо S, то P». Наприклад, є твердження: «Якщо дерево є ялинкою, то воно вічнозелене». Оберненим до нього буде твердження: «Якщо дерево вічнозелене, то воно є ялинкою».

Зрозуміло, що твердження, яке є оберненим до оберненого твердження, має збігатися з початковим, «прямим» твердженням. Наприклад, якщо ми будемо утворювати твердження, обернене до «Якщо дерево вічнозелене, то воно є ялинкою», отримаємо початкове: «Якщо дерево є ялинкою, то воно вічнозелене». Саме тому такі твердження називають *взаємно* оберненими.

Взаємно обернені твердження не обов'язково одночасно істинні чи хибні. Наприклад, твердження «Якщо дерево є ялинкою, то воно вічнозелене» є істинним, а обернене до нього «Якщо дерево вічнозелене, то воно є ялинкою» — хибним.

Однак трапляється, що взаємно обернені твердження одночасно є істинними. Наприклад, у § 22 ми довели, що твердження «Якщо прямі паралельні, то внутрішні різносторонні кути рівні» і «Якщо внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні» одночасно є істинними. Але обидва ці твердження потрібно було доводити, бо з істинності одного з них «автоматично» не випливає істинність іншого!



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Наведіть кілька таких прикладів взаємно обернених тверджень із життя, щоб: а) обидва твердження були хибними; б) обидва твердження були істинними; в) одне із тверджень було істинним, а інше — хибним.

2. Наведіть кілька таких прикладів взаємно обернених математичних тверджень, щоб: а) обидва твердження були хибними; б) обидва твердження були істинними; в) одне із тверджень було істинним, а інше — хибним.

3. Чи часто вам у житті доводилося мати справу зі взаємно оберненими твердженнями? Наведіть приклади таких ситуацій.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть: а) $2^5 \cdot 2^7 : 2^{10}$; б) $\left(3^5 \cdot 3^4\right) : \left(3^6 \cdot 3^2\right)$; в) $\left(5^3\right)^4 : \left(5^5\right)^2$.
2. Дмитрик збирає марки. Він виявив, що *всі* його марки можна розкласти в маленькі альбоми, розраховані на 35, 45 і 50 марок, так, що *всі* місця в цих альбомах будуть заповнені. Яка *найменша* кількість марок може бути в Дмитрика?
3. Розв'яжіть систему рівнянь.

   а) $\begin{cases} x - 3y = 11, \\ 3x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 5y = 13, \\ 4x - 3y = 19. \end{cases}$
4. Побудуйте в ПДСК прямі, що є графіками функцій $y = 2x - 1$ і $y = -2x + 3$. Чи є ці прямі паралельними? Якщо ні, то знайдіть координати точки їх перетину.
5. Побудуйте в зошиті рівнобічний трикутник. За допомогою транспортира виміряйте градусні міри його кутів. Які висновки можна зробити із цих вимірювань?

§ 23. Сума кутів трикутника

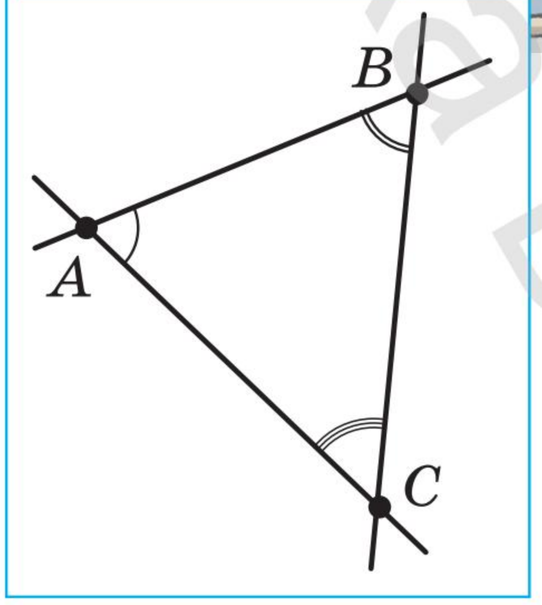


Недавно прочитав цікаву статтю про громадський транспорт без водія, який запустили в Японії. Задумався про те, що вулиці в місті часто бувають не лише у вигляді сітки паралельних і перпендикулярних прямих, тобто маршрути можуть мати й форму трикутника. Цікаво, яким чином комп'ютер розраховує кути повороту транспорту, щоб рухатися таким от «трикутним» маршрутом?



Дійсно цікаво! А намалюємо знову схему. У нашому місті якраз є кільцевий автобусний маршрут, що має форму великого трикутника. Нехай точка A позначає пам'ятник





Тарасу Шевченку, точка B — універмаг, а точка C — центральний ринок. Умовно ці точки сполучаються великими проспектами. Нехай кожен із нас намалює схему цього маршруту та виміряє за допомогою транспортира кути, які утворилися. Тоді й дізнаємось кути повороту, які треба буде виконати автоматизованому транспорту.



Я пам'ятаю, як ці точки приблизно розташовані, тому намалював схему та виміряв! Вийшло, що $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$. А в тебе як?



Я теж пам'ятаю, і в мене вийшло $\angle A = 65°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 40°$.



Цікаво, що в обох випадках $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$! Чи це випадково?



Не думаю. Мабуть, це загальне правило. Однак його ще потрібно довести!



Дійсно, Тетянко, таке загальне правило є. Його описує така теорема:

ТЕОРЕМА (про суму кутів трикутника).

Сума градусних мір кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.

Розглянемо трикутник ABC. Покажемо, що $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. Для цього через точку B проведемо пряму l, паралельну стороні AC трикутника (рис. 23.1). Утворилося три кути з вершиною в точці B — позначимо їх цифрами 1, 2 і 3, при цьому $\angle 2=\angle B$.

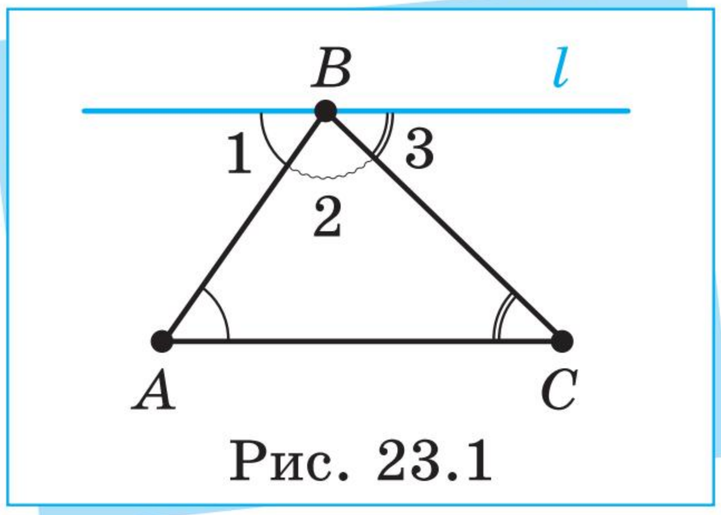


Рис. 23.1

За властивістю суміжних кутів $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$. Але $\angle 1=\angle A$ і $\angle 3=\angle C$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих l і AC та січних AB і BC відповідно. Отже, $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.



Із теореми про суму кутів трикутника випливає, що в будь-якому трикутнику може бути не більше одного тупого кута. Обґрунтуйте цей факт самостійно.



У багатьох задачах використовуються кути, суміжні з кутами трикутника. Їх називають зовнішніми кутам трикутника. Наприклад, на рис. 23.2 кути 1, 2, 3 є зовнішніми кутами трикутника ABC.

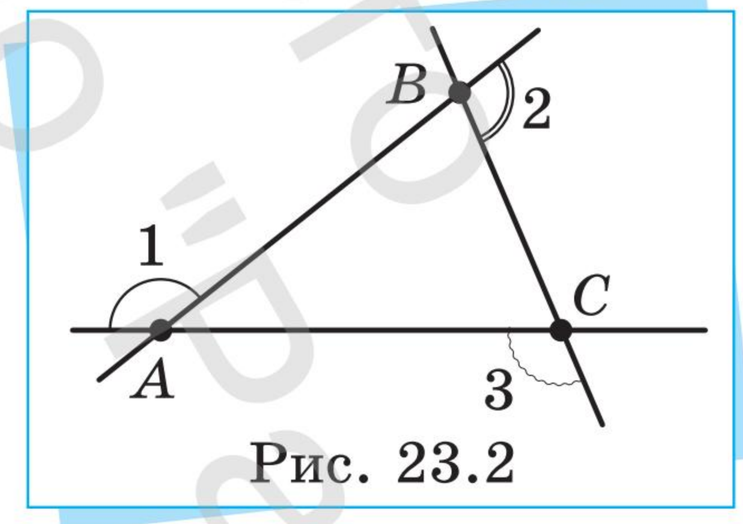


Рис. 23.2

Очевидно, що при кожній вершині кута трикутника є два зовнішні кути, які рівні між собою як вертикальні. Здебільшого ми будемо говорити лише про один із них.

Кути трикутника, на відміну від його зовнішніх кутів, часто називають внутрішніми кутами трикутника.

Властивість зовнішнього кута трикутника подано в твердженні:

ТЕОРЕМА (властивість зовнішнього кута трикутника).

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів цього трикутника, не суміжних із ним.

Розглянемо трикутник ABC. Позначимо його внутрішні та зовнішні кути цифрами 1, 2, 3, 4, 5 і 6 (рис. 23.3). Покажемо, наприклад, що $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$. (Аналогічно можна показати, що $\angle 5 = \angle 1 + \angle 3$ і $\angle 6 = \angle 1 + \angle 2$.)

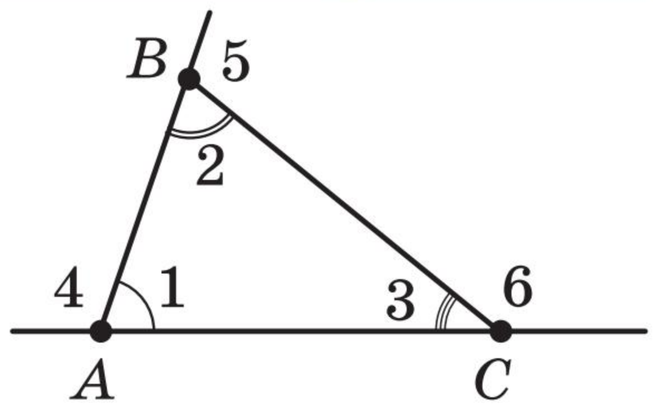


Рис. 23.3

За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, а $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ як суміжні. Отже, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$, звідки $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$.



Зі щойно доведеної теореми випливає: зовнішній кут трикутника завжди більший за будь-який із двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних із ним. Обґрунтуйте цей факт самостійно.



Розв'яжемо задачу.

Задача. Доведіть: 1) у рівносторонньому трикутнику градусна міра кожного з його кутів дорівнює 60°; 2) якщо один із кутів рівнобічного трикутника дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній.

Підручник Проект "Інтелект України" Видавництво "Ранок"

Розв'язання

1) Ми знаємо, що в рівносторонньому трикутнику градусні міри всіх кутів рівні. Оскільки сума всіх кутів трикутника дорівнює $180°$, то градусна міра кожного з кутів рівностороннього трикутника дорівнює $180° : 3 = 60°$.

2) Одразу зауважимо: якщо один із кутів рівнобічного трикутника дорівнює $60°$, то й всі інші кути також будуть по $60°$. Справді, якщо один із кутів при основі дорівнює $60°$, то й інший також дорівнює $60°$, а кут при вершині дорівнюватиме $180° - 60° - 60° = 60°$. Якщо ж кут при вершині дорівнює $60°$, то сума двох кутів при основі буде дорівнювати $180° - 60° = 120°$. Оскільки ці кути рівні між собою, то кожен із них дорівнює $60°$.

Тепер розглянемо трикутник ABC, у якого $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. За ознакою рівнобічного трикутника з рівності кутів $\angle A = \angle B$ випливає рівність сторін $AC = BC$, а з рівності кутів $\angle A = \angle C$ — рівність сторін $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AC$, тобто трикутник ABC — рівносторонній.

Перевірте себе!

1. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
2. Сформулюйте теорему про властивість зовнішнього кута трикутника.
3. Яку властивість мають кути рівностороннього трикутника?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють: а) $30°$, $40°$, $90°$; б) $40°$, $50°$, $90°$; в) $30°$, $120°$, $30°$; г) $110°$, $10°$, $100°$?
2. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють: а) $50°$, $30°$, $100°$; б) $45°$, $45°$, $90°$; в) $5°$, $12°$, $168°$; г) $90°$, $90°$, $30°$?

3. Побудуйте довільний гострокутний трикутник ABC. Вимірявши довжини сторін і градусні міри кутів цього трикутника. Яка сторона має найменшу довжину? Який кут має найменшу градусну міру?

4. Побудуйте довільний тупокутний трикутник ABC. Вимірявши довжини сторін і градусні міри кутів цього трикутника. Яка сторона має найбільшу довжину? Який кут має найбільшу градусну міру?

5. Побудуйте гострокутний трикутник. Виміряйте градусні міри його зовнішніх кутів.

6. Побудуйте тупокутний трикутник. Виміряйте градусні міри його зовнішніх кутів.

7. Знайдіть градусну міру невідомого кута трикутника (рис. 1).

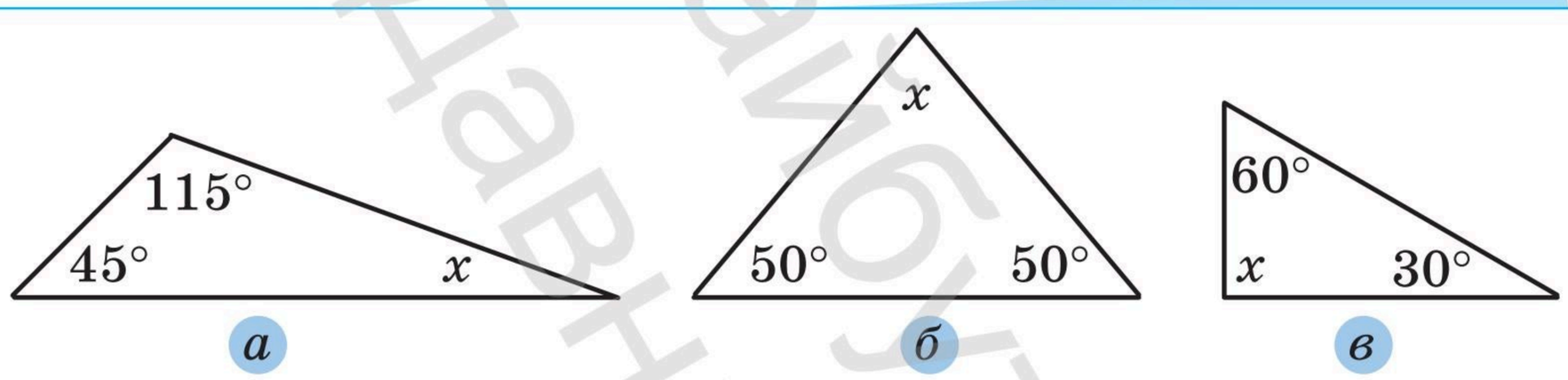


Рис. 1

8. Знайдіть градусну міру невідомого кута трикутника (рис. 2).

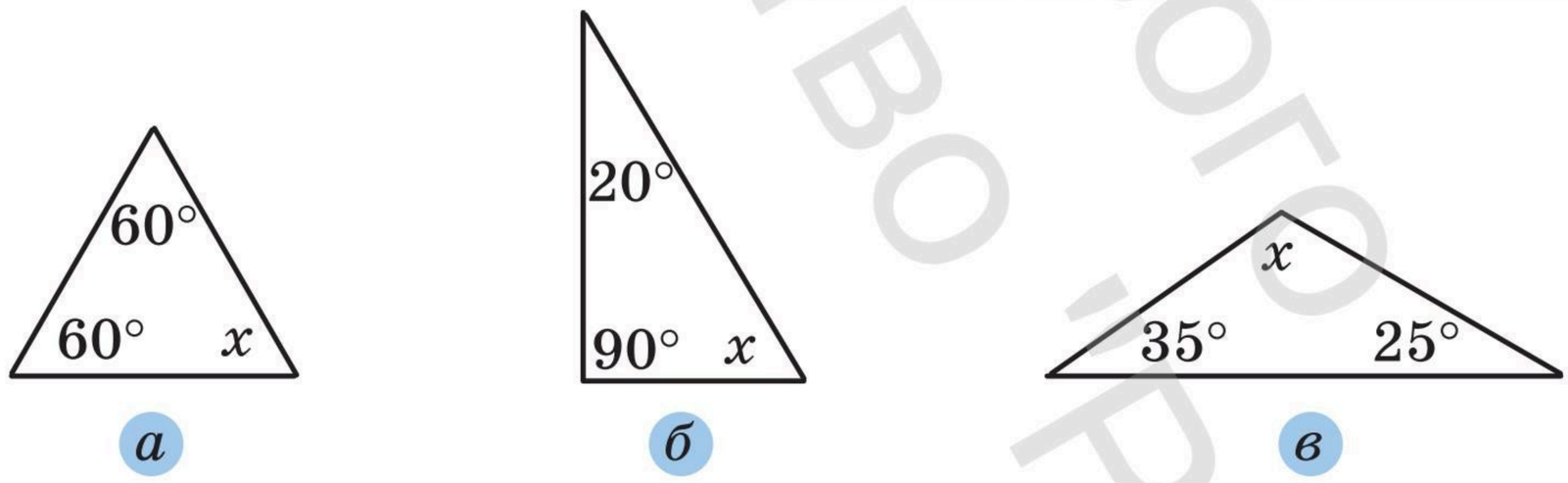


Рис. 2

9. У трикутника ABC $\angle A = 25°$, $\angle B = 35°$. Знайдіть кут C.

10. У трикутника ABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 130°$. Знайдіть кут B.

11. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C (рис. 3), якщо $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$.

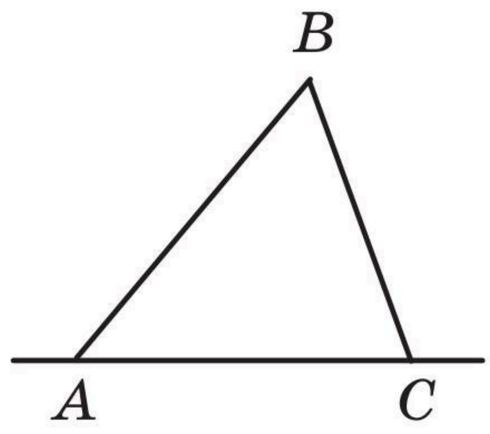


Рис. 3

12. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута трикутника ABC при вершині A (рис. 3), якщо $\angle A = 50°$, $\angle C = 70°$, $\angle B = 60°$.

Середній рівень

13. Побудуйте гострокутний трикутник. За допомогою транспортира виміряйте градусні міри кутів цього трикутника та знайдіть їх суму.

14. Побудуйте тупокутний трикутник. За допомогою транспортира виміряйте градусні міри кутів цього трикутника та знайдіть їх суму.

15. Побудуйте трикутник ABC, у якого сторона AC — найбільша, а сторона AB — найменша. За допомогою транспортира виміряйте градусні міри кутів трикутника. Навпроти якої сторони розташований найбільший кут трикутника ABC? Навпроти якої сторони розташований найменший кут трикутника?

16. Побудуйте трикутник ABC, у якого сторони AB і BC рівні. За допомогою транспортира виміряйте градусні міри кутів цього трикутника. Чи є в трикутнику рівні кути? Якщо так, зазначте, навпроти яких сторін розташовані рівні кути.

17. У трикутника ABC $\angle A = \angle C = 35°$ (рис. 4). Знайдіть градусну міру кута B.

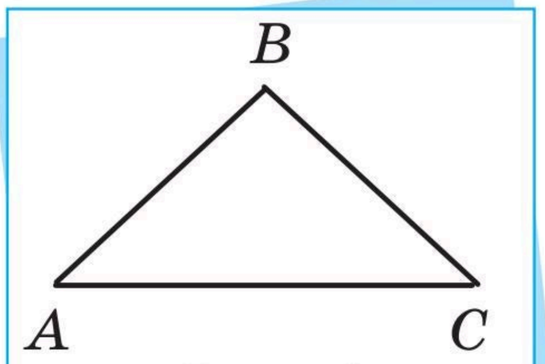


Рис. 4

18. У трикутника ABC $\angle A = \angle C$, $\angle B = 150°$ (рис. 4). Знайдіть градусні міри кутів A і C.

19. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C, якщо $\angle A = 45°$, $\angle B = 65°$ (рис. 5). Розв'яжіть задачу двома способами.

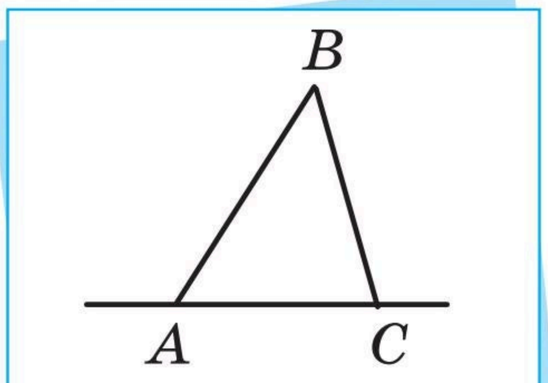


Рис. 5

20. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута трикутника ABC при вершині A, якщо $\angle C = 72°$, $\angle B = 53°$ (рис. 5). Розв'яжіть задачу двома способами.

21. У трикутнику ABC градусні міри внутрішніх кутів відносяться як $2 : 3 : 5$. Знайдіть градусні міри кутів трикутника ABC.

22. У трикутнику MNK градусні міри внутрішніх кутів відносяться як $2 : 3 : 4$. Знайдіть градусні міри кутів трикутника MNK.

Достатній рівень

23. Градусна міра одного з кутів рівнобічного трикутника дорівнює $70°$. Знайдіть градусні міри двох інших кутів цього трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.

24. Градусна міра одного з кутів рівнобічного трикутника дорівнює $50°$. Знайдіть градусні міри двох інших кутів цього трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.

25. Градусна міра одного з кутів трикутника дорівнює $70°$. Знайдіть градусні міри двох інших кутів, якщо їх різниця дорівнює $50°$.

26. Градусна міра одного з кутів трикутника дорівнює 60°. Знайдіть градусні міри двох інших кутів, якщо вони відносяться як 1 : 2.

27. Градусна міра одного з кутів рівнобічного трикутника вдвічі більша за градусну міру його іншого кута. Знайдіть градусні міри кутів цього трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.

28. Градусна міра одного з кутів рівнобічного трикутника вчетверо більша за градусну міру його іншого кута. Знайдіть градусні міри кутів цього трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.

29. Бісектриси кутів при основі AB рівнобічного трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 6). Знайдіть градусну міру кута AMB, якщо градусна міра кута C дорівнює 130°.

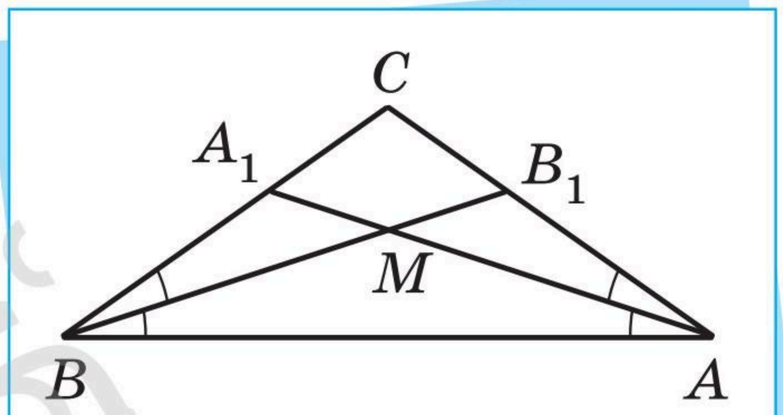


Рис. 6

30. Бісектриси кутів при основі AB рівнобічного трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 6). Знайдіть градусні міри кутів трикутника ABC, якщо градусна міра кута AMB дорівнює 150°.

31. Градусна міра зовнішнього кута трикутника більша за градусні міри кутів, не суміжних із ним, на 30° і 70°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

32. Градусна міра зовнішнього кута трикутника втричі більша за градусну міру одного з кутів, не суміжних із ним, і на 20° більша за градусну міру іншого такого кута. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

Високий рівень

33. На рис. 7 $\angle B = 60°$, $\angle D = 20°$, $\angle AOK = 50°$. Знайдіть градусну міру кута A.

34. На рис. 7 $\angle A = 40°$, $\angle D = 30°$, $\angle AOD = 150°$. Знайдіть градусну міру кута B.

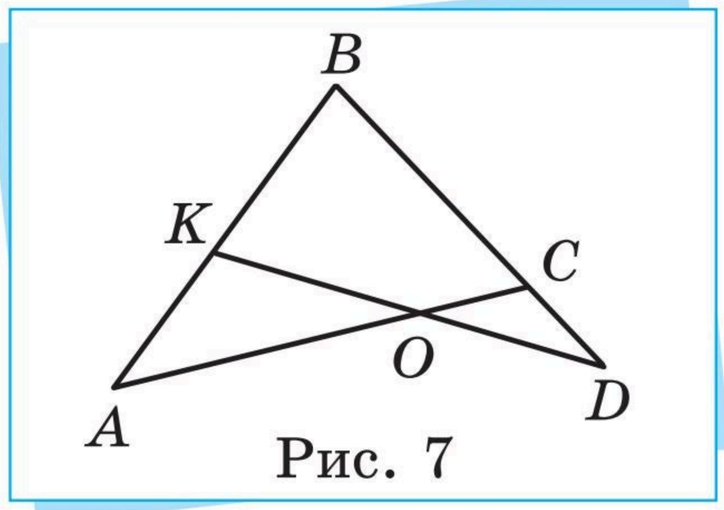


Рис. 7

35. Доведіть твердження: якщо сума градусних мір будь-яких двох кутів трикутника більша за 90°, то трикутник гострокутний.

36. Доведіть твердження: якщо сума градусних мір двох кутів трикутника менша від 90°, то трикутник тупокутний.

37. Доведіть, що в трикутнику навпроти більшої сторони розташований більший кут. Зробіть висновок про те, який кут розташований навпроти найбільшої сторони трикутника.

38. Доведіть, що в трикутнику навпроти більшого кута розташована більша сторона. Зробіть висновок про те, яка сторона розташована навпроти найбільшого кута трикутника.

39. Доведіть *нерівність трикутника: довжина кожної сторони трикутника менша від суми довжин двох інших його сторін.* Використайте додаткову побудову (рис. 8) для трикутника ABC, виконану для доведення нерівності $c < a + b$. Яку аналогічну додаткову побудову ви можете запропонувати для доведення нерівності: 1) $a < b + c$; 2) $b < a + c$?

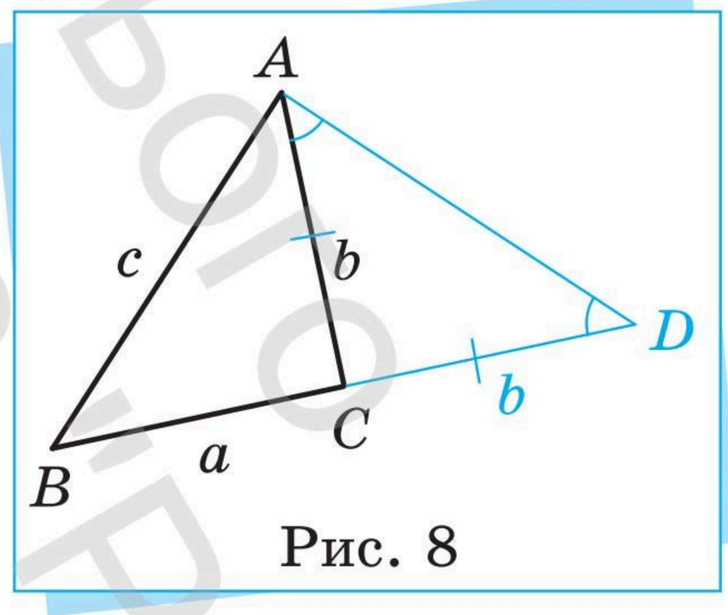


Рис. 8

40. Медіана CM трикутника дорівнює половині його сторони AB (рис. 9). Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

41. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису AD (рис. 10). Градусна міра кута B дорівнює $36°$. Доведіть, що трикутники ABD і ACD рівнобічні.

42. Бісектриси кутів B і C трикутника ABC перетинаються в точці K (рис. 11). Доведіть, що $\angle BKC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

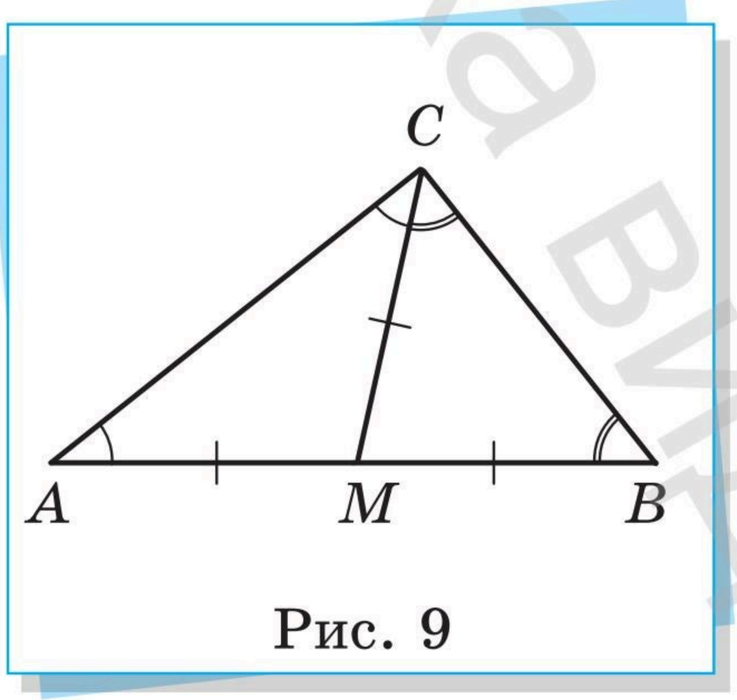


Рис. 9

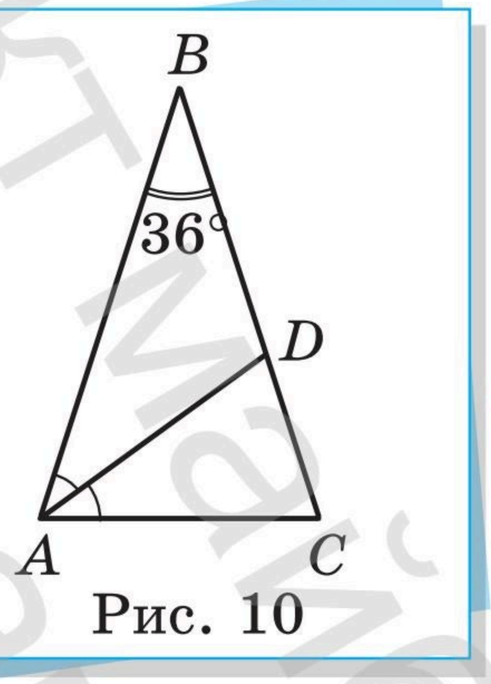


Рис. 10

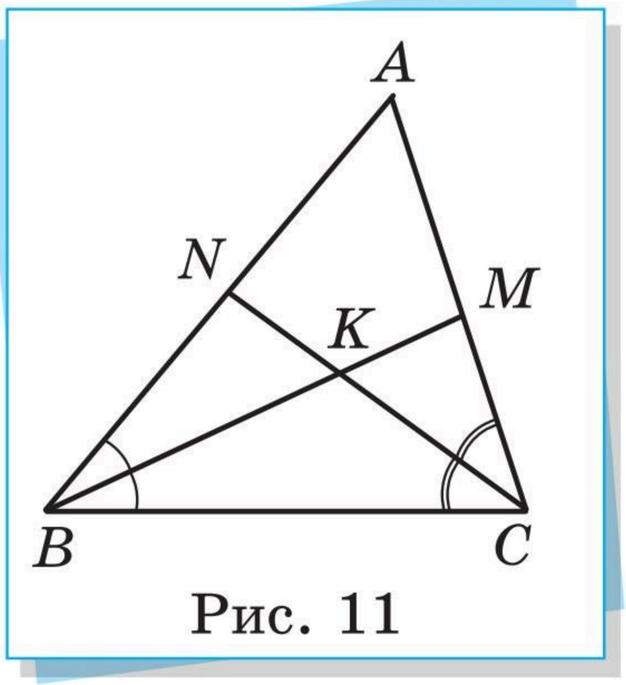


Рис. 11



Цікавинки від дідуся Тараса

Як ви могли помітити, доведення *теореми про суму кутів трикутника* суттєво використовує аксіому паралельних прямих (п'ятий постулат Евкліда). Тому очевидно, що в уже згадуваних неевклідових геометріях ця теорема не буде правильною.

В еліптичній геометрії сума градусних мір кутів будь-якого трикутника більша за $180°$, але менша від $360°$. У гіперболічній геометрії сума градусних мір кутів будь-якого трикутника менша від $180°$.

Різницю між сумою градусних мір кутів деякого трикутника та $180°$ називають *дефектом* цього трикутника. Порівнюючи дефект трикутника з нулем, можна встановити, у якій із геометрій розглядається цей трикутник. Зрозуміло, що в евклідовій геометрії дефект будь-якого трикутника дорівнює нулю.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Запитайте більше у вчителя або вчительки інформатики про побудову трикутників і вимірювання градусних мір їх кутів у різноманітних прикладних програмних засобах (ППЗ) на кшталт GeoGebra.
2. В одному з ППЗ побудуйте трикутник і визначте градусні міри його кутів. Переконайтеся, що їх сума дійсно дорівнює 180°.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Виконайте множення мономів.

   а) $-3x^3y^4 \cdot 6xy^2$; б) $\left(-2a^2bc\right)\cdot\left(-4ab^3c^2\right)$.

2. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	-4	-2	0	2	4	6
y	-6	3	-10	-6	0	3

   Знайдіть: а) $f(-2)$; б) область визначення функції; в) множину значень функції; г) найбільше значення функції; д) найменше значення функції.

3. У країні Хрумландії живуть хрумзики. Серед них є розумні та красиві. Відомо, що розумних на 20 % більше, ніж красивих, а 30 % розумних є красивими. Скільки відсотків красивих хрумзиків є розумними?
4. Які з відомих вам просторових геометричних тіл містять трикутники як елементи своєї поверхні? Як називають ці елементи поверхні? Як у цьому випадку називають сторони трикутників?
5. За допомогою лінійки та косинця побудуйте в зошиті прямокутний трикутник таким чином, щоб сторони, які утворюють прямий кут, не збігалися з лініями зошита. Проведіть у цьому трикутнику всі можливі висоти. Зробіть висновки.

§ 24. Прямокутний трикутник і його властивості. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Прямокутний трикутник і його властивості

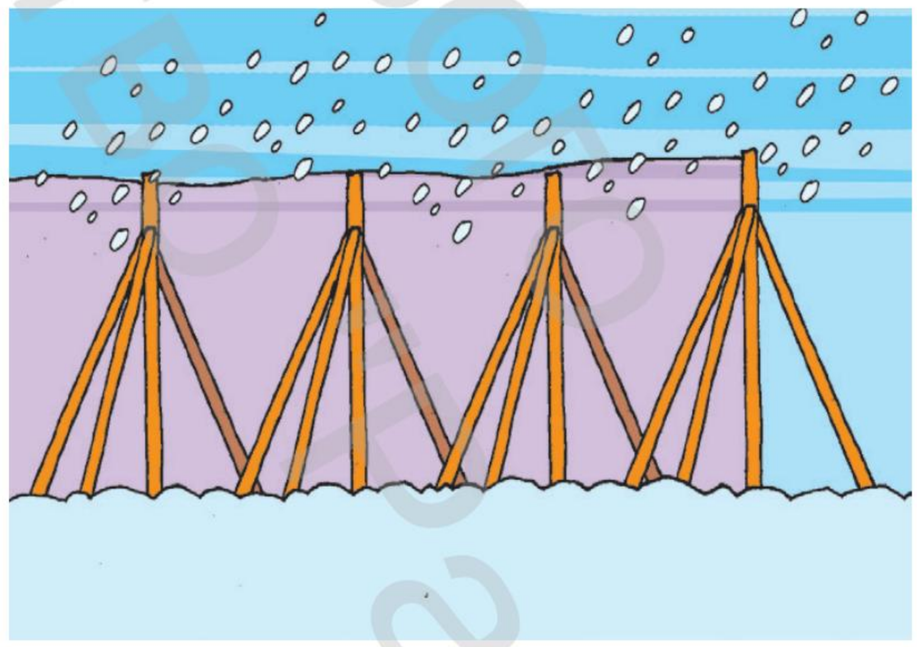


Знаєш, Петрику, а трикутники дійсно надзвичайно часто використовують на практиці. Недавно майстер перекладав нам плитку на кухні та використовував цікавий пристрій для вирівнювання! Якщо глянути на цей клин згори, то він має форму прямокутника, а якщо подивитися збоку, то буде прямокутний трикутник. Таке тіло ми в 5 класі називали *трикутною призмою*.





Надзвичайно цікаво, ніколи не бачив такого пристрою. Але прямокутні трикутники на практиці дійсно дуже часто використовуються. Наприклад, минулої зими я бачив спеціальні щити для затримки снігу, які містять збоку підпорки. Таким



чином утворюються прямокутні трикутники, які забезпечують стійкість конструкції. Мені здається, що цей вид трикутників дуже важливий, і хочеться знати про нього більше!



Дійсно, прямокутні трикутники — особливі. Їх сторони мають спеціальні назви. Сторони, що утворюють прямий кут, називають катетами, а третю сторону називають гіпотенузою.

Наприклад, на рис. 24.1 зображений прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C. Навпроти кута C лежить гіпотенуза AB; сторони AC і BC є катетами, бо вони утворюють прямий кут.

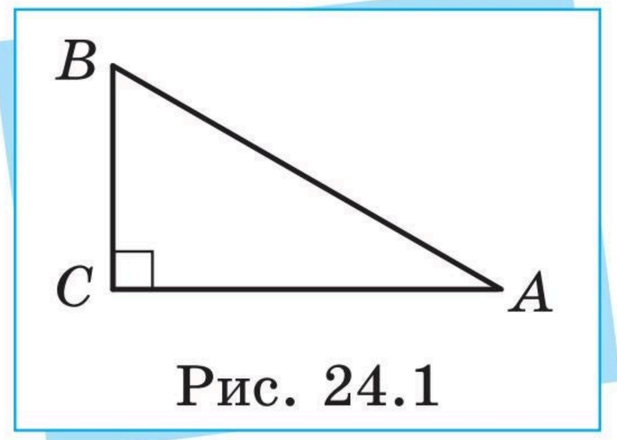


Рис. 24.1



Сформулюємо й доведемо дві важливі властивості прямокутного трикутника.

ТЕОРЕМА (властивість гострих кутів прямокутного трикутника).

У прямокутному трикутнику кути, що лежать навпроти катетів, є гострими, і сума їх градусних мір дорівнює 90°.

Справді, сума градусних мір кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°. Градусна міра прямого кута дорівнює 90°. Отже, сума градусних мір двох інших кутів, що лежать навпроти катетів, дорівнює $180° - 90° = 90°$.

Оскільки градусна міра кожного із цих двох кутів є додатною, то градусна міра кожного з них менша від 90°, тобто обидва кути є гострими.

ТЕОРЕМА (властивість катета, що лежить навпроти кута 30° прямокутного трикутника).

У прямокутному трикутнику катет, що лежить навпроти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Нехай на рис. 24.2 зображено прямокутний трикутник ABC, у якого $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$. Тоді за щойно доведеною властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle B = 60°$. Покажемо, що $BC = \frac{1}{2}AB$.

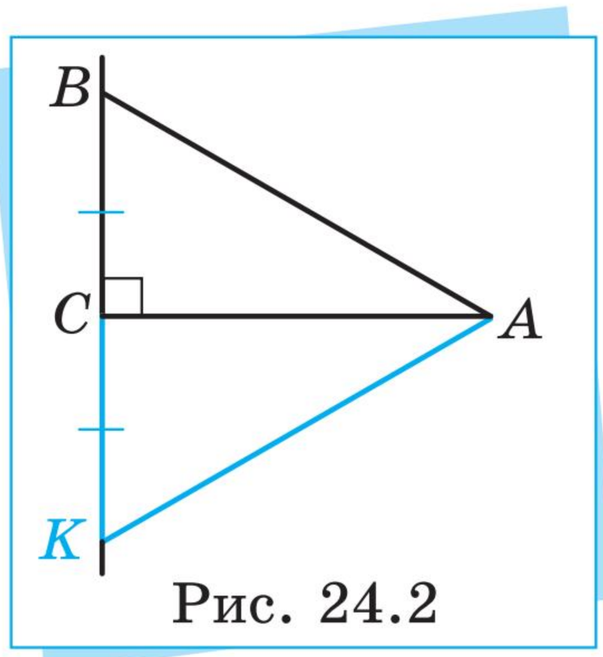


Рис. 24.2

Відкладемо на промені BC точку K так, щоб $CK = CB$. У трикутників ABC і AKC сторона AC — спільна, $CK = CB$ за побудовою, а $\angle ACB = \angle ACK = 90°$. Отже, $\triangle ABC = \triangle AKC$ за двома сторонами й кутом між ними. Тому $AB = AK$ і трикутник BAK — рівнобічний. Отже, $\angle B = \angle K = 60°$, а $\angle BAK = 180° - 60° - 60° = 60°$.

Трикутник, у якого всі кути рівні, як відомо, є рівностороннім, тобто $AB = AK = BK$. Тоді $BC = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}AB$, що й потрібно було довести.



Зауважимо, що істинним є також твердження, обернене до властивості катета, що лежить навпроти кута 30°: якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині його гіпотенузи, то кут, що лежить навпроти цього катета, дорівнює 30°.

Доведення цього твердження:
https://rnk.com.ua/106108



Ознаки рівності прямокутних трикутників



Оскільки прямокутний трикутник є окремим випадком довільного трикутника, то *всі три ознаки рівності трикутників мають місце й для прямокутного трикутника.* Проте прямокутні трикутники мають свої особливості, тому ознаки їх рівності можна сформулювати особливим чином.

ТЕОРЕМА (ознаки рівності прямокутних трикутників).

1. **За двома катетами.** Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
2. **За катетом і прилеглим гострим кутом.** Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.



3. **За катетом і протилежним гострим кутом.** Якщо катет і протилежний до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному до нього гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
4. **За гіпотенузою й гострим кутом.** Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
5. **За гіпотенузою й катетом.** Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Підручник Проект Освіта Видавництво

Більшість із наведених тверджень випливають з уже відомих вам ознак рівності довільних трикутників. Покажемо це.

1 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.3). За умовою відомо, що $BC = B_1C_1$ і $AC = A_1C_1$. Отже, такі трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників, оскільки в них відповідно рівні дві сторони та кут між ними.

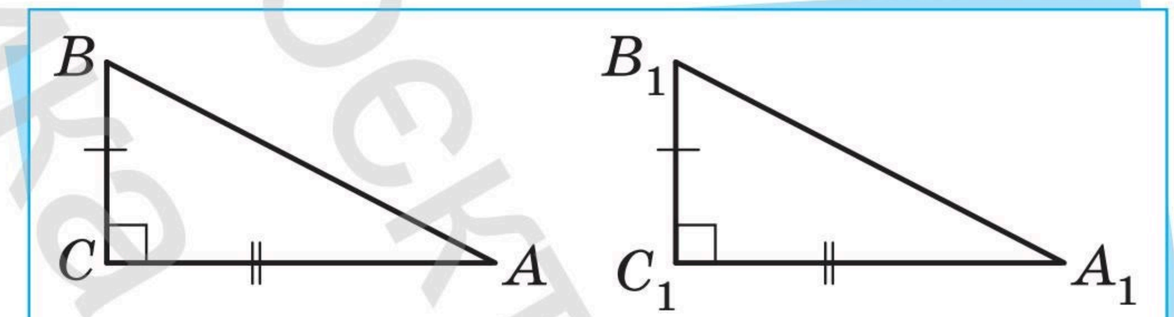


Рис. 24.3

2 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.4). За умовою відомо, що $\angle A = \angle A_1$ і $AC = A_1C_1$. Отже, такі трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників, оскільки в них відповідно рівні сторона та два прилеглих до неї кути.

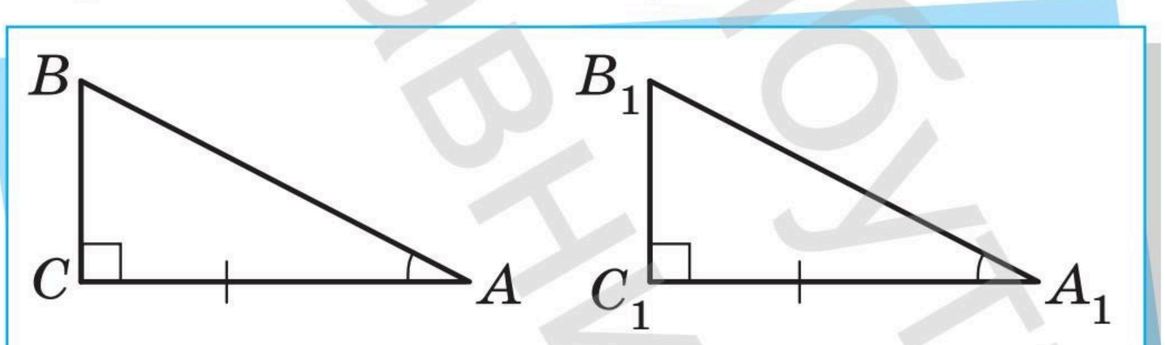


Рис. 24.4

3 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90°$ (рис. 24.5). За умовою відомо, що $\angle B = \angle B_1$ і $AC = A_1C_1$. Оскільки $\angle A = 90° - \angle B$ і $\angle A_1 = 90° - \angle B_1$, то $\angle A = \angle A_1$ і дані трикутники рівні за щойно доведеною в пункті 2 ознакою.

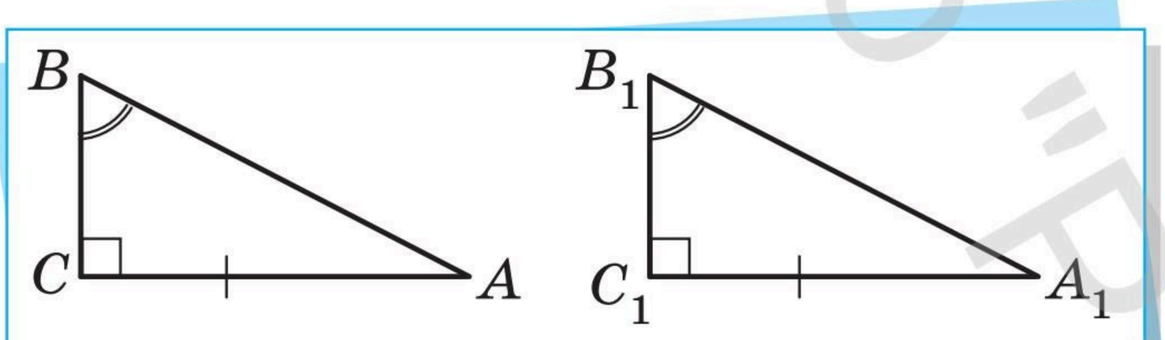


Рис. 24.5

4 Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два дані прямокутні трикутники, причому $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ (рис. 24.6). За умовою відомо, що $\angle A = \angle A_1$ і $AB = A_1B_1$. Оскільки $\angle B = 90^\circ - \angle A$ і $\angle B_1 = 90^\circ - \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Отже, ці два трикутники будуть рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами.

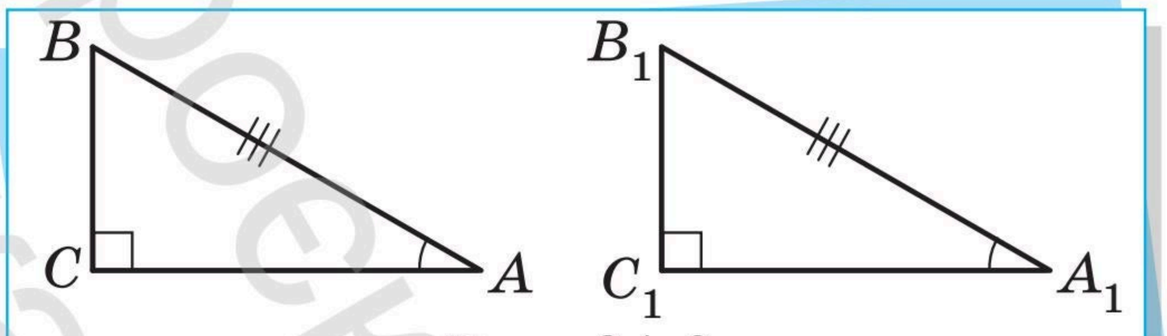


Рис. 24.6

5 Розглянемо два прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Доведемо, що ці трикутники рівні.

За аксіомою про існування рівного трикутника існує трикутник $A_2B_2C_2$, рівний трикутнику $A_1B_1C_1$ і розташований так, що точка C_2 збігається з точкою C, точка B_2 належить променю CB, а точка A_2 лежить в іншій півплощині відносно прямої BC, ніж точка A (рис. 24.7).

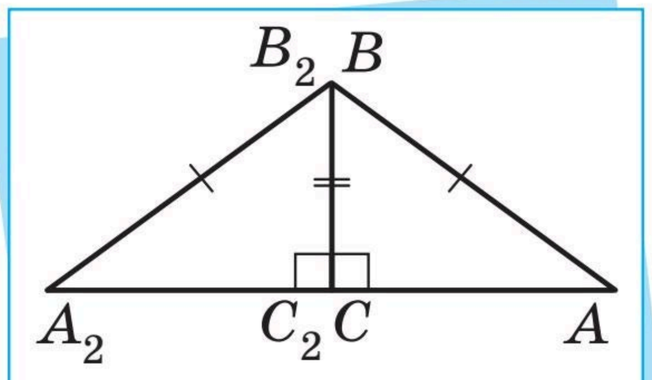


Рис. 24.7

Крім того, за означенням рівних трикутників $\angle C_1 = C_2 = 90^\circ$, $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$.

Оскільки за аксіомою відкладання відрізка від початку даного променя можна відкласти лише один відрізок даної довжини, то точки B_2 і B збігаються. Оскільки $\angle A_2C_2B_2 = 90^\circ$ і $\angle ACB = 90^\circ$, то $\angle A_2C_2A = 180^\circ$, тобто точки A_2, C_2 і A лежать на одній прямій.

Оскільки $AB = A_1B_1 = A_2B_2$, то трикутник A_2B_2A — рівнобічний з основою A_2A, а відрізок B_2C_2 є його висотою, проведеною до основи. За властивістю рівнобічного трикутника ця висота є також медіаною, тобто $A_2C_2 = AC_2 = AC$.

Отже, трикутники ABC і $A_2B_2C_2$ рівні за трьома сторонами. Тому трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ також рівні, що й потрібно було довести.

Перевірте себе!

1. Яку назву має сторона прямокутного трикутника, що лежить навпроти прямого кута? Яку назву мають дві інші сторони прямокутного трикутника?
2. Наведіть властивості прямокутного трикутника.
3. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Укажіть, які з тверджень є *істинними*.
а) У прямокутному трикутнику лише один з кутів гострий.
б) У прямокутному трикутнику лише один з кутів тупий.
в) У прямокутному трикутнику лише один з кутів прямий.

2. Укажіть, які з тверджень є *хибними*.
а) У прямокутному трикутнику всі кути гострі.
б) У прямокутному трикутнику всі кути тупі.
в) У прямокутному трикутнику всі кути прямі.

3. Закінчіть істинне твердження. Сторона прямокутного трикутника, яка лежить навпроти прямого кута, називається...
а) катетом; б) гіпотенузою; в) бічною стороною.

4. Закінчіть істинне твердження. Сторона прямокутного трикутника, яка прилягає до прямого кута, називається...
а) катетом; б) гіпотенузою; в) бічною стороною.

5. У випадках *а–г* на рис. 1 рівні сторони трикутників позначено однаковими штрихами, а рівні кути — однаковими дужками. Виберіть ознаку, за якою дані два трикутники

рівні (за двома катетами; за катетом і прилеглим гострим кутом; за катетом і протилежним гострим кутом; за гіпотенузою й гострим кутом; за гіпотенузою й катетом).

6. У випадках *а–г* на рис. 2 рівні сторони трикутників позначено однаковими штрихами, а рівні кути — однаковими дужками. За якою ознакою дані два трикутники рівні?

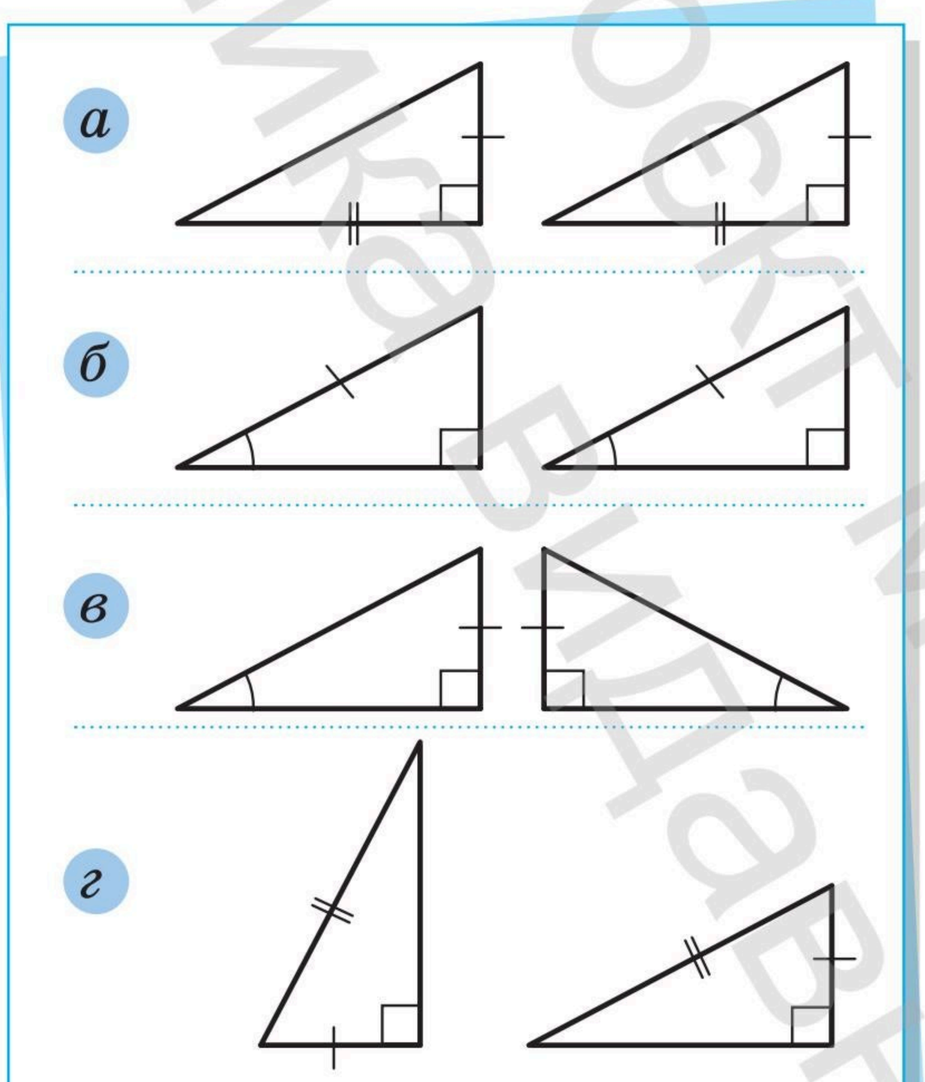


Рис. 1

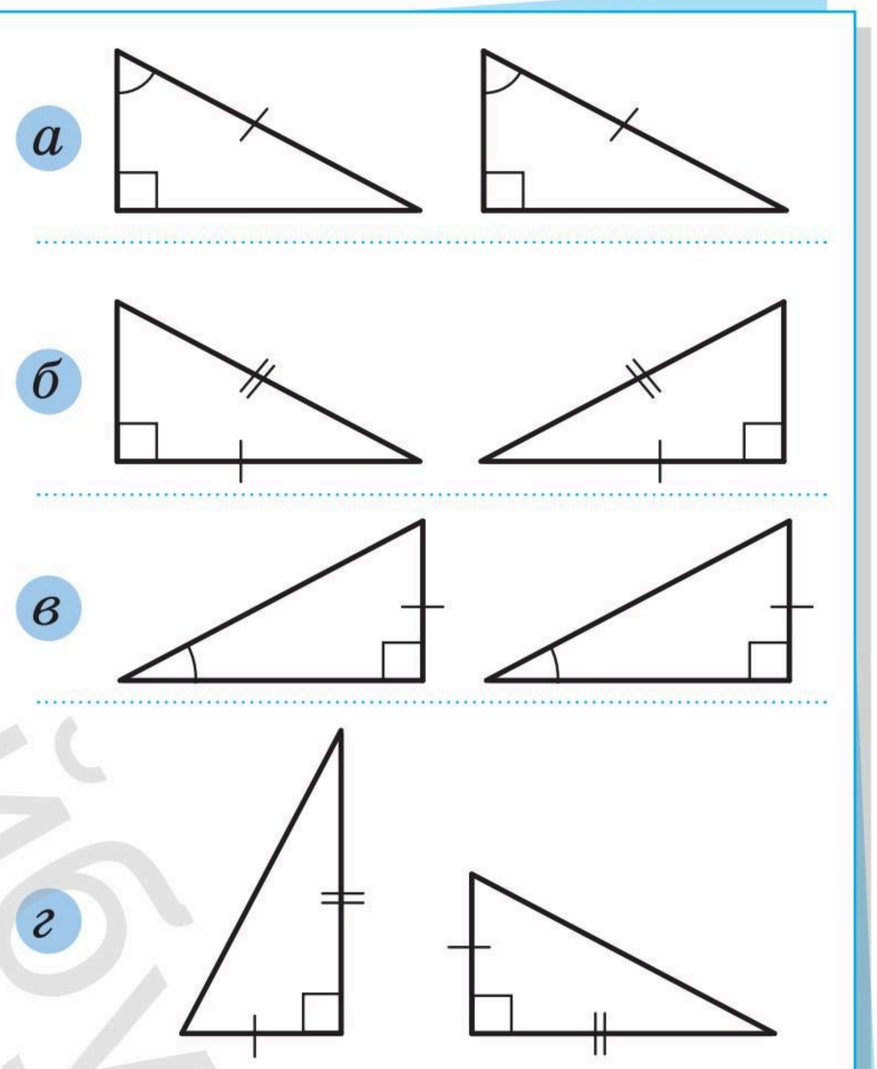


Рис. 2

7. У випадках *а–в* на рис. 3 рівні сторони трикутників позначено однаковими штрихами, а рівні кути — однаковими дужками. Чи рівні дані два трикутники? Якщо так, то за якою ознакою?

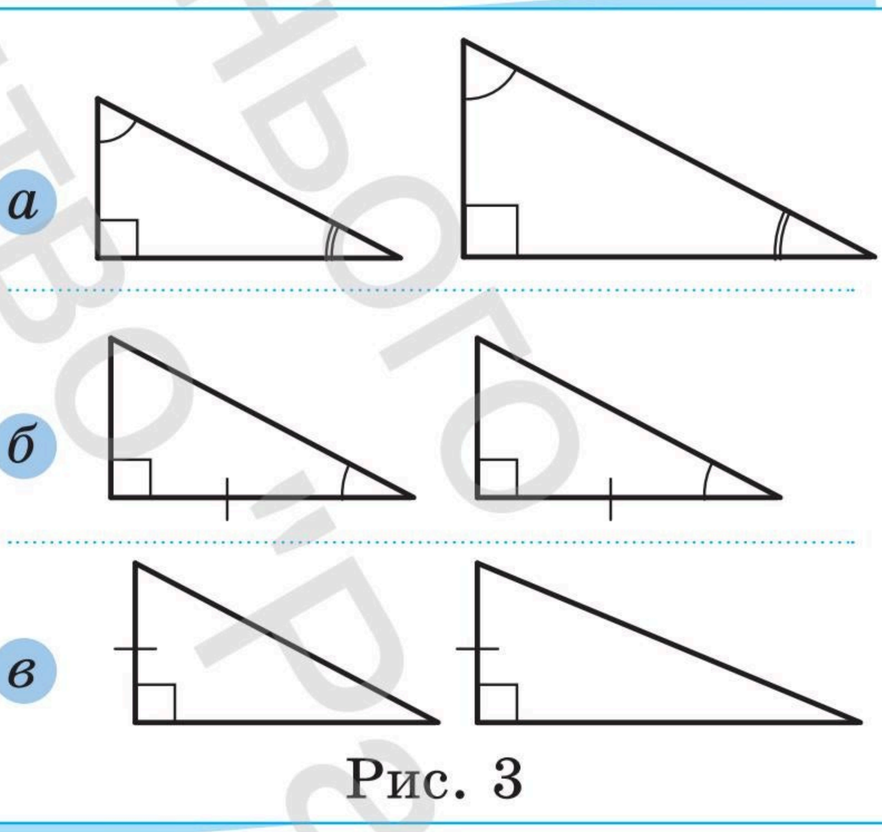


Рис. 3

8. У випадках *а*–*в* на рис. 4 рівні сторони трикутників позначено однаковими штрихами, а рівні кути — однаковими дужками. Чи рівні дані два трикутники? Якщо так, то за якою ознакою?

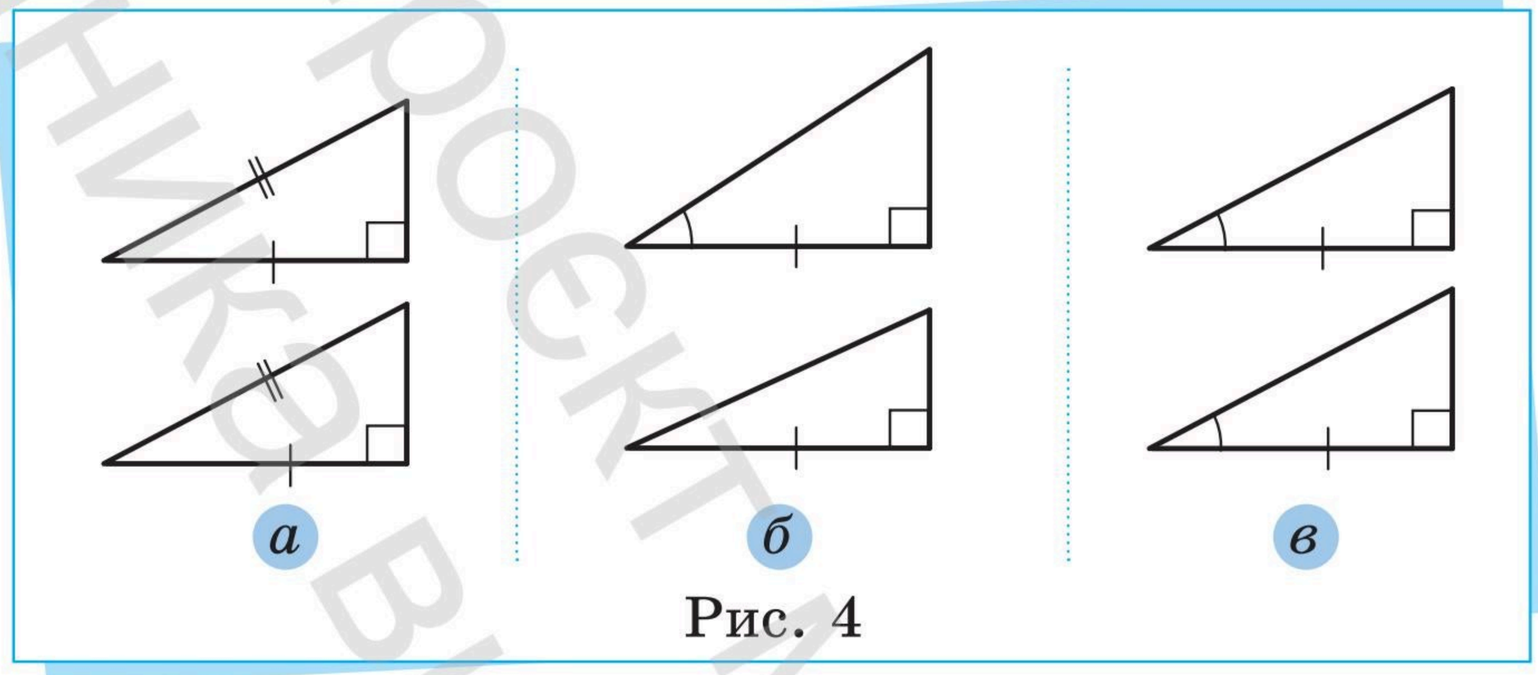


Рис. 4

9. На рис. 5 трикутник ABC — прямокутний; $\angle A = 30°$, $BC = 10$ м. Обчисліть довжину гіпотенузи AB.

10. На рис. 6 трикутник ABC — прямокутний; $AB = 8$ м, $BC = 4$ м. Обчисліть градусну міру кута A.

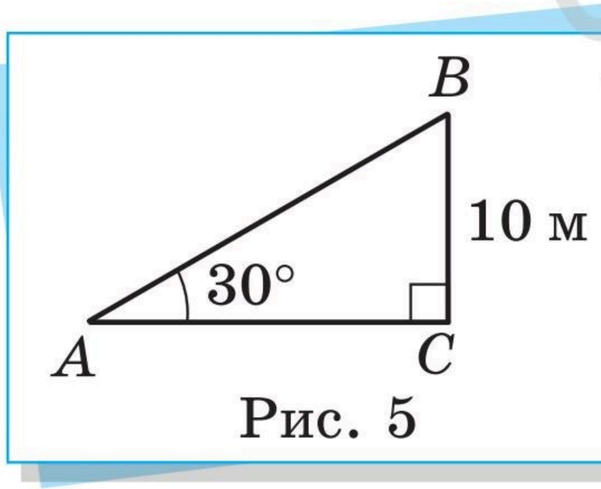


Рис. 5

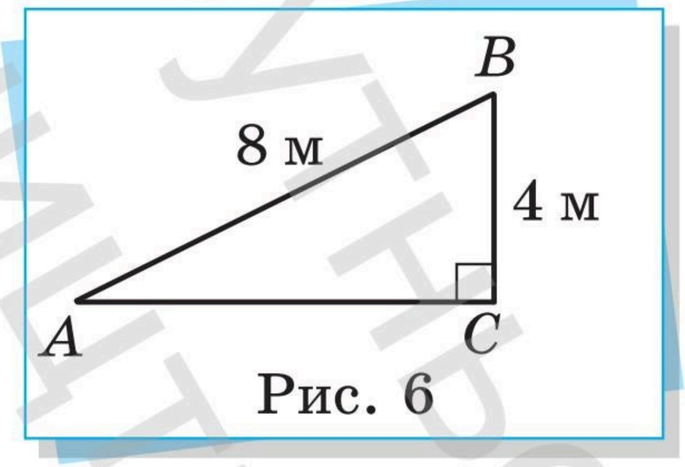


Рис. 6

Середній рівень

11. У прямокутному трикутнику ABC кут C — прямий, $\angle B = 32°$. Знайдіть градусну міру кута A.

12. У прямокутному трикутнику ABC кут C — прямий, $\angle A = 63°$. Знайдіть градусну міру кута B.

Підручник Проєкт Міністерства освіти і науки України

13. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза $AB = 12$ см, $\angle B = 30°$ (рис. 7). Знайдіть довжину катета AC.

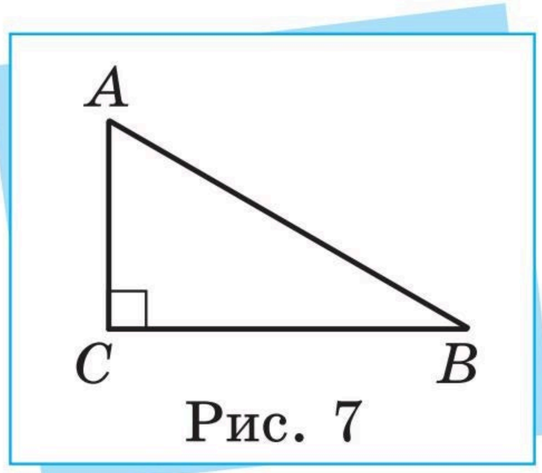


Рис. 7

14. У прямокутному трикутнику ABC катет $AC = 7$ см, $\angle B = 30°$ (рис. 7). Знайдіть довжину гіпотенузи AB.

15. Для кожного випадку *а*—*в* на рис. 8 запишіть пару рівних прямокутних трикутників і вкажіть, за якою ознакою вони рівні.

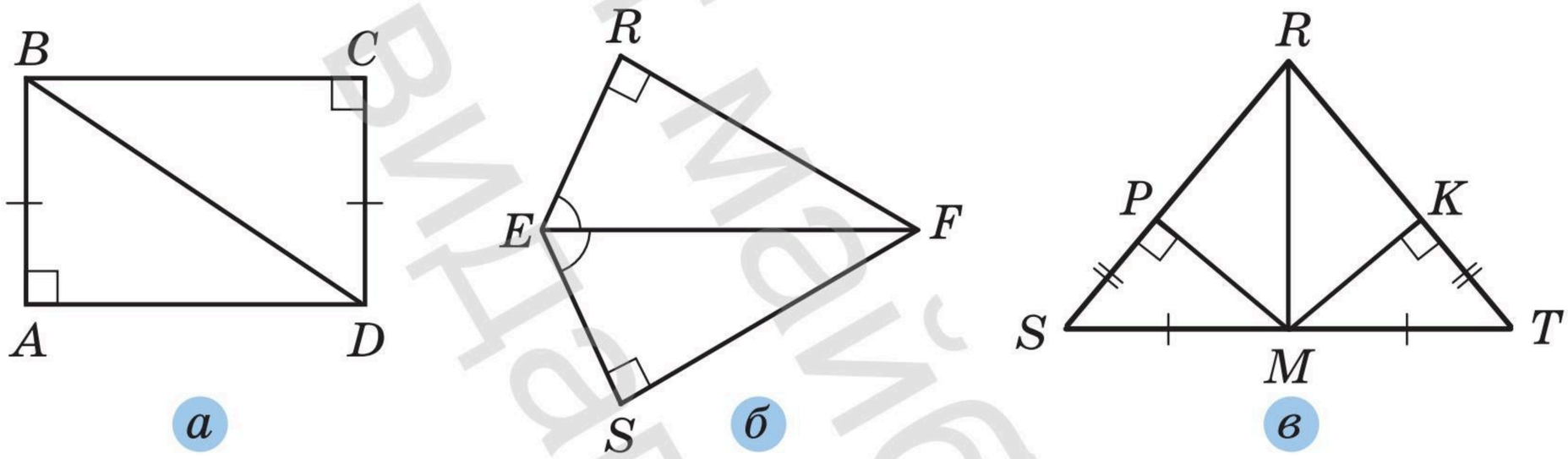


Рис. 8

16. Для кожного випадку *а*—*в* на рис. 9 запишіть пару рівних прямокутних трикутників і вкажіть, за якою ознакою вони рівні.

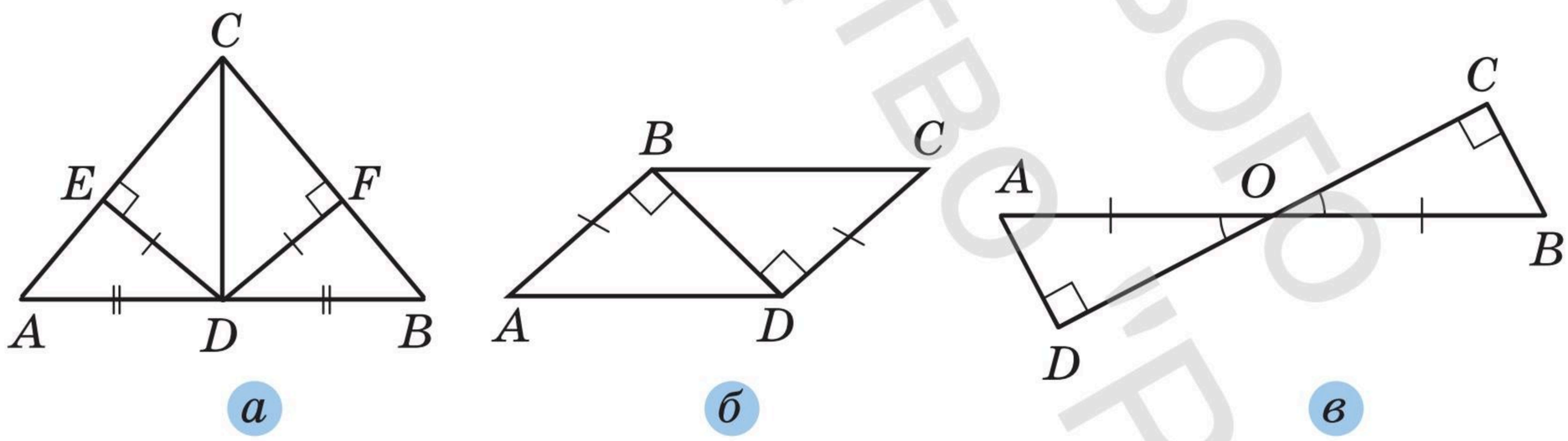


Рис. 9

17. Відомо, що прямокутні трикутники ABC і DBC рівні. Вершини трикутника ABC мають такі координати: $A(0;2)$, $B(3;0)$, $C(0;0)$. Які координати може мати точка D?

18. Відомо, що прямокутні трикутники ABC і DBC рівні. Вершини трикутника ABC мають такі координати: $A(0;-3)$, $B(-4;0)$, $C(0;0)$. Які координати може мати точка D?

19. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 22° менший від іншого. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього трикутника.

20. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 16° більший від іншого. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього трикутника.

21. Градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Знайдіть градусні міри цих кутів.

22. Градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника відносяться як 4 : 5. Знайдіть градусні міри цих кутів.

Достатній рівень

23. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту AH (рис. 10). Знайдіть усі кути трикутника AHC, якщо $\angle BAC = 52°$.

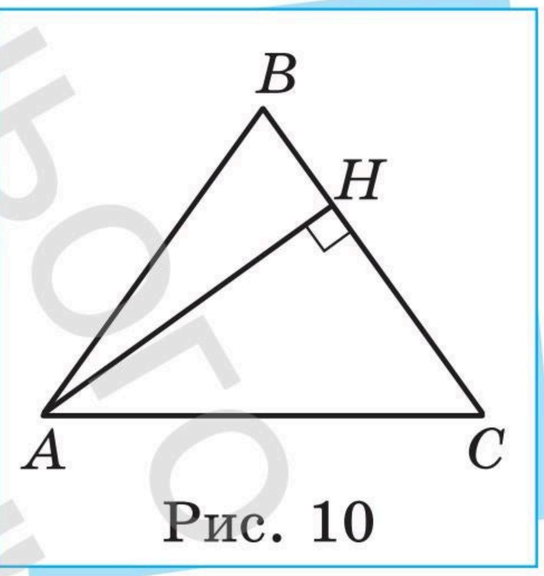


Рис. 10

24. У рівнобічному трикутнику ABC з бічною стороною AB проведено висоту AH (рис. 10). Знайдіть усі кути трикутника AHC, якщо $\angle B = 80°$.

25. Градусна міра одного з гострих кутів прямокутного трикутника становить 50 % градусної міри іншого гострого кута. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього трикутника.

26. Градусна міра одного з гострих кутів прямокутного трикутника становить 20 % градусної міри іншого гострого кута. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього трикутника.

27. Відрізок DM є серединним перпендикуляром до відрізка AB. Доведіть, що трикутники DMA і DMB рівні.

28. Прямі a і b паралельні. З точки A, що належить прямій a, до прямої b проведено перпендикуляр AH і дві рівні похилі AB і AC. Доведіть, що $\triangle AHB = \triangle AHC$.

29. Вершини прямокутного трикутника ABC мають такі ординати: $A(1;5)$, $B(4;1)$, $C(1;1)$. Побудуйте трикутник, рівний трикутнику ABC, і запишіть координати вершин цього трикутника.

30. Вершини прямокутного трикутника ABC мають такі координати: $A(-2;1)$, $B(-5;5)$, $C(-2;5)$. Побудуйте трикутник, рівний трикутнику ABC, і запишіть координати вершин цього трикутника.

31. Доведіть: якщо один із кутів прямокутного трикутника дорівнює $45°$, то цей трикутник рівнобічний.

32. Доведіть: якщо один із кутів рівнобічного трикутника дорівнює $60°$, то цей трикутник рівносторонній.

33. У рівнобічному трикутнику ABC до бічної сторони BC проведено висоту AH. Відрізок HC удвічі менший, ніж сторона AC. Знайдіть кути трикутника AHC.

34. У рівнобічному трикутнику ABC до бічної сторони BC проведено висоту AH. Знайдіть довжину сторони AC, якщо $\angle HAC = 30°$, а $HC = 2$ см.



Високий рівень

35. Градусна міра одного з кутів прямокутного трикутника дорівнює $40°$. Знайдіть градусну міру кута між висотою та бісектрисою цього трикутника, проведених із вершини прямого кута.

36. Градусна міра кута між висотою та бісектрисою прямокутного трикутника, проведених із вершини прямого кута, дорівнює $10°$. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього прямокутного трикутника.

37. Градусна міра одного з кутів прямокутного трикутника дорівнює $60°$, різниця довжин гіпотенузи та катета, прилеглого до цього кута, становить 16 см. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.

38. Медіана рівнобічного трикутника, проведена до його основи, утворює з бічною стороною кут $60°$. Знайдіть довжину цієї медіани, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 18 см.

39. Точка $C(-3;2)$ є вершиною прямого кута прямокутного трикутника ABC. Знайдіть можливі координати інших двох вершин цього трикутника, якщо відомо, що вони лежать на прямій $y=6-2x$ і обидві координати цих вершин є цілими числами.

40. Точка $M(2;5)$ є вершиною прямого кута прямокутного трикутника KMN. Знайдіть можливі координати інших двох вершин цього трикутника, якщо відомо, що вони лежать на прямій $y=3-x$ і обидві координати цих вершин є цілими числами.

41. Доведіть, що в рівних трикутниках рівні відповідні висоти.

42. Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то цей трикутник рівнобічний.

43. Бісектриси AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці O; $\angle AOB=135°$. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

44. Знайдіть градусну міру кута, під яким перетинаються продовження висот, проведених із вершин гострих кутів трикутника, якщо тупий кут цього трикутника дорівнює $105°$.

45. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

46. Використовуючи додаткову побудову, наведену на рис. 11 (відклали $MD = AM$), доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

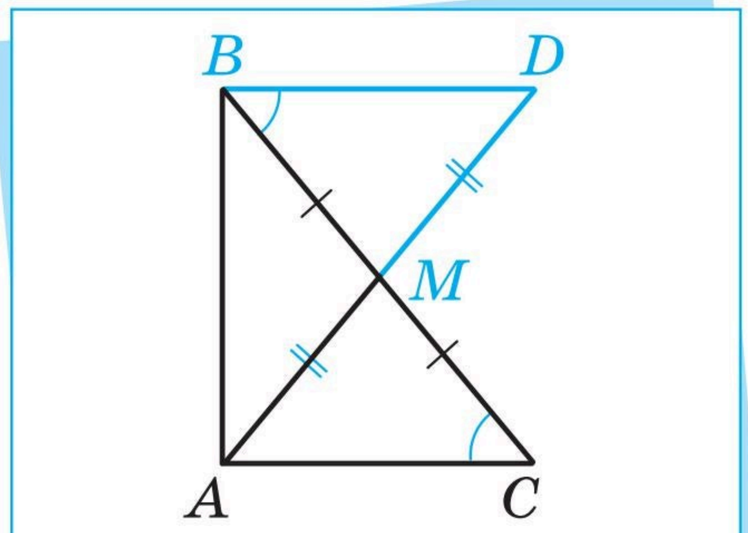


Рис. 11

47. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з нерівними катетами бісектриса прямого кута ділить навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини.

48. Використовуючи рис. 12, доведіть, що коли висота і медіана трикутника, проведені з однієї вершини, ділять кут трикутника на три рівні кути, то цей трикутник прямокутний.

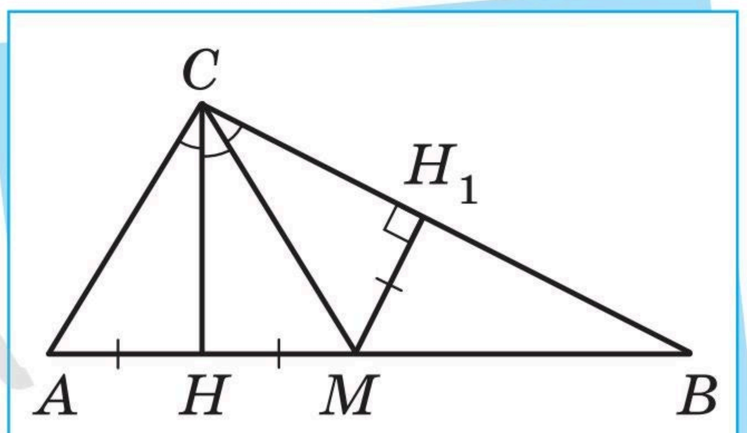


Рис. 12



Цікавинки від дідуся Тараса

Назви сторін прямокутного трикутника походять із Давньої Греції. *Катет* (Κάθετος) означає «прямовисний, опущений перпендикулярно». Давні греки зображали прямокутний трикутник так, щоб одна зі сторін, які утворюють прямий кут, була горизонтальною. Її називали основою. Друга сторона була прямовисною (висотою), і тому її й називали катетом. *Обидві* сторони прямокутного трикутника, що утворюють прямий кут, почали називати катетами лише в XVII ст.

Слово *гіпотенуза* (ὑποτείνουσα) означає «сторону, що стягує прямий кут». Цей термін використовували ще *Платон* і *Евклід*

Франсуа-Етьєн де Ла Рош (1781–1813) — французький математик, лікар, хімік, ботанік, іхтіолог.

у III–IV ст. до н. е. Потім термін перейшов до латинської мови (hypotēnūsa), а далі — завдяки французькому математику *Франсуа-Етьєну де ла Рошу* — до французької та інших сучасних мов.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

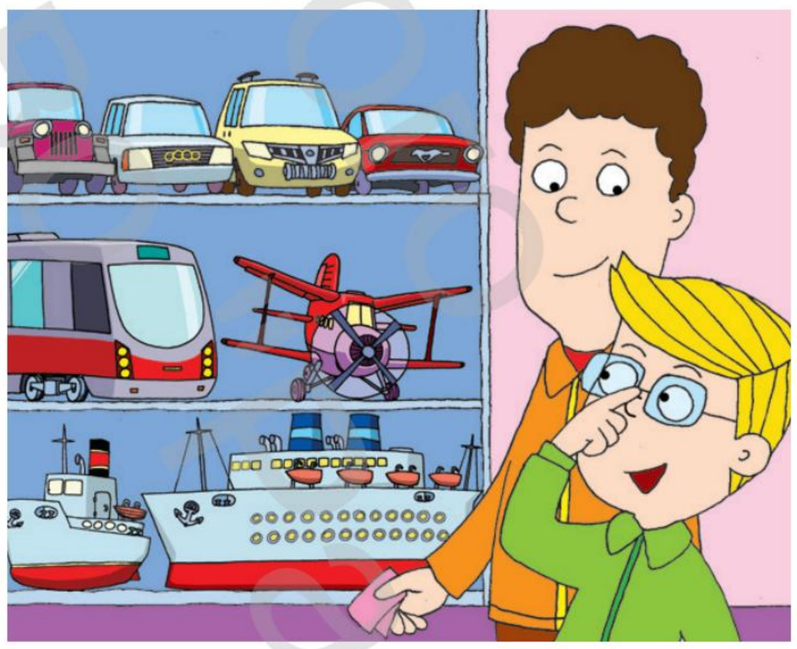
1. Запитайте у вчителів і вчительок іноземної мови (англійської, французької, іспанської тощо) про те, як звучать цією мовою основні терміни, що стосуються геометрії: *точка, пряма, площина, відрізок, кут, трикутник, рівнобічний трикутник, рівносторонній трикутник, прямокутний трикутник, прямокутник, квадрат* та інші. Зробіть невелике повідомлення щодо цих термінів у різних мовах.
2. Знайдіть у мережі Інтернет підручники з математики для 7 класу іноземною мовою, яку ви вивчаєте. Чи є зрозумілим для вас викладений там матеріал? Які виникли труднощі?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз.

а) $2x(x-4)-2(x-1)(x+1)$; б) $(2-a)^2-4a(2a-1)$.

2. До музею іграшок прийшли дві родини. Перша родина купила 2 дорослі квитки й 2 дитячі, а друга — 3 дорослі й 1 дитячий. Знайдіть вартість дорослого та вартість дитячого квитків до цього музею, якщо перша родина заплатила за квитки 460 грн, а друга — 530 грн.



3. Зобразіть у системі координат точки $A(1;-2)$, $B(-1;-6)$ і $C(3;2)$. Сформулюйте гіпотезу про те, чи належать ці три точки одній прямій. Перевірте свою гіпотезу шляхом складання рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.

4. Є три посудини місткістю 3 літри, 5 літрів, 8 літрів і кран з водою. Як за їх допомогою можна набрати у 8-літрову посудину 4 літри води? Воду з посудин виливати не можна, а можна лише набирати і переливати воду з однієї в одну.

5. Побудуйте за допомогою циркуля коло радіуса 10 см. Позначте центр кола, проведіть два його радіуси й один діаметр. Знайдіть довжину кола та площу круга, обмеженого цим колом.

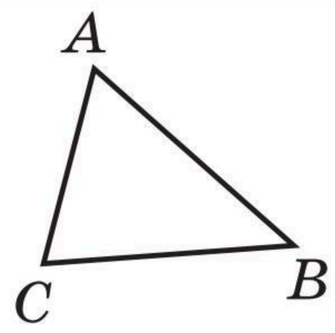
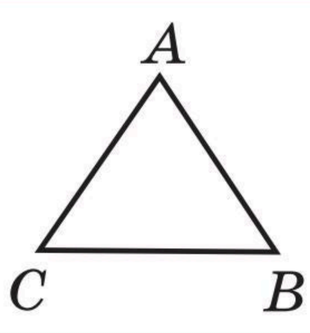
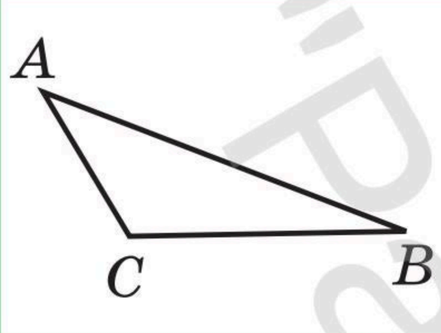
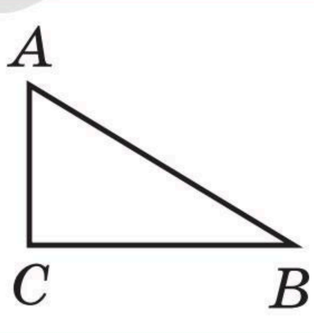
ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2 ДО РОЗДІЛУ 6

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть трійку чисел, які НЕ можуть бути градусними мірами кутів деякого трикутника.

А	Б	В	Г
30, 30, 120	70, 80, 30	60, 50, 80	110, 60, 10

2. Укажіть рисунок, на якому *може* бути зображений прямокутний трикутник.

А	Б	В	Г
			

3. У прямокутному трикутнику один із гострих кутів дорівнює 70°. Знайдіть градусну міру іншого гострого кута.

А	Б	В	Г
20°	30°	90°	110°

4. Укажіть НЕправильне твердження.

А	Сума кутів будь-якого гострокутного трикутника дорівнює 180°.
Б	Зовнішній кут трикутника завжди більший за суміжний із ним внутрішній кут трикутника.
В	Сума кутів будь-якого прямокутного трикутника дорівнює 180°.
Г	Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних із ним.
Д	Сума кутів будь-якого тупокутного трикутника дорівнює 180°.

5. На рис. 1 зображено трикутник KMP. Укажіть правильну рівність.

А	$\angle 1+\angle 2=\angle 5$	Г	$\angle 5+\angle 6=\angle 4$
Б	$\angle 1+\angle 3=\angle 6$	Д	$\angle 5+\angle 6=\angle 1$
В	$\angle 3+\angle 4=\angle 2$		

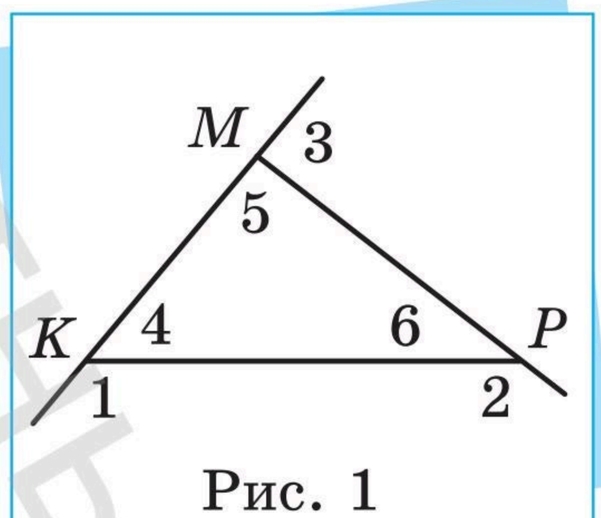


Рис. 1

6. Укажіть НЕправильне твердження.

А	Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
Б	Якщо катет і прилеглий гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

В	Якщо два гострі кути одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом гострим кутам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
Г	Якщо катет і протилежний гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
Д	Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. У трикутнику STF $\angle S = 17°$, $\angle F = 48°$. Знайдіть градусну міру кута T цього трикутника.

8. У трикутнику один із кутів дорівнює $60°$, а другий кут у 1,5 разу більший за третій. Знайдіть градусну міру *найменшого* кута цього трикутника.

9. У трикутнику ABC зовнішній кут при вершині A дорівнює $110°$, а внутрішній кут B у 4 рази більший за внутрішній кут C. Знайдіть градусну міру *найбільшого* кута цього трикутника.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. На рис. 2 прямі a і b є паралельними, а прямі c і d — січними. Відомо, що $\angle 1 = 110°$, $\angle 2 = 50°$. Знайдіть градусну міру кута 3.

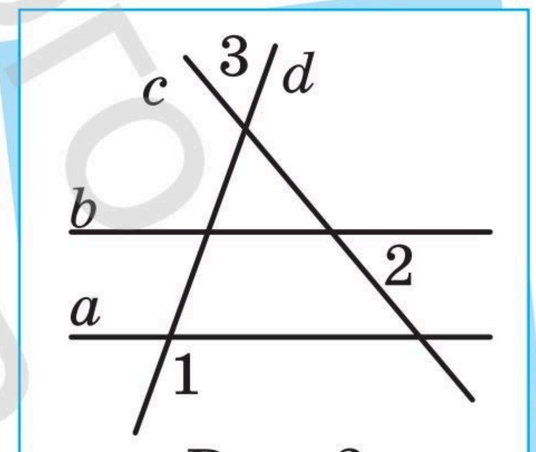


Рис. 2

11. Точка $M(-2;1)$ є вершиною прямого кута рівнобічного прямокутного трикутника KMP, катети якого

дорівнюють 4. Знайдіть можливі координати інших двох вершин цього трикутника, якщо відомо, що обидві координати цих вершин є цілими числами.

12. На рис. 3 $AB = CD$; $BC = AD = 20$ см; $BC \parallel AD$; AK — бісектриса кута BAD; $BK : KC = 7 : 3$. Знайдіть периметр чотирикутника $ABCD$.

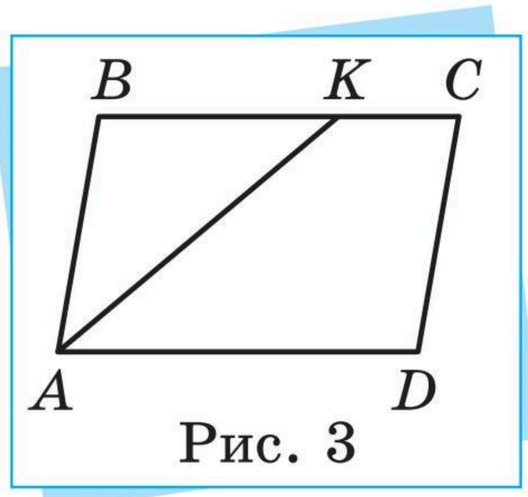


Рис. 3

13. Доведіть, що сума градусних мір зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній його вершині, дорівнює 360°.

14. Трикутник KLP — рівнобічний з основою KP; LM — бісектриса трикутника. Доведіть, що відстані від точки M до бічних сторін трикутника KLP рівні.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Бісектриса рівнобічного трикутника, проведена з вершини кута при основі, дорівнює основі цього трикутника. Знайдіть градусні міри кутів трикутника.

2. Бісектриси кутів при основі AC рівнобічного трикутника ABC перетинаються в точці O; $\angle AOC = 150°$. Знайдіть градусні міри кутів трикутника.

3. У трикутнику ABC медіана BM дорівнює відрізку AM; $\angle BMC = 24°$. Знайдіть градусну міру кута A.

4. У трикутнику ABC: $\angle A = 60°$, $\angle C = 70°$; висоти AK і CM трикутника перетинаються в точці H. Знайдіть градусну міру кута MHK.

5. З'ясуйте, під яким кутом перетинаються прямі, що містять бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника.

6. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 70°.

7. У трикутнику ABC бісектриса BK і висота AH перетинаються в точці O. Градусна міра кута AOB вдвічі більша за градусну міру кута ABC. Знайдіть градусну міру кута ABC.

8. На основі AC рівнобічного трикутника ABC взяли точку D, і виявилося, що $AD = BD$, $DC = BC$. Знайдіть градусні міри кутів трикутника ABC.

9. Доведіть, що коли один із зовнішніх кутів трикутника вдвічі більший за кут трикутника, не суміжний із ним, то трикутник рівнобічний.

10. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили таку точку M, що $AM = AC$. Відрізок CD — висота трикутника. Доведіть, що промінь CM — бісектриса кута BCD.

11. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили точки M і K так, що $BM = BC$, $AK = AC$. Знайдіть градусну міру кута MCK.

12. У трикутнику KLM проведено медіану LN. Доведіть, що висоти трикутників LMN і KLN, проведені відповідно з вершин M і K, рівні.

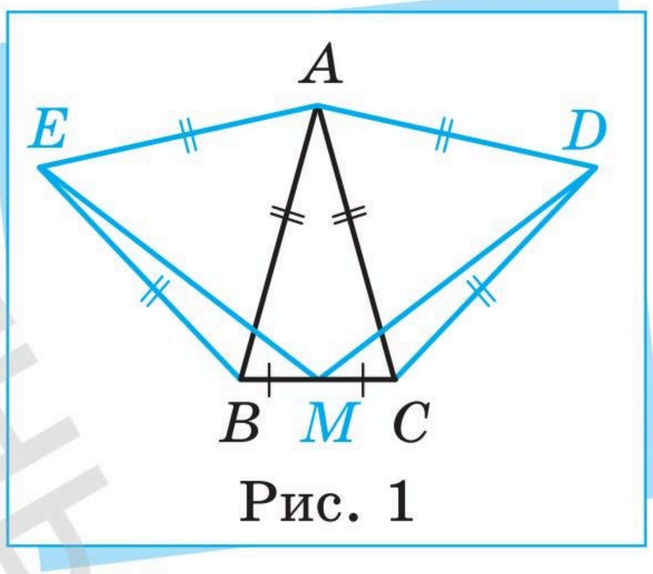


Рис. 1

13. На кожній із бічних сторін рівнобічного трикутника зовні побудовано рівносторонній трикутник (рис. 1). Доведіть, що відрізки, які сполучають середину основи рівнобічного трикутника й вершини рівносторонніх трикутників, що відмінні від вершин даного трикутника, є рівними між собою.

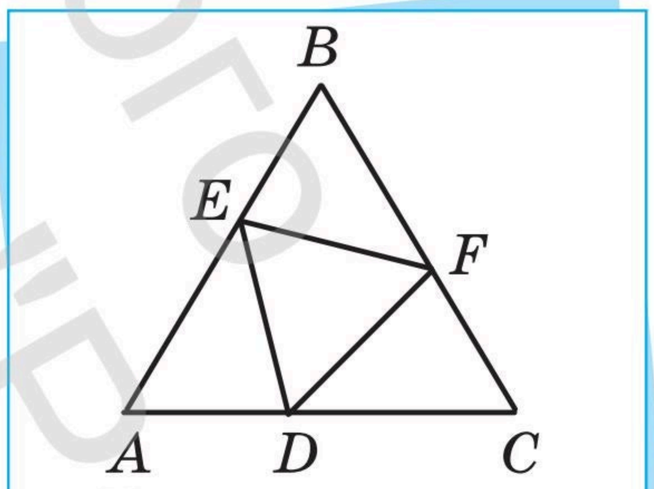


Рис. 2

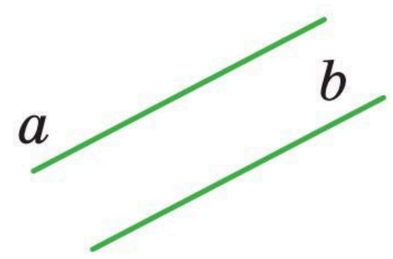
14. Трикутники ABC і DEF на рис. 2 рівносторонні. Доведіть, що $AD = BE = CF$.

Паралельні (перпендикулярні) прямі — parallel (perpendicular) lines
Перпендикуляр — perpendicular
Похила — inclined line
Ознака паралельності прямих — condition of parallelism of lines
Вершина (сторона, кут) трикутника — vertex (side, angle) of a triangle
Медіана (бісектриса, висота) трикутника — median (bisector, altitude) of a triangle
Ознака рівності трикутників — condition of equality of triangles
Рівнобічний трикутник — an isosceles triangle
Рівносторонній трикутник — equilateral triangle
Прямокутний трикутник — right triangle
Сума кутів трикутника — the sum of the angles of a triangle

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 6

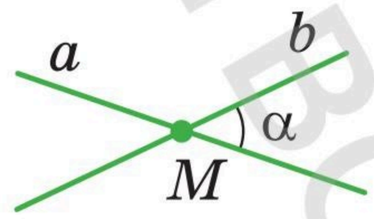
Взаємне розміщення двох прямих на площині

Паралельні

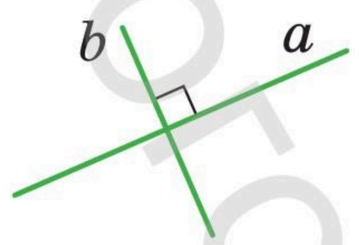


$a \parallel b$

Перетинаються

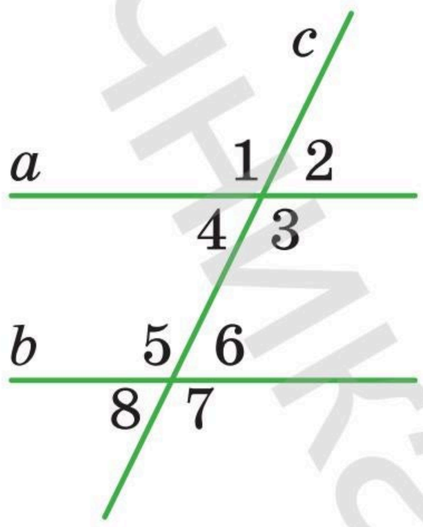


α — кут між a і b



$a \perp b$

Кути, утворені в результаті перетину двох прямих січною



$\angle 2$ і $\angle 6$ — відповідні

$\angle 4$ і $\angle 6$ — внутрішні різносторонні

$\angle 4$ і $\angle 5$ — внутрішні односторонні

$\angle 1$ і $\angle 7$ — зовнішні різносторонні

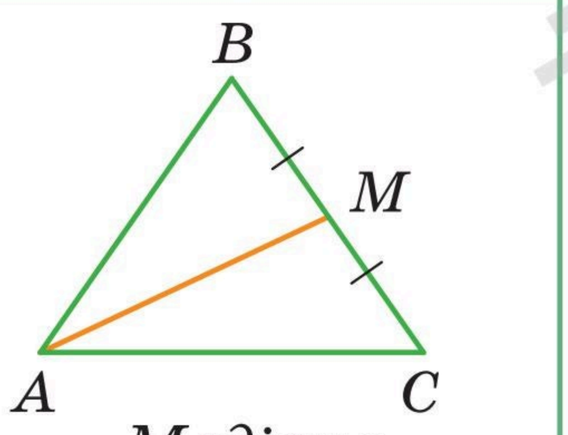
$\angle 1$ і $\angle 8$ — зовнішні односторонні

$a \parallel b$

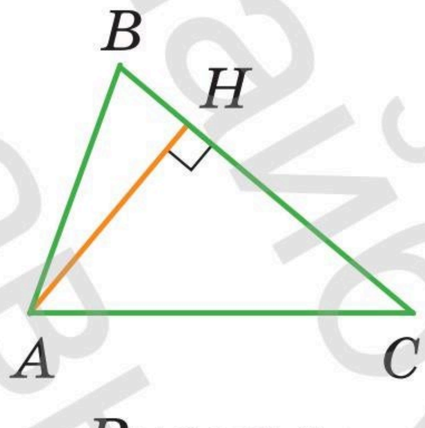
$\Updownarrow$

1) $\angle 4 = \angle 6$
2) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$
3) $\angle 2 = \angle 6$
4) $\angle 1 = \angle 7$
5) $\angle 1 + \angle 8 = 180°$

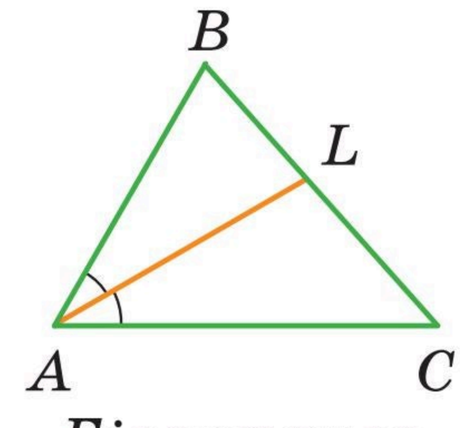
Трикутники



Медіана



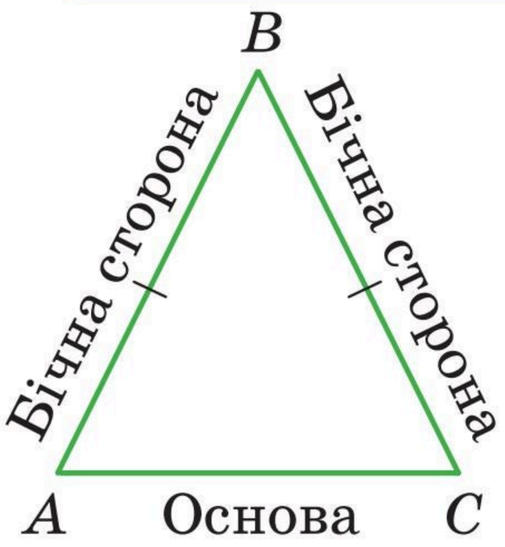
Висота

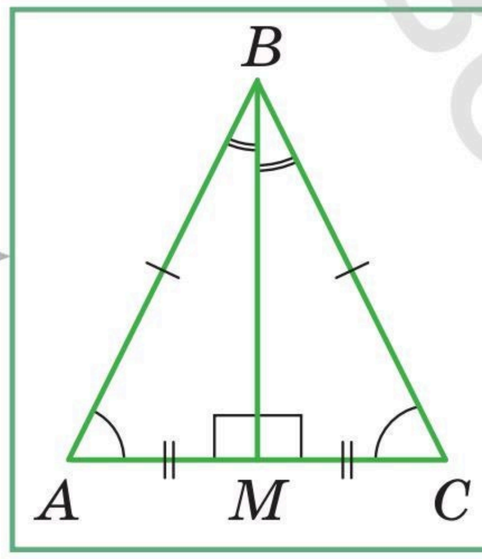


Бісектриса

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Рівнобічний трикутник





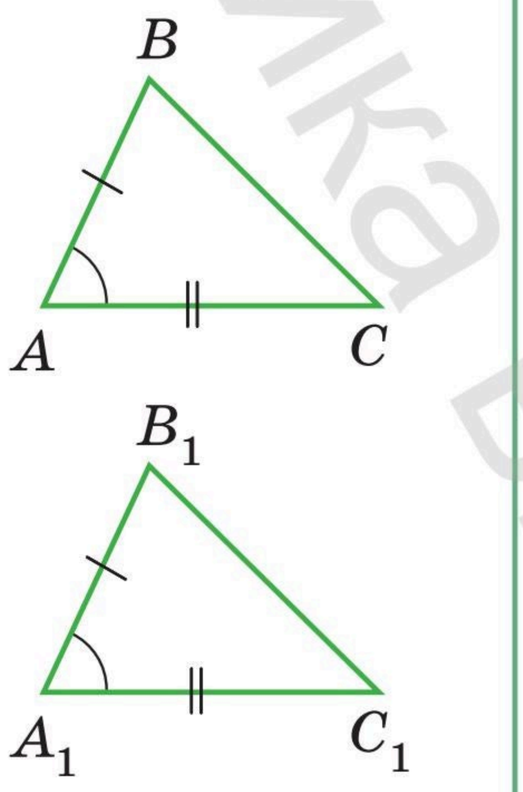
$AB = BC$

$\Updownarrow$

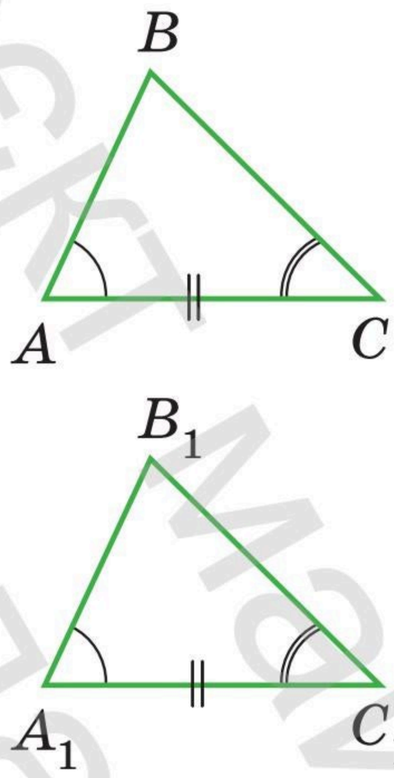
1) $\angle A = \angle C$
2) BM — медіана
   BM — бісектриса
   BM — висота

Ознаки рівності трикутників

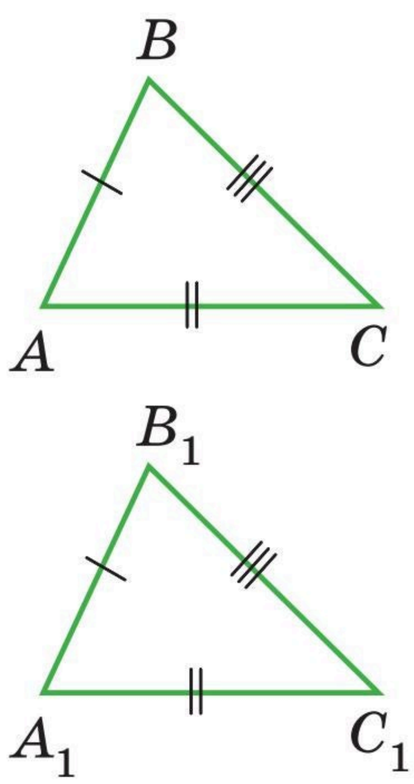
1 За двома сторонами й кутом між ними



2 За стороною та двома прилеглими кутами

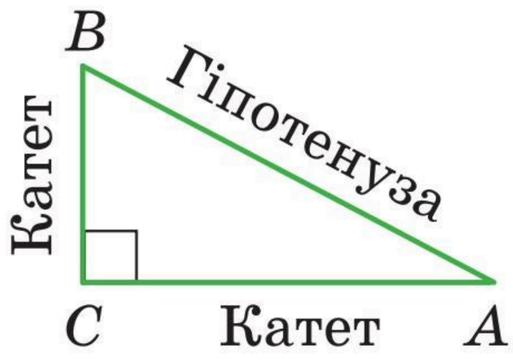


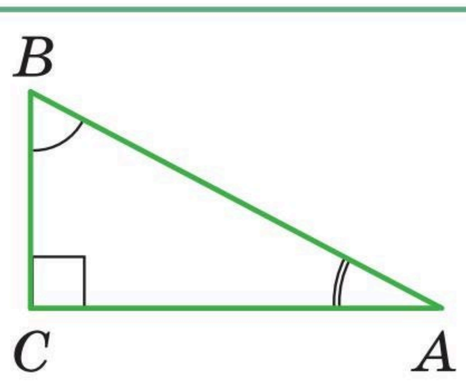
3 За трьома сторонами



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Прямокутний трикутник





$\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A + \angle B = 90^\circ$

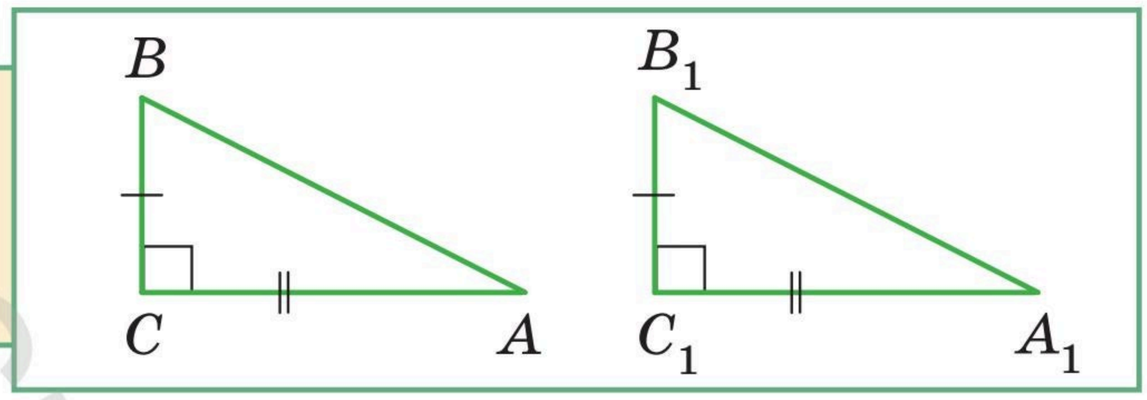
$\angle A = 30^\circ \Leftrightarrow BC = \frac{1}{2} AB$

Пробний примірник. Проект майбутнього видання

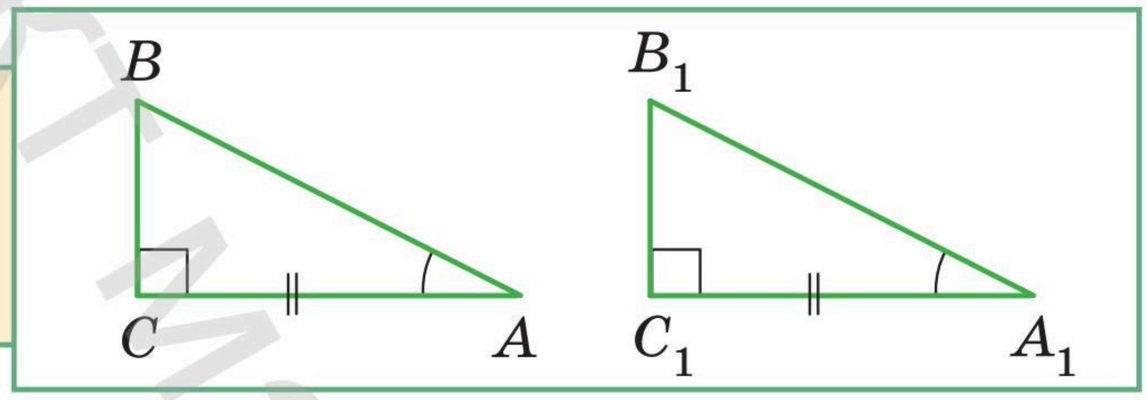
Ознаки рівності прямокутних трикутників

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

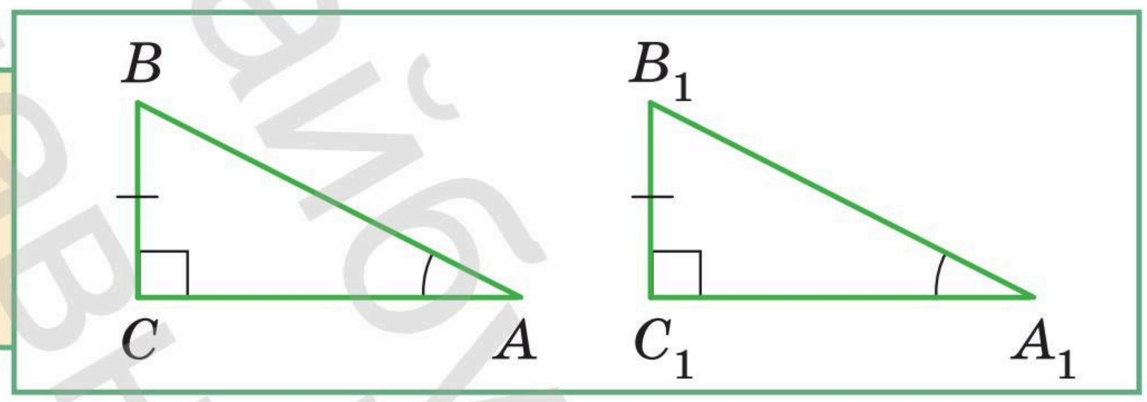
За двома катетами



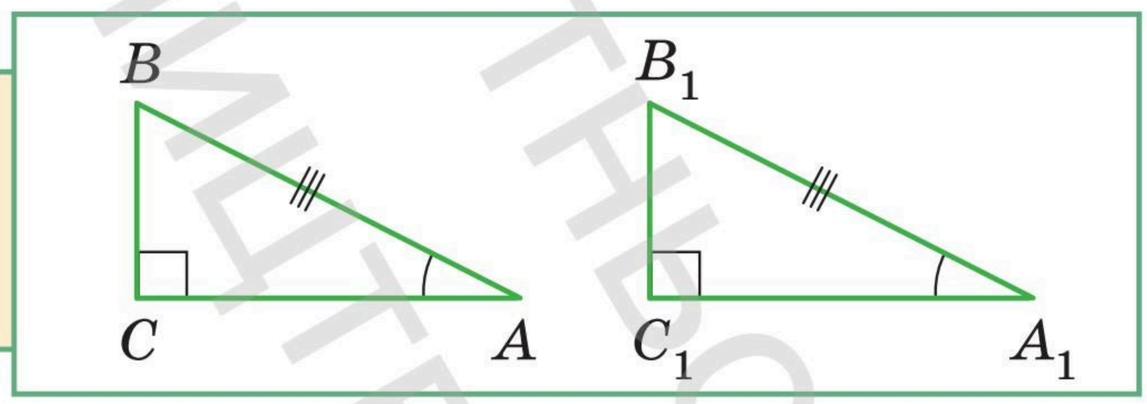
За катетом і прилеглим гострим кутом



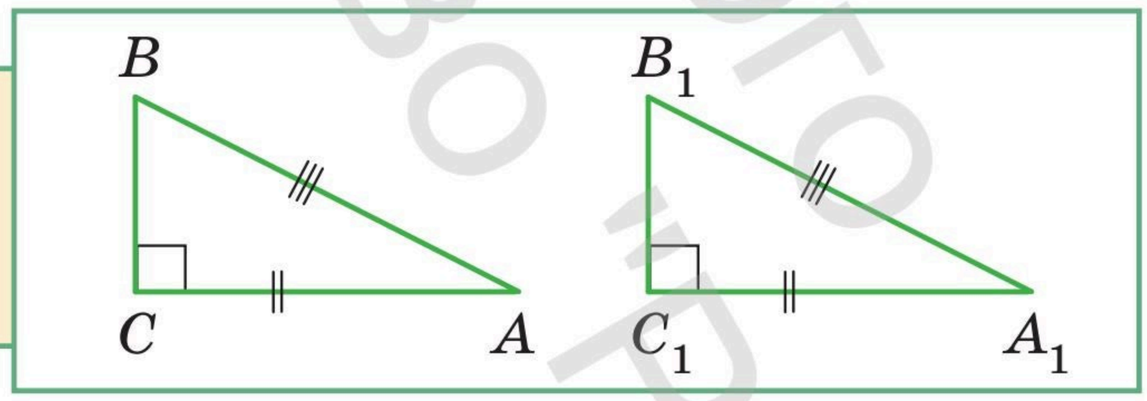
За катетом і протилежним гострим кутом



За гіпотенузою та гострим кутом



За гіпотенузою та катетом



РОЗДІЛ 7.
КОЛО ТА КРУГ

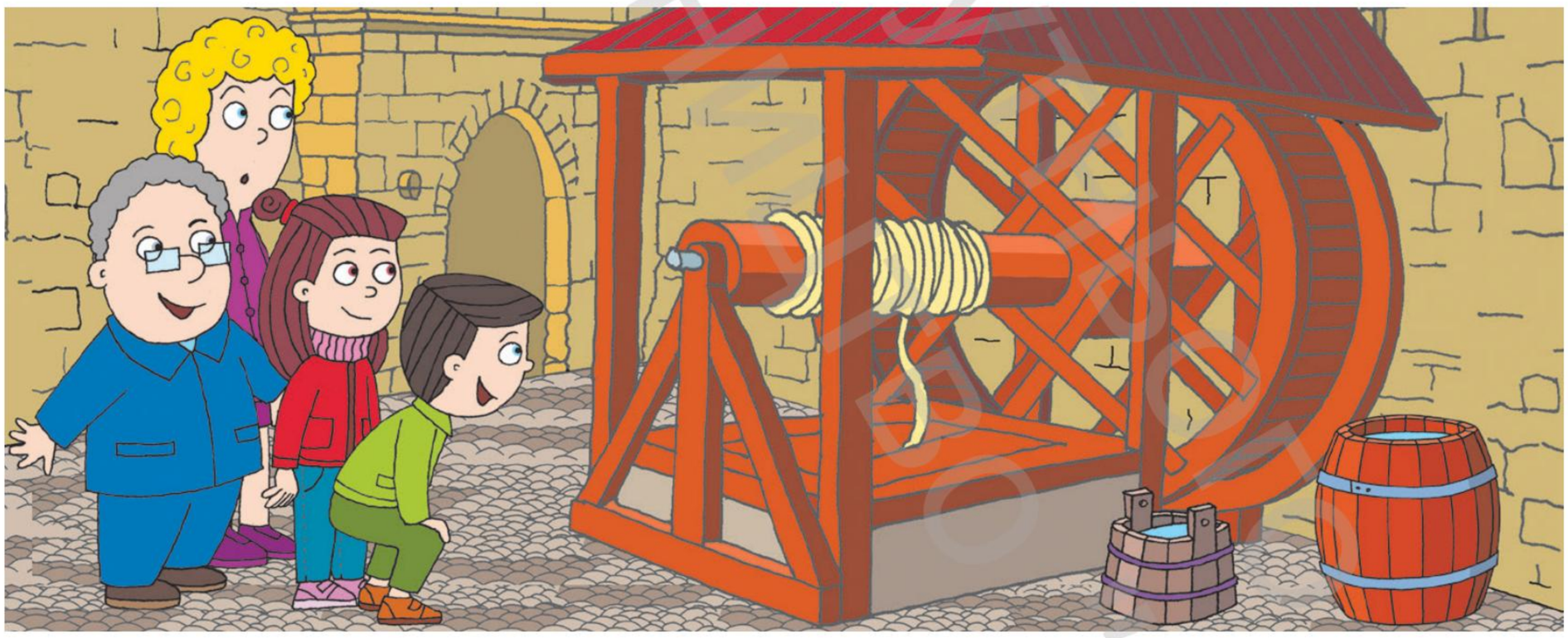
CHAPTER 7.
CIRCLE AND DISK

§ 25. Коло, круг та їх частини. Довжини кола та дуги кола. Геометричне місце точок

Коло, круг та їх частини. Довжини кола та дуги кола



Тетянко, пам'ятаєш, коли ми були на екскурсії в замку Паланок у Мукачевому, то звернули увагу на криницю цього замку? Її глибина сягає 85 метрів! Зрозуміло, що приблизно такої самої довжини має бути й мотузка, якою звідти витягали воду. Проте мені не дає спокою таке запитання: скільки разів ця мотузка обвивається навколо колоди циліндричної форми, до якої вона прикріплена?





Цікаве запитання! Циліндр узагалі фігура цікава: з одного боку подивишся — круг, а з іншого — прямокутник. Круг,

на який фактично намотується мотузка для витягування води, обмежений колом. Потрібно знайти довжину цього кола та поділити довжину мотузки на довжину кола — так і дістанеш шукану кількість обертів. Ми вчили колись формулу довжини кола, але я вже її не пам'ятаю. Запитаймо у вчителів!



Звичайно, Тетянко, обов'язково про все нагадаємо.



Коло — це множина всіх тих точок площини, що рівновіддалені від даної точки.

При цьому дану точку називають **центром кола,** а відрізок, що сполучає центр кола з будь-якою точкою на колі, називають **радіусом кола.**

Наприклад, на рис. 25.1 зображено коло із центром у точці O і радіусом OM, довжина якого дорівнює R. Усі точки цього кола розташовані від його центра на відстані R. Інші точки площини, що не розташовані від центра кола на цій відстані, колу не належать.

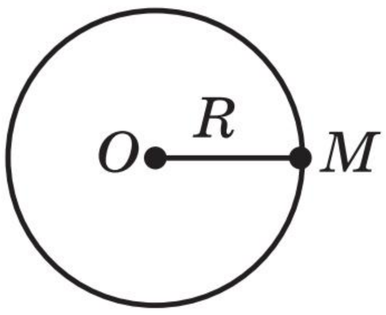


Рис. 25.1

Зауважимо, що іноді радіусом також називають не лише сам відрізок OM, а і його довжину. Тобто, якщо довжина радіуса OM дорівнює, наприклад, 5 см, то можна сказати, що радіус кола дорівнює 5 см, і записати: $R = 5$ см.





Круг — це множина всіх тих точок площини, які розташовані від даної точки на відстані, не більшій за дану відстань.

При цьому дану точку називають **центром круга,** а дану відстань — **радіусом круга.**

Підручник проєкту «Інтерактивний підручник»

Наприклад, на рис. 25.1 коло із центром у точці O і радіусом OM визначає також і круг із тим самим центром і радіусом.

Згідно з означенням круга всі його точки лежать або на колі з тим самим центром і радіусом, або всередині цього кола. Дійсно, якщо X — довільна точка круга радіуса R, то за означенням або $OX = R$ (точка лежить на колі), або $OX < R$ (рис. 25.2) (точка лежить усередині кола). Тому іноді говорять, що *круг — це частина площини, обмежена колом*.

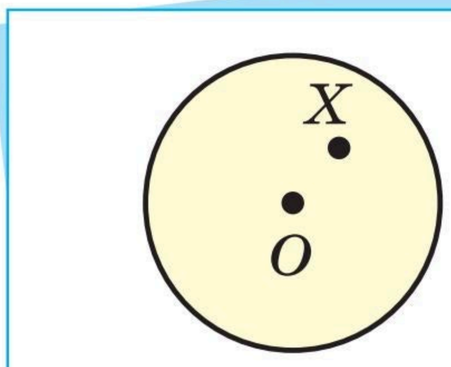


Рис. 25.2



Відрізок, що сполучає дві дані точки кола, називають хордою кола. Якщо хорда проходить через центр кола, то її називають діаметром кола.

Наприклад, на рис. 25.3 зображено коло із центром у точці O, його хорду AB і діаметр CD. Довжину діаметра кола часто позначають буквою d. Оскільки за означенням кола $OC = OD = R$, то *довжина діаметра кола:*

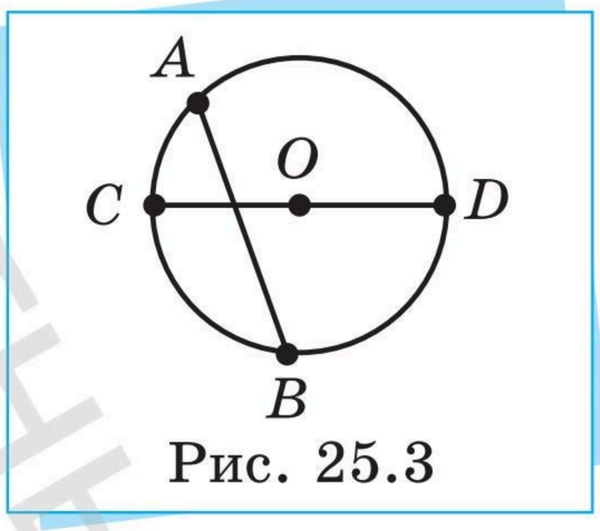


Рис. 25.3

$$d = 2R$$

Домовимось також називати *хордою* і *діаметром круга* відповідно хорду і діаметр *кола*, яке обмежує цей круг.



Будь-які дві дані точки кола розбивають його на дві частини, кожну з яких називають дугою. Дані точки називають кінцями дуги. Будемо вважати, що вони також належать дузі.

Наприклад, на рис. 25.4 синім і червоним кольорами виділено дві дуги з кінцями в точках A і B. Щоб не плутати дуги, розглядають плоскі кути 1 і 2 з вершиною в центрі O кола — центральні кути. Говорять, що дуга синього кольору відповідає центральному куту 1, а дуга червоного кольору — центральному куту 2.

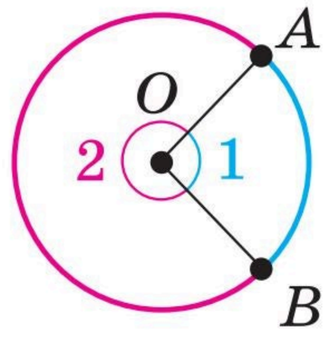


Рис. 25.4



Центральні кути 1 і 2 іноді називають доповняльними плоскими кутами. Сума їх градусних мір дорівнює 360°.

Детальніше про суму градусних мір доповняльних кутів:
https://rnk.com.ua/106109







Частину круга, обмежену двома радіусами і дугою, називають сектором.

Зрозуміло, що після побудови двох радіусів утворюються два сектори, які відповідають різним доповняльним плоским кутам.



Частину круга, обмежену хордою і дугою, називають сегментом.

Дана хорда ділить круг на два сегменти. Наприклад, на рис. 25.5 зображено хорду AB, яка поділила круг на сегменти, зафарбовані синім і жовтим кольорами.

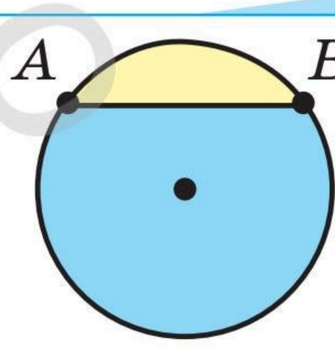


Рис. 25.5



Здавна люди помічали, що відношення довжини C будь-якого кола до довжини його діаметра d є сталою величиною, тобто $\frac{C}{d} = \text{const}$. Цю константу традиційно позначають буквою π, тобто $\frac{C}{d} = \pi$. Нині відомо, що $\pi \approx 3{,}14$.

Із поданої рівності визначається довжина кола: $\boxed{C = \pi d}$.

Ураховуючи, що $d = 2R$, де R — радіус кола, одержимо найбільш відому нині *формулу довжини кола*:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Наприклад, якщо радіус кола $R = 5$ см, то довжина кола $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 31{,}4$ см.



Очевидно, що 360 центральних кутів градусної міри 1° розбивають усе коло на 360 дуг однакової довжини. Тому довжина дуги кола прямо пропорційна градусній мірі α центрального кута, який її визначає. Отже:



Щоб знайти довжину дуги кола, потрібно:

- дізнатися, яку частину градусна міра α центрального кута становить від 360°;
- знайти цю частину від довжини всього кола.

Іншими словами, *довжину дуги* l_α, що відповідає куту в α градусів, кола радіуса R обчислюють за формулою:

$$\boxed{l_\alpha = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}}$$

Наприклад, якщо $\alpha = 120^\circ$, а $R = 12$ см, то $l_\alpha = 2\pi \cdot 12 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = 8\pi$ см.

Геометричне місце точок



Ви вже знаєте, що поняття *множини* є одним із основних *неозначуваних понять* у математиці. Традиційно множини *задають* або шляхом перелічення всіх її елементів, або за допомогою *характеристичної властивості* — властивості, яку мають усі елементи цієї множини.

Ту саму множину можна задати різними способами. Наприклад, множину $A = \{$понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя$\}$, задану переліком усіх елементів, можна задати й характеристичною властивістю: A — множина назв усіх днів тижня українською мовою.



Множину точок площини, задану характеристичною властивістю, традиційно називають геометричним місцем точок (ГМТ) площини.

Наприклад, коло можна вважати ГМТ площини, оскільки всі його точки мають однакову властивість — вони розташовані на однаковій відстані від даної точки (центра кола). Зрозуміло, що інші точки площини, які не задовольняють цю властивість, не належать даному ГМТ (колу).



Існують і інші ГМТ площини. Якщо на площині задано ПДСК, то характеристичну властивість зручно задавати за допомогою функцій і рівнянь.

Наприклад, графік функції $y = f(x)$ — це ГМТ площини, координати яких мають вигляд $(x; f(x))$. Пряма на площині також є ГМТ площини, координати $(x; y)$ яких задовольняють рівняння $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

Підручник відповідає Державному стандарту

Узагалі, щоб назвати певну множину точок площини ГМТ площини, яке задається деякою характеристичною властивістю, потрібно довести такі два твердження:

- кожна точка даної множини має цю характеристичну властивість;
- усі точки, що мають цю характеристичну властивість, належать даній множині.



Наведемо приклади двох важливих ГМТ площини.

ТЕОРЕМА (про ГМТ площини, рівновіддалених від кінців відрізка).

ГМТ площини, рівновіддалених від кінців даного відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка.

Справді, за властивістю серединного перпендикуляра до даного відрізка кожна його точка рівновіддалена від кінців цього відрізка. Покажемо, що будь-яка точка, що рівновіддалена від кінців даного відрізка, належить серединному перпендикуляру, проведеному до цього відрізка.

Нехай на рис. 25.6 AB — даний відрізок, а точка X — рівновіддалена від його кінців, тобто $AX = BX$. (Якщо X належить відрізку AB, то вона є його серединою, а отже, належить і серединному перпендикуляру.)

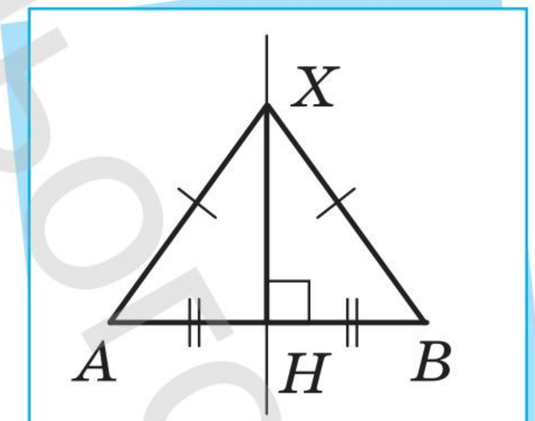


Рис. 25.6

Нехай точка X не належить відрізку AB. Тоді трикутник AXB — рівнобічний з основою AB. Проведемо висоту XH до основи AB. За властивістю рівнобічного трикутника XH також є і медіаною, тобто $AH = HB$ і точка H — середина AB. Отже, XH — серединний перпендикуляр, що й потрібно було довести.

ТЕОРЕМА (про ГМТ площини, рівновіддалених від сторін кута).

ГМТ площини, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута.

Одразу зауважимо, що відстанню від точки до променя (сторони кута) природно вважати відстань від цієї точки до прямої, що містить цей промінь, тобто довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої, *за умови, що основа цього перпендикуляра належить променю*. Це означає, зокрема, що *всі* точки цього ГМТ містяться *лише* в плоскому куті, градусна міра якого не перевищує 180°.

Нехай на рис. 25.7 зображено деякий кут ABC і його бісектриса BM. Точка M — довільна точка цієї бісектриси, $MK \perp AB$, $MP \perp BC$. Для доведення теореми потрібно показати, що:

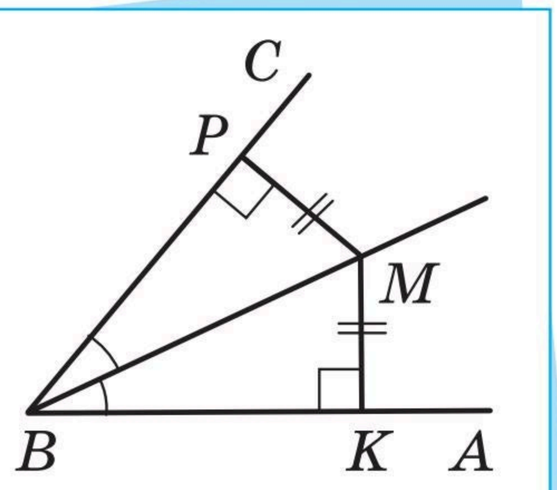


Рис. 25.7

- відстані від кожної точки бісектриси кута до його сторін однакові, тобто $MK = MP$;
- якщо для деякої точки M площини виконується рівність $MK = MP$, то точка M належить бісектрисі кута ABC.

Доведення обох цих тверджень:
https://rnk.com.ua/106110

Перевірте себе!

1. Дайте означення: а) кола; б) круга; в) центра й радіуса кола та круга; г) хорди кола та круга; д) діаметра кола та круга. Чи можна вважати, що діаметр — це хорда найбільшої довжини?
2. У чому відмінність між колом і кругом?

3. Поясніть, що називають дугою кола. Скільки дуг визначають дві задані точки кола? Яким чином не плутати дуги?

4. Поясніть, що називають сектором і сегментом. Скільки секторів визначають два радіуси, проведені із центра кола? Скільки сегментів визначає будь-яка хорда? Яким чином їх не плутати?

5. Наведіть приклади ГМТ площини. Які твердження потрібно довести, щоб установити, чи є деяка множина точок площини ГМТ площини?

6. Сформулюйте теорему про ГМТ площини, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

7. Сформулюйте теорему про ГМТ площини, рівновіддалених від сторін даного кута.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено коло із центром у точці O^*. Укажіть: а) усі радіуси; б) усі діаметри; в) усі хорди.

2. На рис. 2 зображено коло із центром у точці O. Укажіть: а) усі радіуси; б) усі діаметри; в) усі хорди.

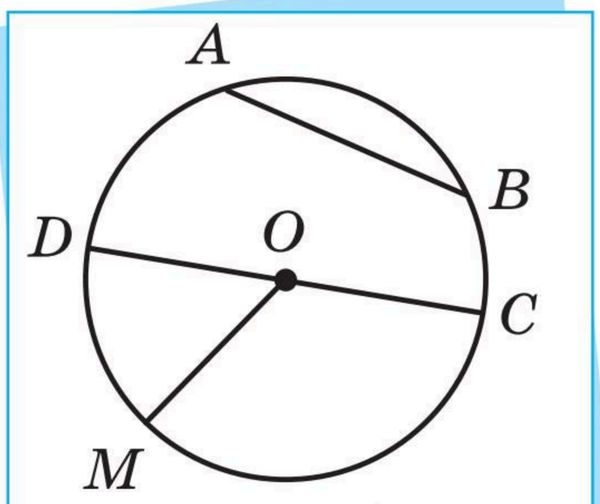


Рис. 1

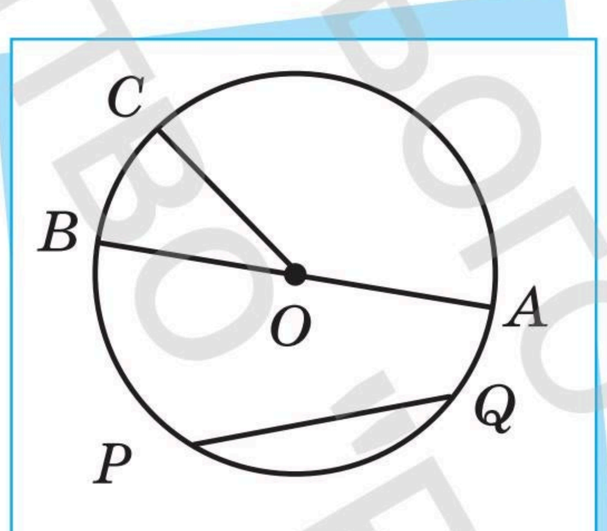


Рис. 2

* Тут і далі точка O на рисунках позначає центр кола, якщо не зазначено інше.

3. Побудуйте коло радіуса 3 см. У колі позначте центр — точку O, проведіть радіус OA та хорду MN.

4. Побудуйте коло радіуса 2 см. У колі позначте центр — точку O, проведіть діаметр CD і хорду AB.

5. Яким кольором на рис. 3 позначено:
а) сектор; б) сегмент.

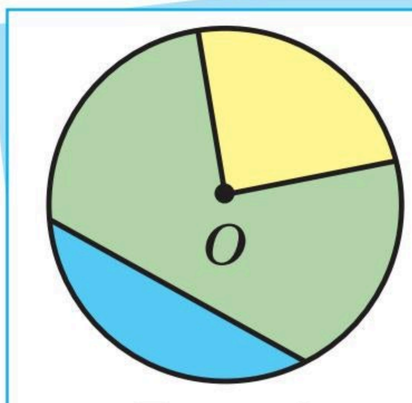


Рис. 3

6. Яким кольором на рис. 4 позначено:
а) сектор; б) сегмент.

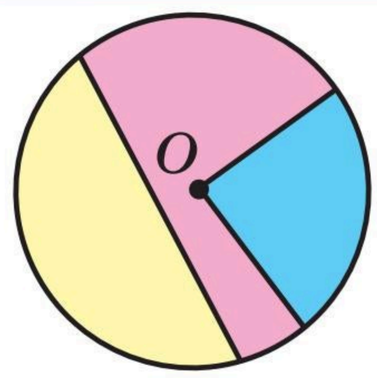


Рис. 4

7. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
а) 2 см; б) 7 см; в) 10 см; г) 21 см.

8. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
а) 4 см; б) 5 см; в) 8 см; г) 15,5 см.

9. На рис. 5* зображено коло й два радіуси, що утворюють плоскі кути 1 і 2. Відомо, що $\angle 1 = 148°$. Знайдіть градусну міру кута 2.

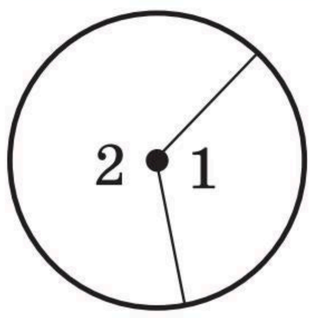


Рис. 5

10. На рис. 5 зображено коло й два радіуси, що утворюють плоскі кути 1 і 2. Відомо, що $\angle 2 = 235°$. Знайдіть градусну міру кута 1.

11. На рис. 6 зображено круг із центром $A(2;-3)$ і радіусом $R = 3$. Запишіть координати трьох точок, які належать кругу.

12. На рис. 6 зображено круг із центром $A(2;-3)$ і радіусом $R = 3$. Запишіть координати трьох точок, які НЕ належать кругу.

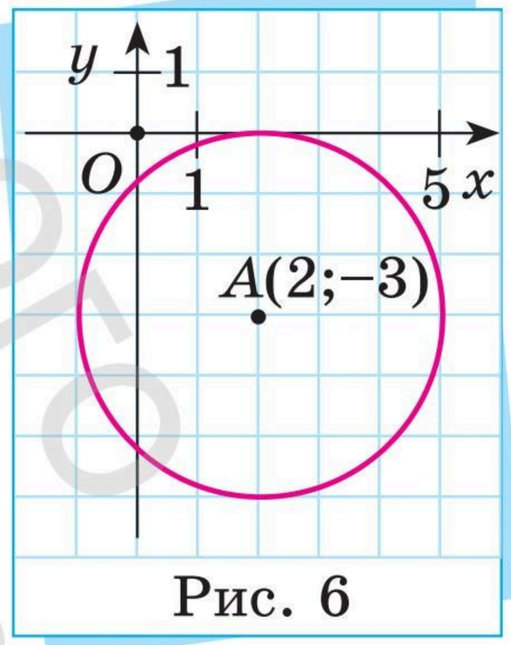


Рис. 6

* Нагадуємо, що в цьому й аналогічних випадках подані рисунки є схематичними.

Середній рівень

13. Дано круг, обмежений колом із центром у точці O та $R=3$ см. З'ясуйте, чи належить цьому кругу точка A, якщо: а) $OA=1$ см; б) $OA=2$ см; в) $OA=3$ см; г) $OA=4$ см.

14. Дано круг, обмежений колом із центром у точці O та $R=5$ см. З'ясуйте, чи належить цьому кругу точка A, якщо: а) $OA=7$ см; б) $OA=6$ см; в) $OA=5$ см; г) $OA=0{,}5$ см.

15. Побудуйте коло із центром у точці O та $R=3$ см. Для цього кола побудуйте: а) хорду AB; б) діаметр CD, паралельний хорді AB; в) радіус OM, який не перетинає хорду AB.

16. Побудуйте коло із центром у точці O та $R=2$ см. Для цього кола побудуйте: а) хорду MN; б) діаметр BD, перпендикулярний до хорди MN; в) радіус OA, паралельний хорді MN.

17. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює: а) 10,2 см; б) 7,5 см; в) x см; г) $(x+4{,}5)$ см.

18. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює: а) 0,25 см; б) 4,3 см; в) y см; г) $(y+1{,}5)$ см.

19. В одній ПДСК побудуйте коло із центром у точці $A(2;1)$ і радіуса $R=3$ та коло із центром у точці $B(-1;-2)$ і радіуса $R=4$. За рисунком визначте, чи перетинаються ці кола.

20. В одній ПДСК побудуйте коло із центром у точці $A(-3;2)$ і радіуса $R=2$ та коло із центром у точці $B(4;-3)$ і радіуса $R=5$. За рисунком визначте, чи перетинаються ці кола.

21. На рис. 7 зображено коло та два радіуси, що утворюють плоскі кути 1 і 2. Відомо, що $\angle 1$ на 26° менший, ніж $\angle 2$. Знайдіть градусні міри кутів 1 і 2.

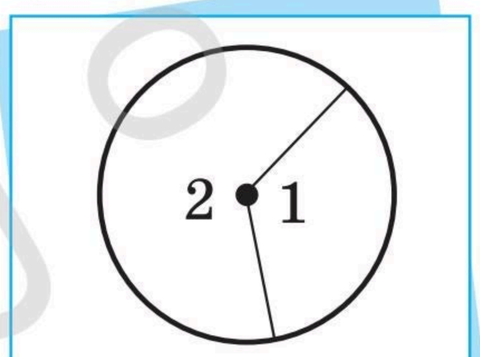


Рис. 7

22. На рис. 7 зображено коло та два радіуси, що утворюють плоскі кути 1 і 2. Відомо,

що $\angle 2$ на $34°$ більший, ніж $\angle 1$. Знайдіть градусні міри кутів 1 і 2.

23. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює 2 см.

24. Знайдіть радіус кола, якщо довжина цього кола дорівнює 14π см.

25. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює 6 см.

26. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина цього кола дорівнює 18π см.

27. Знайдіть довжину дуги l_α кола радіуса 18 см, якщо дуга l_α відповідає куту в 60 градусів.

28. Знайдіть довжину дуги l_α кола радіуса 16 см, якщо дуга l_α відповідає куту в 90 градусів.

29. Тетянка хоче зшити спідницю довжиною 40 см. Для цього вона зробила схему викрійки у вигляді двох кіл (див. рис. 8), де довжина внутрішнього кола дорівнює обхвату її талії. Знайдіть довжини радіусів кіл, якщо обхват талії Тетянки дорівнює 63 см. Вважайте, що $\pi = 3{,}14$. Відповідь округліть до цілих.

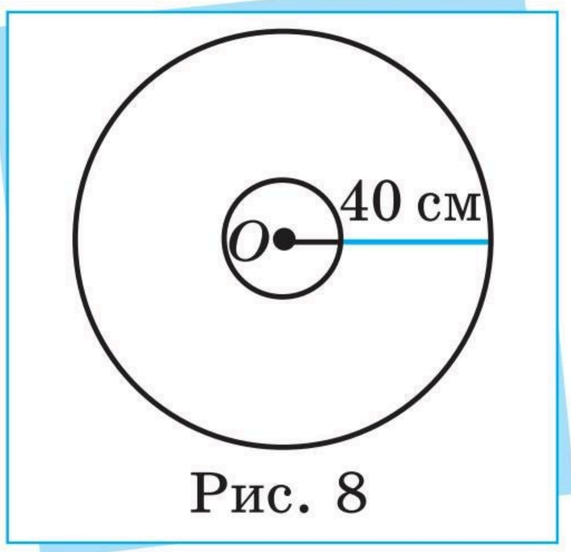


Рис. 8

30. Для виготовлення різдвяного костюма Петрик використав прямокутний шматок тканини, в якому зробив круглий отвір радіуса 17 см (див. рис. 9). Отвір Петрик планує обшити стрічкою. Знайдіть довжину потрібної стрічки. Вважайте, що $\pi = 3{,}14$. Відповідь округліть до цілих.

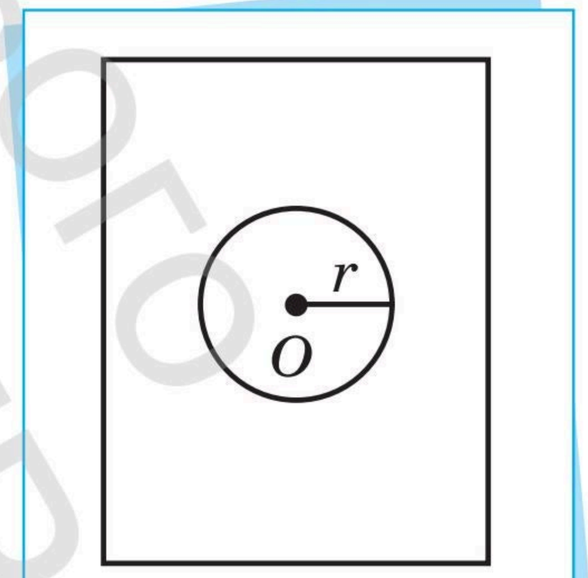


Рис. 9

31. Щоб виготовити квітку, Софійка має вирізати з кольорового аркуша паперу круг радіуса 5 см. Чи зможе вона це зробити, якщо розмір аркуша 10 см × 7 см? Відповідь поясніть.

32. Учні й учениці 7 класу вирішили розмістити на стенді емблему своєї школи. Емблема має форму круга, обмеженого колом довжиною 62,8 см. Чи зможуть вони це зробити, якщо на стенді вільним є місце прямокутної форми розміром 17 см × 20 см? Відповідь поясніть.

Достатній рівень

33. Доведіть: будь-який промінь, що виходить із центра кола, перетинає коло тільки в одній точці.

34. Доведіть: будь-яка пряма, що проходить через центр кола, перетинає коло тільки в двох точках.

35. Із точки даного кола проведено діаметр і хорду, яка дорівнює радіусу. Знайдіть кут між діаметром і хордою.

36. Із точки даного кола проведено дві хорди, які дорівнюють радіусу. Знайдіть кут між цими двома хордами.

37. На рис. 10 точка O — центр кола, $\angle BCO = 20°$. Знайдіть градусну міру кута AOC.

38. На рис. 10 точка O — центр кола, $\angle AOC = 50°$. Знайдіть градусну міру кута ABC.

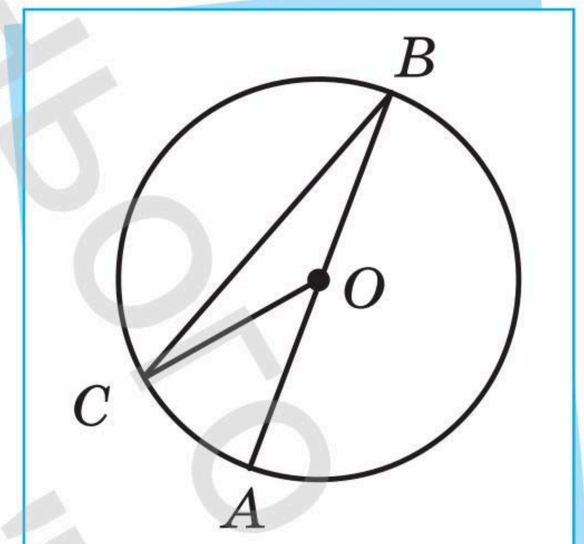


Рис. 10

39. Хорда перетинає діаметр кола під кутом 30° і ділить його на частини довжинами 8 см і 12 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди (тобто до прямої, що містить цю хорду).

40. Хорда кола радіуса 8 см перетинає діаметр кола під кутом $30°$. Відстань від центра кола до цієї хорди — 3 см. Знайдіть довжини частин, на які хорда ділить діаметр.

41. Відрізки KM і FE — діаметри кола. Доведіть, що $ME \parallel KF$.

42. Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть рівність відрізків: $AC = BD$.

43. Побудуйте три кола довільних радіусів R_1, R_2, R_3. За допомогою нитки виміряйте довжини C_1, C_2, C_3 цих кіл. Для кожного кола знайдіть відношення його довжини до довжини його діаметра (результат округліть до сотих). Заповніть таблицю та проаналізуйте результати, записані в останньому стовпчику. Які висновки можна зробити?

$R_1 =$	$d_1 =$	$C_1 =$	$\frac{C_1}{d_1} =$
$R_2 =$	$d_2 =$	$C_2 =$	$\frac{C_2}{d_2} =$
$R_3 =$	$d_3 =$	$C_3 =$	$\frac{C_3}{d_3} =$

44. Побудуйте два довільних кола. Проведіть для кіл вимірювання та розрахунки, аналогічні вимогам завдання № 43. Доповніть таблицю одержаними результатами. Знайдіть середнє арифметичне результатів останнього стовпчика. Порівняйте одержане значення середнього арифметичного зі значенням числа $\pi \approx 3{,}14$. Зробіть висновки.

45. Знайдіть радіус кола, якщо довжина дуги цього кола, що відповідає куту $72°$, дорівнює 40π см.

46. Задано коло радіуса 64 см. Знайдіть градусну міру центрального кута, якому відповідає дуга цього кола, якщо довжина дуги дорівнює 16π см.

47. Побудуйте графік функції $f(x)=x$. На графіку позначте дві довільні точки A і B такі, що точка A належить I координатній чверті, а точка B належить III координатній чверті. Запишіть координати цих точок. Вимірюйте відстань від точок A і B до координатних осей. Результати занесіть до таблиці.

Точка	Координати	Відстань від точки до осі абсцис (Ox)	Відстань від точки до осі ординат (Oy)
A			
B			

Чи можна зробити висновок, що графік функції $f(x)=x$ є бісектрисою кутів, утворених координатними осями? Як обґрунтувати цей висновок?

48. Побудуйте графік функції $f(x)=-x$. На побудованому графіку позначте дві довільні точки A і B такі, що точка A належить II координатній чверті, а точка B — IV координатній чверті. Запишіть координати цих точок. Вимірюйте відстані від точок A і B до координатних осей. Результати занесіть до таблиці.

Точка	Координати	Відстань від точки до осі абсцис (Ox)	Відстань від точки до осі ординат (Oy)
A			
B			

Чи можна зробити висновок, що графік функції $f(x)=-x$ є бісектрисою кутів, утворених координатними осями? Як обґрунтувати цей висновок?

Високий рівень

49. У колі проведено два радіуси, кут між якими дорівнює 120°. Знайдіть відстань від центра кола до хорди, що сполучає кінці цих радіусів, якщо діаметр кола дорівнює 16 см.

50. Хорда кола, яка проходить на відстані 6 см від його центра, відтинає від кола дугу, відповідний плоский центральний кут якої дорівнює 120°. Знайдіть діаметр кола.

51. Знайдіть радіус кола, знаючи, що дуга цього кола в 1° має довжину 1 м.

52. Знайдіть діаметр кола, знаючи, що дуга цього кола в 5° має довжину π м.

53. На рис. 11 $AB = BC = 12$ см; DE — серединний перпендикуляр до AB. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо периметр трикутника BEC дорівнює 28 см.

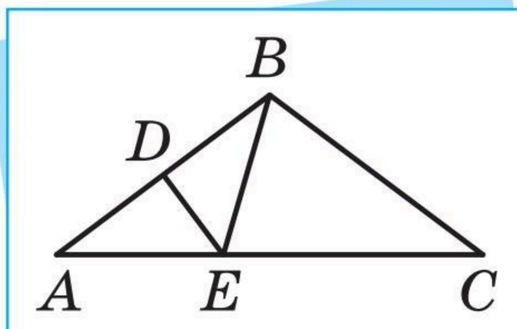


Рис. 11

54. На рис. 12 $AB = BC = 16$ см; DE — серединний перпендикуляр до AB. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо периметр трикутника ACE дорівнює 30 см.

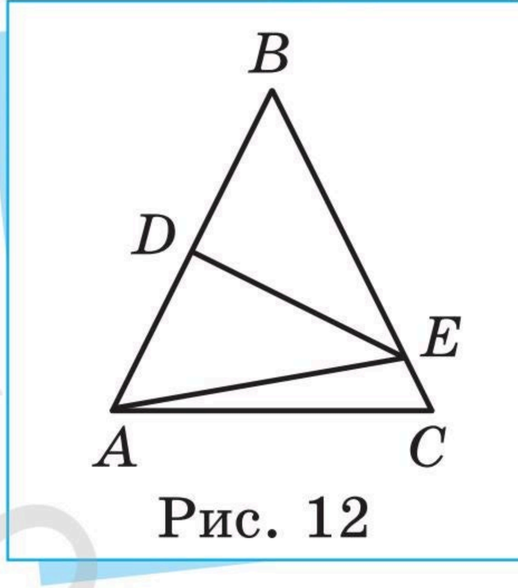


Рис. 12

55. Доведіть, що геометричним місцем точок центрів кіл, які проходять через дві дані точки, є серединний перпендикуляр до відрізка, що з'єднує ці точки.

56. Доведіть, що геометричним місцем вершин рівнобічних трикутників із заданою основою AB є серединний перпендикуляр до відрізка AB.

57. Доведіть, що геометричним місцем точок, які розташовані на відстані h від даної прямої, є пара прямих, які паралельні даній прямій і розташовані на відстані h від неї.

58. Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих, є пряма, яка паралельна даним прямим і ділить навпіл відстань між ними.

59. Доведіть, що геометричним місцем точок, із яких даний відрізок видно під прямим кутом, є коло, побудоване на цьому відрізку як на діаметрі (без точок кола на діаметрі).

60. Доведіть, що геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин даного трикутника, складається з однієї точки.

61. Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса R, які проходять через дану точку A.

62. Знайдіть геометричне місце середин відрізків із кінцями на двох даних паралельних прямих.

63. Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що промінь AX має спільну точку з відрізком BC.

64. Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що пряма BX має спільну точку з відрізком AC.



Цікавинки від дідуся Тараса

Як ви вже знаєте, число π в евклідовій геометрії позначає відношення довжини кола до його діаметра. Іноді доводиться чути, що нібито так цю константу позначив сам Піфагор, причому зробив це на честь першої букви свого імені грецькою мовою — Πυθαγόρας. Але, як бачимо, перша буква імені Піфагора є великою, а вона за написанням відрізняється від маленької букви π, якою і позначають згадану константу. Тому, схоже, це не більш ніж красива легенда.

Скоріш за все, позначення відношення довжини кола до його діаметра буквою π походить від грецьких слів περιφέρεια — «оточення, периферія» та περίμετρος — «периметр». Уперше

таким позначенням цього числа скористався англійський математик *Вільям Джонс* у 1706 р., а загальноприйнятим воно стало після робіт уже відомого вам *Леонарда Ойлера* (1737 р. і пізніше).

Число π використовувалося на практиці в давні часи, використовується й нині. Наприклад, раніше, щоб оббити дерев'яне колесо воза чи колісниці металевою смужкою по «периметру» кола, потрібно було знати довжину смужки. Діаметр колеса виміряти легко, а далі досить помножити цей діаметр на π — й одержано шукану довжину металевої смужки.

Зрозуміло, що для практичних потреб варто знати точне чи наближене значення цієї константи (спробуйте купити в магазині π кг цукерок!) Давні греки вважали, що $\pi = \frac{22}{7}$, але вони помилялися, насправді значення π є трохи меншим. Проте для практичних цілей таке наближення було цілком прийнятним, бо $\frac{22}{7} \approx 3{,}14286$, а справжнє значення $\pi \approx 3{,}14159$. Помилка не перевищувала 0,002, що давало практично не помітні похибки.

Пізніше ви дізнаєтеся, що число π є *ірраціональним*, тобто його запис у вигляді десяткового дробу містить нескінченну кількість знаків після коми, які не містять *періоду* (повторення однієї чи кількох цифр). На сьогодні відомо багато формул, які дозволяють обчислити значення π із будь-якою точністю.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Використавши додаткові джерела інформації, ознайомтеся з історією розрахунків числа π. Підготуйте невелике повідомлення на цю тему.

2. Чи доводилося вам користуватися на практиці наближеним значенням числа π? Наведіть приклади. Як ви вважаєте, чому саме наближення $\pi \approx 3{,}14$ є настільки популярним, що багато хто не знає, що це число є ірраціональним?

3. У який день святкується Міжнародний день числа π? Які цікаві події, пов'язані з наукою, відбулися в цей день?

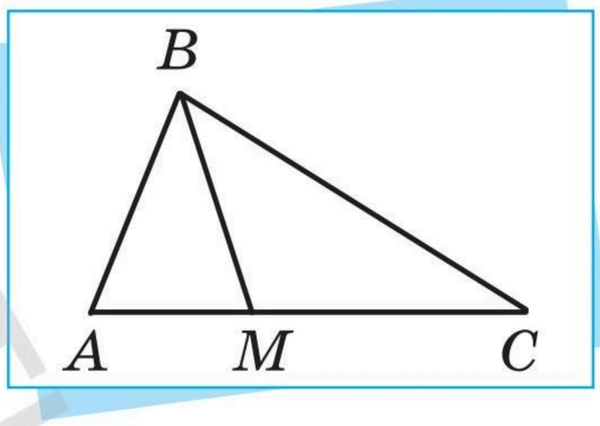
Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $6a^2 - 3a(2a+1) + 4a - 2$, якщо $a = 1{,}7$.

2. Розв'яжіть рівняння.

а) $3(2-x) = 2x$; б) $\frac{y}{2} - \frac{y+1}{6} = 1$; в) $t(t+1) - 2t = t^2 + 3$.

3. На рисунку зображено трикутник ABC; BM — бісектриса кута B трикутника. Знайдіть градусну міру кута ABC, якщо $\angle BCM = 32°$, а $\angle AMB = 72°$.



4. Відомо, що множина A — множина всіх двоцифрових чисел, що діляться на 10, а множина B — множина всіх двоцифрових чисел, що діляться на 20. Запишіть ці множини переліком усіх їх елементів. Яке співвідношення між цими множинами? Зобразіть це співвідношення за допомогою діаграми.

5. Побудуйте за допомогою циркуля два різні кола однакового радіуса, які: а) не мають спільних точок; б) мають лише одну спільну точку; в) мають дві спільні точки. У кожному з випадків виміряйте відстань від між центрами кіл і порівняйте її із сумою радіусів кіл. Зробіть висновок.

§ 26. Січна та дотична. Властивість дотичної



Петрику, зверни увагу, що об'єкти круглої форми є надзвичайно корисними! Особливо це стосується різноманітних коліс — від колеса автомобіля чи велосипеда до водяного колеса чи штурвала корабля. Що цікаво, у круглому об'єкті майже завжди до його центра чомусь приєднано вал, а далі або цей вал обертає колесо, або навпаки — колесо обертає вал.





Дійсно, у велосипеді вал обертається педалями, колесо крутиться, і ми їдемо, а у водяному колесі чи штурвалі потрібно якимось чином примусити обертатися колесо, а вже воно розкрутить вал, який найчастіше передасть рух на інші колеса для вироблення енергії чи для повороту стерна.





Із педалями все більш-менш зрозуміло, а от як примусити крутитися велике колесо? Мабуть, саме для цього на

штурвалі ніби подовжено радіуси у вигляді ручок, а водяне колесо обладнане лопатками чи ковшами. Ми прикладаємо зусилля в напрямку, перпендикулярному до радіуса, і колесо обертається!



Дійсно, напрямок прикладання зусиль до штурвала є перпендикулярним до радіуса штурвала. Але зверни увагу, що й велосипедист на прямій ділянці шляху їде рівно. При цьому спиці колеса (радіуси) будуть перпендикулярні до дороги (до прямої, що має з колом колеса спільну точку). Думаю, що це не випадково, — прямі, перпендикулярні до радіуса кола, мабуть, відіграють якусь особливу роль!



Дійсно, Петрику, такі прямі відіграють особливу роль для кола і мають спеціальну назву.



Пряму, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називають дотичною, а дану точку кола називають точкою дотику.

Наприклад, на рис. 26.1 зображено коло із центром у точці O і радіусом OM. Пряма l проходить через точку M перпендикулярно до радіуса OM. Отже, вона є дотичною до кола в точці M.

Згідно з означенням відстані від точки до прямої бачимо, що відстань від центра кола до будь-якої його дотичної дорівнює радіусу цього кола.

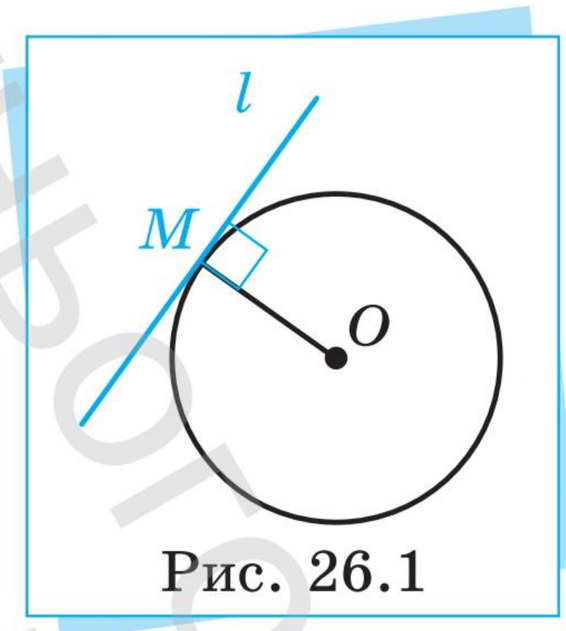


Рис. 26.1



Доведемо важливу властивість дотичної.

ТЕОРЕМА (властивість дотичної).

Дотична до кола має із цим колом лише одну спільну точку — точку дотику.

Нехай l — дотична до кола із центром у точці O, проведена через точку M цього кола.

Припустимо, що існує ще принаймні одна точка цього кола, яка належить прямій l. Позначимо її буквою P (рис. 26.2). Розглянемо трикутник POM. Оскільки $OP = OM$ як радіуси кола, то цей трикутник є рівнобічним з основою PM. Тоді за властивістю кутів при основі рівнобічного трикутника $\angle P = \angle M$. Але з означення дотичної $\angle M = 90°$. Оскільки кут POM має додатну градусну міру, то сума градусних мір кутів трикутника POM більша за $180°$, що неможливо. Отримали *суперечність*. Отже, припущення неправильне і точка M — єдина спільна точка дотичної l і кола.

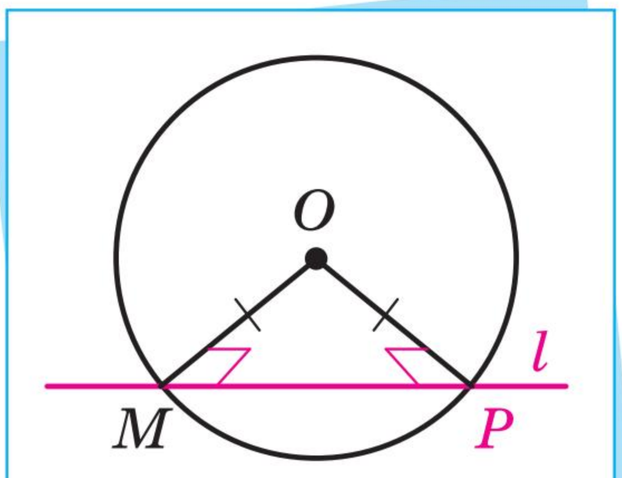


Рис. 26.2



Пряму, що має з колом дві спільні точки, називають січною.

Наприклад, на рис. 26.3 зображено коло із центром у точці O і січну m, яка перетинає коло в точках K і P.

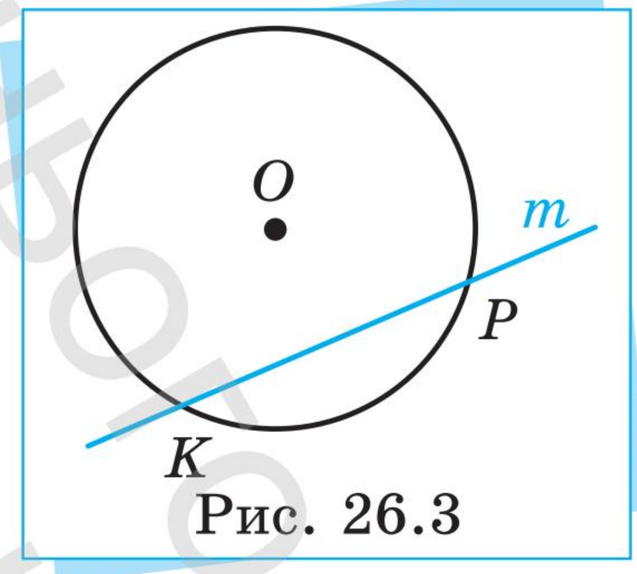


Рис. 26.3

Доведення того, що пряма не може мати з колом більше двох спільних точок:
https://rnk.com.ua/106111



Пряма також може *не мати* з колом спільних точок. Наприклад, на рис. 26.4 пряма p є саме такою.

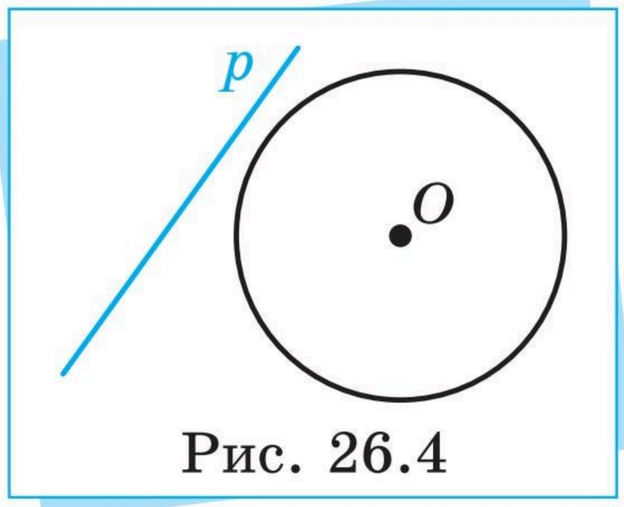


Рис. 26.4

Коло може мати з прямою або лише дві спільні точки (січна), або одну точку (дотична), або не мати їх зовсім.

Аналогічно (див. рис. 26.5) два кола можуть не мати спільних точок — тоді говорять, що *кола не перетинаються (а, б)*; мати дві спільні точки — тоді говорять, що *кола перетинаються* в цих точках *(в)*; мати тільки одну спільну точку — тоді говорять, що *кола дотикаються* в цій точці (*в точці дотику*) *(г, д)*. Якщо центри кіл розміщені по різні боки від точки дотику, то дотик називають *зовнішнім (г)*; якщо центри кіл розміщені по один бік від точки дотику, то дотик називають *внутрішнім (д)*.

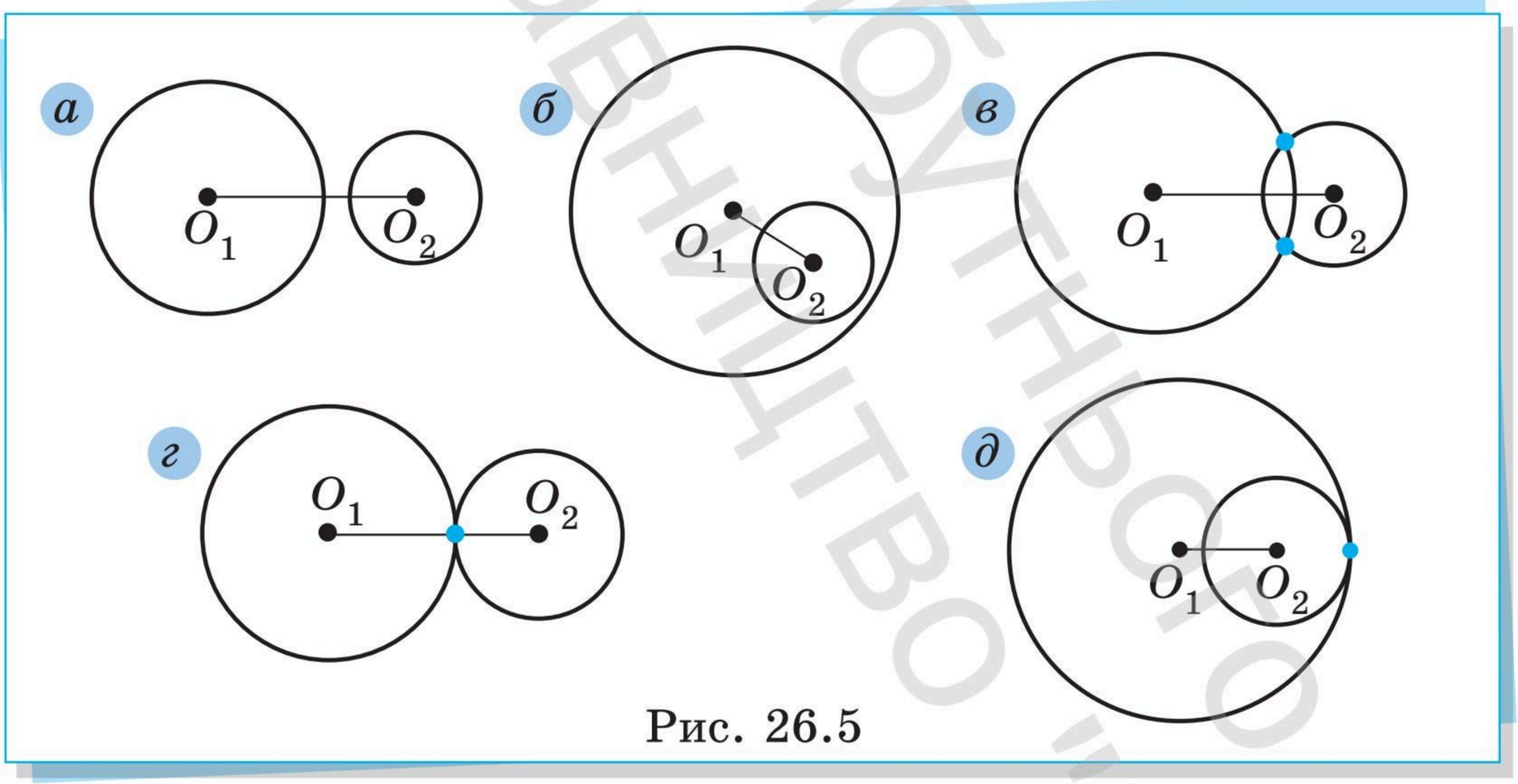


Рис. 26.5



Розглянемо дві важливі задачі, які описують властивості кола, корисні для розв'язування інших задач.

Задача 1. Через дану точку до кола проведено дві дотичні. Доведіть, що відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

Нехай на рис. 26.6 через точку A проведено прямі l і m, які дотикаються до кола із центром у точці O в точках M і P відповідно. Доведемо, що $AM = AP$.

За означенням дотичної $\angle AMO = \angle APO = 90°$. Проведемо відрізок AO. Прямокутні трикутники AMO і APO рівні за гіпотенузою та катетом, бо катети OM і OP рівні як радіуси кола, а гіпотенуза AO — спільна. Отже, $AM = AP$, що й потрібно було довести.

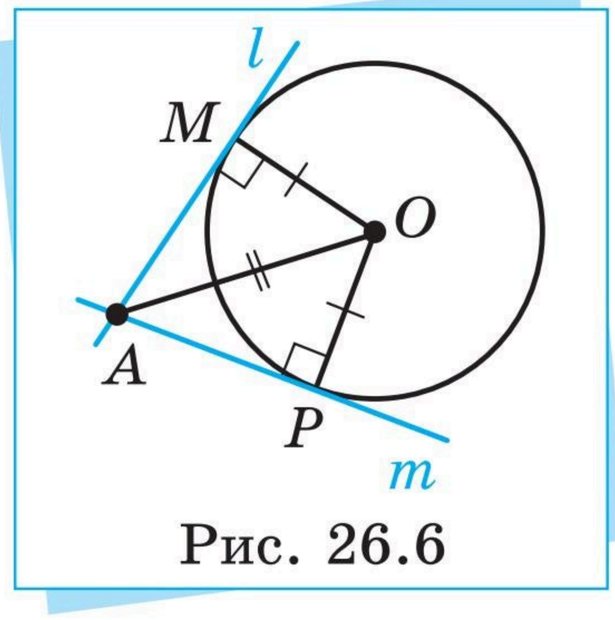


Рис. 26.6

Задача 2. Доведіть такі твердження: 1) діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл; 2) діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

1) Якщо хорда є діаметром, то твердження очевидне. Розглянемо випадок, коли хорда не є діаметром. Нехай на рис. 26.7 зображено хорду AB і діаметр CD кола із центром у точці O, причому $AB \perp CD$ і точка K — точка перетину AB і CD. Доведемо, що $AK = KB$.

Проведемо відрізки AO і OB. Вони рівні як радіуси кола. Тому трикутник AOB — рівнобічний з основою AB. Відрізок OK є висотою трикутника AOB, а отже, за наслідком із властивостей рівнобічного трикутника, OK також є і медіаною, тобто $AK = KB$.

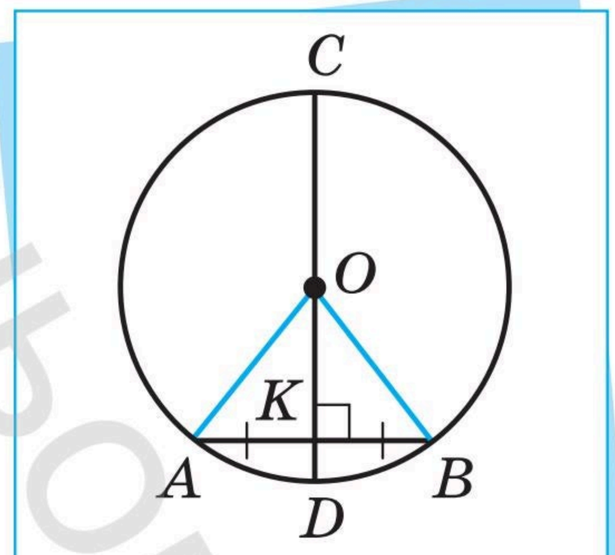


Рис. 26.7

2) Використаємо той самий рис. 26.7. Тепер відомо, що $AK = KB$, потрібно довести, що $AB \perp CD$.

У рівнобічному трикутнику AOB з основою AB відрізок OK є медіаною, а отже, за наслідком із властивостей рівнобічного трикутника, OK також є і висотою. Тобто $OK \perp AB$. Оскільки точки C, O, K і D лежать на одній прямій, то $AB \perp CD$.

Перевірте себе!

1. Дайте означення дотичної до кола.
2. Сформулюйте властивість дотичної.
3. Яку пряму називають січною даного кола?
4. Скільки спільних точок може мати пряма з колом?
5. Скільки спільних точок можуть мати два кола?
6. Сформулюйте властивості кола, наведені в § 26.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено коло із центром у точці O. Укажіть: а) дотичну до цього кола; б) січну цього кола; в) радіус цього кола.

2. На рис. 2 зображено коло із центром у точці O. Укажіть: а) дотичну до цього кола; б) січну цього кола; в) радіус цього кола.

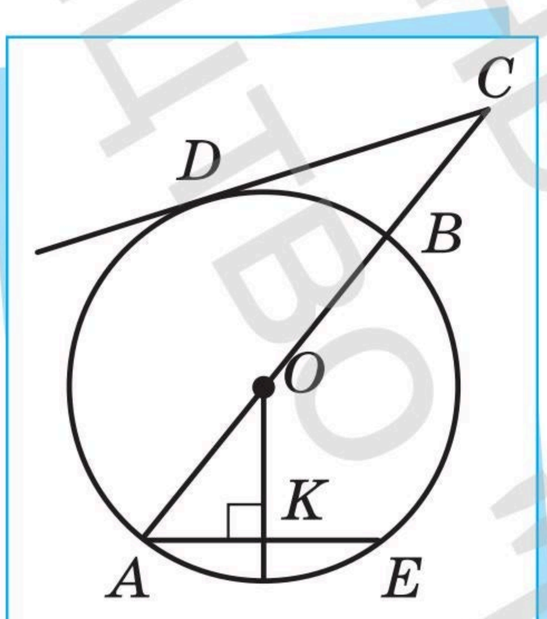


Рис. 1

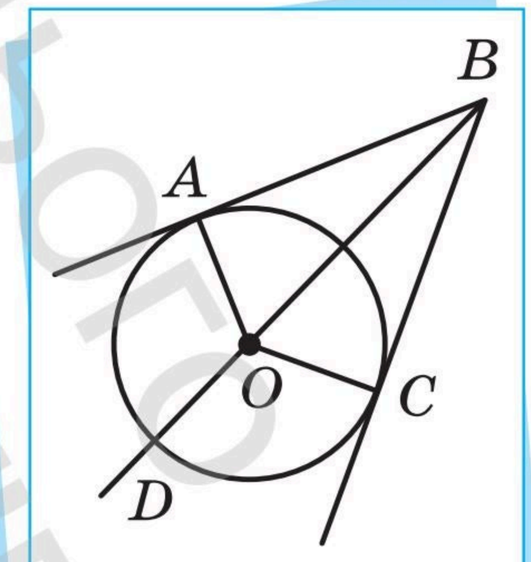


Рис. 2

3. Побудуйте довільне коло. Проведіть радіус OA кола. Проведіть дотичну до кола так, щоб точка A була точкою дотику.

4. Побудуйте довільне коло із центром у точці O. Позначте точку C таку, щоб довжина OC була більша, ніж радіус кола. Через точку C проведіть дотичну та січну до кола.

5. Побудуйте два довільні кола, які: а) перетинаються; б) мають зовнішній дотик.

6. Побудуйте два довільні кола, які: а) не мають спільних точок; б) мають внутрішній дотик.

7. Дано коло із центром у точці O та точка A така, що довжина OA більша, ніж радіус кола. Із точки A проведіть дві різні дотичні до кола.

8. Дано коло із центром у точці O та точка B така, що довжина OB більша, ніж радіус кола. Із точки B проведіть дві різні січні до кола.

9. Побудуйте два кола, які мають внутрішній дотик. Проведіть дотичну, спільну для цих кіл.

10. Побудуйте два кола, які мають зовнішній дотик. Проведіть дотичну, спільну для цих кіл.

Середній рівень

11. На рис. 3 діаметр CD кола перпендикулярний до хорди AB. Знайдіть довжину хорди AB, якщо $AH = 2$ см.

12. На рис. 3 діаметр CD кола ділить хорду AB навпіл. Знайдіть $\angle AOH$, якщо $\angle OAH = 20°$.

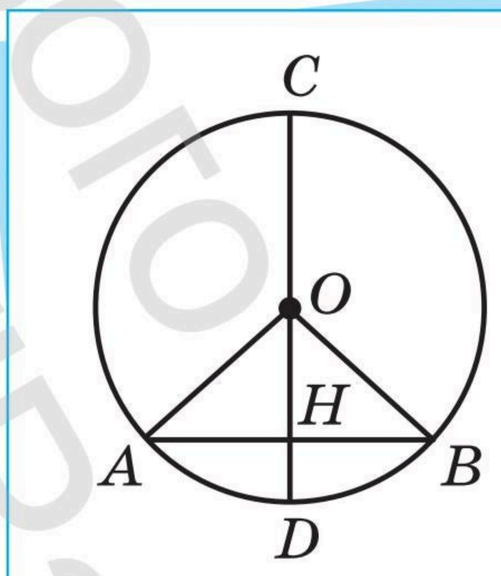


Рис. 3

13. Дано коло, радіус якого дорівнює 4 см. Пряма a проходить перпендикулярно до діаметра кола. Відстань від центра кола до прямої a дорівнює: а) 2 см; б) 3 см; в) 4 см; г) 8 см. У якому із зазначених випадків пряма a є дотичною до кола?

14. Дано коло, радіус якого дорівнює 6 см. Пряма a проходить перпендикулярно до діаметра кола. Відстань від центра кола до прямої a дорівнює: а) 3 см; б) 5 см; в) 6 см; г) 12 см. У якому із зазначених випадків пряма a є січною до кола?

15. На рис. 4 пряма KL дотична до кола; $KO=6$ см; $\angle KOL=60°$. Знайдіть $\angle KLO$ і довжину відрізка OL.

16. На рис. 5 пряма MN дотична до кола. Знайдіть $\angle MON$, якщо $MO=12$ см, а $ON=24$ см.

17. Із точки A до кола проведено дотичні AB і AC (рис. 6). Чи будуть трикутники AOC і AOB рівними? Відповідь обґрунтуйте.

18. Із точки A до кола проведено дотичні AB і AC (рис. 6). Чи будуть трикутники AOC і AOB прямокутними? Відповідь обґрунтуйте.

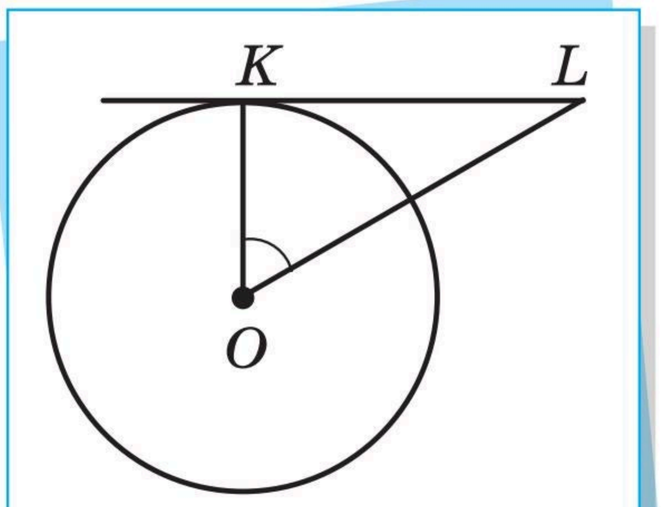


Рис. 4

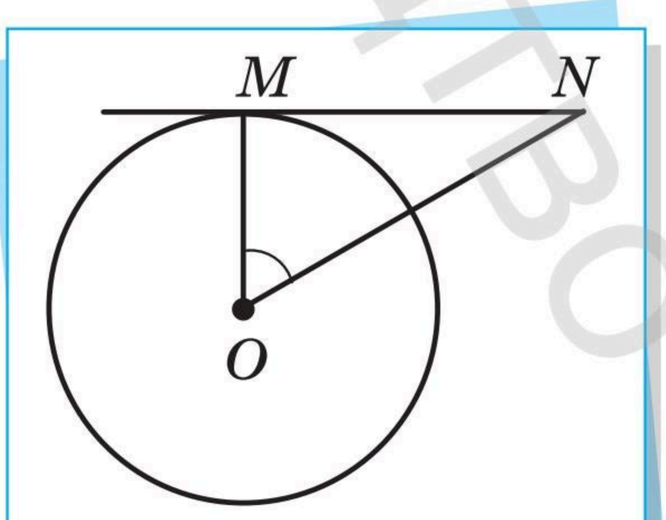


Рис. 5

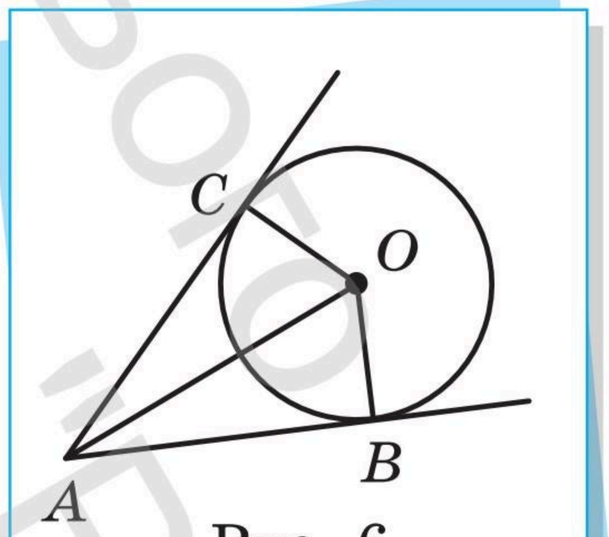


Рис. 6

19. На рис. 7 зображено дотичну CA до кола (A — точка дотику). Знайдіть кут BAC, якщо $\angle OAB = 20°$.

20. На рис. 7 зображено дотичну CA до кола (A — точка дотику). Знайдіть кут BAO, якщо $\angle BAC = 60°$.

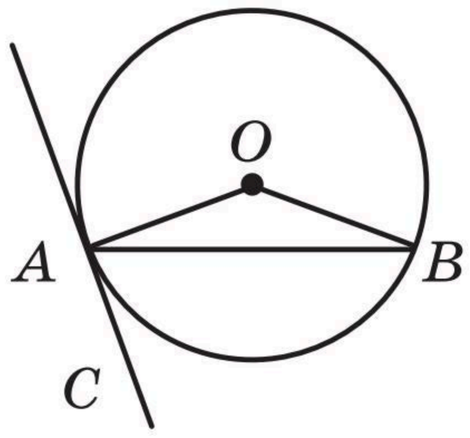


Рис. 7

Достатній рівень

21. Пряма KM — дотична до кола із центром O; $\angle MON = 86°$ (див. рис. 8). Знайдіть градусну міру кута NMK.

22. Пряма KM — дотична до кола із центром O; $\angle KMN = 50°$ (див. рис. 8). Знайдіть градусну міру кута NOM.

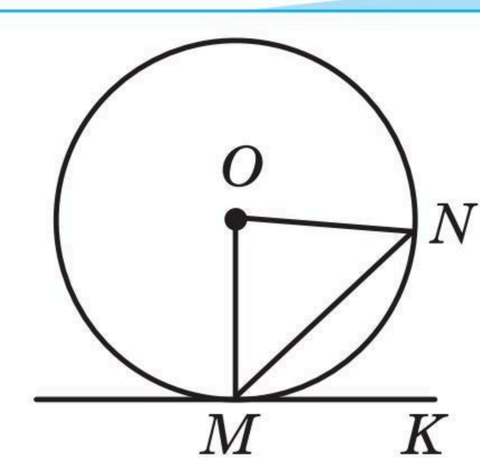


Рис. 8

23. У прямокутному трикутнику ABC довжина гіпотенузи AB дорівнює 20 см; $\angle A = 60°$. Знайдіть радіус кола із центром у точці A, яке дотикається до прямої BC.

24. Точки A і B лежать на дотичній до кола із центром O по різні боки від точки дотику. Відомо, що $OA = OB = 8$ см і $\angle AOB = 120°$. Знайдіть радіус кола.

25. Через кінці хорди MN, яка дорівнює радіусу, провели дотичні, що перетинаються в точці A. Знайдіть градусну міру кута MAN.

26. Коло дотикається до сторін кута O в точках A і B так, що $AB = AO$. Знайдіть градусну міру кута O.

27. Доведіть, що рівні хорди кола розташовані на однаковій відстані від центра кола.

28. Доведіть, що коли хорди кола розташовані на однаковій відстані від центра кола, то ці хорди рівні.

29. На рис. 9 радіус OD перпендикулярний до хорди AB. Доведіть, що $AD = DB$.

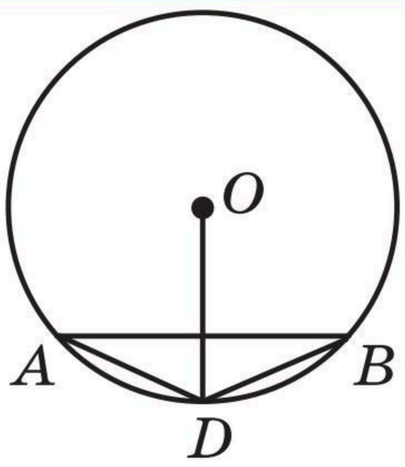


Рис. 9

30. На рис. 9 хорди AD і DB рівні, OD — радіус. Доведіть, що $OD \perp AB$.

Високий рівень

31. Із точки A, яка лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки A до центра кола вдвічі більша за радіус кола. Знайдіть градусну міру кута між дотичними.

32. Із точки M, що лежить поза колом, проведено дві дотичні, які дотикаються до кола в точках A і B. Знайдіть довжину AB, якщо $\angle AMB = 60°$, $AM = 12$ см.

33. Коло дотикається сторін нерозгорнутого кута. Доведіть, що центр кола лежить на бісектрисі цього кута.

34. На бісектрисі кута A, градусна міра якого дорівнює $60°$, узяли точку O так, що $AO = 10$ см. Доведіть, що коло із центром у точці O і радіусом 5 см дотикається до сторін кута A.

35. Доведіть, що коли два кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках K і N (рис. 10), то: 1) $KN \perp O_1O_2$; 2) точка T перетину відрізків KN і O_1O_2 є серединою відрізка KN.

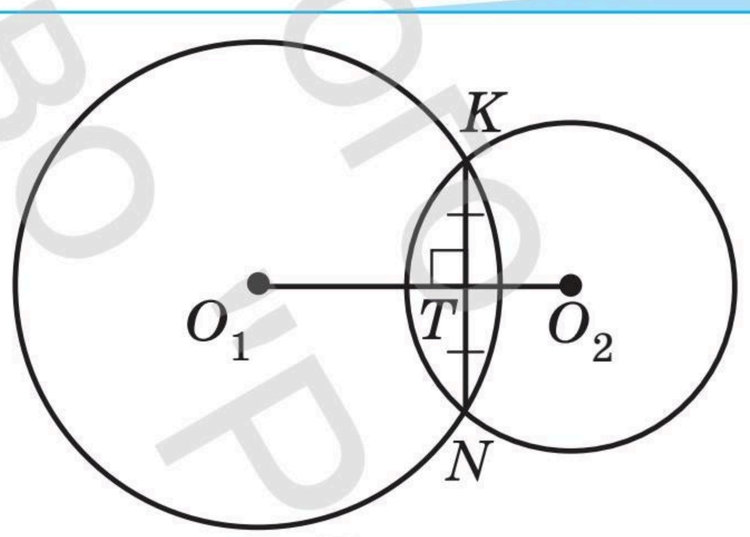


Рис. 10

36. Доведіть, що два кола не можуть перетинатися більше ніж у двох точках.

37. Доведіть, що коли два кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R_1 і R_2 дотикаються, то точка дотику лежить на прямій O_1O_2 і для зовнішнього дотику $O_1O_2 = R_1 + R_2$, а для внутрішнього $O_1O_2 = R_1 - R_2$ (де $R_1 > R_2$).

38. Доведіть, що коли два кола дотикаються, то через точку дотику проходить спільна дотична до цих кіл (рис. 11).

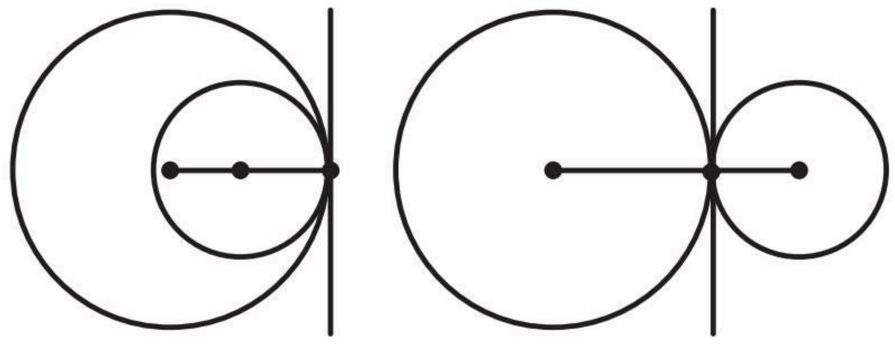


Рис. 11

39. Хорда довжиною 20 см відтинає від кола його чверть. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

40. Хорда відтинає від кола його третину. Відстань від центра кола до цієї хорди дорівнює 6 см. Знайдіть довжину радіуса кола.

41. Радіус, проведений у точку дотику прямої m із колом, ділить хорду AB, відмінну від діаметра, навпіл. Доведіть, що $AB \parallel m$.

42. Дві хорди кола, відмінні від діаметрів, у результаті перетину з діаметром цього кола діляться навпіл. Доведіть, що ці хорди паралельні.



Цікавинки від дідуся Тараса

Коло та круг були відомі ще здавна. Люди могли спостерігати в природі об'єкти, що мають форму кола та круга: Сонце, Місяць, зріз дерева чи стебла рослини, слід від вихору на піску, слід на воді після падіння в нього каменю тощо. Форму кола має колесо, яке свого часу стало революційним винаходом людства

Підручник Проект Міністерства освіти і науки України

та спростило важку фізичну працю в багатьох сферах людської діяльності. Пізніше зубчасте колесо зробило можливим існування багатьох сучасних машин і механізмів.

Термін *коло* вживається також і в переносному значенні та поширений не лише в природничих науках (електричне коло, полярне коло тощо), а й в історії, літературі, повсякденному житті. Наприклад, колом також називають: замкнений кільцем ланцюжок людей; хороводний танок; певну ділянку, зону, сферу чогось (коло повноважень, коло обов'язків); сукупність людей, об'єднаних певними зв'язками (коло друзів, коло однодумців).

Так само багато значень має термін *круг*: ділянка поверхні, що має круглу форму, ділянка поля, облік готової продукції в деяких ремеслах і заняттях тощо.

Надзвичайно поширеними є символи у формі кола в міфології різних народів, зокрема у давніх українців. Наприклад, Коло — це старовинна назва Сонця, від якої походить язичницька богиня Коляда, мати Сонця. За легендою, Коляда щороку, в найдовшу ніч зими, народжує Божича — нове Сонце, Новий рік, сина Дажбога. За легендою, саме Коляда навчила давніх українців робити колесо.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Запитайте вчителів (вчительок) фізики, географії, історії, української мови та літератури про вживання термінів «коло» та «круг» у відповідних науках. У якій із цих наук коло та круг зустрічаються найчастіше? Наскільки важливими вони є для цих наук?

2. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про використання символів кола та круга в міфах різних народів. Чи збереглися ці символи до нашого часу і якою мірою? Підготуйте невелике повідомлення.

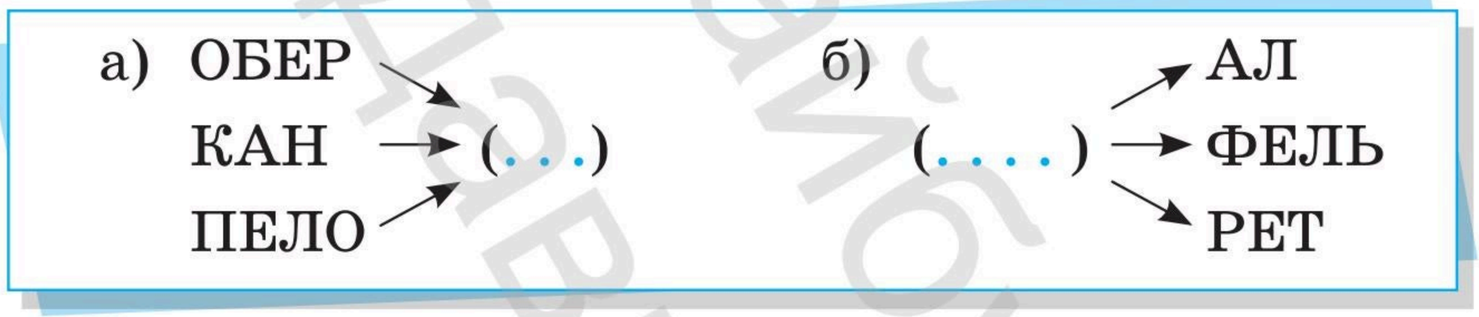
Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу найзручнішим способом.

а) $3{,}7 \cdot 1\frac{2}{3} + 5{,}3 \cdot 1\frac{2}{3}$; б) $2{,}7 \cdot 34\frac{5}{7} - 2{,}7 \cdot 14\frac{5}{7}$.

2. Пан Грицько виїхав на автомобілі з міста до села. Спочатку він рухався з певною незмінною швидкістю 1,5 год. Потім збільшив швидкість на 10 км/год і рухався з новою незмінною швидкістю ще півгодини, доки врешті не приїхав у село. Знайдіть початкову швидкість руху автомобіля (у км/год), якщо відстань, яку подолав пан Грицько, дорівнює 125 км.

3. Знайдіть *слово*, що є початком або закінченням слів (кількість крапок у дужках дорівнює кількості букв).



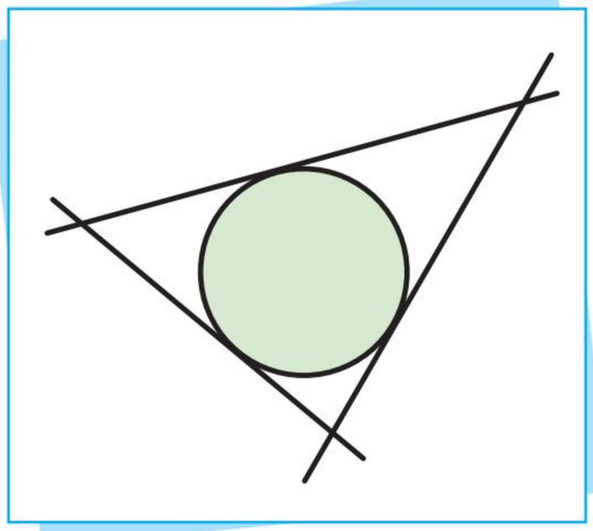
4. Градусна міра одного з кутів трикутника дорівнює 40°, а градусні міри двох інших кутів цього трикутника відносяться як 3:4. Знайдіть градусні міри невідомих кутів трикутника.

5. За допомогою циркуля побудуйте на площині коло довільного радіуса із центром у точці O. Позначте на колі три точки — A, B, C і побудуйте радіуси OA, OB, OC. За допомогою косинця проведіть три дотичні до кола в точках A, B, C. Чи перетнулися ці три дотичні попарно? Якщо так, то позначте точки перетину дотичних буквами K, L, M. Як би ви назвали коло із центром у точці O по відношенню до трикутника KLM? Як би ви назвали це коло по відношенню до трикутника ABC? Чи завжди перетинаються три дотичні, проведені до кола в трьох його різних точках?

§ 27. Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане в трикутник



Петрику, маю одну проблему, допоможи, будь ласка! Хочу на дачі розпланувати круглу клумбу так, щоб вона дотикалася до трьох доріжок. Поглянь, ось план. Не можу зрозуміти, де буде розташований центр цього кола?



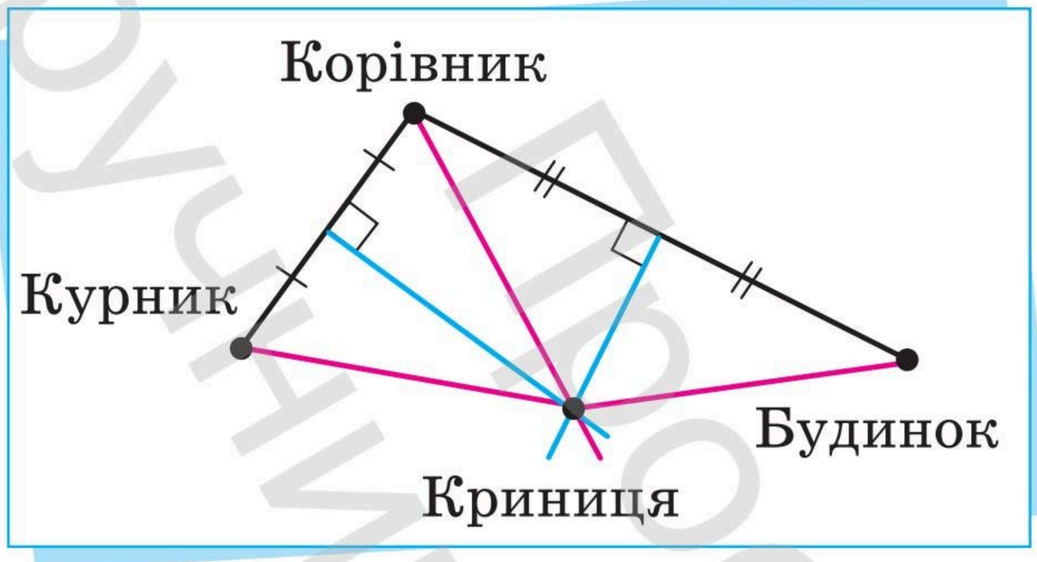


Добре, спробую, але в мене теж є проблема. Друг із села пише, що вони хочуть викопати у дворі криницю так, щоб воду було зручно носити відрами й до будинку, й до корівника, й до курника. Не можуть визначитися, де копати.





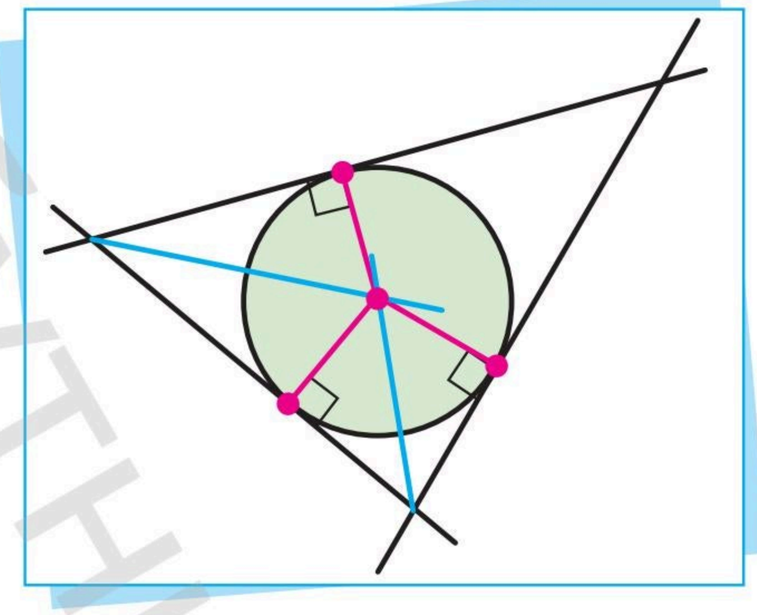
Ну, твоя задача зовсім проста! Зараз ми накреслимо план. Нам потрібно знайти точку, яка розташована на однаковій відстані від трьох точок. Ми знаємо, що всі точки, рівновіддалені від двох даних точок, розташовані на серединному



перпендикулярі до відрізка з кінцями в даних точках. Проведемо два серединні перпендикуляри — і готово! Точка, де вони перетнуться, буде розташована на однаковій відстані від усіх трьох заданих точок. Там нехай і копають криницю!



Чудово, дякую! Твоя задача також не дуже складна. Ми знаємо, що дотична перпендикулярна до радіуса кола, проведеного в точку дотику. Сам радіус у такому випадку буде відстанню від центра кола до дотичної. Тому, щоб знайти точку, яка розташована на однаковій відстані від трьох сторін трикутника, проведемо бісектриси двох кутів цього трикутника. Усі точки бісектриси рівновіддалені від сторін кута, тому точка перетину двох бісектрис буде потрібним тобі центром. Я домалював на твоєму рисунку бісектриси синім кольором, а радіуси кола — червоним. Подивись!





Дуже дякую, Петрику! Цікаво, що в моєму випадку коло вийшло ніби *вписаним* у трикутник, утворений перетином доріжок.



А в мене вийшло, що будинок, корівник і курник лежать на умовному колі із центром у криниці. Це коло ніби *описане* навколо трикутника!



Так, ви маєте рацію, це цілком природні назви для таких кіл.



Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, називають вписаним у цей трикутник.

Коло, яке проходить через усі вершини трикутника, називають описаним навколо цього трикутника.

На рис. 27.1 зображено коло із центром у точці O, яке описане навколо трикутника ABC, і коло із центром у точці I, яке вписане в трикутник KMP. Відрізки OA, OB, OC — радіуси кола, описаного навколо трикутника ABC, а відрізки IH_1, IH_2, IH_3 — радіуси вписаного кола. За означенням вписаного кола $IH_1 \perp KP$, $IH_2 \perp KM$, $IH_3 \perp MP$.

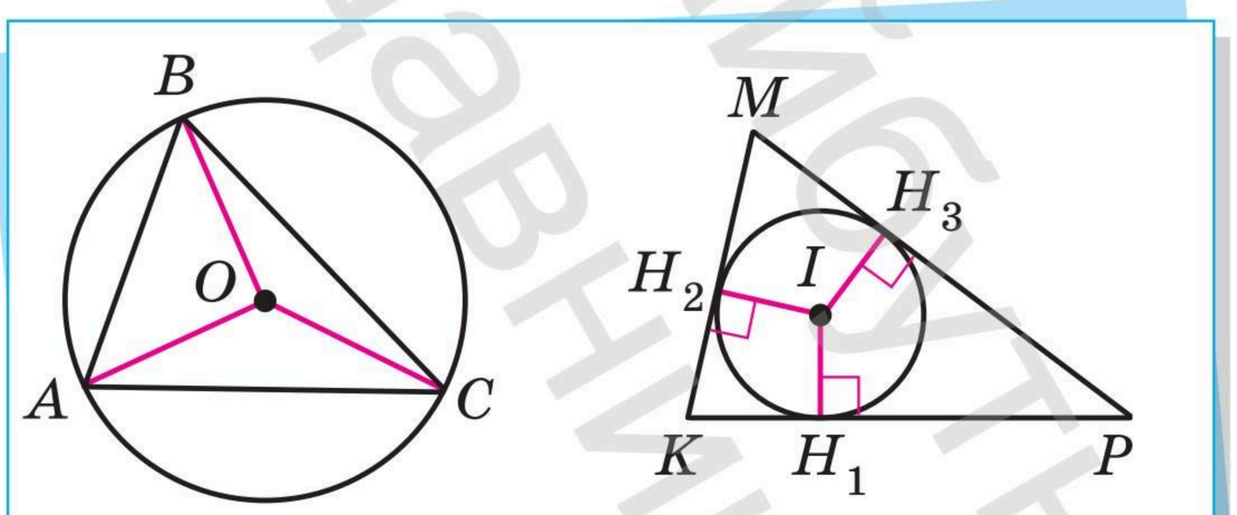


Рис. 27.1



Сформулюємо й доведемо важливе твердження.



ТЕОРЕМА (про існування кола, описаного навколо трикутника).

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Нехай ABC — даний трикутник (рис. 27.2). Покажемо, що існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Для цього проведемо серединні перпендикуляри l і m до сторін AC і BC відповідно. Нехай O — точка перетину прямих l і m. Тоді за властивістю серединного перпендикуляра l маємо $OA = OC$, а за властивістю серединного перпендикуляра m маємо $OB = OC$. Отже, $OA = OB = OC$, тобто вершини трикутника ABC рівновіддалені від точки O. Таким чином, вершини трикутника ABC належать колу із центром у точці O і радіусом $R = OA = OB = OC$. Теорему доведено.

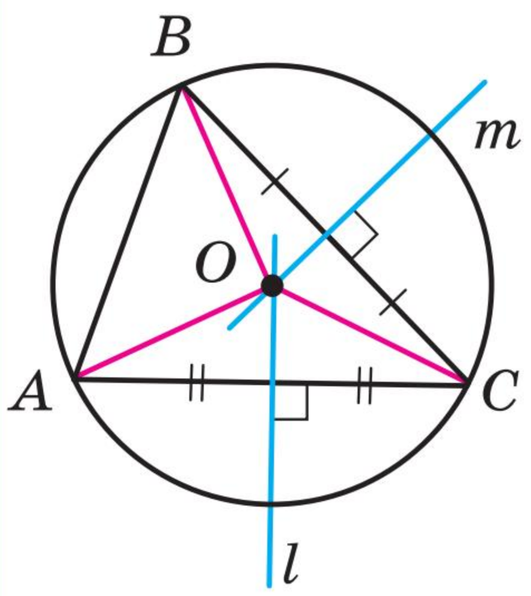


Рис. 27.2

Зі щойно доведеної теореми безпосередньо випливає:

Усі три серединні перпендикуляри до сторін даного трикутника перетинаються в одній точці.

Центр кола, описаного навколо даного трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.



Зауважимо, що навколо даного трикутника можна описати лише одне коло. Це випливає з того, що точка перетину серединних перпендикулярів — єдина. Отже, існує лише одна точка, рівновіддалена від усіх трьох вершин трикутника.

Також відзначимо, що серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника не можуть бути паралельними. *(Доведіть це твердження самостійно.)*



Сформулюємо й доведемо ще одне важливе твердження.

ТЕОРЕМА (про існування кола, вписаного в трикутник).

У будь-який трикутник можна вписати коло.

Нехай KMP — даний трикутник (рис. 27.3). Покажемо, що існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін. Для цього проведемо бісектриси кутів K і M трикутника та позначимо буквою I точку їх перетину. Кожна точка бісектриси кута K рівновіддалена від сторін KP і KM, тобто, якщо $IH_1 \perp KP$, $IH_2 \perp KM$, то $IH_1 = IH_2$. Аналогічно кожна точка бісектриси кута M рівновіддалена від сторін KM і MP, тобто якщо $IH_2 \perp KM$, $IH_3 \perp MP$, то $IH_2 = IH_3$.

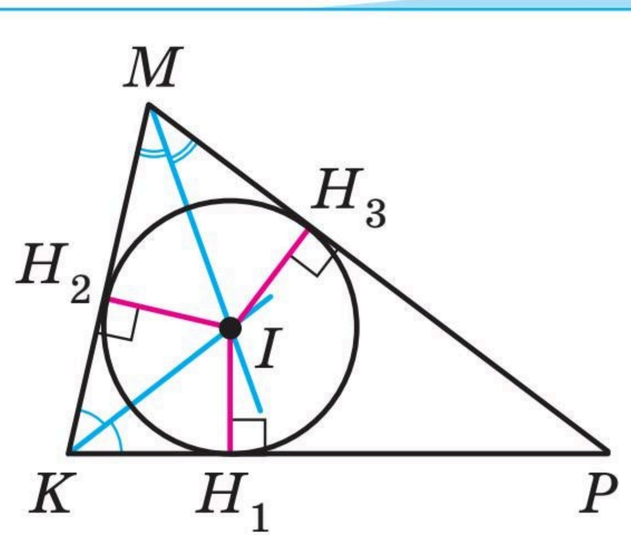


Рис. 27.3

Отже, $IH_1 = IH_2 = IH_3$, тобто точка I — рівновіддалена від сторін трикутника KMP. Таким чином, коло із центром у точці I і радіусом $r = IH_1 = IH_2 = IH_3$ дотикається до всіх трьох сторін трикутника KMP. Теорему доведено.

Зі щойно доведеної теореми безпосередньо випливає:

Усі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Центр кола, вписаного в даний трикутник, — це точка перетину бісектрис цього трикутника.

Аналогічно до описаного кола в даний трикутник можна вписати лише одне коло. Це випливає з того, що точка перетину бісектрис трикутника — єдина. Отже, існує лише одна точка, рівновіддалена від усіх трьох сторін трикутника. Її часто називають *інцентром* і позначають буквою I.

Також відзначимо, що бісектриси двох кутів трикутника не можуть бути паралельними. *(Доведіть це твердження самостійно.)*

Розв'яжемо дві важливі задачі.

Задача 1. Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, обчислюється за формулою $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$, де r — радіус вписаного кола, a, b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза.

Нехай на рис. 27.4 зображено прямокутний трикутник ABC і коло із центром у точці I, вписане в цей трикутник. Точки D, F, G — точки дотику цього кола до сторін BC, AC, AB відповідно. Також за умовою $ID=IF=IG=r$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

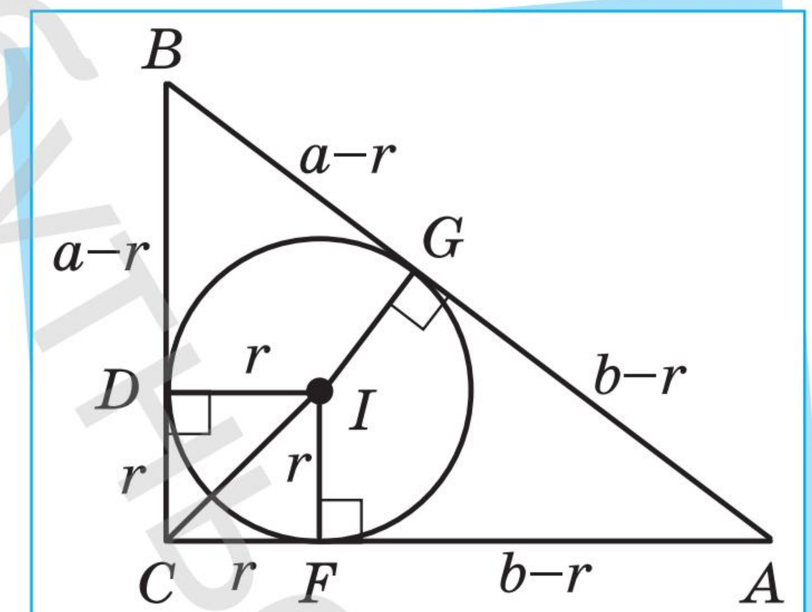


Рис. 27.4

Оскільки IC — бісектриса прямого кута C, то $\angle ICD=\angle ICF=45°$.

За властивістю гострих кутів прямокутних трикутників IDC і IFC: $\angle CID=\angle CIF=90°-45°=45°$. Отже, трикутники IDC і IFC — рівнобічні, тобто $CD=ID=r$; $CF=IF=r$.

За властивістю дотичних до кола, проведених з однієї точки: $BD=BG=a-r$; $AF=AG=b-r$. Оскільки $AB=BG+AG$, то $c=a-r+b-r$, звідки $2r=a+b-c$; $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

Задача 2.

Доведіть, що *центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи трикутника, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи* (рис. 27.5).

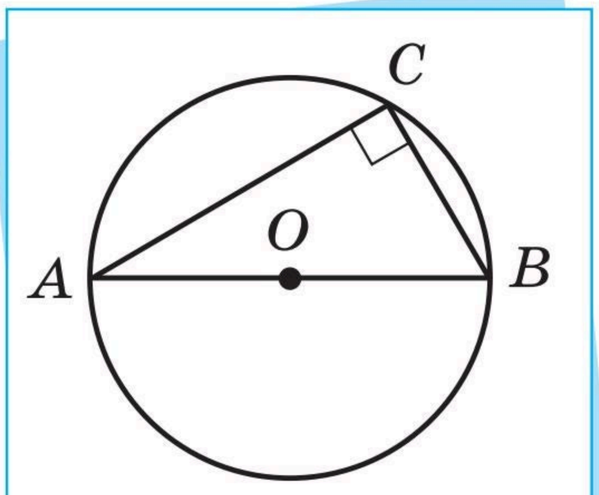


Рис. 27.5

Розв'язання задачі 2:
https://rnk.com.ua/106112





Наостанок зауважимо: якщо коло *описане* навколо трикутника, то трикутник природно назвати *вписаним* у це коло. Аналогічно, якщо коло *вписане* в трикутник, то трикутник природно назвати *описаним* навколо цього кола.



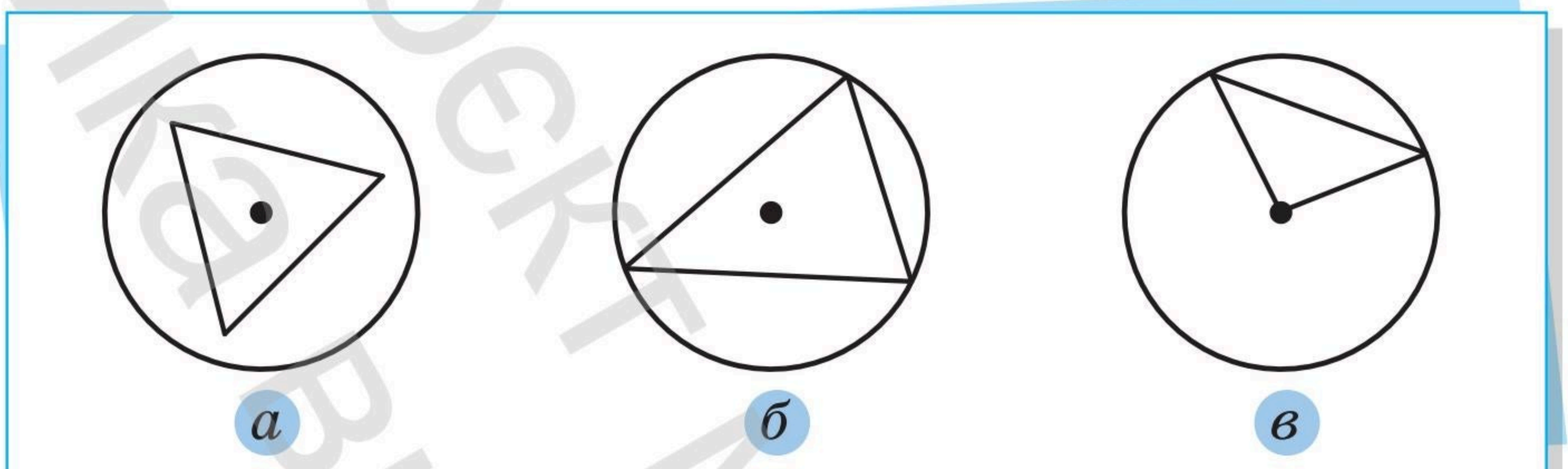
Перевірте себе!

1. Сформулюйте означення кола, описаного навколо даного трикутника. Як при цьому називають трикутник відносно цього кола?
2. Сформулюйте означення кола, вписаного в даний трикутник. Як при цьому називають трикутник відносно цього кола?
3. Навколо якого трикутника можна описати коло?
4. Яка точка є центром кола, описаного навколо даного трикутника?
5. У який трикутник можна вписати коло?
6. Яка точка є центром кола, вписаного в даний трикутник?

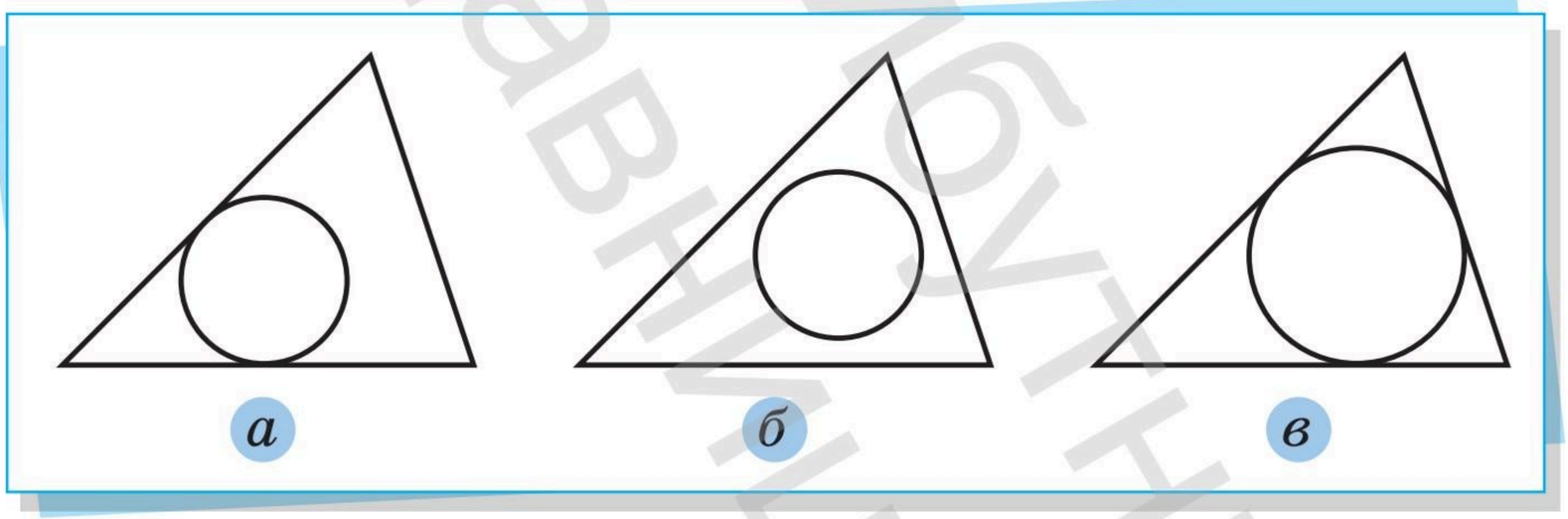
Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Укажіть, на якому рисунку зображено коло, описане навколо трикутника.



2. Укажіть, на якому рисунку зображено коло, вписане в трикутник.



3. На рис. 1 зображено коло та два трикутника. У який трикутник вписано коло?

4. На рис. 1 зображено коло та два трикутники. Навколо якого трикутника описано коло?

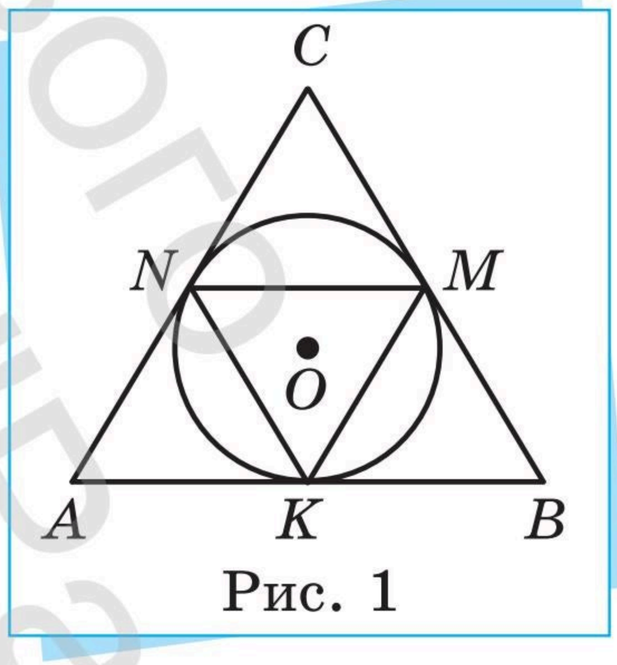


Рис. 1

5. На рис. 2 зображено трикутник ABC. Точка O — центр кола, описаного навколо цього трикутника. Укажіть відрізок, який є радіусом цього кола.

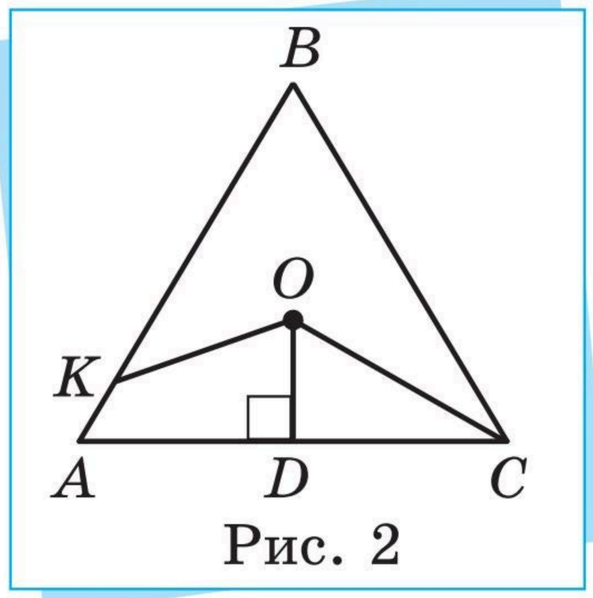


Рис. 2

6. На рис. 2 зображено трикутник ABC. Точка O — центр кола, вписаного в цей трикутник. Укажіть відрізок, який є радіусом цього кола.

7. Побудуйте довільний трикутник. Побудуйте серединні перпендикуляри до всіх сторін трикутника та точку їх перетину.

8. Побудуйте довільний трикутник. Побудуйте бісектриси всіх кутів трикутника та точку їх перетину.

9. Виберіть усі правильні твердження з поданих: а) навколо будь-якого трикутника можна описати коло; б) центр описаного кола лежить у точці перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника; в) коло, вписане в трикутник, перетинає сторони трикутника; г) центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис кутів трикутника.

10. Виберіть усі правильні твердження з поданих: а) вписати коло можна тільки в рівнобічний трикутник; б) центр вписаного кола рівновіддалений від сторін трикутника; в) коло, описане навколо трикутника, проходить через усі вершини трикутника; г) серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Середній рівень

11. На рис. 3 зображено трикутник ABC. Перенесіть рисунок у зошит і опишіть навколо трикутника коло.

12. На рис. 3 зображено трикутник ABC. Перенесіть рисунок у зошит і впишіть у трикутник коло.

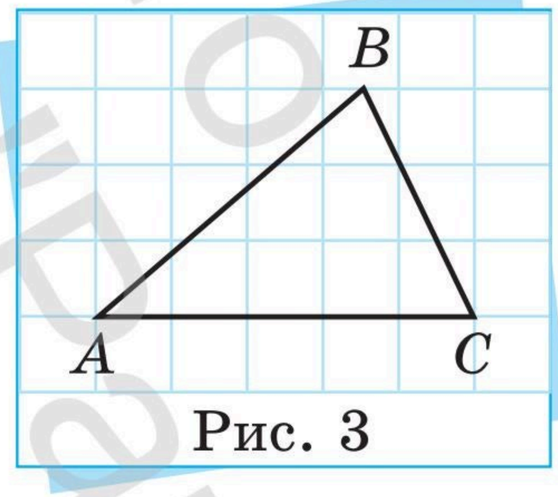


Рис. 3

13. На рис. 4 зображено коло, яке вписане в трикутник ABC. Знайдіть градусну міру кута ABC, якщо $\angle ABO = 20°$.

14. На рис. 4 зображено коло, яке вписане в трикутник ABC. Знайдіть градусну міру кута ABO, якщо $\angle ABC = 50°$.

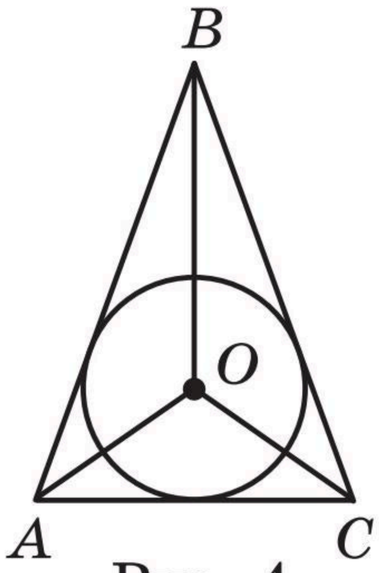


Рис. 4

15. На рис. 5 зображено коло, яке описане навколо рівнобедреного трикутника ABC. Знайдіть довжину BD, якщо $AO = 3$ см, $OD = 2$ см.

16. На рис. 5 зображено коло, яке описане навколо рівнобедреного трикутника ABC. Знайдіть довжину радіуса кола, якщо відомо, що $BD = 3$ см, $OD = 1$ см.

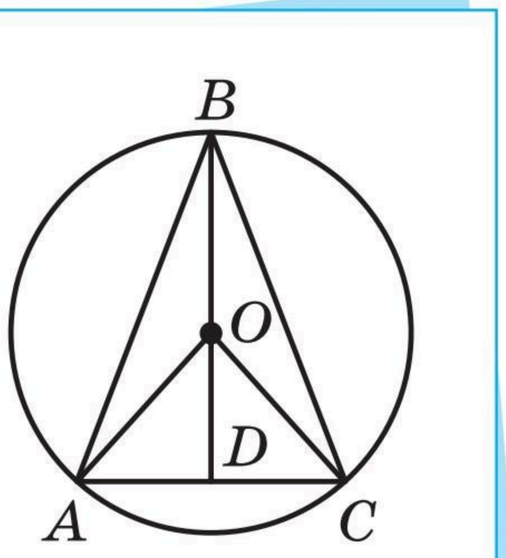


Рис. 5

17. Знайдіть довжину радіуса кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 10 см.

18. Коло описане навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 12 см. Знайдіть довжину радіуса цього кола.

19. Знайдіть довжину радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник із катетами 5 см, 12 см і гіпотенузою 13 см.

20. Знайдіть довжину радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник із катетами 8 см, 15 см і гіпотенузою 17 см.

Достатній рівень

21. Коло, вписане в рівнобічний трикутник ACB, ділить точкою дотику одну з бічних сторін трикутника на два відрізки, довжини яких дорівнюють 5 см і 3 см, рахуючи від

вершини, протилежної до основи (див. рис. 6). Знайдіть периметр трикутника ACB.

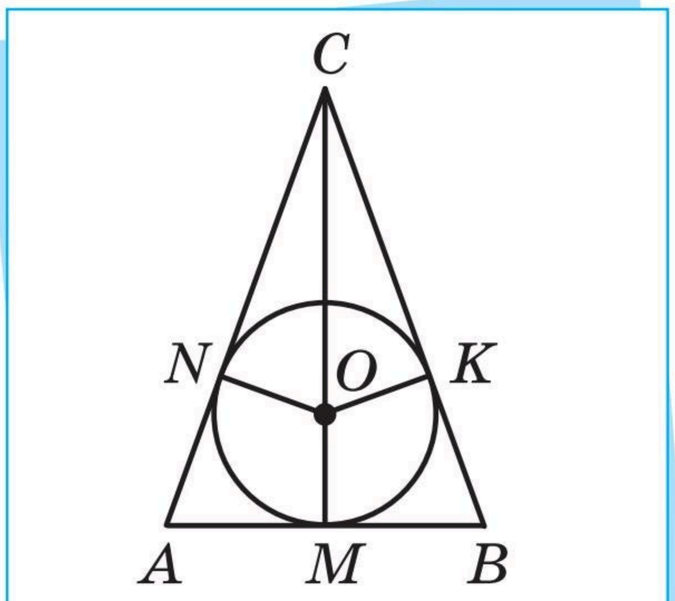


Рис. 6

22. Коло, вписане в рівнобічний трикутник ACB, ділить точкою дотику одну з бічних сторін трикутника довжиною 10 см у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини, протилежної до основи (див. рис. 6). Знайдіть довжину основи трикутника ACB.

23. Коло радіуса 2 см вписане в прямокутний трикутник ACB із прямим кутом C. Точкою дотику M коло розбиває гіпотенузу трикутника на частини з довжинами $BM = 3$ см, $AM = 10$ см (див. рис. 7). Знайдіть периметр трикутника ACB.

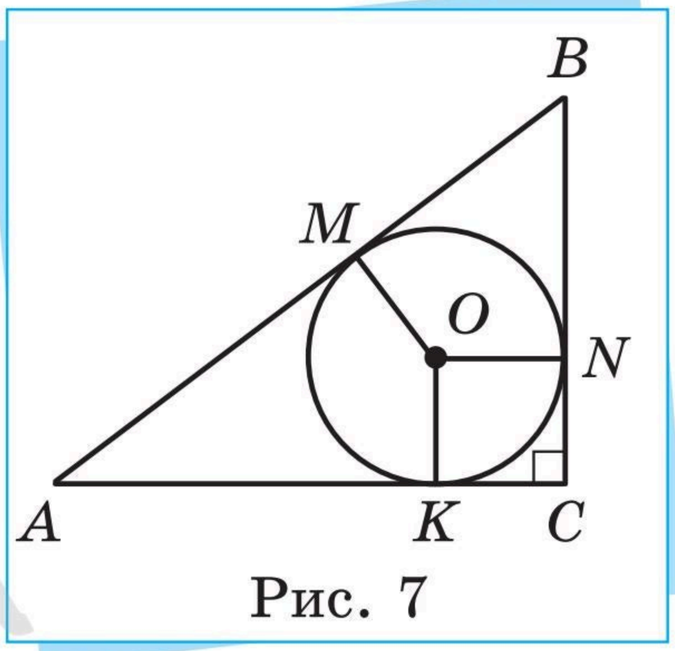


Рис. 7

24. Коло радіуса 1 см вписане в прямокутний трикутник ACB із прямим кутом C. Точками дотику N і K коло відтинає від катетів частини з довжинами $BN = 2$ см, $AK = 3$ см (див. рис. 7). Знайдіть периметр трикутника ACB.

25. Навколо прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C описано коло. Знайдіть довжину радіуса цього кола, якщо $AC = 16$ см; $\angle B = 30°$.

26. Навколо прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C описано коло, радіус якого дорівнює 5 см. Знайдіть довжину катета BC, якщо $\angle B = 60°$.

27. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобічного трикутника, лежить на прямій, що містить висоту трикутника, проведену до його основи.

28. Доведіть, що центр кола, вписаного в рівнобічний трикутник, лежить на висоті трикутника, проведеній до його основи.

29. Навколо рівнобічного трикутника ABC $(AC = BC)$ описано коло із центром O (див. рис. 8). Знаючи, що $\angle AOB = 100°$, знайдіть градусну міру кута ACB.

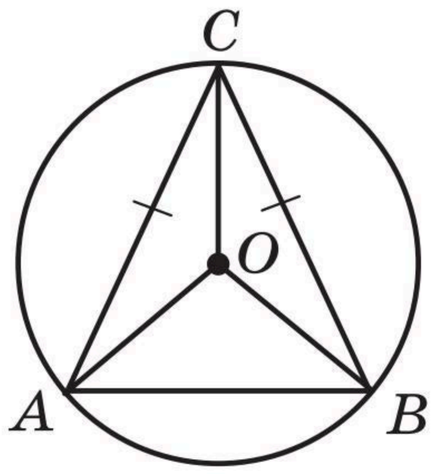


Рис. 8

30. Навколо рівнобічного трикутника ABC $(AC = BC)$ описано коло із центром O (див. рис. 8). Знаючи, що $\angle ACB = 70°$, знайдіть градусну міру кута AOB.

31. Центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на висоті трикутника. Доведіть, що трикутник рівнобічний.

32. Центр кола, вписаного в трикутник, лежить на висоті трикутника. Доведіть, що трикутник рівнобічний.

Високий рівень

33. Коло, вписане в рівнобічний трикутник, ділить точкою дотику одну з бічних сторін на два відрізки, довжини яких дорівнюють 6 см і 4 см. Знайдіть периметр трикутника. Скільки розв'язків має задача?

34. Коло, вписане в рівнобічний трикутник, ділить точкою дотику одну з бічних сторін довжиною 12 см, у відношенні 2:1. Знайдіть довжину основи трикутника. Скільки розв'язків має задача?

35. Коло, вписане в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу точкою дотику на два рівні відрізки. Знайдіть градусні міри гострих кутів трикутника.

36. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює одному з катетів. Знайдіть градусні міри гострих кутів трикутника.

37. Бічна сторона рівнобічного трикутника дорівнює 6 см, градусна міра кута, протилежного до основи, — 120°. Знайдіть довжину радіуса описаного кола.

38. Бічна сторона рівнобічного трикутника дорівнює 10 см, градусна міра кута при основі — 30°. Знайдіть довжину радіуса описаного кола.

39. Доведіть, що центр вписаного в рівносторонній трикутник кола й центр описаного навколо нього кола збігаються.

40. Доведіть, що коли центр описаного навколо трикутника кола збігається з точкою перетину його медіан, то цей трикутник — рівносторонній.

41. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, вдвічі більший за радіус кола, вписаного в цей трикутник.

42. Доведіть, що сума радіуса кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, і радіуса кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює висоті трикутника.

43. Доведіть, що коли центр описаного навколо трикутника кола належить його стороні, то цей трикутник — прямокутний.

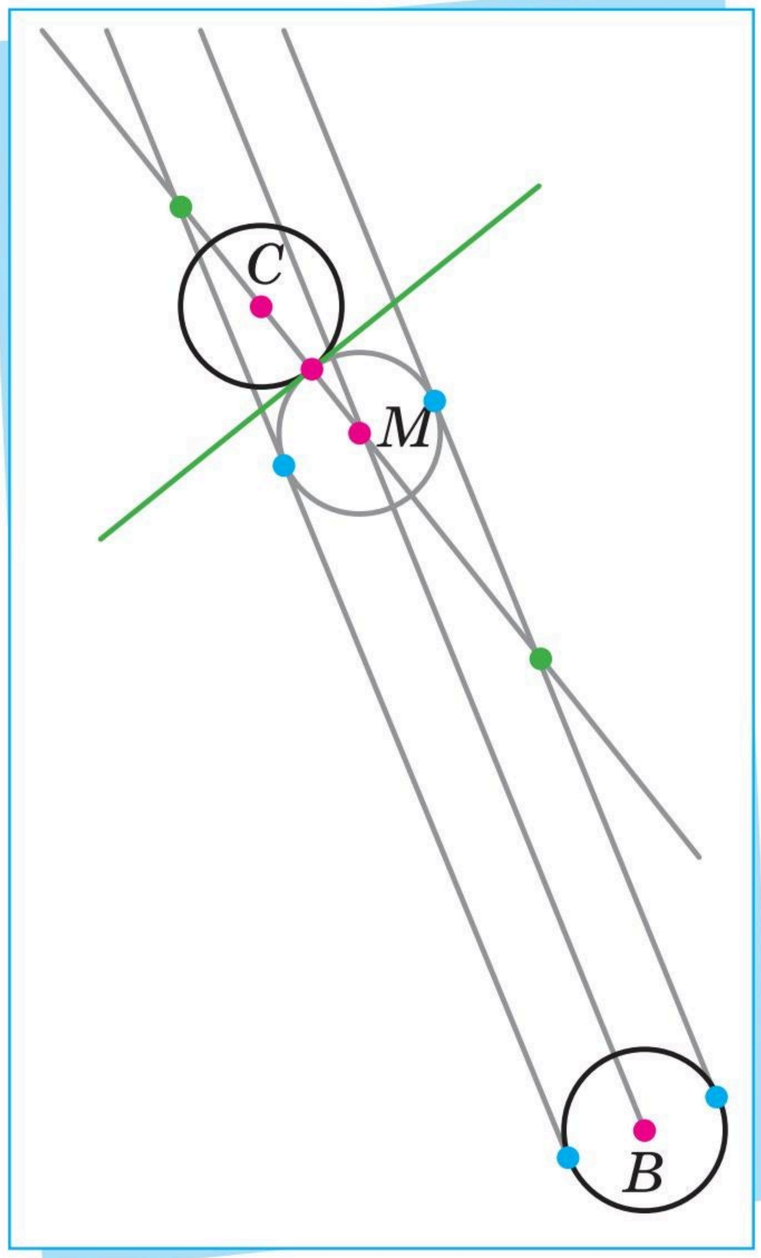
44. Доведіть, що сума діаметрів вписаного й описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює сумі його катетів.



Цікавинки від дідуся Тараса

Дотичні до кіл мають багато цікавих застосувань. Наприклад, дотичні використовують під час гри в більярд для прицілювання битка — кулі, по якій наносять удар.

Якщо подивитися на удар по битку згори, то кулі можна зобразити колами. Нехай коло із центром у точці B позначає биток, коло із центром у точці C позначає прицільну кулю, а коло із центром у точці M — уявну кулю, що позначає кінцеве положення битка в момент зіткнення з прицільною кулею.



Для влучення в лузу напрямок удару від битка обирається так, щоб спільна дотична до прицільної кулі та уявної кулі (зелена пряма на рисунку) була перпендикулярною до прямої, що проходить через центр лузи і центр прицільної кулі (на рисунку вона проходить через дві зелені точки). Якщо вдарити саме так, то прицільна куля потрапить у лузу, а биток відскочить у напрямку, паралельному зеленій лінії.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи грали ви коли-небудь у більярд? Якщо так, то чи використовували описаний спосіб прицілювання для влучання в лузу? Наскільки вдалими були ваші спроби? Якщо ви не грали в більярд, то обов'язково спробуйте!

2. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про інші практичні застосування дотичних до кола та до двох кіл і підготуйте невелике повідомлення.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вирази.

   а) $(2x+3y)(2x-3y)+9y^2-4x^2$; б) $(4a-5b)^2+20ab$.

2. Розв'яжіть рівняння.

   а) $4x-2(1-x)=8$; б) $2(1-y)+4(y-2)=5$.

3. У ПДСК задано точки $A(1;0)$, $B(-2;-11)$, $C(0{,}5;-1)$, $D(-0{,}5;0)$. Які із цих точок належать графіку функції $y=2x^2-x-1$?

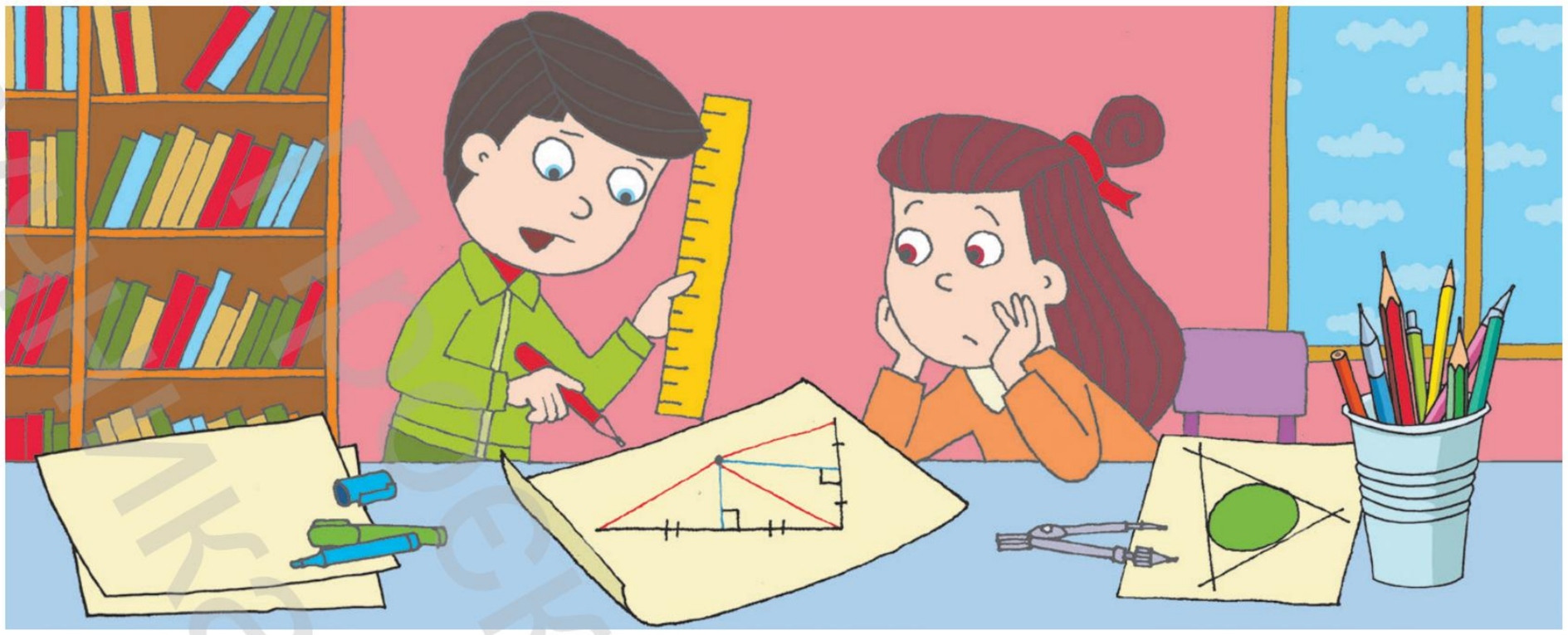
4. У меню кафе «Затишок» є 5 видів супів, 3 види м'ясних страв, 4 види рибних страв, 5 видів гарнірів і 6 видів напоїв. Відвідувачка кафе хоче замовити на обід суп, м'ясну або рибну страву, гарнір і напій. Скільки в неї є варіантів вибору обіду в цьому кафе?

5. На відрізку AB взято точки C і D так, що точка C належить відрізку AD. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB=16$ см, $AD=13$ см, $BC=14$ см.

§ 28. Задачі на побудову



Знаєш, Тетянко, виявилося, що наш план із побудови криниці для друга не так легко втілити в життя. Він попросив зробити не схематичний рисунок, а точний! І це не так просто, бо поділити відрізок навпіл навіть за допомогою лінійки з поділками не так вже й просто — виникає *похибка вимірювання*. Побудувати перпендикуляр так само нелегко з тієї самої причини, навіть за допомогою косинця. І це лише на папері, а я уявляю, наскільки складно це зробити на місцевості!





Так, це правда. Я десь читала, що цим навіть займається окрема наука — *геодезія*. Щодо криниці, то насправді, мабуть, не так і принципово, щоб її було розміщено ідеально на однаковій відстані від будинку, корівника та курника. Однак для розрахунку більш складних інженерних конструкцій це буває важливо.

До речі, навіть для побудови клумби на дачі потрібен точний план, бо якщо неправильно розрахувати положення центра описаного кола, то клумба вийде не дуже круглою і не дуже вписаною між тими доріжками. Виявляється, що побудувати досить точно бісектрису кута — теж непросте завдання! Пропоную запитати про це у вчителів.



Так, дійсно, точні побудови виконувати досить непросто. Для побудов на папері раніше використовували виключно креслярські інструменти — циркуль і лінійку. Зараз усе більшої популярності при виконанні креслень набувають комп'ютерні програми на кшталт AutoCAD. Однак їх вивчення потребує значного часу. Тому спочатку опануємо циркуль і лінійку. Ці інструменти, до речі, використовували ще в Давній Греції!

Будемо вважати, що за допомогою лінійки можна побудувати:

- довільну пряму;
- пряму, яка проходить через дану точку;
- промінь із початком у даній точці;
- пряму, яка проходить через дві дані точки;
- промінь із початком у даній точці, який проходить через іншу дану точку;
- відрізок із кінцями в двох даних точках.

Будемо вважати, що за допомогою циркуля можна:

- побудувати довільне коло або його частину;
- побудувати коло або його частину із центром у даній точці;
- побудувати коло або його частину із центром у даній точці, радіус якого дорівнює даному відрізку;
- установити розхил циркуля, рівний даному відрізку;
- на заданому промені від початкової точки відкласти відрізок, рівний даному.

Зауважимо: *розв'язуючи задачі на побудову, цими інструментами не можна виконувати інших побудов, окрім зазначених*. Так, *креслярську лінійку* слід вважати такою, що не має поділок, тобто нею *не можна вимірювати довжину відрізка*. Дані в задачах на побудову здебільшого задаються геометрично, тобто у вигляді зображень відповідних фігур.



Розв'язати задачу на побудову означає:

- на основі *аналізу* умови задачі скласти *план побудови* геометричної фігури;
- за складеним планом виконати *побудову* цієї геометричної фігури за допомогою циркуля та лінійки (реальних чи вбудованих у комп'ютерну програму);
- *довести*, що побудована геометрична фігура є шуканою;
- провести *дослідження*, чи завжди задача має розв'язки, і якщо так, то скільки їх.

Проілюструємо наведену схему розв'язування на прикладі опорної задачі 1.

ОПОРНА ЗАДАЧА 1 (побудова трикутника за трьома даними сторонами).

Побудуйте трикутник, сторони якого дорівнюють трьом даним відрізкам.

Аналіз. Нехай на рис. 28.1 зображено відрізки, довжини яких дорівнюють a, b, c. Припустимо, що трикутник KLP, для якого $KP = a$, $PL = b$, $KL = c$, *уже побудовано*. Не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $a < b < c$.

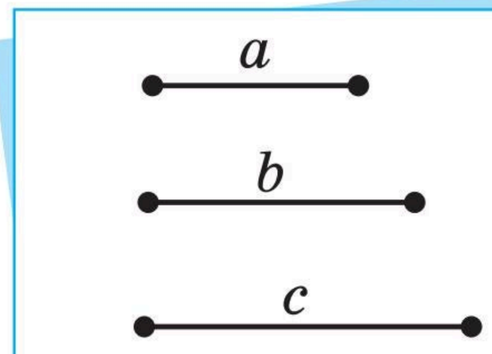


Рис. 28.1

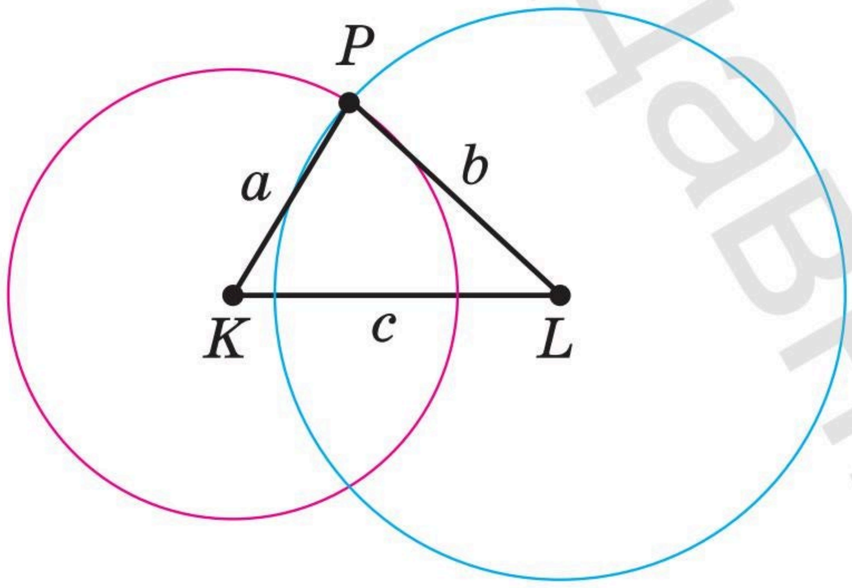


Рис. 28.2

Оскільки ГМТ, що лежать від даної точки на даній відстані, є коло, то точка P належить колу із центром у точці L і радіусом b, а також колу із центром у точці K і радіусом a. Отже, фактично точка P є точкою перетину цих кіл (рис. 28.2).

Побудова. Для побудови шуканого трикутника:

- позначимо на площині довільну точку K і за допомогою лінійки проведемо промінь із початком у цій точці;
- за допомогою циркуля відкладемо на цьому промені від точки K відрізок $KL = c$;
- побудуємо коло із центром у точці L і радіусом b;
- побудуємо коло із центром у точці K і радіусом a;
- точка P — будь-яка з двох точок перетину цих кіл;
- трикутник KLP — шуканий.

Доведення. У трикутнику KLP сторона $KL = c$ за побудовою. Оскільки точка P належить колу із центром у точці L і радіусом b, то $PL = b$. Аналогічно $KP = a$, бо точка P належить колу із центром у точці K і радіусом a. Отже, сторони побудованого трикутника дійсно дорівнюють довжинам даних відрізків, що й вимагалося.

Дослідження. Із побудови видно: якщо кола із центрами в точках K і L перетинаються, то задача матиме розв'язок. Очевидно, що це буде відбуватися за умови, що $c < a + b$. Якщо задача має розв'язок, то на площині таких трикутників із даними сторонами можна побудувати *безліч*, бо точку K і промінь із початком у цій точці можна вибрати як завгодно, а побудовані кола мають дві точки перетину. Але всі ці трикутники будуть рівні за трьома сторонами. Тому будемо вважати, що дана задача має *один розв'язок* із точністю до положення точки K, обраного променя й обраної півплощини відносно прямої, що містить цей промінь.



Надалі, якщо у вимозі задачі на побудову не зазначено положення шуканої фігури, то будуємо цю фігуру з точністю до її положення на площині. Рівні одержані шукані фігури будемо вважати за один розв'язок задачі.

Якщо деякі етапи розв'язування задачі на побудову є очевидними, то в записі розв'язання їх здебільшого опускають. Покажемо це на прикладі наступних опорних задач.



ОПОРНА ЗАДАЧА 2 (побудова кута, рівного даному куту).

Побудуйте кут, що дорівнює даному.

Побудова. Для побудови шуканого кута:

- на сторонах даного кута A позначимо довільні точки B і C і сполучимо їх відрізком;

- побудуємо промінь із початком у точці A_1, і від точки A_1 в деяку півплощину відносно цього променю побудуємо трикутник $A_1B_1C_1$ за даними сторонами: $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$;
- кут $B_1A_1C_1$ — шуканий.

Доведення. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за трьома сторонами. Отже, $\angle A = \angle A_1$, що й вимагалося.



В опорній задачі 2 точки B і C можна будувати за допомогою циркуля як точки перетину кола довільного радіуса зі сторонами даного кута. У цьому випадку $AB = AC = A_1B_1 = A_1C_1$ і трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — рівнобічні.



ОПОРНА ЗАДАЧА 3 (побудова бісектриси).

Побудуйте бісектрису даного кута.

Побудова. Для побудови бісектриси даного кута A:

- проведемо коло із центром у точці A і з довільним радіусом r (червоне коло на рис. 28.3);
- позначимо точки перетину кола зі сторонами кута K і P;
- проведемо два кола радіуса r із центрами в точках K і P (сині кола на рис. 28.3);
- позначимо точку перетину цих кіл, відмінну від A, через L;
- промінь AL — шукана бісектриса.

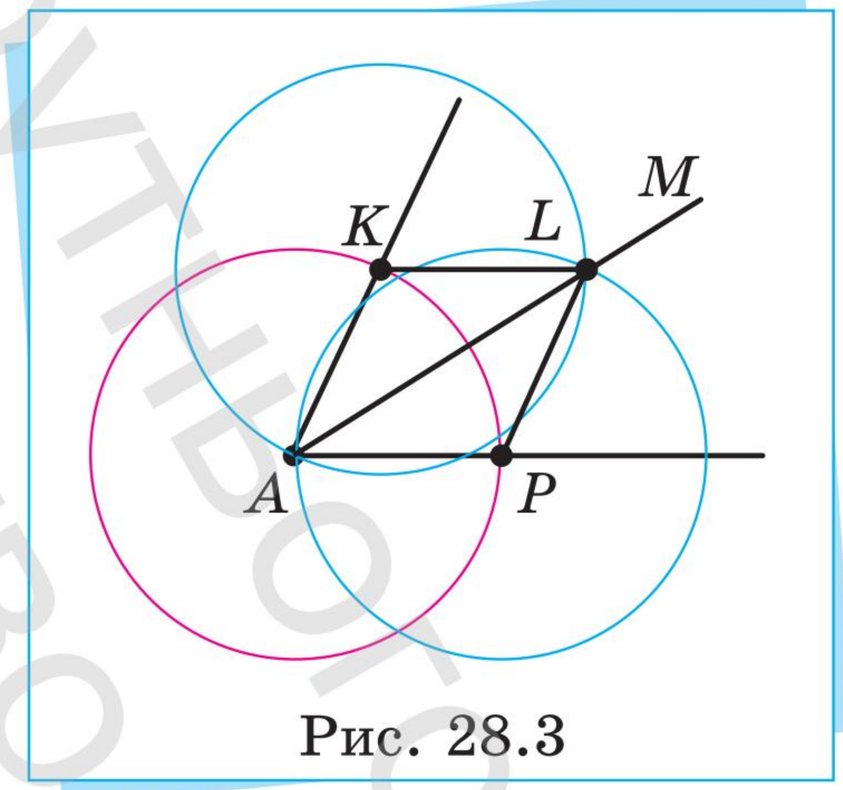


Рис. 28.3

Доведення. Із рівності трикутників AKL і APL за трьома сторонами випливає рівність кутів LAK і LAP, тобто промінь AL є бісектрисою кута A, що й вимагалося.

Підручник Видавництво "Ранок"



Знаючи, як будувати бісектриси кутів трикутника, легко побудувати центр вписаного в трикутник кола. Однак для побудови самого кола цього недостатньо, бо слід навчитися будувати перпендикуляр із даної точки до даної прямої. Наступні дві опорні задачі допоможуть це зробити.



ОПОРНА ЗАДАЧА 4 (побудова серединного перпендикуляра).

Побудуйте серединний перпендикуляр до даного відрізка.

Побудова. Для побудови серединного перпендикуляра до відрізка AB:

- побудуємо коло із центром у точці A і радіусом AB;
- побудуємо коло із центром у точці B і радіусом AB;
- позначимо точки перетину побудованих кіл C і D;
- проведемо пряму CD, яка й буде шуканим серединним перпендикуляром l.

Доведення. Нехай M — середина AB (рис. 28.4). Оскільки за побудовою $AC = AD = BC = BD = AB$, то трикутники ACB і ADB — рівнобічні. За властивістю рівнобічного трикутника $CM \perp AB$ і $DM \perp AB$. Оскільки через точку M до прямої AB можна провести єдину перпендикулярну пряму, то точки C, D і M лежать на одній прямій l, яка і є серединним перпендикуляром до AB.

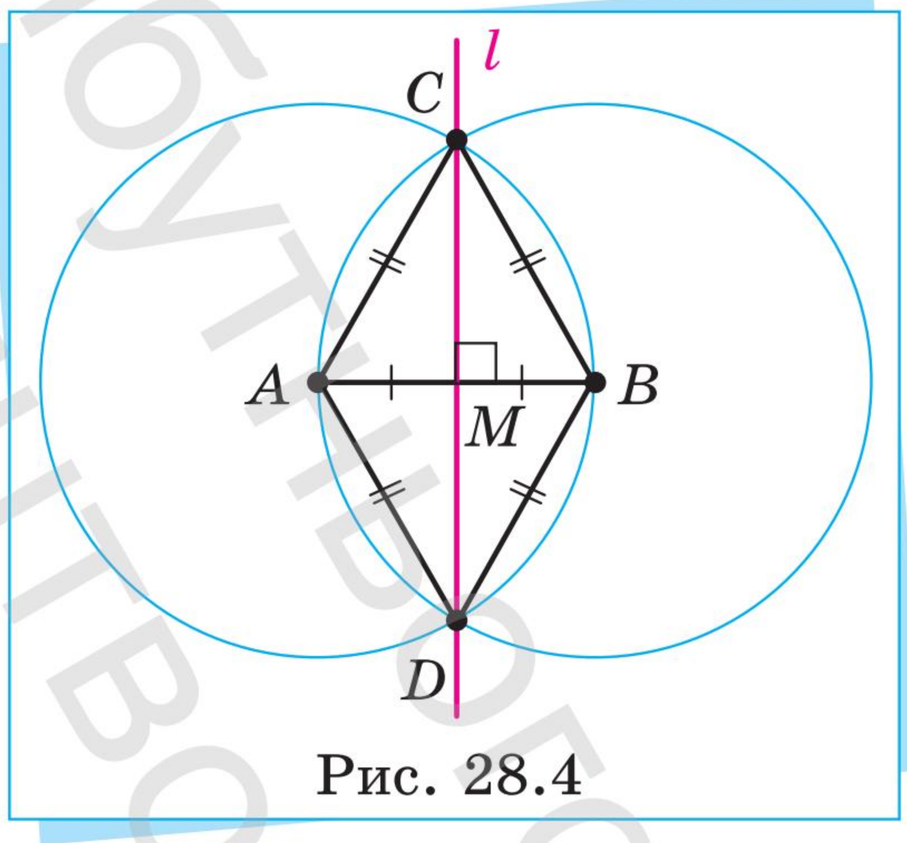


Рис. 28.4



Зауважимо, що для поділу даного відрізка навпіл досить провести до нього серединний перпендикуляр.

ОПОРНА ЗАДАЧА 5 (побудова прямокутного трикутника за гіпотенузою та катетом).

Побудуйте прямокутний трикутник, гіпотенуза й катет якого дорівнюють двом даним відрізкам.

Побудова. Нехай довжини даних відрізків для катета і гіпотенузи дорівнюють a і c відповідно. Для побудови шуканого трикутника (див. рис. 28.5):

- позначимо на площині довільну точку M і проведемо пряму через цю точку;
- на проведеній прямій відкладемо від точки M відрізки $MK = MP = a$;
- побудуємо серединний перпендикуляр l до відрізка KP;
- побудуємо коло із центром у точці K і радіусом c;
- позначимо точку перетину кола із серединним перпендикуляром як L;
- трикутник KML — шуканий.

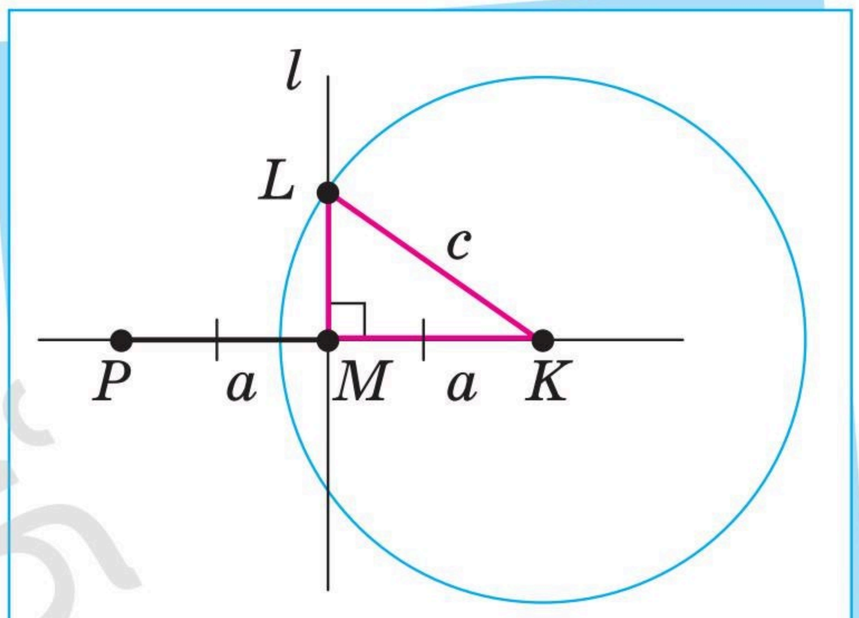


Рис. 28.5

Доведення. Оскільки $MK = MP = a$, то M є серединою KP. Тому пряма l проходить через точку M. У побудованому трикутнику KML кут M прямий і $MK = a$ за побудовою. Оскільки точка L належить колу із центром у точці K і радіусом c, то $KL = c$. Отже, трикутник KML дійсно є шуканим.

Дослідження. Дана задача має єдиний розв'язок за умови, що коло перетинає серединний перпендикуляр. Зрозуміло, що це відбудеться за умови $a < c$. Якщо ця умова не виконується, дана задача не матиме розв'язку.



Наведені опорні задачі дозволяють розв'язувати інші важливі задачі на побудову.

Про те, як побудувати трикутник за двома сторонами та кутом між ними; трикутник за стороною та двома прилеглими кутами;
пряму, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої:
https://rnk.com.ua/106113





Опорні задачі дозволяють розв'язувати й більш складні задачі на побудову. Розглянемо приклад такої задачі.

Задача. Побудуйте трикутник за даним кутом, бісектрисою та висотою, проведеними з вершини цього кута.

Аналіз. Нехай на рис. 28.6 зображено даний кут B і два відрізки довжиною p і h, що мають бути бісектрисою та висотою шуканого трикутника ABC, проведеними з вершини B. *Припустимо,* що задача вже розв'язана й трикутник ABC побудовано (рис. 28.7). Тоді висота $BH = h$, а бісектриса $BP = p$. Трикутник BHP є прямокутним, бо за означенням висоти $BH \perp AC$. Крім того, висота BH є катетом, а бісектриса BP — гіпотенузою цього трикутника. Оскільки BP — бісектриса, то $\angle ABP = \angle CBP = \frac{1}{2}\angle B$.

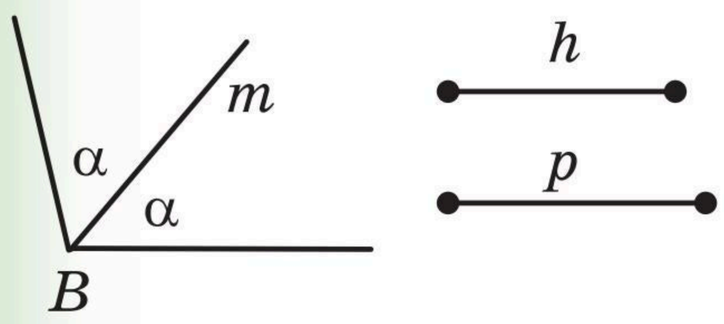


Рис. 28.6

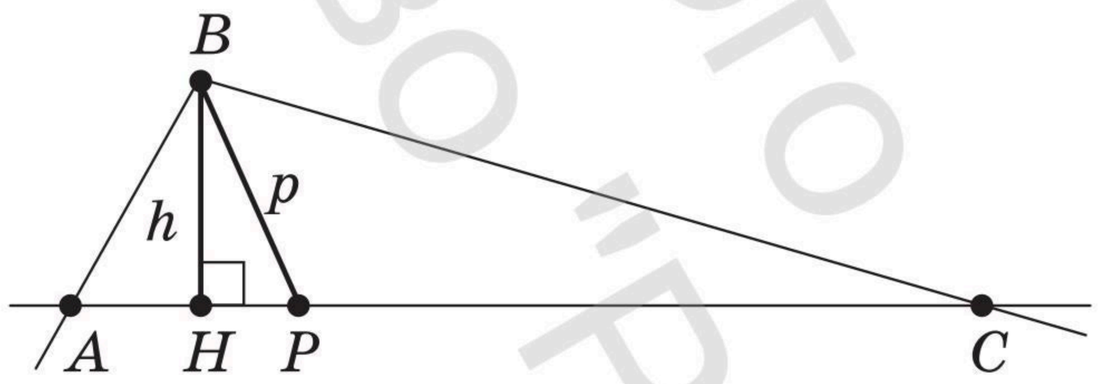


Рис. 28.7

Побудова. Для побудови шуканого трикутника:

- позначимо на площині точку H і проведемо через неї пряму HP;
- побудуємо прямокутний трикутник BHP із прямим кутом H, катетом BH і гіпотенузою BP;
- проведемо бісектрису m даного кута B, утворивши рівні два кути $\alpha = \frac{1}{2}\angle B$ (див. рис. 28.6);
- відкладемо кут α від променя BP в обидві півплощини відносно прямої BP (див. рис. 28.7);
- позначимо точки перетину сторін відкладених кутів із прямою HP як A і C;
- трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Оскільки трикутник BHP є прямокутним із прямим кутом H, то в побудованому трикутнику ABC відрізок $BH = h$ є висотою. Оскільки за побудовою $\angle ABP = \angle CBP = \frac{1}{2}\angle B$, то побудований кут ABC дорівнює даному куту B, а відрізок BP є бісектрисою кута B трикутника ABC, що й вимагалося.

Дослідження. Очевидно, що дана задача матиме розв'язок за умови, що трикутник BHP можна побудувати, тобто за умови $h < p$. Крім того, у результаті побудови обидва промені — BA і BC — мають перетинати пряму HP. За цих двох умов розв'язок буде єдиним. Якщо $h > p$ або промені не перетинають пряму HP, задача не матиме розв'язків. Якщо $h = p$, то шуканий трикутник буде рівнобічним і задача матиме розв'язок. *(Запропонуйте побудову для випадку, коли $h = p$.)*

Перевірте себе!

1. Які побудови можна виконати за допомогою креслярської лінійки?
2. Які побудови можна виконати за допомогою циркуля?

3. Які основні етапи розв'язування задачі на побудову?
4. Як побудувати трикутник за трьома сторонами?
5. Як побудувати кут, рівний даному куту?
6. Як побудувати бісектрису даного кута?
7. Як побудувати серединний перпендикуляр до відрізка?
8. Як поділити даний відрізок навпіл?
9. Як побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та катетом?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Дано промінь OM і відрізок $AB = 2{,}5$ см, який не належить цьому променю. Використовуючи циркуль і лінійку без поділок, побудуйте на промені OM відрізок OC такий, що $OC = AB$.

2. Дано промінь PQ і відрізок $OM = 3$ см, який не належить цьому променю. Використовуючи циркуль і лінійку без поділок. побудуйте відрізок AB такий, що точки A і B належать променю PQ і $AB = OM$.

3. Побудуйте два кола однакового радіуса так, щоб ці кола мали зовнішній дотик.

4. Побудуйте два кола однакового радіуса так, щоб ці кола перетинались.

5. Дано відрізок $OP = 3{,}5$ см. Побудуйте середину цього відрізка, користуючись циркулем і лінійкою без поділок.

6. Дано відрізок $QR = 5{,}5$ см. Побудуйте середину цього відрізка, користуючись циркулем і лінійкою без поділок.

Підручник є власністю держави. Продаж заборонено

7. Дано $\angle A = 60°$. Користуючись циркулем і лінійкою, побудуйте бісектрису цього кута. Перевірте себе за допомогою транспортира.

8. Дано $\angle B = 120°$. Користуючись циркулем і лінійкою, побудуйте бісектрису цього кута. Перевірте себе за допомогою транспортира.

9. Побудуйте рівносторонній трикутник зі сторонами 2 см.

10. Побудуйте трикутник зі сторонами 3 см, 4 см, 5 см.

Середній рівень

11. Дано відрізки AB і CD, причому $AB > CD$. Побудуйте відрізок $MN = AB + CD$.

12. Дано відрізки AB і CD, причому $AB > CD$. Побудуйте відрізок $KL = AB - CD$.

13. Дано гострокутний трикутник AMN. Побудуйте медіани цього трикутника.

14. Дано тупокутний трикутник ASP. Побудуйте медіани цього трикутника.

15. Дано прямокутний трикутник ABC, $\angle C = 90°$. Побудуйте бісектриси цього трикутника.

16. Дано рівнобічний трикутник KLM; $KL = LM$. Побудуйте бісектриси цього трикутника.

17. Дано пряму a і точку B, яка не належить прямій a. Побудуйте пряму b, яка проходить через точку B і перпендикулярна до прямої a.

18. Дано пряму c і точку C, яка належить прямій c. Побудуйте пряму m, яка проходить через точку C і перпендикулярна до прямої c.

19. На рис. 1 зображено трикутник ABC. Перенесіть рисунок у зошит і побудуйте центр кола, описаного навколо цього трикутника.

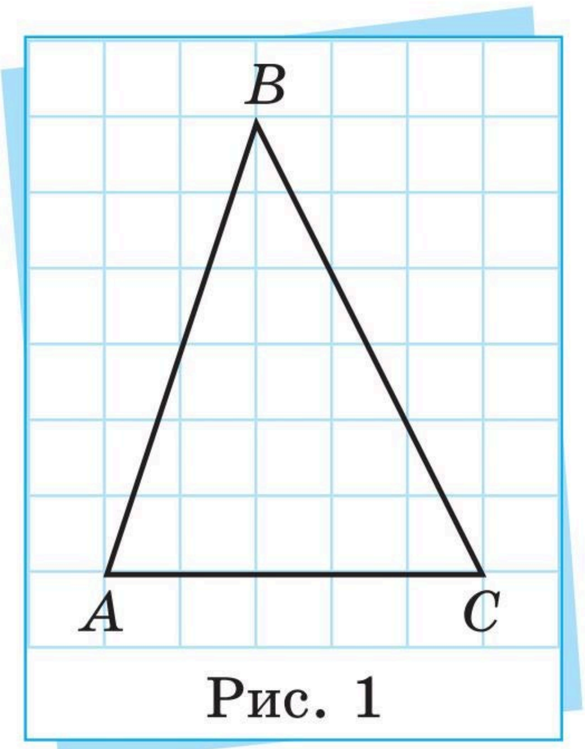


Рис. 1

20. На рис. 1 зображено трикутник ABC. Перенесіть рисунок у зошит і побудуйте центр кола, вписаного в цей трикутник.

Достатній рівень

21. Заданий кут поділіть на 4 рівні частини.

22. За даними двома гострими кутами трикутника побудуйте його третій кут.

23. За кутом при основі рівнобічного трикутника побудуйте його кут, протилежний до основи.

24. За кутом між бічними сторонами рівнобічного трикутника побудуйте його кут при основі.

25. Побудуйте рівнобічний трикутник за основою та бічною стороною.

26. Побудуйте рівнобічний трикутник за основою та кутом при основі.

27. Побудуйте рівносторонній трикутник за даною його стороною.

28. Побудуйте кут $45°$.

29. Побудуйте кут $60°$.

30. Побудуйте кут $30°$.

31. Побудуйте кут $120°$.

Підручник проект майбутнього видавництво "Ранок"

32. Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.

33. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

34. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і прилеглим гострим кутом.

Високий рівень

35. Побудуйте пряму, паралельну до заданої прямої, яка проходить через задану точку K поза заданою прямою.

36. На рис. 2 побудовано бісектрису кута A іншим способом, ніж той, що розглядався в опорній задачі 3 § 28. Складіть план такої побудови та доведіть, що промінь AM — бісектриса кута A.

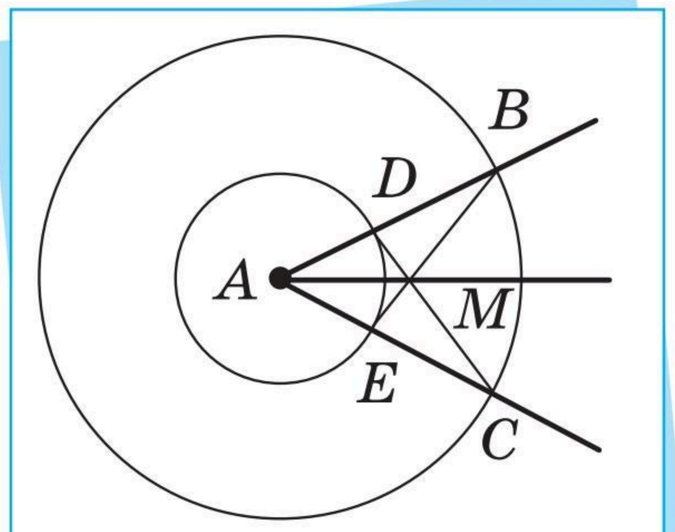


Рис. 2

37. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.

38. Побудуйте рівнобічний трикутник за основою та протилежним кутом.

39. Побудуйте рівнобічний трикутник за бічною стороною та кутом при основі.

40. Побудуйте рівнобічний трикутник за бічною стороною та висотою, проведеною до основи.

41. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

42. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

43. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї з них. Для складання плану побудови використайте рис. 3, де $AC=b$; $AB=c$.

44. Побудуйте трикутник за стороною і проведеними до неї медіаною та висотою. Для складання плану побудови використайте рис. 4, де $BC=a$.

45. Побудуйте рівнобічний трикутник за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони. Для складання плану побудови використайте рис. 5.

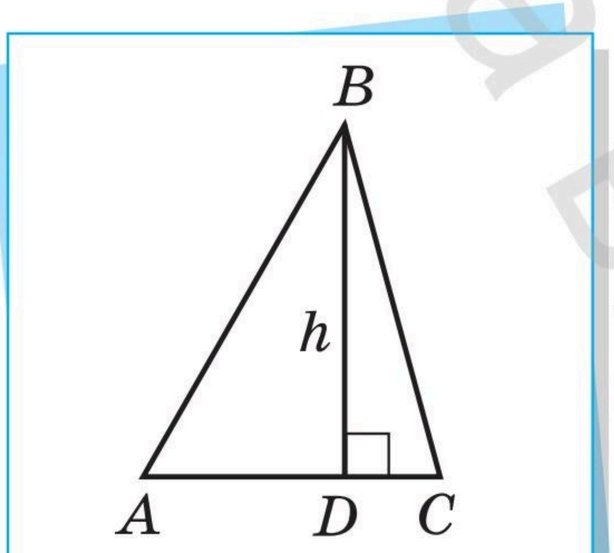


Рис. 3

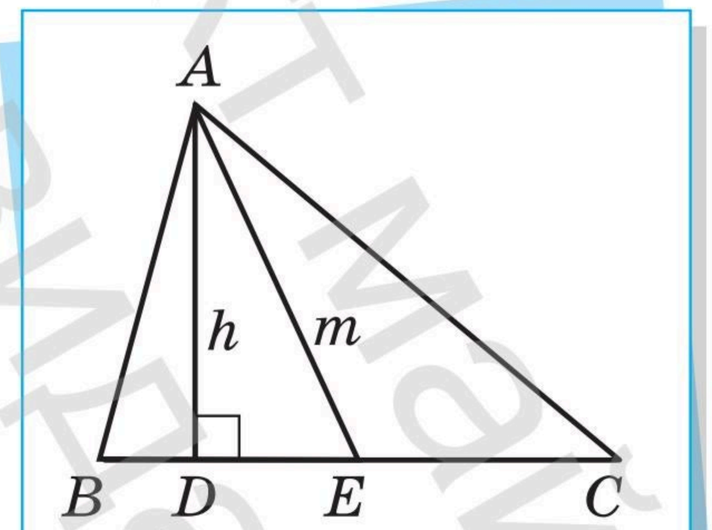


Рис. 4

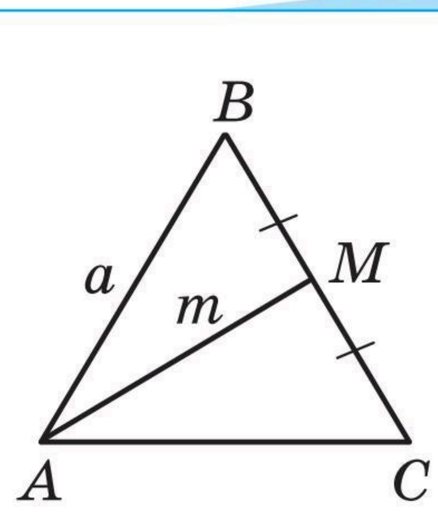


Рис. 5

46. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута. Для складання плану побудови використайте рис. 6, де $AC=b$.

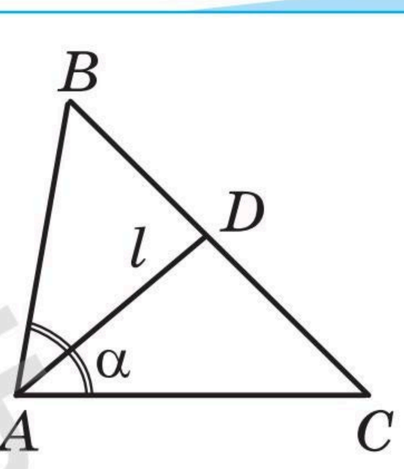


Рис. 6



Цікавинки від дідуся Тараса

Задачі на побудову займають особливе місце серед усіх геометричних задач, які розв'язували в давнину. Геометричні побудови є одним із найбільш цікавих розділів математики, тому

інтерес до них не згасає й досі, хоча вчення про побудови виникло в Стародавній Греції ще в IV–V ст. до н. е.

Суттєвою особливістю постановки задач на побудову в стародавній грецькій геометрії було обмеження засобів розв'язування лише двома інструментами — *циркулем* і *лінійкою*. Особлива роль саме цих інструментів відображає значущість кола та прямої в геометрії. Вивчення саме цих геометричних фігур визначило основний зміст класичної геометрії, що сформувався в давнину.

Переважне застосування циркуля та лінійки як засобів розв'язування задач на побудову було закріплене ще в «Началах» Евкліда і з часом стало історичною традицією, яка й зараз підтримується як у наукових дослідженнях, так і в шкільному курсі математики. Проте в такому випадку природним виглядає питання: *чи будь-яка задача на побудову може бути розв'язана за допомогою лише цих двох інструментів*?

Як виявилося, далеко не кожна! До задач, які не можна розв'язати за допомогою лише циркуля та лінійки, належать *три визначні задачі давнини*: задача про квадратуру круга; задача про трисекцію кута; задача про подвоєння куба.

Довгий час було невідомо, чи можна розв'язати ці задачі за допомогою циркуля та лінійки. Лише в XIX ст. алгебраїчними методами було доведено, що це зробити неможливо. Історичне значення трьох визначних задач давнини полягає в тому, що вони стали однією з перших причин пошуку доведення принципової неможливості здійснення певних процедур у математиці.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про три визначні задачі давнини, які не можна розв'язати за допомогою циркуля та лінійки. Підготуйте невелике повідомлення про кожну з них.

2. Чи доводилося вам у повсякденному житті використовувати циркуль і лінійку як креслярські інструменти? Опишіть ці ситуації. Наскільки результативним було це використання? Чи вважаєте ви, що після вивчення задач на побудову в курсі математики подібне використання стане більш ефективним?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Подайте вираз у вигляді добутку.

   а) $9ab^2 - 6a^2b$; б) $36m^2 - 49p^2$; в) $9x^2 + 12x + 4$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь.

   а) $\begin{cases} x - 3y = -3, \\ 2x + y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 5y = -14, \\ 2x + 3y = 4. \end{cases}$

3. Готель «Смерека» має два корпуси. У першому корпусі готелю 140 номерів, а в другому — 100. Одного вечора менеджер готелю з'ясував, що 70 % номерів першого корпусу і 82 % номерів другого корпусу зайняті. У менеджера виникло запитання: «Який відсоток від усіх номерів готелю зараз зайняті?» Допоможіть менеджеру відповісти на це запитання.

4. Зобразіть за допомогою діаграм Венна співвідношення між обсягами понять «дерево», «хвойне дерево», «листяне дерево», «ялина», «дуб».

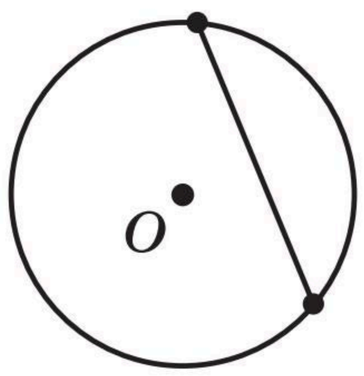
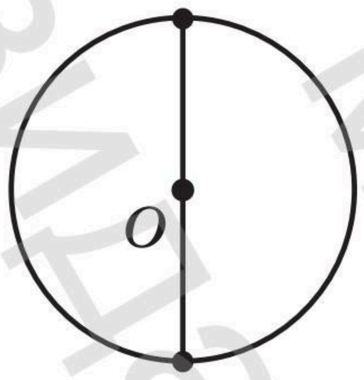
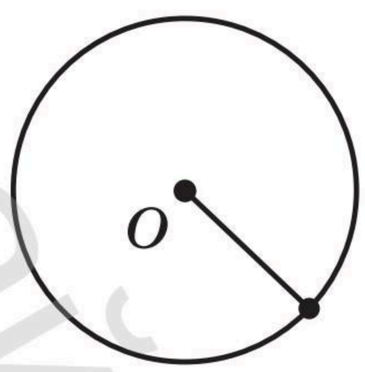
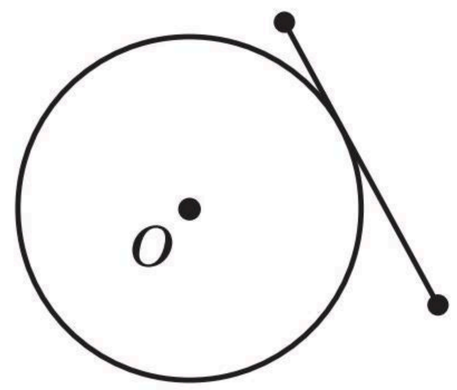
5. У коробці лежать 10 цукерок із чорного шоколаду, 12 цукерок із молочного шоколаду та 8 цукерок із білого шоколаду. Усі цукерки однакової форми. Під час конкурсу на дні народження необхідно із зав'язаними очима навмання взяти з коробки одну цукерку. Яка ймовірність того, що ця цукерка буде з білого шоколаду? Запишіть відповідь у вигляді звичайного дробу. За потреби скоротіть цей дріб.

Підручник проекту «Інтерактивний підручник України»

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 7

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть рисунок, на якому зображено коло із центром у точці O та його діаметр.

А	Б	В	Г
			

2. Довжина кола дорівнює 100π см. Знайдіть довжину радіуса цього кола.

А	Б	В	Г
50 см	100 см	10 см	20 см

3. Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину...

А	висот цього трикутника
Б	медіан цього трикутника
В	бісектрис кутів цього трикутника
Г	серединних перпендикулярів до сторін цього трикутника

Підручник проекту Міністерства освіти і науки України
Видавництво "Ранок"

4. Точка O — центр кола, діаметр якого дорівнює 12 см, а точка M — деяка точка, що належить кругу, обмеженому цим колом. Укажіть число, яке *може* бути довжиною відрізка OM (у см).

А	Б	В	Г	Д
15	12	9	7	5

5. Укажіть НЕправильне твердження.

А	Усі точки серединного перпендикуляра до даного відрізка рівновіддалені від кінців цього відрізка.
Б	Усі точки кола розташовані від центра кола на однаковій відстані.
В	Усі точки, що розташовані на однаковій відстані від сторін кута, належать бісектрисі цього кута.
Г	Усі точки круга розташовані від центра круга на різних відстанях.
Д	Усі точки бісектриси даного кута рівновіддалені від сторін цього кута.

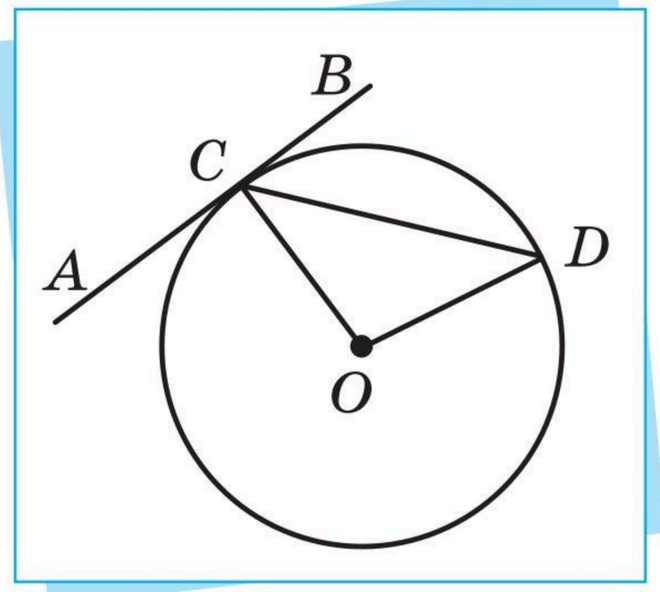
6. Дано три відрізки довжинами a, b, c. Розгляньте наведені варіанти довжин відрізків і з'ясуйте, у якому випадку *можна* за допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник, сторонами якого будуть ці відрізки.

А	Б	В	Г	Д
$a=3$, $b=3$, $c=6$	$a=2$, $b=3$, $c=7$	$a=4$, $b=3$, $c=6$	$a=9$, $b=3$, $c=6$	$a=9$, $b=2$, $c=5$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. Спостережливий Федот помітив, що під час витягання води з колодязя — після того, як відро вигулькнуло з води, й до моменту появи відра з водою на рівні землі — потрібно зробити 15 обертів барабана круглої форми, на який намотана мотузка. Знайдіть відстань (у м) від поверхні землі до води в цьому колодязі, якщо діаметр барабана дорівнює 20 см. Відповідь округліть до десятих.

8. На рисунку зображено коло із центром у точці O та пряма AB, що дотикається до кола в точці C. Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута DCA, якщо $\angle COD = 100°$.



9. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 7,5 см, а один із катетів трикутника на 3 см більший за інший. Знайдіть довжину більшого з катетів цього прямокутного трикутника (у см), якщо радіус кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 3 см.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. У ПДСК задано коло із центром у точці $A(-2;1)$ і радіусом $R = 6$. Укажіть координати двох точок, як належать цьому колу.

11. Градусні міри двох доповняльних плоских кутів кола радіуса $R = 10$ см відносяться як $2:3$. Знайдіть довжину дуг, на які розбивають дане коло ці кути.

12. Знайдіть усі значення параметра a, за яких коло із центром у точці $B(2;-3)$ і радіусом $R = 10$ дотикається до прямої $y = a$.

13. За допомогою циркуля та лінійки поділіть даний відрізок на 4 рівні частини.

14. Побудуйте трикутник за даними стороною, медіаною, проведеної до цієї сторони, та кутом, прилеглим до цієї сторони.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Три кола мають зовнішній дотик. Відрізки, що сполучають центри кіл, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 8 см, 9 см. Знайдіть радіуси цих трьох кіл.

2. Три кола попарно дотикаються зовні. Радіус одного з кіл дорівнює 8 см, а довжина відрізка, що сполучає центри двох інших кіл, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

3. У даний трикутник із кутами 40°, 60° і 80° вписано коло. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, вершинами якого є точки дотику вписаного кола із сторонами даного трикутника.

4. Коло вписано в рівнобічний трикутник. Доведіть, що пряма, яка сполучає точки дотику кола з бічними сторонами, паралельна основі трикутника (рис. 1).

5. Доведіть, що сума радіусів вписаного й описаного навколо прямокутного трикутника кіл дорівнює половині суми довжин катетів цього трикутника.

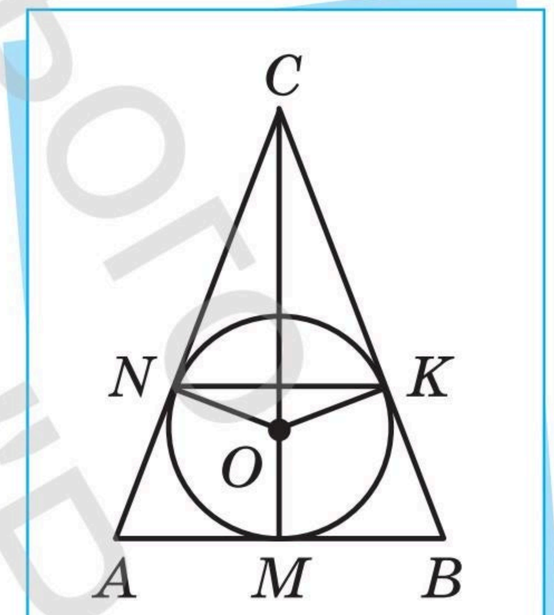


Рис. 1

6. У прямокутному трикутнику ABC відрізок CD — висота, проведена до гіпотенузи AB (рис. 2). Радіуси кіл, вписаних в трикутники ACD, BCD і ABC відповідно дорівнюють r_1, r_2 і r. Доведіть, що $r_1 + r_2 + r = CD$.

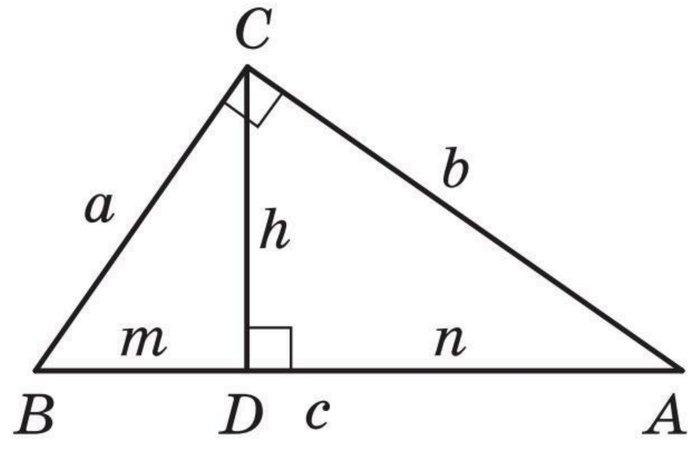


Рис. 2

7. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює половині різниці довжин катетів. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього трикутника.

8. Сума радіусів вписаного й описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює довжині одного з катетів. Знайдіть градусні міри гострих кутів трикутника.

9. Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони. Для пошуку плану побудови використайте рис. 3.

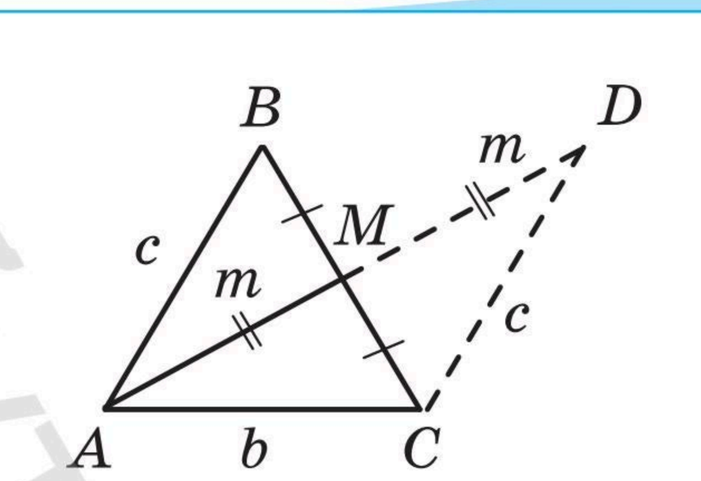


Рис. 3

10. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до неї, та висотою, проведеною до іншої сторони трикутника.

11. Побудуйте трикутник за висотою та медіаною, проведеними з однієї вершини, та радіусом описаного кола.

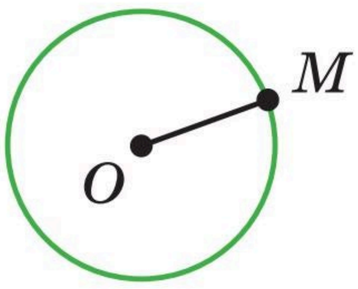
12. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, медіаною та кутом між медіаною й стороною, до якої вона проведена.

Центр (радіус, діаметр) кола — center (radius, diameter) of a circle
Хорда (дуга) кола — chord (arc) of a circle
Центральний кут — central angle
Сектор (сегмент) круга — sector (segment) of a circle
Січна (дотична) до кола — secant (tangent) to the circle
Коло, вписане в трикутник, — circle inscribed in a triangle
Коло, описане навколо трикутника, — circle circumscribed around a triangle
Побудови за допомогою циркуля та лінійки — constructions using a compass and a ruler

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 7

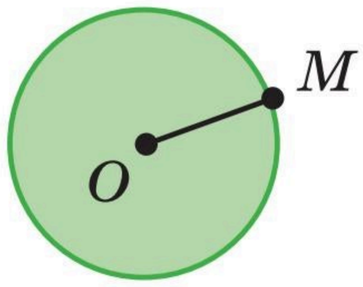
Геометричне місце точок (ГМТ) площини

Коло



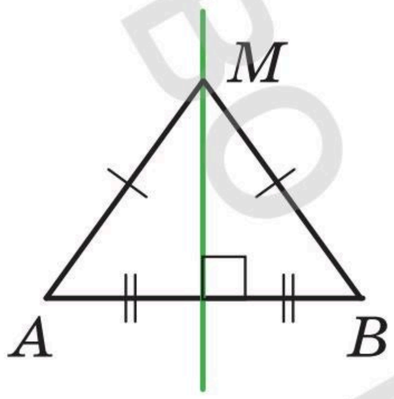
O — центр
$OM = R$ — радіус

Круг



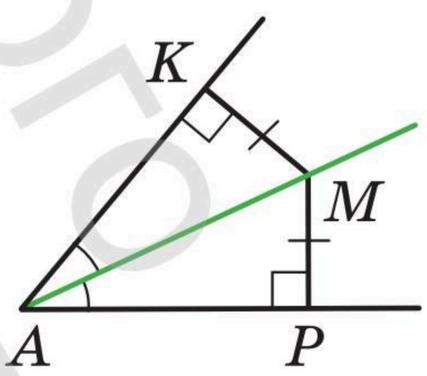
O — центр
$OM = R$ — радіус

Серединний перпендикуляр



$AM = MB$

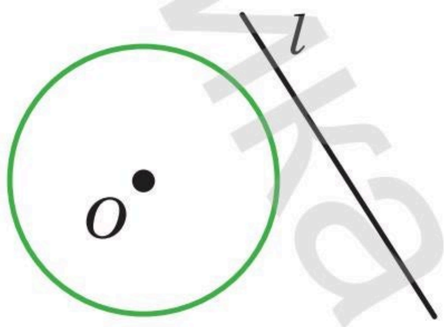
Бісектриса кута



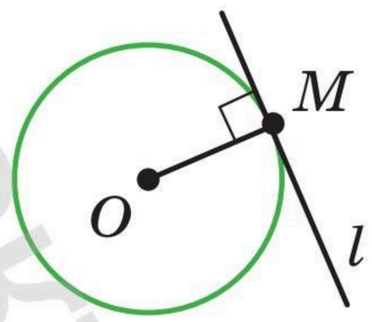
$MK = MP$

Коло та пряма

Не мають спільних точок



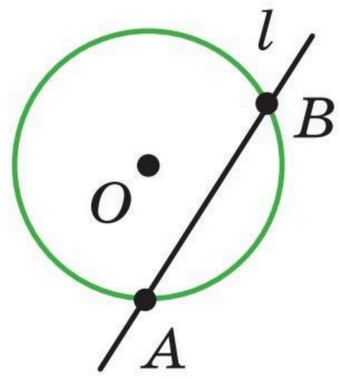
Одна спільна точка (M)



$OM \perp l$

l — дотична

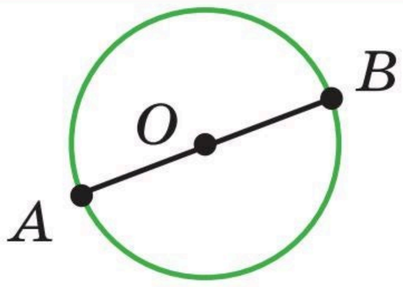
Дві спільні точки (A і B)



l — січна

Коло та круг

Довжина кола

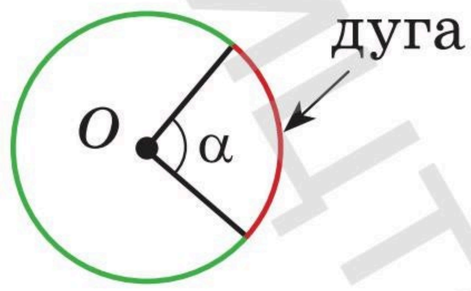


$AB = d$ — діаметр

$$d = 2R$$

$$C = \pi \cdot d = 2\pi R$$

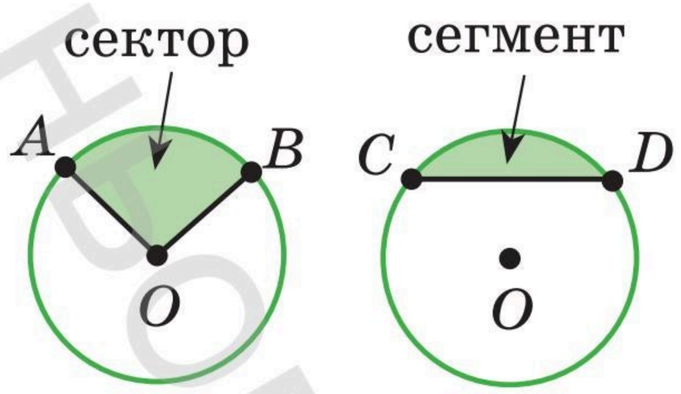
Довжина дуги



α — центральний кут

$$l_\alpha = 2\pi R \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Сектор і сегмент

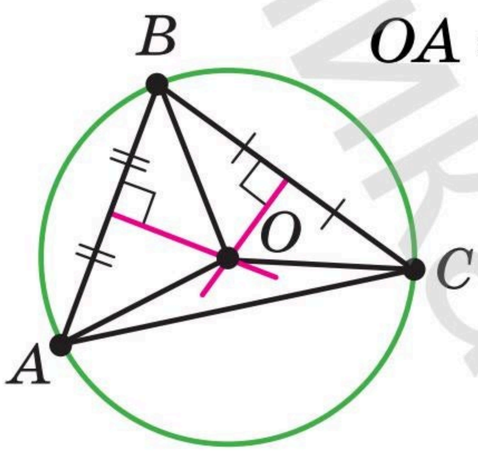


CD — хорда

Підручник Проект
Видавництва
Майбутнє
Міністерства
освіти і науки України

Коло та трикутник

Трикутник, вписаний у коло

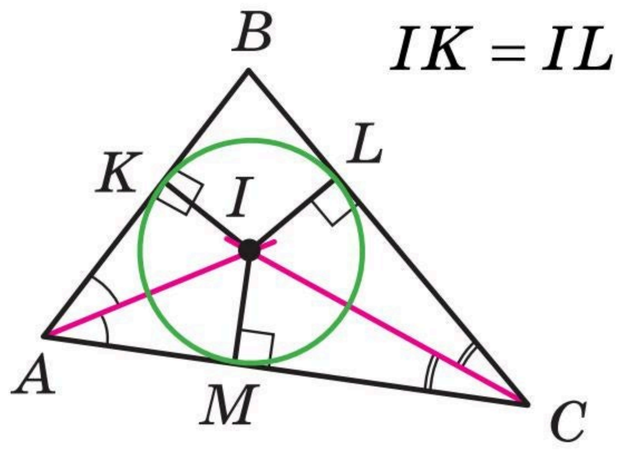


$OA = OB = OC = R$

O — точка перетину серединних перпендикулярів

Коло, описане навколо трикутника

Трикутник, описаний навколо кола



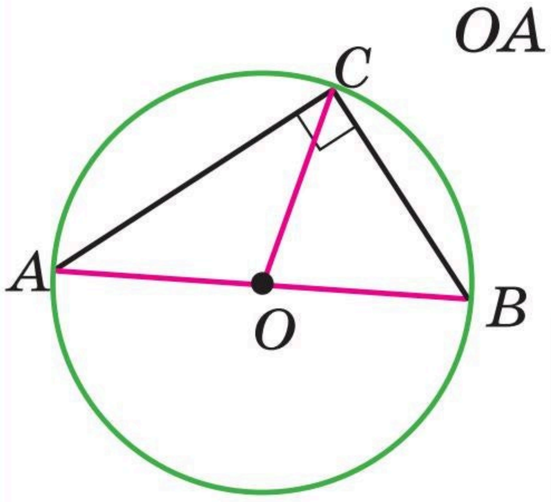
$IK = IL = IM = r$

I — точка перетину бісектрис (інцентр)

Коло, вписане в трикутник

Прямокутний трикутник і коло

Трикутник, вписаний у коло

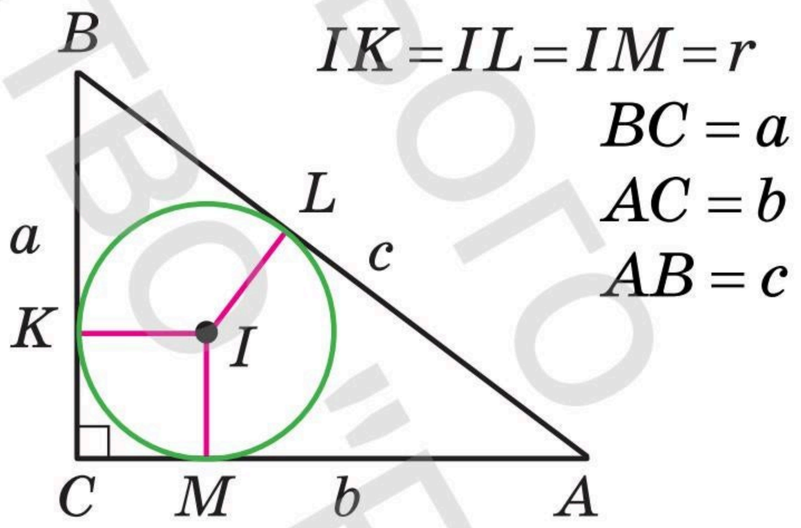


$OA = OB = OC = R$

$$R = \frac{1}{2}AB$$

O — середина гіпотенузи AB

Трикутник, описаний навколо кола



$IK = IL = IM = r$

$BC = a$

$AC = b$

$AB = c$

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Креслярські інструменти

Лінійка

- довільна пряма
- пряма через дану точку
- пряма через дві точки
- промінь
- відрізок із кінцями в даних точках

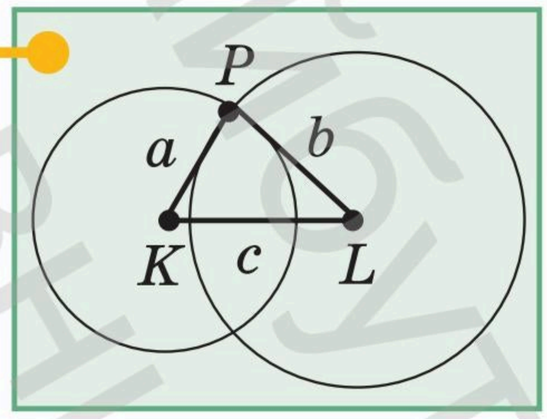
Циркуль

- довільне коло
- коло із центром у даній точці
- від початкової точки променя відрізок, рівний даному

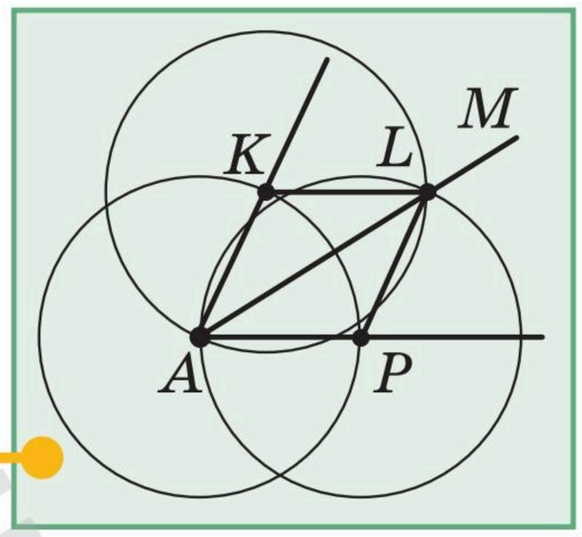
Можна побудувати

Опорні задачі на побудову

1. Побудова трикутника за трьома даними сторонами



2. Побудова кута, рівного даному куту

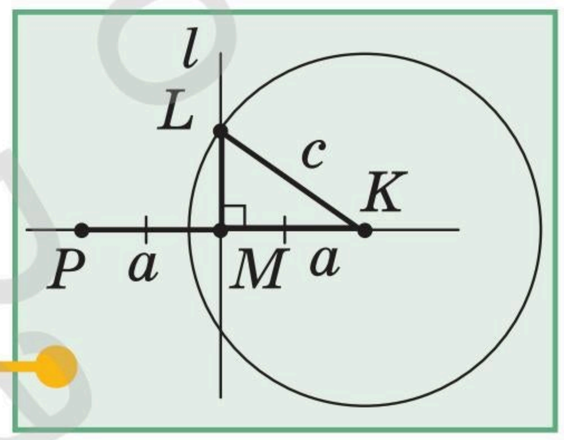


3. Побудова бісектриси кута

4. Побудова серединного перпендикуляра



5. Побудова прямокутного трикутника за гіпотенузою та катетом



РОЗДІЛ 8. СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

CHAPTER 8. STATISTICAL PROBABILITIESS

§ 29. Статистичне дослідження та його етапи



Петрику, привіт! Скажи, будь ласка, скільки дзвінків нашим однокласникам і однокласницям ти зробив учора?



Чекай, зараз подивлюся в телефоні. Чотири! А навіщо це тобі потрібно?



Просто цікаво стало, наскільки часто учні й учениці нашого класу спілкуються телефоном, а не в месенджерах і соцмережах. Ось, дивись, у нашому класі 25 учнів і учениць. Я опитала тепер уже всіх, а результати записала. Вийшло 25 чисел:

1, 2, 0, 5, 4, 3, 2, 0, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 4, 6, 2, 2, 1, 0, 3, 1, 1, 2, 4.





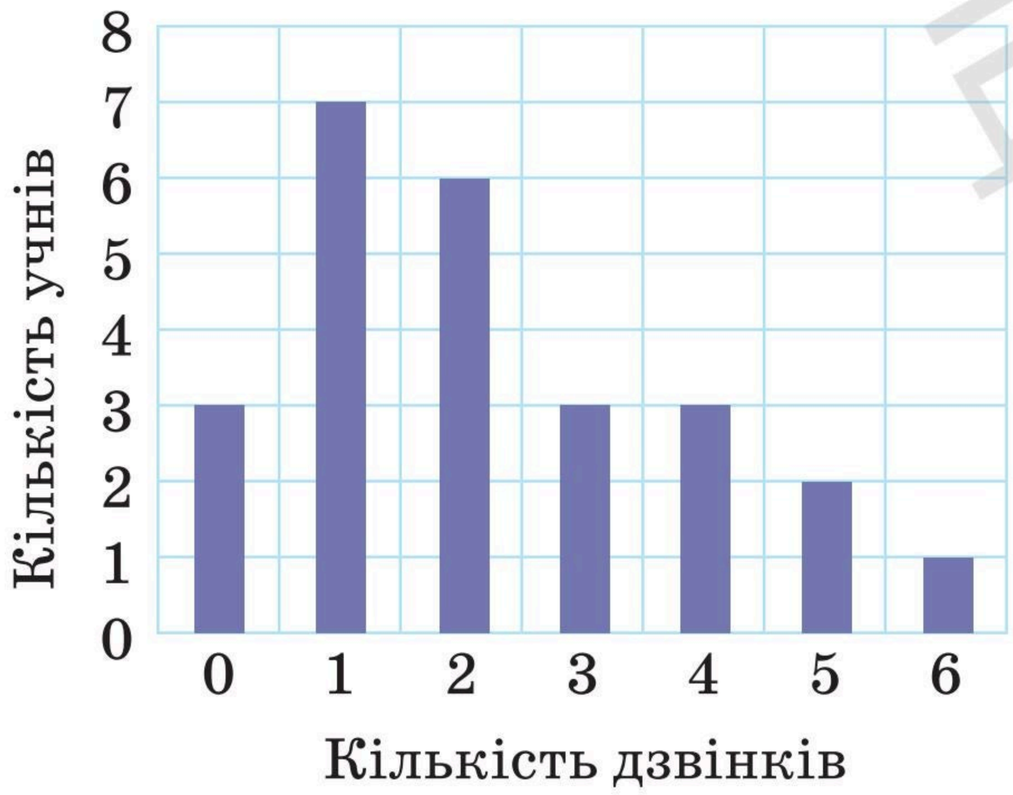
А чому кожні послідовні 5 чисел ти виділила жовтим і зеленим маркерами? Я здогадався! Чисел багато, важко їх розрізняти та сприймати дані, якщо якось не виділити.
Тож, може, краще подамо їх у вигляді таблиці, де в першому рядку перелічимо всі можливі варіанти від найменшого до найбільшого, а в другому напишемо, скільки разів кожен із них зустрічається. У твоїх даних 0 зустрічається 3 рази, 1 — 7 разів, 2 — 6 разів, 3 — 3 рази, 4 — 3 рази, 5 — 2 рази і 6 — 1 раз. Отримаємо ось таку таблицю:

Кількість дзвінків	0	1	2	3	4	5	6	*Усього*
Кількість учнів	3	7	6	3	3	2	1	25



Дійсно, набагато зручніше, ніж просто виділяти маркером. До речі, в мене є із собою планшет, зараз ми цю таблицю перенесемо в Excel і ще й діаграми побудуємо для наочності! Дивись, так іще краще сприймається!

Кількість дзвінків одноклассникам



Кількість дзвінків одноклассникам





Чудово! Цікаво, скільки в середньому дзвінків однокласникам і однокласницям зробив кожен за вчора? Здається, для цього потрібно додати всі числа й поділити отриману суму на кількість даних, тобто на 25.



Можна, але це довго буде. Дивись, значення 0 повторюється 3 рази, тому замість $0+0+0$ можна записати $0\cdot3$. Значення 1 повторюється 7 разів — записуємо $1\cdot7$ замість $1+1+1+1+1+1+1$ і так далі. Вийде, що середню кількість дзвінків можна порахувати так:

$$\frac{0\cdot3+1\cdot7+2\cdot6+3\cdot3+4\cdot4+5\cdot2+6\cdot1}{25}=\frac{0+7+12+9+12+10+6}{25}=$$

$$=\frac{56}{25}=2{,}24.$$



Якось мені важко собі уявити 2,24 дзвінки. Мені здається, що мають бути якісь інші числа, що краще характеризуватимуть твої дані. Наприклад, і з таблиці, і з діаграми видно, що найчастіше в нашому класі дзвонять лише 1 раз на день, бо є аж 7 таких учнів і учениць!



Справді, дробова кількість дзвінків виглядає дивно. Запитаймо вчителів про це, бо я впевнена, що має бути ціла наука про обробку даних!



Справді, така наука про дані та їх обробку є, і вона має назву статистика. Ця наука вивчає, як правильно проводити статистичні дослідження.

Етапи статистичного дослідження

1. Отримання даних (статистичне спостереження).
2. Подання даних у зручному вигляді (статистичне зведення).
3. Розрахунок системи доречних статистичних показників.
4. Виявлення закономірностей, прогнозування й ухвалення рішень.

Наприклад, Тетянка з Петриком фактично провели невелике статистичне дослідження. Тетянка зібрала дані шляхом *опитування* учнів класу (здійснила *статистичне спостереження*), потім Петрик запропонував подати ці дані у вигляді таблиці (здійснив *статистичне зведення*). Подання даних у вигляді стовпчастої та кругової діаграм також стосується статистичного зведення. Далі Тетянка і Петрик *розрахували два статистичні показники* — середню кількість дзвінків і кількість дзвінків, що зустрічається найчастіше, тобто виконали частину третього етапу статистичного дослідження. Останній етап дослідження здебільшого є найбільш складним і відповідальним. Він вимагає більш ґрунтовних математичних знань, і його ми розглянемо пізніше.



Основними видами статистичного спостереження є опитування, анкетування й опрацювання звітності.

Здебільшого опитування проводиться усно. Того, кому задають запитання, називають респондентом, а того, хто їх задає, називають кореспондентом.

Анкетування, навпаки, проводиться письмово на спеціальних бланках, які називають *анкетами*. У цьому випадку кореспондент роздає респондентам бланки анкет, ті їх письмово заповнюють і повертають кореспонденту. Останнім часом набуло популярності використання Гугл форми для проведення анкетування, яка дозволяє заповнювати анкету в онлайн режимі.

Гугл форми (Google forms) — один із популярних програмних засобів для проведення опитувань в інтернеті.



Статистичну звітність також використовують для отримання даних. Відомими вам прикладами такої звітності є табель оцінок, класний журнал (паперовий чи електронний), щоденник тощо.

Ви вже знаєте, що під час статистичного спостереження важливим є отримання *достовірних даних*. Особливо це стосується отримання даних із відкритих джерел у мережі Інтернет. Такі дані можуть бути свідомо чи несвідомо сфальсифіковані. Рекомендуємо вам при використанні даних з Інтернету знаходити принаймні два *незалежних* джерела, які містять ті самі дані. Ще більш надійним є використання офіційних інформаційних ресурсів, дані на яких проходять багатоетапну перевірку.



Дані, отримані під час статистичного спостереження, утворюють вибірку — множину значень ознаки, що досліджується. Кількість елементів у вибірці називають її обсягом або об'ємом і позначають буквою n. Наприклад, для вибірки, яку отримала Тетянка, $n = 25$.

Елементи у вибірці можуть повторюватися. Тому часто зручно подавати їх у вигляді таблиці, яку називають варіаційним рядом. Варіаційний ряд виглядає так:

Варіанти	x_1	x_2	...	x_k	*Усього*
Частоти	n_1	n_2	...	n_k	n

Числа x_1, x_2, ..., x_k називають варіантами. Це всі *різні* значення ознаки, які зустрічаються у вибірці. Числа n_1, n_2, ..., n_k називають частотами. Вони показують, наскільки часто (скільки разів) кожен варіант зустрічається у вибірці.

Зрозуміло, що сума всіх частот дорівнює обсягу вибірки, тобто $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.



Ви вже вивчали в курсі математики, як будувати гістограму (стовпчасту діаграму) та кругову діаграму, в тому числі й за допомогою табличного процесора на кшталт MS Excel.

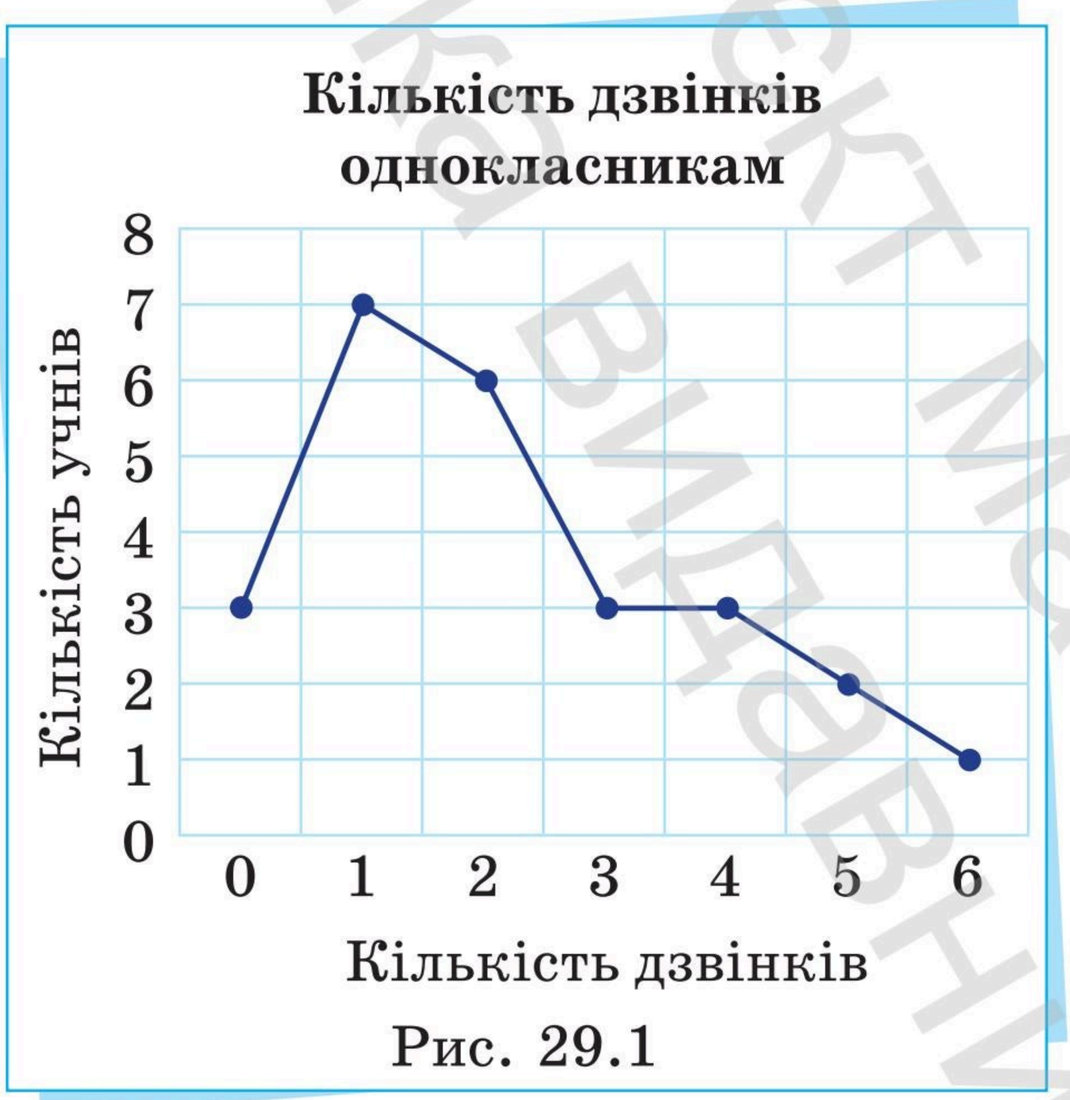


Рис. 29.1

У статистиці, крім цих двох діаграм, часто використовують полігон частот — ламану, яка послідовно сполучає в ПДСК точки з координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, де x_1, x_2, ..., x_k — варіанти деякого варіаційного ряду, а n_1, n_2, ..., n_k — відповідні їм частоти.

Наприклад, полігон частот для прикладу вибірки Тетянки буде таким (див. рис. 29.1).



Статистичних показників, що характеризують вибірку, існує багато. Серед них найпопулярнішими є *розмах*, *середнє арифметичне*, *мода*, *медіана*.



Розмахом R вибірки називають різницю між найбільшим і найменшим значенням цієї вибірки, тобто $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Наприклад, для вибірки Тетянки $R = 6 - 0 = 6$.

Підручник Проект Міністерства освіти і науки України Видавництво Ранок

Середнім арифметичним значенням вибірки обсягу n, що складається із чисел x_1, x_2, …, x_n, називають число $\overline{x}$, яке обчислюють за формулою:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Зауважимо, що в останній формулі серед чисел x_1, x_2, …, x_n можуть бути однакові, тобто це *всі* значення ознаки з вибірки, а не її різні значення, які записують у варіаційний ряд. Якщо ж вибірку задано варіаційним рядом, то формула для обчислення середнього арифметичного дещо змінюється:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

Петрик і Тетянка обчислили середню кількість дзвінків однокласників і однокласниць за другою формулою. Отримане значення 2,24 дійсно є дробовим. Тлумачити його можна так: якби в класі було 100 дітей, то в середньому вони разом би зробили 224 дзвінки одне одному. Середні арифметичні значення цілком можуть бути дробовими, навіть якщо всі значення у вибірці — цілі числа.

Модою Mo вибірки називають значення ознаки, яке найчастіше зустрічається у вибірці. Якщо вибірку задано варіаційним рядом, то це варіант із найбільшою частотою.

Для вибірки Тетянки $Mo = 1$, бо значення 1 зустрічається там найчастіше, а отже, має найбільшу частоту у відповідному варіаційному ряді.

Для знаходження медіани Me вибірки потрібно впорядкувати *всі* елементи цієї вибірки за зростанням і обрати той, який роташований посередині.

Наприклад, для знаходження медіани вибірки Тетянки розташуємо всі 25 елементів цієї вибірки в порядку зростання: 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6. Виділене зеленим число розташовано *посередині* впорядкованих значень вибірки. Отже, $Me = 2$.



Якщо кількість значень вибірки парна, то посередині вибірки будуть розташовані два її елементи. У цьому випадку медіану знаходять як середнє арифметичне цих двох елементів. Розглянемо приклад.

Приклад

Шестеро друзів зацікавилися, скільки кожен із них з'їв пачок морозива за минулий тиждень. Дані виявилися такими: 5, 3, 4, 8, 7, 4. Знайдіть для цієї вибірки: а) розмах; б) середнє арифметичне; в) моду; г) медіану.

Розмах вибірки: $R = 8 - 3 = 5$.

Середнє арифметичне: $\overline{x} = \dfrac{5+3+4+8+7+4}{6} = 5\dfrac{1}{6}$.

Значення 4 зустрічається двічі, решта значень — лише один раз. Тому $Mo = 4$.

Для знаходження медіани впорядкуємо вибірку:

3, 4, 4, 5, 7, 8.

Виділені зеленим числа розташовані посередині. Отже,

$$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$$

Перевірте себе!

1. Перелічіть етапи статистичного дослідження.
2. Якими є способи проведення статистичного спостереження?
3. Яким чином забезпечити достовірність даних із відкритих джерел?

4. Дайте означення варіаційного ряду та його елементів.
5. Які статистичні діаграми та графіки є найпоширенішими?
6. Яким чином для даної вибірки знаходять: а) розмах; б) середнє арифметичне; в) моду; г) медіану?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть у правильному порядку етапи статистичного дослідження: а) отримання даних (статистичне спостереження); б) розрахунок системи доречних статистичних показників; в) виявлення закономірностей, прогнозування й ухвалення рішень; г) подання даних у зручному вигляді (статистичне зведення).
2. Що з переліченого є способом статистичного спостереження?

   а) опитування; б) анкетування; в) опрацювання звітності; г) упорядкування вибірки.
3. Дано вибірку: 3; 12; 5; 4; 3; 11. Визначте кількість елементів у цій вибірці, тобто обсяг вибірки.
4. Дано вибірку: 13; 3; 15; 24; 12; 15. Обчисліть різницю найбільшого та найменшого значень у цій вибірці, тобто розмах вибірки.
5. Дано впорядковану вибірку: 5; 6; 6; 7; 15. Визначте медіану цієї вибірки, тобто елемент, який розташований посередині.
6. Дано вибірку: 13; 4; 12; 4; 15. Визначте моду цієї вибірки, тобто елемент, який найчастіше зустрічається в цій вибірці.
7. У волейбольній команді семикласників провели опитування про вік гравців. Отримали такі дані (у повних роках): 11, 13, 12, 12, 12, 11, 12. Знайдіть для цієї вибірки: а) обсяг; б) розмах; в) моду; г) медіану.

8. У баскетбольній команді семикласниць провели опитування про зріст гравчинь. Отримали такі дані (у см): 151, 153, 153, 154, 156, 158, 162. Знайдіть для цієї вибірки: а) обсяг; б) розмах; в) моду; г) медіану.

Середній рівень

9. Задано варіаційний ряд:

Варіанти	40	41	42	43	44	45	46
Частоти	1	3	5	8	7	4	1

Знайдіть: а) розмах вибірки; б) обсяг вибірки; в) моду вибірки; г) середнє значення вибірки (відповідь округліть до сотих).

10. Задано варіаційний ряд:

Варіанти	9	10	11	12	13	14	15
Частоти	1	5	9	6	4	2	2

Знайдіть: а) розмах вибірки; б) обсяг вибірки; в) моду вибірки; г) середнє значення вибірки (відповідь округліть до сотих).

11. Серед учнів і учениць школи було проведено опитування щодо кількості братів і сестер, яких вони мають. 6 респондентів відповіли, що вони не мають братів і сестер, 12 мають одного/одну брата чи сестру, 10 — двох братів і сестер, 5 — трьох братів і сестер, 1 має чотирьох братів і сестер. Скільки респондентів брало участь в опитуванні? Використовуючи отримані результати, складіть варіаційний ряд і визначте моду та середнє значення для цієї вибірки (результат округліть до десятих).

12. Петрик і Тетянка провели опитування, щоб дізнатися, яку кількість подарунків на Різдво отримали їх однокласники й однокласниці. Відповіді розподілилися таким чином: один подарунок отримали 5 респондентів, два

подарунки — 8, три подарунки — 11, чотири подарунки — 6. Скільки респондентів брали участь в опитуванні? Використовуючи отримані результати, складіть варіаційний ряд, визначте розмах і середнє значення для цієї вибірки.

13. Петрик вирішив дізнатися, скільки повних років мають його друзі. Він отримав такі відповіді: 10, 12, 12, 12, 11, 11, 13, 12, 12, 11, 11. Упорядкуйте одержані результати, знайдіть медіану та значення середнього віку друзів Петрика (результат округліть до десятих).

14. Тетянка досліджувала, скільки різних гуртків відвідують її подруги. Вона записала такі відповіді дівчат: 0, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 2. Упорядкуйте одержані результати, знайдіть моду та медіану цієї вибірки.

15. Туристичне бюро провело дослідження щодо популярності міста Краків серед туристів із різних країн. Результати дослідження було подано у вигляді полігона частот (рис. 1). З якої країни було найбільше туристів у Кракові під час дослідження? Який відсоток серед відвідувачів міста складали туристи з Великобританії? З яких країн була однакова кількість туристів у Кракові?

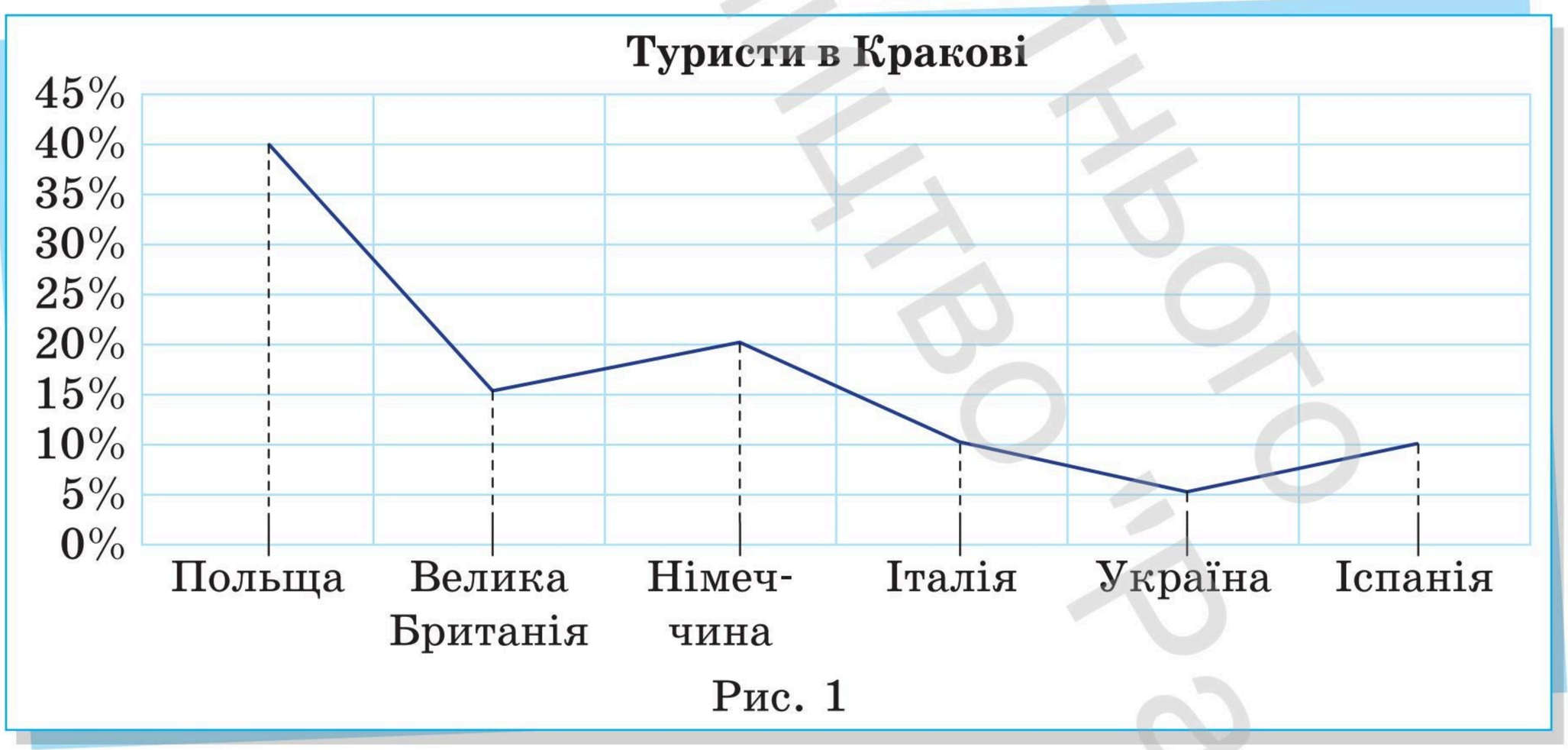


Рис. 1

16. Готуючись до різдвяного чаювання, батьки опитали учнів і учениць сьомих класів про їх улюблені ласощі. Результати було подано у вигляді діаграми (рис. 2). Які ласощі найбільше полюбляють учні й учениці? Скільки респондентів брало участь в опитуванні? Які ласощі користуються найменшою популярністю серед цієї вибірки?

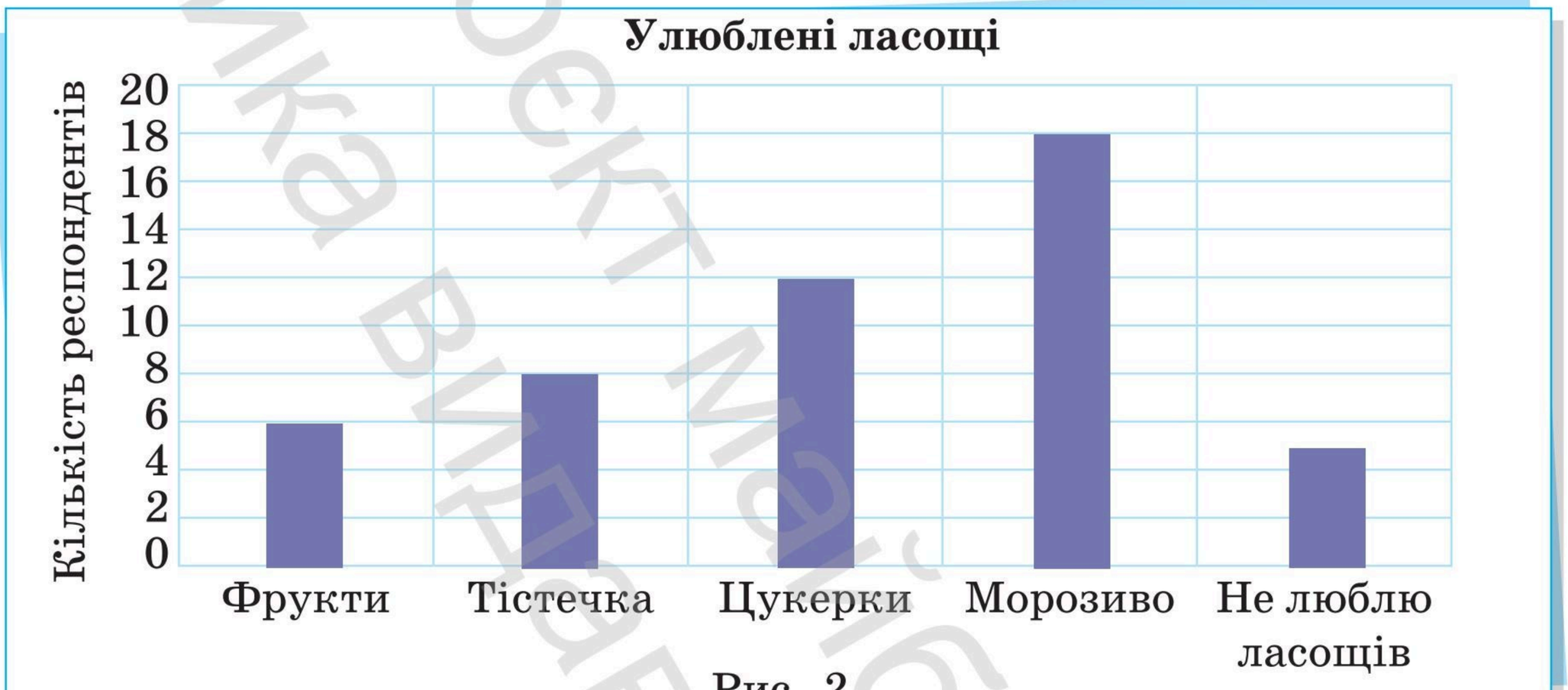


Рис. 2

17. Використовуючи дані, наведені в завданні № 13, складіть варіаційний ряд і побудуйте полігон частот.

18. Використовуючи дані, наведені в завданні № 14, складіть варіаційний ряд і побудуйте стовпчасту діаграму.

Достатній рівень

19. Задано варіаційний ряд.

Варіанти	1	2	3	4	5	6
Частоти	5	3	7	5	4	2

Знайдіть: а) обсяг вибірки; б) медіану вибірки; в) середнє значення вибірки (результат округліть до сотих).

Підручник Проєкт Міністерства освіти і науки України Видавництво Ранок

20. Задано варіаційний ряд.

Варіанти	7	8	9	10	11	12
Частоти	4	6	8	4	3	1

Знайдіть: а) обсяг вибірки; б) медіану вибірки; в) середнє значення вибірки (результат округліть до сотих).

21. Однокласник Петрика отримав такі оцінки з історії за перший семестр: 10, 9, 9, 9, 10, 11, 10, 9, 9, 9, 10, 9, 9, 9, 8. Складіть варіаційний ряд, використовуючи ці дані, та побудуйте стовпчасту діаграму. Знайдіть середнє арифметичне для цієї вибірки (результат округліть до десятих).

22. Під час подорожі на морський курорт Тетянка спостерігала за температурою повітря протягом двох тижнів. Вона отримала такі результати: 22 °С, 23 °С, 22 °С, 22 °С, 25 °С, 24 °С, 23 °С, 23 °С, 25 °С, 24 °С, 26 °С, 27 °С, 28 °С, 25 °С. Для отриманих значень складіть варіаційний ряд і побудуйте стовпчасту діаграму. Знайдіть середню температуру повітря для цього періоду спостережень (результат округліть до десятих).

23. Учні й учениці 7-А класу отримали такі результати контрольної роботи: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 12. Упорядкуйте дані за рівнями навчальних досягнень учнів і учениць, заповнивши подану таблицю (перенесіть її до зошита).

Рівень навчальних досягнень	Початковий рівень (1–3 бали)	Середній рівень (4–6 балів)	Достатній рівень (7–9 балів)	Високий рівень (10–12 балів)
Кількість учнів				

За результатами розподілу учнів за рівнями навчальних досягнень побудуйте кругову діаграму.

24. Працівникам фірми задали питання «Скільки додаткових вихідних днів ви хотіли б мати на Різдво?» й отримали такі відповіді: 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 12, 12, 12, 12, 15, 18, 21. Упорядкуйте дані, заповнивши подану таблицю (перенесіть її до зошита).

Кількість додаткових вихідних днів	Менше 7	7–10	11–14	Понад 14
Кількість працівників				

За даними таблиці побудуйте кругову діаграму.

Високий рівень

25. На уроці фізкультури 11 дівчат-семикласниць у стрибках у висоту показали такі результати : 79 см, 105 см, 115 см, 120 см, 120 см, 125 см, 125 см, 130 см, 130 см, 130 см, 130 см. Знайдіть моду, медіану і середнє арифметичне значення вибірки. Який, на ваш погляд, з отриманих результатів найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат цього класу? Поясніть свою відповідь.

26. На уроці фізкультури 12 хлопців-семикласників у стрибках у довжину з місця показали такі результати : 123 см, 130 см, 130 см, 130 см, 135 см, 135 см, 140 см, 160 см, 160 см, 160 см, 160 см, 165 см. Знайдіть моду, медіану і середнє арифметичне значення вибірки. Який, на ваш погляд, з отриманих результатів найкраще характеризує спортивну підготовку хлопців цього класу? Поясніть свою відповідь.

27. Визначаючи ступінь засміченості насіння квітів, з'ясували, скільки насінин бур'янів міститься в кожному зі 100

Підручник Інтернет-версія

довільним чином вибраних пакетів з однаковим числом насінин. Отримали таку таблицю:

Число насінин бур'янів	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число пакетів	3	16	26	17	18	10	3	5	1	1

Для одержаного варіативного ряду знайдіть середнє арифметичне та моду. Поясніть практичний зміст цих характеристик.

28. Вивчаючи якість виробів, що випускає цех, визначили число бракованих деталей у кожному з 50 довільним чином вибраних ящиків з однаковим числом деталей. Одержали таку таблицю:

Число бракованих деталей	0	1	2	3	4
Число ящиків	8	22	13	5	2

Для одержаного варіативного ряду знайдіть середнє арифметичне, розмах і моду. Поясніть практичний зміст цих характеристик.

29. У вибірці: 6; 12; 16; x; 28; 32 пропущено число x. Знайдіть це число, якщо:

1) середнє арифметичне значення вибірки дорівнює 19;
2) мода дорівнює 28;
3) медіана дорівнює 19.

30. У вибірці: 8; 10; 14; y; 22; 30; 36 пропущено число y. Знайдіть це число, якщо:

1) середнє арифметичне значення вибірки дорівнює 20;
2) мода дорівнює 14;
3) медіана дорівнює 21.

31. У поданій таблиці частот, яка характеризує розподіл членів бригади за числом виготовлених деталей, одне число

виявилося витертим. Відновіть це число, якщо відомо, що в середньому члени бригади виготовили по 14,2 деталей.

Число деталей	12	13	14	15	16
Частота	1	3		6	2

32. У таблиці, яка відображає облік бракованих деталей у контрольній партії ящиків, два числа виявилися витертими. Відновіть ці числа, якщо відомо, що ящиків із двома бракованими деталями виявилося вдвічі більше, ніж ящиків із трьома бракованими деталями, а в середньому в кожному ящику було 1,85 бракованих деталей.

Число бракованих деталей	0	1	2	3	4	5
Число ящиків	12	28			7	2

33. Кожне число у вибірці збільшили на 20. З'ясуйте, як змінилися її: 1) середнє арифметичне; 2) мода; 3) медіана. Обґрунтуйте свою відповідь.

34. Кожне число у вибірці збільшили в три рази. З'ясуйте, як змінилися її: 1) середнє арифметичне; 2) мода; 3) медіана. Обґрунтуйте свою відповідь.



Цікавинки від дідуся Тараса

Найранішим відомим джерелом зі статистики є «Трактат про дешифрування криптографічних повідомлень», написаний арабським вченим *Аль-Кінді* в IX ст. У цій роботі вчений навів докладний опис того, як застосовувати статистику для розшифрування закодованих повідомлень. У Європі першою працею зі статистики можна вважати «Природні та політичні спостереження на списках померлих» *Джона Ґраунта* (1662 р.).

Підручник Проєкт Міністерства освіти і науки України

Термін «статистика» походить від латинського «status» — стан, становище. Його вперше було введено німецьким вченим *Готфрідом Ахенвалем* у середині XVIII ст. У той час це слово означало політичний стан держави: «stato» — держава, «statistika» — певна сума знань про державу. Людей, що володіли знаннями про устрій і стан справ у різних державах, тобто державних діячів, політиків називали «statista».

Сучасна статистика виникла наприкінці XIX — на початку XX ст. завдяки роботам *Френсіса Гальтона* та *Карла Пірсона*. Вони перетворили статистику на строгу математичну дисципліну, яку використовували для отримання й аналізу даних, причому не лише в науці, а й у промисловості та політиці. Подальший розвиток статистики забезпечили роботи *Рональда Фішера, Вільяма Ґоссета, Еґона Пірсона, Єжи Неймана.*

Сьогодні методи статистики застосовують у всіх областях, що передбачають ухвалення рішень. Використання сучасних комп'ютерів суттєво спростило масштабні статистичні обчислення та зробило можливими нові методи обробки даних, які були надто громіздкими для виконання вручну. Наразі статистика продовжує бути областю активних наукових досліджень, наприклад, стосовно аналізу великих масивів даних.

Джон Ґраунт (1620–1674) — англійський науковець, засновник демографії. Зробив значний внесок у систематичний збір і аналіз даних і вважається піонером сучасної статистики.

Готфрід Ахенваль (1719–1772) — німецький філософ, історик, економіст, педагог, юрист епохи Просвітництва. Вважається основоположником статистики.

Карл Пірсон (1857–1936) — англійський математик, статистик, біолог, філософ; один із засновників математичної статистики.

Єжи Нейман (1894–1981) — польський і американський математик і статистик. Навчався в Харківському університеті.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про історію розвитку статистики як науки. Підготуйте невелике повідомлення на цю тему.
2. Чи доводилося вам у своєму повсякденному житті збирати й аналізувати статистичні дані для ухвалення певних рішень? Наведіть приклади таких ситуацій. Як саме ви використовували статистичні дані та які рішення були ухвалені?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Обчисліть: а) $1\frac{2}{7} : \frac{4}{7} - 13{,}7 : 10$; б) $4\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18} + 0{,}035 \cdot 100$.
2. Велика туристична група взяла із собою в похід x кг продуктів. Першого дня туристи й туристки спожили $\frac{2}{7}$ усієї маси продуктів, другого дня — 55 % маси продуктів, що залишилася, а третього дня — решту 45 кг продуктів. Знайдіть x.
3. У прямокутнику $ABCD$, який не є квадратом, провели бісектриси AM і CK кутів A і C відповідно. Доведіть, що прямі AM і CK — паралельні.
4. Під час математичної вікторини букви слова ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ були написані на картках і перевернуті. Учасник вікторини повинен навмання взяти одну із цих карток. Яка ймовірність того, що на картці буде написано голосну букву? Відповідь запишіть нескоротним звичайним дробом.
5. Запишіть у дужках *слово*, що одночасно є завершенням слова зліва від дужок і початком слова справа від дужок. Кількість крапок у дужках позначає кількість букв шуканого слова.

   а) КРЕ (. . . .) Н; б) МУ (. . .) АР

§ 30. Статистичний підхід до обчислення ймовірностей подій



Послухай, Тетянко, нещодавно переглядав фото з минулорічного відпочинку в Карпатах і звернув увагу на розклад руху на автовокзалі в місті Косів на 23 червня.

11:45	КУТИ	ЯВОРІВ	10	У продажі	Мерседес-30	91 %	12:05
11:45	КОСІВ	КУТИ	21	У продажі	Мерседес-21	91 %	12:06
11:50	КОСІВ	ВИЖНІЙ БЕРЕЗІВ	18	У продажі	Мерседес-18	87 %	13:15
12:00	КОСІВ	РІЧКА	18	У продажі	Мерседес-18	95 %	12:55
12:05	КУТИ	РОГАТИН	20	У продажі	Мерседес-18	96 %	16:15
12:15	КОСІВ	БУКОВЕЛЬ ТК	18	У продажі	Мерседес-18	98 %	14:40
12:15	ЯВОРІВ	РОЖНІВ	8	У продажі	Мерседес-18	74 %	12:40
12:20	КОСІВ	КОСМАЧ	25	У продажі	ПАЗ-672	71 %	13:30
12:20	КОСІВ	МАЛИЙ РОЖИН	24	У продажі	ПАЗ	61 %	13:18
12:30	КОСІВ	ІВАНО-ФРАНКІВСЬК	29	У продажі	БАЗ-29	97 %	14:50

Мені не дуже зрозуміло, що то за відсотки написані в другій справа колонці навпроти кожного рейсу?



Мені здається, що це написані *ймовірності* того, що цей рейс відбудеться. Я такі відсотки в прогнозі погоди постійно бачу. Ось, подивись у моєму смартфоні прогноз на завтра. В останньому рядку так і написано: «Ймовірність опадів». Завтра ввечері доведеться взяти з собою парасольку, бо 65 % — це досить велика ймовірність!

	ніч		ранок		день		вечір	
Час (год)	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00
								
Температура (°С)	+23	+20	+19	+24	+27	+27	+26	+22
Тиск, мм	746	746	746	746	746	746	745	746
Вологість, %	76	92	92	60	44	61	65	69
Ймовірність опадів, %	2	2	2	2	9	42	65	48



Так, дійсно, цими ймовірностями я теж користуюся ледь не щодня. Але надзвичайно цікаво, як вони обчислюються.



Раніше ми вчили, що потрібно спочатку знайти кількість n усіх найпростіших наслідків експерименту, за якого відбувається певна подія A. Потім потрібно знайти кількість k таких наслідків, що *сприяють* цій події. Нарешті, для обчислення ймовірності P події A треба скористатися формулою $P(A)=\frac{k}{n}$.



Це і я пам'ятаю. Але досить складно уявити, як цей підхід працюватиме для випадку з розкладом руху. А щодо прогнозу погоди, так я взагалі не уявляю, як його можна застосувати, але дуже хотів би дізнатися!



Як зазначила Тетянка, всі події, ймовірності яких ми обчислюємо, відбуваються внаслідок певного експерименту — деякої сукупності умов навколишнього світу. Ця сукупність умов може бути *природною* чи *спеціально організованою*.

Наприклад, випадання опадів відбувається внаслідок природного експерименту, а випадання герба при підкиданні монети — внаслідок спеціально організованого експерименту.

Якщо внаслідок експерименту певна подія не може відбутися, то її називають неможливою та позначають символом $\varnothing$.

Якщо внаслідок експерименту певна подія відбувається завжди, то її називають достовірною та позначають символом Ω.

Якщо внаслідок експерименту певна подія може як відбутися, так і не відбутися, то її називають випадковою і позначають великою латинською буквою (A, B, C тощо).



Імовірністю події природно назвати число, яке характеризує ступінь можливості здійснення цієї події.

Домовилися вважати, що ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а ймовірність достовірної події дорівнює 1. Оскільки слово «ймовірність» англійською «probability», то скорочено це записують так:

$$P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1.$$

Для обчислення ймовірностей випадкових подій використовують різні підходи, в залежності від експерименту, внаслідок яких вони відбуваються.

Ви вже знаєте класичний підхід до обчислення ймовірностей. **Він полягає в тому, що серед усіх можливих наслідків експерименту виділяють найпростіші, які називають** елементарними подіями.

Елементарні події повинні задовольняти такі умови:

- бути рівноможливими;
- принаймні одна з елементарних подій унаслідок експерименту має відбутися;
- дві різні елементарні події внаслідок експерименту одночасно не відбуваються.

Більш складні випадкові події складаються з елементарних подій, які називають сприятливими **для цих випадкових подій. Наприклад, при киданні стандартного симетричного грального кубика з досить великої висоти на тверду поверхню природно вважати, що утворюється 6 елементарних подій: «випало 1 очко», «випало 2 очки», ..., «випало 6 очок». Випадкова подія A = «випало менше 3 очок» складається з 2 елементарних подій «випало 1 очко» і «випало 2 очки», які ми вважаємо сприятливими для неї.**

Якщо загальна кількість елементарних подій *скінченна*, то згідно з класичним підходом імовірність випадкової події A обчислюють за формулою:

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

де n — загальна кількість елементарних подій, k — кількість елементарних подій, сприятливих для події A.

Наприклад, імовірність випадання менше 3 очок при одному киданні стандартного симетричного грального кубика

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$



Класичний підхід до обчислення ймовірностей не завжди можна застосувати. Якщо кількість можливих наслідків експерименту нескінченна або не можна забезпечити рівноправність найпростіших його наслідків, то потрібно шукати інші підходи до обчислення ймовірностей випадкових подій.

Наприклад, не можна обчислювати ймовірності за класичним підходом, якщо гральний кубик не є симетричним, або у випадку з виїздом автобуса зі станції, про який згадував Петрик.

В останньому випадку ми не можемо навіть описати всі можливі наслідки експерименту, не те що обчислити їх кількість!

Розглянемо статистичний підхід до обчислення ймовірностей випадкових подій. Він полягає в тому, що розглядають серію з n випробувань, унаслідок кожного з яких подія A *може відбутися*. Нехай після цих n випробувань у k із них ця подія *відбулася*.



Число $\omega(A)=\dfrac{k}{n}$ будемо називати відносною частотою появи події A в даній серії випробувань.

У разі досить великої кількості n випробувань значення $\omega(A)$ вважають наближеним значенням $P(A)$ ймовірності події A, тобто

$$P(A)\approx\omega(A)=\frac{k}{n}.$$

Наприклад, якщо автобус зі 100 запланованих за останній місяць рейсів вийшов на маршрут 92 рази, то ймовірність події $B=$ «автобус вийде на маршрут» $P(B)\approx\omega(B)=\dfrac{92}{100}=0{,}92.$



Для практичних потреб нам не обов'язково знати точне значення ймовірності події, досить наближеного її значення з прийнятною точністю. Найчастіше такою точністю є округлення значення ймовірності до сотих. Саме тому для запису ймовірностей подій часто використовують *відсотки*. Зокрема, в попередньому прикладі ймовірність події B наближено дорівнює 92 %.

Але важливо зауважити:

Імовірність будь-якої події — це число, яке НЕ може бути меншим від 0 і більшим за 1.



Перевірте себе!

1. Наведіть приклади експериментів, унаслідок яких відбуваються випадкові події.
2. Який наслідок експерименту називають:
   а) неможливою подією; б) достовірною подією; в) випадковою подією?
3. Якими є значення ймовірності:
   а) неможливої події; б) вірогідної події?
4. Опишіть вимоги до елементарних подій, пов'язаних із деяким експериментом.
5. Яким чином обчислюють імовірності випадкових подій за класичним підходом?
6. Яким чином обчислюють імовірності випадкових подій за статистичним підходом?
7. У яких межах лежить значення ймовірності будь-якої події?

Підручник вибрано для використання у 2025/2026 навчальному році

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. У мішку лежать 5 куль, і всі вони білі. Яка ймовірність того, що із цього мішка виймуть чорну кулю? Як називається така подія?

2. У корзині лежать 8 яблук, і всі вони червоні. Яка ймовірність того, що із цієї корзини виймуть червоне яблуко? Як називається така подія?

3. Монету підкинули 20 разів. 11 разів випав герб. Яка відносна частота появи герба у цій серії підкидань?

4. Стандартний симетричний гральний кубик підкидали 30 разів. 4 рази випадало число 1. Яка відносна частота появи числа 1 у цій серії підкидань?

5. Проведіть експеримент. Підкиньте стандартний симетричний гральний кубик 25 разів. Зафіксуйте, скільки разів випадало число 2. Яка відносна частота появи числа 2 у цій серії підкидань?

6. Проведіть експеримент. Підкиньте 25 разів монету номіналом 50 копійок. Зафіксуйте, скільки разів випадав герб. Яка відносна частота появи герба у цій серії підкидань?

7. Проведіть експеримент. Покладіть у торбину різну кількість яблук різного виду, але однакової форми, наприклад 4 червоних яблука й 3 зелених. Випадковим чином вийміть із торбини одне яблуко, фіксуйте його колір і кладіть назад у торбину. Виконайте 15 таких виймань і повернень. Яка відносна частота появи червоних яблук у цій серії виймань? Яка відносна частота появи зелених яблук у цій серії виймань? Чия відносна частота появи більша?

8. Проведіть експеримент. Покладіть у торбину різну кількість цукерок двох різних видів, але однакової форми, наприклад 10 цукерок «Ромашка» і 5 цукерок «Червоний мак». Випадковим чином виймайте з торбини одну цукерку, фіксуйте її назву та кладіть назад у торбину. Виконайте 20 таких виймань і повернень. Яка відносна частота появи одного з видів цукерок у цій серії виймань? Яка відносна частота появи іншого виду цукерок у цій серії виймань? Чия відносна частота появи більша?

Середній рівень

9. Визначте, якою є подія: а) у результаті підкидання монети номіналом 50 копійок випаде герб; б) Сонце зійде на Заході; в) після літа прийде осінь.

10. Визначте, якою є подія: а) у результаті підкидання симетричного грального кубика випаде число від 1 до 6; б) стрілець влучить в мішень; в) на прогулянці в парку зустріти живого динозавра.

11. Чи є рівноможливими події: подія А «При підкиданні симетричного грального кубика випаде парне число»; подія В «При підкиданні симетричного грального кубика випаде непарне число»? Відповідь поясніть.

12. Чи є рівноможливими події: подія А «Навмання обираючи одну букву українського алфавіту, одержимо букву, що позначає голосний звук», подія В «Навмання обираючи одну букву українського алфавіту, одержимо букву, що позначає приголосний звук». Відповідь поясніть.

13. Знайдіть імовірність виграти в лотерею, придбавши 1 квиток, якщо із 100 квитків лотереї 5 виграшних.

14. Знайдіть імовірність виграти в лотерею, придбавши 1 квиток, якщо із 200 квитків лотереї 25 виграшних.

15. На кожній картці написано одну з букв: А, О, Б, П, В, М, Ф. Навмання беруть одну картку. Знайдіть імовірність витягти картку з буквою, що позначає приголосний звук.

16. У класі навчаються 12 дівчат і 16 хлопців. Знайдіть ймовірність того, що вчитель навмання запросить до дошки дівчинку.

Достатній рівень

17. Наведіть приклад достовірної події.

18. Наведіть приклад неможливої події.

19. При проведенні експерименту з підкидання однієї монети номіналом 50 копійок можна отримати два різні результати: «випаде герб» або «випаде число». Перелічіть усі можливі результати експерименту з підкиданням двох таких монет.

20. Три грані кубика пофарбували в червоний колір, а ще три — в чорний. Перелічіть усі можливі результати експерименту з підкиданням двох кубиків із таким забарвленням.

21. Петрик записав свої оцінки за контрольні роботи з математики за навчальний рік:

Оцінка	7	8	9	10	11	12
Частота	1	2	5	3	1	0

Знайдіть імовірність того, що за наступну контрольну роботу Петрик отримає 10 балів.

22. Тетянка записала кількість днів поточного місяця, коли було сонячно; хмарно; вітряно; йшов дощ.

Погода	сонячно	хмарно	вітряно	дощ
Кількість днів	15	7	4	4

Знайдіть імовірність того, що наступного дня Тетянка зафіксує сонячний день.

23. У коробці 6 цукерок із білого шоколаду та 9 цукерок із чорного шоколаду. Знайдіть, на скільки більша ймовірність витягнути навмання цукерку із чорного шоколаду, ніж з білого.

24. Із 100 лотерейних білетів 20 виграшні, а решта — ні. Знайдіть, на скільки ймовірність програти в цю лотерею більша, ніж ймовірність виграти.

25. У коробці лежать апельсини та мандарини приблизно однакового розміру. Відомо, що мандаринів у коробці 20, а ймовірність витягнути навмання із цієї коробки мандарин дорівнює 40 %. Скільки в цій коробці апельсинів?

26. У мішечку лежать бочечки з лото. Загалом там залишилося 24 бочечки. Відомо, що ймовірність витягти з мішечка навмання бочечку з непарним номером дорівнює 12,5 %. Скільки в мішечку бочечок із парними номерами?

Високий рівень

27. У коробці є 40 жетонів з номерами від 1 до 40. Знайдіть імовірність того, що перший витягнутий із коробки навмання жетон не міститиме в записі номера цифру 3.

28. Із 20 карток, пронумерованих числами від 1 до 20, навмання витягують одну. Знайдіть ймовірність того, що номер витягнутої картки виявиться кратним 4.

29. Знайдіть імовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків сума очок, які випадуть, дорівнює 3.

30. Тетянка і Петрик домовилися: якщо в результаті підкидання двох гральних кубиків у сумі випаде число очок, кратне 5, то виграла Тетянка, а якщо в сумі випаде число очок, кратне 6, то виграв Петрик. У кого більше шансів виграти? Поясніть свою відповідь.



31. На координатній площині зазначено всі точки, абсциси й ординати яких дорівнюють одному з наступних чисел: −5; −2; −1; 2 (повторення допускаються). Навмання вибирається одна з таких точок. Знайдіть імовірність того, що вона буде лежати нижче осі абсцис.

32. На координатній площині зазначено всі точки, абсциси й ординати яких дорівнюють одному з наступних чисел: −6; 2; 3; 4 (повторення допускаються). Навмання вибирається одна з таких точок. Знайдіть імовірність того, що вона буде лежати лівіше осі ординат.

33. У коробці лежать 15 синіх олівців і кілька червоних. Знайдіть кількість червоних олівців у коробці, якщо ймовірність навмання витягти червоний олівець дорівнює 0,4.

34. У коробці лежать 12 білих кульок і кілька чорних. Знайдіть, кількість чорних кульок у коробці, якщо ймовірність навмання витягнути білу кульку дорівнює 0,6.

35. Результати, які чотири боксери показали протягом пів року, подано в таблиці.

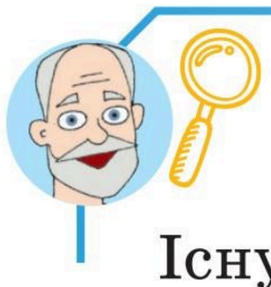
Ім'я боксера	Андрій	Олександр	Євген	Петро
Число проведених боїв	15	20	22	16
Число перемог	9	16	12	10

Тренер вирішив відібрати на міський чемпіонат одного спортсмена, у якого відносна частота перемог більша, ніж у інших. Кого вибрав тренер? Поясніть свою відповідь.

36. Результати, які показали протягом пів року учні й учениці, що є кращими членами шкільного клубу з настільного тенісу, подано в таблиці.

Ім’я гравця	Петро	Василь	Галина	Оксана
Число проведених партій	75	85	91	83
Число перемог	42	47	49	45

Тренер вирішив відібрати на міжшкільний чемпіонат одного спортсмена й одну спортсменку, у яких відносна частота перемог більша, ніж в інших. Кого вибрав тренер? Поясніть свою відповідь.



Цікавинки від дідуся Тараса

Існує гіпотеза, що теорія ймовірностей як наука зародилася зі спроб аналізу азартних ігор ще за Середньовіччя. Однак перші відносно наукові праці з теорії ймовірностей стосуються лише XVII ст., коли *Блез Паскаль* і *П’єр Ферма* відкрили ймовірнісні залежності, що виникають під час кидання гральних кубиків.

Справжню наукову основу теорії ймовірностей заклав *Якоб Бернуллі* у своїй роботі «Мистецтво припущень». Вона, зокрема, містила загальну теорію комбінаторних сполук, а також *закон великих чисел*, який дав можливість установити зв’язок між імовірністю випадкової події та відносною частотою її появи, яка спостерігається безпосередньо з досвіду. У XIX і XX ст. розвиток теорії ймовірностей як науки визначили *П’єр-Симон Лаплас*, *Симеон-Дені Пуассон*, *Пафнутій Чебишов*, *Андрій Марков*, *Олександр Ляпунов*, *Андрій Колмогоров* та ін.

Блез Паскаль (1623–1662) — французький філософ, письменник, фізик, математик.

П’єр Ферма (1601–1665) — французький юрист і математик, засновник аналітичної геометрії, теорії ймовірностей і теорії чисел.

Якоб Бернуллі (1655–1705) — швейцарський математик, основоположник теорій варіаційного числення і диференційних рівнянь; зробив значний внесок у розвиток теорії ймовірностей.

В Інституті математики НАНУ працює наукова школа з теорії ймовірностей, заснована професором *Борисом Гнєденком*. До складу цієї школи можна віднести *Володимира Королюка, Анатолія Скорохода, Володимира Михалевича, Йосипа Гіхмана, Михайла Ядренка, Миколу Портенка, Андрія Дороговцева, Валерія Булдигіна, Анатолія Турбіна, Миколу Працьовитого* та ін.

Борис Гнєденко (1912–1995) — математик, академік НАН України, директор Інституту математики НАН України, засновник київської наукової школи з теорії ймовірностей і математичної статистики.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про історію виникнення та розвитку теорії ймовірностей як науки. Підготуйте невелике повідомлення.

2. Чи доводилося вам використовувати ймовірності в своєму повсякденному житті для ухвалення певних рішень? Наведіть приклади таких ситуацій. Як саме ви використовували ймовірності в наведених ситуаціях і які рішення були ухвалені?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз $3(a-b)+2(2b-a+1)-3$ і знайдіть його значення, якщо $a=12{,}7$ і $b=7{,}3$.

2. В одному з фантастичних романів Велика Енциклопедія планети Муль-муль містила такі означення:
а) мулі — це продукт муління;
б) муління — це процес, що відбувається в мулінаріях;
в) мулінарії — це місце виробництва мулів.
Чи можна вважати цей ланцюжок означень коректним? Відповідь обґрунтуйте.

3. Щоб дістатися до роботи, пані Артеміда може використати один із трьох прямих автобусних маршрутів. Але автобуси мають великий інтервал руху, тому іноді вона їде з пересадкою, користуючись спочатку одним із чотирьох тролейбусних маршрутів, а потім одним із двох трамвайних маршрутів. Скількома різними способами пані Артеміда може дістатися до роботи?

4. У трикутнику ABC градусна міра кута B втричі менша від градусної міри кута C, а градусна міра кута A на $5°$ більша за градусну міру кута C. Знайдіть градусні міри кутів трикутника ABC.

5. Знайдіть у мережі Інтернет зображення: а) прямокутного паралелепіпеда; б) куба; в) трикутної піраміди; г) чотирикутної піраміди. Укажіть геометричні фігури, які належать поверхням цих геометричних тіл.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 8

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Що з наведеного НЕ стосується подання даних у зручному для сприйняття вигляді?

А	Б	В	Г
варіаційний ряд	полігон частот	медіана	гістограма

2. Найпоширеніше значення ознаки у вибірці — це...

А	Б	В	Г
мода	розмах	медіана	бісектриса

3. Яке з наведених чисел *може* бути ймовірністю деякої випадкової події?

А	Б	В	Г
3	0,3	–3	3,3

4. У класі навчаються 25 осіб. Яка ймовірність того, що хтось із них народився 32 березня?

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$

5. У слові МЕДИТАЦІЯ навмання обирають одну букву. Яка ймовірність того, що це буде дзвінка приголосна?

А	Б	В	Г	Д
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

6. Зі 100 покупців магазину, що відвідали його в найближчу неділю, 36 придбали морозиво. Знайдіть відносну частоту події A = «покупець магазину придбав морозиво в найближчу неділю».

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{36}{100}$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом

7. Троє менеджерів отримали премію: 1000 грн, 1500 грн і 800 грн. Знайдіть середній розмір премії, яку отримав кожен із менеджерів (у грн).

8. Симетричну монету підкинули 4 рази. Знайдіть імовірність того, що випало або 4 герби, або 4 цифри.

9. Нижче подано фрагмент публікації з інтернету. За цими даними визначте відносну частоту народження хлопчика в Україні в 2019 р. Відповідь округліть до сотих.
«У 2019 році в Україні народилось 310 605 малюків, серед яких 160 тис. 740 хлопчиків і 149 тис. 865 дівчаток. Найбільше новонароджених минулоріч з'явилося на світ у столиці країни — Києві, а саме 32 тис. 634 дитини».

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Марина провела опитування 20 своїх друзів стосовно того, в яку пору року вони народилися. Відповіді були такими: *Весна, Весна, Зима, Літо, Весна, Осінь, Осінь, Зима, Літо, Весна, Літо, Осінь, Осінь, Осінь, Зима, Літо, Весна, Зима, Зима, Осінь.*
Допоможіть Марині скласти варіаційний ряд за цими даними.

11. В одній із художніх студій провели опитування 9 її учасників і учасниць стосовно того, скільки художніх виставок вони відвідали минулого місяця. Результати були такими: 4, 2, 1, 5, 7, 5, 2, 3, 2. Для цієї вибірки знайдіть: а) моду, б) медіану; в) розмах; г) середнє арифметичне (округліть до десятих).

12. Дані щодо оцінок учнів і учениць 7-А класу на самостійній роботі з математики за 12-бальною шкалою подано у вигляді варіаційного ряду. За цими даними побудуйте: а) полігон частот; б) гістограму; в) кругову діаграму.

Оцінка	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Усього
Кількість осіб	2	4	3	5	4	6	2	1	1	28

13. Для варіаційного ряду, наведеного в завданні № 12, знайдіть: а) моду, б) середнє арифметичне; в) медіану. Обчисліть відносні частоти для кожної з подій: «особа одержала оцінку 4»; «особа одержала оцінку 5»; «особа одержала оцінку 12».

14. На уроці фізкультури двоє друзів змагалися, хто влучніше кидає баскетбольний м'яч у кошик. Миколка із 45 спроб влучив 33 рази, а Дмитрик із 40 спроб — 30 разів. Хто із хлопців влучніший? Чому?

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. На координатній площині позначено всі точки, абсциси й ординати яких дорівнюють одному з таких чисел: -2; -1; 1; 2; 5 (повторення допускаються). Навмання вибирається одна з таких точок. Знайдіть імовірність того, що вона буде лежати: 1) вище осі абсцис; 2) лівіше осі ординат; 3) у третій координатній чверті.

2. На координатній площині позначено всі точки, абсциси й ординати яких дорівнюють одному з таких чисел: -5; -3; 0; 3 (повторення допускаються). Навмання вибирається одна з таких точок. Знайдіть імовірність того, що вона буде лежати: 1) нижче осі абсцис; 2) правіше осі ординат; 3) на одній із координатних осей.

3. У коробці лежать 24 кульки. Серед них червоних кульок удвічі більше, ніж білих, а інші кульки сині. Ймовірність того, що навмання взята кулька буде білою, дорівнює $\frac{1}{8}$. Знайдіть імовірність того, що взята навмання кулька буде синьою.

4. У коробці лежать 32 олівці. Серед них червоних олівців утричі більше, ніж синіх, а інші олівці зелені. Ймовірність того, що навмання взятий олівець буде зеленим, дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайдіть імовірність того, що взятий навмання олівець буде червоним.

5. Населення міста Полтави становить близько 300 000 осіб. Знайдіть: 1) імовірність того, що довільно обраний мешканець Полтави відзначає свій день народження 29 лютого; 2) імовірну кількість мешканців Полтави, у яких день народження припадає на 29 лютого.

6. Із озера виловили 82 рибини, всіх їх позначили та знову відпустили в озеро. Через тиждень знову виконали вилов риби — цього разу виловили 50 рибин, серед яких виявилися дві позначені. Знайдіть: 1) імовірність виловити позначену рибину; 2) ймовірну кількість рибин в озері.

7. У формулі лінійної функції $y = ax + 5$ у якості коефіцієнта a використовують будь-яке із чисел: -5; -2; 0; 3; 5; 6. Знайдіть імовірність того, що графік функції: 1) не перетинає вісь ординат; 2) не перетинає вісь абсцис.

8. У формулі лінійної функції $y = ax + b$ в якості коефіцієнта a випадково вибирають будь-яке із чисел: 0; 2; 4; 6. Незалежно від цього в якості коефіцієнта b також вибирають будь-яке із чисел: 0; 2; 4; 6 — і будують графік прямої $y = ax + b$. Знайдіть ймовірність того, що ця пряма: 1) перетинає вісь ординат; 2) пройде через початок координат.

9. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 1000 рівних кубиків і помістили їх у торбину. Знайдіть імовірність того, що взятий навмання кубик буде мати: 1) три пофарбовані грані; 2) тільки дві пофарбовані грані; 3) тільки одну пофарбовану грань.

Статистичне спостереження (зведення) — statistical observation (summary)
Статистичний показник — statistical indicator
Варіаційний ряд — variational series
Середнє арифметичне — arithmetic mean
Достовірна (неможлива, випадкова) подія — reliable (impossible, random) event
Відносна частота — relative frequency

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 8

Статистичне дослідження

Статистичне спостереження

- опитування
- анкетування
- звітність

Статистичне зведення

- варіаційний ряд
- полігон частот
- гістограма
- кругова діаграма

Розрахунок статистичних показників для вибірки

- мода (Mo)
- медіана (Me)
- розмах (R)
- середнє арифметичне ($\overline{x}$)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Виявлення закономірностей, прогнозування, ухвалення рішень

Експеримент → Події →
- неможлива подія ($\varnothing$)
- достовірна подія (Ω)
- випадкова подія (A)

Імовірності подій

$P(\varnothing)=0$

$P(A)$

$P(\Omega)=1$

Класичний підхід

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

n — загальна кількість елементарних подій

k — кількість елементарних подій, що сприяють A

Статистичний підхід

$$P(A)\approx\omega(A)=\frac{k}{n}$$

$\omega(A)$ — відносна частота A

n — загальна кількість випробувань

k — кількість випробувань, у яких A відбулася

Підручник проєкту "Відкритий клас" видавництва "Ранок"

РОЗДІЛ 9.
РОЗГОРТКИ МНОГОГРАННИКІВ

CHAPTER 9.
NETS OF POLYHEDRONS

§ 31. Розгортки прямокутного паралелепіпеда, куба, правильної трикутної та чотирикутної пірамід. Виготовлення моделей



Нещодавно була на пошті, відправляла подрузі подарунок і помітила цікаву річ: при мені плоский шматок картону перетворився в пакувальну коробку, яка має форму прямокутного паралелепіпеда! Виявляється, просторові геометричні фігури можна скласти з плоских, поєднавши їх певним чином!





А я пам'ятаю, як ще в дитячому садку ми з дідусем Тарасом робили з паперу гральний кубик для настільної гри. До коробки з грою було вкладено картонку, на якій зображено *розгортку* такого кубика. Потрібно було вирізати цю розгортку, зігнути її по лініях і склеїти. Вийшов чудовий кубик, який ми потім використовували для гри. Але було б дуже цікаво дізнатися про такі перетворення плоских фігур у об'ємні більше!



Деякі просторові геометричні фігури називають *геометричними тілами*. Із курсу математики ви вже знаєте окремі з них (рис. 31.1):

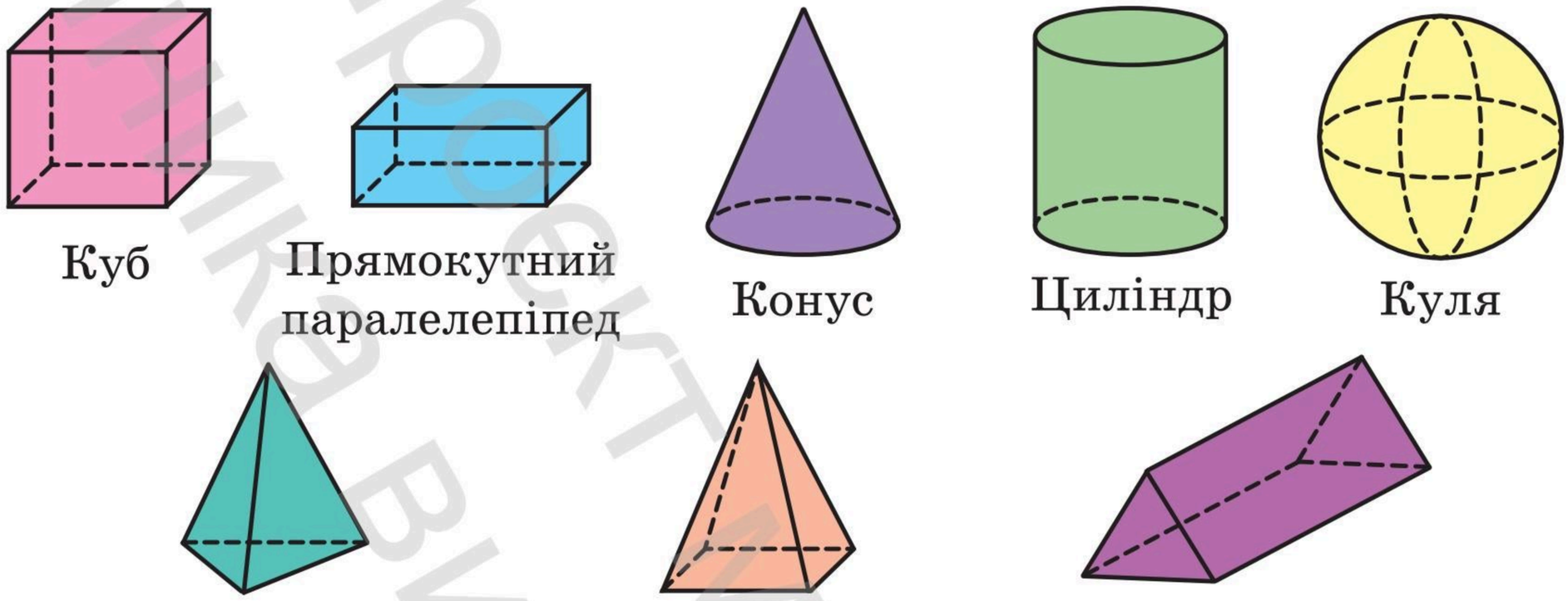


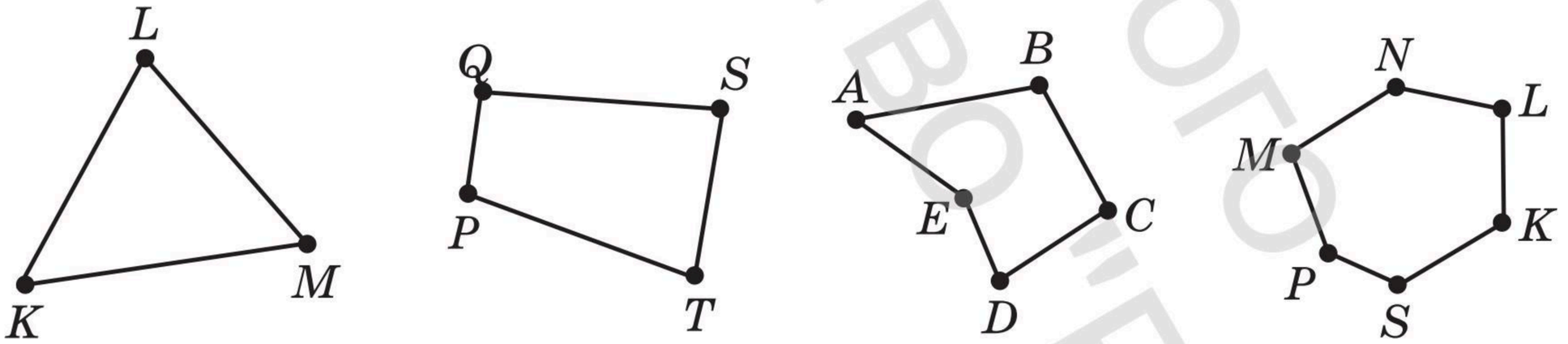
Рис. 31.1

Також ви вже знаєте:



Многокутником (або полігоном) називають замкнену ламану без самоперетинів, будь-які три сусідні вершини якої не лежать на одній прямій.

На рис. 31.2 наведено приклади многокутників.



Трикутник Чотирикутник П’ятикутник Шестикутник

Рис. 31.2

Також будемо вважати, що всі точки многокутника лежать в одній площині.

Множину всіх точок площини многокутника, що лежать усередині цього многокутника (разом із самим многокутником), природно назвати плоским многокутником.

Геометричне тіло, поверхня якого складається лише зі скінченної кількості плоских многокутників, називають многогранником або поліедром.

Наприклад, куб, прямокутний паралелепіпед, трикутна призма, трикутна та чотирикутна піраміди — це многогранники, а куля, циліндр і конус не є многогранниками.



Розглянемо зображений на рис. 31.3 прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 називають його *вершинами*, відрізки AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — *ребрами*, а плоскі многокутники $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1A_1A — *гранями*.

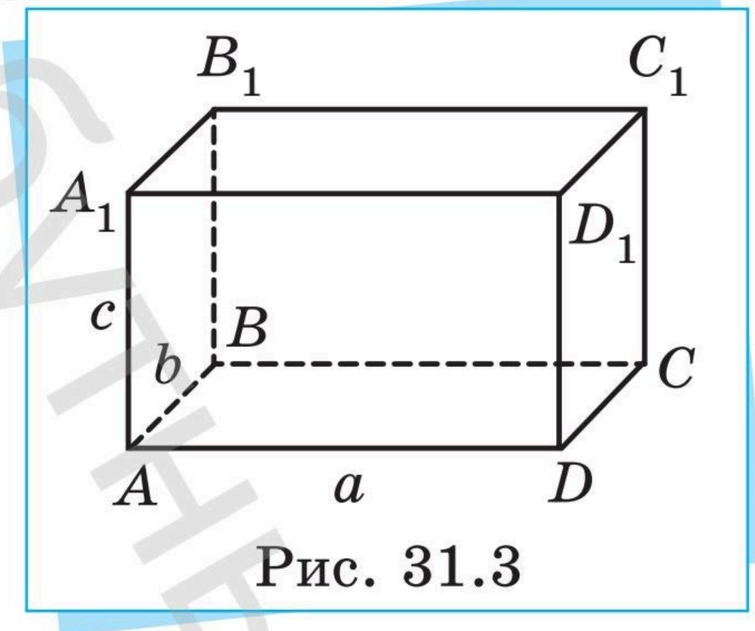


Рис. 31.3

Очевидно, що всі грані прямокутного паралелепіпеда є плоскими прямокутниками. Вони утворюють поверхню цього многогранника.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять із однієї вершини, називають вимірами цього прямокутного паралелепіпеда. Традиційно їх позначають буквами a, b і c.

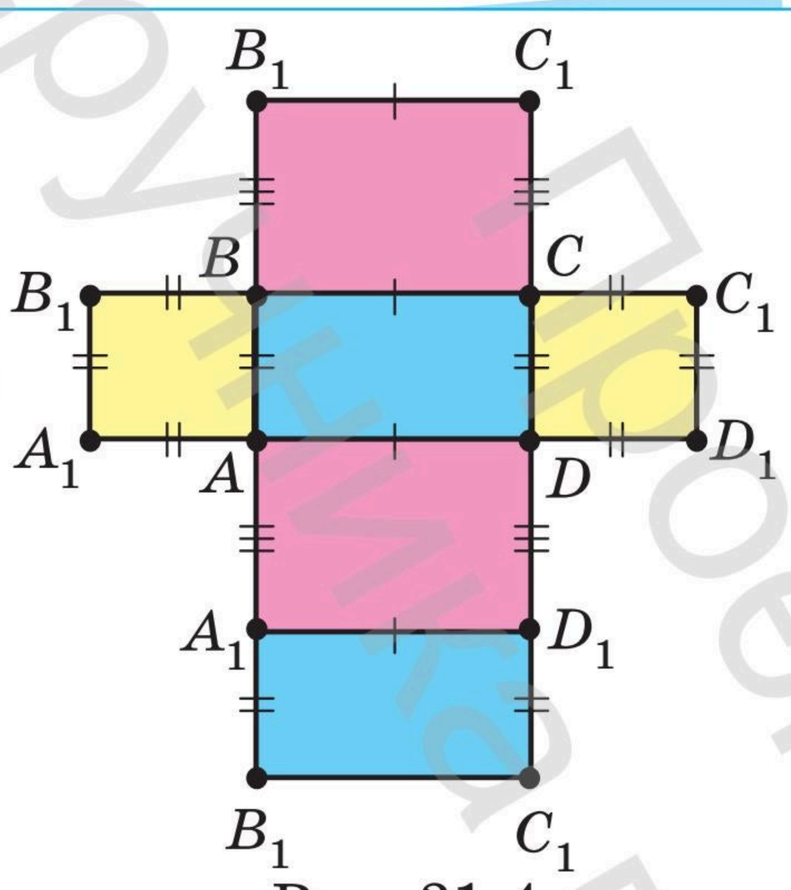


Рис. 31.4

Уявіть, що поверхню прямокутного паралелепіпеда «розрізали» вздовж ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 і B_1C_1, «розгорнули» та «поклали» на площину. Одержано плоску геометричну фігуру (рис. 31.4). Її називають розгорткою поверхні прямокутного паралелепіпеда.

Щоб утворити з розгортки прямокутний паралелепіпед, потрібно «зігнути» її вздовж ребер AB, BC, CD, DA і D_1A_1 та «склеїти» ті ребра, вздовж яких «розрізали» при побудові розгортки.



Як видно з рис. 31.4, розгортка прямокутного паралелепіпеда складається із 6 плоских прямокутників: двох зі сторонами a і b, двох зі сторонами b і c та двох зі сторонами a і c. Тому *площу поверхні прямокутного паралелепіпеда* обчислюють за формулою:

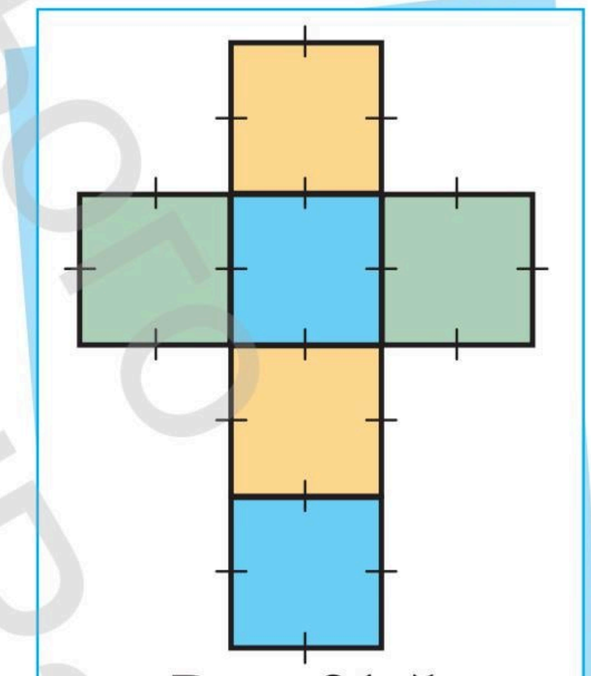
$$S = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$$

Також нагадаємо, що *об'єм прямокутного паралелепіпеда* обчислюють за формулою:

$$V = abc$$

Якщо виміри прямокутного паралелепіпеда рівні між собою, тобто $a = b = c$, то такий прямокутний паралелепіпед називають кубом.

Усі грані куба є плоскими квадратами зі стороною a. Тому розгортка куба буде складатися із 6 плоских квадратів (рис. 31.5).


Рис. 31.5

Площу поверхні куба та *об'єм куба* обчислюють відповідно за формулами:

$$S = 6a^2 \qquad V = a^3$$



Розгортки поверхонь можна будувати й для інших многогранників.

Розглянемо трикутну піраміду $SABC$ (рис. 31.6). Трикутник ABC називають основою піраміди, а точку S — вершиною піраміди. Відрізки AB, BC, CA називають ребрами основи, а відрізки SA, SB, SC — бічними ребрами. Ця піраміда має 4 грані — основу ABC та бічні грані SAB, SAC, SBC.

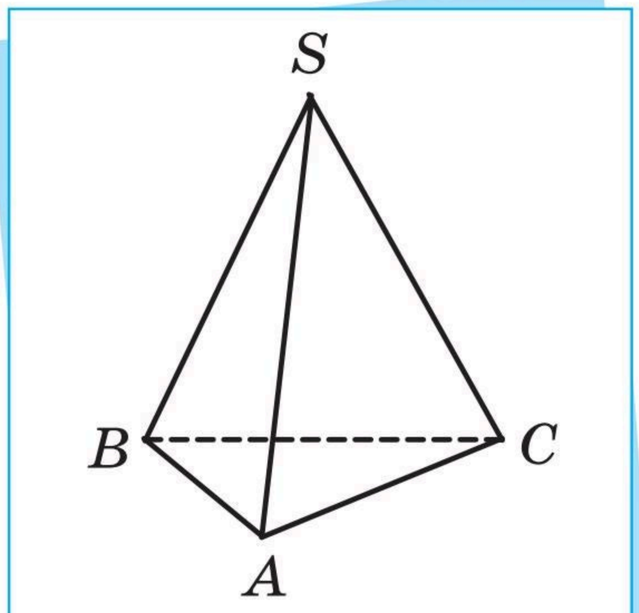


Рис. 31.6

Якщо в трикутній піраміді $SABC$ в основі лежить рівносторонній трикутник $(AB = BC = CA = a)$, а всі бічні ребра рівні $(SA = SB = SC = b)$, то таку трикутну піраміду називають правильною.

Щоб виготовити розгортку поверхні правильної трикутної піраміди, її поверхню «розрізають» уздовж бічних ребер SA, SB, SC і «розгортають» до плоскої геометричної фігури так, як показано на рис. 31.7.

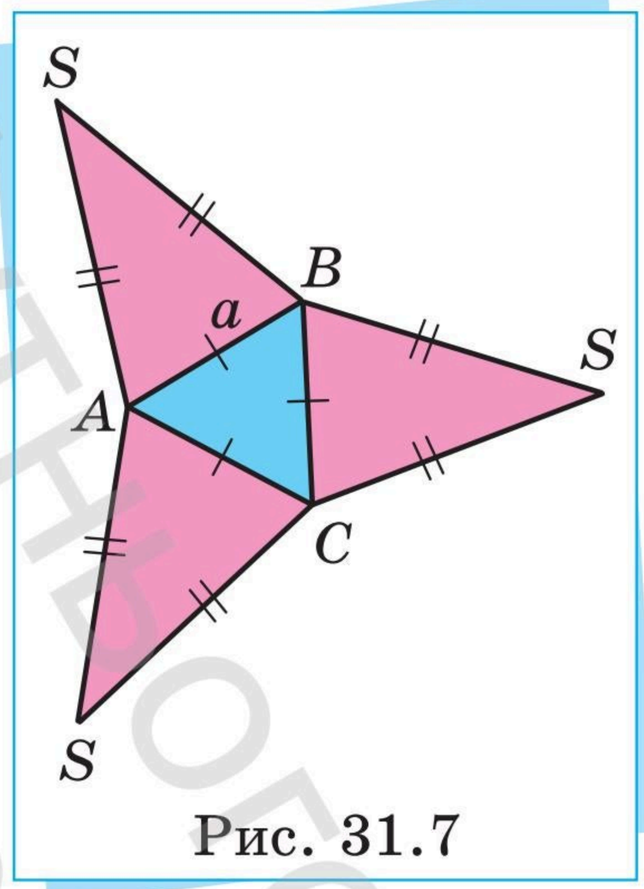


Рис. 31.7

Трикутник ABC при цьому є рівностороннім, а трикутники SAB, SAC, SBC — рівними рівнобічними трикутниками.

Щоб утворити з розгортки правильну трикутну піраміду, потрібно «зігнути» її вздовж ребер основи та «склеїти» вздовж бічних ребер.

Аналогічно будується й розгортка правильної чотирикутної піраміди: https://rnk.com.ua/106114





Зауважимо, що утворити розгортку поверхні многогранника можна не єдиним чином. Наприклад, для куба існує 19 різних розгорток! Одна з них вам уже відома, подамо для прикладу ще дві (рис. 31.8).

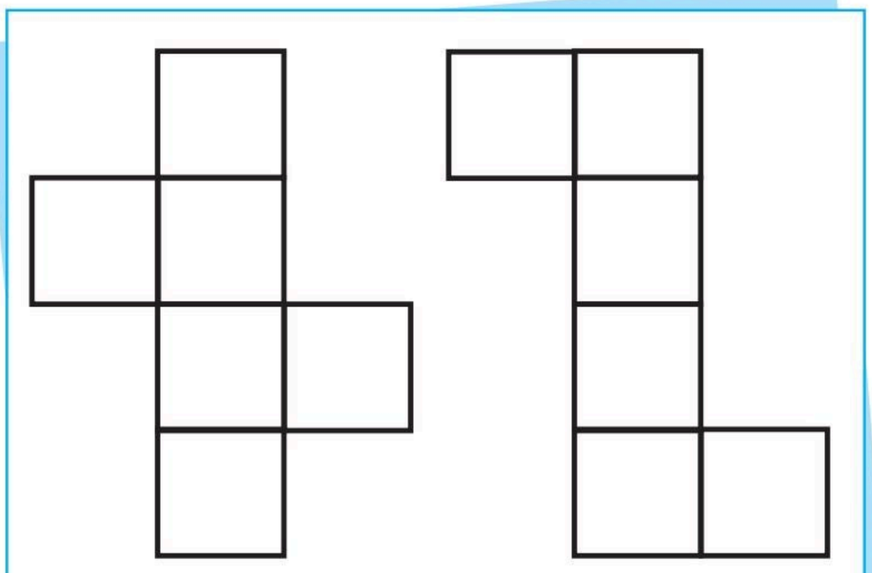


Рис. 31.8

Перевірте себе!

1. Наведіть приклади геометричних тіл.
2. Яке геометричне тіло називають многогранником? Наведіть приклади многогранників.
3. Зобразіть прямокутний паралелепіпед. Позначте його вершини буквами. Назвіть ребра та грані зображеного прямокутного паралелепіпеда.
4. Який прямокутний паралелепіпед називають кубом?
5. Наведіть формулу площі поверхні прямокутного паралелепіпеда; куба.
6. Наведіть формулу об'єму прямокутного паралелепіпеда; куба.
7. Як можна виготовити розгортку поверхні: а) прямокутного паралелепіпеда; б) куба; в) правильної трикутної піраміди; г) правильної чотирикутної піраміди?

Підручник розміщено на платформі "Інтерактивний підручник"

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено піраміду. Штриховими лініями зображено невидимі ребра піраміди. Запишіть назви однієї вершини, одного ребра й однієї грані цієї піраміди.

2. На рис. 2 зображено паралелепіпед. Штриховими лініями зображено невидимі ребра паралелепіпеда. Запишіть назви однієї вершини, одного ребра й однієї грані цього паралелепіпеда.

3. На рис. 3 зображено куб. Скільки вершин, ребер і граней має цей куб?

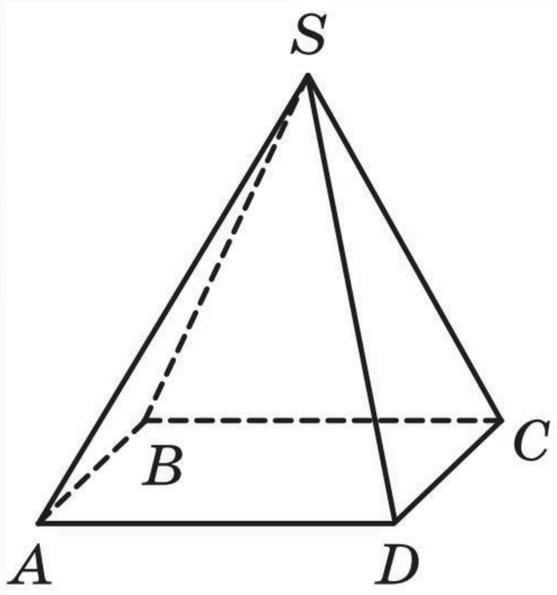


Рис. 1

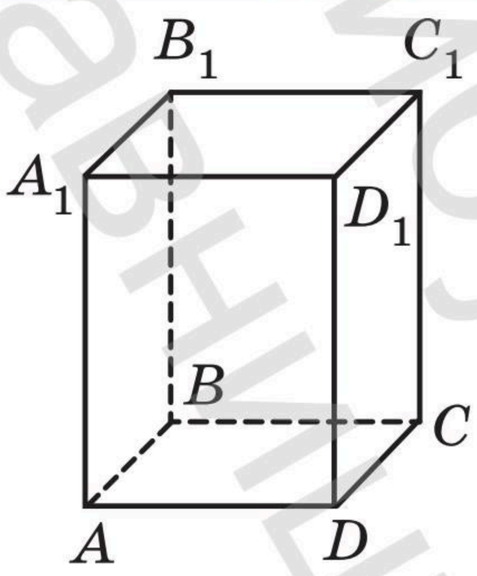
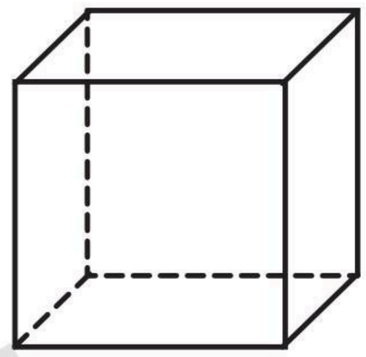
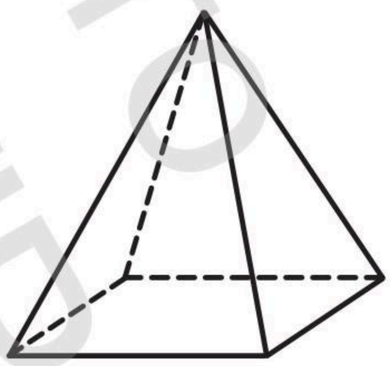


Рис. 2


Рис. 3

4. На рис. 4 зображено чотирикутну піраміду. Скільки вершин, ребер і граней має ця піраміда?


Рис. 4

5. Назвіть фігуру, розгортку якої зображено на рис. 5.

6. Назвіть фігуру, розгортку якої зображено на рис. 6.

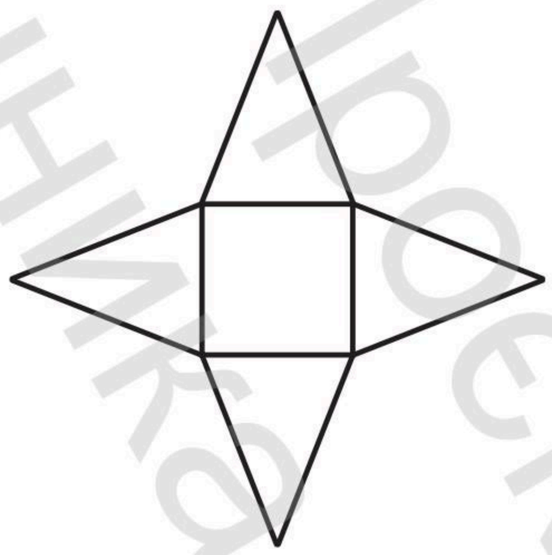


Рис. 5

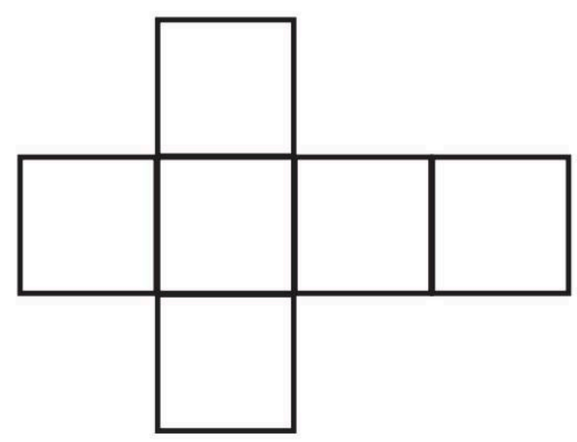


Рис. 6

7. На рис. 7 зображено розгортку многогранника. За даними рисунка з'ясуйте, який це многогранник, визначте його об'єм і площу поверхні.

8. На рис. 8 зображено розгортку многогранника. За даними рисунка з'ясуйте, який це многогранник, визначте його об'єм і площу поверхні.

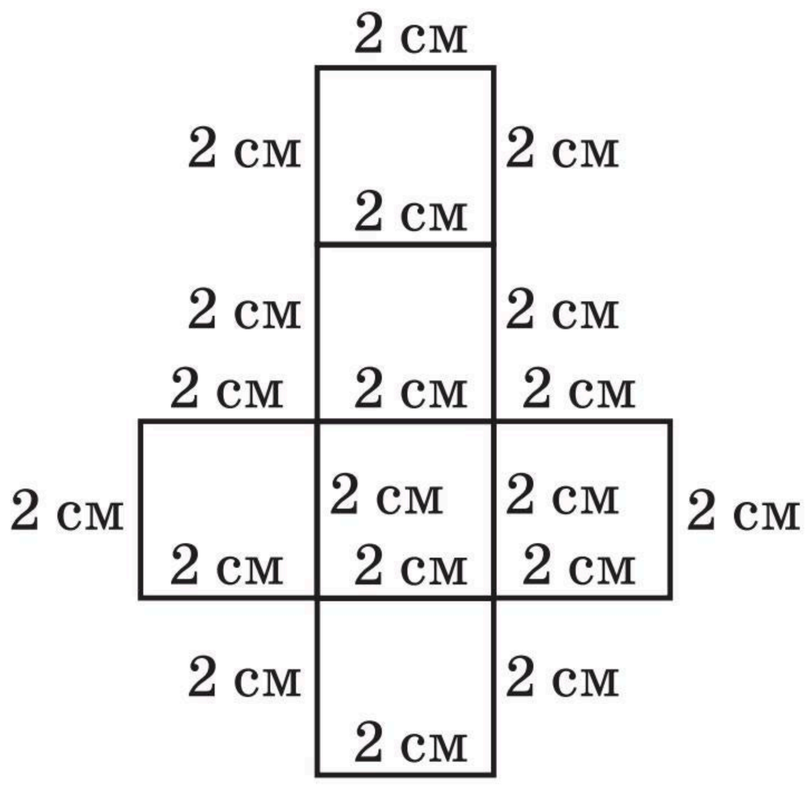


Рис. 7

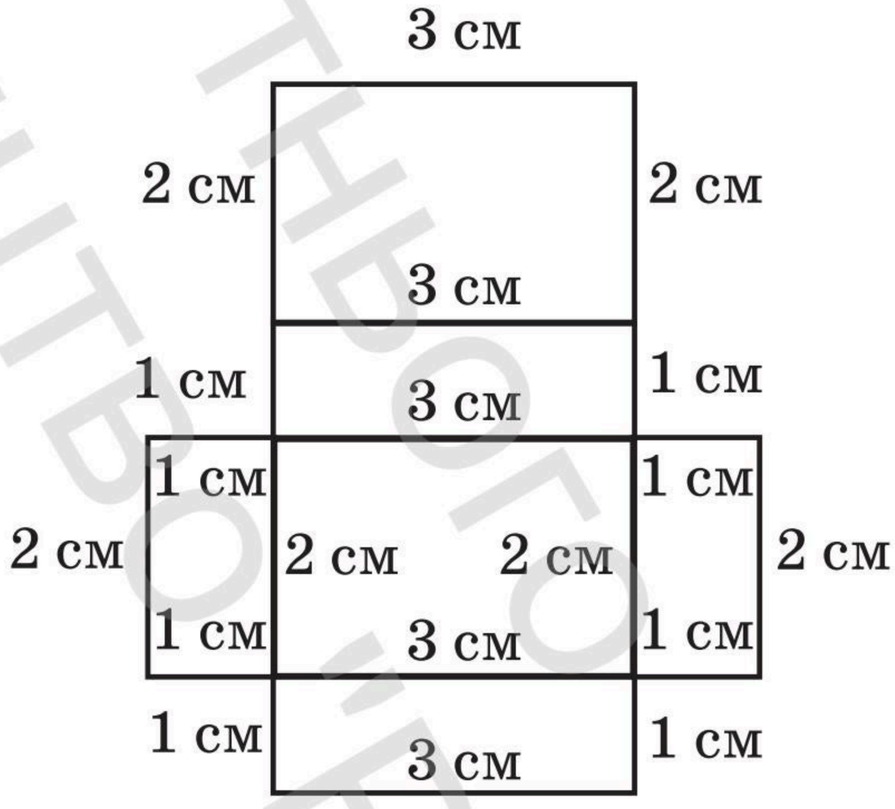


Рис. 8

Середній рівень

9. На рис. 9 подано розгортки многогранників. Яка із цих розгорток є розгорткою чотирикутної піраміди?

10. На рис. 9 подано розгортки многогранників. Яка із цих розгорток є розгорткою прямокутного паралелепіпеда?

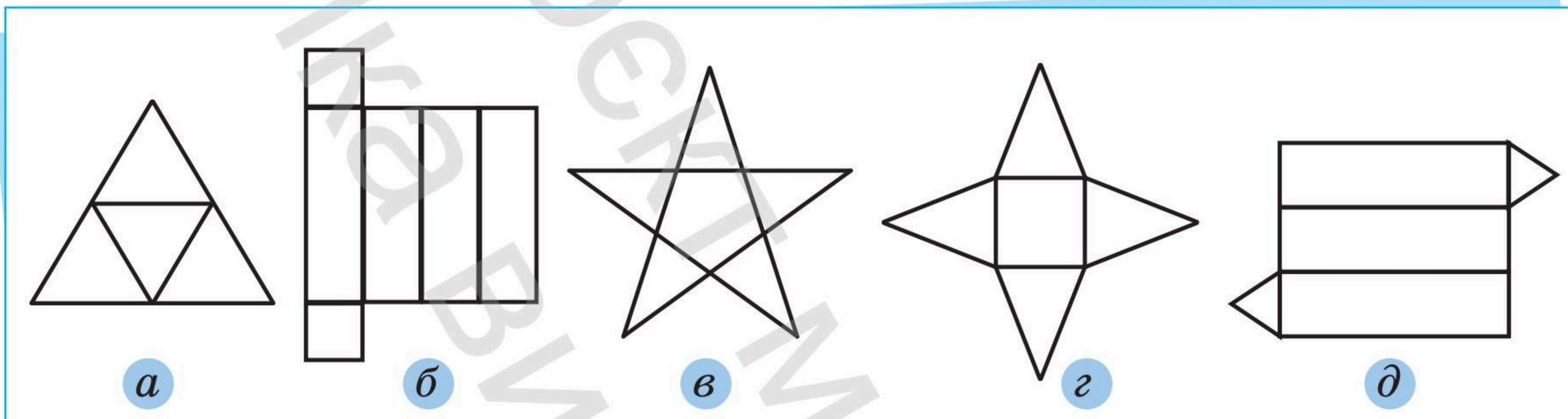


Рис. 9

11. На рис. 10 зображено основу трикутної піраміди й одну з її бічних граней. Перенесіть рисунок у зошит і побудуйте дві інші бічні грані так, щоб отримати розгортку заданої піраміди. За отриманою схемою зробіть модель трикутної піраміди.



Рис. 10

12. На рис. 11 зображено основа та дві бічні грані чотирикутної піраміди. Перенесіть рисунок у зошит і побудуйте дві інші грані так, щоб отримати розгортку заданої піраміди. За отриманою схемою зробіть модель чотирикутної піраміди.



Рис. 11

13. Подано куб (рис. 12). Побудуйте розгортку цього куба. Підпишіть вершини квадратів розгортки відповідно до граней поданого куба.

14. Із розгортки (рис. 13) склеїли прямокутний паралелепіпед. Побудуйте зображення паралелепіпеда та підпишіть його вершини відповідно до позначень на розгортці.

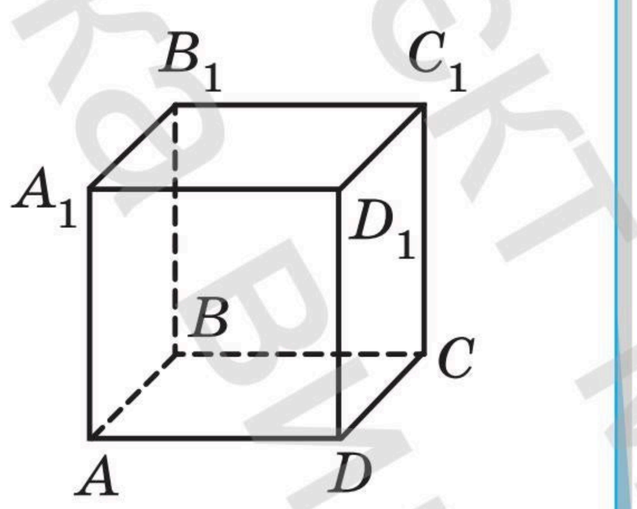


Рис. 12

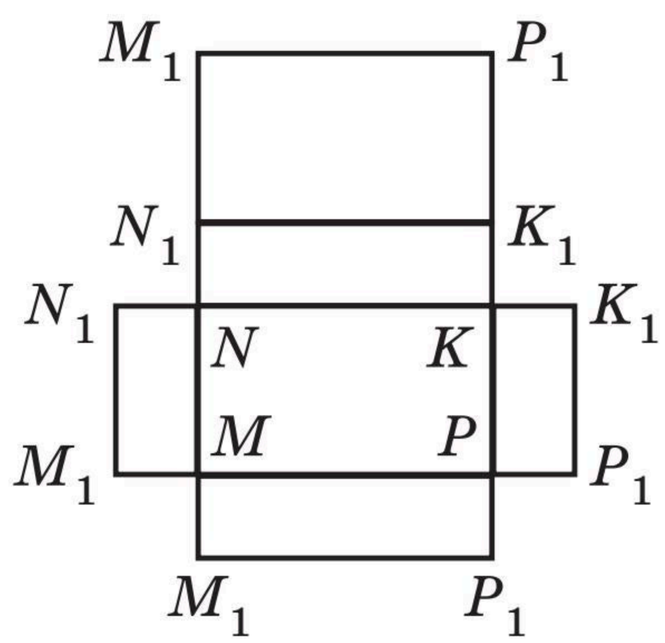


Рис. 13

15. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, довжина якого дорівнює 10 см, ширина — 8 см, висота — 5 см.

16. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда довжина якого дорівнює 12 см, ширина — 5 см, висота — 6 см.

17. Прямокутний паралелепіпед має виміри 4 см, 6 см і 8 см. Із яких многокутників складається розгортка цього геометричного тіла? Скільки цих многокутників? Який із них має найбільшу площу та яку саме?

18. Прямокутний паралелепіпед має виміри 3 см, 5 см і 3 см. Із яких многокутників складається розгортка цього геометричного тіла? Скільки цих многокутників? Який із них має найменшу площу та яку саме?

Підручник Проект майбутнього Для вчителів Видавництво "Ранок"

Достатній рівень

19. Дано коробку у формі куба з довжиною ребра 30 см і коробку у формі прямокутного паралелепіпеда з вимірами 30 см, 40 см, 20 см. Яка коробка має більший об'єм? На скільки?

20. Із заповненого вщерть акваріума у формі прямокутного паралелепіпеда з вимірами 20 см, 25 см і 15 см Степан перелив воду в інший акваріум, що має форму куба з довжиною ребра 20 см. Чи буде інший акваріум заповнений ущерть? Якщо ні, то скільки ще води (у $см^3$) в нього можна долити?

21. Марина хоче прикрасити сердечками подарункову коробку у формі прямокутного паралелепіпеда так, як показано на рис. 14 (на передній, верхній та правій боковій гранях). Побудуйте розгортку цієї коробки та позначте на ній сердечка так, щоб вони опинилися в потрібному місці.

22. Фірма «Зірка» розміщує логотип на коробках зі своєю продукцією так, як показано на рис. 15 (на верхній, правій і лівій гранях). Побудуйте розгортку цієї коробки та позначте на ній логотипи так, щоб вони опинилися в потрібному місці.

23. Світлана вирішила декорувати коробку тканиною та мереживом так, як показано на рис. 16. Визначте, скільки квадратних сантиметрів тканини та скільки сантиметрів мережива знадобиться Світлані, якщо довжина коробки 30 см, ширина — 15 см, висота — 10 см.

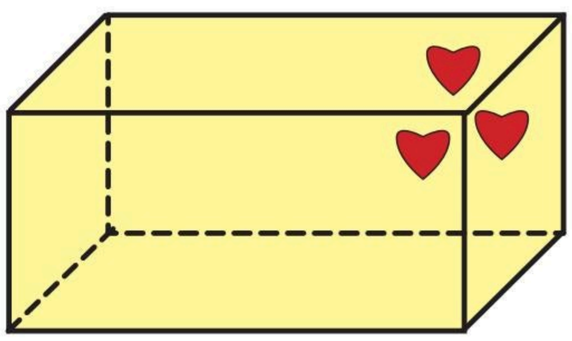


Рис. 14

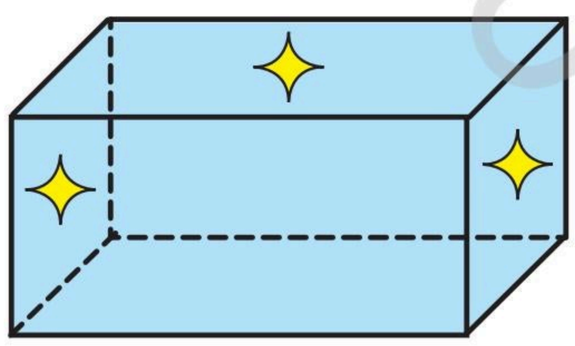


Рис. 15



Рис. 16

24. Дмитрик вирішив покрити лаком в один шар бабусину скриню у формі прямокутного паралелепіпеда, довжина якого 80 см, ширина — 40 см, висота — 50 см. Скільки лаку знадобиться Дмитрику, якщо витрати лаку складають 120 г на 1 квадратний метр поверхні. Відповідь округліть до цілих.

25. Маємо прямокутний паралелепіпед із вимірами a см, b см, c см. Як зміниться об'єм цього паралелепіпеда, якщо його довжину збільшити вдвічі, а ширину зменшити в 4 рази?

26. Маємо прямокутний паралелепіпед із вимірами a см, b см, c см. Як зміниться об'єм цього паралелепіпеда, якщо його висоту зменшити в 6 разів, а довжину збільшити вдвічі?

Високий рівень

27. Поясніть, чому зображений на рис. 17 плоский многокутник не може бути розгорткою прямокутного паралелепіпеда.

28. Поясніть, чому зображений на рис. 18 плоский многокутник не може бути розгорткою прямокутного паралелепіпеда.

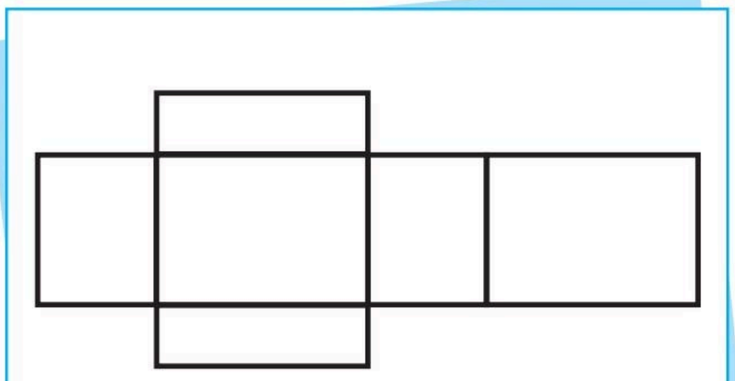


Рис. 17

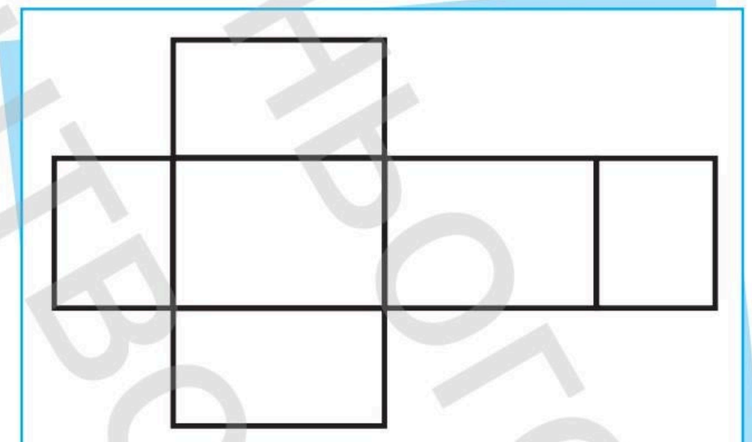


Рис. 18

29. Подумки згорніть розгортку в куб і вкажіть, яка грань буде верхньою, якщо нижня грань зафарбована (рис. 19). Перемалюйте та виріжте розгортку, згорніть її в куб і перевірте свою відповідь.

Підручник видавництва "Ранок"

30. Подумки згорніть розгортку в куб і вкажіть, яка грань буде верхньою, якщо нижня грань зафарбована (рис. 20). Перемалюйте та виріжте відповідну розгортку, згорніть її в куб і перевірте свою відповідь.

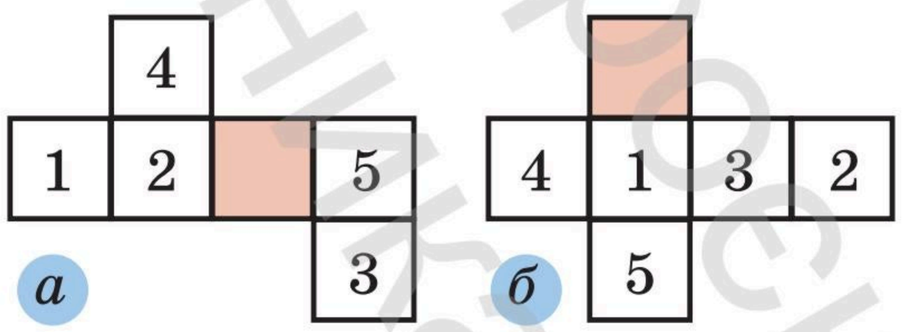


Рис. 19

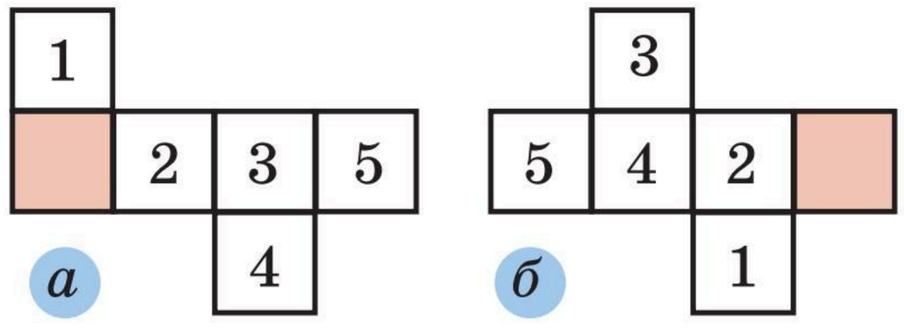


Рис. 20

31. З'ясуйте, чи вистачить дроту довжиною 1 м, щоб зробити каркасну модель прямокутного паралелепіпеда з вимірами 7 см, 9 см, 14 см. Відповідь поясніть.

32. З'ясуйте, чи вистачить прямокутного листа фанери з розмірами 26 см і 16 см для виготовлення коробки (з кришкою) у формі прямокутного паралелепіпеда з вимірами 6 см, 8 см, 10 см. Якщо вистачить, то запропонуйте, як можна розрізати фанеру на деталі.

33. Спираючись на основну властивість площини в просторі: *через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну,* — з'ясуйте, яке найменше число вершин, ребер і граней може бути у многогранника. Поясніть свою відповідь.

34. На поверхні прозорого куба (рис. 21) у вершині A сидить муха, а у вершині C_1 — павук. Знайдіть найкоротший шлях по поверхні куба від павука до мухи.

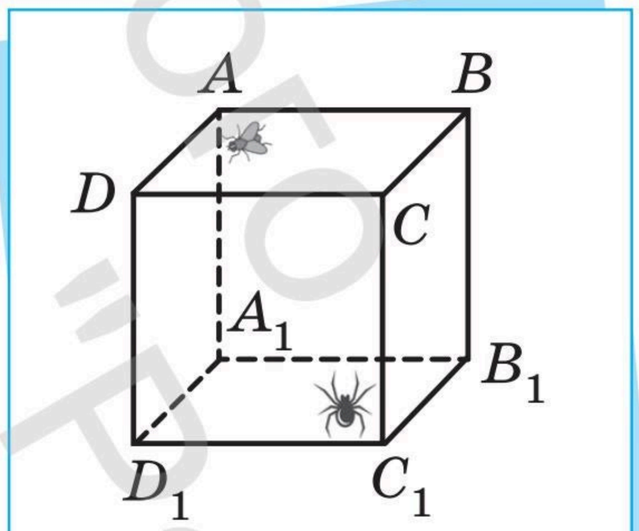


Рис. 21

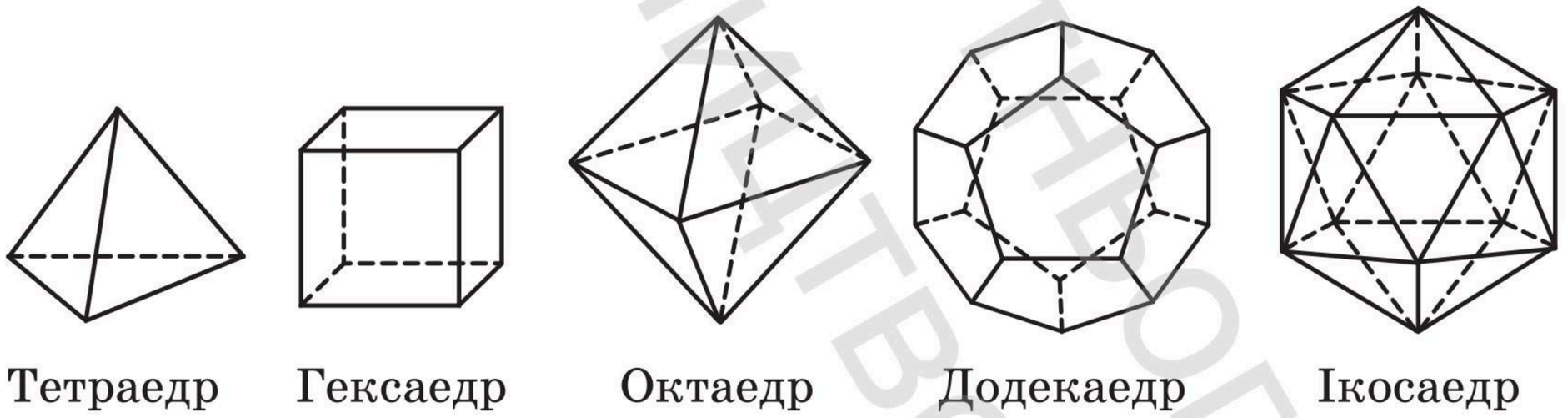


Цікавинки від дідуся Тараса

Серед усіх відомих многогранників особливу роль відіграють *правильні многогранники*. Усі грані таких геометричних тіл є *правильними многокутниками*, тобто многокутниками, сторони й кути яких рівні. Також усі вершини правильного многогранника рівновіддалені від деякої точки простору, яку називають її *центром*.

Можна довести, що правильних многогранників існує лише 5:

- *тетраедр* (поверхня складається з 4 однакових рівносторонніх трикутників);
- *гексаедр*, або *куб* (поверхня складається з 6 однакових квадратів);
- *октаедр* (поверхня складається з 8 однакових рівносторонніх трикутників);
- *додекаедр* (поверхня складається з 12 однакових правильних п'ятикутників);
- *ікосаедр* (поверхня складається з 20 однакових рівносторонніх трикутників).



Тетраедр Гексаедр Октаедр Додекаедр Ікосаедр

Правильні многогранники також часто називають *платоновими тілами* на честь давньогрецького мислителя *Платона*, який використовував їх у своїй філософії для опису чотирьох основних стихій — землі, води, повітря, вогню. Наприклад, земля у Платона була пов'язана з кубом, повітря — з октаедром,

вода — з ікосаедром, а вогонь — з тетраедром. Про додекаедр Платон зауважує, що «Бог використовував його для розташування сузір'їв на всьому небі». Нині відомі численні застосування правильних многогранників у різних галузях науки — астрономії, фізиці, хімії тощо.

Платон — давньогрецький мислитель (V ст. до н. е.), засновник філософської школи, відомої як Академія Платона; один із основоположників європейської філософії.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся більше про правильні многогранники, їх властивості та застосування. Підготуйте невелике повідомлення.

2. Чи доводилося вам у своєму повсякденному житті мати справу з об'єктами, що мають форму многогранників, зокрема, правильних? Наведіть приклади. Яким чином ви використовували ці об'єкти?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Функція $y = f(x)$ задана таблицею. Знайдіть: а) $f(-2)$; б) значення аргументу, за яких $f(x) = -2$; в) найбільше значення функції; г) найменше значення функції.

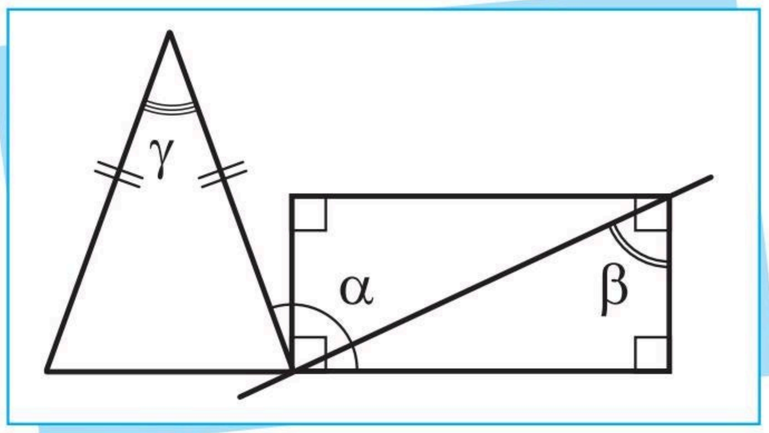
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-1	-2	-5	-2	-1	0

2. Розв'яжіть рівняння.

а) $2x + 4(x-1) = 5x + 3$; б) $\frac{2x-9}{3} + x = \frac{x}{6}$.

3. 3 кг яблук і 4 кг слив коштують разом 360 грн, а 4 кг яблук дешевше від 3 кг слив на 20 грн. Знайдіть вартість 1 кг яблук і 1 кг слив.

4. За даними, наведеними на рисунку, знайдіть градусну міру кута α, якщо $\beta = 65°$, а $\gamma = 40°$ (основа трикутника й сторона прямокутника лежать на одній прямій).



5. Для проведення миттєвої благодійної лотереї книжкова крамниця виготовила 400 лотерейних білетів, серед яких 1 білет із виграшем сертифіката на 1000 грн, 2 білети — на 500 грн, 5 — на 200 грн і 12 — на 100 грн. Перший учасник навмання обирає один із білетів. Знайдіть імовірність того, що він: а) виграє сертифікат на суму 1000 грн; б) сертифікат на суму, більшу за 100 грн; в) не виграє взагалі. Відповідь запишіть у відсотках.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 9

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. На рис. 1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Який із наведених відрізків є *ребром* цього куба?

А	Б	В	Г
AC	B_1D_1	A_1C	B_1B

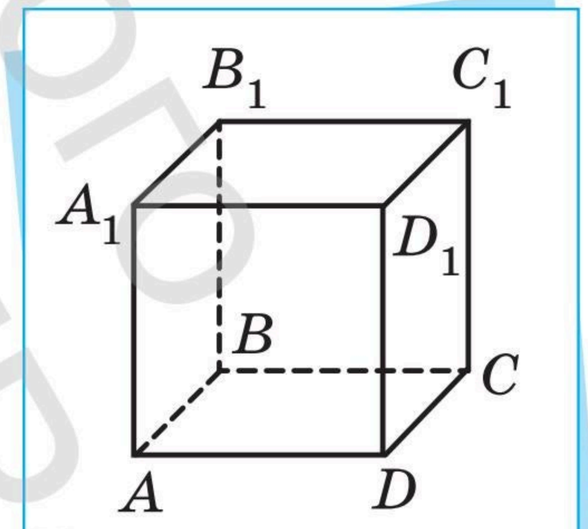


Рис. 1

2. За рис. 1 визначте, який із наведених чотирикутників НЕ є *гранню* куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

А	Б	В	Г
A_1ACC_1	B_1C_1CB	BB_1A_1A	C_1CDD_1

3. На рис. 2 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Що з наведеного є *бічною гранню* цієї піраміди?

А	Точка S
Б	Відрізок SB
В	Трикутник SAC
Г	Квадрат $ABCD$
Д	Трикутник ABC

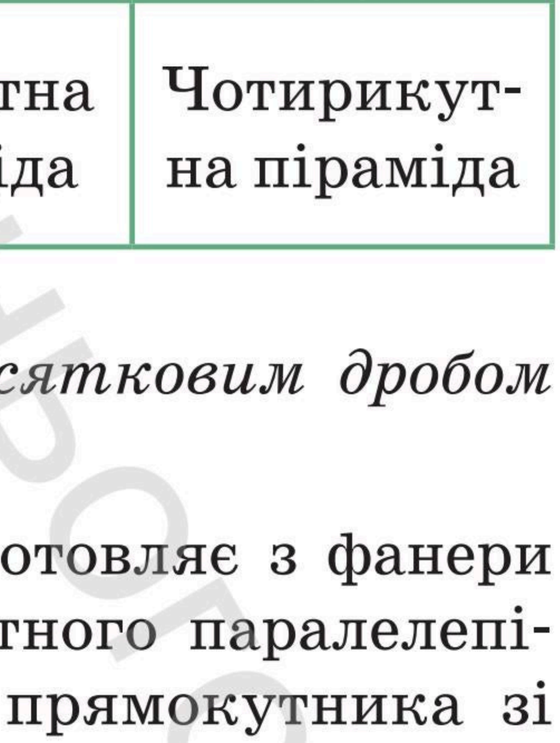


Рис. 2

4. Відомо, що многогранник має 5 граней і 5 вершин. Укажіть многогранник, який задовольняє ці умови.

А	Б	В	Г	Д
Прямокутний паралелепіпед	Куб	Трикутна призма	Трикутна піраміда	Чотирикутна піраміда

У завданнях 5–6 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

5. У знімальному павільйоні декоратор виготовляє з фанери макет кімнати, яка має форму прямокутного паралелепіпеда. Підлога цієї кімнати має форму прямокутника зі сторонами 3,5 м і 6 м, а висота стін дорівнює 2,4 м. Для фарбування фанери декоратору потрібно визначити площу поверхні цієї кімнати (у $м^2$). Допоможіть йому це зробити.

6. За умовою попередньої задачі. Відомо, що за санітарними нормами на 1 людину під час зйомок має припадати не

менше 5 м^3 повітря. Визначте максимальну кількість людей, які можуть бути у цій кімнаті під час зйомок згідно із санітарними нормами.

Завдання 7–10 розв'яжіть із повним поясненням.

7. Прямокутний паралелепіпед має виміри 6 см, 8 см, 9 см. Укажіть плоскі многокутники, з яких складається розгортка цього геометричного тіла, та їх розміри.

8. Виготовте паперову модель прямокутного паралелепіпеда за даними завдання № 7.

9. Виготовте картонну модель грального кубика для настільної гри, зображеного на рис. 3.



Рис. 3

10. Виготовте з кольорового картону триярусну вежу. Перший ярус вежі — прямокутний паралелепіпед, одна з граней якого є квадратом зі стороною 6 см. Другий ярус вежі — куб, ребро якого дорівнює 6 см. Третій ярус вежі — правильна чотирикутна піраміда, основа якої є квадратом зі стороною 6 см.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. На рис. 1 зображено розгортку прямокутного паралелепіпеда. Вкажіть, які точки суміщаються з точками A, D, N під час склеювання моделі паралелепіпеда.

2. На рис. 1 зображено розгортку прямокутного паралелепіпеда. Вкажіть, які точки суміщаються з точками T, O, K під час склеювання моделі паралелепіпеда.

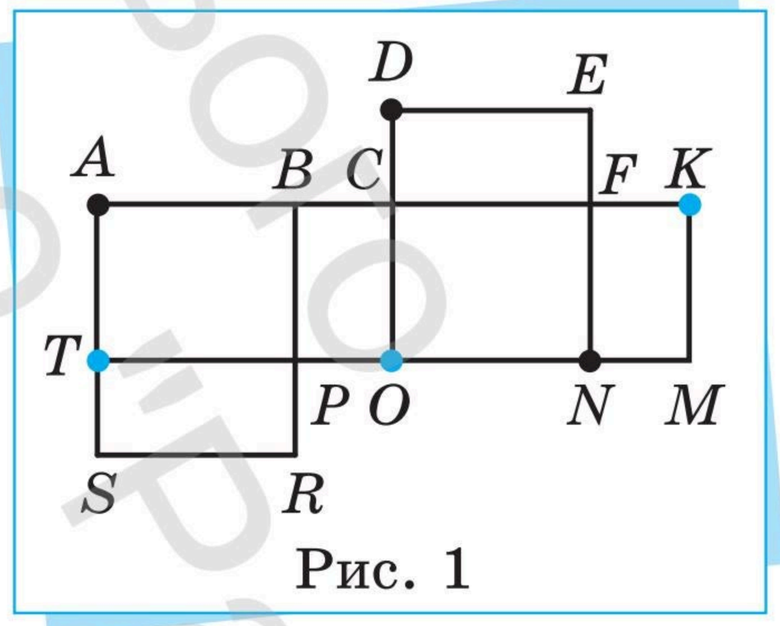


Рис. 1

3. З’ясуйте, на виготовлення якого з акваріумів, зображених на рис. 2, піде більше скла.

4. Акваріуми, зображені на рис. 2, заповнені водою так, що рівень води в першому акваріумі нижче від його верхнього краю на 10 см, а рівень води в другому — на 5 см. Знайдіть, в якому акваріумі більше води.

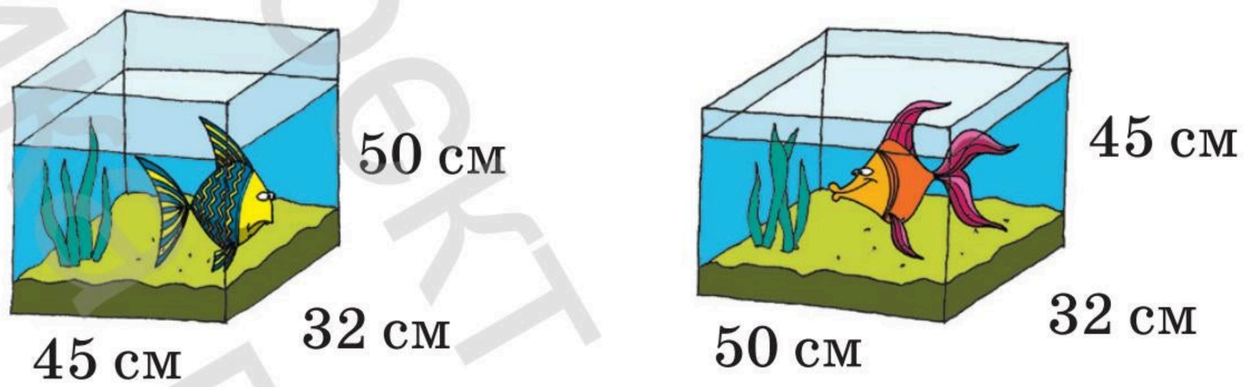


Рис. 2

5. Укажіть, які заготовки, зображені на рис. 3, НЕ можуть бути розгортками куба. Поясніть відповідь.

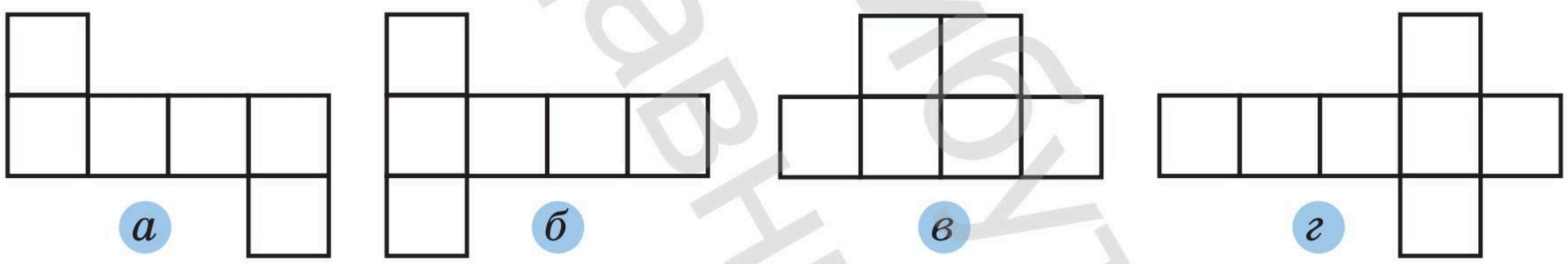


Рис. 3

6. Укажіть, які заготовки, зображені на рис. 4, НЕ можуть бути розгортками піраміди. Поясніть відповідь.

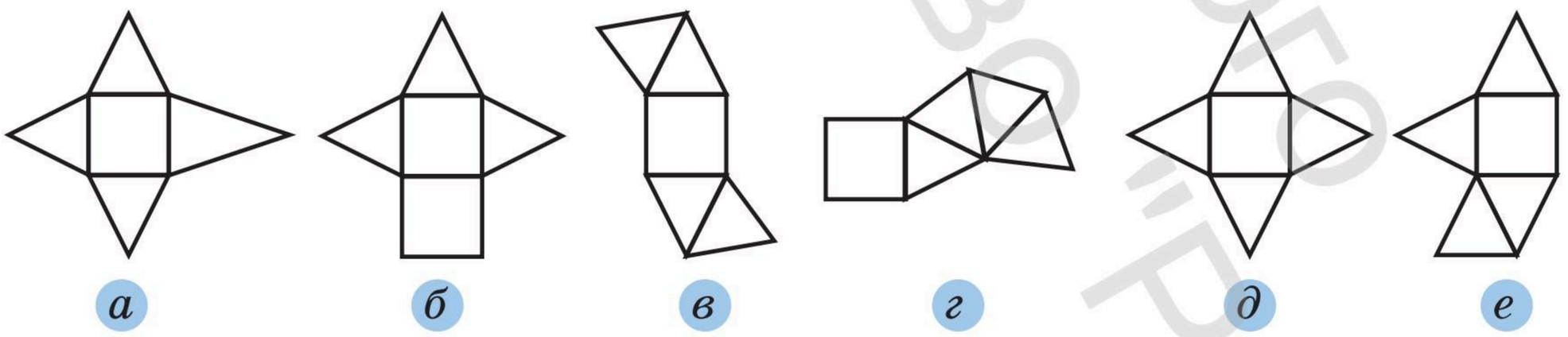


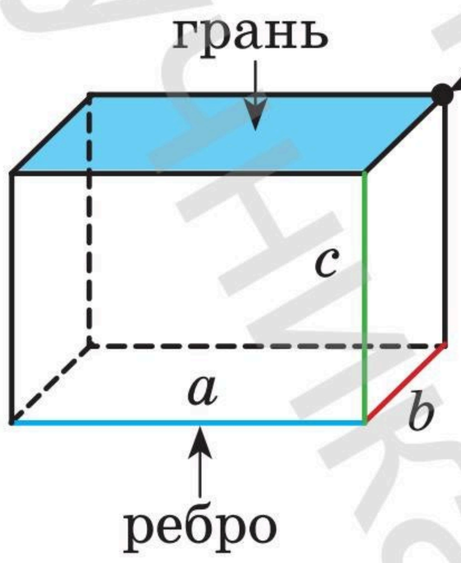
Рис. 4

Прямокутний паралелепіпед — rectangular parallelepiped
Куб — cube
Трикутна піраміда (тетраедр) — triangular pyramid (tetrahedron)
Чотирикутна піраміда — quadrangular pyramid
Конус — cone
Циліндр — cylinder
Куля — ball

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 9



Прямокутний паралелепіпед

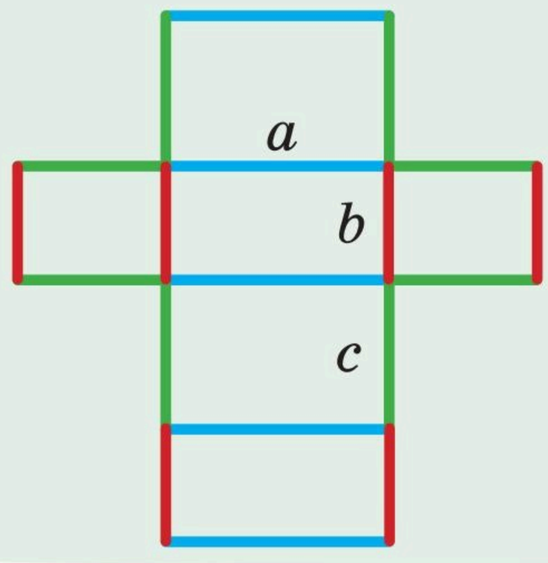


a, b, c — виміри

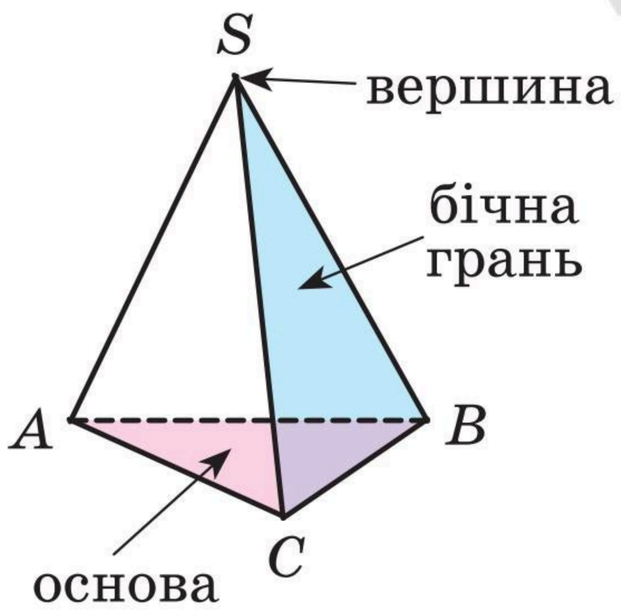
$$S = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Розгортка



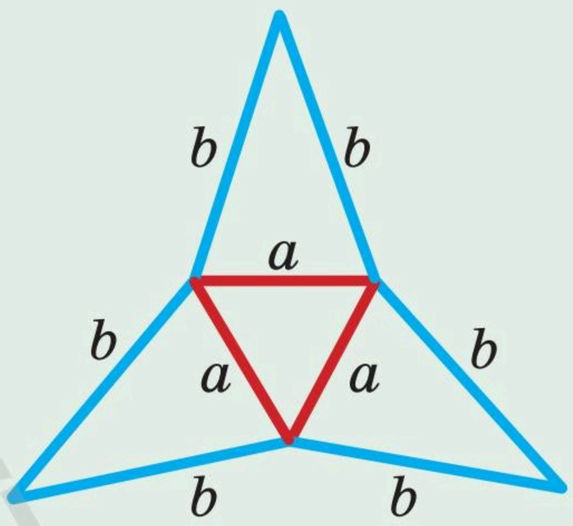
Правильна трикутна піраміда



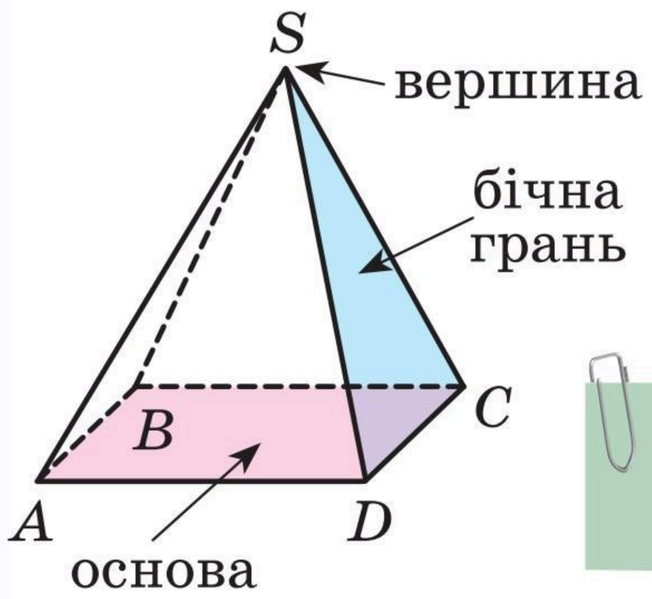
$SA = SB = SC = b$
бічні ребра

$AB = AC = BC = a$
ребра основи

Розгортка



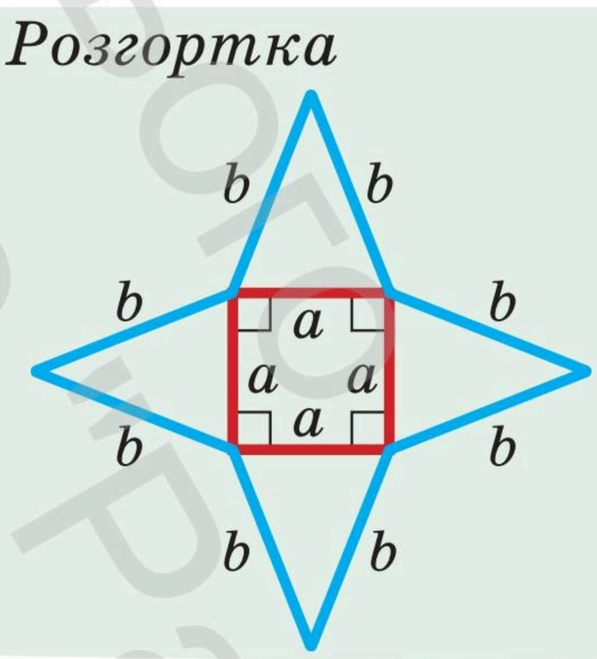
Правильна чотирикутна піраміда



$ABCD$ — квадрат зі стороною a

$SA = SB = SC = SD = b$
бічні ребра

Розгортка



ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Проєкт до інтегрованого модуля 3. Многогранники в побуті



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкт за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя/вчительки об'єднайтеся в групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть разом з учителем/учителькою тематику можливого актуального та цікавого для кожної групи дослідження щодо використання многогранників у побуті (предмети у формі прямокутного паралелепіпеда, предмети у формі піраміди), складіть план дослідження та спрогнозуйте можливі результати.

Етап 3. Проведіть дослідження щодо використання многогранників у побуті у формі спостереження, пошуку ілюстративних матеріалів, аналізу історії розвитку предметів побуту людини.

Етап 4. Спробуйте проаналізувати, чому обрані вами для дослідження предмети побуту мають саме таку форму, чи зручно буде користуватися ними, якщо змінити їх форму.

Етап 5. Оформіть результати свого дослідження у вигляді стендової доповіді, презентації, відеоролика або театралізованого виступу.

Етап 6. Представте результати своєї роботи над проєктом учням і ученицям класу на уроці математики, історії, мистецтва, бінарному уроці тощо.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку у своїй групі (якщо група складалася з однієї особи, проведіть саморефлексію), а потім з учителем/учителькою та з учнями й ученицями свого класу. Визначте позитивні й проблемні моменти роботи групи, а також напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності щодо виконання та представлення проєктів.

Проєкт до інтегрованого модуля 4. Побудова статистичних діаграм і графіків за допомогою комп'ютераі



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкт за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя/вчительки сформуйте групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть разом з учителем/учителькою тематику можливого актуального і цікавого для кожної групи статистичного дослідження, кроки та способи його проведення.

Етап 3. Проведіть статистичне спостереження у формі очного чи онлайн опитування, розбийте дані для відповідей на кожне з питань на групи та подайте їх у вигляді варіаційних рядів.

Етап 4. Для кожного варіаційного ряду доберіть доречні статистичну діаграму та графік, а також доречний програмний засіб, який дозволить їх побудувати.

Етап 5. Виконайте побудову статистичних діаграм і графіків та створіть презентацію для представлення результатів свого статистичного дослідження.

Етап 6. Представте результати свого статистичного дослідження учням і ученицям свого класу на уроці математики, інформатики, бінарному уроці тощо.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку у своїй групі (якщо група складалась з однієї особи, проведіть саморефлексію), а потім з учителем/учителькою та з учнями й ученицями свого класу. Визначте позитивні та проблемні моменти роботи групи, а також напрямки подальшого вдосконалення своєї діяльності.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ КУРСУ 7 КЛАСУ

Початковий рівень

1. Знайдіть значення виразу $5 \cdot m - 8$, якщо: а) $m = 7$; б) $m = -2$; в) $m = 1{,}3$; г) $m = 0$.

2. Один кілограм яблук коштує 23 грн. Складіть вираз, за допомогою якого можна обчислити вартість (у грн) x кг яблук. Знайдіть значення виразу при а) $x = 2$; б) $x = 1{,}5$.

3. Обчисліть: а) 2^5; б) 3^4; в) 1^5; г) $(-2)^4$; д) $(0{,}1)^3$.

4. Висота гори Говерла — 2061 м над рівнем моря. Запишіть висоту Говерли в метрах у стандартному вигляді.

5. Зведіть мономи до стандартного вигляду та вкажіть степінь кожного з них.

а) $5 \cdot 3 \cdot a$; б) $x \cdot b \cdot x$; в) $4 \cdot m^4 \cdot m^2 \cdot b^7$; г) $3 \cdot n^4 \cdot 8 \cdot n^5$.

6. Виконайте піднесення монома до степеня.

а) $(4a)^3$; б) $(cd^3)^2$; в) $(3b^3x)^4$.

7. Зведіть поліном до стандартного вигляду.

а) $5b - 6 + 1 + 8b$; в) $4y^2 - 3y + 3{,}1y^2 - 21$;

б) $4x^2 - 9 - 3x + 3 + 5x$; г) $2a^3 + 4a - 5a^3$.

8. Перший принтер друкує a фотографій за хвилину, другий принтер — b фотографій за хвилину. Складіть вираз, який показує, скільки всього буде надруковано фотографій за 10 хв роботи першого принтера та за 15 хв роботи другого. Чи є одержаний вираз поліномом? Якщо так, то якого він степеня?

9. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $7a^2-2a$;
в) $12ab-3bc$;
б) $5b^2+10b$;
г) $4c^4-14c^2$.

10. Помножте поліноми.

а) $(a-3)\cdot(b+5)$;
в) $(5+4c)\cdot(3a+7)$;
б) $(1-4x)\cdot(2x-7)$;
г) $(5-d)\cdot(4+2d)$.

11. Розкладіть на множники.

а) 5^2-a^2;
в) $x^2+2xy+y^2$;
б) c^2-7^2;
г) 3^2-6b+b^2.

12. Розкрийте дужки.

а) $(2-x)(2+x)$;
в) $(k-n)(k+n)$;
б) $(3+a)^2$;
г) $(n+5p)^2$.

13. Знайдіть координати точок, зображених на рис. 1. Укажіть із них ті, що розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

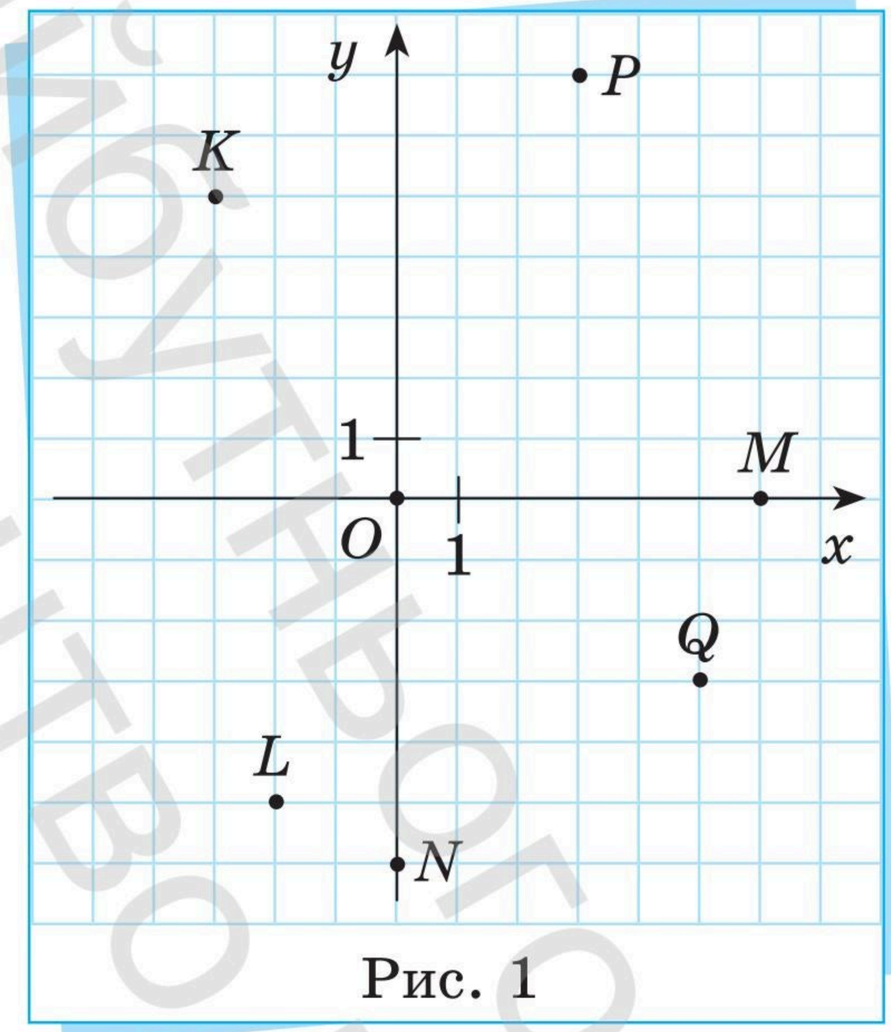


Рис. 1

14. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте точки: $A(-2;4)$, $B(-3;-5)$, $C(2;-4)$, $D(0;6)$, $E(-5;0)$. Укажіть із них ті, що розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

15. Функцію $y=f(x)$ задано таблицею. За цією таблицею знайдіть: а) область визначення $D(y)$; б) множину значень

$E(y)$; в) $f(2)$; г) $f(8)$; д) значення аргументу x, за якого значення функції $y=9$.

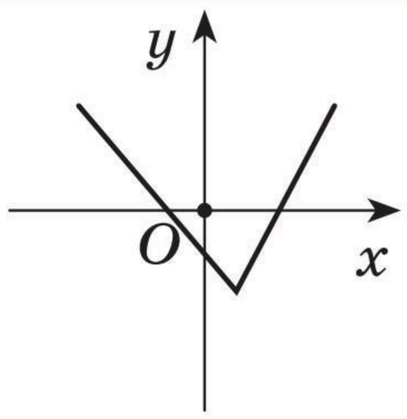
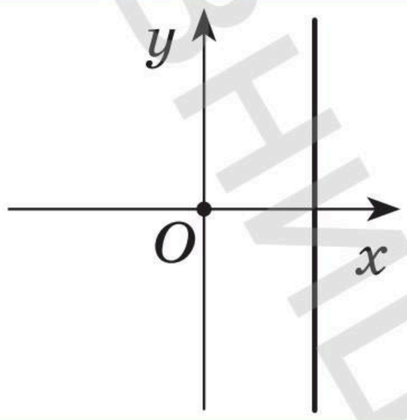
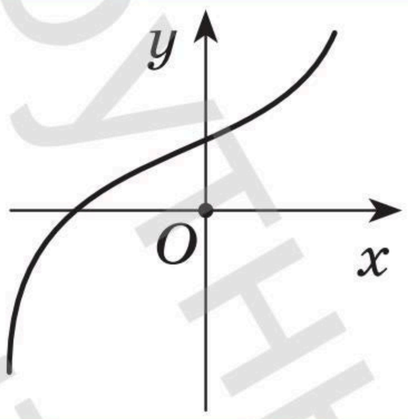
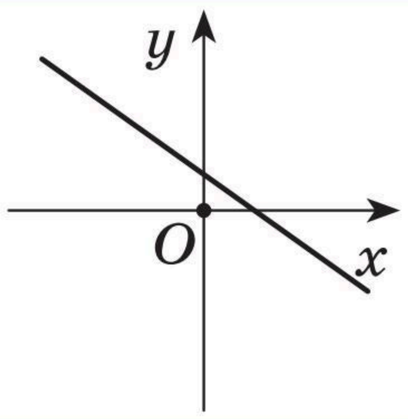
x	0	2	4	6	8	10
y	1	7	9	6	4	2

16. Запишіть формулою: а) число a на три одиниці більше ніж число b; б) вартість p, яку заплатили за 2 кг слив ціною x грн за кілограм; в) пройдений пішоходом шлях s дорівнює добутку швидкості v його руху на час t.

17. Лінійна функція задана формулою $y=-x+2$. Заповніть таблицю та побудуйте графік цієї функції.

x	0	2
y		

18. На якому з наведених рисунків зображено графік лінійної функції?

А	Б	В	Г
			

19. Які з наведених перетворень є рівносильними перетвореннями рівняння?

а) до обох частин рівняння додали число (-12);

б) моном $(-5x)$ перенесли з правої частини рівняння у ліву, перетворивши його на $5x$;

в) обидві частини рівняння поділили на 2;

г) обидві частини рівняння помножили на 0;

д) число 7 перенесли з лівої частини в праву.

20. Розв'яжіть рівняння.

а) $x+5=0$; б) $2x=-8$; в) $\frac{1}{3}x=9$.

21. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x-3)(x+7)=0$; б) $x^2-8x=0$; в) $y(y+4)+7(y+4)=0$.

22. Відстань від Запоріжжя до Кропивницького дорівнює 300 км. За скільки годин подолає цю відстань автомобіль, який їде зі швидкістю 60 км/год? Складіть рівняння, що є математичною моделлю цієї задачі, та розв'яжіть його.

23. Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить графік рівняння $2x-y+5=0$ через: а) точку $A(2;\ 9)$; б) точку $B(3;\ 8)$.

24. За два кілограми помідорів і три кілограми огірків Ігор заплатив разом 170 грн. Складіть рівняння, яке є математичною моделлю цієї ситуації.

25. Чи є впорядкована пара чисел $(2;5)$ розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+y-7=0, \\ 2y=10? \end{cases}$

26. Дві пекарні разом випікають 800 кг хліба за день. Перша пекарня випікає на 100 кг хліба більше, ніж друга. Запишіть ці умови у вигляді системи двох рівнянь із двома змінними.

27. Обсяг якого з двох понять є більшим, а зміст — меншим?

а) «кіт» і «тварина»; б) «стіл» і «меблі»; в) «слива» і «фрукт»; г) «олівці» і «канцтовари».

28. Укажіть абстрактні поняття.

а) «підлога»; б) «сонце»; в) «добро»; г) «ліхтар»; д) «ромашка»; е) «вічність»; ж) «годинник»; з) «вітер».

29. Укажіть істинні твердження.

а) усі гроші паперові; б) серед грошей трапляються металеві; в) кожен українець любить футбол; г) є українки, які вміють вишивати; д) усі птахи літають.

30. Укажіть правильні міркування.

а) якщо всі книжки у шафі паперові й підручник «Математика» лежить у цій шафі, то підручник «Математика» паперовий;

б) якщо всі вікна в будинку білі, то всі двері в цьому будинку теж білі;

в) якщо всі трикутники мають три сторони, то тупокутний трикутник теж має три сторони.

31. Розгляньте рис. 2. Скільки різних прямих можна провести так, щоб усі прямі одночасно містили:

а) точку A;

б) дві точки — B, C;

в) три точки — A, B, C;

г) три точки — B, C, D.

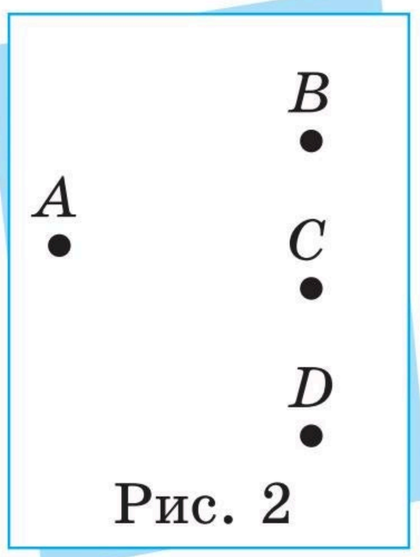


Рис. 2

32. Точка B є серединою відрізка AC. Довжина відрізка $AB = 12$ см. Обчисліть довжину відрізка BC.

33. На рис. 3 зображено кути. Визначте вид кожного з кутів *а–г*.

а) $\angle ABD$; в) $\angle CBD$;

б) $\angle DBK$; г) $\angle LKM$.

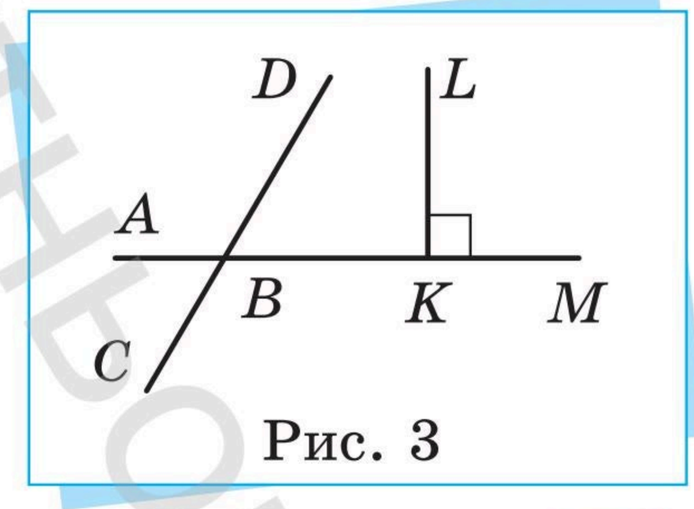


Рис. 3

34. На рис. 4 дві прямі перетинаються в точці B. Чи є кути ABC і FBD вертикальними? Чи є кути ABC і ABF суміжними?

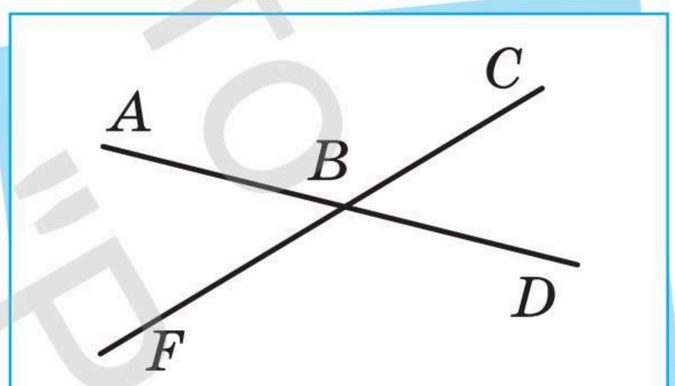


Рис. 4

35. На рис. 5 зображено дві прямі, які перетинаються під кутом 35°. Обчисліть градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.

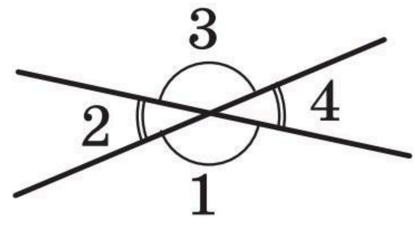


Рис. 5

36. Укажіть на рис. 6:

а) відрізок, який є перпендикуляром, проведеним із точки A до прямої m;

б) відрізок, який є похилою, проведеною з точки A до прямої m;

в) відрізок, який є проєкцією похилої, проведеної із точки A до прямої m.

Довжина якого відрізка буде відстанню від точки A до прямої m?

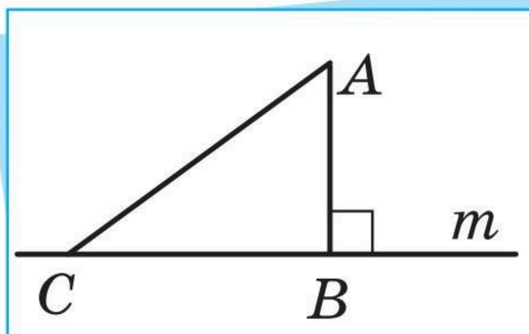


Рис. 6

37. На рис. 7 зображено рівні трикутники ABC і FED. Які з поданих рівностей правильні?

а) $\angle A = \angle D$; б) $BC = ED$; в) $\angle C = \angle D$; г) $AB = FE$.

38. У якому з трикутників на рис. 8 проведено: а) бісектрису; б) висоту; в) медіану?

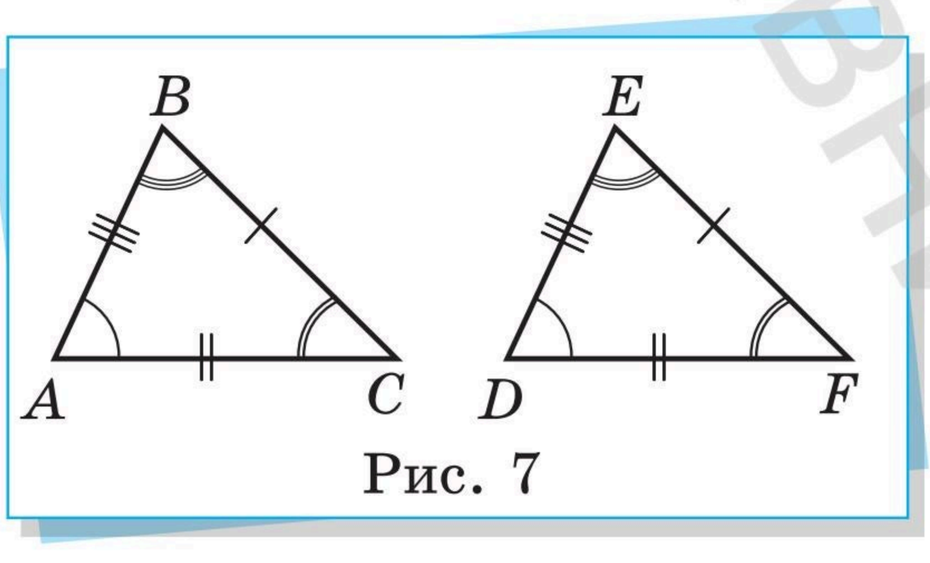


Рис. 7

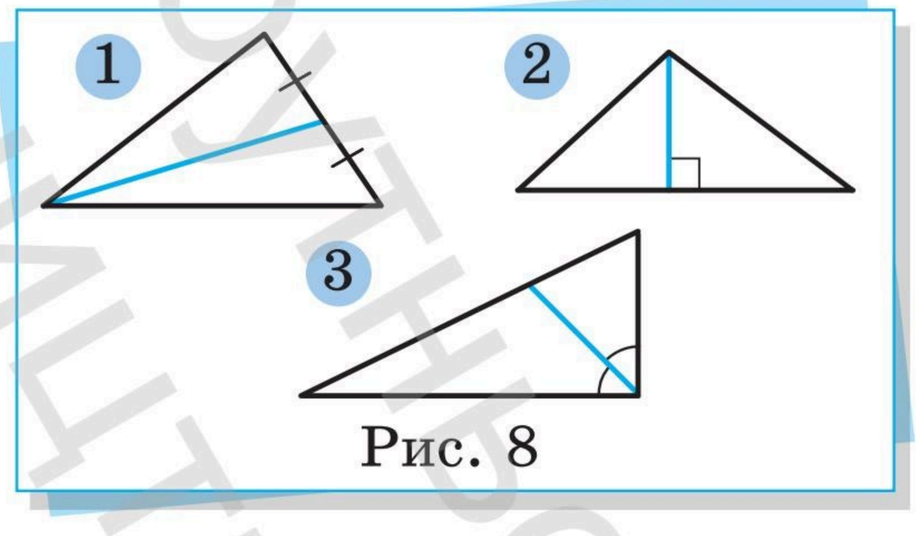


Рис. 8

39. Розгляньте рис. 9. Запишіть пари рівних трикутників.

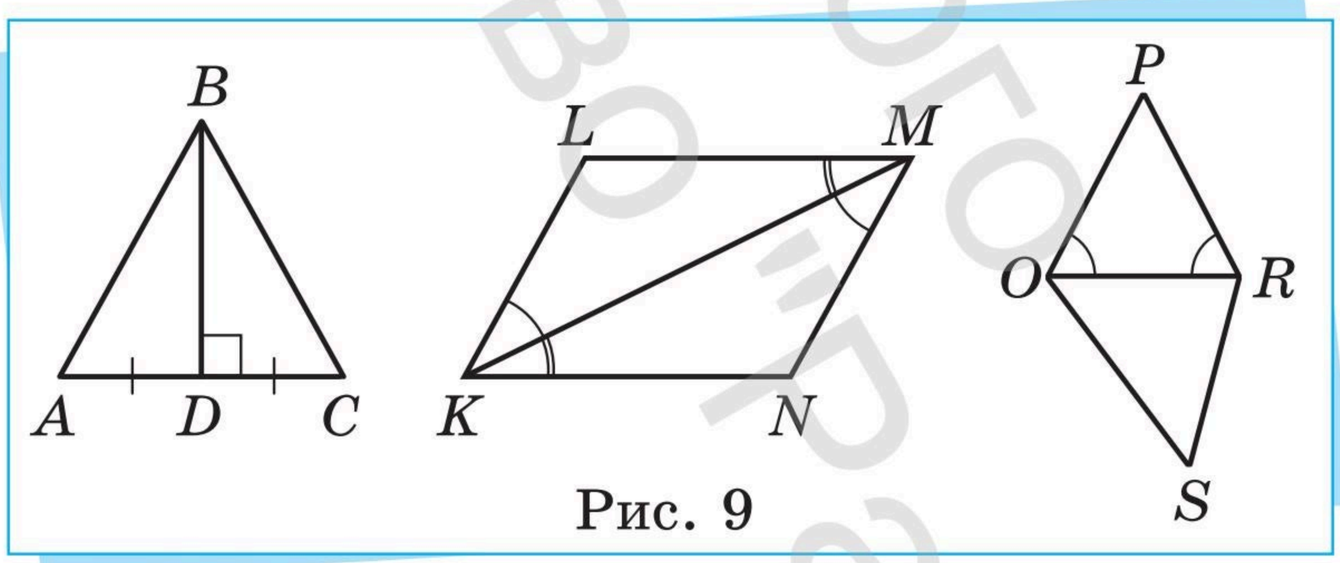


Рис. 9

40. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle NKL$, $AB = 4$ см, $NL = 5$ см (рис. 10). Знайдіть довжини сторін AC і NK.

41. Запишіть пари рівних трикутників на рис. 11.

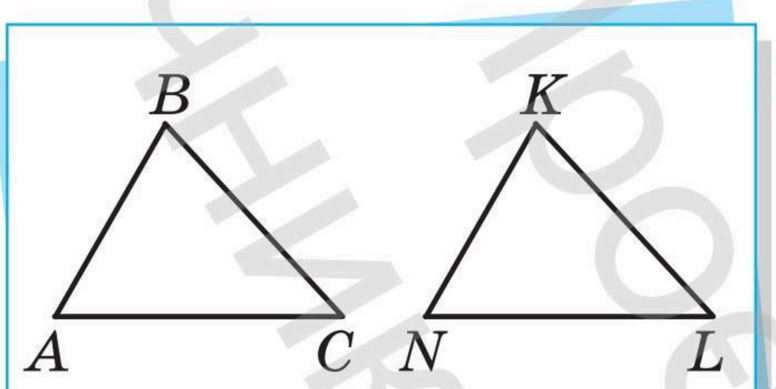


Рис. 10

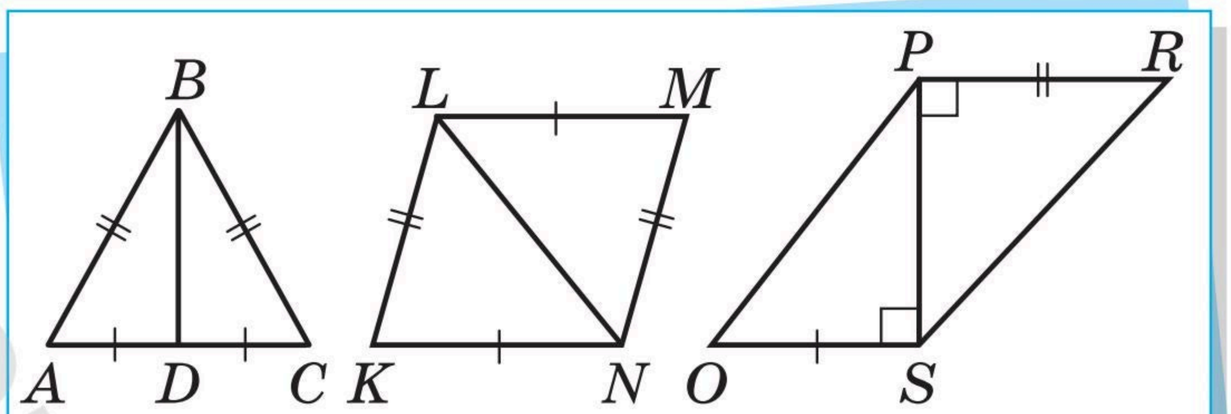


Рис. 11

42. Укажіть, які з трикутників на рис. 12 є рівнобічними.

43. У результаті перетину прямих a і b січною c утворилися кути 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (рис. 13). Як називають: а) кути 1 і 6; б) кути 3 і 7; в) кути 6 і 4?

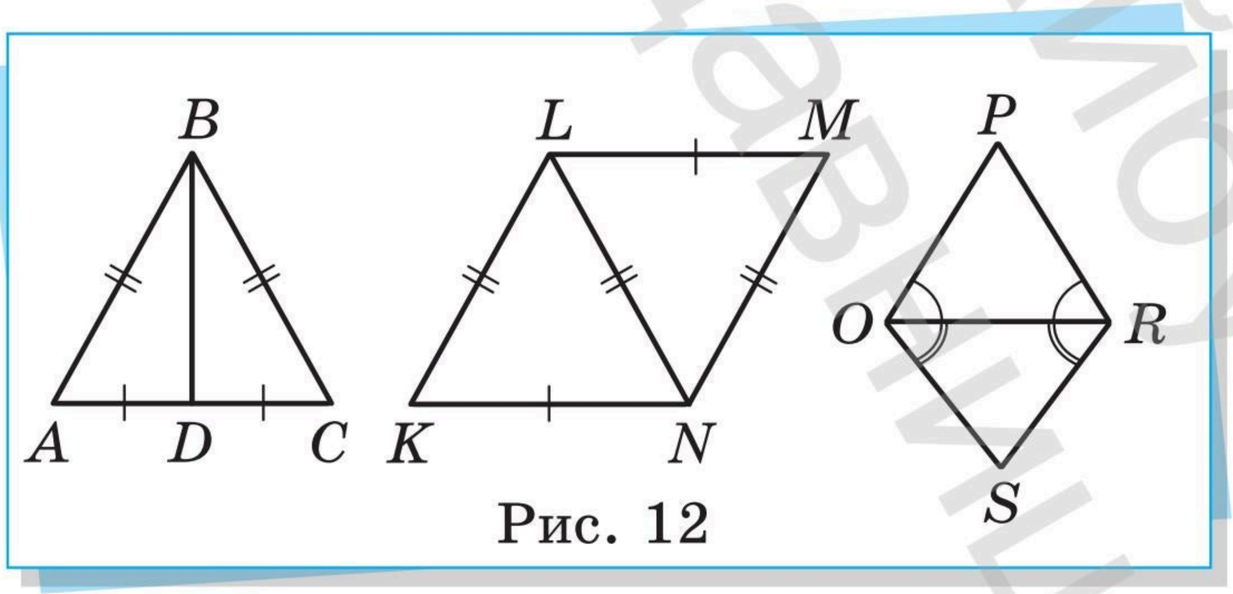


Рис. 12

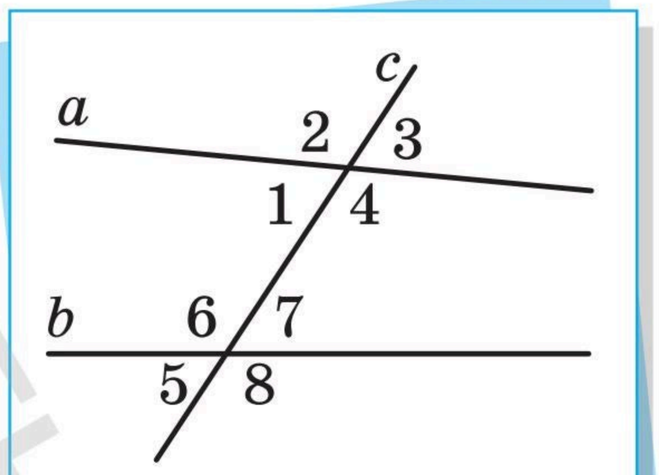


Рис. 13

44. Чи паралельні прямі a і b на рис. 14?

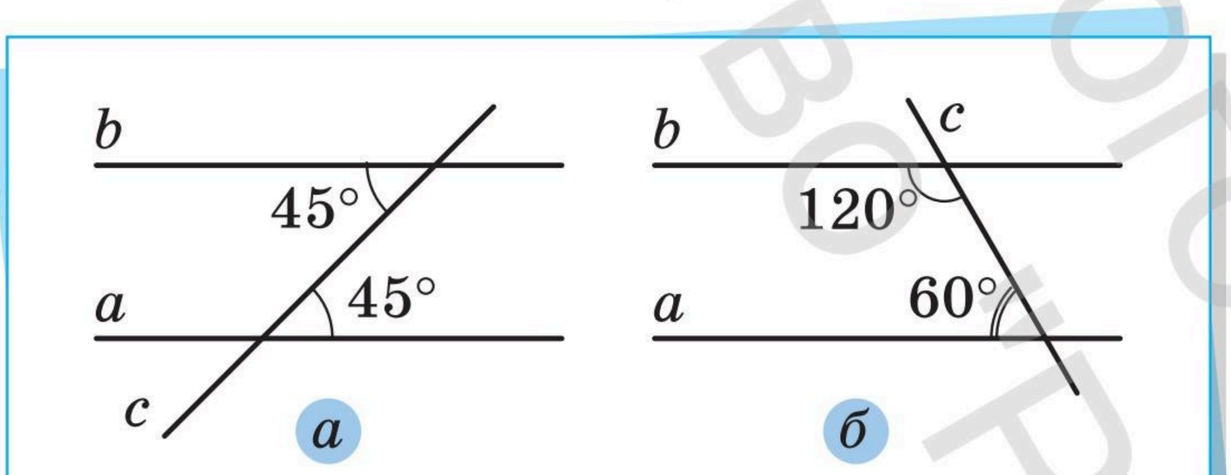


Рис. 11

45. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють: а) 20°, 30°, 150°; б) 50°, 60°, 70°; в) 50°, 50°, 80°.

46. У трикутнику ABC $\angle A = 75°$, $\angle B = 65°$. Знайдіть кут C.

47. За якою ознакою пари трикутників на рис. 15 є рівними?

48. Трикутник ABC — прямокутний; $\angle A = 30°$, $AC = 30$ м (рис. 16). Обчисліть довжину катета BC.

49. Побудуйте коло із центром у точці O. Зобразіть: а) радіуси OM і OK; б) діаметр AB; в) хорду CD, яка не є діаметром. Заштрихуйте менший із секторів, визначених радіусами OM і OK, і менший із сегментів, визначених хордою CD.

50. На рис. 17 зображено коло та два його радіуси, що визначають плоскі кути 1 і 2. Відомо, що $\angle 2 = 200°$. Знайдіть градусну міру кута 1.

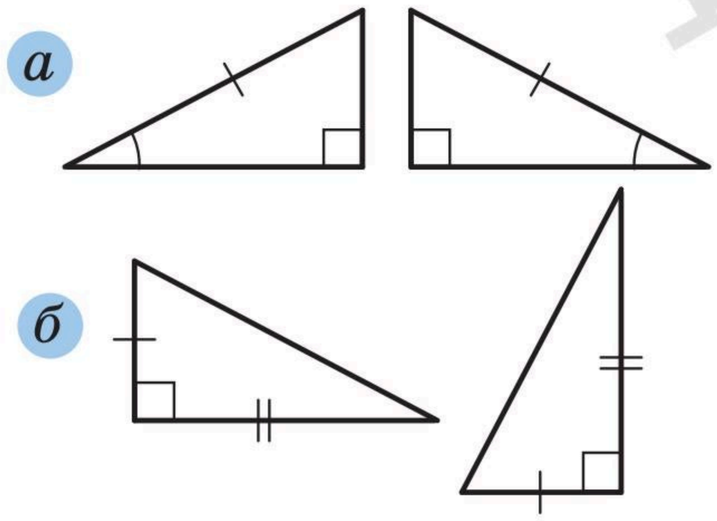


Рис. 15

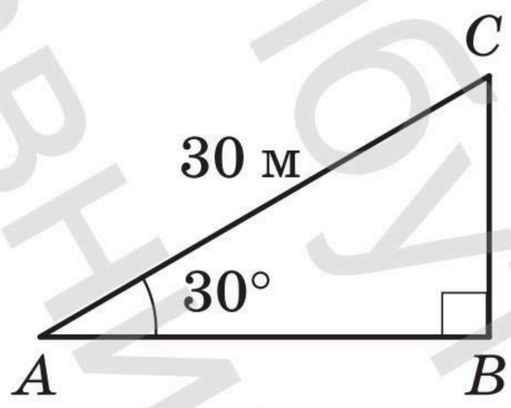


Рис. 16

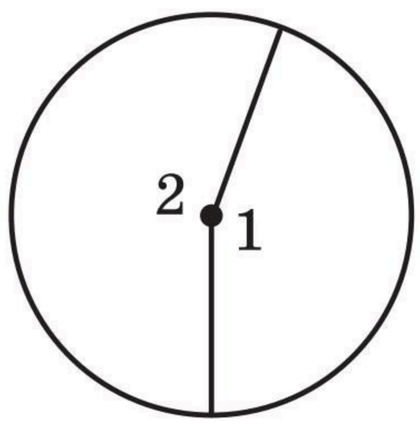


Рис. 17

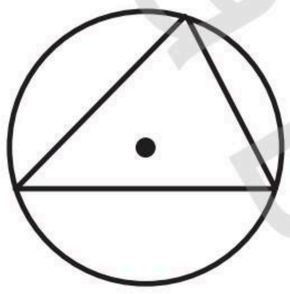
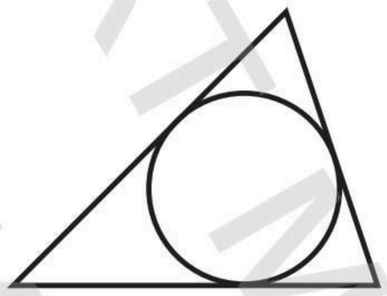
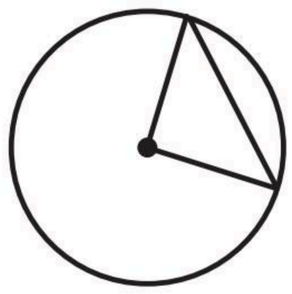
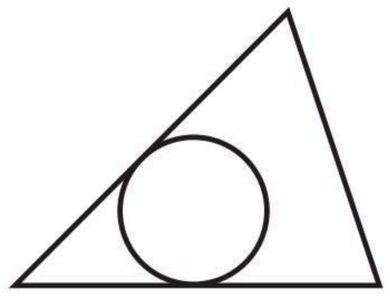
51. Побудуйте коло із центром у точці O і точку C, що лежить на цьому колі. Проведіть пряму m, яка дотикається до кола в точці C. На прямій m візьміть точку K так, щоб вона лежала поза колом. Через точку K проведіть пряму p, яка буде січною до кола.

52. Зобразіть два кола із центрами в точках A і B та різними радіусами, які мають зовнішній дотик у точці C. Побудуйте відрізок AB. Виміряйте довжини відрізків AB, AC, CB. Зробіть висновок.

53. Центр вписаного кола є точкою перетину...

А	Б	В	Г
бісектрис	медіан	висот	серединних перпендикулярів

54. На якому з наведених рисунків зображений трикутник, вписаний у коло?

А	Б	В	Г
			

55. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками відрізок довжиною 46 мм. За допомогою циркуля та лінійки без поділок поділіть цей відрізок навпіл. Перевірте правильність побудови за допомогою лінійки з поділками.

56. Побудуйте за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює 80°. За допомогою циркуля та лінійки без поділок поділіть цей кут навпіл. Перевірте правильність побудови за допомогою транспортира.

57. Микола вирішив зіграти в лотерею, де потрібно вгадати 6 цифр із 49. Для вибору цифр він попросив 6 друзів і подруг назвати йому навмання якусь цифру від 1 до 49. Нарешті Микола одержав таку вибірку: 3, 47, 24, 18, 22, 30. Знайдіть: а) обсяг вибірки; б) розмах вибірки; в) середнє арифметичне.

58. Уляна порахувала кількість відвідувачів у кав'ярнях, розташованих на її вулиці, та одержала таку вибірку: 8, 12, 7, 10, 7. Знайдіть: а) обсяг вибірки; б) моду вибірки; в) медіану вибірки.

59. У кошику лежать 10 слив, і всі вони зелені. Яка ймовірність того, що з цього кошика виймуть зелену сливу? Як називається така подія?

60. Симетричну монету підкинули 15 разів. 8 разів випав герб. Яка відносна частота появи герба в цій серії підкидань?

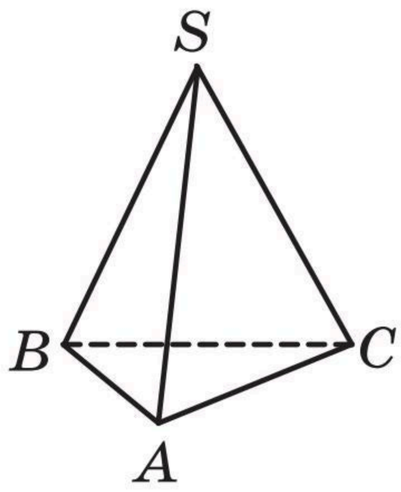
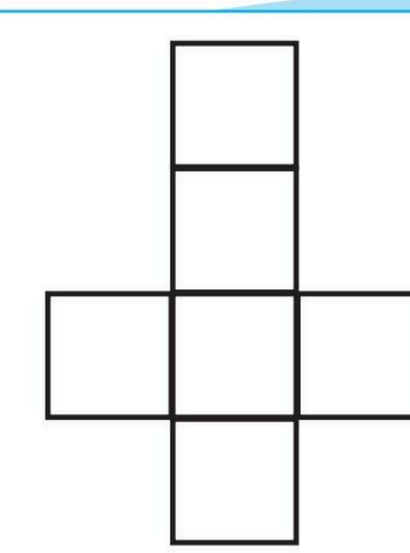


Рис. 18

61. На рис. 18 зображено піраміду. Запишіть назву однієї вершини, одного бічного ребра та однієї бічної грані цієї піраміди.

62. Назвіть геометричне тіло, розгортку якого зображено на рис. 19.


Рис. 19

Середній рівень

63. Для святкування закінчення навчального року батьки купили для учнів і учениць 7 класу 26 тістечок за ціною x грн і 12 пакетів соку за ціною y грн. Складіть вираз для обчислення загальної вартості покупки. Обчисліть цю вартість, якщо $x = 21$ грн, $y = 38$ грн.

64. Знайдіть значення виразу $x^2 + 2x^3$, якщо: а) $x = 2$; б) $x = -3$; в) $x = 0{,}1$; г) $x = \frac{1}{2}$.

65. Доведіть тотожності.

а) $3(x - y) + 2(y - x) = x - y$; б) $2(a + b) - 3(b - a) = 5a - b$.

66. Порівняйте значення виразів.

а) $(-2{,}5)^6$ і 0; в) $(1{,}5)^3$ і 1; д) $(1{,}2)^3$ і $(1{,}2)^4$;

б) $(-3{,}5)^5$ і 0; г) $(0{,}4)^5$ і 1; е) $(-0{,}3)^3$ і $(-0{,}3)^4$.

67. Зведіть мономи до стандартного вигляду та вкажіть степінь кожного з них.

а) $2ab^2ba^3$; б) $xy^2x\cdot 0{,}5xxy$; в) $ab^2c\cdot\frac{2}{3}ac$.

68. Виконайте дії над мономами.

а) $2xy^5\cdot\left(-3x^5y^2\right)$; б) $\left(-2ab^3\right)\cdot 3ab$; в) $\left(2x^2\right)^3$; г) $\left(3ab^2\right)^4$.

69. Знайдіть суму та різницю поліномів.

а) $2ab^2+b^2-3$ і $3ab^2-b^2+1$;

б) xy^2+3x^2y+2x і $7xy^2+yx^2+5x$;

в) $-3ab-2a-1$ і $5ab-4a+7$;

г) x^2+xy+y^2 і y^2-yx-x^2.

70. Пан Василь на тракторі може зорати x гектарів за годину, а пані Катерина на мотоблоці — y гектарів за годину. Одного дня пан Василь працював 4,5 години, а пані Катерина — 3,5 години. Складіть вираз для обчислення кількості гектарів, які зорали пан Василь і пані Катерина цього дня. Чи є цей вираз поліномом? Якщо так, то якого він степеня? Знайдіть значення цього виразу для $x=2$, $y=1$.

71. Виконайте множення.

а) $2a^2\cdot(7{,}3a-4)$; в) $(2y+4)(5y^2-3y)$;

б) $3bc\cdot(b+2{,}5c)$; г) $(x^2-3)(4x^2+12)$.

72. Розкладіть на множники.

а) $10x^4-15x^3$; в) $6a-6b+5ac-5bc$;

б) $6y^2-36xy^2$; г) $3mn^2+3an^2+4m+4a$.

73. Розкрийте дужки.

а) $(2a-3)(2a+3)$; б) $(3x+4y)^2$; в) $(5c-3d)^2$.

74. Розкладіть на множники.

а) $121y^2-169x^2$; б) $4a^2-4a+1$; в) $9x^2+30xy+25y^2$.

75. Знайдіть координати точок, зображених на рис. 20. У яких координатних чвертях або на яких осях координат вони розташовані?

76. У ПДСК побудуйте точки: $M(-1;-3{,}5)$, $K(0;-2{,}5)$, $S(2{,}5;-1{,}5)$, $R(1{,}5;0)$. Яка із цих точок: а) належить третій координатній чверті; б) лежить на осі ординат?

77. Функцію задано формулою: $f(x)=x^2-x+1$. Яка з наведених точок належить графіку цієї функції?

А	Б	В	Г
$(-1;0)$	$(2;1)$	$(-2;7)$	$(0;-1)$

78. Функцію $y=f(x)$ задано графічно (рис. 21). Заповніть таблицю.

x	-2	0	1	4
$f(x)$				

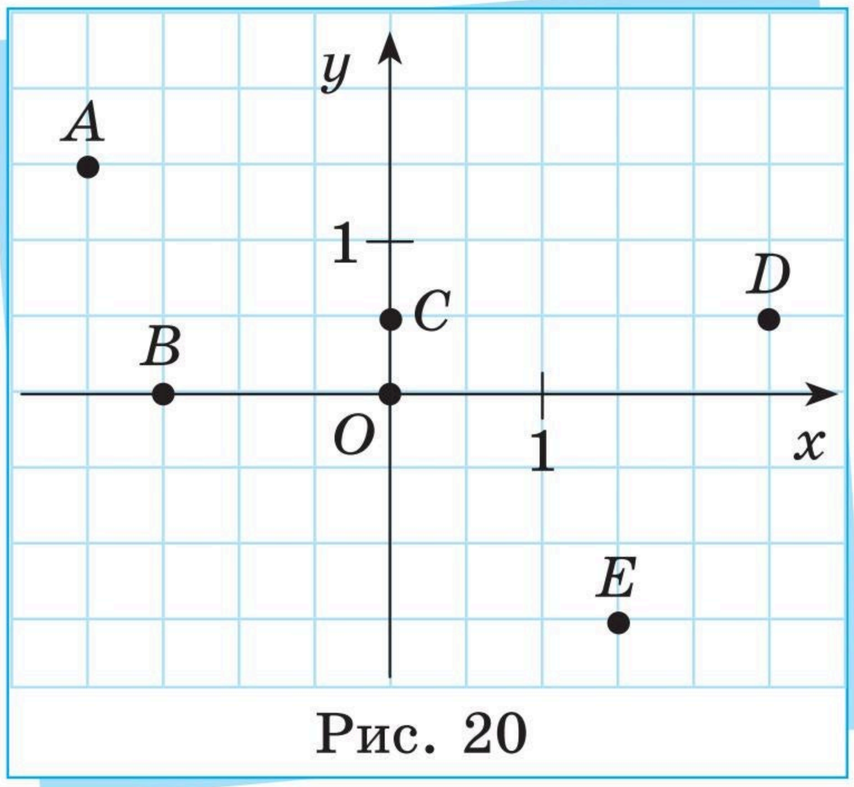


Рис. 20

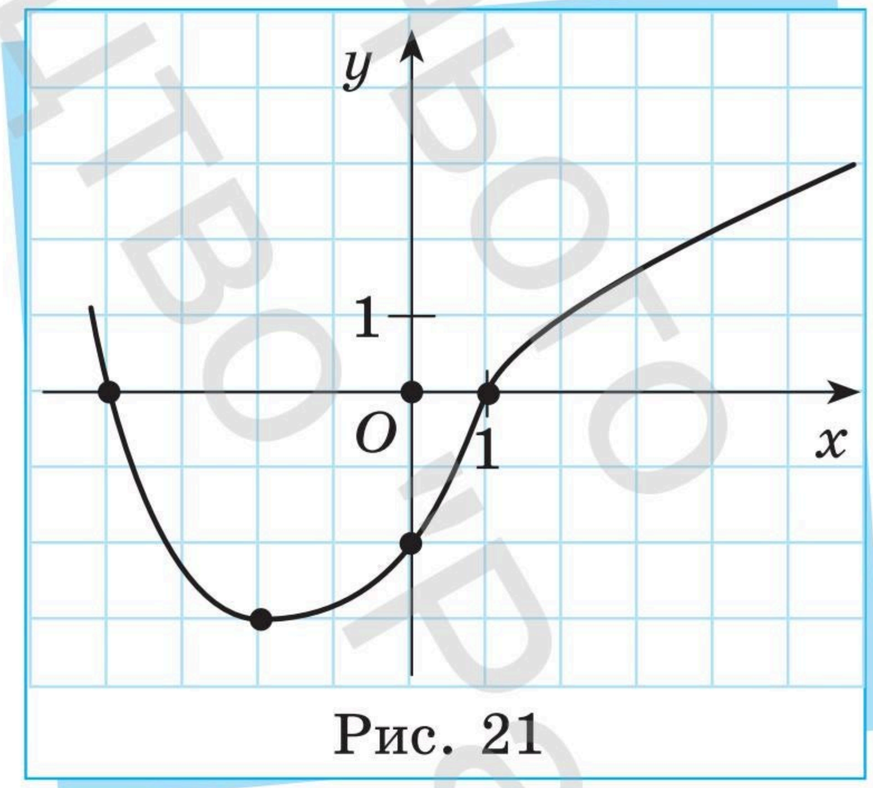


Рис. 21

79. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x + 4$ і $y = -2$. Знайдіть за отриманим рисунком координати точки перетину цих графіків. Виконайте перевірку підстановкою значень.

80. Дідусь Охрім продає мед. Вартість 1 кг меду в дідуся 350 грн, але додатково ще потрібно сплатити 50 грн за вартість посуду, незалежно від кількості купленого меду. Запишіть формулою залежність між величинами: x — кількість кілограмів купленого меду в дідуся Охріма, y — вартість покупки. Чи є ця залежність лінійною?

81. Розв'яжіть рівняння.

а) $3x - 12 = 5x + 8$; б) $\frac{3x+2}{4} = \frac{x-1}{2}$.

82. За підключення пакету кабельного телебачення треба заплатити 2650 грн. У вартість входить послуга з підключення пакету 250 грн та оплата за перші 12 місяців користування. Скільки гривень складає вартість користування цим пакетом за 1 місяць?

83. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x-8)(x+8) = 0$; б) $2x^2 - 6x = 0$

84. Винесіть спільний біном за дужки і розв'яжіть рівняння.

$2y(3y+9) - 4(3y+9) = 0$.

85. Укажіть два різні розв'язки рівняння $2x + 3y - 5 = 0$.

86. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку з координатами $(1; 2)$.

87. Розв'яжіть системи рівнянь.

а) $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 5x + y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2y + 6, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

88. Сума чисел дорівнює 18, а їх різниця дорівнює 10. Складіть систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї задачі. Розв'яжіть цю систему та знайдіть задані числа.

89. Укажіть зайве поняття: «червоний», «чорний», «зелений», «білий», «яскравий». Поясніть свою відповідь

90. Наведіть 1 приклад конкретного поняття та 1 приклад абстрактного поняття.

91. Задано твердження: «Число 12 ділиться націло на 5». Істинним чи хибним є це твердження? Сформулюйте твердження, протилежне заданому.

92. Визначте, які з поданих тверджень є істинними, а які хибними.
а) у Австрії багато кенгуру; б) Юпітер — планета Сонячної системи; в) $2+3=23$; г) у китів є зябра.

93. На рис. 22 довжина відрізка DF дорівнює 9,3 см, а довжина відрізка DE дорівнює 6,4 см. Чи може довжина відрізка DE дорівнювати 3,9 см? Відповідь поясніть.

94. Точка F є внутрішньою точкою відрізка AB. Знайдіть довжину відрізка AF, якщо $AB=12$ см, а довжина FB на 3 см більша за довжину AF.

95. На рис. 23 $\angle EDF=21°$; $\angle EDK=37°$. Знайдіть кут FDK.

96. Промені BA і BC перпендикулярні. Промінь BD ділить кут ABC так, що кут ABD на 10° більший за кут DBC. Знайдіть градусні міри кутів ABD і DBC.

97. Прямі a і b перетнулися, як показано на рис. 24. Градусна міра кута 1 дорівнює 112°. Знайдіть градусні міри кутів 2, 3, 4. Чому дорівнює кут між прямими a і b?

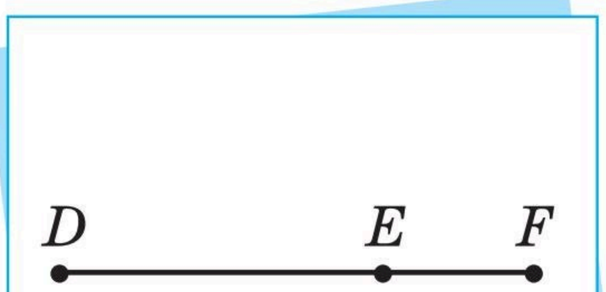


Рис. 22

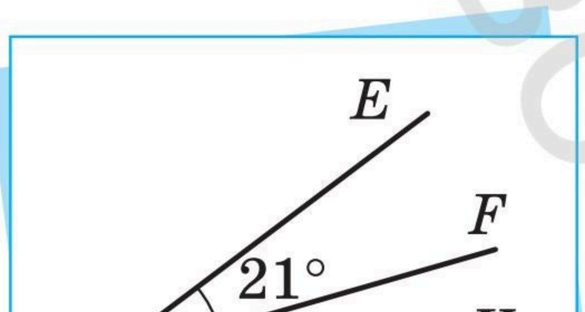


Рис. 23

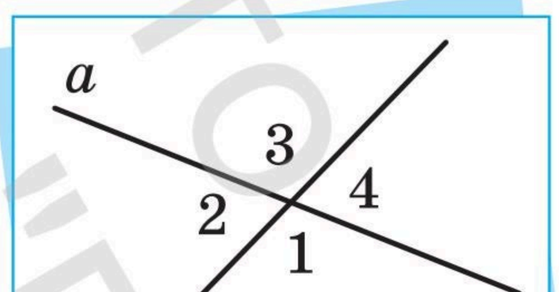


Рис. 24

98. Знайдіть периметр трикутника ABD, якщо довжина сторони AB дорівнює 2 см, довжина сторони BD на 2 см більша, ніж AB, а довжина сторони AD на 1 см більша, ніж довжина сторони BD.

99. Знайдіть довжини сторін AB і BC трикутника ABC, якщо відомо, що периметр трикутника дорівнює 64 см, $AC = 28$ см, $AB = BC$.

100. Трикутники ADC і ABC розташовані так, як показано на рис. 25. $AB = 3$ см, $BC = AD$, $\angle BCA = \angle DAC$. Знайдіть довжину CD.

101. Трикутники MKC і ABC розташовані так, як показано на рис. 26; $BC = CK$, $\angle ABC = \angle CKM$, $\angle A = 25°$. Знайдіть градусну міру кута M.

102. У рівнобічному трикутнику ABC, у якого $AB = BC = 13$ см і $AC = 10$ см, проведено висоту BH (рис. 27). Знайдіть периметр трикутника CBH, якщо $BH = 12$ см.

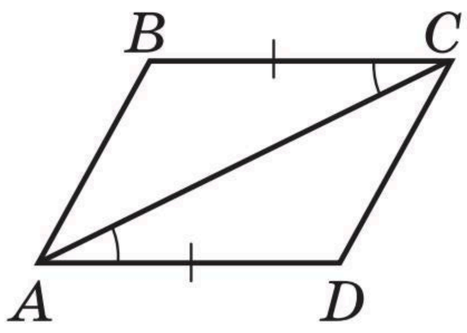


Рис. 25

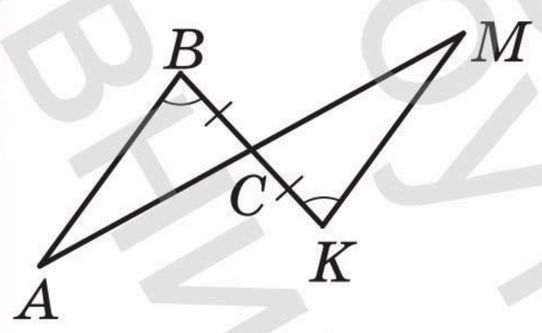


Рис. 26

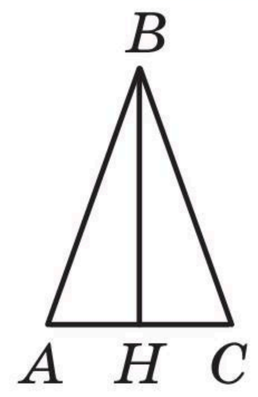


Рис. 27

103. У рівнобічному трикутнику ABC з бічними сторонами AB і BC та основою AC проведено бісектрису BH. Знайдіть кути трикутника CBH, якщо $\angle BAC = 65°$, а $\angle ABC = 50°$.

104. На рис. 28 прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x.

105. Визначте, чи паралельні прямі a і b на рис. 29.

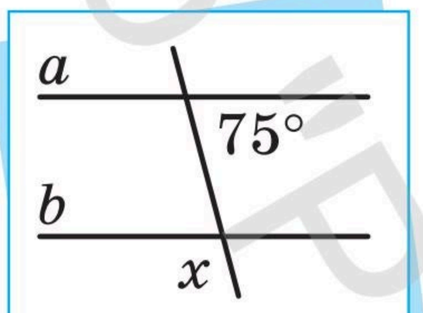


Рис. 28

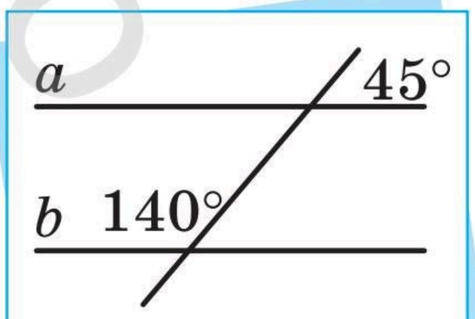


Рис. 29

106. У трикутнику ABC градусна міра кута A на 5 градусів менша від градусної міри кута B і на 20 градусів більша за градусну міру кута C (рис. 30). Знайдіть градусні міри кутів трикутника ABC.

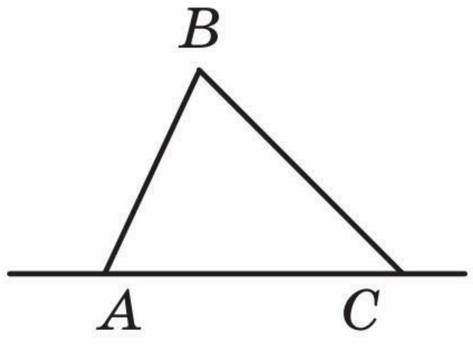


Рис. 30

107. У трикутнику ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 7:3:2$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C.

108. З точки M до прямої a проведено перпендикуляр MH і дві похилі MA і MB так, що $\angle AMH = 30°$, а $\angle BMH = 45°$ (рис. 31). Знайдіть градусні міри кутів трикутника AMB.

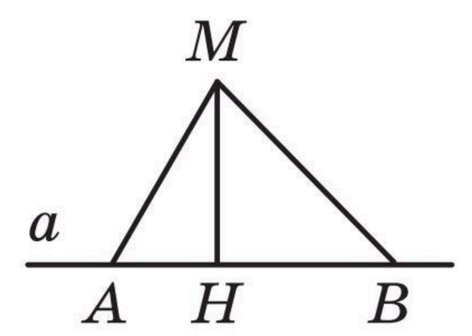


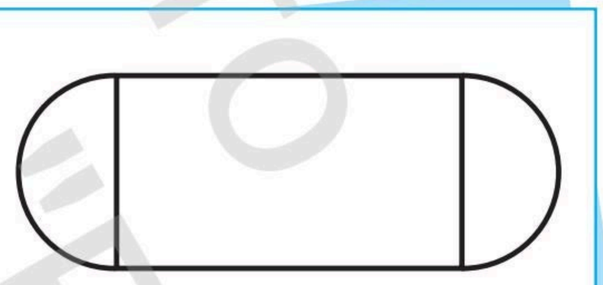
Рис. 31

109. Відомо, що один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18 градусів менший, ніж інший. Знайдіть градусні міри кутів цього трикутника.

110. Задано коло, довжина якого дорівнює 40π см. Знайдіть: а) діаметр цього кола; б) радіус цього кола; в) довжину дуги цього кола, яка відповідає центральному куту $\alpha = 36°$.

111. Побудуйте в ПДСК круг із центром у точці $O(-2; 4)$ і радіусом $R = 3$. За рисунком визначте: а) чи належить цьому кругу початок координат; б) чи належить цьому кругу точка $M(-3; 3)$; в) чи має цей круг спільні точки з віссю абсцис; г) чи має цей круг спільні точки з віссю ординат?

112. Вважаючи, що $\pi \approx 3{,}14$, знайдіть довжину бігової доріжки, яка складається з двох прямих відрізків і двох півкіл (див. рис. 32), якщо відомо, що радіус кола дорівнює 4 м, а довжина прямого відрізка в 10 разів більша, ніж радіус кола.


Рис. 32

113. Пряма l є дотичною до кола із центром у точці O і діаметром $d = 12$ см. Укажіть відстань від точки O до прямої l.

А	Б	В	Г
3 см	6 см	12 см	24 см

114. На рис. 33 зображено пряму KL, яка є дотичною до кола із центром у точці O. Знайдіть: а) кут α, якщо $\beta = 27°$; б) кут β, якщо $\alpha = 58°$.

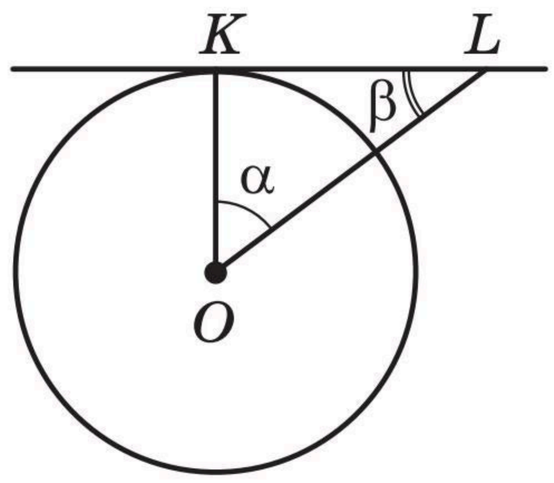


Рис. 33

115. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 6,5 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей прямокутний трикутник, якщо його катети дорівнюють 5 см і 12 см.

116. Дано рівнобічний трикутник ABC з основою AC, який не є рівностороннім. Укажіть правильне твердження.

А	Центр кола, вписаного в трикутник ABC, належить медіані цього трикутника, яка проведена з точки A.
Б	Центр кола, описаного навколо трикутника ABC, належить бісектрисі цього трикутника, яка проведена з точки C.
В	Центр кола, вписаного в трикутник ABC, належить медіані цього трикутника, яка проведена з точки B.
Г	Центр кола, описаного навколо трикутника ABC, належить висоті цього трикутника, яка проведена з точки A.

117. Дано трикутник KLM. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте в цьому трикутнику: а) медіану KS; б) висоту LP; в) бісектрису MF.

118. Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють a та c, причому $a < c$. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте трикутник зі сторонами a, c, c.

119. Віолетта запитала у своїх подруг, скільки разів вони відвідали кінотеатр протягом минулого місяця. Результати були такими: 1, 4, 5, 2, 0, 3, 2, 1, 3, 1. За цими даними знайдіть: а) обсяг вибірки; б) середнє арифметичне; в) моду.

120. Кожен учень і кожна учениця 7-Б класу відвідують одну спортивну секцію. За круговою діаграмою з відповідними даними (рис. 34) знайдіть: а) скільки учнів і учениць у 7-Б класі; б) яка спортивна секція є найпопулярнішою у 7-Б класі; в) у скільки разів відвідувачів волейбольної секції менше, ніж відвідувачів футбольної секції?

Відвідування спортивних секцій учнями 7-Б класу



Рис. 34

121. Установіть відповідність між подіями (1–3) та видами цих подій (А–В).

Події	Види подій
1. День народження однокласника припадає на 31 лютого. 2. Завтра зранку піде дощ. 3. Зріст нового вчителя географії менший від 4 метрів.	А. Достовірна подія Б. Випадкова подія В. Неможлива подія

122. Із букв слова «АРКЕБУЗА» навмання обирають одну букву. Знайдіть імовірність, що ця буква буде: а) буквою А; б) буквою, що позначає голосний звук; в) буквою, що позначає дзвінкий приголосний звук.

123. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди мають довжину a см, а довжина всіх сторін основи піраміди дорівнює b см. Запишіть вираз для обчислення суми довжин усіх ребер піраміди. Обчисліть значення виразу, якщо $a=6$ см, $b=5$ см.

124. Скільки кубиків із довжиною ребра 5 см можна помістити в коробку у формі прямокутного паралелепіпеда, що має розміри 25 см, 20 см, 15 см?

Достатній рівень

125. Знайдіть значення виразу $a:(b+1)-4a$, якщо:

а) $a=\frac{2}{7}$, $b=0{,}5$; б) $a=-1{,}5$, $b=-\frac{1}{3}$.

126. Доведіть тотожності.

а) $-3{,}5(x+1)+2{,}5(1-x)=-6x-1$; б) $3(c+2)+c=2(2c+3)$.

127. Обчисліть: а) $\left(4^2\cdot 4^3\right)^4 : 4^{21}$; б) $\left(3\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^3$.

128. Відомо, що діаметр Сонця приблизно дорівнює 1 393 000 км. Виразіть цю відстань у метрах і запишіть її у стандартному вигляді.

129. Виконайте дії та запишіть відповідь у вигляді монома в стандартному вигляді.

а) $\left(3m^2p\right)^2\cdot\left(-2p^3m\right)^3$; б) $\left(\frac{1}{5}xy\right)^2\cdot 100x^3y$.

130. Підберіть мономи, які в добутку з мономом $2c^2d$ дадуть моном: а) $6c^4d^5$; б) $-\frac{1}{3}c^2d^{11}$.

131. Знайдіть суму та різницю поліномів $2a^2+3a-12$ і a^3-3a^2+12.

132. Доведіть, що різниця трицифрових чисел $\overline{ab1}$ і $\overline{ba1}$ ділиться на 45.

133. Виконайте множення поліномів. Відповідь запишіть у вигляді полінома в стандартному вигляді.

а) $(2x-1)(2+3x)$; б) $(2-y)\left(y^2-y-1\right)$.

134. Розкладіть поліноми на множники.

а) $4k^3-2k^2+6k-3$; б) $3c^3d^2+6c^2d^4-2c^2-4cd^2$.

135. Розкрийте дужки. Відповідь запишіть у вигляді полінома в стандартному вигляді.

а) $(2x-3t)^2+(3t-2x)(3t+2x)$; б) $\left(\frac{1}{2}h+2\right)^2+3h\left(2-\frac{1}{4}h\right)$.

136. Розкладіть на множники вирази: а) $16a^5b-81ab^7$; б) $2x^3-4x^2+8x$.

137. У ПДСК оберіть масштабну одиницю довжиною 4 клітинки та побудуйте точки: $A\left(-\frac{1}{4};3\right)$, $B\left(1;2\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{4};-1\frac{1}{4}\right)$. З'ясуйте, яка із цих точок розташована найближче: а) до осі абсцис; б) до осі ординат.

138. На рис. 35 зображено многокутник. Знайдіть координати його вершин, площу (у $см^2$) і периметр (у см), вважаючи, що довжина масштабної одиниці дорівнює 1 см.

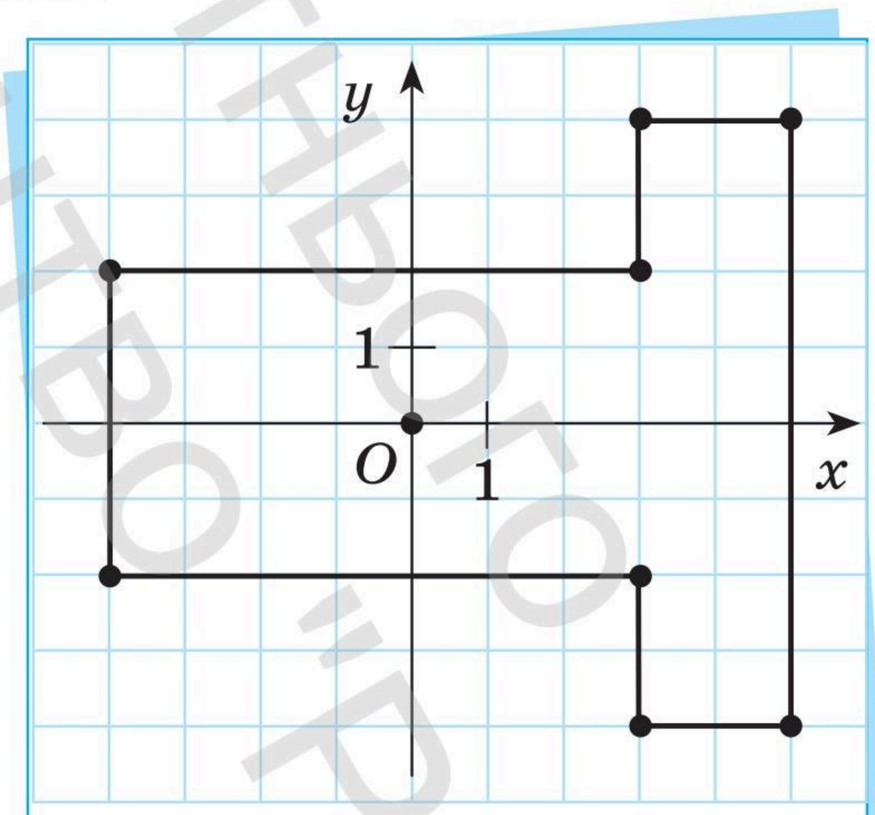


Рис. 35

139. Функцію $y=f(x)$ задано графічно (див. рис. 36).

а) Знайдіть усі значення аргументу, для яких значення функції дорівнює -2.

б) Чи належить графіку функції точка $M(-3;-1)$?

в) Укажіть усі цілі числа, які належать області визначення цієї функції.

г) Знайдіть найбільше та найменше значення функції.

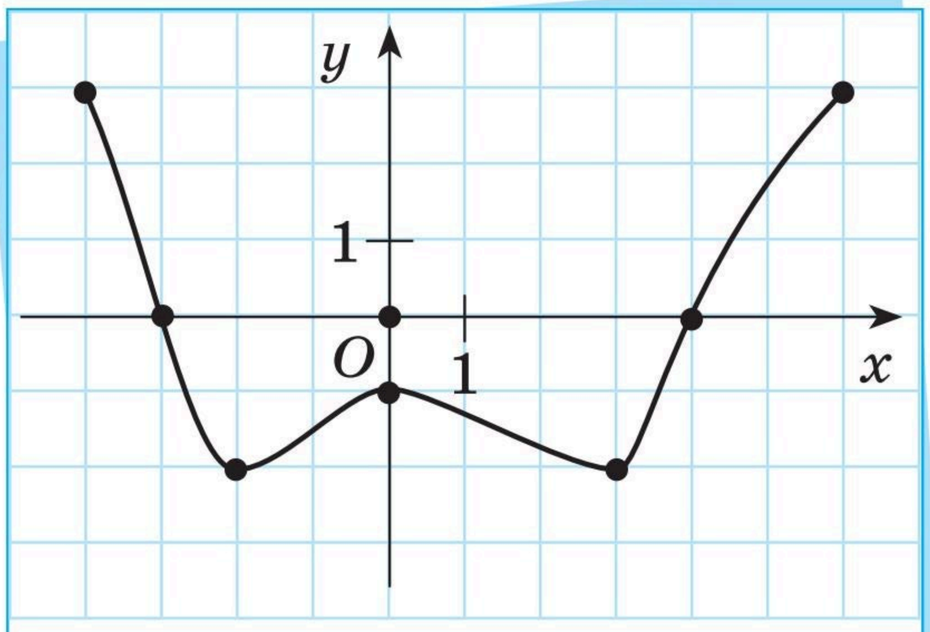


Рис. 36

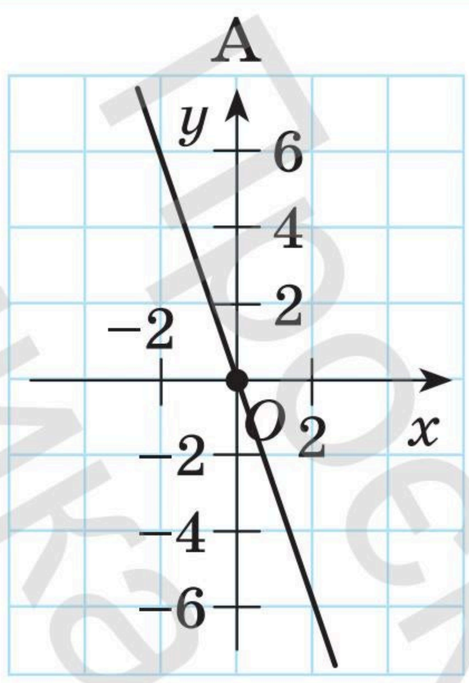
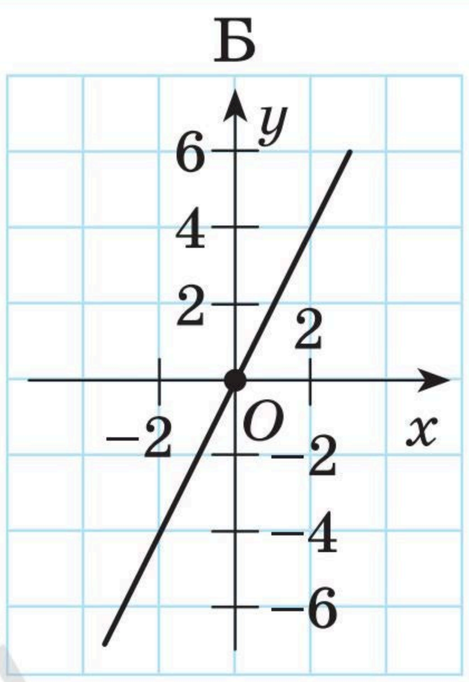
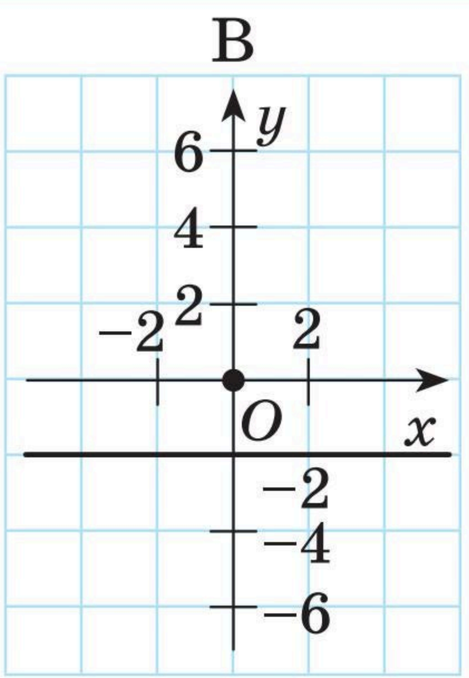
140. Фермер Артем продає на базарі молоду картоплю. Вартість картоплі — 45 грн за 1 кг. При цьому вартість пакувальних торбинок для покупки будь-якого обсягу становить 5 грн. Запишіть формулою залежність $y=f(x)$ вартості y покупки картоплі в Артема (у грн) від кількості придбаної картоплі x (у кг). Якими будуть область визначення $D(y)$ і множина значень $E(y)$ функції $y=f(x)$?

141. Побудуйте в зошиті графіки функцій $f(x)=-0{,}5x+2{,}5$ і $g(x)=0{,}5x+1{,}5$.

а) Чи перетинаються графіки цих двох функцій? Якщо так, то за одержаним рисунком знайдіть координати точки їх перетину.

б) Чи належить точка $M(-3;1)$ якомусь із графіків цих функцій? Якщо так, то якому саме?

142. Установіть відповідність між функціями (1–3) та їх графіками (А–В).

Функції	Графіки
1. $y=2x$ 2. $y=-2$ 3. $y=-3x$	А  Б  В 

143. Не виконуючи побудов, установіть, чи перетинаються графіки кожної пари функцій. Якщо так, то знайдіть *абсциси* точок їх перетину.

а) $y=-2x+3$ і $y=3x-4$; б) $y=2(x-1)+4$ і $y=5-3(1-x)$.

144. Під час розпродажу ціна на конструктор зменшилася на 300 грн. Василько помітив: якщо нову ціну цього конструктора помножити на 2 і від результату відняти 100 грн, то вийде його стара ціна. Визначте ціну конструктора до розпродажу.

145. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод розкладання на множники.

а) $8x-2x^3=0$; б) $7x^2+14x+10=3$.

146. Розв'яжіть рівняння.

а) $|2x-6|-3=0$; б) $4|x-1|-3=5$.

147. Графік рівняння $3x-4y+12=0$ проходить через точки $A(-1;m)$ і $B(p;4)$. Знайдіть значення m і p.

148. Пані Оксана придбала для приготування салату x кг помідорів і y кг огірків, витративши загалом 350 грн. Відомо, що вартість 1 кг помідорів становить 50 грн, а 1 кг огірків — 40 грн. Складіть рівняння, що є математичною

моделлю цієї ситуації. Знайдіть три різні варіанти того, скільки кілограмів овочів кожного виду могла придбати пані Оксана.

149. Розв'яжіть систему рівнянь найбільш зручним способом.

а) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 3x+2y=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+y=5, \\ 2x-3y=13. \end{cases}$

150. Ширина баскетбольного майданчика біля будинку Сергійка на 8 м менша від його довжини, а периметр цього майданчика дорівнює 64 м. Складіть систему рівнянь, яка відповідає умові цієї задачі. Розв'яжіть цю систему рівнянь і знайдіть розміри майданчика біля будинку Сергійка.

151. За допомогою діаграм Венна покажіть співвідношенням між обсягами таких понять: а) «Світязь»; «озеро»; «водойма»; б) «тополя»; «сосна»; «дерево».

152. Розташуйте поняття за збільшенням змісту.

а) «Тигролови»; «літературний твір»; «роман»;
б) «планета»; «небесне тіло»; «Юпітер».

153. Доведіть від супротивного, що з 15 відвідувачів кафе принаймні дві особи народилися в той самий місяць року.

154. Доведіть, що значення виразу $|x+2|+3x^2+1$ є додатним за будь-якого значення змінної x.

155. Точка C є внутрішньою точкою відрізка AB. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо довжина відрізка AB на 20 см більша за довжину відрізка AC і в 1,8 разу більша за довжину відрізка BC.

156. У ПДСК задано точки $M(3;-11)$ і $K(-17;-11)$. Знайдіть відстань між точками M і K.

157. Відомо, що промінь AK проходить між сторонами кута BAC, а промінь AM — між сторонами кута BAK. Відомо, що $\angle BAC=120°$, $\angle BAK=70°$, $\angle MAC=85°$. Знайдіть градусні міру кута MAK.

158. Градусні міри двох суміжних кутів відносяться як 7 : 2. Знайдіть градусні міри цих кутів.

159. На рис. 37 зображено три прямі, що перетинаються в одній точці. Знайдіть градусну міру кута 2, якщо $\angle 1 = 35°$, $\angle 3 = 20°$.

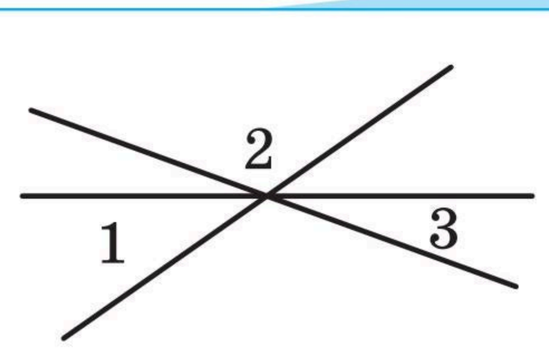


Рис. 37

160. В одній ПДСК побудуйте прямі a, b, c, задані рівняннями $y = 3x$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$ відповідно. Чи є серед цих прямих перпендикулярні? Якщо так, то які саме?

161. У трикутнику ABC проведено медіану BL довжиною 10 см. Периметр трикутника ABL дорівнює 38 см, а периметр трикутника CBL — 45 см. Знайдіть довжини сторін трикутника ABC, якщо $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$.

162. Периметр трикутника дорівнює 50 см. Сума довжин двох сторін цього трикутника дорівнює 34 см, а їх різниця — 6 см. Знайдіть довжини сторін цього трикутника.

163. Зобразіть у ПДСК точки $A(-2; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(1; -2)$, $D(6; -2)$, $E(6; 1)$. Доведіть, що $\angle DEC = \angle BCA$.

164. На рис. 38 зображено чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\angle 1 = \angle 2$, $BC = AD$, $AB = 10$ см, $\angle ADC = 115°$. Знайдіть довжину сторони CD і градусну міру кута ABC.

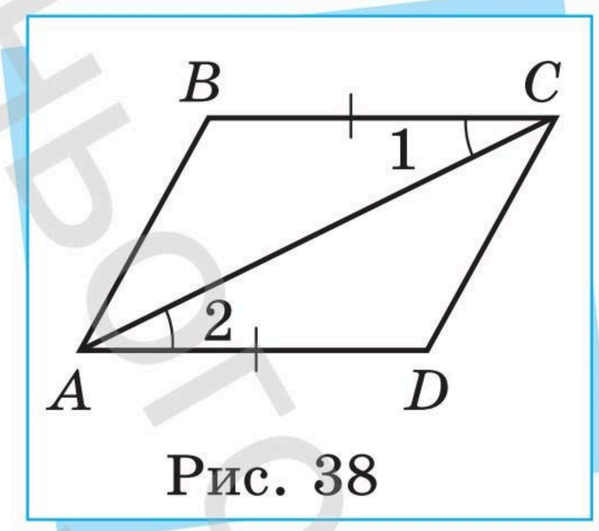


Рис. 38

165. Трикутник KLM — рівнобічний з основою KM. Знайдіть довжини сторін цього трикутника, якщо його бічна сторона на 10 см більша за основу, а периметр трикутника дорівнює 80 см.

166. Зобразіть у ПДСК точки $A(-7; 0)$, $B(5; 0)$, $C(0; -6)$, $D(0; 6)$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ABD$.

167. На рис. 39 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

168. Кути 1 і 2 — внутрішні односторонні, утворені в результаті перетину двох паралельних прямих січною. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо вони відносяться як $4:5$.

169. У рівнобічному трикутнику кут при вершині на $30°$ менший від кута при основі. Знайдіть градусні міри кутів цього трикутника.

170. У $\triangle ABC$ зовнішній кут при вершині A втричі більший за внутрішній кут B і на $40°$ більший за внутрішній кут C. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів $\triangle ABC$.

171. У прямокутному трикутнику один із його гострих кутів становить 140 % від іншого гострого кута. Знайдіть градусні міри гострих кутів цього трикутника.

172. У рівнобічному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту AH (рис. 40). Знайдіть градусну міру кута B, якщо $\angle HAC = 34°$.

173. Відрізок AB є діаметром кола, а точка C належить колу. Також відомо, що довжина хорди BC дорівнює радіусу кола. Доведіть, що трикутник ABC — прямокутний.

174. Пані Василина вирішила побудувати клумбу і для цього накреслила її план (рис. 41). Їй потрібно розрахувати довжину бордюру для цієї клумби, щоб замовити потрібні для цього матеріали. Бордюр на плані виділено червоним кольором. Допоможіть пані Василині. Відповідь запишіть у метрах, округливши результат до десятих.

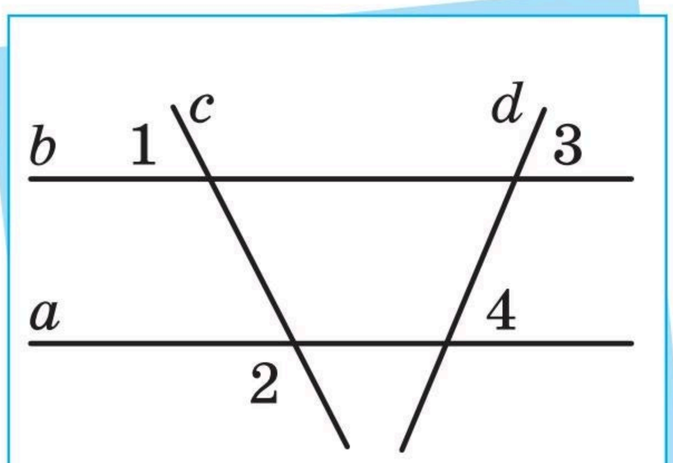


Рис. 39

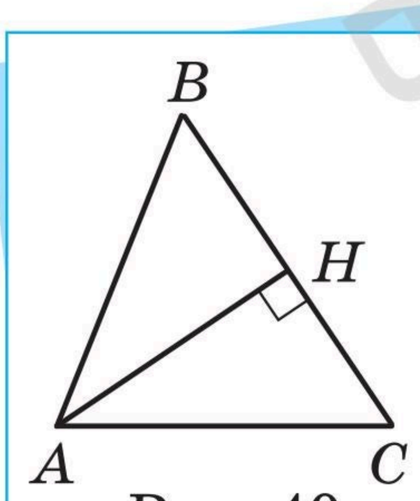


Рис. 40

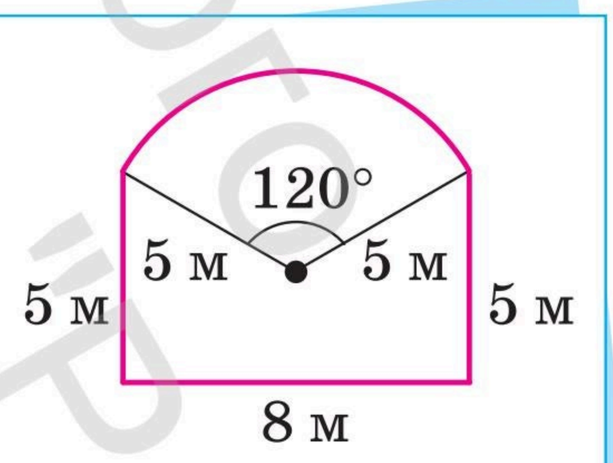


Рис. 41

175. Із точки A поза колом до кола проведено дотичну та січну, яка проходить через центр кола — точку O. Дотична дотикається до кола в точці C, а січна перетинає коло в точках K і M, причому точка K є внутрішньою точкою відрізка AO. Знайдіть градусну міру кута COM, якщо $\angle A = 55°$.

176. Відомо, що діаметр кола ділить хорди AB і CD цього кола, відмінні від діаметрів, навпіл. Доведіть, що прямі AB і CD — паралельні.

177. Навколо трикутника ABC із прямим кутом C описано коло діаметра 20 см. Зовнішній кут трикутника при вершині A дорівнює $120°$. Знайдіть довжину катета AC.

178. У рівнобічний трикутник ABC з основою AB вписано коло із центром у точці O, яке дотикається до сторін трикутника в точках M, N, K (рис. 42). Відомо, що $AC = 20$ см, а відрізок CN на 2 см довший за відрізок AN. Знайдіть довжину основи AB.

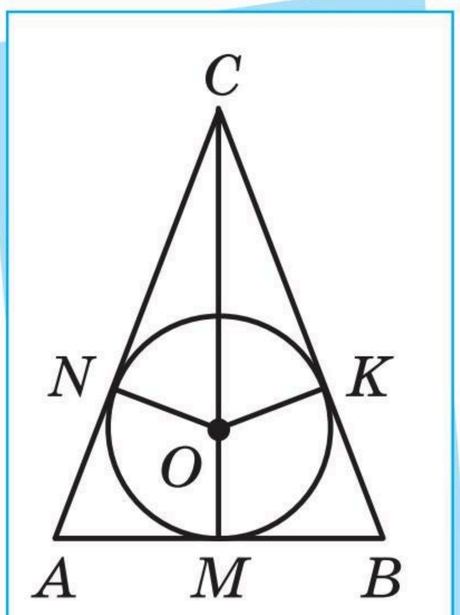


Рис. 38

179. Побудуйте кут, який дорівнює $\frac{3}{4}$ даного кута.

180. Побудуйте рівнобічний трикутник за бічною стороною і медіаною, проведеною до його основи.

181. Фахівці медичної клініки провели опитування учнів і учениць 7 класу стосовно того, скільки пачок морозива вони з'їли минулого тижня. За результатами було побудовано такий варіаційний ряд:

Кількість пачок морозива	0	1	2	3	4	5	6
Кількість учнів і учениць	2	4	8	7	6	2	1

Для цього варіаційного ряду знайдіть: а) обсяг вибірки; б) середнє арифметичне; в) моду. Побудуйте кругову діаграму та полігон частот.

182. Учні й учениці 7 класу написали самостійну роботу з української мови. Були одержані такі результати в балах: 4, 5, 8, 11, 11, 10, 12, 10, 9, 7, 7, 6, 9, 8, 9, 10, 3, 8, 12, 9. Знайдіть середнє арифметичне цієї вибірки та її медіану. За результатами заповніть таблицю та побудуйте для неї гістограму.

Рівень досягнень	Початковий (1–3 бали)	Середній (4–6 балів)	Достатній (7–9 балів)	Високий (10–12 балів)	Усього
Кількість учнів і учениць					

183. За умовою попереднього завдання. Знайдіть наближене значення ймовірності того, що оцінка за самостійну роботу з української мови учня або учениці досліджуваного класу буде відповідати: а) початковому рівню, б) середньому рівню, в) достатньому рівню, г) високому рівню. Відповідь запишіть у відсотках.

184. Із коробки навмання обирають одну цукерку. Відомо, що в цій коробці загалом 25 цукерок, причому частина цукерок із чорного шоколаду, а частина — з молочного. Імовірність того, що обрана цукерка буде з молочного шоколаду, дорівнює 0,4. Скільки в цій коробці цукерок із чорного шоколаду?

185. У квартирі є дві житлові кімнати, кожна з яких має форму прямокутного паралелепіпеда. Виміри першої кімнати — 4 м (довжина), 4 м (ширина), 3 м (висота), а другої — 6 м, 4 м, 3 м відповідно. На скільки відсотків об’єм

другої кімнати більший за об'єм першої кімнати (у відсотках від об'єму першої кімнати)?

186. За умовою попереднього завдання. Стіни та стелю кожної з кімнат збираються заклеїти шпалерами. Відомо, що 20% площі стін кожної з кімнат становлять вікна та двері. Скільки рулонів шпалер без малюнка розміром 60 см на 10 м потрібно придбати для виконання цих робіт?

Високий рівень

187. Знайдіть значення виразу $(2a+3b):c-d$, якщо:

а) $a=2{,}3;\ b=-1{,}6;\ c=\frac{2}{7};\ d=-1{,}7;$

б) $a=\frac{5}{7};\ b=-2\frac{3}{5};\ c=3\frac{13}{70};\ d=-2{,}3.$

188. Складіть вираз для обчислення периметра P і площі S плоскої фігури, зображеної на рис. 43.

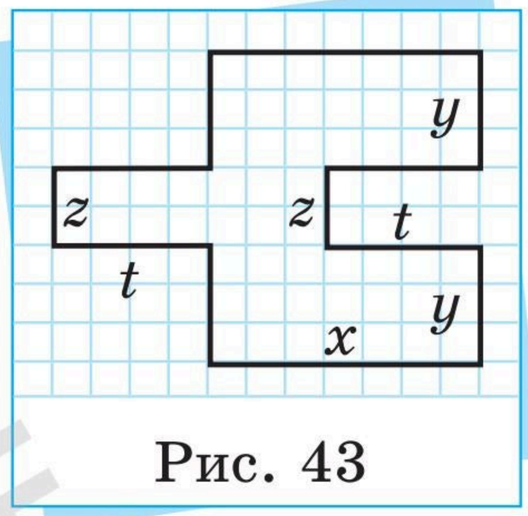


Рис. 43

189. Знайдіть значення виразу $2^{201}\cdot 7^{200}:14^{199}$.

190. З'ясуйте, який із виразів більший: 2^{2^5} чи $\left(2^2\right)^5$. Поясніть свою відповідь.

191. На рис. 44 зображено куб із ребром a, з якого вирізали два куби з ребром b. Складіть вирази для обчислення об'єму V і площі S поверхні отриманої деталі.

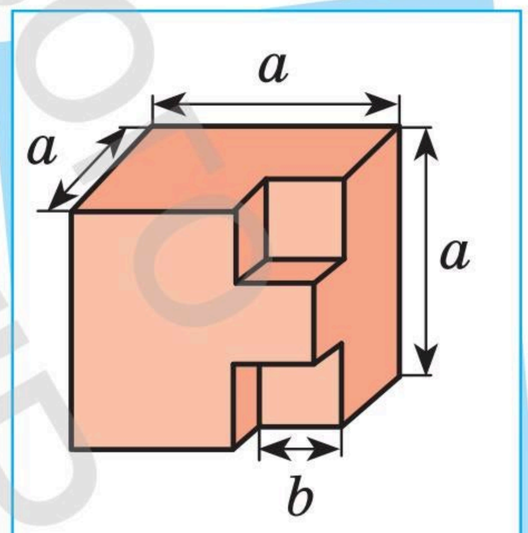


Рис. 44

192. Маса Землі приблизно 5 900 000 000 000 000 000 000 000 кг, маса Місяця приблизно 73 000 000 000 000 000 000 000 кг. Запишіть кожне число в стандартному вигляді. Скільки відсотків від маси Землі складає маса Місяця (відповідь округліть до десятих частин відсотка)?

193. Спростіть вираз.

а) $\left(-3x^3yz^2\right)^4\cdot\left(y^3z\right)^2\cdot\left(-2x^2z\right)$; б) $\left(-2a^3b^4\right)^3\cdot\left(ab^3c\right)^4\cdot\left(-0{,}2a^2c\right)$.

194. Відомо, що $3a^3b^5=7$. Знайдіть значення виразів: а) $27a^9b^{15}$; б) $162\,a^{15}b^{25}$.

195. Спростіть вираз $\left(a^2+2a-3\right)-\left(3a^2-5a-4\right)-\left(7a+3\right)$ і знайдіть його найбільше значення. Укажіть, за якого значення a досягається це значення.

196. Спростіть вираз $\left(4a^2+5a-7\right)-\left(2a^2-7a-2\right)+\left(1-12a\right)$ і знайдіть його найменше значення. Укажіть, за якого значення a досягається це значення.

197. Доведіть, що сума чисел $\overline{aba}$ і $\overline{bab}$ ділиться на 111.

198. Доведіть, що різниця чисел $\overline{abb}$ і $\overline{bba}$ ділиться на 11.

199. Спростіть вираз $\left(a^2-2a+3\right)\left(a+1\right)-\left(a^3-a^2+2\right)$, а потім знайдіть його значення, якщо $a=-\frac{2}{3}$.

200. Розкладіть поліном на множники.

а) $a^3+b^3+a^2b+ab^2$; б) $x^3y+y+x^2y^2+x$.

201. Спростіть вираз $\left(2a+3b\right)^2+\left(2a-3b\right)^2+\left(2a-3b\right)\left(2a+3b\right)$.

202. Знайдіть всі значення a, за яких вираз $\left(4x-1\right)^2+\left(3x+3\right)^2+a$ є квадратом деякого бінома.

203. Розкладіть вираз на множники.

а) $4x^2+4x+1-9y^2$; б) $2a-4b+a^2-4ab+4b^2$.

204. На координатній площині позначте точки $A(-6;4)$, $B(2;4)$, $C(2;-3)$. Побудуйте четверту точку D так, щоб утворився прямокутник $ABCD$. Запишіть координати точки D. Знайдіть периметр P і площу S прямокутника $ABCD$, вважаючи, що одиничні відрізки на осях дорівнюють 1 см.

205. Графіком функції $y=f(x)$ є ламана $ABCDE$, де $A(-1;1)$, $B(2;-2)$, $C(5;-2)$, $D(6;-3)$, $E(7;-6)$. Побудуйте цей графік. За графіком знайдіть: 1) усі натуральні значення x, за яких значення функції дорівнює -2; 2) усі цілі значення x, за яких значення функції більші за -2.

206. Необхідна кількість годин сну для людини у віці до 18 років обчислюється за формулою $y=17-0{,}5x$, де x — вік у роках, y — число годин сну. Знайдіть: 1) значення y, якщо $x=12$; 2) значення x, якщо $y=15$. Побудуйте графік залежності y від x для значень аргументу від 0 до 18 (включаючи і крайні значення).

207. Побудуйте графік функції $y=-2x-6$. За графіком визначте координати точок перетину графіка з осями координат.

208. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків функцій (якщо вони існують): $y=x^2-5x+4$ і $y=x(x-7)$.

209. Розв'яжіть рівняння $(y-5)(y+1)=(y-3)^2$.

210. Розв'яжіть рівняння $x^3-4x^2-x+4=0$, використовуючи розкладання на множники.

211. Яблука в процесі сушки втрачають 84 % своєї маси. Знайдіть, скільки потрібно взяти свіжих яблук, щоб отримати 32 кг сушених.

212. Побудуйте графік рівняння $(x+1)^2 - y = (x+3)(x-2)$, попередньо за допомогою рівносильних перетворень звівши його до найпростішого вигляду.

213. Побудуйте графік рівняння $x^2 - 8x + 16 - 4y^2 = 0$, попередньо за допомогою рівносильних перетворень звівши його до сукупності лінійних рівнянь.

214. Спростіть систему рівнянь і розв'яжіть її зручним методом.

$$\begin{cases} x(x-2) + 3y = (x-3)^2 + 6, \\ 2(x+1) = 3y + 5. \end{cases}$$

215. Графік лінійної функції $y = ax + b$ проходить через точки $(1; 2)$ і $(-2; 11)$. Знайдіть значення a і b.

216. Першого року фермер зібрав із двох полів 460 т зерна. Другого року на першому полі урожай збільшився на 15 %, на другому — на 10 %, а загальний урожай зерна склав 516 т. Знайдіть, скільки тонн зерна було зібрано з кожного поля першого року.

217. За допомогою діаграм Венна покажіть співвідношення між обсягами таких понять: «натуральне число» (N), «натуральне число, кратне 3» (A), «натуральне число, кратне 4» (B). Яке поняття відповідає перетину обсягів понять A і B?

218. Запропонуйте поняття, пов'язані з розділом «Лінійні рівняння», відношення між обсягами яких можна зобразити так, як показано на рис. 45.

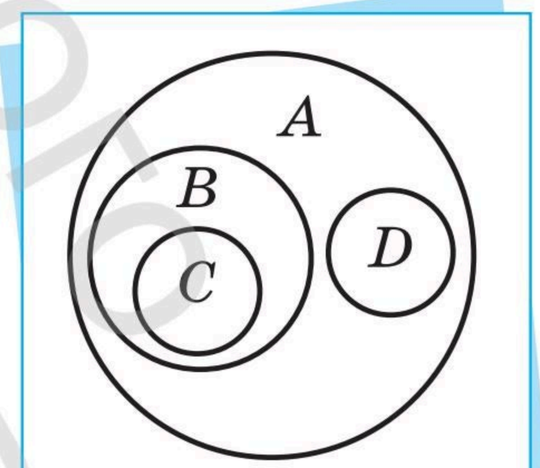


Рис. 45

219. Доведіть методом від супротивного, що із чотирьох натуральних чисел обов'язково знайдуться два, які дають однакові остачі в результаті ділення на 3.

220. Доведіть, що значення виразу $x^2-10x+26$ є додатним за будь-якого значення змінної x.

221. Довжина відрізка AB дорівнює 3 см. На відрізку взяли точки P і K так, що $AP=1{,}7$ см, $BK=1{,}8$ см. Знайдіть довжину відрізка PK.

222. На прямій розташовані точки A, B, C і D. Знайдіть, які значення може приймати довжина відрізка AD, якщо $AB=1{,}2$ см, $BC=1{,}4$ см, $CD=1{,}7$ см.

223. Градусні міри двох кутів відносяться як 1 : 3, а суміжних до них кутів — як 4 : 3. Знайдіть градусні міри всіх цих кутів.

224. Градусна міра кута AOB дорівнює 40°, а кута BOC — 80°. Знайдіть градусну міру кута між бісектрисами заданих кутів. Розгляньте всі можливі випадки розміщення заданих кутів.

225. Сума градусних мір двох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, дорівнює 160°. Доведіть, що ці кути вертикальні.

226. Сума градусних мір двох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, на 100° більша за суму градусних мір двох інших кутів. Знайдіть градусні міри всіх цих кутів.

227. У трикутнику MKP (рис. 46) проведено медіани MB, KF, PL. Периметр трикутника MKP дорівнює 26 см; $BP=3$ см, $LM=4$ см. Знайдіть довжину відрізка MF.

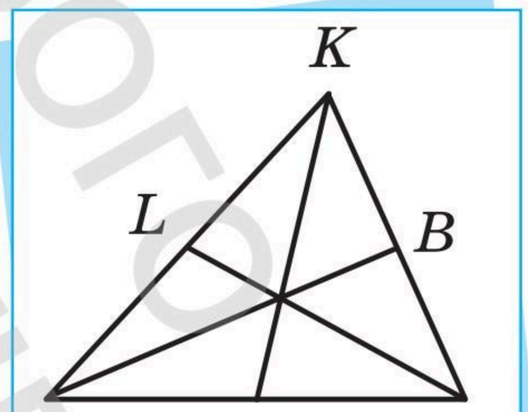


Рис. 46

228. Доведіть: якщо в трикутнику ABC проведено медіану BM і $BA+AM=BC+CM$, то трикутник ABC є рівнобічним.

229. У трикутнику ABC провели медіану BM. На промені BM вибрали точку K так, що $MK = BM$. Доведіть, що $AK = BC$ і $CK = AB$.

230. На основі BC рівнобічного трикутника ABC позначили точки M і K так, що $BM = CK$. Доведіть, що $AM = AK$.

231. Два кути трикутника рівні. Доведіть, що бісектриси трикутника, проведені з вершин цих кутів, рівні.

232. На рис. 47 точки D і E — середини рівних сторін рівнобічного трикутника ABC. Перпендикуляри до цих сторін перетинають протилежні бічні сторони в точках K і F. Доведіть, що $\angle DFK = \angle EKF$.

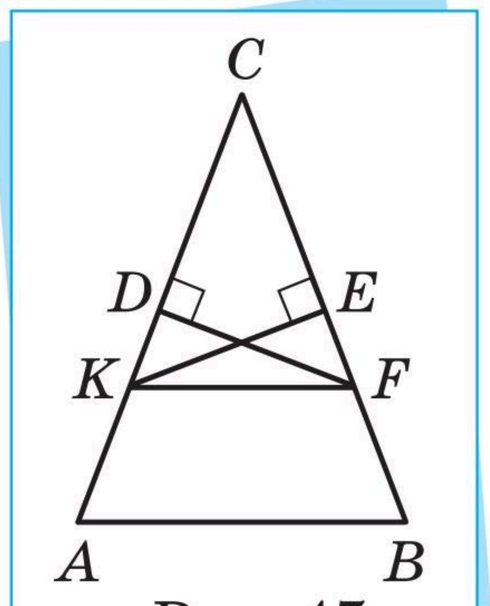


Рис. 47

233. Сума градусних мір трьох кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, дорівнює 234°. Знайдіть градусні міри всіх восьми утворених кутів (відмінних від розгорнутих). Скільки розв'язків має задача?

234. Бісектриси відповідних кутів, утворених у результаті перетину прямих a і b січною c, лежать на паралельних прямих. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

235. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 30°. Доведіть, що медіана та висота трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять його на три рівні частини.

236. Чи можуть дві бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинатися під прямим кутом?

237. Через точку A кола із центром у точці O проведено діаметр AB і хорду AC. Доведіть, що кут BAC вдвічі менший за кут BOC.

238. У колі проведено дві паралельні хорди. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини цих хорд, проходить і через центр кола.

239. Знайдіть кут між дотичними до кола, якщо кут між радіусами, проведеними в точки дотику, дорівнює 100°.

240. До кола, радіус якого дорівнює 20 см, проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні. Знайдіть відстань від точок дотику до точки перетину дотичних.

241. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, якщо висота трикутника дорівнює 12 см.

242. Знайдіть периметр прямокутного трикутника з радіусом описаного кола 5 см і радіусом вписаного кола 2 см.

243. Побудуйте рівнобічний трикутник за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

244. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

245. У вибірці 10, 26, 34, 42, x, 50, 52, 54 пропущено число x. Знайдіть це число, якщо: 1) середнє арифметичне значення вибірки дорівнює 39; 2) мода дорівнює 34; 3) медіана дорівнює 43.

246. У коробці лежать 20 білих кульок і декілька чорних і червоних. Знайдіть, скільки в коробці чорних кульок і скільки червоних, якщо ймовірність витягти навмання чорну кульку дорівнює 0,4, а червону — 0,2.

247. Петрик виготовив два куби. Для цього він зробив їх ребра з дроту й обклеїв одержані каркаси папером. Довжина ребра одного куба a см, довжина ребра іншого куба — $2a$ см. Знайдіть: 1) скільки дроту пішло на виготовлення каркасів; 2) яка загальна площа паперу, витраченого на виготовлення кубів.

248. Який із зображених кубиків (1–4) можна склеїти з поданої розгортки (рис. 48)? Обґрунтуйте свою відповідь.

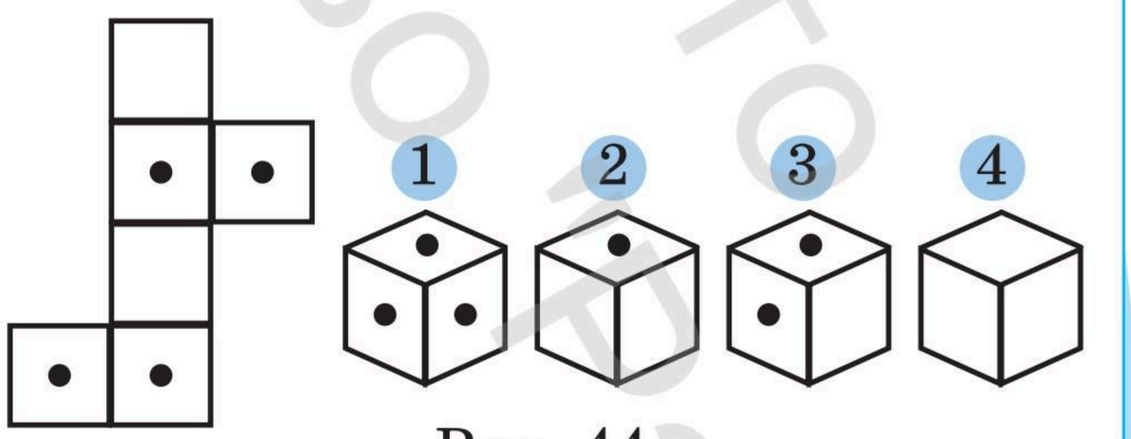


Рис. 44

ВІДПОВІДІ

Розділ 6. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ. ТРИКУТНИКИ

§ 18. Паралельні та перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими

Тренажерний зал

1. Ні.

3. а) $\angle 1 = 135°$, $\angle 2 = 45°$; б) $\angle 1 = 60°$, $\angle 2 = 120°$; в) $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 150°$; сума градусних мір суміжних кутів дорівнює $180°$.

4. а) $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 30°$; б) $\angle 1 = 110°$, $\angle 2 = 110°$; в) $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 50°$; градусні міри вертикальних кутів рівні; у випадках *а*, *в*.

5. Кутів 2, 4. **6.** $\angle 1 = 140°$, $\angle 2 = 40°$, $\angle 3 = 140°$, $\angle 4 = 40°$.

7. Кутів 1, 3. **8.** $\angle 1 = 65°$, $\angle 2 = 115°$, $\angle 3 = 65°$, $\angle 4 = 115°$.

9. а) AB; б) AC; в) BC; довжина відрізка AB.

10. а) KM; б) KL; в) LM; довжина відрізка KM.

11. а. **12.** а.

13. а) Так; б) так; в) ні; г) так. **14.** а) Ні; б) так; в) ні; г) ні.

17. 32°. **18.** 67°. **19.** 40°. **20.** 15°.

21. 31°, 34°, 115°, 115°. **22.** 42°, 112°, 26°, 26°.

23. 50°, 50°, 130°, 130°. **24.** 60°, 60°, 120°, 120°.

27. 50 м на південь і 30 м на схід. **28.** 50 м на південь.

29. $a \parallel b$; $a \perp d$; $b \perp d$. **30.** $a \parallel d$; $b \parallel c$; $a \perp b$; $a \perp c$; $b \perp d$; $c \perp d$.

33. 75°, 75°, 105°, 105°.

34. 70°, 70°, 110°, 110°; градусна міра кута між прямими 70°.

35. 105°. **36.** 160°. **37.** 2. **38.** 3.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) Коренів немає; б) коренем є будь-яке число. **3.** 2,95 %.

4. а) НСД(24, 32) = 8; НСК(24, 32) = 96; б) НСД(120, 108) = 12; НСК(120, 108) = 1080; в) НСД(135, 75) = 15; НСК(135, 75) = 675.

§ 19. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники. Висота, бісектриса, медіана трикутника

Тренажерний зал

1. а) Так; б) так; в) так; г) так. **2.** а) Ні; б) так; в) так; г) ні.
3. а, б, г. **4.** а, в, г. **5.** а. **6.** б, в. **7.** Медіана. **8.** Висота.
9. Висота. **10.** Бісектриса.
15. $\angle K = 45^\circ$, $AB = 5$ см. **16.** $\angle D = 105^\circ$, $PN = 12$ см.
17. 33 см. **18.** 29 см. **19.** 8 см, 8 см, 8 см. **20.** 13 см.
21. 7 см, 12 см, 14 см. **22.** 8 см, 16 см, 24 см.
23. 15 см, 20 см, 25 см. **24.** 14 см, 18 см, 22 см.
25. 36 см. **26.** 42 см. **27.** 31 см, 35 см. **28.** 51 см, 54 см.
29. 7 см, 15 см, 13 см. **30.** 17 см, 15 см, 10 см.
31. *Вказівка.* Розгляньте півплощини, на які задана пряма розбиває площину, та розміщення вершин трикутника в цих півплощинах.
35. 5 см. **36.** 48 см. **37.** 13 см. **38.** 16 см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 6,5. **2.** а) $2ab^2\left(2a^3 - 3b^2\right)$; б) $3\left(3x^2 - 2y^3\right)\left(3x^2 + 2y^3\right)$. **3.** 1 кг яблук — 35 грн, 1 кг груш — 60 грн. **4.** Супротивне: «Олекса не одягав на свято білу сорочку»; протилежні: «Олекса одягнув на свято синю сорочку», «Олекса одягнув на свято червону сорочку» тощо. **5.** $x = 15$, $y = 12$.

§ 20. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Тренажерний зал

1. а) $\triangle AOB = \triangle COD$; б) $\triangle AHB = \triangle CHB$; в) рівних трикутників немає.
2. а) $\triangle DAB = \triangle BCD$; б) рівних трикутників немає; в) $\triangle ABC = \triangle EBD$.
3. а) $\triangle ABC = \triangle MNQ$; б) $\triangle ABC = \triangle CDA$; в) $\triangle ABN = \triangle CBO$.
4. а) $\triangle ABC = \triangle CDA$; б) $\triangle CDA = \triangle ABC$; в) $\triangle ABD = \triangle CBD$.
5. $NK = 2$ см; $\angle A = 50^\circ$. **6.** $DN = 3$ см; $\angle K = 60^\circ$.
7. $\angle N = 25^\circ$. **8.** $\angle A = 35^\circ$; $\angle L = 95^\circ$; $ML = 2$ см; $CB = 3$ см.
11. Так, за двома сторонами та кутом між ними.

12. Так, за двома сторонами та кутом між ними.
13. Так, за стороною та прилеглими до неї кутами.
14. Так, за стороною та прилеглими до неї кутами.
15. Ні, тому що за ознакою рівності рівні кути мають бути між відповідними рівними сторонами.
16. Ні, тому що за ознакою рівності рівні кути мають бути прилеглими до рівних сторін.
17. $AQ = 4$ см. **18.** $AD = 2$ см. **19.** $AC = 8$ см. **20.** $BC = 3$ см.
21. $BD = 7$ см. **22.** $AB = 6$ см. **23.** $85°$. **24.** $87°$.
27. $OD = 7$ см; $AB = 10$ см. **28.** $CD = 5$ см; $AO = 6$ см.
29. $92°$. **30.** $88°$. **31.** 7 см. **32.** $32°$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $-b - b^3$; б) $-16c - 2c^2$. **2.** а) Так, $(4; -1)$; б) ні. **3.** 1750 грн.
5. Неправильно.

§ 21. Рівнобічний і рівносторонній трикутники. Третя ознака рівності трикутників

Тренажерний зал

1. $\triangle ABD$; $\triangle BCD$; $\triangle PQS$. **2.** $\triangle EFO$; $\triangle OPE$.
3. Так, за трьома сторонами. **4.** Так, за трьома сторонами.
5. Ні. **6.** Ні.
7. а) $\angle R = 60°$; б) $\angle A = 25°$; в) $BC = 2{,}5$ см; г) $ST = 4$ см.
8. а) $\angle P = 55°$; б) $\angle M = 70°$; в) $OC = 5$ см; г) $MC = 4{,}5$ см.
9. 12 см. **10.** 5 см. **11.** 21 см. **12.** 7 см.
13. Так, кути A і B рівні. **14.** Так, кути A і B рівні.
15. 20 см. **16.** 26 см.
17. Провести медіану з вершини B.
18. Провести висоту з вершини B.
19. Так, тому що $MB = KB$. **20.** Так, тому що $\angle OBC = \angle OCB$.
25. а) 3,2 м; 3,2 м; 6,2 м; б) 5,2 м; 5,2 м; 2,2 м.
26. а) 21 см; 21 см; 14 см; б) 16 см; 16 см; 24 см.
27. $120°$. **28.** $36°$.
31. 6 см. *Вказівка.* З'єднайте відрізком точки B і D та розгляньте утворені трикутники.

32. 30°. **33.** 50°.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}25$; б) $y_1 = 7$, $y_2 = -7$; в) $t = 4$. **2.** 45,3 %. **3.** $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(-3) = 28$; $(1; 0)$, $(0{,}5; 0)$. **4.** Правильно. **5.** Так; $1 \cdot 17 \cdot 6 - 7 + 5$.

Готуємося до контрольної роботи № 1 до розділу 6

1) Б; 2) В; 3) В; 4) Г; 5) Д; 6) Г; 7) 8 см; 8) 80°; 9) 20°; 10) а) 6, б) 9; 11) $y = -\frac{1}{2}x$.

Завдання підвищеної складності

1. 8 см. **2.** 10 см.

§ 22. Ознаки паралельності прямих. Властивості кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною

Тренажерний зал

1. а) 4 і 5, 3 і 6; б) 1 і 7, 2 і 8; в) 1 і 5, 3 і 7, 2 і 6, 4 і 8; г) 1 і 4, 3 і 2, 5 і 8, 6 і 7.

2. а) 4 і 6, 3 і 5; б) 1 і 8, 2 і 7; в) 1 і 2, 3 і 4, 5 і 6, 7 і 8, 1 і 3, 2 і 4, 6 і 8, 5 і 7; г) 1 і 4, 3 і 2, 5 і 8, 6 і 7.

3. а) 3; б) 4; в) 2. **4.** а) 4; б) 3; в) 1.

7. а) Так; б) ні; в) так. **8.** а) Ні; б) так; в) ні. **9.** 2 см. **10.** 3 см.

15. а) Так; б) ні; в) так. **16.** а) Ні; б) так; в) так.

17. 100°. **18.** 155°.

19. Так. Оскільки трикутник BAD рівнобічний, то внутрішні різносторонні кути DBC і BDA рівні, отже, прямі AD і BC паралельні.

20. Так. Оскільки при паралельних прямих внутрішні різносторонні кути DBC і BDA рівні, то в трикутнику DAB два рівні кути, отже, трикутник DAB рівнобічний.

23. Так. **24.** Ні. **27.** 75° і 105°. **28.** 36° і 144°.

29. 4 кути по 40° і 4 кути по 140°.

30. 4 кути по 30° і 4 кути по 150°.

Підручник у вільному доступі. Проект майбутнього

31. 2 розв'язки: 4 кути по 82° і 4 кути по 98°; 4 кути по 66° і 4 кути по 114°.
32. 2 розв'язки: 4 кути по 86° і 4 кути по 94°; 4 кути по 78° і 4 кути по 102°.
35. 80°. *Вказівка.* Через точку O провести пряму, паралельну AB і CD.
36. 90°.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 4; б) 3; в) 25. **2.** 3150. **3.** а) $(2;-3)$; б) $(4;-1)$. **4.** Ні; точка перетину $(1;1)$.

§ 23. Сума кутів трикутника

Тренажерний зал

1. а) Ні; б) так; в) так; г) ні. **2.** а) Так; б) так; в) ні; г) ні.
7. а) 20°; б) 80°; в) 90°. **8.** а) 60°; б) 70°; в) 120°.
9. 120°. **10.** 20°. **11.** 100°. **12.** 130°. **17.** 110°. **18.** $\angle A = \angle C = 15°$.
19. 110°. **20.** 125°. **21.** 36°, 54°, 90°. **22.** 40°, 60°, 80°.
23. 55°, 55° або 40°, 70°. **24.** 65°, 65° або 50°, 80°.
25. 30°, 80°. **26.** 40°, 80°.
27. 45°, 45°, 90°або 36°, 72°, 72°. **28.** 30°, 30°, 120° або 20°, 80°, 80°.
29. 155°. **30.** 30°, 30°, 120°. **31.** 30°, 70°, 80°. **32.** 20°, 40°, 120°.
33. 50°. **34.** 80°.
37. Навпроти найбільшої сторони трикутника розташований його найбільший кут. *Вказівка.* Відкладіть на більшій стороні трикутника меншу сторону та порівняйте кути утворених трикутників.
38. Навпроти найбільшого кута трикутника розташована найбільша його сторона. *Вказівка.* Використайте метод від супротивного, результат завдання 37 і властивість рівнобічного трикутника.
39. *Вказівка.* У трикутнику ABD порівняти величини кутів при вершинах A та D і використати результат завдання 38. 1) Наприклад, на продовженні сторони AB за точку A відкласти відрізок AM, рівний AC, і розглянути трикутник BCM.

Підручник перевірено Міністерством освіти і науки України

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $-18x^4y^6$; б) $8a^3b^4c^3$. **2.** а) 3; б) $\{-4; -2; 0; 2; 4; 6\}$; в) $\{-10; -6; 0; 3\}$; г) 3; д) -10. **3.** 36 %. **4.** Трикутна й чотирикутна піраміди; грані; ребра.

§ 24. Прямокутний трикутник і його властивості. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Тренажерний зал

1. в. **2.** а, б, в. **3.** б. **4.** а.

5. а) За двома катетами; б) за гіпотенузою та гострим кутом; в) за катетом і протилежним гострим кутом; г) за гіпотенузою та катетом.

6. а) За гіпотенузою та гострим кутом; б) за гіпотенузою та катетом; в) за катетом і протилежним гострим кутом; г) за двома катетами.

7. а) Ні; б) так, за катетом і прилеглим гострим кутом; в) ні.

8. а) Так, за гіпотенузою та катетом; б) ні; в) так, за катетом і прилеглим гострим кутом.

9. 20 м. **10.** 30°. **11.** 58°. **12.** 27°. **13.** 6 см. **14.** 14 см.

15. а) $\triangle BAD = \triangle DCB$ за гіпотенузою та катетом; б) $\triangle SEF = \triangle ERF$ за гіпотенузою та гострим кутом; в) $\triangle SPM = \triangle TKM$ за гіпотенузою та катетом.

16. а) $\triangle AED = \triangle BFD$ за гіпотенузою та катетом; б) $\triangle ADB = \triangle BCD$ за гіпотенузою та гострим кутом; в) $\triangle ADO = \triangle BCO$ за гіпотенузою та гострим кутом.

17. $(0; -2)$ або $(-3; 0)$. **18.** $(4; 0)$ або $(0; 3)$.

19. 34° і 56°. **20.** 37° і 53°. **21.** 36° і 54°. **22.** 40° і 50°.

23. 90°, 52°, 38°. **24.** 90°, 50°, 40°. **25.** 30° і 60°. **26.** 15° і 75°.

33. 90°, 60°, 30°. **34.** 4 см. **35.** 5°. **36.** 35°, 55°. **37.** 32 см. **38.** 9 см.

39. Наприклад: $A(-3; 12)$, $B(2; 2)$.

40. Наприклад: $K(2; 1)$, $N(-2; 5)$.

44. 75°.

47. *Вказівка.* Використайте результат завдання 46.

48. *Вказівка.* Проведіть $MH_1 \perp BC$, порівняйте трикутники CMH_1 і CMH, а потім врахуйте, що трикутник ACM — рівнобічний і те, що в трикутнику MH_1B катет дорівнює половині гіпотенузи.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $2-8x$; б) $4-7a^2$. **2.** Дорослий — 150 грн, дитячий — 80 грн. **3.** Так, усі три точки належать прямій $y=2x-4$. **5.** Довжина кола — 20π см, площа круга — 100π см^2.

Готуємося до контрольної роботи № 2 до розділу 6

1) В; 2) Г; 3) А; 4) Б; 5) Д; 6) В; 7) 115°; 8) 48°; 9) 88°; 10) 60°; 11) наприклад: $K(-2;5)$, $P(2;1)$; 12) 68 см.

Завдання підвищеної складності

1. 36°, 72°, 72°. **2.** 30°, 30°, 120°. **3.** 12°. **4.** 130°. **5.** 45°. **6.** 40°, 50°. **7.** 60°. **8.** 36°, 36°, 108°. **11.** 45°.

Розділ 7. КОЛО ТА КРУГ

§ 25. Коло, круг та їх частини. Довжини кола та дуги кола. Геометричне місце точок

Тренажерний зал

1. а) OD, OC, OM; б) DC; в) AB, DC.
2. а) OB, OC, OA; б) AB; в) AB, PQ.
5. а) Жовтим; б) блакитним. **6.** а) Блакитним; б) жовтим.
7. а) 1 см; б) 3,5 см; в) 5 см; г) 10,5 см.
8. а) 8 см; б) 10 см; в) 16 см; г) 31 см.
9. 212°. **10.** 125°.
11. Наприклад: $(2;0)$, $(2;-2)$, $(4;-3)$.
12. Наприклад: $(-1;0)$, $(2;1)$, $(5;-1)$.
13. а) Так; б) так; в) так; г) ні. **14.** а) Ні; б) ні; в) так; г) так.
17. а) 5,1 см; б) 3,75 см; в) $\frac{x}{2}$; г) $\frac{x+4,5}{2}$.

18. а) 0,5 см; б) 8,6 см; в) $2y$; г) $2y+3$.
19. Так. **20.** Ні. **21.** 167°, 193°. **22.** 163°, 197°. **23.** 4π см. **24.** 7 см.
25. 6π см. **26.** 18 см. **27.** 6π. **28.** 8π. **29.** 10 см; 50 см. **30.** 107 см.
31. Ні. **32.** Так. **35.** 60°. **36.** 120°. **37.** 40°. **38.** 25°.
39. 1 см. **40.** 2 см і 14 см. **45.** 100 см. **46.** 45°. **49.** 4 см. **50.** 24 см.
51. $(180:\pi)$ м. **52.** 72 м. **53.** 16 см. **54.** 14 см.
59. *Вказівка.* Використайте результати завдання № 40 у § 23, завдання № 46 у § 24 і рисунки до них.
60. *Вказівка.* Розгляньте точку перетину серединних перпендикулярів до двох сторін трикутника та обґрунтуйте, що це і є шукана точка.
61. Коло радіуса R із центром у точці A.
62. Пряма, паралельна даним, яка ділить навпіл відстань між даними прямими.
63. Плоский кут BAC.
64. Фігура, яка складається з плоского кута ABC і вертикального з ним плоского кута.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $-0{,}3$. **2.** а) 1,2; б) 3,5; в) -3. **3.** 80°.
4. $A=\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, $B=\{20, 40, 60, 80\}$, $B\subset A$.

§ 26. Січна та дотична. Властивість дотичної

Тренажерний зал

1. а) CD; б) CA; в) OB, OA. **2.** а) AB, BC; б) BD; в) OC, OA.
11. 4 см. **12.** 70°. **13.** в. **14.** а, б. **15.** 30°, 12 см. **16.** 60°.
17. Так, за трьома сторонами.
18. Так, за означенням дотичної до кола.
19. 70°. **20.** 30°. **21.** 43°. **22.** 100°. **23.** 10 см. **24.** 4 см.
25. 120°. **26.** 60°. **31.** 60°. **32.** 12 см.
35. *Вказівка.* З'єднайте точки K і N із точками O_1 і O_2 та розгляньте утворені рівні та рівнобічні трикутники.
36. *Вказівка.* Припустіть, що два кола перетинаються хоча б у трьох точках, і для довільних двох пар цих точок використайте результат завдання № 35.

37. *Вказівка.* Припустіть, що точка дотику K не лежить на прямій O_1O_2, проведіть перпендикуляр $KT \perp O_1O_2$, а на його продовженні відкладіть $TN = KT$. Враховуючи, що пряма O_1O_2 є серединним перпендикуляром до відрізка KT, обґрунтуйте, що точка N теж є спільною точкою обох кіл, що суперечить умові (див. рис. 9 до завдання № 30).

38. *Вказівка.* Використайте результат завдання № 37.

39. 10 см. **40.** 12 см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 15; б) 54. **2.** 60 км/год. **3.** а) ТОН; б) ПОРТ. **4.** 60°, 80°.

§ 27. Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане в трикутник

Тренажерний зал

1. б. **2.** в. **3.** У трикутник ABC. **4.** Навколо трикутника NMK.
5. OC. **6.** OD. **9.** а, б, г. **10.** б, в, г. **13.** 40°. **14.** 25°.
15. 5 см. **16.** 2 см. **17.** 5 см. **18.** 6 см. **19.** 2 см. **20.** 3 см.
21. 22 см. **22.** 8 см. **23.** 30 см. **24.** 12 см. **25.** 16 см. **26.** 5 см.
29. 50°. **30.** 140°. **33.** 28 см або 32 см. **34.** 8 см або 16 см.
35. 45°; 45°. **36.** 30°; 60°. **37.** 6 см. **38.** 10 см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 0; б) $16a^2 + 25b^2$. **2.** а) 5; б) 5,5. **3.** A, C, D. **4.** 1050. **5.** 5 см.

§ 28. Задачі на побудову

Тренажерний зал

29. *Вказівка.* Використайте побудову рівностороннього трикутника.

30. *Вказівка.* Побудуйте кут 60°, а потім проведіть його бісектрису.

31. *Вказівка.* Наприклад, візьміть до уваги, що $120° = 60° + 60°$.

35. *Вказівка.* Використайте план побудови бісектриси кута, наведений в опорній задачі 3 в § 28, тільки на заданій прямій виберіть довільну точку A та всі кола будуйте радіусом

$R = AK$, а для доведення паралельності використайте рівність кутів трикутників, розглянутих у доведенні.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $3ab(3b-2a)$; б) $(6m-7p)(6m+7p)$; в) $(3x+2)^2$. **2.** а) $(6;3)$; б) $(-1;2)$. **3.** 75 %.

4.



5. $\frac{4}{15}$.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 7

1) Б; 2) А; 3) Г; 4) Д; 5) Г; 6) В; 7) 9,4; 8) 130°; 9) 12; 10) наприклад: $(4;1)$ і $(-2;7)$; 11) 8π см, 12π см; 12) $a_1 = -13$, $a_2 = 7$.

Завдання підвищеної складності

1. 2 см, 3 см, 6 см.

2. 40 см.

3. 50°, 60°, 70°.

6. *Вказівка.* Використайте формули для знаходження відповідних радіусів кіл і позначення, запропоновані на рис. 2.

7. 30°, 60°. *Вказівка.* Використовуючи формулу для радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник, покажіть, що гіпотенуза вдвічі більша за катет.

8. 45°, 45°.

10. *Вказівка.* Побудуйте допоміжний прямокутний трикутник, утворений заданими висотою і стороною.

11. *Вказівка.* Побудуйте допоміжний прямокутний трикутник AMH, утворений висотою AH і медіаною AM, а потім

візьміть до уваги, що центр O описаного кола розташований на заданій відстані R від точки A та на серединному перпендикулярі до сторони BC (тобто на прямій MO, перпендикулярній до MH).

12. *Вказівка.* Побудуйте заданий кут AMB і відкладіть на одній його стороні задану медіану MA, а потім використайте вказівку до завдання № 11 стосовно центра описаного кола.

Розділ 8. СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

§ 29. Статистичне дослідження та його етапи

Тренажерний зал

1. а, г, б, в. **2.** а, б, в. **3.** 6. **4.** 21. **5.** 6. **6.** 4.
7. а) 7; б) 2; в) 12; г) 12. **8.** а) 7; б) 11; в) 153; г) 154.
9. а) 6; б) 29; в) 43; г) 43,14. **10.** а) 6; б) 29; в) 11; г) 11,72.

11.

Варіанти	0	1	2	3	4
Частоти	6	12	10	5	1

33 респонденти; $Mo = 1$; середнє значення 1,5.

12.

Варіанти	1	2	3	4
Частоти	5	8	11	6

30 респондентів; розмах 3; середнє значення 2,6.

13. $Me = 12$; середній вік 11,5. **14.** $Mo = 1$; $Me = 1$.
15. Із Польщі; 15 %; Італія та Іспанія. **16.** Морозиво; 49; фрукти.
19. а) 26; б) 3; в) 3,23. **20.** а) 26; б) 9; в) 8,96. **21.** 9,3. **22.** 24,2 °C.
25. 130, 125, 119. **26.** 160; 137,5; 144. **27.** 3,11; 2. **28.** 1,42; 4; 22.
29. 1) 20; 2) 28; 3) 22. **30.** 1) 20; 2) 14; 3) 21. **31.** 13. **32.** 34 і 17.
33. Збільшилися на 20. **34.** Збільшилися в 3 рази.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 0,88; б) 4,75. **2.** 140. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** а) САЛО; б) СОН.

Підручник Видавництва «Ранок»

§ 30. Статистичний підхід до обчислення ймовірностей подій

Тренажерний зал

1. 0; неможлива. **2.** 1; достовірна. **3.** $\frac{11}{20}$. **4.** $\frac{2}{15}$.

9. а) Випадкова; б) неможлива; в) достовірна.

10. а) Достовірна; б) випадкова; в) неможлива.

11. Так. **12.** Ні. **13.** $\frac{1}{20}$. **14.** $\frac{1}{20}$. **15.** $\frac{5}{7}$. **16.** $\frac{12}{28}$.

19. Герб, герб; число, число; герб, число; число, герб.

20. Чорний, чорний; чорний, червоний; червоний, чорний; червоний, червоний.

21. $\frac{1}{4}$. **22.** $\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{1}{5}$. **24.** $\frac{3}{5}$. **25.** 30. **26.** 21. **27.** $\frac{27}{40}$. **28.** $\frac{1}{4}$.

29. $\frac{1}{18}$. **30.** У Тетянки, у неї імовірність виграти більша.

31. 0,75. **32.** 0,25. **33.** 10. **34.** 8.

35. Олександра. **36.** Петра та Оксану.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 20. **3.** 11. **4.** $\angle A = 80°$, $\angle B = 25°$, $\angle C = 75°$.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 8

1) В; 2) А; 3) Б; 4) Б; 5) Г; 6) Д; 7) 1100; 8) 0,125; 9) 0,52; 11) а) $Mo = 3$, б) $Me = 3$, в) $R = 6$, г) $\bar{x} \approx 3{,}4$; 13) а) $Mo = 9$, б) $\bar{x} = 7{,}5$, в) $Me = 7{,}5$; 14) Дмитрик; у нього більша відносна частота влучання.

Завдання підвищеної складності

1. 1) 0,6; 2) 0,4; 3) 0,16. **2.** 1) 0,5; 2) 0,25; 3) 0,4375.

3. 0,625. **4.** 0,375.

5. 1) $\frac{1}{1461}$; 2) близько 200 осіб. *Вказівка*. Врахувати, що 29 лютого буває тільки у високосному році, тобто 1 раз на чотири роки, з яких три роки звичайні, а один — високосний.

6. 1) $\frac{1}{41}$; 2) близько 2000 рибин.

7. 1) 0; 2) $\frac{1}{6}$. **8.** 1) 1; 2) 0,25.

9. 1) 0,008; 2) 0,096; 3) 0,384. *Вказівка.* Кубики з трьома пофарбованими гранями — кутові — їх 8; тільки з двома — на ребрах — їх 8 на кожному ребрі $(12 \cdot 8 = 96)$; тільки з однією — 64 на кожній грані $(6 \cdot 64 = 384)$.

Розділ 9. РОЗГОРТКИ МНОГОГРАННИКІВ

§ 31. Розгортки прямокутного паралелепіпеда, куба, правильних трикутної та чотирикутної пірамід. Виготовлення моделей

Тренажерний зал

3. 8 вершин, 12 ребер, 6 граней. **4.** 5 вершин, 8 ребер, 5 граней.
5. Чотирикутна піраміда. **6.** Куб.
7. Куб; 8 $см^3$; 24 $см^2$. **8.** Паралелепіпед; 6 $см^3$; 22 $см^2$.
9. г. **10.** б. **15.** 340 $см^2$. **16.** 324 $см^2$.
17. Із прямокутників; 6; прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, 48 $см^2$.
18. Із прямокутників і квадратів; 4 прямокутники, 2 квадрати; квадрат зі стороною 3 см, 9 $см^2$.
19. У формі куба; на 3000 $см^3$. **20.** Ні; 500 $см^3$.
23. 1350 $см^2$; 90 см. **24.** 184 г.
25. Зменшиться вдвічі. **26.** Зменшиться втричі.
29. а) 1; б) 5. **30.** а) 3; б) 4.
31. Ні; сума довжин усіх ребер дорівнює 120 см.
33. 4 вершини; 6 ребер; 4 грані.
34. Найкоротший шлях — за ламаною C_1MA, де M — середина ребра BC. *Вказівка.* Для обґрунтування використайте розгортку куба.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) -1; б) -1 і 1; в) 0; г) -5. **2.** а) 7; б) 2. **3.** 1 кг яблук — 40 грн; 1 кг слив — 60 грн. **4.** $85°$. **5.** а) $0{,}25\ \%$; б) $2\ \%$; в) $95\ \%$.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 9

1) Г; 2) А; 3) В; 4) Д; 5) 58,8; 6) 10; 7) 2 прямокутники зі сторонами 6 см і 8 см, 2 прямокутники зі сторонами 6 см і 9 см, 2 прямокутники зі сторонами 8 см і 9 см.

Завдання підвищеної складності

1. A із E і K; D із B; N із S. **2.** T із M; O із R; K із A і E.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ КУРСУ 7 КЛАСУ

1. а) 27; б) -18; в) $-1{,}3$; г) -8. **2.** $23x$; а: 46; б) $34{,}5$.

3. а) 32; б) 81; в) 1; г) 16; д) $0{,}001$. **4.** $2{,}061\cdot10^3$ м.

5. а) $15a$, степінь 1; б) $x^2\cdot b$, степінь 3; в) $4\cdot m^6\cdot b^7$; степінь 13; г) $24\cdot n^9$, степінь 9.

6. а) $64a^3$; б) c^2d^6; в) $81b^{12}x^4$.

7. а) $13b-5$; б) $4x^2+2x-6$; в) $7{,}1y^2-3y-21$; г) $-3a^3+4a$.

8. $10a+15b$. Так; поліном першого степеня.

9. а) $a(7a-2)$; б) $5b(b+2)$; в) $3b(2a-c)$; г) $2c^2(2c^2-7)$.

10. а) $ab-3b+5a-15$; б) $30x-7-8x^2$; в) $15a+12ac+35+28c$; г) $20+6d-2d^2$.

11. а) $(5-a)(5+a)$; б) $(c-7)(c+7)$; в) $(x+y)^2$; г) $(3-b)^2$.

12. а) $4-x^2$; б) $9+6a+a^2$; в) k^2-n^2; г) $n^2+10np+25p^2$.

13. $K(-3;5)$, $L(-2;-5)$, $M(6;0)$, $N(0;-6)$, $P(3;7)$, $Q(5;-3)$, $O(0;0)$. а) P; б) Q; в) L; г) K; д) M, O; е) N, O.

14. а) Немає; б) C; в) B; г) A; д) D; е) E.

15. а) $D(y)$: 0; 2; 4; 6; 8; 10; б) $E(y)$: 1; 2; 4; 6; 7; 9; в) $f(2)=7$; г) $f(8)=4$; д) $y=9$, якщо $x=4$.

16. а) $a=b+3$; б) $p=2x$; в) $s=vt$. **18.** Г. **19.** а; б; в.
20. а) $x=-5$; б) $x=-4$; в) $x=27$.
21. а) $x_1=3$, $x_2=-7$; б) $x_1=0$, $x_2=8$; в) $y_1=-4$, $y_2=-7$.
22. $60x=300$; $x=5$. **23.** а) Так; б) ні. **24.** $2x+3y=170$. **25.** Так.
26. $\begin{cases} x+y=800, \\ x-y=100. \end{cases}$
27. а) «тварина»; б) «меблі»; в) «фрукт»; г) «канцтовари».
28. в) «добро»; е) «вічність». **29.** б, г. **30.** а, в.
31. а) Безліч; б) одну; в) жодної; г) одну. **32.** 12 см.
33. а) Тупий; б) гострий; в) розгорнутий; г) прямий.
34. Так; так. **35.** $\angle 1=145°$, $\angle 2=35°$, $\angle 3=145°$, $\angle 4=35°$.
36. а) AB; б) AC; в) BC; відрізка AB. **37.** б, в, г.
38. а) 3; б) 2; в) 1. **39.** $\triangle ABD=\triangle CBD$, $\triangle KLM=\triangle MNK$.
40. $\angle N=60°$, $AC=5$ см, $NK=4$ см.
41. $\triangle ABD=\triangle CBD$, $\triangle KLN=\triangle MNL$.
42. $\triangle ABC$, $\triangle KLN$, $\triangle MLN$, $\triangle OPR$, $\triangle OSR$.
43. а) Внутрішні односторонні; б) відповідні; в) внутрішні різносторонні.
44. а) Так, б) так. **45.** а) Ні; б) так; в) так. **46.** 40°.
47. а) За гіпотенузою та гострим кутом; б) за двома катетами.
48. 15 м. **50.** 160°. **52.** $AB=AC+CB$. **53.** Г. **54.** А.
57. а) 6; б) 44; в) 24. **58.** а) 5; б) 7; в) 8. **59.** 1; достовірна.
60. $\frac{8}{15}$. **62.** Куб. **63.** $26x+12y$; 1002 грн.
64. а) 20; б) −45; в) 0,012; г) $\frac{1}{2}$.
66. а) $(-2,5)^6>0$; б) $(-3,5)^5<0$; в) $(1,5)^3>1$; г) $(0,4)^5<1$; д) $(1,2)^3<(1,2)^4$; е) $(-0,3)^3<(-0,3)^4$.
67. а) $2a^4b^3$, 7 степінь; б) $0,5x^4y^3$, 7 степінь; в) $\frac{2}{3}a^2b^2c^2$, 6 степінь.
68. а) $-6x^6y^7$; б) $-6a^2b^4$; в) $8x^6$; г) $81a^4b^8$.
69. а) $5ab^2-2$, $-ab^2+2b^2-4$; б) $8xy^2+4x^2y+7x$, $-6xy^2+2x^2y-3x$; в) $2ab-2a+6$, $-8ab+6a-8$; г) $2y^2$; $2x^2+2xy$.

70. $4{,}5x+3{,}5y$, так, полином 1 степеня, 12,5 га.
71. а) $14{,}6a^3-8a^2$; б) $3b^2c+7{,}5bc^2$; в) $10y^3+14y^2-12y$; г) $5x^3-36$.
72. а) $5x^3(2x-3)$; б) $6y^2(1-6x)$; в) $(a-b)(6+5c)$; г) $(m+a)(3n^2+4)$.
73. а) $4a^2-9$; б) $9x^2+24xy+16y^2$; в) $25c^2-30cd+9d^2$.
74. а) $(11y-13x)(11y+13x)$; б) $(2a-1)^2$; в) $(3x+5y)^2$.
75. $A(-2;1{,}5)$, II чверть; $B(-1{,}5;0)$, вісь абсцис; $C(0;0{,}5)$, вісь ординат; $D(2{,}5;0{,}5)$, I чверть; $E(1{,}5;-1{,}5)$, IV чверть.
76. а) Точка M; б) точка K. **77.** В. **79.** $(-6;-2)$.
80. $y=350x+50$; так. **81.** а) -10; б) -4. **82.** 200 грн.
83. а) 8 і -8; б) 0 і 3. **84.** 2 і -3.
85. Наприклад: $(1;1)$, $(5;0)$. **86.** Наприклад: $2x-y=0$.
87. а) $(2;0)$; б) $(4;-1)$. **88.** 14; 4.
89. «Яскравий»; це не колір. **90.** Наприклад: «олівець», «щастя».
91. Хибне; «Число 12 не ділиться націло на 5».
92. Істинне — *б*, хибні — *а*, *в*, *г*. **93.** Ні. **94.** 4,5 см, 7,5 см.
95. 16°. **96.** 50° і 40°.
97. 112°, 68°, 68°. Кут між прямими a і b дорівнює 68°.
98. 11 см. **99.** 18 см. **100.** 3 см. **102.** 30 см. **103.** 65°, 90°, 25°.
104. 105°. **105.** Ні. **106.** 65°, 45°, 70°. **107.** 150°.
108. 75°, 60°, 45°. **109.** 54°, 36°. **110.** а) 40 см; б) 20 см; в) 4π см.
111. а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **112.** 105,12 м. **113.** Б.
114. а) 63°; б) 32°. **115.** 2 см. **116.** В. **119.** а) 10; б) 2,2; в) 1.
120. а) 30; б) секція футболу; в) у 2 рази. **121.** 1–В, 2–Б, 3–А.
122. а) 0,25; б) 0,5 ; в) 0,375. **123.** $4a+4b$, або $4(a+b)$; 32 см.
124. 60. **125.** а) $-\frac{20}{21}$; б) $-\frac{11}{12}$. **127.** а) 0,25; б) 8. **128.** $1{,}393\cdot10^9$ м.
129. а) $-72m^7p^{11}$; б) $4x^5y^3$. **130.** а) $3c^2d^4$; б) $-\frac{1}{6}d^{10}$.
131. Сума: a^3-a^2+3a; різниця: $-a^3+5a^2+3a-24$.
133. а) $6x^2+x-2$; б) $-y^3+3y^2-y-2$.
134. а) $(2k^2+3)(2k-1)$; б) $(3c^2d^2-2c)(c+2d^2)$.

135. а) $18t^2-12xt$; б) $-\frac{1}{2}h^2+8h+4$.

136. а) $ab\left(4a^2-9b^3\right)\left(4a^2+9b^3\right)$; б) $2x\left(x-2\right)^2$.

137. а) Точка C; б) точка A.

138. Координати вершин: $(-4;2)$, $(3;2)$, $(3;4)$, $(5;4)$, $(5;-4)$, $(3;-4)$, $(3;-2)$, $(-4;-2)$; площа 44 см^2; периметр 30 см.

139. а) -2 і 3; б) ні; в) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; г) найменше -2, найбільше 3.

140. $y=45x+5$; $D(y)$ і $E(y)$ — додатні числа.

141. а) Так; точка перетину $(1;2)$; б) так, графіку функції $f(x)$.

142. 1–Б, 2–В, 3–А. **143.** а) Так, $x=1{,}4$; б) так, $x=1$.

144. 500 грн. **145.** а) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$; б) $x=-1$.

146. а) $x_1=1{,}5$, $x_2=4{,}5$; б) $x_1=-1$, $x_2=3$. **147.** $m=2{,}25$, $p=1\frac{1}{3}$.

148. $50x+40y=350$. **149.** а) $(3;1)$; б) $(2;-3)$.

150. Ширина 12 м, довжина 20 м.

152. а) «Літературний твір», «роман», «Тигролови»; б) «небесне тіло», «планета», «Юпітер».

155. $AC=16$ см; $BC=20$ см. **156.** 20. **157.** 35°. **158.** 140° і 40°.

159. 125°. **160.** Так, є; прямі a і c.

161. $AB=14$ см; $BC=21$ см; $AC=28$ см.

162. 20 см; 16 см; 14 см. **164.** $CD=10$ см; $\angle ABC=115°$.

165. $KL=LM=30$ см; $KM=20$ см. **168.** 80°; 100°.

169. 40°; 70°; 70°. **170.** $\angle A=60°$; $\angle B=40°$; $\angle C=80°$.

171. 37,5° і 52,5°. **172.** 68°. **174.** 28,5 м. **175.** 145°. **177.** 10 см.

178. 18 см. **181.** а) 30; б) 2,7; в) 2.

182. Середнє арифметичне 8,4; медіана 9.

183. а) 5 %; б) 15 %; в) 45 %; г) 35 %.

184. 15. **185.** На 50 %. **186.** 20 рулонів. **187.** а) 1; б) 0,3.

188. $P=2\left(x+2y+z+2t\right)$; $S=x\left(2y+z\right)$. **189.** 28. **190.** Перший.

191. $V=a^3-2b^3$; $S=6a^2$. **192.** $5{,}9\cdot10^{24}$ кг; $7{,}3\cdot10^{22}$ кг; 1,2 %.

193. а) $-162\,x^{14}y^{10}z^{11}$; б) $1{,}6a^{15}b^{24}c^5$. **194.** а) 343; б) $11\,205\frac{2}{3}$.

195. Найбільше значення дорівнює -2; досягається, якщо $a=0$.

196. Найменше значення дорівнює -4; досягається, якщо $a=0$.

199. $a+1;\ \frac{1}{3}$.

200. а) $\left(a^2+b^2\right)(a+b)$; б) $\left(x^2y+1\right)(x+y)$. *Вказівка.* Згрупуйте перший і третій члени, другий і четвертий члени.

201. $12a^2+9b^2$. **202.** -9.

203. а) $(2x+1+3y)(2x+1-3y)$; б) $(a-2b)(2+a-2b)$.

204. $D(-6;-3)$; $P=30$ см; $S=56$ см^2. **205.** 1) 2; 3; 4; 5; 2) -1; 0; 1.

206. 1) 11; 2) 4. **207.** $(-3;0)$, $(0;-6)$. **208.** $(-2;18)$. **209.** 7.

210. -1; 1; 4. **211.** 200 кг. **212.** $y=x+7$.

213. Графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $x-2y-4=0$ і $x+2y-4=0$.

214. $(3;1)$. **215.** $a=-3$, $b=5$. **216.** 200 т, 260 т.

217. Перетину відповідає поняття «натуральне число, кратне 12».

218. Наприклад: A — рівняння, B — рівняння з однією змінною, C — лінійне рівняння з однією змінною, D — рівняння з двома змінними.

220. *Вказівка.* Подайте заданий вираз у вигляді $(x-5)^2+1$.

221. 0,5 см.

222. 4,3 см; 0,9 см; 1,9 см; 1,5 см. *Вказівка.* Послідовно відкладайте задані відрізки та враховуйте всі можливі варіанти відкладання кожного наступного відрізка.

223. 20°; 60°; 160°; 120°. **224.** 20° або 60°. **226.** 40°; 40°; 140°; 140°.

227. 6.

233. Два розв'язки: 4 кути по 78° і 4 кути по 102° або 4 кути по 54° і 4 кути по 126°.

236. Ні. **239.** 80°. **240.** 20 см; 20 см. **241.** 8 см. **242.** 24 см.

245. 1) 44; 2) 34; 3) 44. **246.** Чорних кульок — 20, червоних — 10.

247. 1) $36a$ см; 2) $30a^2$ см^2. **248.** 3.

МАТЕМАТИКА

(інтегрований курс)

7 клас

ЧАСТИНА 2

Підручник написаний в інноваційному стилі та містить такі матеріали:

- Діалоги між учнями та вчителями для мотивації навчальної діяльності
- Відповідь на запитання «Навіщо ми це вивчаємо?» для кожного параграфа
- Запитання для самоперевірки засвоєння теоретичних знань
- Завдання різних рівнів для формування практичних навичок із математики
- Завдання для повторення та підготовки до вивчення нового матеріалу
- Завдання підвищеної складності
- Логічні блок-схеми «Головне в розділі» для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу
- «Цікавинки» — матеріал щодо історії виникнення математичних знань і їх застосування
- Відомості про досягнення українських математиків і їх внесок у науку

Електронний додаток до підручника містить:

- Онлайн-тестування за кожною темою з автоматичною перевіркою результату
- Авторські відео, що доповнюють і поглиблюють навчальний матеріал, сприяють його кращому усвідомленню та розширюють математичний кругозір.

Підручник проекту "Інтерактивний світ"