ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

Олександр Школьний
Євген Нелін
Андрій Миляник
Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

7

ЧАСТИНА 1



НОВА
УКРАЇНСЬКА
ШКОЛА

Олександр Школьний,
Євген Нелін,
Андрій Миляник,
Юлія Простакова

МАТЕМАТИКА

7

ЧАСТИНА 1

Підручник інтегрованого курсу для 7 класу
закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/106122
Електронний
інтерактивний додаток
до підручника

Київ • Харків
Видавництво «Ранок»
2024

Зміст

Вступ 3

Розділ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 1. Числові та буквені вирази. Тотожності 7
§ 2. Степінь із натуральним показником. Властивості степеня. Стандартний вигляд числа 18
§ 3. Мономи (одночлени) 32
§ 4. Поліноми (многочлени). Додавання і віднімання поліномів 40
§ 5. Множення поліномів. Розкладання поліномів на множники 51
§ 6. Формули скороченого множення 59

Готуємося до контрольної роботи до розділу 1 66
Завдання підвищеної складності 68
Головне в розділі 1 69

Розділ 2. ФУНКЦІЇ

§ 7. Прямокутна система координат на площині 71
§ 8. Поняття функції, способи задання функцій. Графік функції . . . 80
§ 9. Лінійна функція, її графік і властивості 104

Готуємося до контрольної роботи до розділу 2 118
Завдання підвищеної складності 122
Головне в розділі 2 123

Розділ 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

§ 10. Рівняння з однією змінною та їх корені. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться 125
§ 11. Рівняння, що розв'язуються за допомогою лінійних рівнянь. Математичні моделі 145
§ 12. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Рівняння прямої 155
§ 13. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними 167

Готуємося до контрольної роботи до розділу 3 184
Завдання підвищеної складності 186
Головне в розділі 3 188

Розділ 4. ПОНЯТТЯ ТА ЇХ ОЗНАЧЕННЯ, ТВЕРДЖЕННЯ ТА ЇХ ДОВЕДЕННЯ

§ 14. Поняття, означення понять 190
§ 15. Твердження та способи їх доведення 207

Готуємося до контрольної роботи до розділу 4 223
Завдання підвищеної складності 226
Головне в розділі 4 228

Розділ 5. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

§ 16. Найпростіші геометричні фігури на площині. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками 229
§ 17. Кут, види кутів. Бісектриса кута. Суміжні та вертикальні кути 249

Готуємося до контрольної роботи до розділу 5 268
Завдання підвищеної складності 270
Головне в розділі 5 272

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ
Проєкт до інтегрованого модуля 1.
Практичне використання числових і буквених виразів 276
Проєкт до інтегрованого модуля 2.
Історія виникнення геометричних учень 277

ВІДПОВІДІ 278

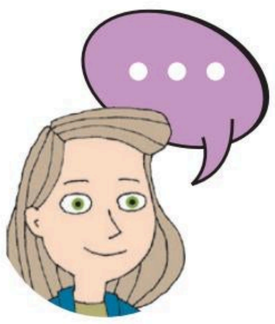
Вельмишановне панство!

Ви продовжуєте вивчати математику — науку, що водночас є корисною та цікавою. І користь від вивчення математики подвійна: з одного боку, за її допомогою можна знаходити розв'язки багатьох проблем, що виникають у повсякденному житті, а з іншого боку, математика — це своєрідний фітнес для розуму, який допомагає тримати ваше мислення в тонусі, готовим до багатьох сюрпризів навколишнього світу.

Щоб вивчення математики було цікавішим, вам допоможуть Петрик і Тетянка, які теж навчаються в 7 класі, а також учитель, учителька та дідусь Тарас — учитель математики на пенсії. Познайомтеся з аватарками наших персонажів:


Тетянка


Петрик


Учителька


Учитель


Дідусь Тарас

Теоретичний матеріал підручника подано у формі *чату*, у якому беруть участь згадані персонажі. Нижче — невеличка «екскурсія» підручником. Сподіваємося, вона буде цікавою та корисною!

Мотиваційна частина (для розуміння, «навіщо ми це вивчаємо»)

Рівняння з однією змінною та їх корені



Петрику, допоможи, будь ласка! Були з родиною в магазині, де мені купили светр, джинси та кросівки. Точно пам'ятаю, що кросівки коштували утричі більше за светр, а джинси — на 200 грн більше за светр. Разом за всі речі заплатили 3200 грн. А от скільки що коштувало — не пам'ятаю...





Спробуємо використати вирази! Нехай светр коштував x грн, тоді вартість джинсів буде $(x+200)$ грн, а вартість кросівок — $3\cdot x$ грн. Отже, загальна вартість покупки становитиме $x+(x+200)+3x$ грн.

Промінь позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких — початок променя. Наприклад, на рис. 17.1 зображено промінь AB.

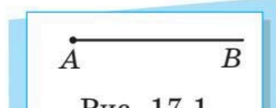


Рис. 17.1

Зауважимо, що поняття «лежати по один бік» є неозначуваним. Воно також інтуїтивно зрозуміле, як і поняття «належати» й «лежати між», та легко моделюється за допомогою рисунка.

Понять відрізка та променя стосується така аксіома.

На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і до того ж тільки один.

Із цієї аксіоми, зокрема, випливає, що рівні відрізки можна сумістити накладанням.

Геометричну фігуру, яка складається з двох променів, що мають спільний початок, називають кутом. Точку, яка є спільним початком променів, називають вершиною кута, а самі промені — сторонами кута.

Теоретичний матеріал

Основні властивості й теореми, зміст яких слід запам'ятати

Основні означення, аксіоми — їх формулювання слід запам'ятати

Приклади розв'язувань

Приклади

1. Розв'яжіть рівняння $16x^2 = 8x^3$.

Розв'язання.

Подане рівняння не є лінійним. Перенесемо вираз із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком і розкладемо одержаний вираз на множники:

$$16x^2 = 8x^3;\ 16x^2 - 8x^3 = 0;\ 8x^2(2-x) = 0.$$

Добуток дорівнює нулю, якщо принаймні один із його множників дорівнює нулю. Оскільки 8 не дорівнює нулю, то або

Також зауважимо, що ви *вже вивчили всі аксіоми, які описують основні властивості геометричних фігур на площині.*

Підсумкові міркування щодо цих аксіом: https://rnk.com.ua/106100

Інтернет-підтримка

Перевірте себе!

1. Дайте означення трикутника. Із яких елементів складається трикутник?
2. Які два трикутники називають рівними?
3. Сформулюйте аксіому, яка описує основну властивість рівних трикутників.
4. Сформулюйте теорему про єдиність перпендикулярної прямої, проведеної через точку поза даною прямою.
5. Що називають медіаною, висотою та бісектрисою трикутника?

Контрольні запитання, які дозволять зрозуміти, чи добре ви засвоїли теоретичний матеріал

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображено трикутник. Визначте, чи можна цей трикутник позначати як...

а) $\triangle KMP$; в) $\triangle MPK$;
б) $\triangle KPM$; г) $\triangle PKM$.

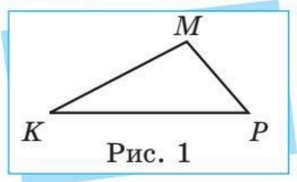


Рис. 1

Тренувальні вправи чотирьох рівнів: початкового, середнього, достатнього, високого. Пам'ятаємо, що математика — це фітнес для розуму!

Завдання для роботи в класі

Завдання для роботи вдома

1. Укажіть істинні твердження.
а) Усі яблука солодкі.
б) Серед яблук трапляються зелені.
в) Кожна людина знає англійську мову.
г) Є люди, які знають англійську мову.
д) Усі годинники у світі показують однаковий час.
е) $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

2. Укажіть хибні твердження.
а) Усі слони літають.
б) Серед слонів трапляються такі, що літають.

Ключові завдання: результати або методи їх розв'язування можуть бути корисними під час розв'язування інших завдань

29. Доведіть, що бісектриси рівнобічного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

30. Доведіть, що медіани рівнобічного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

31. На рис. 19 $AB = 6$ см, $CB = CD$, $\angle B = \angle D$. Знайдіть довжину AD.

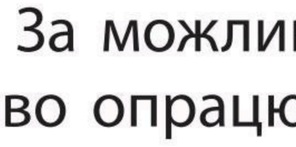


Рис. 19

Матеріал для розширення кругозору та додаткового вивчення

Цікавинки від дідуся Тараса

З матеріалу § 12 ви дізналися, що прямі на площині можна задавати рівняннями. Розділ математики, у якому властивості геометричних фігур вивчають засобами алгебри, називають *аналітичною геометрією*. Створення аналітичної геометрії приписують уже відомому вам французькому математику та філософу *Рене Декарту*, який виклав її основи у своєму трактаті «Міркування про метод» (1637 р.). Значний внесок у розвиток цієї теорії зробили *Ісаак Ньютон* (1642–1727), *Джеймс Стірлінг* (1692–1770), *Алексі Клод Клеро*, *Леонард Ойлер*, *Жозеф-Луї Лагранж*, *Гаспар Монж* (1746–1818) та ін.

Алексі Клод Клеро (1713–1765) — французький математик, фізик, астроном, геодезист. Свою першу наукову роботу написав у 12-річному віці.

Леонард Ойлер (1707–1783) — швейцарський математик і фізик. Ученого вважають найвидатнішим математиком XVIII ст.

Жозеф-Луї Лагранж (1736–1813) — видатний французький математик, фізик, астроном.

Цей матеріал збагатить вас новими знаннями та вміннями. За можливості обов'язково опрацюйте його

Запитання і завдання від дідуся Тараса

Використовуючи додаткові джерела інформації, ознайомтеся з біографією Ісаака Ньютона та підготуйте невелике повідомлення. Який факт біографії вченого вразив вас найбільше? Чому? На вашу думку, ким Ісаак Ньютон був більше — фізиком чи математиком? Відповідь обґрунтуйте!

Завдання, які дозволять вам не забути вивчене раніше та бути готовими до нових сюжетних поворотів у вивченні математики 7 класу

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{7} + 3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{5}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 3

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть рівняння з однією змінною, яке НЕ є лінійним.

А	Б	В	Г
$2x-1=5$	$4=-x+5$	$\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$	$\frac{1}{x}=\frac{4}{5}$

Завдання для тематичного оцінювання допоможуть згадати вивчене та підготуватися до контрольних робіт

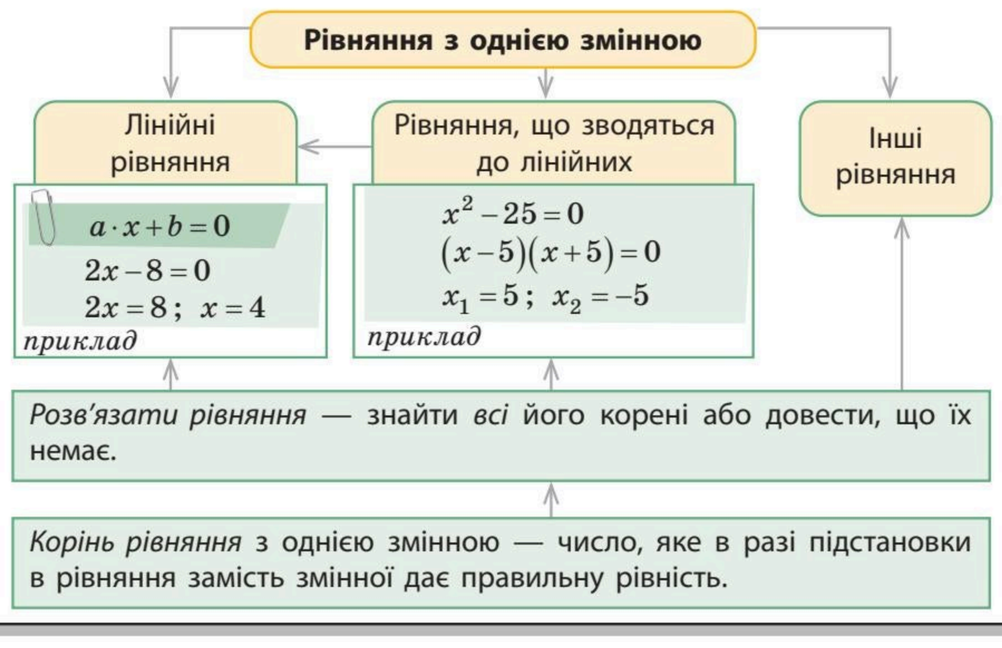
Завдання для тих, хто хоче досягти більшого

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. На столі — ряд із 6 однакових чашок. Три перші з них порожні, а інші три — з водою. Як домогтися чергування порожніх чашок і чашок із водою, торкнувшись тільки однієї чашки? Яке істинне твердження доведеться використати додатково до тверджень в умові задачі, щоб побудувати ланцюжок дій для її розв'язування?



ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3



Систематизація вивченого матеріалу у вигляді блок-схем

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Проєкт до інтегрованого модуля 2. Історія виникнення геометричних учень



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкт за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя/вчительки об'єднайтеся в групи для виконання проєкту (група може містити

Робота над навчальними проєктами допоможе усвідомити важливість математики в реальному житті

Бажаємо вам успіхів у вивченні математики!

Усе у вас вийде, вірте в себе!

РОЗДІЛ 1.
ЦІЛІ ВИРАЗИ

CHAPTER 1.
WHOLE EXPRESSIONS

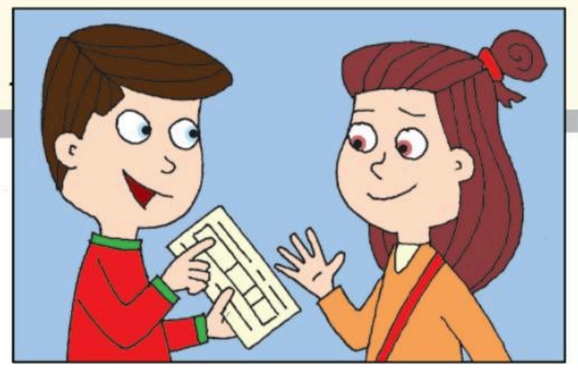
§ 1. Числові та буквені вирази. Тотожності



Тетянко, батьки доручили мені розрахувати за квитанцією вартість комунальних послуг по нашій квартирі за місяць*. Допоможи, будь ласка!

КВИТАНЦІЯ ЗА КОМУНАЛЬНІ ПОСЛУГИ

Холодна вода: .....спожитий обсяг 22 $м^3$, ціна 30,38 грн (за 1 $м^3$).
Гаряча вода: .....спожитий обсяг 14 $м^3$, ціна 90,54 грн (за 1 $м^3$).
Електроенергія: .....спожитий обсяг 320 кВт, ціна 2,64 грн (за 1 кВт).
Газ: .....спожитий обсяг 14 $м^3$, ціна 8 грн (за 1 $м^3$).
Опалення: .....площа помешкання 70 $м^2$, ціна 39,5 грн (за 1 $м^2$).
Послуги ОСББ: .....220,56 грн.





ОСББ — об'єднання співвласників і співвласниць багатоквартирного будинку, яке опікується вивезенням сміття, прибиранням прибудинкової території тощо.



Це ж просто! Згадай формулу:



Вартість = Ціна · Кількість

Тож загальна вартість послуг буде такою:

$$30{,}38 \cdot 22 + 90{,}54 \cdot 14 + 2{,}64 \cdot 320 + 8 \cdot 14 + 39{,}5 \cdot 70 + 220{,}56 = 5878{,}28.$$

* Наведено приблизні ціни станом на серпень 2023 р.



Нагадаємо, що такий вираз називають числовим виразом, а число, одержане в результаті, — значенням числового виразу.



Дуже дякую, усе дійсно просто! А як мені порахувати вартість комунальних послуг у наступному місяці? Вартість послуг ОСББ буде тією самою, проте я не знаю, скільки ми споживатимемо води, електрики та газу!



А ми позначимо спожитий обсяг холодної води через a, гарячої — через b, електрики — через c, а газу — через d. Тоді вартість комунальних послуг за місяць буде такою:

$$30{,}38\cdot a+90{,}54\cdot b+2{,}64\cdot c+8\cdot d+39{,}5\cdot 70+220{,}56.$$



Класно! Тепер кожного місяця буду підставляти замість букв значення й визначати вартість комунальних послуг. Тепер мені зрозуміло, навіщо потрібні вирази!



Нагадаємо, що буквами позначають змінні величини (змінні). Другий вираз Тетянки — буквений вираз. За різних значень змінних можна одержувати різні значення буквеного виразу.

Докладніше про числові та буквені вирази: https://rnk.com.ua/106078







А якщо я спочатку визначатиму вартість спожитої гарячої води, потім холодної, а потім вартість усіх інших комунальних послуг, то отримаю інший буквений вираз:

$$90{,}54\cdot b+30{,}38\cdot a+2{,}64\cdot c+8\cdot d+39{,}5\cdot 70+220{,}56.$$

Тож при підстановці замість букв тих самих значень можу отримати іншу суму платежів за той самий місяць?



Та ні, ти ж пам'ятаєш, що від перестановки доданків сума не змінюється, тому за однакових значень букв одержані значення виразів будуть рівні:

$$30{,}38\cdot a+90{,}54\cdot b+2{,}64\cdot c+8\cdot d+39{,}5\cdot 70+220{,}56=$$
$$=90{,}54\cdot b+30{,}38\cdot a+2{,}64\cdot c+8\cdot d+39{,}5\cdot 70+220{,}56.$$



Вирази, відповідні значення яких є рівними за будь-яких значень змінних, що входять до них, називають **тотожно рівними**.

Рівність, яка є правильною за будь-яких значень змінних, що входять до неї, називають **тотожністю**.

Коли ми спрощуємо буквений вираз, то фактично замінюємо його простішим виразом, тотожно рівним йому.

Наприклад: $3\cdot a-b+a+4\cdot b=4\cdot a+3\cdot b$.



А ще тотожності знадобляться для запису законів додавання і множення:

Закони додавання і множення

Переставні закони: $a+b=b+a$ $\qquad a\cdot b=b\cdot a$

Сполучні закони: $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Розподільний закон: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$



Коли розподільний закон читаємо зліва направо, то він *дозволяє розкривати дужки*. Якщо ж розподільний закон читати справа наліво, то він *дозволяє виносити за дужки спільний множник*.

Приклади

1. Знайдіть значення виразу $a \cdot b - 3 \cdot c$, якщо $a = 4$, $b = 3{,}5$, $c = 12$.

Розв'язання. Підставимо у вираз замість змінних їх значення: $4 \cdot 3{,}5 - 3 \cdot 12 = 14 - 36 = -22$.

2. Знайдіть значення виразу $4 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot t$, якщо $x = \frac{1}{3}$, $2 \cdot y + t = 0{,}12$.

Розв'язання. За розподільним законом множення: $4 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot t = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot y + t)$. Підставивши замість змінних їх значення, одержимо: $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}12 = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{100} = \frac{24}{300} = \frac{8}{100} = 0{,}08$.

3. Доведіть, що подана рівність є тотожністю: $a \cdot (b + 3) + b \cdot (3 - a) = 3 \cdot (a + b)$.

Розв'язання

І спосіб. *Доведемо, що ліва частина рівності дорівнює правій*. Для цього в лівій частині рівності спочатку розкриємо дужки, врахуємо, що $a \cdot b = b \cdot a$, а потім в одержаному виразі винесемо за дужки спільний множник 3:

$$a \cdot (b + 3) + b \cdot (3 - a) = a \cdot b + a \cdot 3 + b \cdot 3 - b \cdot a = a \cdot 3 + b \cdot 3 = 3 \cdot (a + b).$$

Тотожність доведено.

ІІ спосіб. *Доведемо, що різниця між лівою і правою частинами рівності дорівнює нулю*. Для цього розглянемо різницю лівої та правої частин рівності, розкривши дужки й врахувавши переставні та сполучні закони:

$$a \cdot (b + 3) + b \cdot (3 - a) - 3 \cdot (a + b) = a \cdot b + a \cdot 3 + b \cdot 3 - b \cdot a - 3 \cdot a - 3 \cdot b = 0.$$

Тотожність доведено.

4. Поясніть, чому рівність $(a + 4) \cdot (a - 4) = a^2 + 16$ не є тотожністю.

Розв'язання. Наведемо *контрприклад*, тобто вкажемо таке значення змінної, за якого подана рівність НЕ буде правильною.

Наприклад, якщо $a=0$, то одержимо неправильну рівність: $-16=16$. Отже, подана рівність не є тотожністю.

Перевірте себе!

1. Наведіть приклади числових і буквених виразів.
2. Як знайти значення буквеного виразу за поданих значень змінних, які він містить?
3. Які два буквені вирази називають тотожно рівними? Наведіть приклади тотожностей.
4. Які способи доведення тотожностей ви знаєте? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з поданих виразів є буквеними?

а) $x-7$; в) $25:5-11$;

б) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot 10$; г) $83+14{,}7\cdot(10-a)$.

2. Які з поданих виразів є числовими?

а) $y+2\cdot x$; в) $48:(14-7)$;

б) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot b\right):(7+b)$; г) $21\cdot c-24{,}3\cdot(10\cdot d-8)$.

3. Скільки змінних містить кожний буквений вираз?

а) $2\cdot x$; в) $c:3+d:6$;

б) $7+3\cdot b$; г) $21\cdot a-17\cdot b+3\cdot c$.

4. Скільки змінних містить кожний буквений вираз?

а) $14 \cdot x \cdot y$; в) $(a-2):(3+b \cdot c)$;

б) $5 \cdot a + 4{,}5 \cdot b - 3{,}2$; г) $5{,}6 \cdot (d-4)$.

5. Знайдіть значення виразів.

а) $3+2 \cdot 8$; в) $-2 \cdot 6 + 3 \cdot (-8)$;

б) $4{,}6 \cdot 4 - 12{,}5$; г) $-13{,}4 \cdot 3 + 26{,}3$.

6. Знайдіть значення виразів.

а) $7 \cdot 8 - 56$; в) $12 \cdot 3 - 4 \cdot 15$;

б) $28:4+3{,}5$; г) $15 \cdot (-2):6$.

7. Знайдіть значення виразу $2 \cdot x + 4$, якщо:

а) $x=3$; б) $x=1{,}2$; в) $x=4$; г) $x=-2{,}6$.

8. Знайдіть значення виразу $4 \cdot m + 3$, якщо:

а) $m=5$; б) $m=-1$; в) $m=2{,}3$; г) $m=0{,}5$.

9. Знайдіть значення виразу $3 \cdot a - b$, якщо:

а) $a=7,\ b=5$; в) $a=-8,\ b=1{,}2$;

б) $a=12,\ b=-10$; г) $a=-3{,}3,\ b=4{,}2$.

10. Знайдіть значення виразу $7 \cdot x - y$, якщо:

а) $x=2,\ y=5$; в) $x=-4,\ y=12$;

б) $x=10,\ y=-10$; г) $x=-1{,}1,\ y=-2{,}7$.

11. З'ясуйте, чи є тотожно рівними вирази $6 \cdot a \cdot 3 \cdot b$ і $18 \cdot a \cdot b$.

12. З'ясуйте, чи є тотожно рівними вирази $2 \cdot (x-3)$ і $2 \cdot x - 6$.

13. Автомобіль їхав зі швидкістю a км/год протягом t годин. Складіть вираз, за допомогою якого можна обчислити відстань, подолану автомобілем (у км). Знайдіть значення виразу, якщо $a=50,\ t=2{,}5$.

14. Футбольне поле місцевого стадіону має ширину x метрів, довжину — y метрів. Складіть вираз для обчислення площі футбольного поля (у $м^2$). Знайдіть значення виразу, якщо $x=50,\ y=95$.

Середній рівень

15. Запишіть вираз.

а) Суму чисел три й вісім помножити на дванадцять.
б) Різницю змінних a та b поділити на два.
в) До добутку змінних x і y додати дві цілих сім десятих.
г) Від числа дві тисячі двадцять три відняти частку змінних m і n.

16. Запишіть вираз.

а) Сума половини числа a та числа b.
б) Різниця числа x і подвоєного числа y.
в) Добуток суми чисел x та y і різниці чисел a й b.
г) Частка різниці чисел дві тисячі двадцять три та m і числа n.

17. Знайдіть значення виразу $4 \cdot c - \frac{2}{5}$, якщо:

а) $c = \frac{1}{5}$; б) $c = -\frac{3}{5}$; в) $c = \frac{1}{7}$; г) $c = -\frac{2}{3}$.

18. Знайдіть значення виразу $2 \cdot t - \frac{5}{6}$, якщо:

а) $t = \frac{2}{3}$; б) $t = -\frac{1}{6}$; в) $t = -\frac{7}{12}$; г) $t = \frac{2}{5}$.

19. Знайдіть значення виразу $m + 2 \cdot p$, якщо:

а) $m = \frac{4}{9}$, $p = \frac{1}{9}$; в) $m = \frac{3}{7}$, $p = -\frac{2}{7}$;
б) $m = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{4}$; г) $m = -\frac{3}{4}$, $p = \frac{2}{5}$.

20. Знайдіть значення виразу $4 \cdot x - y$, якщо:

а) $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{1}{8}$; в) $x = \frac{3}{8}$, $y = -\frac{5}{8}$;
б) $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$; г) $x = -1\frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{5}$.

21. Доведіть тотожність: $2\cdot(a+b)+3\cdot(a-b)=5\cdot a-b$.

22. Доведіть тотожність: $4\cdot(x-y)-2\cdot(x+y)=2\cdot x-6\cdot y$.

23. З одного пункту одночасно в протилежних напрямках виїхали два автомобілі. Перший автомобіль рухався зі швидкістю x км/год, а другий — зі швидкістю y км/год. Запишіть вираз для обчислення відстані між автомобілями за дві години після початку руху. Обчисліть цю відстань, якщо $x=65$, $y=62$.

24. Щоб приготувати варення, мама купила x кг яблук за ціною 32 грн за кілограм та y кг цукру за ціною 35 грн за кілограм. Складіть вираз для обчислення вартості покупки. Обчисліть вартість покупки, якщо $x=3$, $y=4$.

Достатній рівень

25. Знайдіть значення виразу $(2\cdot a-5\cdot c):(b+2)$, якщо:
а) $a=3$, $b=5$, $c=-4$; б) $a=-2{,}5$, $b=2$, $c=1{,}2$.

26. Знайдіть значення виразу $(3\cdot m+2\cdot p):(n-4)$, якщо:
а) $m=6$, $p=5$, $n=-3$; б) $m=-2{,}5$, $p=-1{,}25$, $n=6$.

27. Доведіть тотожність: $-0{,}3\cdot(2\cdot a-4)+1{,}8\cdot a=1{,}2\cdot(a+1)$.

28. Доведіть тотожність: $0{,}7\cdot x-0{,}2\cdot(11-2\cdot x)=1{,}1\cdot(x-2)$.

29. У Тернополі вартість першої години катання міським ставом становить 100 грн, а кожна наступна повна чи неповна година катання коштує 80 грн. Євген і Юлія каталися ставом m год і 22 хв. Складіть вираз для обчислення вартості прогулянки. Знайдіть вартість прогулянки, якщо $m=3$.

30. Фірма «Файна автівка» пропонує автомобілі в оренду. Ціна за три перші повні чи неповні доби оренди становить 2000 грн за добу, а за кожну повну чи неповну добу,

починаючи із четвертої, ціна оренди — 1500 грн. Олександр і Андрій орендували авто та повернули його за p діб (доби) й 11 годин. Складіть вираз для обчислення вартості оренди та знайдіть його значення, якщо: а) $p=2$; б) $p=8$.

31. На рис. 1 зображено прямокутний паралелепіпед. Складіть вираз для обчислення суми довжин усіх його ребер.

32. На рис. 2 зображено піраміду. Складіть вираз для обчислення суми довжин усіх її ребер.

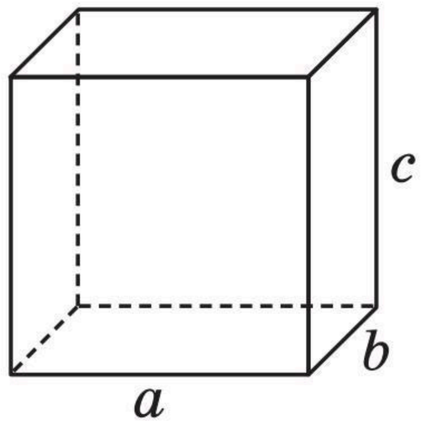


Рис. 1

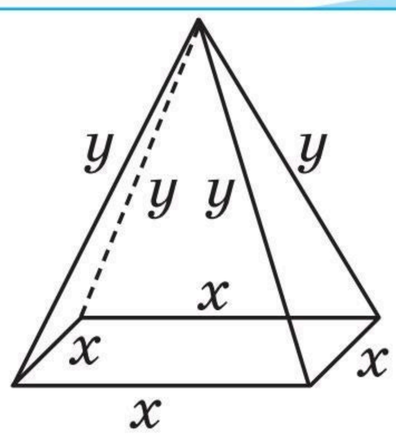


Рис. 2

Високий рівень

33. Знайдіть значення виразу $x+(y-1):z$, якщо:
а) $x=0{,}3$, $y=-0{,}7$, $z=-2{,}2$; б) $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{2}{5}$.

34. Знайдіть значення виразу $(a-b):c+d$, якщо:
а) $a=2{,}5$, $b=-1{,}3$, $c=-0{,}5$, $d=12{,}7$;
б) $a=-\frac{2}{5}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=2\frac{3}{4}$.

35. Доведіть тотожність.

$$2\cdot\left(a-\frac{1}{6}\cdot b-\frac{1}{2}\cdot c\right)-2\cdot\left(a-\frac{1}{6}\cdot b-\frac{1}{2}\cdot c\right)-3\cdot\left(a-\frac{1}{9}\cdot b-c\right)=2\cdot c-a.$$

36. Доведіть тотожність.

$$3\cdot\left(x-\frac{1}{6}\cdot y-\frac{1}{2}\cdot z\right)-5\cdot\left(x-\frac{1}{5}\cdot y-0{,}3\cdot z\right)=\frac{1}{2}\cdot y-2\cdot x\ .$$

37. Власна швидкість моторного човна — x км/год, а швидкість течії річки — y км/год. Складіть вираз для обчислення відстані, яку подолає моторний човен за 2,5 год, якщо він пливе: а) за течією річки; б) проти течії річки. Обчисліть, на скільки більше кілометрів пройде човен за течією річки, ніж проти течії, якщо $x=20,\ y=2$.



38. Квадрат зі стороною a см розділили на два рівні прямокутники. Складіть вираз для обчислення периметра кожного з одержаних прямокутників. На скільки сантиметрів сумарний периметр двох одержаних прямокутників більший за периметр квадрата?

39. Складіть вираз для обчислення периметра P та площі S плоскої фігури, зображеної на рис. 3.

40. Складіть вираз для обчислення периметра P та площі S плоскої фігури, зображеної на рис. 4.

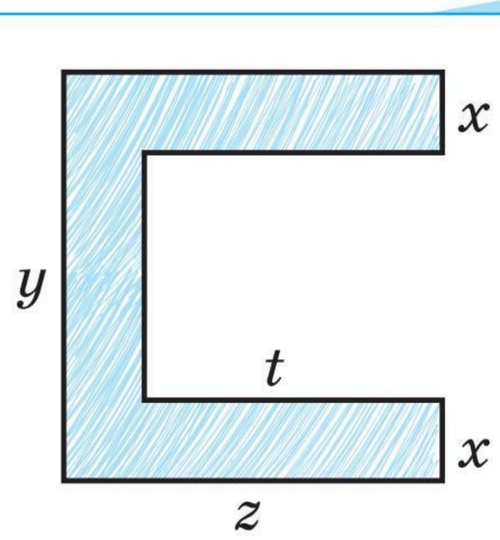


Рис. 3

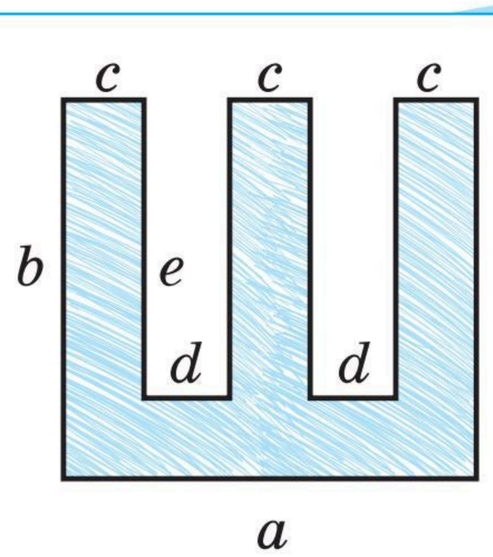


Рис. 4



Цікавинки від дідуся Тараса

Уперше буквена символіка з'явилася в «Арифметиці» *Діофанта*. Невідому величину Діофант називав «арітмос» (грецьк. αριθμος — число) і позначав буквою ς (сігма). Квадрат невідомої величини він позначав буквою δ (дельта) — це перша буква грецького слова «динаміс» (δυναμις — степінь). Сучасного вигляду буквеній символіці надав *Рене Декарт*, запровадивши позначення змінних і шуканих величин (x, y, z), а також буквених коефіцієнтів (a, b, c).

Діофант Александрійський (III ст. н. е.) — давньогрецький математик.

Рене Декарт (1596—1650) — французький філософ, математик, природознавець.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи доводилося вам обчислювати значення виразів у реальному житті, для розв'язання практичної задачі? Розкажіть про це.
2. Користуючись додатковими джерелами інформації, підготуйте коротке повідомлення про Діофанта та Декарта. Що вас найбільше вразило в їхніх біографіях?



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразів найбільш зручним способом.

   а) $35\cdot123+65\cdot123$;

   б) $27\cdot32{,}8-27\cdot22{,}8$;

   в) $4{,}7\cdot3\frac{2}{7}+4{,}7\cdot6\frac{5}{7}$.

2. Під час розпродажу ціна на куртку знизилася від 4800 грн до 4200 грн. Скільки відсотків від початкової ціни становила знижка?

3. Охоронець супермаркету Семен чергує один раз на 4 доби, а прибиральниця Оксана — один раз на 3 доби. Одного разу чергування обох припало на середу. Скільки пройде днів, коли Семен і Оксана наступного разу зустрінуться на своїх чергуваннях у середу?

4. Побудуйте в зошиті в клітинку квадрат зі стороною:
а) 4 см; б) 3,5 см; в) 52 мм.

5. Знайдіть площі квадратів, які ви побудували, виконуючи попереднє завдання.

6. Колекціонер кубиків Рубіка придбав ексклюзивний екземпляр кубика, виготовлений із аметисту. Довжина ребра цього кубика дорівнює 6 см. Скільки аметисту (у $см^3$) було витрачено на його виготовлення? Витратами на обробку знехтуйте.



§ 2. Степінь із натуральним показником. Властивості степеня. Стандартний вигляд числа

Стандартний вигляд числа



Учора запитала у штучного інтелекту, яка відстань від Землі до Сонця. Отримала дивну відповідь: приблизно $1{,}5 \cdot 10^8$ км. Петрику, ти не знаєш, що це означає?



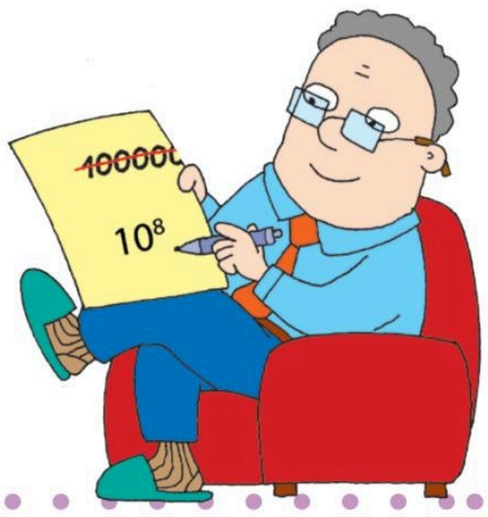
Знаю! Мені дідусь Тарас жартома розповідав, що це математики лінуються багато нулів писати, тому й придумали такий спосіб запису чисел. Я знаю, що відстань від Землі до Сонця називають *астрономічна одиниця* і що вона дорівнює приблизно 150 000 000 км.



А що означає запис 10^8? Я знаю лише, що $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, а $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.



Я вважаю, що тут щось подібне. Тобто для обчислення 10^8 треба число 10 помножити саме на себе 8 разів. Гайда краще запитаймо у вчителя й вчительки!





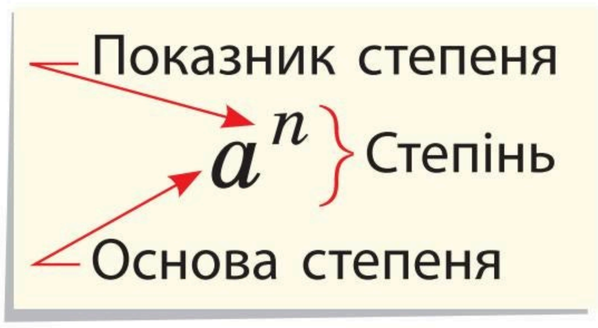
Так, Петрику, ти міркуєш у правильному напрямку!



Щоб знайти значення виразу a^n (читається: «a в степені n»), треба число a взяти множником n разів.

Наприклад: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$;
$10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000\,000$.

У такому випадку число a^n називають степенем, число a — основою степеня, число n — показником степеня.





До речі, природно вважати, що $a = a^1$ й $a^1 = a$.





Запис числа у вигляді $x \cdot 10^n$ називають стандартним виглядом числа.

Домовились, що число x має бути не меншим від 1 і меншим від 10. Таким чином, $150\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 10^8$, а $24\,500 = 2{,}45 \cdot 10^4$.

Про використання чисел у стандартному вигляді дізнайтеся більше у вчителя або вчительки фізики.



Властивості степенів



Цікаво! А чи можна виконувати дії із числами у стандартному вигляді? Наприклад, я хочу помножити $3\cdot10^4$ на $2\cdot10^3$.



Думаю, що це нескладно: $3\cdot10^4\cdot2\cdot10^3=3\cdot2\cdot10^4\cdot10^3$.
Тепер я знаю, що $10^4=10\cdot10\cdot10\cdot10$, а $10^3=10\cdot10\cdot10$.
Отже, $10^4\cdot10^3=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^7$.
Тому $3\cdot10^4\cdot2\cdot10^3=6\cdot10^7$.



Правильно, Петрику!
Трохи складніше буде, коли $3\cdot10^4\cdot4\cdot10^3$. За способом Петрика вийде $12\cdot10^7$. Але ж ми домовилися, що множник перед степенем 10 має бути від 1 до 10. Тоді запишемо так: $12=1{,}2\cdot10$.
Отже, маємо:
$12\cdot10^7=1{,}2\cdot10\cdot10^7=1{,}2\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=1{,}2\cdot10^8$.



У загальному випадку спосіб множення степенів із однаковими основами й натуральними показниками можна записати у вигляді властивості.



Властивість 1. $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$

У випадку множення степенів з однаковими основами показники степенів додають, а основа не змінюється.



Існують ще й інші властивості степенів із натуральними показниками.



Властивість 2. $a^n : a^k = a^{n-k}$ (тут $n > k$, $a \neq 0$)

У випадку ділення степенів з однаковими основами показники степенів віднімають, а основа не змінюється.

Доведення властивостей 1 і 2:
https://rnk.com.ua/106079







Властивість 3. $\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$

У випадку піднесення степеня до степеня показники степенів перемножують, а основа не змінюється.



Властивість 4. $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$

У випадку піднесення до степеня добутку треба кожний множник піднести до цього степеня й результати перемножити.

Доведення властивостей 3 і 4:
https://rnk.com.ua/106080





Приклади

1. Знайдіть значення виразу $3 \cdot x^4 - 4 \cdot y^8$, якщо $x = 2$, $y = -1$.

Розв'язання. Спочатку виконаємо піднесення до степеня: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $(-1)^8 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$.

Тепер підставимо значення степенів у поданий вираз: $3 \cdot 16 - 4 \cdot 1 = 48 - 4 = 44$.

2. Знайдіть значення виразу $\dfrac{6^8}{2^5 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^5}$.

Розв'язання. Оскільки $6 = 2 \cdot 3$, то в чисельнику маємо: $6^8 = (2 \cdot 3)^8 = 2^8 \cdot 3^8$. У знаменнику: $2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$, а $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$.

Таким чином, одержуємо: $\dfrac{2^8 \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^7}$.

Помітимо, що $2^9 = 2^{8+1} = 2^8 \cdot 2^1 = 2^8 \cdot 2$, а $3^8 = 3^{7+1} = 3^7 \cdot 3^1 = 3^7 \cdot 3$.

Отже, маємо: $\dfrac{6^8}{2^5 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^5} = \dfrac{2^8 \cdot 3^7 \cdot 3}{2^8 \cdot 2 \cdot 3^7} = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2} = 1{,}5$.

Перевірте себе!

1. Дайте означення степеня з натуральним показником. Наведіть приклади.
2. Що означає записати число у стандартному вигляді? Наведіть приклади.
3. Сформулюйте властивості степеня з натуральним показником.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть у вигляді степеня.

а) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$;
б) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
в) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
г) $x \cdot x \cdot x$.

2. Запишіть у вигляді степеня.

а) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$;
б) $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14$;
в) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$;
г) $n \cdot n \cdot n \cdot n$.

3. Запишіть степінь у вигляді добутку.

а) 5^3; б) 3^5; в) x^4; г) y^6.

4. Запишіть степінь у вигляді добутку.

а) 2^5; б) 5^2; в) a^4; г) b^3.

5. Обчисліть.

а) 2^5; б) 3^4; в) 5^4; г) $(-2)^4$; д) $(0{,}2)^6$.

6. Обчисліть.

а) 2^7; б) 4^4; в) 3^5; г) $(-3)^4$; д) $(0{,}5)^4$.

7. Обчисліть і подайте результат у стандартному вигляді.

а) $(4\cdot10^3)\cdot(2\cdot10^2)$; в) $(2{,}4\cdot10^5)\cdot(0{,}5\cdot10^3)$.

б) $(1{,}2\cdot10^4)\cdot(3\cdot10^5)$;

8. Обчисліть і подайте результат у стандартному вигляді.

а) $(3\cdot10^2)\cdot(3\cdot10^5)$; в) $(8{,}5\cdot10^4)\cdot(0{,}2\cdot10^5)$.

б) $(2{,}4\cdot10^5)\cdot(2\cdot10^3)$;

9. Знайдіть значення виразу.

а) 4^3-68; в) $5{,}7\cdot10^4+247$;

б) 2^5-5^2; г) $(0{,}3)^4\cdot1000$.

10. Знайдіть значення виразу.

а) 3^4+2^6; в) $5\cdot10^4-3{,}1\cdot10^5$;

б) 5^3-5^2; г) $(0{,}2)^5\cdot100$.

11. Річка Ніл має довжину 6853 км. Запишіть довжину цієї річки в кілометрах у стандартному вигляді.

12. Водоспад Анхель має висоту 979 м. Запишіть висоту цього водоспаду в метрах у стандартному вигляді.

Ніл — річка в Африці, є найдовшою річкою у світі. Анхель — водоспад у Південній Америці, є найвищим водоспадом у світі.

Середній рівень

13. Обчисліть.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; б) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; в) $\left(1-\frac{2}{3}\right)^5$; г) $\left(0{,}3-\frac{2}{5}\right)^7$.

14. Обчисліть.

а) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; в) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^4$; г) $\left(0{,}25-\frac{1}{4}\right)^9$.

15. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $\left(\frac{1}{3}\cdot 10^5\right)\cdot\left(3\cdot 10^2\right)$; в) $\left(\frac{3}{4}\cdot 10^6\right)\cdot\left(8\cdot 10^3\right)$.

б) $\left(5\cdot 10^4\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot 10^4\right)$;

16. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $\left(\frac{1}{4}\cdot 10^6\right)\cdot\left(4\cdot 10^2\right)$; в) $\left(\frac{2}{5}\cdot 10^5\right)\cdot\left(15\cdot 10^3\right)$.

б) $\left(8\cdot 10^3\right)\cdot\left(\frac{5}{8}\cdot 10^8\right)$;

17. Знайдіть значення виразу.

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{8}$; б) $(0{,}2)^4-\left(\frac{1}{5}\right)^2$.

18. Знайдіть значення виразу.

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 64$; б) $(0{,}5)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

19. Знайдіть значення виразу $2\cdot x^4-x^3$, якщо:

а) $x=0{,}2$; б) $x=\frac{1}{2}$; в) $x=\frac{1}{3}$.

20. Знайдіть значення виразу $a^2+3\cdot a^4$, якщо:

а) $a=0{,}1$; б) $a=\frac{1}{2}$; в) $a=\frac{2}{3}$.

21. Обчисліть.

а) $\left(3^2\right)^3$; б) $2^3\cdot 2^4$; в) $5^7:5^4$; г) $(2{,}5)^5\cdot 4^5$.

22. Обчисліть.

а) $\left(2^4\right)^2$; б) $3^3\cdot 3^2$; в) $4^8:4^5$; г) $(0{,}4)^6\cdot 5^6$.

23. Спростіть вираз.

а) $(-m)^3\cdot(-m)^6$; б) $(-m)^5:(-m)^3$; в) $(-m)^9:m^4$.

24. Спростіть вираз.

а) $(-p)^7\cdot(-p)^4$; б) $p^8:(-p)^5$; в) $(-p)^{10}:(-p)^4$.

25. Виконайте порівняння.

а) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^5$ і 0; в) $\left(-2\frac{3}{5}\right)^2$ і 1; д) $(0{,}3)^4$ і $(0{,}3)^2$.

б) $\left(-3\frac{1}{4}\right)^4$ і 0; г) $(0{,}9)^4$ і 1;

26. Виконайте порівняння.

а) $(-4{,}5)^6$ і 0; в) $\left(\frac{3}{11}\right)^3$ і 1; д) $(0{,}2)^4$ і $(0{,}2)^5$.

б) $\left(-1\frac{3}{7}\right)^5$ і 0; г) $(2{,}4)^4$ і 1;

27. Площа Франції приблизно дорівнює 552 000 км^2. Запишіть у стандартному вигляді площу Франції: а) у квадратних кілометрах; б) у гектарах.

28. Площа басейну річки Амазонка дорівнює 6 915 000 км^2. Запишіть у стандартному вигляді площу басейну Амазонки: а) у квадратних кілометрах; б) в арах.

Достатній рівень

29. Обчисліть.

а) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$; б) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^2$; в) $(0{,}6)^3$; г) $\left(-0{,}3-\frac{1}{5}\right)^3$.

30. Обчисліть.

а) $\left(2\frac{1}{2}\right)^5$; б) $\left(-1\frac{4}{5}\right)^3$; в) $(1{,}2)^2$; г) $\left(-1-\frac{1}{5}\right)^4$.

31. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $\left(-2{,}1\cdot10^6\right)\cdot\left(4\cdot10^2\right)$;

б) $\left(3\cdot10^3\right)\cdot\left(1\frac{1}{6}\cdot10^7\right)$;

в) $\left(-1\frac{2}{5}\cdot10^4\right)\cdot\left(-5{,}3\cdot10^4\right)$;

г) $\left(3{,}2\cdot10^6\right):\left(2\cdot10^4\right)$.

32. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $\left(1{,}7\cdot10^5\right)\cdot\left(-3\cdot10^3\right)$;

б) $\left(4\cdot10^4\right)\cdot\left(10\frac{1}{2}\cdot10^7\right)$;

в) $\left(-1\frac{2}{3}\cdot10^4\right)\cdot\left(-1\frac{4}{5}\cdot10^6\right)$;

г) $\left(7{,}5\cdot10^8\right):\left(5\cdot10^6\right)$.

33. Знайдіть значення виразу.

а) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4+2\frac{1}{9}$;

б) $(-0{,}1)^3-\left(\frac{1}{100}\right)^2$;

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot125+(0{,}25)^2\cdot10^4$.

34. Знайдіть значення виразу.

а) $\left(1\frac{1}{4}\right)^3+1\frac{1}{8}$;

б) $(0{,}1)^4-\left(-\frac{1}{10}\right)^3$;

в) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2\cdot100-(1{,}2)^2\cdot10^3$.

35. Знайдіть значення виразу $a \cdot b^2 - b$, якщо:

а) $a = 1{,}5$, $b = 2$;

б) $a = 0{,}5$, $b = -6$;

в) $a = 0{,}1$, $b = 2{,}5$.

36. Знайдіть значення виразу $x \cdot y^3 + y^5$, якщо:

а) $x = \frac{1}{9}$, $y = 3$;

б) $x = 0{,}5$, $y = -4$;

в) $x = -2$, $y = 0{,}2$.

37. Знайдіть значення виразу.

а) $(0{,}3)^{2023} : (0{,}3)^{2021}$;

б) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^6 \cdot (0{,}8)^6$;

в) $(-3{,}2)^4 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4$;

г) $\left(3\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^3 : \left(3\frac{1}{3}\right)^6$.

38. Знайдіть значення виразу.

а) $(1{,}2)^{2025} : (1{,}2)^{2023}$;

б) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^9 \cdot (0{,}4)^9$;

в) $(-3{,}5)^6 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^6$;

г) $\left(2\frac{2}{3}\right)^7 : \left(2\frac{2}{5}\right)^4 : \left(2\frac{2}{5}\right)^2$.

39. Розкрийте дужки.

а) $(3 \cdot b)^3 \cdot b^2$;

б) $c^2 \cdot (c^3 + 2)$;

в) $m^3 \cdot (m^4 + m^2)$.

40. Розкрийте дужки.

а) $(2 \cdot x)^4 \cdot x^3$;

б) $(y^3 - 5) \cdot y^2$;

в) $2t^2 \cdot (t^4 - t^3)$.

41. Обчисліть.

а) $(2^3 \cdot 2)^2$;

б) $(5^3)^4 : (5^7 \cdot 5^3)$;

в) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^4$.

42. Обчисліть.

а) $(3^2 \cdot 3)^2$;

б) $(4^5)^3 : (4^{17} : 4^5)$;

в) $\left(3\frac{1}{3}\right)^6 \cdot (0{,}3)^6$.

43. Подайте вираз у вигляді степеня.

а) $a^{10} \cdot b^{15}$; б) $8 \cdot c^3$; в) $81 \cdot d^{12} \cdot p^{16}$.

44. Подайте вираз у вигляді степеня.

а) $y^9 \cdot t^{12}$; б) $1000 \cdot m^6$; в) $32 \cdot k^{20} \cdot s^{35}$.

45. Висота гори Еверест — 8849 м, а глибина Маріанського жолоба — 10 984 м. Запишіть кожне з поданих чисел у стандартному вигляді в міліметрах. З'ясуйте, на скільки міліметрів друге число більше за перше; відповідь подайте у стандартному вигляді.

Гора Еверест — найвища вершина на Землі. Маріанський жолоб — найглибше місце Світового океану.

46. Населення Стамбула становить приблизно 15 415 000 осіб, а населення Мехіко — 8 919 000 осіб. Запишіть кожне з поданих чисел у стандартному вигляді. Порівняйте, на скільки осіб населення Стамбула є більшим за населення Мехіко; відповідь подайте у стандартному вигляді.



А чи знаєте ви, що Стамбул — найбільше місто Туреччини, а Мехіко — столиця Мексики?

Високий рівень

47. Виконайте піднесення до степеня.

а) $(2a)^3$; б) $\left(-\frac{1}{3}b\right)^4$; в) $(0{,}5x)^3$.

48. Виконайте піднесення до степеня.

а) $(-4m)^4$; б) $\left(\frac{2}{3}n\right)^5$; в) $\left(1\frac{1}{2}s\right)^5$.

49. Обчисліть: а) $\dfrac{3^5 \cdot 3^6}{\left(3^2\right)^5}$; б) $\dfrac{\left(2^4\right)^5 \cdot 7^3 \cdot 7^2}{\left(7^2\right)^2 \cdot 2^{12} \cdot 2^6}$.

50. Обчисліть: а) $\dfrac{\left(5^3\right)^3}{5^4 \cdot 5}$; б) $\dfrac{\left(3^7\right)^2 \cdot 3 \cdot 10^9}{3^{16} \cdot 10^2 \cdot \left(10^3\right)^2}$.

51. Виконайте множення.

а) $5^{200} \cdot 0{,}2^{197}$;

б) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{49} \cdot 1{,}4^{50}$;

в) $4^{175} \cdot 0{,}25^{177}$;

г) $3^{97} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{95}$.

52. Виконайте множення.

а) $7^{138} \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^{137}$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{49} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{50}$;

в) $10^{17} \cdot 0{,}1^{20}$;

г) $8^{32} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{96}$

53. Знайдіть значення виразу.

а) $3^{101} \cdot 5^{100} : 15^{99}$;

б) $5^{78} : 5^{75} : 25$;

в) $3^{400} : \left(9^{99} \cdot 9^{101}\right)$;

г) $4^{111} \cdot 10^{110} : 40^{109}$.

54. Знайдіть значення виразу.

а) $2^{101} \cdot 5^{100} : 10^{99}$;

б) $3^{78} \cdot 4^{75} : 12^{74}$;

в) $35^{75} : \left(5^{69} \cdot 7^{73} \cdot 625\right)$;

г) $\dfrac{2}{5} \cdot 10^{200} : 10^{195}$.

55. Середня відстань від Землі до Юпітера становить 778 000 000 км, а середня відстань від Землі до Місяця — 384 400 км. Запишіть кожне з поданих чисел у стандартному вигляді. Порівняйте, у скільки разів перша зазначена відстань більша за другу. Відповідь округліть до одиниць і подайте у стандартному вигляді.

56. Населення Індії становить приблизно 1 415 000 000 осіб, а населення Польщі — 38 500 000 осіб. Запишіть кожне з поданих чисел у стандартному вигляді. У скільки разів перше зазначене число більше за друге? Відповідь округліть до одиниць і подайте у стандартному вигляді.



Цікавинки від дідуся Тараса

Поняття степеня вперше почав використовувати *Евклід*. Властивість $10^n \cdot 10^k = 10^{n+k}$ уперше відкрив і довів *Архімед*. У IX ст. перський математик *Аль-Хорезмі* використовував терміни «мал» для квадрата і «кахб» для куба, які згодом ісламські математики позначали як m і k відповідно. Наприкінці XVI ст. *Йост Бюргі* почав використовувати для позначення степенів латинські букви, а остаточно сучасні позначення степенів були запропоновані *Рене Декартом* у його праці «Геометрія» (1637 р.).

Евклід (бл. 325 — бл. 270 рр. до н. е.) — давньогрецький математик, автор перших із відомих теоретичних трактатів із математики.

Архімед (бл. 287 — 212 рр. до н. е.) — давньогрецький математик, фізик, винахідник.

Аль-Хорезмі (бл. 780 — бл. 850 рр.) — перський математик, астроном, географ.

Йост Бюргі (1552–1632) — швейцарський і німецький математик, астроном, годинникар.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Користуючись додатковими джерелами інформації, зробіть невелике повідомлення про: а) Архімеда; б) Евкліда; в) Аль-Хорезмі. Що вас найбільше зацікавило в їхніх біографіях?

2. Яким чином великі числа, записані у стандартному вигляді, використовують у фізиці, астрономії, хімії тощо? Користуючись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся про найбільш «знамениті» числа, записані у стандартному вигляді, а також про інші відомі математичні та фізичні константи.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Доведіть тотожності.

а) $3\cdot(a-b)+3\cdot(a+b)=6a$; б) $6+3\cdot(x-1)=3(x+1)$.

2. На пачці кефіру написано: «Кефір СМАЧНИЙ. Маса 870 г. Жирність 2,2 %». Знайдіть вміст жиру в цій пачці кефіру.



3. Знайдіть значення виразу найбільш зручним способом.

а) $8{,}7\cdot3{,}6-3{,}7\cdot3{,}6+1{,}4\cdot12-1{,}4\cdot7$;

б) $\frac{1}{3}\cdot4{,}5+1\frac{2}{3}\cdot4{,}5+3\frac{5}{7}\cdot5{,}5-1\frac{5}{7}\cdot5{,}5$.

4. Побудуйте на координатній прямій точки з координатами: $A(-4)$, $B(2{,}5)$, $C\left(5\frac{1}{3}\right)$.

5. Побудуйте за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює:

а) 180°; б) 90°; в) 45°; г) 120°; д) 30°; е) 150°.

6. Назвіть принаймні два об'єкти навколишнього світу, які містять: а) гострі кути; б) прямі кути; в) тупі кути. Які кути, на вашу думку, частіше зустрічаються в повсякденному житті? Як ви вважаєте, чому?

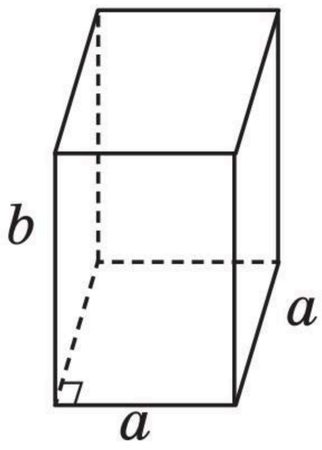
§ 3. Мономи (одночлени)

Моном і його стандартний вигляд



Тетянко, потрібна твоя допомога! Люблю грати в шахи й хочу виготовити собі дерев'яні шахові фігурки. Я вже зробив 32 заготовки у формі прямокутних паралелепіпедів із вимірами a, a і b. А чи влізуть вони в ось цю *екоторбу* об'ємом 5 літрів? Як порахувати об'єм усіх заготовок разом?





Екоторби виробляють або з натуральних матеріалів, або з таких, що швидко розкладаються. Екоторби все частіше використовують замість поліетиленових пакетів, які забруднюють довкілля.



Жодних проблем! Об'єм одного такого паралелепіпеда буде $a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$, а для 32 заготовок маємо $32 \cdot a^2 \cdot b$. Тепер слід з'ясувати розміри однієї заготовки, і ти про все дізнаєшся.

У мене запитання! Петрик виміряв заготовку і виявилося, що $a = 4$ см, $b = 6$ см. То чи помістяться всі 32 заготовки в сумку Петрика? Про всяк випадок нагадаю, що 1 літр = 1000 см^3.





Вирази на кшталт $32 \cdot a^2 \cdot b$ у математиці називають мономами (одночленами).



Кожен моном є або числом, або змінною, або добутком чисел, змінних і їх степенів.

Під час запису мономів для простоти знак множення *можна* не записувати, тобто: $32 \cdot a^2 \cdot b = 32a^2b$.

Знайди мономи:
https://rnk.com.ua/106081





Моном, який одержали Петрик із Тетянкою, записаний у стандартному вигляді: серед множників число лише одне, й записане воно на початку виразу (таке число називають коефіцієнтом монома), інші множники є різними змінними в певних степенях. Мономи $4x^2y^5$; $-2cd^4m^2$ теж записані у стандартному вигляді, а моном $2 \cdot m \cdot 5 \cdot p \cdot m^2$ не записаний у стандартному вигляді.



Кожен моном можна записати у стандартному вигляді, виконавши дії із числами та степенями. Наприклад:

$$2 \cdot m \cdot 5 \cdot p \cdot m^2 = 2 \cdot 5 \cdot p \cdot m^1 \cdot m^2 = 10pm^3.$$

У мене ще запитання! Які властивості дій над числами та властивості степенів використовують у випадку зведення монома до стандартного вигляду?





Якщо моном подано у стандартному вигляді, то суму показників степенів усіх його змінних називають степенем монома.

Наприклад: степінь монома $4x^2y^5$ дорівнює 7 (бо $2+5=7$), а степінь монома $10pm^3$ дорівнює 4 (бо $1+3=4$).



До речі:



Якщо коефіцієнт монома дорівнює 1, то цей коефіцієнт можна не записувати.

Наприклад: $1 \cdot a^3 \cdot b^6 = a^3 b^6$.

Дії над мономами





Добуток мономів також є мономом. Традиційно результат множення мономів записують у вигляді монома в стандартному вигляді.

Наприклад: помножимо $4c^2p$ на $-3p^3t$. Одержимо:

$$\left(4c^2p\right)\cdot\left(-3p^3t\right) = 4\cdot(-3)\cdot c^2\cdot p^1\cdot p^3\cdot t^1 = -12c^2p^4t.$$





У випадку піднесення монома до степеня також одержуємо моном. Результат піднесення монома до степеня записують у вигляді монома в стандартному вигляді.

Наприклад: $\left(5a^2c^4\right)^3 = 5^3\cdot\left(a^2\right)^3\cdot\left(c^4\right)^3 = 125a^6c^{12}$.

А в мене знову запитання! Які властивості дій над числами та властивості степенів використовують у випадку виконання дій над мономами?



Перевірте себе!

1. Які вирази називають мономами (одночленами)?
2. Як записати моном у стандартному вигляді?
3. Як визначити степінь монома?
4. Як виконують множення мономів і піднесення їх до степеня?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з наведених виразів є мономами? Які з них записані у стандартному вигляді?

а) $3 \cdot x \cdot y$; в) $-3,5$; д) $5 \cdot y^3 \cdot 4 \cdot t$;

б) $2a$; г) $c + d$; е) $6 \cdot f \cdot q^2 \cdot f$.

2. Які з наведених виразів є мономами? Які з них записані у стандартному вигляді?

а) $-5 \cdot a \cdot c^3$; в) p; д) $8,5 \cdot m^3 \cdot z$;

б) $2 - x \cdot y^2$; г) $b \cdot 7 \cdot b$; е) $7 \cdot c \cdot 2 \cdot b$.

3. Зведіть мономи до стандартного вигляду та знайдіть степінь кожного з них.

а) $3 \cdot 2 \cdot c$; б) $x \cdot y \cdot x$; в) $2 \cdot n^3 \cdot n^2 \cdot p^2$; г) $4 \cdot s^4 \cdot 3 \cdot s^2$.

4. Запишіть мономи у стандартному вигляді та знайдіть степінь кожного з них.

а) $-4 \cdot 5 \cdot x$; б) $a \cdot b^3 \cdot a$; в) $8 \cdot c^5 \cdot d^2 \cdot c^3$; г) $10 \cdot k^7 \cdot 6 \cdot k^3$.

5. Виконайте множення мономів.

а) $(3a) \cdot (4b)$; б) $\left(x^2 y^3\right) \cdot \left(x^5\right)$; в) $\left(2m^3\right) \cdot \left(m^6\right)$.

6. Виконайте множення мономів.

а) $(5x)\cdot(6t)$; б) $\left(a^3b\right)\cdot\left(a^4\right)$; в) $\left(3q^4\right)\cdot\left(q^6\right)$.

7. Виконайте піднесення монома до степеня.

а) $(2x)^3$; б) $\left(a^2b\right)^4$; в) $\left(4cd^2\right)^2$.

8. Виконайте піднесення монома до степеня.

а) $(3y)^2$; б) $\left(mt^2\right)^3$; в) $\left(2k^2s\right)^3$.

9. У трирічного Дмитрика є 24 кубики, кожен із яких має ребро a см. Складіть вираз для обчислення загального об'єму всіх кубиків Дмитрика. Чи є одержаний вираз мономом? Якщо так, то знайдіть його коефіцієнт і степінь.

10. П'ятирічна Оксанка має набір із 16аркушів кольорового паперу, причому кожен аркуш є квадратом зі стороною b см. Складіть вираз для обчислення загальної площі всіх аркушів, що є в дівчинки. Чи є цей вираз мономом? Якщо так, то знайдіть його коефіцієнт і степінь.



Середній рівень

11. Зведіть мономи до стандартного вигляду та знайдіть степінь кожного з них.

а) $\frac{1}{4}\cdot x^2\cdot\frac{4}{5}$; б) $-2{,}2\cdot y^3\cdot 3\cdot t^2\cdot y$; в) $\frac{3}{7}\cdot z\cdot t\cdot z^4\cdot t\cdot 7$.

12. Запишіть мономи у стандартному вигляді та знайдіть степінь кожного з них.

а) $\frac{2}{3}\cdot a^3\cdot\frac{3}{5}$; б) $-4{,}3\cdot b^2\cdot 2\cdot c^5\cdot b$; в) $\frac{4}{9}\cdot d\cdot e^4\cdot d^2\cdot e\cdot 18$.

13. Виконайте множення мономів.

а) $\left(0{,}5x^3\right)\cdot\left(4y^2x\right)$;

б) $\left(4k^3\right)\cdot\left(-2k^2p\right)$;

в) $\left(2{,}5sp^3\right)\cdot\left(-8s^2p\right)$.

14. Виконайте множення мономів.

а) $\left(1{,}5a^2\right)\cdot\left(2b^4a\right)$;

б) $\left(-3l^2\right)\cdot\left(-4gl^3\right)$;

в) $\left(3{,}5x^4y\right)\cdot\left(-2y^2x\right)$.

15. Виконайте піднесення монома до степеня.

а) $\left(\frac{1}{3}b\right)^2$;

б) $\left(-2c^2d^3\right)^3$;

в) $\left(-3h^2z^5\right)^4$.

16. Виконайте піднесення монома до степеня.

а) $\left(\frac{1}{2}d\right)^3$;

б) $\left(-3x^4y^2\right)^4$;

в) $\left(-5c^5t^3\right)^3$.

17. Під час будівництва офісного центру вирішили, що кожен стандартний офіс займатиме кімнату, підлога якої є прямокутником із розмірами x і y. Щоб покрити ламінатом підлогу в усіх стандартних офісах центру, потрібно визначити загальну площу підлоги таких офісів. Складіть вираз для знаходження цієї площі, якщо офісний центр матиме 16 поверхів і на кожному поверсі буде 10 стандартних офісів. Відповідь запишіть у вигляді монома стандартного вигляду. Якого степеня цей моном?

18. У новому готелі всі одномісні номери мають житлову кімнату у формі прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b і c. Для обігріву таких номерів потрібно знати загальний об'єм усіх житлових кімнат одномісних номерів. Складіть вираз для знаходження цього об'єму, якщо готель має 8 поверхів і на кожному поверсі розташовано 5 одномісних номерів. Відповідь запишіть у вигляді монома стандартного вигляду. Якого степеня цей моном?

Достатній рівень

19. Спростіть вираз: а) $5a \cdot (4a)^3$; б) $-4b^2c \cdot (0{,}5c^2b)^2$;
в) $\left(\frac{2}{3}d^2p\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{16}dp^6\right)$.

20. Спростіть вираз: а) $-3k \cdot (2k)^5$; б) $8l^4m^3 \cdot (-0{,}5ml^2)^2$;
в) $\left(\frac{4}{7}g^3h\right)^2 \cdot \left(\frac{49}{32}h^6p^2\right)$.

21. Підберіть моном, який у добутку з мономом $3xy^3$ дає моном:
а) $6x^3y^3$; б) $-27x^5y^7$; в) $\frac{1}{2}x^2y^4$.

22. Підберіть моном, який у добутку з мономом $(-2a^2b^3)$ дає моном:
а) $6a^3b^3$; б) $-18a^9b^8$; в) $\frac{1}{3}a^3b^4$.

23. Подайте вираз у вигляді квадрата монома.
а) $25x^4$; б) $64y^{10}z^{16}$; в) $0{,}0001p^{12}s^{20}t^{30}$.

24. Подайте вираз у вигляді куба монома.
а) $27a^6$; б) $64b^{12}c^{15}$; в) $-0{,}001d^{30}e^{60}f^{90}$.

Високий рівень

25. Спростіть вираз.
а) $(0{,}5ab^2c)^3 \cdot (-2a^2bc^4)^2$; б) $\left(-1\frac{1}{3}x^2y^4\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{8}x^4y^3\right)^2$.

26. Спростіть вираз.
а) $(0{,}1k^2lm)^4 \cdot (-10kl^2m^3)^3$; б) $\left(-\frac{4}{25}p^5s^3\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{2}s^4p^3\right)^3$.

27. Відомо, що $4xy^2 = 15$. Знайдіть значення виразів.

а) $12xy^2$; в) $\frac{1}{3}xy^2$; д) $-4x^2y^4$.

б) $2xy^2$; г) $16x^2y^4$;

28. Відомо, що $2a^2b^3 = 21$. Знайдіть значення виразів.

а) $8a^2b^3$; в) $\frac{2}{7}a^2b^3$; д) $-12a^4b^6$.

б) a^2b^3; г) $4a^4b^6$;



Запитання і завдання від дідуся Тараса

Поспостерігайте протягом тижня за тим, скільки приблизно кілограмів сміття виносить до сміттєвих баків ваша родина. Спробуйте оцінити, скільки приблизно сміття виносять, наприклад, мешканці вашого будинку; вашої вулиці; вашого селища або міста. Дізнайтеся, скільки сміття потрапляє щодня на звалища в Україні та в інших країнах світу. Як ви вважаєте, багато це чи мало? Чи вважаєте ви це проблемою? Якщо ні, то чому? Якщо так, то як розв'язати цю проблему? До речі, чи сортуєте ви сміття та чи знаєте, навіщо це потрібно?

Зростання обсягів сміття та його перероблення вважають однією з найактуальніших екологічних проблем у світі. У багатьох країнах мешканці сортують побутове сміття та складають його в окремі контейнери — для паперу, пластика, скла тощо.



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $3x^2 + 2xy - y^2$, якщо:

а) $x = -2,\ y = 3$; б) $x = 0{,}5,\ y = 1{,}5$; в) $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}$.

2. За допомогою лінійки побудуйте в зошиті: а) прямокутний трикутник; б) гострокутний трикутник; в) тупокутний трикутник. Виміряйте довжини сторін й обчисліть периметри побудованих фігур.
3. Виміряйте за допомогою рулетки чи мірної стрічки довжину та ширину якогось столу прямокутної форми (письмового, кухонного тощо). За отриманими даними знайдіть площу столу та його периметр.
4. У 200 г дистильованої води розчинили 50 г кухонної солі. Знайдіть концентрацію солі (у %) в отриманому розчині.
5. До магазину завезли 800 кг бананів. У понеділок продали чверть усіх бананів, у вівторок — $\frac{2}{3}$ решти. Нарешті в середу всю партію бананів було продано. Визначте, скільки кілограмів бананів продали: а) у понеділок; б) вівторок; в) середу.

§ 4. Поліноми (многочлени). Додавання і віднімання поліномів

Означення полінома



Над чим задумався, Петрику?



Запросив до себе в гості 10 друзів і хочу кожному замовити одну піцу. У піцерії є два види піци: м'ясна та вегетаріанська. Але сьогодні на сайті піцерії чомусь не відображаються ціни. Також я не знаю, скільки моїх гостей захочуть вегетаріанську піцу. Тож як я можу потім якнайшвидше обчислити вартість замовлення?



А давай спробуємо знову використати змінні! Нехай кількість твоїх гостей, які захочуть їсти вегетаріанську піцу, — n, а тих, хто захоче їсти м'ясну піцу, — k. Ціну на вегетаріанську піцу позначимо a, а ціну на м'ясну — b. Тоді вартість замовлення буде $n \cdot a + k \cdot b$. А щойно дізнаєшся значення змінних, то підставиш їх і порахуєш!



Вегетаріанство — спосіб харчування, за якого людина з певних причин не вживає м'ясо, рибу, морепродукти, а іноді й молоко, яйця.



Дякую! Але мені здається, що можна зробити трохи простіше. Гостей у мене 10, тому $n + k = 10$, звідси $k = 10 - n$ (як невідомий доданок). Тоді вартість замовлення буде $n \cdot a + (10 - n) \cdot b$. І змінних стало менше!



До речі, обидва вирази для обчислення вартості замовлення піци не будуть мономами. Цікаво, як вони називаються?



Із задоволенням відповім!



Суму мономів називають поліномом (многочленом).

Наприклад, вирази $2x + 1$, $ab^2 + 3a - 5b^4$ тощо є поліномами.



Нагадаю, що різницю двох чисел або виразів можна вважати сумою. Наприклад: $4-5=4+(-5)$; $3a-2b=3a+(-2b)$. Таку суму називають *алгебраїчною сумою*.

Докладніше про те, як розпізнати поліноми: https://rnk.com.ua/106082







Якщо поліном містить лише два доданки, то його називають біномом (двочленом), а якщо лише три доданки, то триномом (тричленом).

Наприклад: вираз $2x+1$ — біном, а вираз $ab^2+3a-5b^4$ — тринoм.





Степенем полінома називають найбільший зі степенів мономів, які є доданками цього полінома.

Наприклад: поліном $n\cdot a+k\cdot b$ є поліномом другого степеня, оскільки обидва його доданки є мономами другого степеня. Поліном $ab^2+3a-5b^4$ є поліномом четвертого степеня, оскільки моном найбільшого степеня $5b^4$ має степінь 4.



Якщо поліном містить доданки, які відрізняються лише коефіцієнтом (з точністю до порядку слідування множників), то такі доданки називають подібними доданками. Використовуючи переставний і розподільний закони множення, подібні доданки можна звести.

Наприклад:

$$3x+4+7x-8=3x+7x+4-8=(3+7)\cdot x+(4-8)=10x-4.$$



До речі:



Якщо всі доданки полінома є мономами стандартного вигляду, а всі подібні доданки зведено, то такий поліном вважають записаним у стандартному вигляді.

Наприклад, запишемо поліном $2ab^2a-3c+5a^2b^2-7c+2$ у стандартному вигляді. Одержимо:

$$2ab^2a-3c+5a^2b^2-7c+2=2a^2b^2+5a^2b^2-3c-7c+2=7a^2b^2-10c+2.$$

Додавання та віднімання поліномів





Результатом додавання і віднімання поліномів є поліном або моном.

Наприклад, знайдемо суму і різницю поліномів $6x+2$ і $3x-10$:

$$6x+2+(3x-10)=6x+2+3x-10=9x-8;$$

$$6x+2-(3x-10)=6x+2-3x+10=3x+12.$$

Приклади

1. $(4x^2-5x+7)+(3x^3-5x^2+12x-17)=$

$=4x^2-5x+7+3x^3-5x^2+12x-17=$

$=3x^3+4x^2-5x^2-5x+12x+7-17=3x^3-x^2+7x-10.$

2. $(4x^2-5x+7)-(3x^3-5x^2+12x-17)=$

$=4x^2-5x+7-3x^3+5x^2-12x+17=$

$=-3x^3+4x^2+5x^2-5x-12x+7+17=-3x^3+9x^2-17x+24.$



Поліноми зручно використовувати для запису багатоцифрових чисел у загальному вигляді.

Наприклад, довільне трицифрове число, що містить a сотень, b десятків і c одиниць записують у вигляді:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Приклад

Нехай x — двоцифрове число, яке не закінчується нулем і цифри якого різні, а y — двоцифрове число, утворене з x шляхом запису його цифр у зворотному порядку. Покажіть, що сума цих чисел $x + y$ ділиться націло на 11.

Розв'язання. Дійсно, якщо $x = \overline{ab} = 10a + b$, то $y = \overline{ba} = 10b + a$.

Тоді $x + y = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$.

Отже, сума чисел $x + y$ ділиться націло на 11.



До речі, вирази, які містять лише додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня чисел і змінних, називають *раціональними виразами*. Якщо такий вираз не містить ділення на вираз зі змінною, то його називають *цілим раціональним виразом* або *цілим виразом*. Зокрема, всі мономи і поліноми є цілими виразами.

Перевірте себе!

1. Які вирази називають: а) поліномами (многочленами); б) біномами (двочленами); в) триномами (тричленами)?
2. Як записати поліном у стандартному вигляді?
3. Як визначити степінь полінома?
4. Як виконують додавання і віднімання поліномів?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з наведених виразів є поліномами? Знайдіть степінь кожного з поліномів. Які поліноми записані у стандартному вигляді?

а) $3x+1$; в) $x:p+2x-p$; д) $(3\cdot p-2)\cdot(q-3)$.

б) $3t^2y-2t+3y^2$; г) $m^3-3m^2n+n+2m^2n+5n-1$;

2. Які з наведених виразів є поліномами? Знайдіть степінь кожного з поліномів. Які поліноми записані у стандартному вигляді?

а) $4b-a\cdot(b+3)$; в) $4+x^2-2x+3$; д) $7l+k^2l-l^7:k$.

б) $8z-3$; г) $c^3d^2-cd+3c+5+2cd-7$;

3. Зведіть поліном до стандартного вигляду.

а) $4a-6+3a+8$; в) $4c^2-7c+3{,}4c^2-11$;

б) $8b^2+14-3b-5$; г) d^3+d-2d^3.

4. Зведіть поліном до стандартного вигляду.

а) $5x+11-8{,}5x$; в) $12z^2+7z+3z^4-11z$;

б) $3y^2+5y-3-5y$; г) $m^2+m-13m^2-m$.

5. Знайдіть суму поліномів.

а) $3x-11$ і $9x+5$; в) $16z^2-5z$ і $3z^3-4z$;

б) $7y^2+4y$ і $12{,}4+8y$; г) $5m-m^2$ і $13m^2+m$.

6. Знайдіть суму поліномів.

а) $6a-4$ і $5+8a$; в) $3c^2-7{,}6c$ і $6c^2-1$;

б) $4b^2+7$ і $9b-5{,}6$; г) d^3-4d і $5-2d^3$.

7. Знайдіть різницю першого і другого поліномів.

а) $3a-4b$ і $15+6a$; в) $13c^2+7bc$ і $3c^2-21$;

б) $2b^2+4$ і $9b^2+6{,}3$; г) d^4-4d^2 і $5d-2d^3$.

8. Знайдіть різницю першого і другого поліномів.

а) $7{,}5x-11$ і $9x+5y$;

б) $5y^3+11y$ і $21y+8$;

в) $34z^2-26z$ і $5{,}7z^2-7z$;

г) $5-m^3$ і $7m^2+14m$.

9. Іринка принесла до пункту збору вторинної сировини 3 кг пластику за ціною x грн за кілограм і 2 кг макулатури за ціною y грн за кілограм. Миколка приніс до того самого пункту 4 кг скла за ціною z грн за кілограм і 5 кг макулатури. Складіть вираз, за яким можна знайти загальну суму грошей, що отримали Іринка з Миколкою. Чи є цей вираз поліномом? Якщо так, то якого він степеня?

10. У саду Павлової бабусі росте a яблунь, b слив і c груш, а в саду Оленчиного батька — x вишень і y черешень. Складіть вираз, за яким можна знайти, на скільки більше дерев росте в саду Павлової бабусі, ніж у саду Оленчиного батька. Чи є цей вираз поліномом? Якщо так, то якого він степеня?



Середній рівень

11. Зведіть поліноми до стандартного вигляду.

а) $5ab^2-6ab+3bab+8a$;

б) $6b^3c+13c-3bcb^2-5c$;

в) $7ac^2-12ac+3{,}7c^2a-16cac+6a$;

г) $9cd^3+4cd-2dcd^2-5dc$.

12. Зведіть поліноми до стандартного вигляду.

а) $5xy^2+15xy-7{,}5yxy$;

б) $7y^2z^2+5zyzy-12z^2-9y^2$;

в) $16xyz^2+7zxyz+8xy-4yz$;

г) $m^2k^3+4mk^3m-13k^2m^2k-kmkmk$.

13. Знайдіть суму та різницю першого й другого поліномів.

а) $x^2-6{,}5x-41$ і x^2+8x+4;

б) $4y^3+6y^2-19y$ і $y^2-1{,}6y+3$;

в) $5mk-3m^3+9k^2$ і $7k^2-4km$.

14. Знайдіть суму та різницю першого й другого поліномів.

а) $3a^2-12a+7$ і $14+6a+a^2$;

б) $7b^4+4b^2-5$ і $11b^2+6b-5$;

в) $51cd^4-7cd^2+cd$ і $5dcd-2dcd^3$.

15. Брат із сестрою збирають виноград. Брат збирає x кг винограду за 2 год, а сестра — y кг винограду за 3 год. Складіть вираз, який показує, скільки кілограмів винограду збирають за 1 год брат із сестрою разом. Знайдіть значення цього виразу, якщо $x=3$, $y=6$. Чи є одержаний вираз поліномом? Якщо так, то якого він степеня?

16. Микола задумав три числа. Перше число удвічі більше, ніж друге, а третє число удвічі менше, ніж друге. Нехай x — найменше із цих чисел. Запишіть вираз для обчислення суми трьох чисел, задуманих Миколою. Обчисліть цю суму, якщо 0,1 — друге число. Чи є одержаний вираз поліномом? Якщо так, то якого він степеня?

Достатній рівень

17. Знайдіть суму та різницю першого й другого поліномів.

а) $0{,}4c^2+1{,}2c-0{,}7c+c\cdot c+2{,}1$ і $-1{,}4+0{,}6c+c^2$;

б) $0{,}15ab^3-0{,}17ab^2+0{,}1ab$ і $0{,}05bba+0{,}02bab^2$;

в) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}xy-\frac{1}{2}y$ і $\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}xy+\frac{3}{4}y$;

г) $\frac{2}{7}x^2y+\frac{5}{7}xy^2$ і $\frac{3}{7}y^2x-\frac{4}{7}x^2y$.

18. Знайдіть суму та різницю першого й другого поліномів.

а) $1{,}7d^4-0{,}4d^2+0{,}5$ і $1{,}1d^2-0{,}6d-0{,}5$;

б) $0{,}43x^2y+0{,}07yx$ і $0{,}03yx^2-0{,}21xy$;

в) $\frac{1}{5}a^2+\frac{2}{5}ab-\frac{3}{5}b$ і $\frac{1}{10}a^2+\frac{3}{10}ab-\frac{7}{10}b$;

г) $\frac{3}{4}x^3y^2+\frac{1}{4}x^2y^3$ і $-1\frac{1}{4}y^2x^3-\frac{2}{8}x^2y^3$.

19. Запишіть у вигляді полінома числа: а) $\overline{xy}$; б) $\overline{2xy}$; в) $\overline{x3y}$; г) $\overline{4x5}$.

20. Запишіть у вигляді полінома числа: а) $\overline{kmp}$; б) $\overline{5pm}$; в) $\overline{p7m}$; г) $\overline{2p0}$.

21. Нехай m — двоцифрове число, цифри якого різні та яке не закінчується нулем, а p — двоцифрове число, утворене з m шляхом запису його цифр у зворотному порядку. Доведіть, що різниця чисел $p-m$ ділиться націло на 9.

22. Нехай k — трицифрове число, цифри якого різні та яке не закінчується нулем, а t — трицифрове число, утворене з k шляхом запису його цифр у зворотному порядку. Доведіть, що різниця чисел $k-t$ ділиться націло на 33.

Високий рівень

23. Який вираз треба додати до тринома $3x^2-4x+8$, щоб одержати в результаті моном $2x$?

24. Який вираз треба додати до тринома $7a^2+12ab-b^2$, щоб одержати в результаті біном b^2+1?

25. Який вираз треба відняти від тринома $5y^3+11y-2$, щоб одержати в результаті біном y^3+1?

26. Який вираз треба відняти від полінома $p^2q+14p-3q+pq^2$, щоб одержати в результаті біном $2p-3pq^2$?

27. Доведіть, що вираз $\left(2a^2-3a+7\right)-\left(a^2-a+1\right)+\left(2a+4\right)$ набуває лише додатних значень за всіх значень a. Якого найменшого значення набуває вираз і за якого значення a?

28. Доведіть, що вираз $\left(b^2+b-10\right)-\left(2b^2-4b-2\right)-\left(5b+1\right)$ набуває лише від'ємних значень за всіх значень b. Якого найбільшого значення набуває вираз і за якого значення b?

29. Доведіть, що сума будь-яких трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 3.

30. Доведіть, що сума будь-яких трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 6.



Цікавинки від дідуся Тараса

Зручні способи запису перетворень буквених виразів з'явилися відносно недавно. До XVI ст. вирази та їх перетворення здебільшого записували словами, без використання символів. Уперше системно використовувати символічний запис перетворень виразів почав французький математик *Франсуа Вієт* (1540—1603). У своєму трактаті «Вступ до аналітичного мистецтва» (1591 р.) він запровадив сучасну систему нотації в математиці.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Спробуйте записати розв'язання прикладу на с. 42, не використовуючи математичні символи. На скільки економнішим є сучасний запис розв'язання?

2. Використайте додаткові джерела інформації та зробіть невелике повідомлення про Франсуа Вієта. Який факт його біографії вразив вас найбільше?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Дано числа: 4560, 6372, 1234, 5792, 8127, 1325. Укажіть із них ті, що діляться націло: а) на 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 9.

2. Запишіть число $\overline{cb2}+\overline{3a8}$ у вигляді полінома. Що ви можете розповісти цікавого про це число?

3. Які рівності з поданих є тотожностями? Якщо рівність не є тотожністю, зробіть виправлення таким чином, щоб вона стала тотожністю.
а) $3a+3b=3(a+b)$; б) $6(x-y)=6x-y$; в) $4a+8=4(a+4)$.

4. Протягом кількох днів Марійка й Оксана збирали грибочки в чарівному лісочку. Вони розпочинали роботу щодня о 9:00. Щогодини Марійка збирала 15 грибочків, а Оксана — 12. Після кожної години роботи дівчата мали перерву 30 хв. Вони працювали за таким графіком якомога довше, але завершували роботу не пізніше 15:00. Після кожних 5 днів роботи дівчата мали 2 вихідні. Скільки днів пройшло від початку їх роботи до моменту, коли Марійка й Оксана зібрали рівно 1200 грибочків?



5. Периметр трикутника — 18 см. Довжина однієї з його сторін — 4 см, а друга сторона удвічі більша за першу. Знайдіть довжини сторін трикутника. Спробуйте зобразити цей трикутник. Яким чином ви це робитимете?

§ 5. Множення поліномів. Розкладання поліномів на множники

Множення монома на поліном



Як справи, Петрику? Ти замовив піцу для друзів?



Так, усе добре. Але мені стало цікаво: чи можна вираз $n \cdot a + (10 - n) \cdot b$ записати у вигляді полінома?



Думаю, що слід просто розкрити дужки:

$$n \cdot a + (10 - n) \cdot b = na + 10b - nb.$$

Одержано поліном другого степеня!



Таким чином, щоб помножити поліном на моном, слід кожен доданок полінома помножити на цей моном і результати додати.



Усе правильно, Петрику! Разом із тим не важливо, чи поліном множити на моном, чи навпаки. Наприклад:

$$2x^2 \cdot (5xy - 3y^3) = 2x^2 \cdot 5xy - 2x^2 \cdot 3y^3 = 10x^3y - 6x^2y^3;$$

$$(ab^3 + ba^2) \cdot (2ab) = ab^3 \cdot 2ab + ba^2 \cdot 2ab = 2a^2b^4 + 2a^3b^2.$$

А який степінь мають поліноми з двох останніх прикладів?





Іноді для зручності обчислень корисно подавати поліном у вигляді добутку монома та полінома шляхом винесення за дужки спільного множника.

Наприклад, нехай відомо, що $x+y=5$, а $xy=10$. Знайдемо значення виразу $8x^2y+8xy^2$. Одержимо:

$$8x^2y+8xy^2=8\cdot xy\cdot\left(x+y\right)=8\cdot 10\cdot 5=400.$$

Про спільний множник:
https://rnk.com.ua/106083



Множення поліномів



Множення поліномів відбувається поетапно. Спочатку кожен доданок першого полінома треба помножити на другий поліном, а результати множення додати. Далі, після виконання множення, зводяться подібні доданки.

Наприклад:

$$\left(3x+2\right)\cdot\left(2x-3\right)=3x\cdot\left(2x-3\right)+2\cdot\left(2x-3\right)=$$
$$=6x^2-9x+4x-6=6x^2-5x-6.$$



Після набуття певного досвіду етап множення монома на поліном можна пропускати, одразу розкриваючи дужки. Тоді правило множення поліномів можна сформулювати коротше: щоб помножити два поліноми, треба кожен доданок першого з них помножити на кожен доданок другого і результати додати.

Наприклад:

$$\left(2a^2b+b^3\right)\cdot\left(a^3+3ab^2\right)=2a^2b\cdot a^3+2a^2b\cdot 3ab^2+b^3\cdot a^3+b^3\cdot 3ab^2=$$
$$=2a^5b+6a^3b^3+a^3b^3+3b^5a=2a^5b+7a^3b^3+3b^5a.$$

А як піднести поліном до квадрата? А до степеня з більшим показником?



Про степінь полінома:
https://rnk.com.ua/106084





Іноді зручно подавати поліном у вигляді добутку двох (або більше) поліномів. Для цього використовують метод групування.

Наприклад, розкладемо на множники вираз $2ac+bc+6a+3b$:

$$2ac+bc+6a+3b=\left(2ac+bc\right)+\left(6a+3b\right)=$$
$$=\left(2a+b\right)\cdot c+\left(2a+b\right)\cdot 3=\left(2a+b\right)\cdot\left(c+3\right).$$



Цей вираз можна було розкласти на множники (тобто подати у вигляді добутку двох чи більше мономів та поліномів), згрупувавши доданки в інший спосіб:

$$2ac+bc+6a+3b=\left(2ac+6a\right)+\left(bc+3b\right)=$$
$$=2a\cdot\left(c+3\right)+b\cdot\left(c+3\right)=\left(2a+b\right)\cdot\left(c+3\right).$$



Іноді для розкладання на множники доводиться виконувати спеціальні *штучні кроки*. Наприклад, розкладемо на множники поліном $m^2+2mp+p^2$:

$$m^2+2mp+p^2=m^2+mp+mp+p^2=\left(m^2+mp\right)+\left(mp+p^2\right)=$$
$$=m\cdot\left(m+p\right)+p\cdot\left(m+p\right)=\left(m+p\right)\cdot\left(m+p\right)=\left(m+p\right)^2.$$



А тепер розкладемо на множники поліном c^2-d^2:

$$c^2-d^2=c^2-cd+cd-d^2=c\cdot\left(c-d\right)+d\cdot\left(c-d\right)=\left(c+d\right)\cdot\left(c-d\right).$$

Перевірте себе!

1. Як виконують множення монома на поліном?
2. Як виконують множення поліномів?
3. Як розкласти поліном на множники? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Помножте моном на поліном.

а) $4a \cdot (a+3)$; в) $3c \cdot (2a-7c)$;

б) $(-8b) \cdot (2b-7)$; г) $(-2d) \cdot (5a-3b+4d)$.

2. Помножте моном на поліном.

а) $6x \cdot (x-7)$; в) $5z \cdot (3z-6y)$;

б) $(-3y) \cdot (4+2y)$; г) $3y \cdot (4x-2y-z)$.

3. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $7x^2-4x$; в) $10xz-6xyz$;

б) $5y^2+25y$; г) y^4+5y^3.

4. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $5a^2+3a$; б) $3b^2-15b$; в) $8ab+4ac$; г) $5c^4-7c^2$.

5. Помножте поліноми.

а) $(2a-3) \cdot (b+7)$; в) $(3c+4) \cdot (5a+7c)$;

б) $(3-4b) \cdot (3b-5)$; г) $(3-2d) \cdot (4-3d)$.

6. Помножте поліноми.

а) $(3x+4) \cdot (2+y)$; в) $(5z-2) \cdot (4x+z)$;

б) $(4y+7) \cdot (6y-1)$; г) $(7z-2) \cdot (5+8z)$.

7. Розкладіть поліном на множники.

а) $3x+3y+ax+ay$;
в) $5y^2-ay^2+10-2a$;
б) $cy-cz+7y-7z$;
г) $6x-8z+3ax-4az$.

8. Розкладіть поліном на множники.

а) $5a+5b+ca+cb$;
в) $4a^2-xa^2+16-4x$;
б) $xa-xb+6a-6b$;
г) $12y-8z+3ay-2az$.

Середній рівень

9. Помножте моном на поліном.

а) $2x^2\cdot(3,7x+5)$;
в) $4,2xz\cdot(5z-8x)$;
б) $(-xy)\cdot(3x-6)$;
г) $3xy\cdot(4x-2y-z)$.

10. Помножте моном на поліном.

а) $5ab\cdot(6,5-4a)$;
в) $6bc\cdot(2b+5c)$;
б) $(-b^2)\cdot(5b+7)$;
г) $2,5ac\cdot(5a+b-3c)$.

11. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $12a^2+18ab$;
в) $-16ab^3+4a^2b$;
б) $10b^4-25b^3$;
г) $21a^2c^4-7c^2$.

12. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $16x^2y-26x^2$;
в) $36zx^3-15x^2z$;
б) $27y^5+12y^3$;
г) $5y^2-35x^2y^2$.

13. Помножте поліноми.

а) $(x^2-3x)\cdot(7+2x)$;
в) $(2z^2-3)\cdot(6+4z^2)$;
б) $(5y+3)\cdot(2y^2-4y)$;
г) $(8-2x^2)\cdot(5-3x^2)$.

14. Помножте поліноми.

а) $(3a^2-a)\cdot(2a+11)$;
в) $(2c^2+7)\cdot(5+4c^2)$;
б) $(4-3b)\cdot(5b-6b^2)$;
г) $(12+4d^2)\cdot(d^2-3)$.

15. Розкладіть поліном на множники.

а) $3xa-3xc+ya-yc$;

б) $5a+5b+3ac+3bc$;

в) $yb^2-xb^2+2cx-2cy$;

г) $c^3y+c^3z+6ay+6az$.

16. Розкладіть поліном на множники.

а) $7ay+7az+cy+cz$;

б) $9x-9y+5cx-5cy$;

в) $2xy^2-by^2+4cx-2bc$;

г) $3b^2z+3ab^2+4z+4a$.

Достатній рівень

17. Виконайте множення.

а) $3a^2\cdot\left(7-2{,}6a+a^2\right)$;

б) $\left(-b^2+5{,}3b+3\right)\cdot(-2b)$;

в) $3a^2b\cdot\left(2ab-4b^2\right)$;

г) $\left(5ac^2+3c\right)\cdot 2a^2$.

18. Виконайте множення.

а) $2x^2\cdot\left(7x^2-5{,}8x+3\right)$;

б) $\left(4+7{,}3y-5y^2\right)\cdot(3y)$;

в) $\left(-3xy^2\right)\cdot\left(5x^2-4y^2\right)$;

г) $\left(8yz^2-6y^2\right)\cdot 5y^2$.

19. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $3a^2\cdot(b-5)+7\cdot(b-5)$;

б) $6\cdot(a+2c)-10b^3\cdot(2c+a)$;

в) $5ab^3-2a^2b+7a^2b^2$;

г) $5a^2c^4+10a^2c^2-15a^2$.

20. Винесіть спільний множник за дужки.

а) $5\cdot(3x+7)-4x^3\cdot(3x+7)$;

б) $y^2\cdot(9+2z)-10y^3\cdot(9+2z)$;

в) $9xy^4-7x^3y^3+5x^5y^2$;

г) $12x^5z^3+20x^2z^2-8x^3$.

21. Помножте поліноми.

а) $(x-3)\cdot(x+4)\cdot(x-5)$;

б) $(2y+3)\cdot(y-7)\cdot(y+1)$;

в) $\left(z^2-3z+6\right)\cdot(2+z)$;

г) $(5-x)\cdot\left(3-10x-2x^2\right)$.

22. Помножте поліноми.

а) $(a+3)\cdot(2a-1)\cdot(a-5)$;

б) $(b+4)\cdot(5-3b)\cdot(b+2)$;

в) $\left(c^2+5c-3\right)\cdot(c-3)$;

г) $(a-4)\cdot\left(5+4a-a^2\right)$.

23. Розкладіть поліном на множники.

а) $-5bz+7y+5by-7z$;

б) $7x-10ay-14y+5ax$;

в) $-5z^3+8cx-20c+2xz^3$;

г) $4y+9x^2z+3x^2+12yz$.

24. Розкладіть поліном на множники.

а) $3xz+8y+3xy+8z$;

б) $24x-7zy-8y+21zx$;

в) $-z^3+6xz-2x+3z^4$;

г) $25x^2+7ay-35y-5ax^2$.

Високий рівень

25. Який моном треба помножити на трином $2x^2+5x-4$, щоб одержати в результаті трином $6ax^4+15ax^3-12ax^2$?

26. Який трином треба помножити на моном $7xy$, щоб одержати в результаті трином $21x^2y-7xy^3+35x^3y^3$?

27. Доведіть, що за будь-якого значення змінної x значення виразу $(x-1)\cdot\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)+5$ є додатним. Яке найменше значення може мати цей вираз?

28. Доведіть, що за будь-якого значення змінної a значення виразу $(1-a)\cdot\left(a^3+a^2+a+1\right)-3$ є від'ємним. Яке найбільше значення може мати цей вираз?

29. Розкладіть поліном на множники.

а) $a^3-a^2b^2+7a-7b^2-5ac^2+5b^2c^2$;

б) $5a^2+15ac+ab^2+3b^2c-7ac^2-21c^3$.

30. Розкладіть поліном на множники.

а) $4xy+2y^2-10x-5y+2x^3y^2+x^2y^3$;

б) $9-3z^2+15x^2-5x^2z^2-18z^3+6z^5$.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

Ознайомтеся *з історією позначень (символів)* операцій додавання, віднімання, множення і ділення. Чи відрізняються ці символи в різних країнах світу? Як саме? Чи використовуєте ви власні скорочення, записуючи математичний вираз? Які саме? Чому саме такі?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразів.

а) $-2{,}5+3{,}6-7{,}2$;

в) $(-2{,}4)\cdot(-5)-14{,}7$;

б) $\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$;

г) $1\frac{4}{9}-2\frac{1}{3}\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)$.

2. Автомобіль рухався з незмінною швидкістю 40 км/год протягом t год. Запишіть формулу для обчислення шляху s (у км), пройденого цим автомобілем за час t. Знайдіть значення s, якщо: а) $t=2$; б) $t=1{,}2$; в) $t=2\frac{1}{3}$.

3. Доведіть тотожності.

а) $(x-7)(x+7)=x^2-49$;

б) $(m+5)^2=m^2+10m+25$.

4. У класі навчаються 32 дитини. Із них 20 дітей відвідують спортивні секції. На скільки відсотків від загальної кількості дітей класу відвідувачів спортивних секцій більше, ніж тих, хто їх не відвідує?

5. Потрібно виготовити коробку, що має форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами 8 см, 6 см і 5 см. Яким чином це можна зробити? Спробуйте виготовити таку коробку.

§ 6. Формули скороченого множення



Я помітила, що розкладання полінома на множники іноді є дуже непростою справою! Доводиться використовувати різні штучні прийоми: додавати та віднімати той самий вираз, записувати моном у вигляді суми двох подібних доданків тощо. Цікаво, чи можна цей процес якось спростити?



Пам'ятаєш, дідусь Тарас казав, що математики — дуже ліниві люди, тому вони придумують щось коротке, зрозуміле та легке для запам'ятовування? Наприклад, я помітив із попереднього заняття таке:

$$c^2-d^2=(c+d)\cdot(c-d),\ \text{а}\ \ m^2+2mp+p^2=(m+p)^2.$$



Так, Петрику, існують формули для типових випадків розкладання на множники. Їх називають формули скороченого множення.



Основні формули скороченого множення

1. Різниця квадратів: $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.
2. Квадрат суми: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.
3. Квадрат різниці: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.



Кожну із формул скороченого множення можна використовувати не лише для розкладу поліномів на множники, а й для перетворення виразів, читаючи їх справа наліво:



1. Різниця квадратів: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.
2. Квадрат суми: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
3. Квадрат різниці: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Детальніше про різницю квадратів:
https://rnk.com.ua/106085

Детальніше про квадрат різниці:
https://rnk.com.ua/106086



Існують також інші формули скороченого множення. Дізнайтеся про них більше з додаткових джерел інформації.

Приклади

1. Спростіть вираз $(2x-3y)^2+(3x+2y)^2$.

Розв'язання. Використаємо послідовно формули квадрата різниці та квадрата суми:

$$(2x-3y)^2+(3x+4y)^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2+\cdot(3x)^2+$$
$$+2\cdot(3x)\cdot(4y)+(4y)^2=4x^2-12xy+9y^2+9x^2+24xy+16y^2=$$
$$=13x^2+12xy+25y^2.$$

2. Подайте у вигляді добутку поліномів вираз $3p+6t+p^2-4t^2$.

Розв'язання. Оскільки $3p+6t=3(p+2t)$, а за формулою різниці квадратів $p^2-4t^2=p^2-(2t)^2=(p+2t)(p-2t)$, то:

$$3p+6t+p^2-4t^2=3(p+2t)+(p+2t)(p-2t)=(p+2t)(3+p-2t).$$



Перевірте себе!

1. Сформулюйте основні формули скороченого множення.
2. Яким чином формули скороченого множення використовують для розкладання поліномів на множники? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Запишіть у вигляді виразу.

а) Квадрат суми мономів $2a$ і $3b$; б) різниця квадратів мономів $8x$ і $9y$; в) квадрат різниці мономів $3ab$ і $4x^2$; г) різниця мономів c і $5d$, помножена на їх суму.

2. Запишіть у вигляді виразу.

а) Квадрат різниці мономів $3p$ і $7q$; б) різниця квадратів мономів ab і d; в) квадрат суми мономів $5m$ і $6n^2$; г) сума мономів x та y, помножена на їх різницю.

3. Розкрийте дужки.

а) $(2-a)(2+a)$; в) $(7+x)(x-7)$;

б) $(y-11)(y+11)$; г) $(c-d)(c+d)$.

4. Розкрийте дужки.

а) $(9-x)(9+x)$; в) $(m+n)(n-m)$;

б) $(12-a)(12+a)$; г) $(p-q)(q+p)$.

5. Розкладіть на множники.

а) 5^2-2^2; б) 12^2-x^2; в) a^2-7^2; г) m^2-n^2.

6. Розкладіть на множники.

а) 8^2-4^2; б) 15^2-y^2; в) c^2-6^2; г) b^2-a^2.

7. Спростіть вираз.

а) $x^2+2xy+y^2$; в) 3^2-6b+b^2;

б) $a^2-2ab+b^2$; г) $m^2+mn+mn+n^2$.

8. Спростіть вираз.

а) $c^2-2cd+d^2$; в) 2^2-4b+b^2;

б) a^2+b^2+2ab; г) $9x^2+6xy+y^2$.

9. Розкрийте дужки.

а) $(3+k)^2$;
в) $(b-2)^2$;
б) $(a+1)^2$;
г) $(x-ab)^2$.

10. Розкрийте дужки.

а) $(1+d)^2$;
в) $(n+pq)^2$;
б) $(5-l)^2$;
г) $(11-3x)^2$.

Середній рівень

11. Розкрийте дужки.

а) $(3-2x)(3+2x)$;
в) $(7c+9d)(7c-9d)$;
б) $(5a-6)(6+5a)$;
г) $(4x-16y)(4x+16y)$.

12. Розкрийте дужки.

а) $(2ab-c)(2ab+c)$;
в) $(-1+4t)(1+4t)$;
б) $(3x-5y)(3x+5y)$;
г) $(13p-7q)(13p+7q)$.

13. Розкладіть на множники.

а) $64-a^2$;
в) $121c^2-9m^2$;
б) $25-4x^2$;
г) $100p^2-9q^2$.

14. Розкладіть на множники.

а) y^2-36;
в) a^2b^2-1;
б) $121v^2-16u^2$;
г) $-49c^2+81d^2$.

15. Спростіть вираз.

а) $16x^2+24xy+9y^2$;
в) $25-20mn+4m^2n^2$;
б) $a^2-8ab+16b^2$;
г) $14n+1+49n^2$.

16. Спростіть вираз.

а) $81c^2+18cd+d^2$;
в) $36k^2+120k+100$;
б) $9a^2+4b^2-12ab$;
г) $25x^2-30xy+9y^2$.

17. Розкрийте дужки.

а) $(13+7a)^2$;

б) $(1+17xy)^2$;

в) $(9m-16n)^2$;

г) $(7p-6ab)^2$.

18. Розкрийте дужки.

а) $(12-5k)^2$;

б) $(8-7mn)^2$;

в) $(2ad+3cd)^2$;

г) $(p-13q)^2$.

Достатній рівень

19. Розкладіть на множники.

а) $16-(2-x)^2$;

б) $(3y+1)^2-(x-3)^2$;

в) $81-b^8$;

г) $c^{12}-d^{22}$.

20. Розкладіть на множники.

а) $(6-y)^2-25$;

б) $(a+2b)^2-(b-2a)^2$;

в) $256-x^4$;

г) p^8-q^{16}.

21. Розкрийте дужки.

а) $\left(9p-\frac{1}{3}s\right)^2$;

б) $\left(2m^2+1\frac{1}{2}t\right)^2$;

в) $\left(4x^3-5y^2\right)\left(5y^2+4x^3\right)$;

г) $\left(-z^4-2z^3\right)\left(2z^3-z^4\right)$.

22. Розкрийте дужки.

а) $\left(4a+\frac{1}{2}b\right)^2$;

б) $\left(3c^2-2\frac{1}{3}d\right)^2$;

в) $\left(2g^2+3h^3\right)\left(3h^3-2g^2\right)$;

г) $\left(l^3-4l^2\right)\left(-4l^2-l^3\right)$.

23. Заповніть порожні клітинки так, щоб одержати правильну рівність.

а) $4x^2-28x+\square=(\square-\square)^2$;

б) $\square-40xy+25x^2=(\square-\square)^2$;

в) $9x^2-\square+64y^2=(\square-\square)^2$;

г) $\square+30yx+9x^2=(\square+\square)^2$;

д) $16+\square+25x^2=(\square+\square)^2$;

е) $36+36x+\square=(\square+\square)^2$.

24. Заповніть порожні клітинки так, щоб одержати правильну рівність.

а) $9-54a+\square=(\square-\square)^2$;

б) $\square-24ab+4b^2=(\square-\square)^2$;

в) $49a^2-\square+25b^2=(\square-\square)^2$;

г) $\square+30yx+25x^2=(\square+\square)^2$;

д) $16+\square+25x^2=(\square+\square)^2$;

е) $36a^2+84ab+\square=(\square+\square)^2$.

25. Знайдіть найзручнішим способом значення добутку $998\cdot1002$ (без калькулятора).

26. Знайдіть найзручнішим способом значення добутку $2980\cdot3020$ (без калькулятора).

Високий рівень

27. Спростіть вираз $(x+3)(x-3)(x^2+9)+81$ і знайдіть його значення, якщо $x=-1\frac{1}{2}$.

28. Спростіть вираз $(2-a)(2+a)(4+a^2)+(a^2+2)^2$ і знайдіть його значення, якщо $a=-2{,}5$.

29. Розкладіть на множники.

а) $x^8-4x^4y+4y^2$;

б) $25a^8+b^{10}+10a^4b^5$;

в) $\frac{1}{256}x^4+2x^2y^2+256y^4$;

г) $0{,}01a^2-0{,}2a+1$.

30. Розкладіть на множники.

а) $9x^2-30y^4x+25y^8$; в) $1{,}44x^2-1{,}2xy+0{,}25y^2$;

б) $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$; г) $1{,}21a^2-0{,}88ab+0{,}16b^2$.

31. Доведіть, що сума квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел НЕ ділиться на 8.

32. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 8.

33. Знайдіть значення виразу a^2+b^2, якщо $a+b=7$, $ab=12$.

34. Знайдіть значення виразу x^2+y^2, якщо $x-y=10$, $xy=24$.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

Як ви вважаєте, що зручніше: подання виразу у вигляді поліному (суми мономів) чи у вигляді добутку двох (або більше) мономів і поліномів? Чому ви так вважаєте? Наведіть кілька прикладів на підтвердження вашої думки.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Виконайте ділення: а) $-320:(-4)$; б) $21{,}6:(-0{,}3)$; в) $-\frac{7}{9}:\frac{8}{27}$; г) $\left(-1\frac{2}{5}\right):(-2{,}1)$.
2. Якого найменшого значення може набути вираз $(a-8)^2+(6+b)^2+2$? За яких значень змінних це буде?
3. У продуктовій крамниці продавали гречану крупу за ціною 80 грн/кг. Михайло купив m кг гречаної крупи. Запишіть формулу для обчислення вартості p покупки (у грн) залежно від маси m купленої крупи. Знайдіть значення p, якщо: а) $m=4$; б) $m=2{,}5$; в) $m=1{,}35$.

4. У садочку дідуся Архипа ростуть лише яблуні, груші й абрикоси. Яблуні складають $\frac{1}{2}$ всіх дерев, груші — $\frac{1}{3}$ всіх дерев, а абрикосів у садочку росте 4. Скільки всього дерев у садочку дідуся Архипа? Скільки яблунь і груш окремо?



5. Є прямокутний аркуш паперу А4 (розміром 21 см на 30 см). З нього намагаються виготовити «підзорну трубу», витрачаючи на склейку 1 см паперу з кожного із двох країв. Як називається геометричне тіло, що має форму такої «підзорної труби»? Скількома способами можна її виготовити? Виготовте таку «підзорну трубу» та виміряйте приблизно її діаметр за допомогою лінійки. Зробіть висновки.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 1

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Знайдіть значення виразу $3c+d$, якщо $c=-2$, $d=5$.

А	Б	В	Г
-1	-11	11	1

2. Запишіть число 36 000 у стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$360\cdot10^2$	$36\cdot10^3$	$3{,}6\cdot10^4$	$0{,}36\cdot10^5$

3. $\left(7^3 \cdot 7\right)^3 =$

А	Б	В	Г
7^9	7^{12}	7^{27}	7^{64}

4. Укажіть моном третього степеня.

А	Б	В	Г	Д
$3ab$	$2a^2b$	a^3+b^3	$5ab^3$	$b^3:a^3$

5. Знайдіть добуток мономів: $\left(3x^2y\right)\cdot\left(2xy^2\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$6x^3y^2$	$8x^3y^3$	$6x^2y^2$	$9x^2y^3$	$6x^3y^3$

6. $\left(k-3\right)^2 =$

А	Б	В	Г	Д
k^2+9	k^2-3k+9	k^2-6k-9	k^2-6k+9	k^2-9

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. Знайдіть значення виразу $2\cdot3^4-5\cdot2^3$.

8. Обчисліть: $\dfrac{5^6\cdot8^3}{2^8\cdot25^3}$.

9. Спростіть вираз $3x\left(x-2\right)+6\left(x-2\right)+12$ і знайдіть його значення, якщо $x=5$.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. У гуртожитку n поверхів, на кожному з яких a двомісних кімнат і b тримісних. Складіть вираз для визначення *максимальної* кількості осіб, що можуть жити в цьому гуртожитку. Запишіть одержаний вираз у вигляді полінома та знайдіть його значення, якщо $n=12$, $a=4$, $b=5$.

11. Спростіть вираз $a(2b-a)+(a-b)^2$.

12. Розкладіть на множники: $9y^2-4t^2+18y^2t-12yt^2$.

13. Доведіть, що різниця трицифрового числа і числа, утвореного з нього шляхом зміни місцями другої та третьої цифр, ділиться націло на 9.

14. Доведіть, що сума будь-яких чотирьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 8.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Доведіть, що сума чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ ділиться на 111.

2. Різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 65. Знайдіть ці числа.

3. Чи є рівність $(|a+b|)^2=(a+b)^2$ тотожністю? Чому?

4. Доведіть тотожності: а) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
б) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

5. Доведіть тотожності: а) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
б) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

6. Доведіть тотожність $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

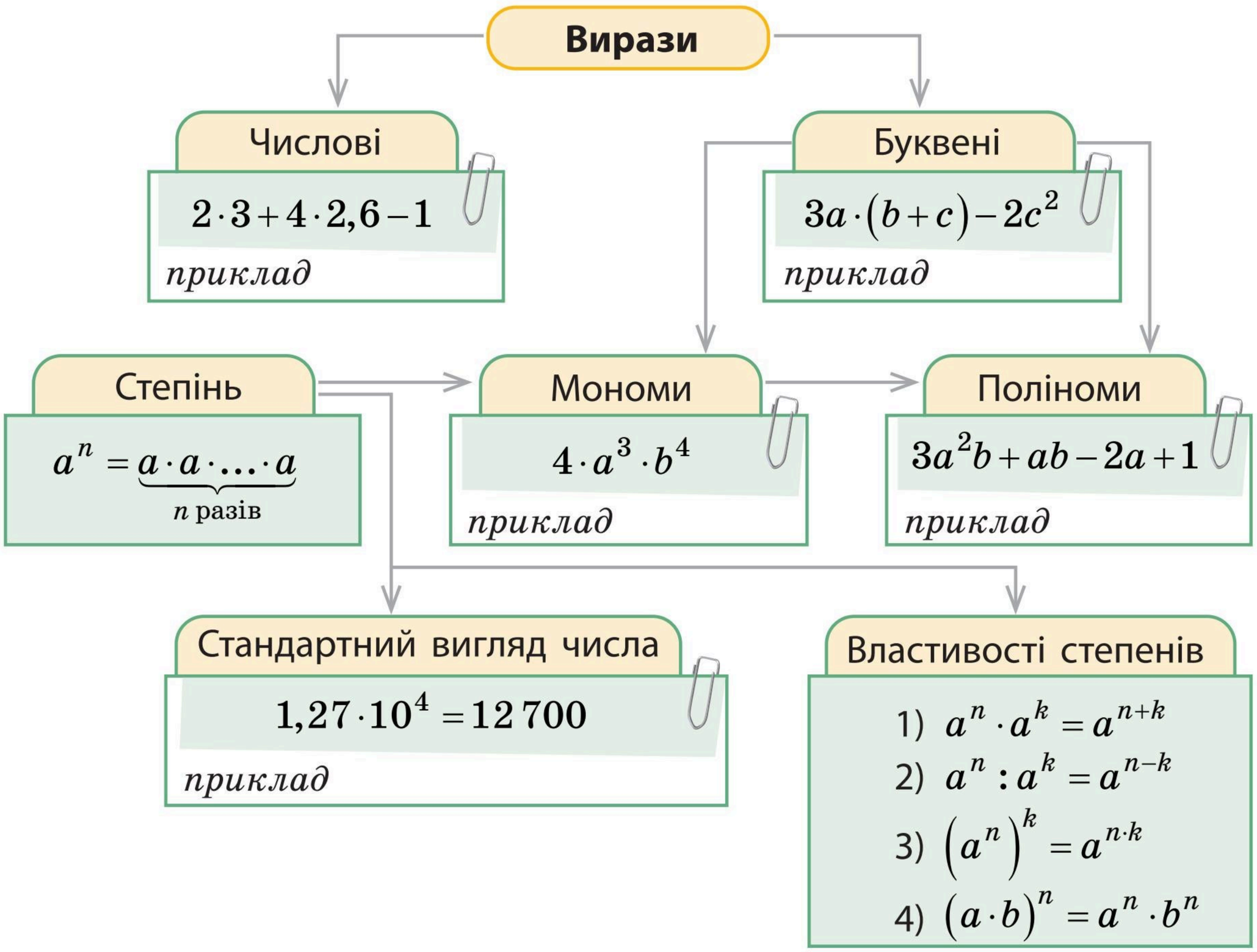
7. Розкладіть на множники: $x^4+x^2y^2+y^4$.

8. Подайте вираз $24xy$ у вигляді різниці квадратів двох поліномів. Скільки розв'язків має задача?

9. Замініть один із коефіцієнтів полінома $4a^2 - ab + 9b^2$ так, щоб одержаний поліном можна було подати у вигляді квадрата бінома. Знайдіть 4 розв'язки.

Числовий вираз — numeric expression
Буквений вираз (вираз зі змінними) — expression with variables
Степінь числа — power of a number
Основа степеня — the base of the exponent
Показник степеня — exponent
Розклад полінома на множники — factorization of a polynomial

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1



Дії над мономами і поліномами

Множення мономів

$$4a^2b \cdot 3a^3b^2 = 12a^5b^3$$

приклад

Піднесення до степеня мономів

$$\left(2a^3c^2\right)^4 = 16a^{12}c^8$$

приклад

Віднімання поліномів

$$2a - b - (3a + 1) =$$
$$= 2a - b - 3a - 1 = -a - b - 1$$

приклад

Додавання поліномів

$$3a^2 + a - 3 + \left(4a^2 + 3a + 7\right) =$$
$$= 7a^2 + 4a + 4$$

приклад

Множення монома на поліном

$$4a\left(b^2 + 2a\right) = 4a \cdot b^2 + 4a \cdot 2a =$$
$$= 4ab^2 + 8a^2$$

приклад

Множення поліномів

$$(a + 1)(b - a) = ab + b - a^2 - a$$

приклад

Розкладання полінома на множники

1) $a^2b - 2ab^3 = ab\left(a - 2b^2\right)$

2) $ab + 2a + 3b + 6 = a(b + 2) + 3(b + 2) = (a + 3)(b + 2)$

приклад

Формули скороченого множення

Різниця квадратів

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Квадрат суми

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат різниці

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

РОЗДІЛ 2.
ФУНКЦІЇ

CHAPTER 2.
FUNCTIONS

§ 7. Прямокутна система координат на площині

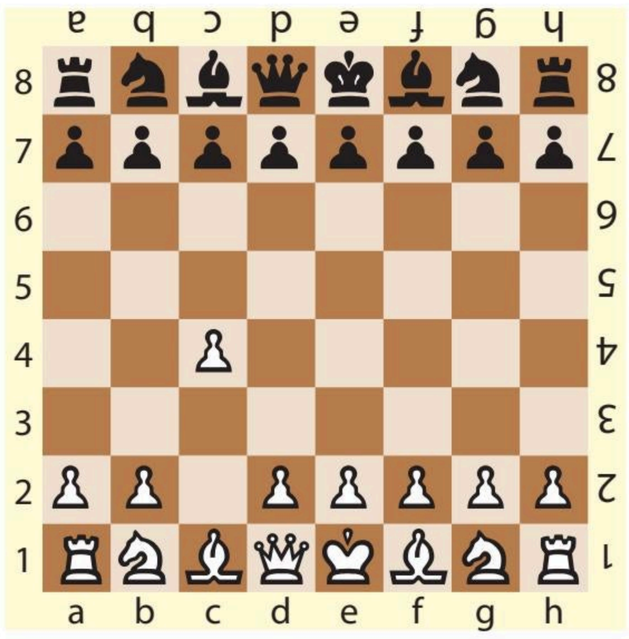


Петрику, знайшла вдома стару книжку про шахи, а в ній цікаві записи! Ось, поглянь, написано «Англійський початок», картинка шахівниці та запис: 1. c2-c4. Ти не знаєш, що це означає?



Дідусь Тарас мені розповідав, що на шахівниці кожне поле має свою «адресу», яка по горизонталі позначена буквами a, b, c, d, e, f, g, h, а по вертикалі — цифрами від 1 до 8. На цій картинці видно, що першим ходом пішак перемістився з поля c2 на поле c4, — такий початок домовилися називати «англійським початком».





Англійський початок — шаховий дебют, який починається ходом c2-c4. Був введений англійцем Говардом Стаунтоном у 1843 р.



Це надзвичайно зручно! У такий спосіб можна легко визначити положення кожної шахової фігури на шахівниці. Також я чула, що в місті Нью-Йорк, на Мангеттені, адреси мають схожий вигляд: вулиці, що йдуть із півночі на південь, звуться «авеню» і мають номери, а вулиці, що йдуть зі сходу

на захід, називаються «стріт» і також мають номери. Тоді для знаходження розташування будинку на розі вулиць досить вказати спочатку номер «авеню», а потім номер «стріт» — і можна легко його знайти!



Так, я знаю, мій друг колись надіслав своє фото на розі 5 авеню та 140 стріт. Цікаво, а цей принцип використовують у математиці?



Звісно, Петрику! У математиці сукупність засобів для визначення положення точок називають системою координат. Ви вже знаєте, що числа можна позначати точками на координатній прямій, тобто на прямій, на якій обрано напрямок, початок відліку та масштабну одиницю (одиничний відрізок). Наприклад, на рис. 7.1 зображено координатну пряму і точку $A(-2)$.



Аналогічно діють для визначення положення точок на площині: будують дві координатні прямі, що мають спільний початок відліку (точку O) і перетинаються під прямим кутом (рис. 7.2). Такі координатні прямі називають осями координат. Вони поділяють площину на чотири частини, які називають координатними чвертями й позначають римськими цифрами I, II, III, IV.

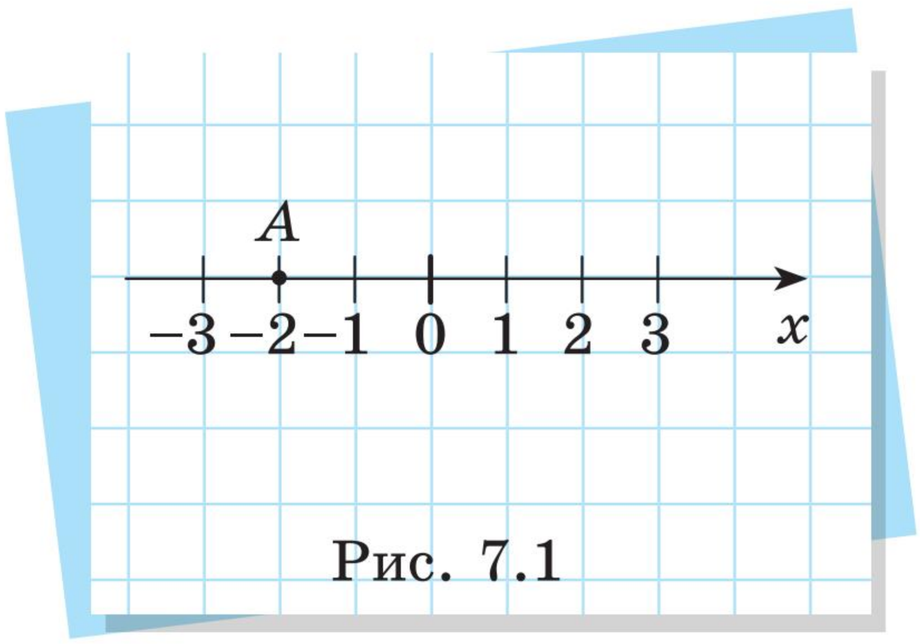


Рис. 7.1

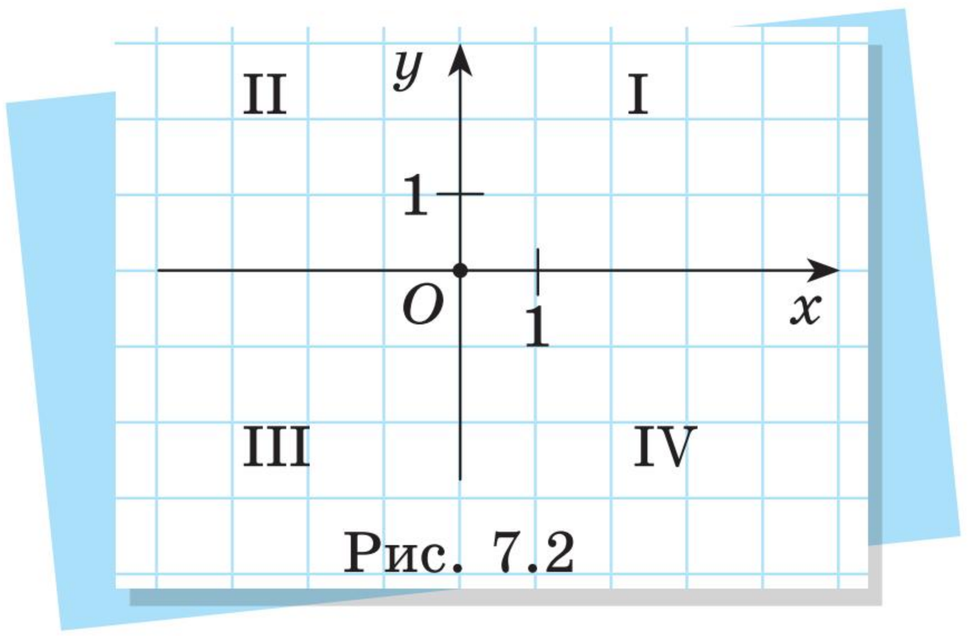


Рис. 7.2

Масштабні одиниці на обох осях зазвичай обирають однакові, а напрямки — так, як показано на рис. 7.2. Таку систему координат називають прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) — на честь вже відомого вам французького вченого Рене Декарта.



Горизонтальну координатну пряму позначають буквою x і називають віссю абсцис, а *вертикальну* — буквою y і називають віссю ординат.

Координати будь-якої точки на площині визначають так:

1) через обрану точку (нехай це буде точка M) проводять прямі, перпендикулярні до обох осей координат;

2) знаходять координати точок перетину цих прямих із координатними осями — нехай це будуть точка $A(x_0)$ на осі абсцис і точка $B(y_0)$ на осі ординат;

3) координатами точки на площині вважають *упорядковану пару чисел*, з яких першим числом є координата точки перетину з віссю абсцис, а другим — координата точки перетину з віссю ординат, тобто $M(x_0; y_0)$.

Наприклад, на рис. 7.3 зображено точку $M(-3; 4)$. Число -3 називають абсцисою точки M, а число 4 — ординатою точки M.

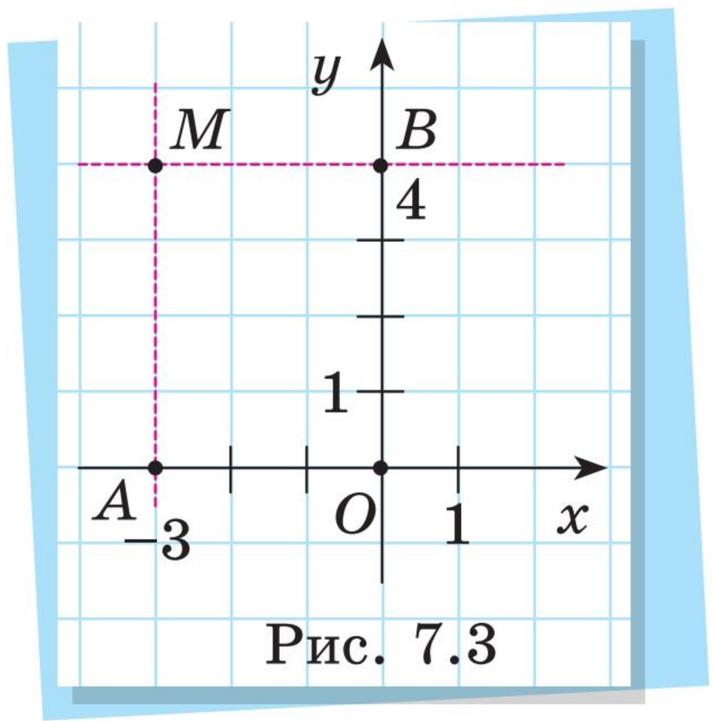


Рис. 7.3



Щоб побудувати в ПДСК точку з координатами $(x_0; y_0)$ (нехай це буде точка M), *діють так:*

1) будують точку на осі абсцис — нехай це буде точка $A(x_0)$; будують точку на осі ординат — нехай це буде точка $B(y_0)$;

2) через точку A проводять пряму, перпендикулярну до осі абсцис, а через точку B — пряму, перпендикулярну до осі ординат;

3) точка перетину цих прямих — шукана точка $M(x_0; y_0)$.

Наприклад, на рис. 7.4 побудовано точки $K(3; 2)$ і $S(-4; -3)$.



Якщо точка належить осі абсцис, то з означення координат випливає, що її ордината дорівнює нулю. Аналогічно: якщо точка належить осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю.

Наприклад, на рис. 7.5 зображено точки $L(4; 0)$ і $P(0; -2)$.

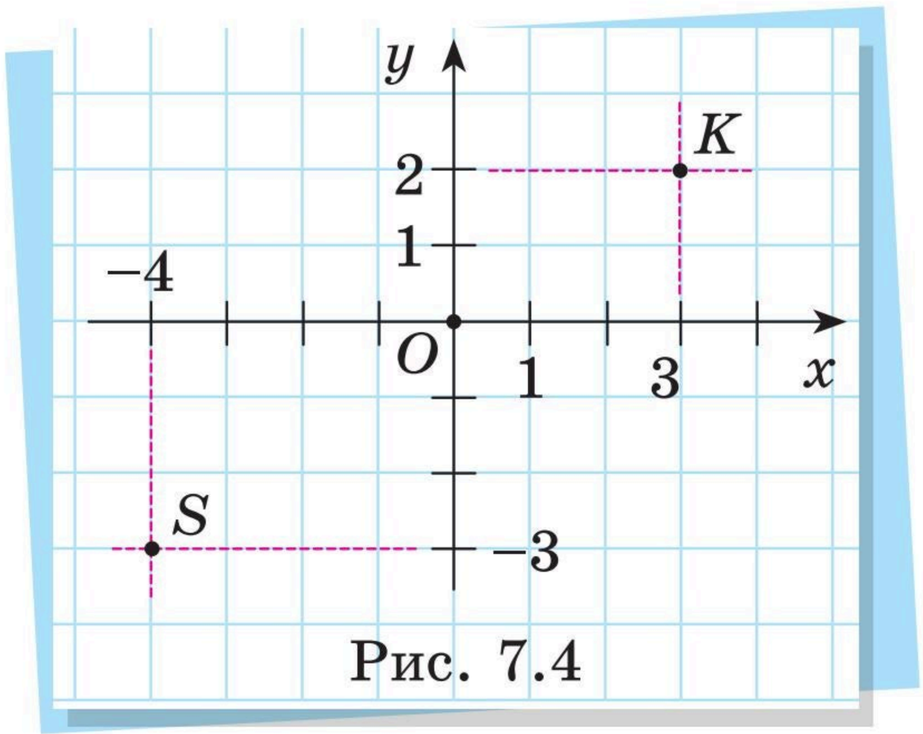


Рис. 7.4

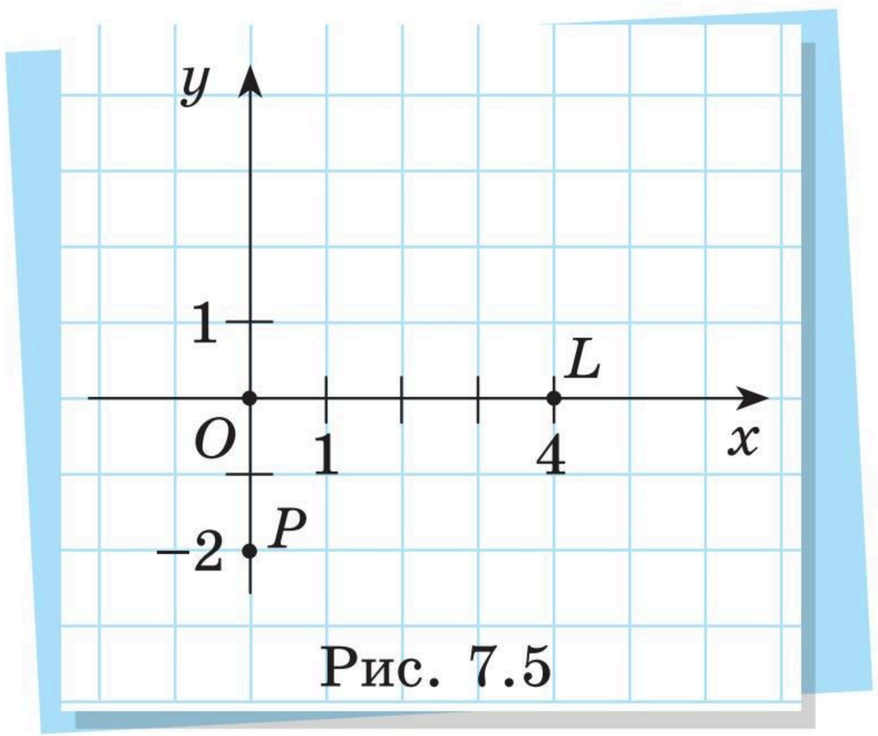


Рис. 7.5

Наочно про те, як визначити координати точки на площині, як побудувати точку за відомими координатами: https://rnk.com.ua/106087



До речі, як ви вважаєте, які координати має початок координат — точка O?



Перевірте себе!

1. Що називають системою координат?
2. Яким чином задається прямокутна декартова система координат (ПДСК) на площині?

3. Яку назву мають осі координат у ПДСК?

4. Як нумерують координатні чверті в ПДСК?

5. Як визначити координати точки в ПДСК? Яку назву мають ці координати?

6. Яким чином побудувати в ПДСК точку із заданими координатами?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Знайдіть координати точок, зображених на рис. 1. Укажіть точки, розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

2. Знайдіть координати точок, зображених на рис. 2. Укажіть точки, розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

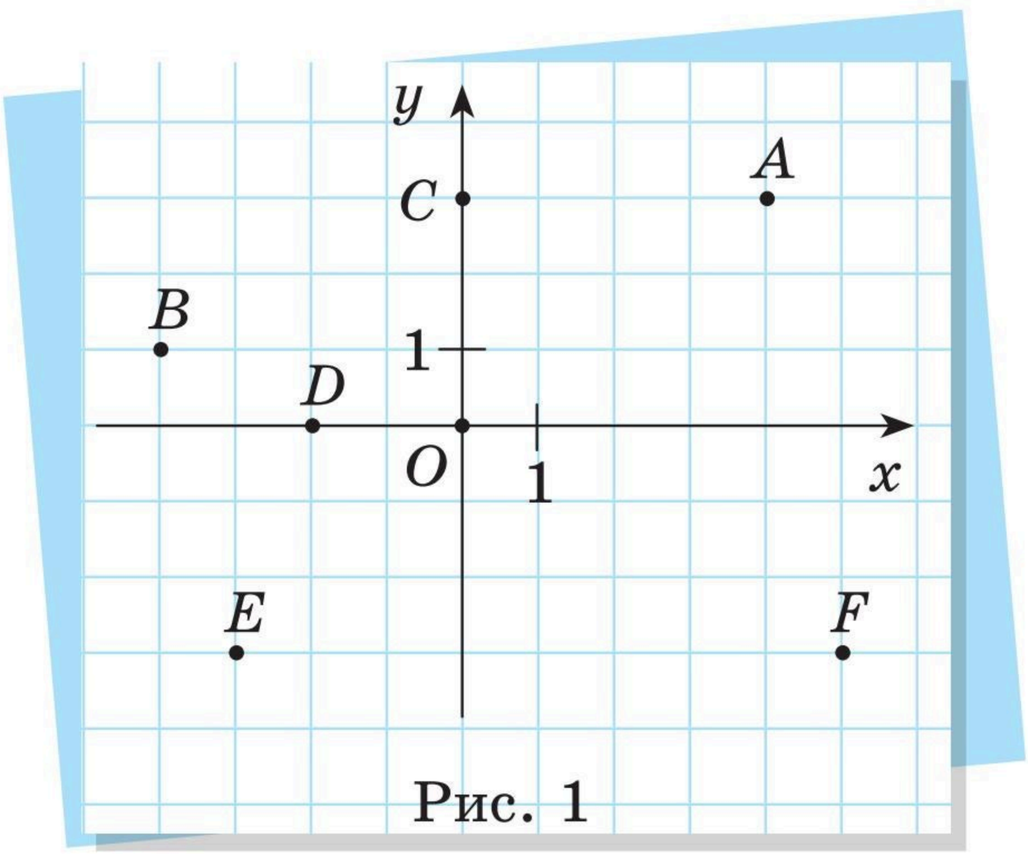


Рис. 1

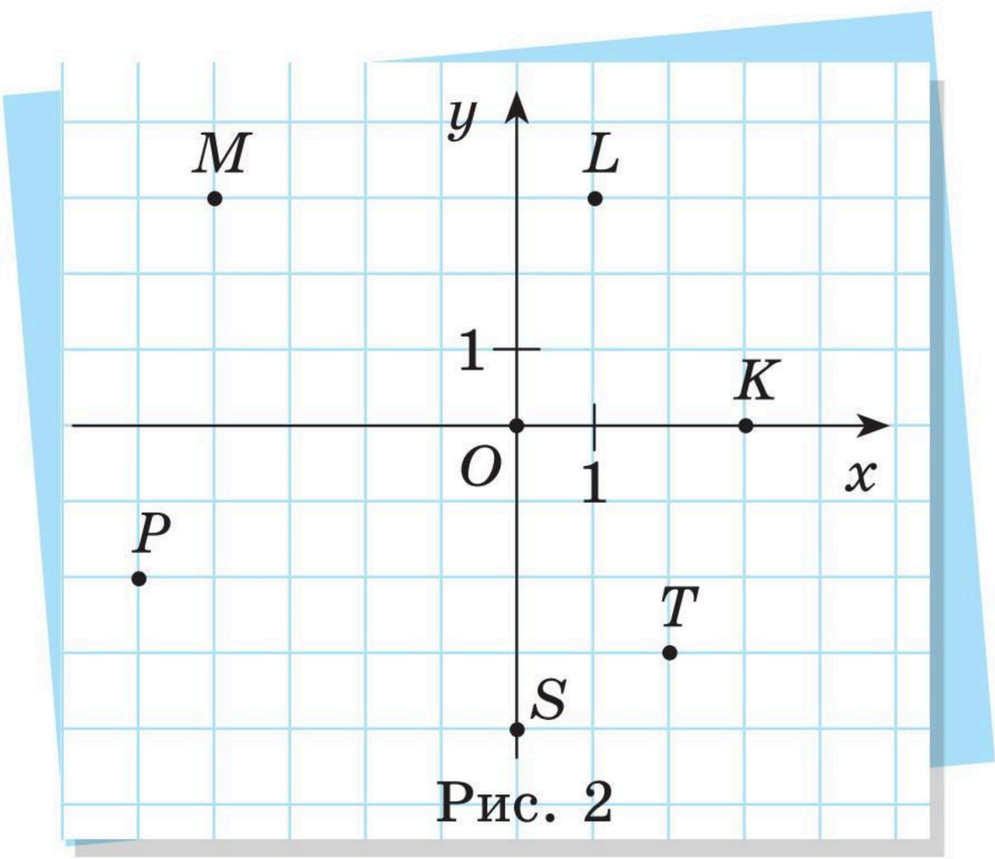


Рис. 2

3. У ПДСК побудуйте точки: $A(2;6)$, $B(-3;2)$, $C(-1;-5)$, $D(0;4)$, $E(-5;0)$. Укажіть із них ті, що розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

4. У ПДСК побудуйте точки: $H(-3;-4)$, $S(3;-5)$, $T(-1;2)$, $L(0;-2)$, $M(7;0)$. Укажіть із них ті, що розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

Середній рівень

5. Знайдіть координати точок A, B, C, D, зображених на рис. 3. У яких координатних чвертях або на яких осях координат вони розташовані?

6. Знайдіть координати точок Q, P, S, R, зображених на рис. 4. У яких координатних чвертях або на яких осях координат вони розташовані?

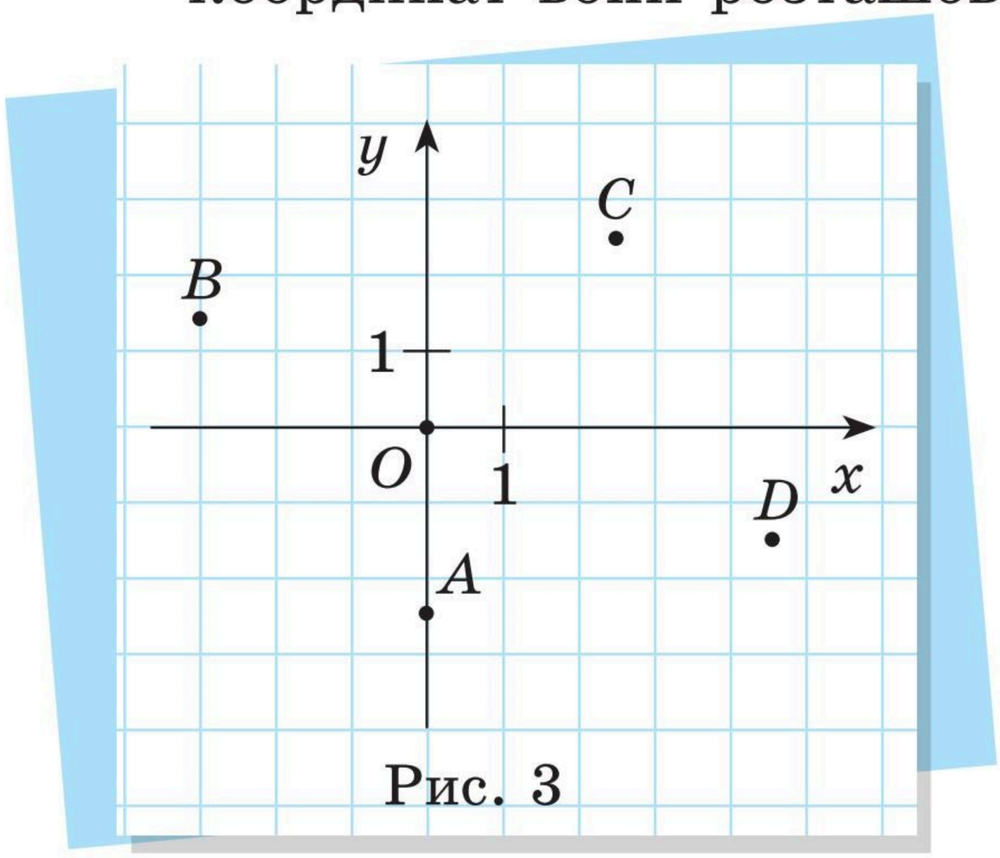


Рис. 3

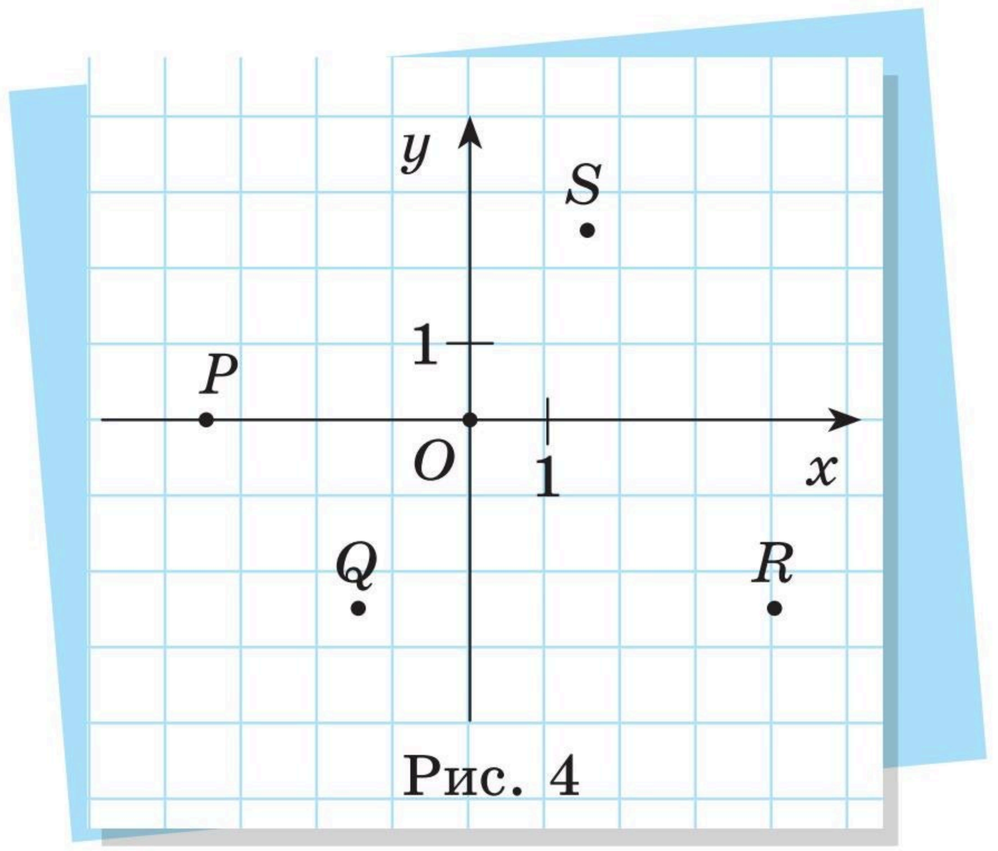


Рис. 4

7. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте точки: $A(2{,}5;1)$, $B(-2;1{,}5)$, $C(2{,}5;-2{,}5)$, $D(3{,}5;0)$, $E(0;-0{,}5)$. Укажіть із них ті, що розташовані: а) у I чверті;

б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

8. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте точки: $N(-2,5;-3)$, $V(-1,5;2,5)$, $W(4;-0,5)$, $Z(0;1,5)$, $Y(-1,5;0)$. Укажіть із них ті, що розташовані: а) у I чверті; б) II чверті; в) III чверті; г) IV чверті; д) на осі абсцис; е) на осі ординат.

Достатній рівень

9. На рис. 5 зображено многокутник. Знайдіть координати його вершин і довжини сторін у масштабних одиницях. Вважаючи, що довжина масштабної одиниці дорівнює 5 мм, знайдіть периметр цього многокутника (у мм) та його площу (у мм^2).

10. На рис. 6 зображено многокутник. Знайдіть координати його вершин і довжини сторін у масштабних одиницях. Вважаючи, що довжина масштабної одиниці дорівнює 5 мм, знайдіть периметр цього многокутника (у мм) та його площу (у мм^2).

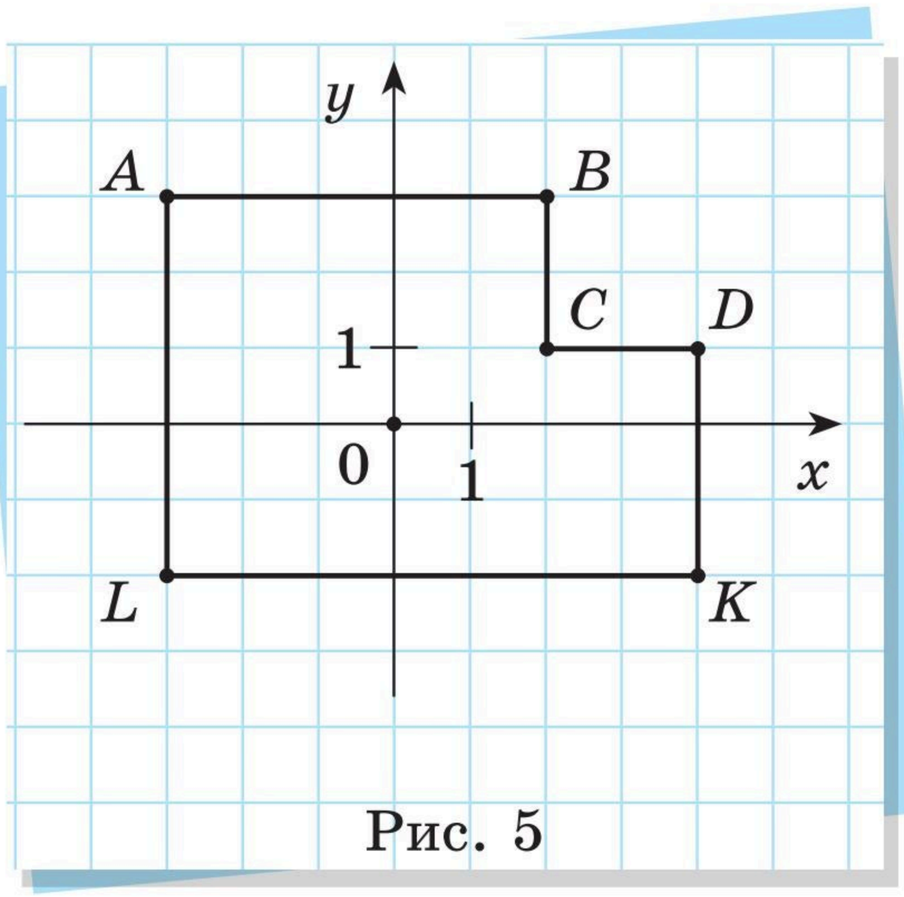


Рис. 5

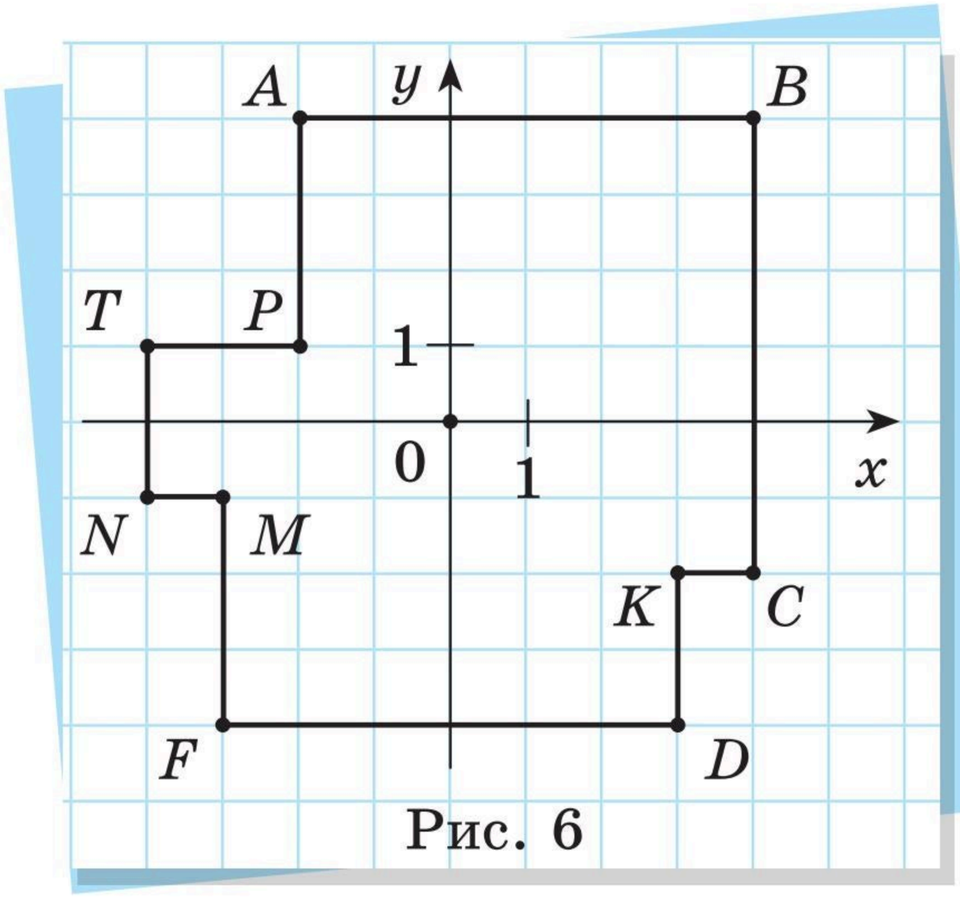


Рис. 6

11. У ПДСК на кожній з осей оберіть масштабну одиницю довжиною в 3 клітинки та побудуйте точки: $A\left(\frac{1}{3};1\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-1\frac{2}{3};-2\right)$, $C\left(2;-2\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-1\frac{1}{2};4\frac{1}{3}\right)$. За рисунком визначте, яка із цих точок розташована *найближче*: а) до осі абсцис; б) до осі ординат; в) до початку координат.

12. У ПДСК на кожній з осей оберіть масштабну одиницю довжиною в 4 клітинки та побудуйте точки: $L\left(1\frac{1}{4};2\right)$, $M\left(-1\frac{3}{4};3\right)$, $P\left(1;-\frac{1}{4}\right)$, $Q\left(-1\frac{1}{2};-1\right)$. За рисунком визначте, яка із цих точок розташована *найближче*: а) до осі абсцис; б) до осі ординат; в) до початку координат.

Високий рівень

13. Відомо, що $a>0$, $b<0$. Установіть розташування зазначених точок відносно ПДСК (укажіть координатну чверть, додатну чи від'ємну частину координатної осі — піввісь, якій вони належать): $P(2;b)$, $Q(a;-3)$, $S(-a;0)$, $T(0;-b)$, $R(-a;b)$.

14. Відомо, що $c<0$, $d<0$. Установіть розташування зазначених точок відносно ПДСК (укажіть координатну чверть, додатну чи від'ємну частину координатної осі — піввісь, якій вони належать): $F(-3;c)$, $G(d;5)$, $H(-c;0)$, $K(0;d)$, $L(-c;-d)$.

15. Дано координати вершин шестикутника $ABCDEF$: $A(3;3)$, $B(6;0)$, $C(3;-3)$, $D(-2;-3)$, $E(-4;0)$, $F(-2;3)$. Побудуйте ці точки в ПДСК. Вважаючи, що довжина масштабної одиниці дорівнює 1 см, знайдіть площу шестикутника $ABCDEF$ (у см^2).

16. Дано координати вершин п'ятикутника $KLMPS$: $K(-4;1)$, $L(0;3)$, $M(4;1)$, $P(2;-3)$, $S(-2;-3)$. Побудуйте ці точки в ПДСК. Вважаючи, що довжина масштабної одиниці дорівнює 1 см, знайдіть площу п'ятикутника $KLMPS$ (у см^2).



Цікавинки від дідуся Тараса

Термін «*абсциса*» походить від латинського слова *abscissus* — відрізаний, відокремлений. У сучасному значенні його вперше вжив німецький філософ і математик *Готфрід Вільгельм Ляйбніц* у 1694 р. Вираз «вісь абсцис» запровадив англійський математик *Ісаак Барроу* в 1670 р.

Термін «*ордината*» походить від латинського слова *ordinatus* — упорядкований, визначений. Як назву певного відрізка конічного перерізу його вперше застосував *Рене Декарт* (1596–1650), а як назву однієї з координат точки — Г. Ляйбніц у 1694 р.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Користуючись додатковими джерелами інформації, зробіть невелике повідомлення про Готфріда Вільгельма Ляйбніца. Який факт його біографії вразив вас найбільше?
2. Чи відомі вам інші системи координат окрім прямокутної декартової? Наведіть приклади. Дізнайтеся про це більше у вчителя або вчительки географії!
3. Створіть «зашифрований рисунок», який можна розшифрувати й зобразити, побудувавши в ПДСК точки із заданими координатами та сполучивши їх послідовно.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Виконайте множення.

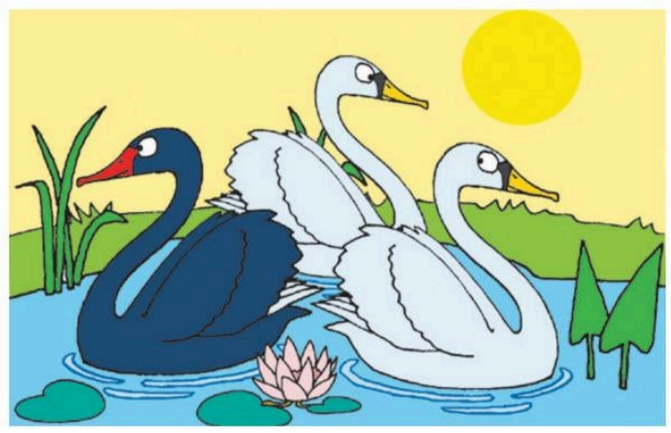
а) $\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{21}{32}\right)$; б) $-1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{3}{4}$; в) $(-0{,}2)\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)$.

2. Знайдіть значення виразу $3a^2-12b^2$, якщо $a+2b=7$, $a-2b=5$.

3. Обчисліть: а) $2^{30}:\left(2^{10}\cdot 2^{15}\right)$; б) $\frac{6^3}{2^4\cdot 3^2}$; в) $5^{3^2}:5^{2^3}$.

4. Побудуйте в зошиті квадрати зі сторонами 2 см; 4 см; 6 см. Проведіть діагоналі цих квадратів і виміряйте довжини діагоналей. Зробіть висновок.

5. В озері плавають білі та чорні лебеді. Кількість білих лебедів відноситься до кількості чорних як 5:3. Скільки лебедів плаває в озері, якщо їх не менше від 30 і не більше за 35?



§ 8. Поняття функції, способи задання функцій. Графік функції

Поняття функції



Що це ти так уважно вивчаєш, Петрику?



Родиною збираємось до Польщі, тож цікавлюся офіційним курсом злотого до гривні, установленим Національним банком України. Помітив цікаву штуку: дивись, за цим

рисунком (див. рис. 8.1), якщо знаєш дату, можна однозначно визначити, скільки гривень коштував у той день один злотий. Тобто курс валюти залежить від дати, на яку його встановлено Національним банком України.

Національний банк України (НБУ) — центральний банк України, який має забезпечувати стабільність її грошової одиниці — гривні, а отже, цінову та фінансову стабільність у державі. НБУ, зокрема, здійснює емісію (випуск) грошей і проводить єдину державну політику в галузі грошового обігу, кредитних відносин; регулює банківську діяльність; визначає напрямки розвитку сучасних банківських і платіжних технологій. Також НБУ розраховує й оприлюднює курс гривні до іноземних валют.

Зло́тий — національна валюта Польщі.



Рис. 8.1. Курс злотого до гривні



Так, дійсно, залежить! Крім того, цікаво, що кожного дня може бути лише один якийсь курс, а от навпаки — зовсім не так: той самий курс може бути в різні дні. Цікаво, як називається така залежність?



У математиці таку залежність називають функцією. Нехай задано дві змінні величини, наприклад, x та y.



Якщо змінна y залежить від змінної x, причому кожному можливому значенню x відповідає лише одне значення y, то таку залежність називають функціональною залежністю або функцією.



У прикладі Петрика з курсом валюти маємо функціональну залежність курсу валюти (y) від дати (x). Змінну x у такому випадку називають незалежною змінною (аргументом), а змінну y — залежною змінною (функцією). Символічно цю залежність записують так: $y = f(x)$ або $y = g(x)$ тощо.



До речі, у статистиці назви незалежної та залежної змінних величин дещо відрізняються. Незалежну змінну величину називають *факторною*, а залежну — *результативною*.





Усі можливі значення незалежної змінної називають областю визначення функції та позначають $D(y)$ або $D(f)$. Усі можливі значення залежної змінної називають множиною значень функції та позначають $E(y)$ або $E(f)$.



Наприклад, для функції, що задає курс злотого до гривні (див. рис. 8.1), областю визначення є проміжок часу від 28.11.2022 р. до 13.03.2023 р., а множиною значень — усі числа, що не менші від 8,1 і не більші за 8,6.

Способи задання функції



Функцію можна задати графічно, як на рис. 8.1. Лінію, що задає функцію, називають графіком функції. Усі можливі *значення аргументу* x розташовані на горизонтальній осі — *на осі абсцис*, а всі відповідні *значення функції* y розташовані на вертикальній осі — *на осі ординат*.



Щоб знайти значення функції для заданого значення аргументу діють так.

Знаходження значення функції для заданого значення аргументу

1) На осі абсцис знаходять точку, що відповідає заданому значенню аргументу, і через цю точку проводять до осі абсцис перпендикулярну пряму.
2) Знаходять точку перетину цієї прямої з графіком функції.
3) Через точку перетину проводять пряму, перпендикулярну до осі ординат, і знаходять точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

Точка перетину прямої з віссю ординат визначає шукане значення функції.

Наприклад, на рис. 8.1 пунктиром показано, як знайти курс злотого до гривні 23.01.2023 р., або $f(23.01.23)$. Бачимо, що $f(23.01.23)=8,4$.

Докладніше про знаходження значення функції за графіком:
https://rnk.com.ua/106088





Існують ще й інші способи задання функції, крім графічного. Функцію можна задати таблицею. Наприклад, таблиця, що показує залежність ціни шоколадки від кількості куплених шоколадок, теж задає функцію:

Кількість куплених шоколадок, шт. (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Ціна 1 шоколадки, грн (y)	35,00	34,80	34,50	34,20	34,00	33,00	32,00	30,00



Для цього способу значення функції для заданого значення аргументу визначають за таблицею. Наприклад: $f(3)=34{,}50$; $f(8)=30{,}00$.

Областю визначення цієї функції є множина $D(y)=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$, а множиною значень — множина $E(y)=\{35{,}00;\ 34{,}80;\ 34{,}50;\ 34{,}20;\ 34{,}00;\ 33{,}00;\ 32{,}00;\ 30{,}00\}$.



О, тож виходить, що мій табель з оцінками також задає своєрідную функцію! Значеннями аргументу є навчальні дисципліни, а функціями є мої оцінки із цих дисциплін.



Тут треба бути обережним! Не слід забувати правило: *одному значенню аргументу має відповідати лише одне значення функції!* Тому якщо брати оцінки лише за якийсь

семестр чи за рік, то так, табель — це своєрідна функція. Якщо ж брати табель у цілому, то наприкінці року одній дисципліні відповідатиме три оцінки — за 1-й семестр, за 2-й семестр і річна. Така залежність уже не буде функціональною!



Чудово, Тетянко, ти все зрозуміла правильно! Крім графічного й табличного способів задання функції поширеним також є аналітичний спосіб, тобто спосіб задання функцій за допомогою формул.

Наприклад, нехай автомобіль їде з незмінною швидкістю 40 км/год. Тоді за x годин він пройде шлях y кілометрів, причому $y = 40 \cdot x$. Ця формула задає функцію, яка описує залежність шляху від часу. Її можна також записати у вигляді $f(x) = 40x$.



Для функцій, заданих аналітично, щоб знайти значення функції для заданого значення аргументу, потрібно це значення підставити у відповідну формулу. Наприклад, якщо $f(x) = 40x$, то $f(2) = 40 \cdot 2 = 80$, $f(3{,}5) = 40 \cdot 3{,}5 = 140$.



До речі, аргумент і функцію не обов'язково позначати буквами x та y відповідно. Наприклад, наведену залежність шляху від часу доречно записувати формулою $s = 40t$ або $s(t) = 40t$, оскільки у фізиці шлях і час традиційно позначають саме такими буквами.





Для функцій, заданих аналітично, областю визначення вважають множину всіх значень аргументу, за яких ця формула має зміст.

Наприклад, формула $y = 40x$ має зміст за будь-яких значень змінної, тому її областю визначення є множина всіх чисел.

Іноді область визначення може бути зазначена в умові задачі. Наприклад, природно вважати, що час не може бути від'ємним числом, а отже, областю визначення функції $s(t)=40t$ є множина всіх невід'ємних чисел.



Також функції можна задавати словесно.
Наприклад, відома функція $y=[x]$ (ціла частина x) визначається так: $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x. Тобто $[2{,}3]=2$, $[7]=7$, $[-4{,}3]=-5$.



Цілу частину числа також називають антьє. Дізнайтеся більше про її застосування!

Графік функції



Графіком функції $y=f(x)$ називають множину всіх точок $(x;y)$ координатної площини, для яких $y=f(x)$.



Для функцій, заданих аналітично, можна зобразити графік, визначивши координати достатньої кількості точок і побудувавши їх на координатній площині.

Для простих функцій це зробити досить легко, а для більш складних краще скористатися спеціальними комп'ютерними програмами.

Приклади

1. Побудуйте графік функції $y = 2x$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції, зобразимо відповідні точки в системі координат (рис. 8.2) і сполучимо їх лінією (рис. 8.3).

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

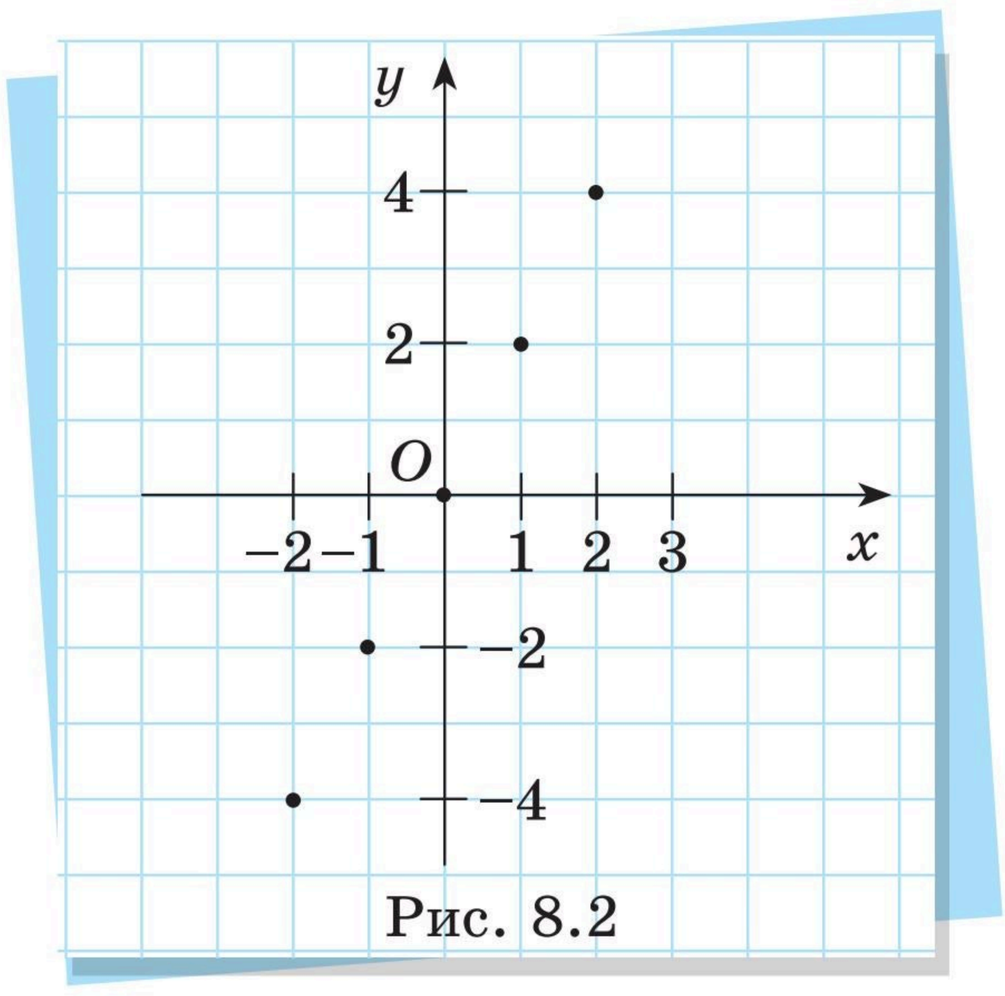


Рис. 8.2

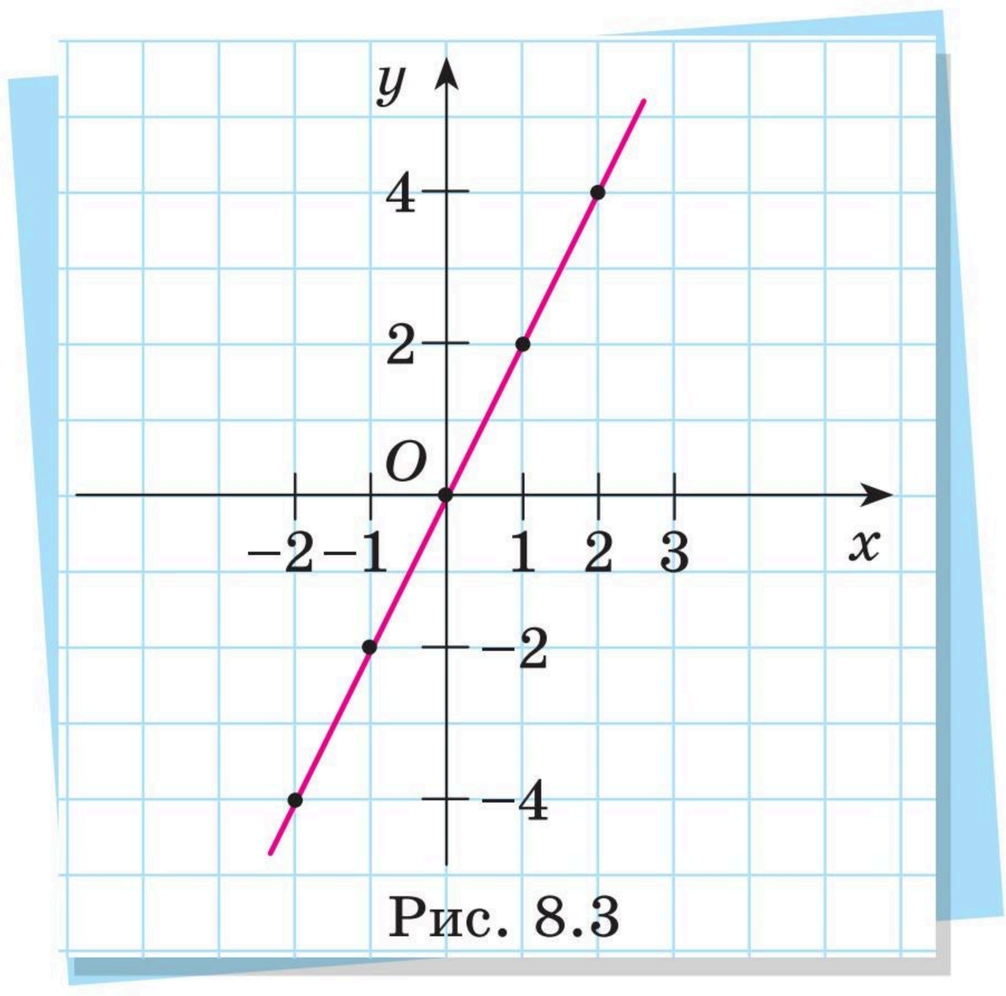


Рис. 8.3

2. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$ за допомогою графічного калькулятора Desmos (або іншої програми на ваш розсуд).

Розв'язання. Див. рис. 8.4.

Про роботу з графічним калькулятором Desmos: https://rnk.com.ua/106089



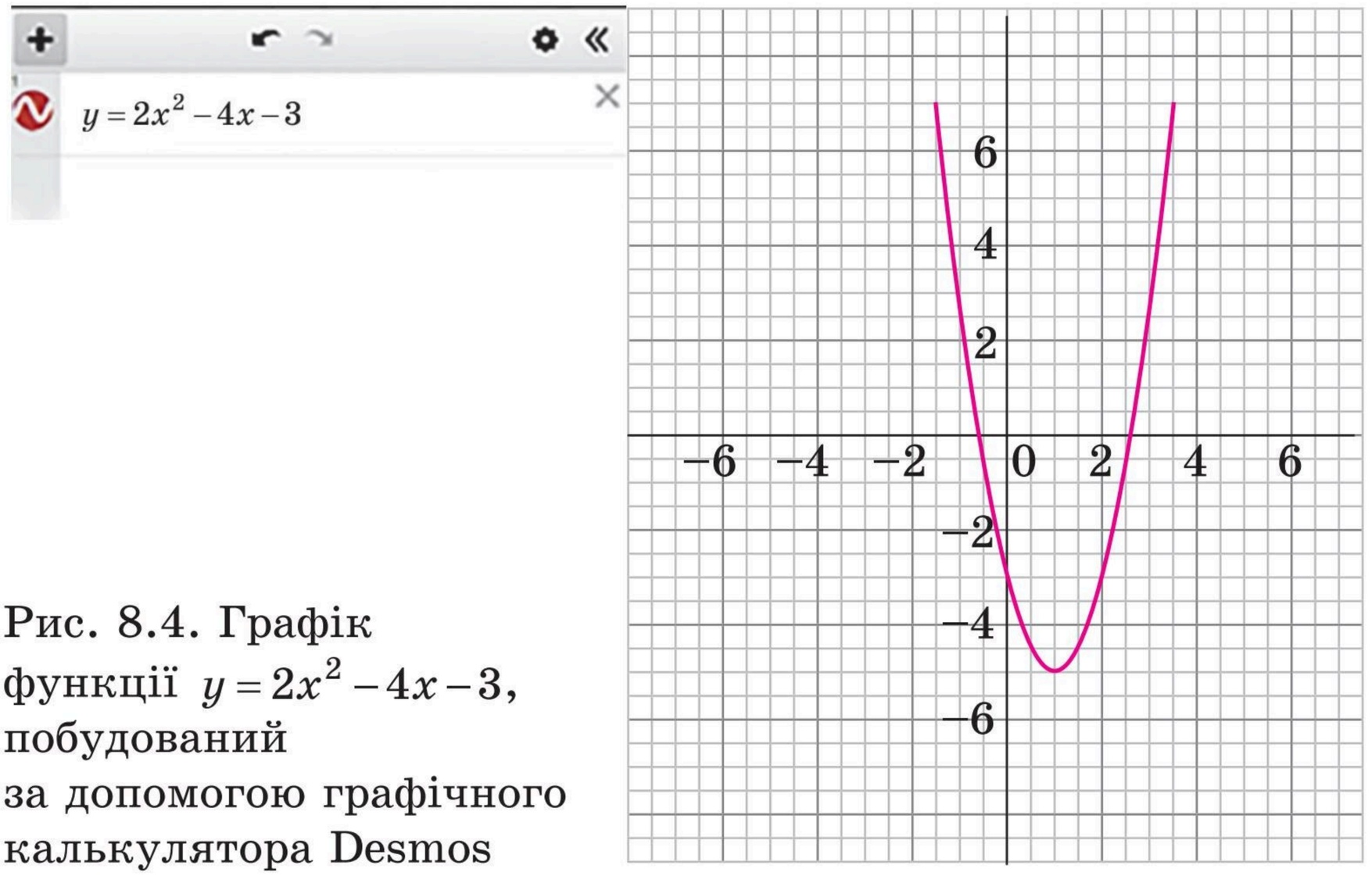


Рис. 8.4. Графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$, побудований за допомогою графічного калькулятора Desmos

Перевірте себе!

1. Дайте означення функції. Наведіть приклади функцій.
2. Як називають незалежну та залежну змінні функції?
3. Дайте означення області визначення та множини значень функції.
4. Перелічіть відомі вам способи задання функції.
5. Яким чином знайти значення функції за даного значення аргументу, якщо функцію задано: а) аналітично; б) графічно; в) таблицею?
6. Яким чином знайти значення аргументу за даного значення функції, якщо функцію задано: а) таблицею; б) графічно; в) аналітично? Чи завжди це можна зробити?

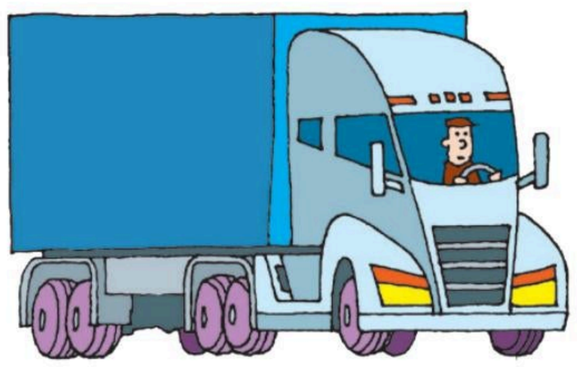
7. Дайте означення графіка функції.

8. Яким чином можна побудувати графік функції, заданої аналітично?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які твердження є правильними?



а) Відстань s, яку проїде автомобіль із незмінною швидкістю, залежить від часу t, протягом якого автомобіль перебуватиме в дорозі.

б) Кількість днів канікул у школі залежить від оцінок учня.

в) Кількість балів, які учень одержить за контрольну роботу, залежить від кількості правильно виконаних завдань цієї роботи.

г) Площа квадрата залежить від довжини його сторони.

2. Які твердження є правильними?



а) Периметр квадрата залежить від довжини його сторони.

б) Якщо Андрій розв'язує 5 математичних задач протягом години, то кількість розв'язаних задач залежить від кількості часу, який Андрій витратить на їх розв'язання.

в) Якщо кожній дівчинці в класі треба пов'язати на зачіску дві стрічки, то кількість стрічок, що знадобляться для цього, залежить від кількості дівчаток у класі.

г) Витрати електроенергії в кімнаті залежать від кількості стільців у кімнаті.

3. Щогодини Віктор виготовляє 8 деталей. Заповніть таблицю залежності кількості виготовлених Віктором деталей від кількості годин його роботи*.

Кількість годин роботи	1	2	3	4	5	6
Кількість виготовлених деталей	8					

4. Щодня Тетянка читає 15 сторінок книжки. Заповніть таблицю залежності кількості прочитаних Тетянкою сторінок від кількості днів, у які Тетянка читала книжку.

Кількість днів	1	2	3	4	5	6
Кількість прочитаних сторінок	15					

5. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	5	10	17	26

Знайдіть за таблицею: а) область визначення $D(y)$; б) множину значень $E(y)$; в) $f(1)$; г) $f(4)$; д) значення аргументу x, за якого значення функції $y = 26$.

6. Функцію $y = g(x)$ задано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11	13

Знайдіть за таблицею: а) область визначення $D(y)$; б) множину значень $E(y)$; в) $g(2)$; г) $g(5)$; д) значення аргументу x, за якого значення функції $y = 9$.

---

* Зрозуміло, що в цьому та подібних випадках завдання слід виконати в зошиті.

7. На рис. 1 зображено графік деякої функції. За поданим графіком знайдіть: а) абсцису точки A; б) ординату точки B; в) абсцису точки C; г) ординату точки D.

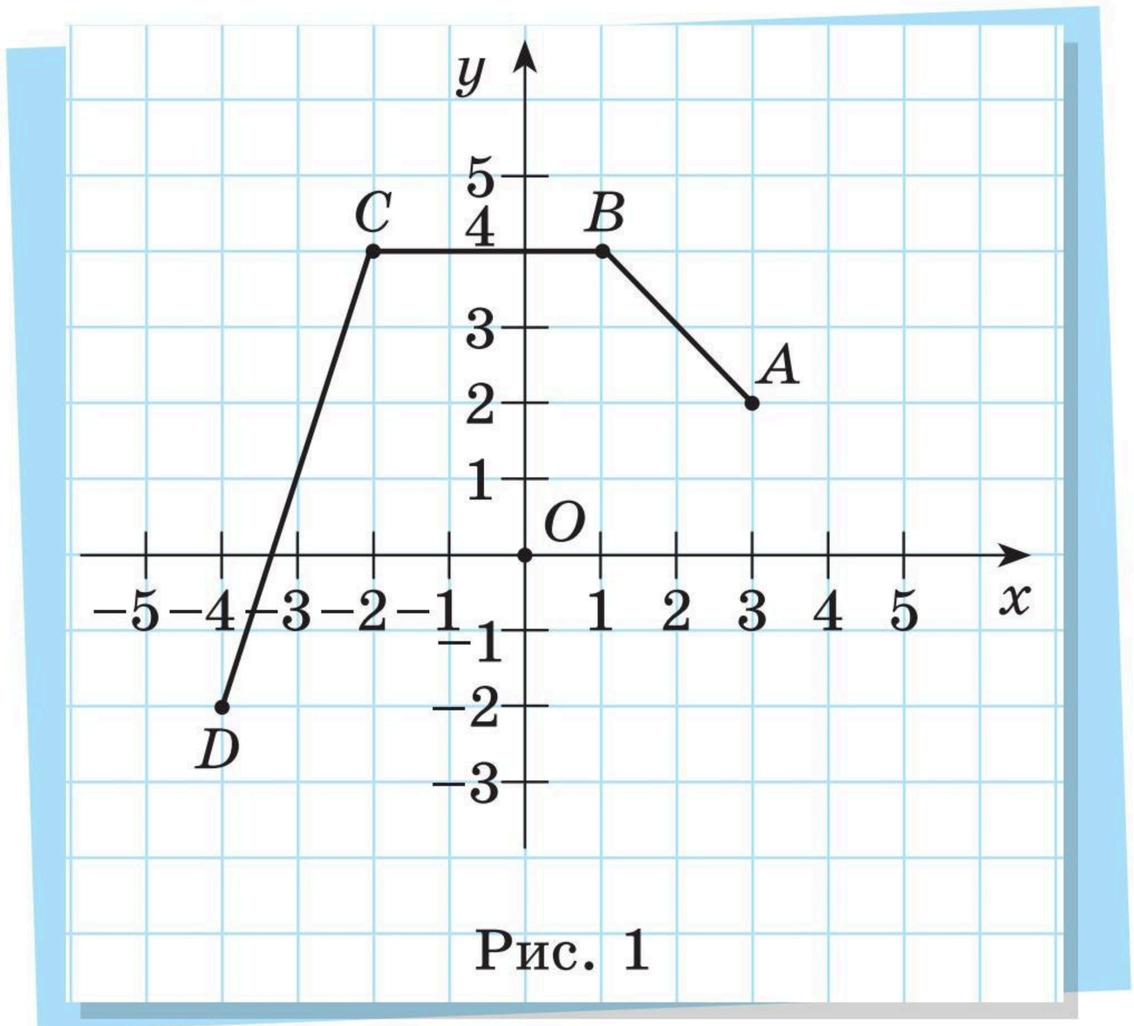


Рис. 1

8. На рис. 2 зображено графік деякої функції. За поданим графіком визначте: а) ординату точки E; б) абсцису точки F; в) абсцису точки K; г) ординату точки L.

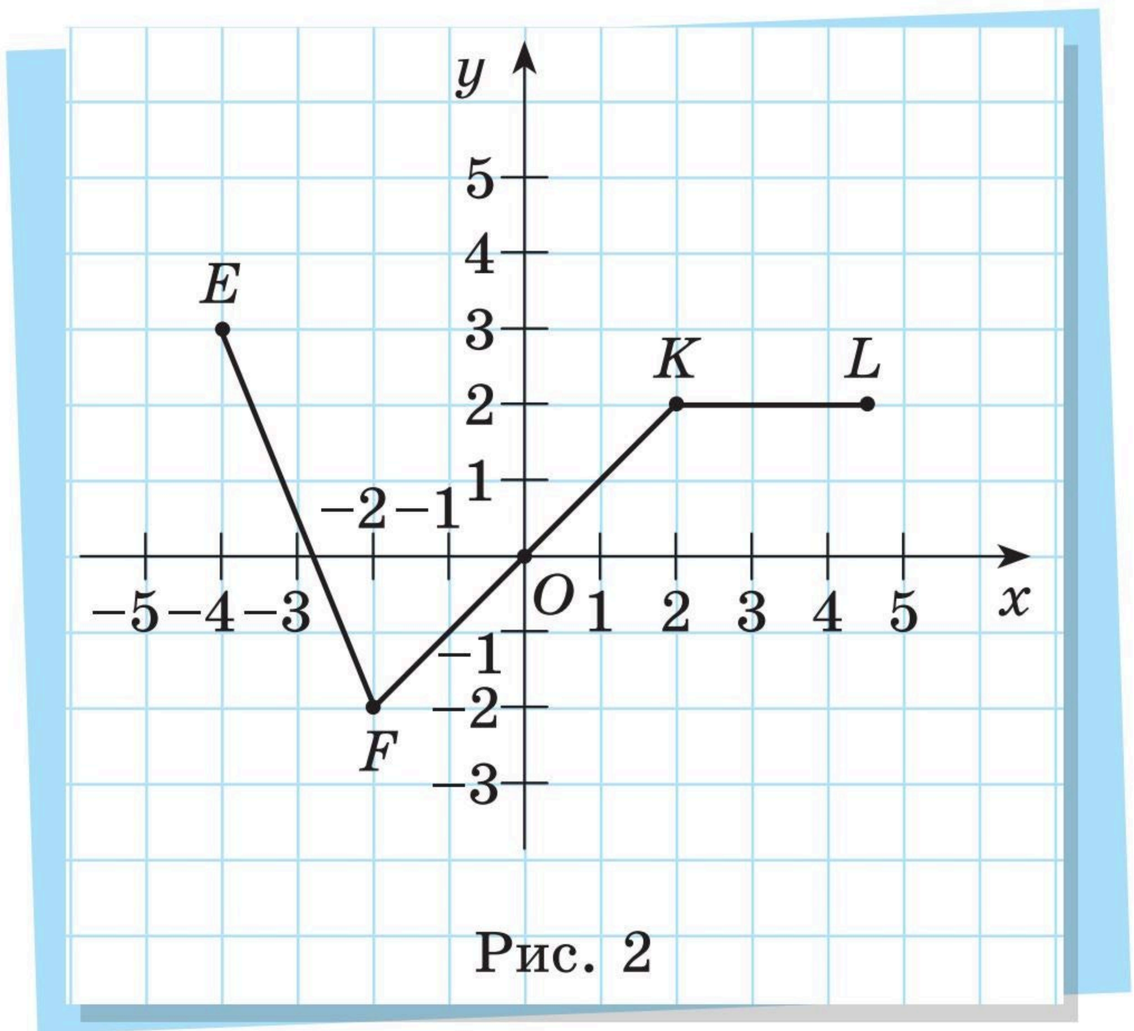


Рис. 2

9. Функцію задано формулою $f(x)=3x-2$. Знайдіть значення функції, якщо: а) $x=0$; б) $x=2$; в) $x=0{,}5$; г) $x=\frac{2}{3}$.

10. Функцію задано формулою $f(x)=-2x+5$. Знайдіть значення функції, якщо: а) $x=1$; б) $x=-1$; в) $x=-1{,}5$; г) $x=\ x=\frac{3}{2}$.

11. Запишіть формулою.

а) Число x удвічі більше за число y.

б) Щоб знайти значення швидкості v, треба знайти відношення довжини шляху s до часу t, витраченого на шлях.

в) Площа S прямокутника дорівнює добутку його довжини a на ширину b.

г) Периметр P рівностороннього трикутника дорівнює добутку числа 3 та довжини сторони трикутника a.

12. Запишіть формулою.

а) Число a дорівнює половині суми чисел $1{,}5b$ і c.

б) Щоб знайти значення часу t, треба знайти відношення довжини шляху s до швидкості v.

в) Щоб знайти ціну c товару, потрібно вартість q товару поділити на кількість k товару.

г) Периметр P прямокутника зі сторонами m і n дорівнює подвоєній сумі довжин сторін цього прямокутника.

13. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8	10

За поданою таблицею визначте, чи належать графіку функції точки: а) $A(1;2)$; б) $B(4;2)$; в) $C(3;6)$; г) $D(4;5)$; д) $E(8;10)$.

14. Функцію $y = g(x)$ задано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5
y	3	4	5	6	7	8

За поданою таблицею визначте, чи належать графіку функції точки: а) $F(1;2)$; б) $H(0;3)$; в) $K(3;6)$; г) $L(4;7)$; д) $M(7;8)$.

Середній рівень

15. Катруся виставила фото свого песика Бублика в Інстаграм. Чи залежать одна від одної дві величини: кількість вподобайок («лайків») під фото і рівень доброго настрою Катрусі? Якщо так, то яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь поясніть.

16. На кожний свій день народження Максимко визначає свій зріст. Чи залежать одна від одної дві величини: рік проведення виміру та зріст Максимка? Якщо так, то яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь поясніть.



17. Софійка пішла до магазину купити яблук. Чи залежать одна від одної дві величини: маса куплених яблук і кількість грошей, яку за них заплатила Софійка? Якщо так, то яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь поясніть.

18. Сім'я Павленків їде подорожувати своїм автомобілем. Чи залежать одна від одної дві величини: кількість витраченого бензину та відстань, яку проїхав автомобіль? Якщо так, то яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь поясніть.

19. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	12	1	5	11

Знайдіть: а) $f(-2)+f(2)$; б) добуток тих значень x, для яких значення y дорівнюють 11 і 12; в) найбільше значення функції; г) найменше значення функції.

20. Функцію $y = h(x)$ задано таблицею:

x	-4	-2	0	2	4
$h(x)$	11	20	-4	7	2

Знайдіть: а) $h(-4)-h(2)$; б) добуток тих значень x, для яких значення y дорівнюють 11 і 7; в) найбільше значення функції; г) найменше значення функції.

21. На рис. 3–5 зображено лінії. Які з них є графіками функцій, а які — ні? Відповідь обґрунтуйте.

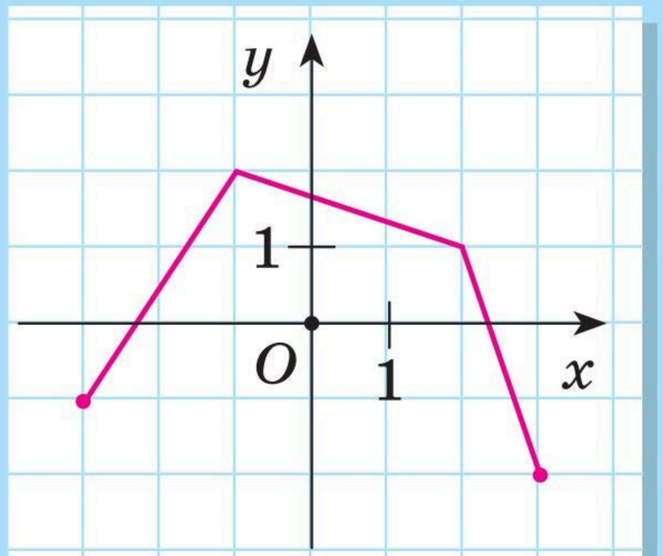


Рис. 3

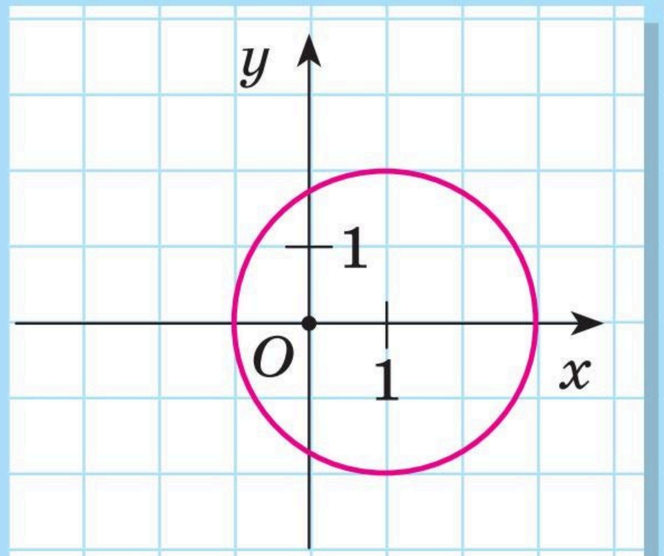


Рис. 4

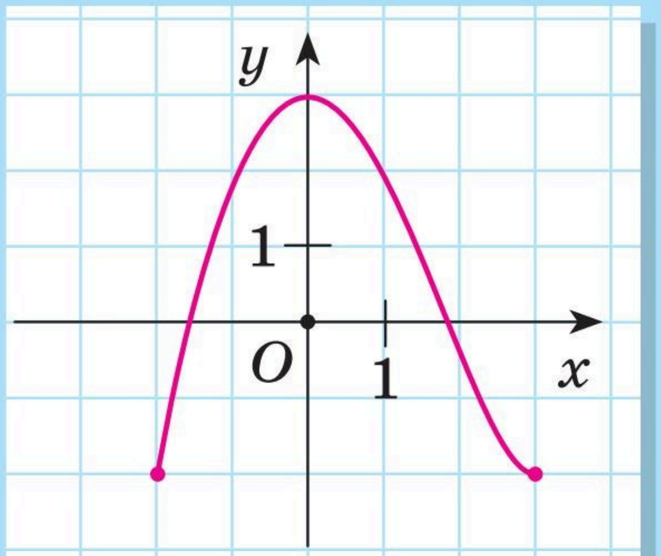


Рис. 5

22. На рис. 6–8 зображено лінії. Які з них є графіками функцій, а які — ні? Відповідь обґрунтуйте.

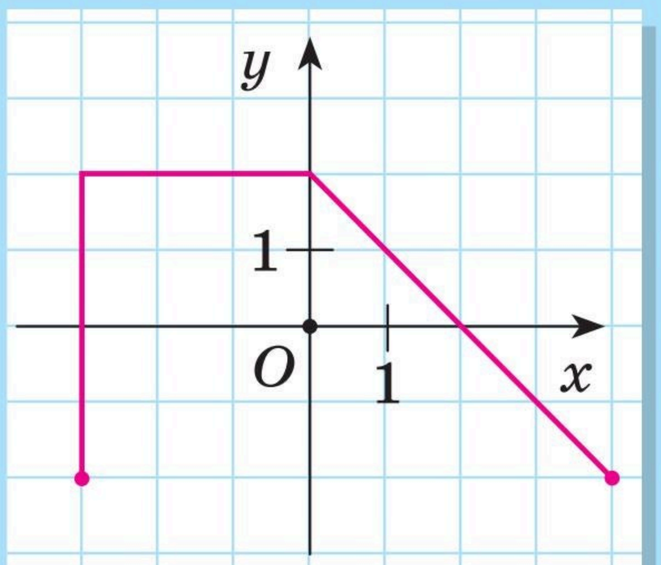


Рис. 6

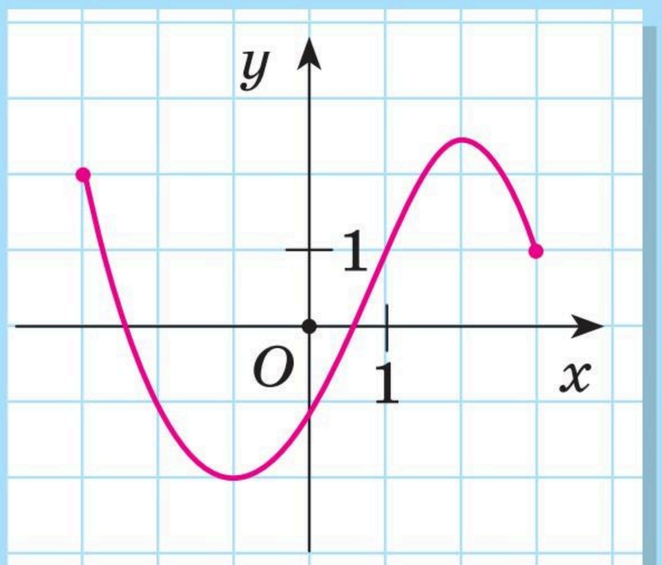


Рис. 7

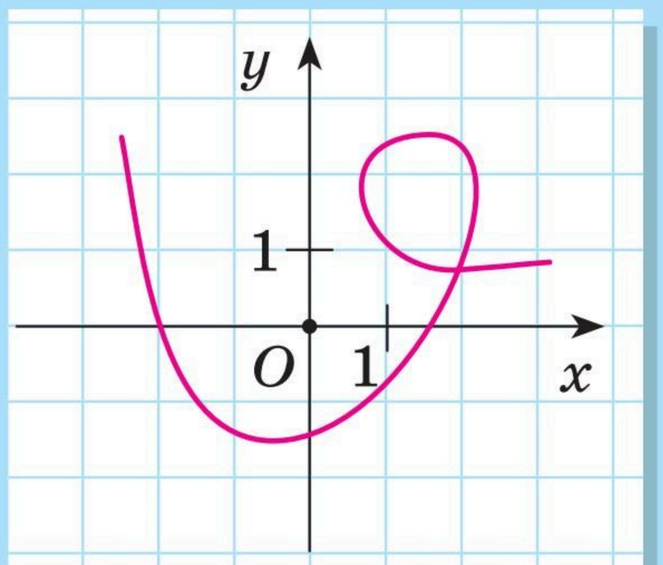


Рис. 8

23. Функцію задано формулою $g(x)=x^2$. Заповніть таблицю. Побудуйте ці точки в системі координат і сполучіть їх плавною лінією. Порівняйте побудований графік із графіком цієї функції, зображеним за допомогою графічного калькулятора.

x	-3	-2	0	2	3
$g(x)$	9				

24. Функцію задано формулою $f(x)=x^3$. Заповніть таблицю. Побудуйте ці точки в системі координат і сполучіть їх плавною лінією. Порівняйте побудований графік із графіком цієї функції, одержаним за допомогою графічного калькулятора.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8				

25. Функцію задано графіком (рис. 9). Заповніть таблицю.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$					

26. Функцію задано графіком (рис. 10). Заповніть таблицю.

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$					

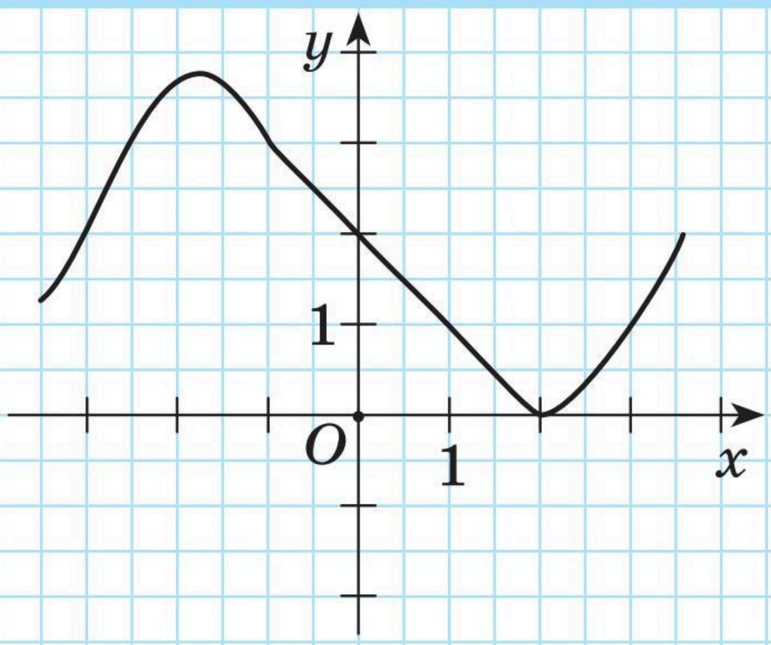


Рис. 9

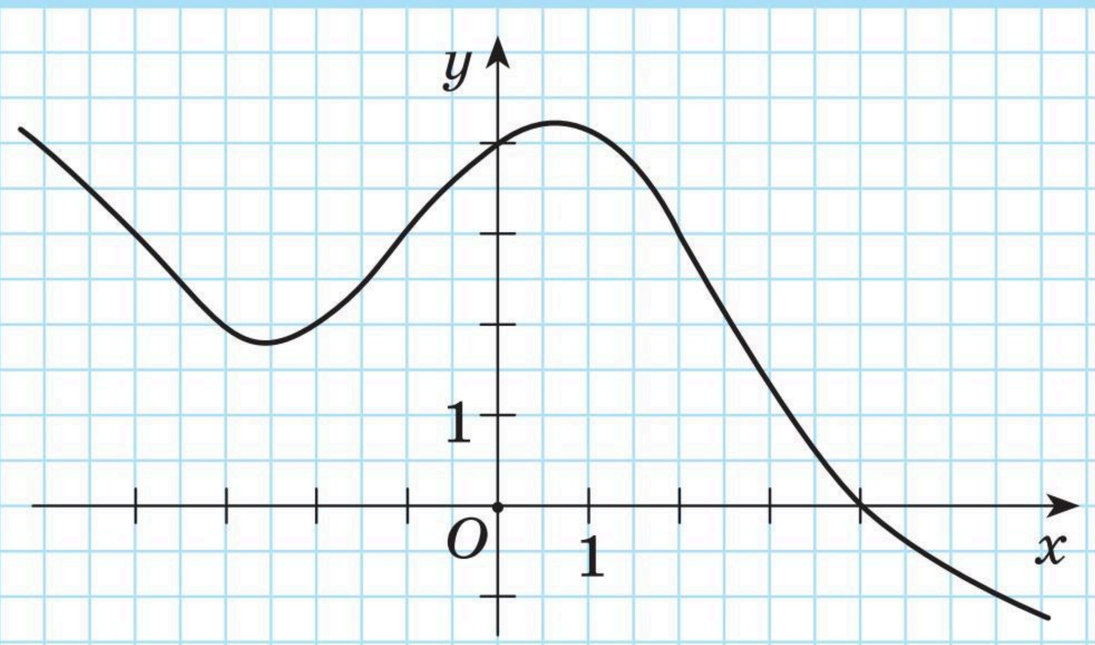


Рис. 10

Достатній рівень

27. Для кожної ситуації придумайте величини, які залежать одна від одної. Яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь поясніть.

а) У кінці жовтня дідусь Василька щодня обрізає в саду певну кількість дерев.

б) В Україні є кілька міст, населення кожного з яких перевищує один мільйон жителів.

28. Для кожної ситуації придумайте величини, які залежать одна від одної. Яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь поясніть.

а) Дві команди грають у футбол. На футболці кожного гравця є його номер.

б) У блокноті Галинки записано дні народження її подруг і друзів.

29. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	$7{,}4$	$-2{,}6$	0	$5{,}1$	$\frac{2}{5}$

Знайдіть: а) $f(-2)+f(4)$; б) $f(0)\cdot f(6)$; в) $3\cdot f(4)-f(-2)$; г) $5\cdot f(2):f(-2)$; д) найменше та найбільше значення аргументу; е) найменше та найбільше значення функції.

30. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	-6	-3	0	3	6
$f(x)$	$-3{,}4$	$3{,}1$	8	$\frac{1}{4}$	0

Знайдіть: а) $f(-6)+f(-3)$; б) $f(0)\cdot f(3)$; в) $3\cdot f(6)-f(0)$; г) $f(-3):f(3)$; д) найменше та найбільше значення аргументу; е) найменше та найбільше значення функції.

31. Функцію задано формулою $f(x)=6x^2$. Заповніть таблицю. Побудуйте графік цієї функції за допомогою графічного калькулятора.

x	-3	$-\frac{1}{3}$	0	$0{,}5$	4
$f(x)$					

32. Функцію задано формулою $g(x)=-5x+2$. Заповніть таблицю. Побудуйте графік цієї функції за допомогою графічного калькулятора.

x	-2	$-\frac{1}{10}$	0	$0{,}7$	6
$g(x)$					

33. Функцію задано графіком (рис. 11).

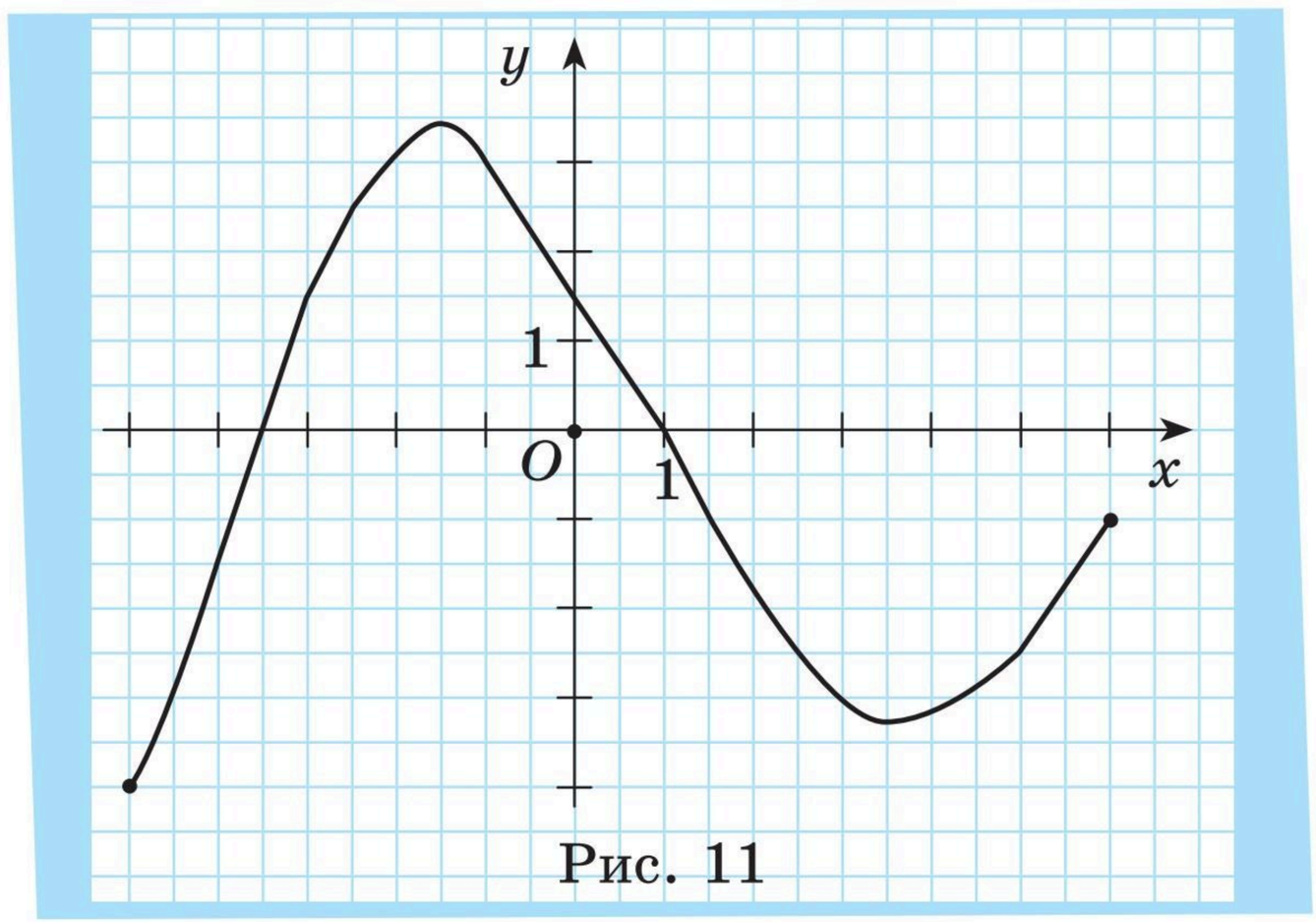


Рис. 11

а) Заповніть таблицю:

x	-4	$-2{,}5$	0	$1{,}5$	5
$f(x)$					

б) Знайдіть усі значення аргументу, для яких значення функції дорівнює $1{,}5$.

в) Скільки існує значень аргументу, для яких значення функції дорівнює $-2{,}3$?

г) Чи належать графіку функції точки: $(0;1)$, $(1;0)$, $(-3;1{,}5)$, $(6;1)$, $(-1;3)$?

д) Скільки цілих значень належать області визначення цієї функції?

е) Скільки цілих значень належать множині значень цієї функції?

34. Функцію задано графіком (рис. 12).

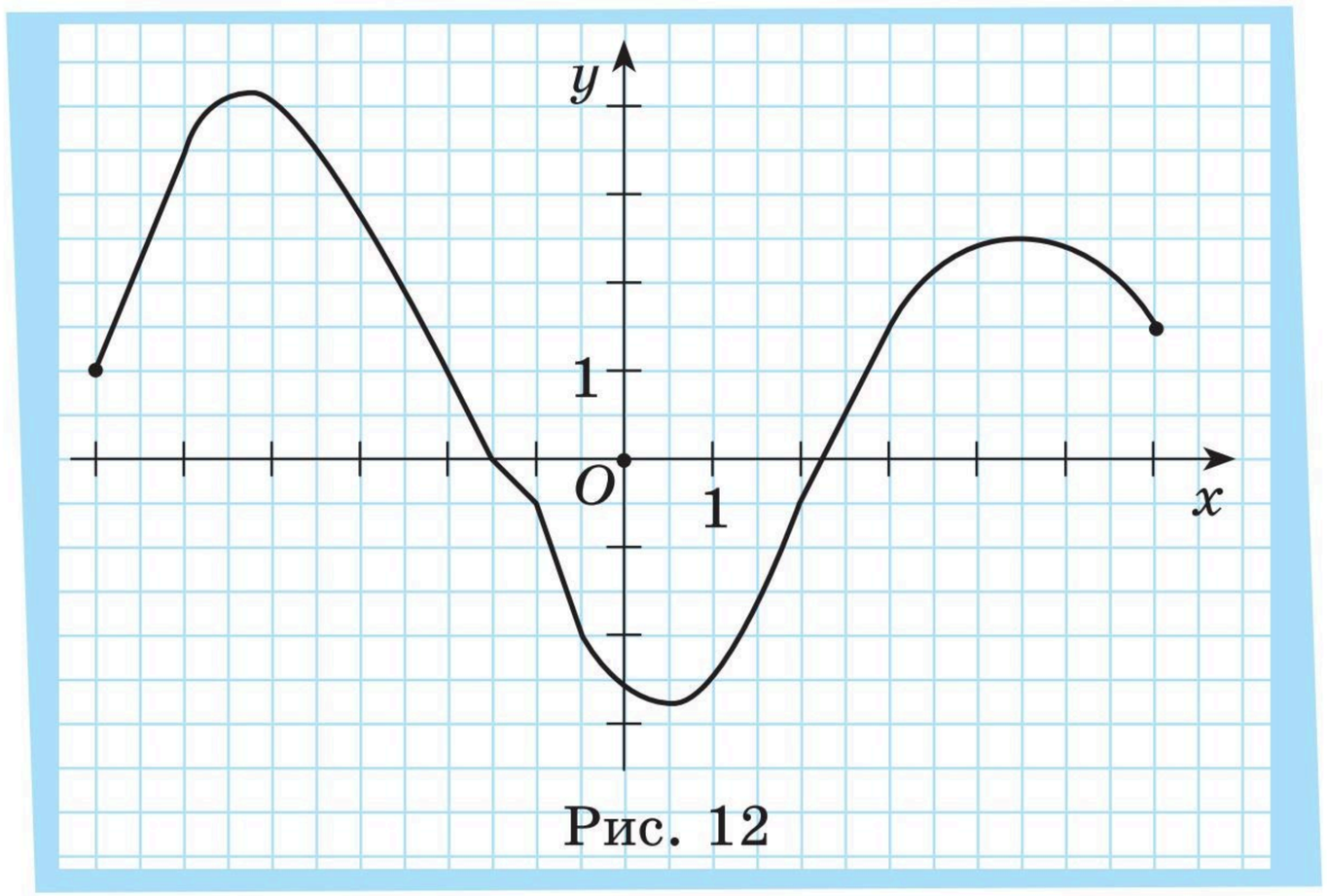


Рис. 12

а) Заповніть таблицю:

x	-5	$-1{,}5$	0	$2{,}5$	6
$f(x)$					

б) Знайдіть усі значення аргументу, для яких значення функції дорівнює $-0,5$.

в) Скільки існує значень аргументу, для яких значення функції дорівнює $1,7$?

г) Чи належать графіку функції точки: $(0;1)$, $(0;-2,5)$, $(-6;-1)$, $(3;1,5)$, $(-0,5;-2)$?

д) Скільки цілих значень належать області визначення цієї функції?

е) Скільки цілих значень належать множині значень цієї функції?

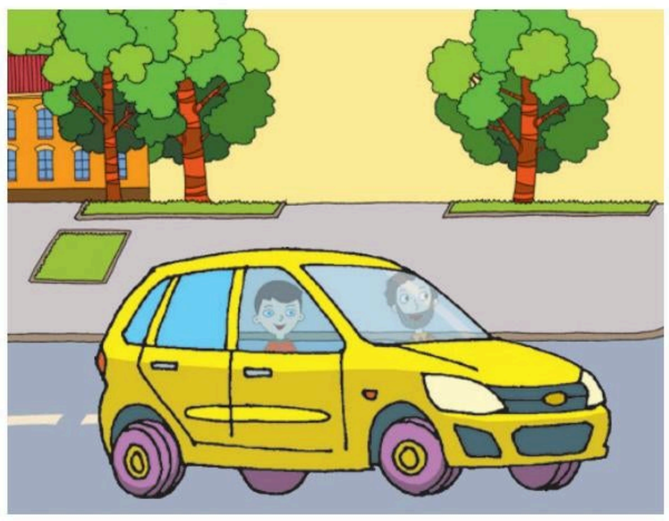
35. Задано функцію $y=3x^2$, визначену для всіх чисел. Які з наведених точок належать її графіку?

а) $(-1;1)$; б) $(0;0)$; в) $(2;12)$; г) $(-2;4)$; д) $(5;0)$.

36. Задано функцію $y=x^2-1$, визначену для всіх чисел. Які з наведених точок належать її графіку?

а) $(-1;2)$; б) $(0;0)$; в) $(1;0)$; г) $(-2;3)$; д) $(0;2)$.

37. Автомобіль витрачає в середньому 7,5 літрів бензину на 100 кілометрів. Запишіть формулою залежність витрат бензину від подоланого автомобілем шляху. Якою буде область визначення цієї функції? Якою буде множина значень цієї функції?



38. Сливи коштують 35 грн за кілограм. Запишіть формулою залежність вартості слив від їхньої маси. Якою буде область визначення цієї функції? Якою буде множина значень цієї функції?

Високий рівень

39. Для кожної ситуації придумайте величини, які залежать одна від одної. Яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функцією? Відповідь поясніть.

а) Сайт «Метео» опублікував прогноз погоди на тиждень.

б) Розділ «Контакти» в телефоні Марка містить прізвища, імена та номери телефонів його друзів.

40. Для кожної ситуації придумайте величини, які залежать одна від одної. Яка величина залежить від якої величини? Чи є ця залежність функцією? Відповідь поясніть.

а) У школі пройшли вибори голови учнівської ради.

б) Витрати на опалення восени збільшилися.

41. Функцію задано таблицею. Задайте цю функцію аналітично та словесно.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	2	5	10	17	26	37	50

42. Функцію задано таблицею. Задайте цю функцію аналітично та словесно.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	0	−3	−8	−15	−24	−35	−48

43. Задано функції: а) $f(x)=-2x^2+4$; б) $g(x)=x^3-2$; в) $h(x)=0{,}5x+2$.

Складіть таблицю значень цих функцій, надаючи аргументу значень -2; -1; 0; 1; 2 та, можливо, деяких інших. Побудуйте відповідні точки в системі координат і з'єднайте їх плавною лінією. Перевірте правильність виконання побудови за допомогою графічного калькулятора.

44. Задано функції: а) $f(x)=3x^2-1$; б) $g(x)=-x^3+3$; в) $h(x)=-0{,}5x+3$.

Складіть таблицю значень цих функцій, надаючи аргументу значень -2; -1; 0; 1; 2 та, можливо, деяких інших. Побудуйте відповідні точки в системі координат і з'єднайте їх плавної лінією. Перевірте правильність виконання побудови за допомогою графічного калькулятора.

45. Задано точку $M(-2;1)$. Укажіть функції, графікам яких належить ця точка.

а) $y=2x+5$;
в) $y=0{,}5x+2$;
б) $y=x^3-7$;
г) $y=-x^2+x+7$.

46. Задано точку $K(3;-2)$. Укажіть функції, графікам яких належить ця точка.

а) $y=3x-7$;
в) $y=\frac{1}{3}x-3$;
б) $y=x^3-29$;
г) $y=-x^2-x+10$.

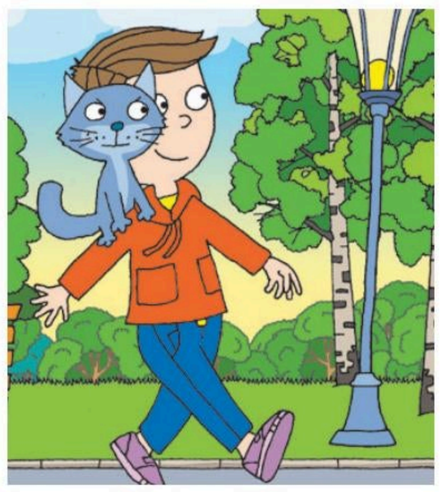
47. Крім функції *антьє* (ціла частина числа) також розглядають функцію, що має назву *мантиса* (дробова частина числа) і визначається формулою $f(x)=\{x\}=x-[x]$, де $[x]$ — ціла частина числа. Для цієї функції знайдіть: а) $f(2{,}6)$; б) $f(7)$; в) $f(-3)$; г) $f(-5{,}4)$.

48. Нехай $f(x)=\{x\}$. Знайдіть: а) $f(8{,}7)$; б) $f(12)$; в) $f(-6)$; г) $f(-3{,}9)$.

49. Одного ранку Миколка вийшов на прогулянку з котиком Піратом. На рис. 13 зображено залежність відстані s (у метрах) від Миколки з котиком до їхнього будинку від часу t (у хвилинах). За графіком з'ясуйте:

а) скільки часу тривала вся прогулянка;

б) яку відстань пройшли Миколка з Піратом за весь час прогулянки;



в) середню швидкість руху Миколки з Піратом під час усієї прогулянки (у м/хв);

г) на якій відстані від дому були Миколка з котиком за 15 хв від початку прогулянки;

д) за скільки хвилин після початку прогулянки Миколка з Піратом були на відстані 400 м від свого будинку.

Які ще відомості можна з'ясувати за поданим графіком?

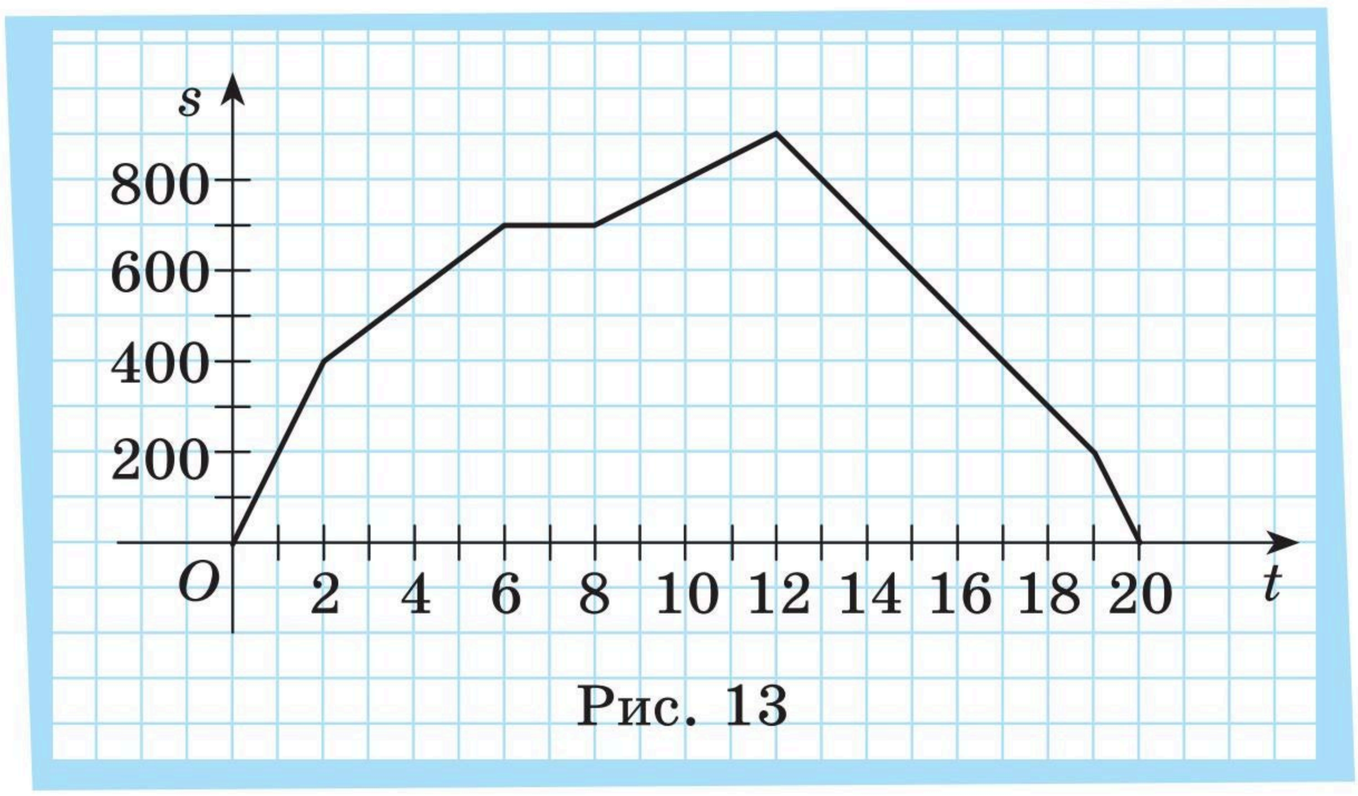


Рис. 13

50. Одного дня бабуся Харитина вийшла з дому прогулятися. На рис. 14 зображено залежність відстані s (у метрах) від бабусі до її будинку від часу t (у хвилинах). За поданим графіком з'ясуйте:



а) скільки часу тривала вся прогулянка;

б) яку відстань пройшла бабуся Харитина за час усієї прогулянки;

в) середню швидкість руху бабусі під час усієї прогулянки (у м/хв);

г) на якій відстані від дому перебувала бабуся Харитина за 10 хв від початку прогулянки;

д) за скільки хвилин після початку прогулянки бабуся була від свого будинку на відстані 150 м.

Які ще відомості можна з'ясувати за поданим графіком?

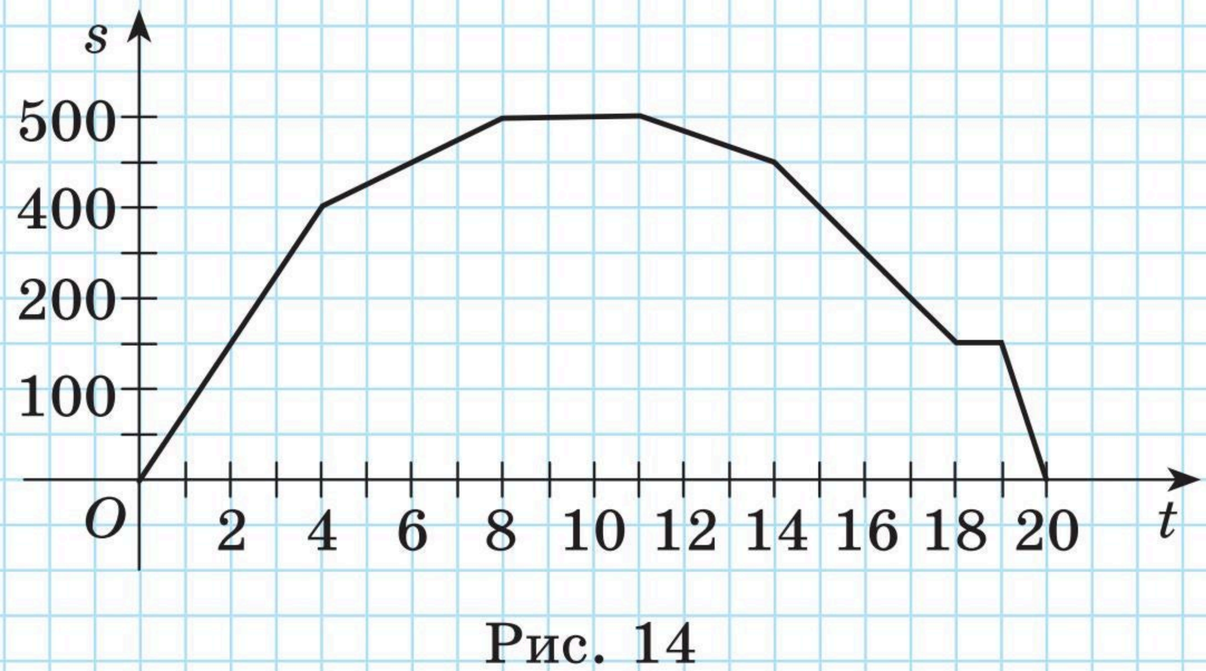


Рис. 14



Цікавинки від дідуся Тараса

Термін «функція» походить від латинського слова *functio* (виконання) і належить *Готфріду Вільгельму Ляйбніцу* (1646–1716). Уперше позначив функцію символом $f(x)$ *Леонард Ойлер* у 1747 р. Близьке до сучасного означення функції дав у 1834 р. *Микола Лобачевський*, розглядаючи її як залежність між двома змінними. Це означення уточнив *Йоган Петер Густав Лежен Діріхле* в 1837 р., наголосивши, що «немає значення, як встановлена ця залежність — аналітичною формулою, графіком, таблицею чи просто словами».



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Користуючись додатковими джерелами інформації, зробіть невелике повідомлення про: а) Леонарда Ойлера; б) Йогана Петера Густава Лежена Діріхле. Як ви вважаєте, чому Л. Ойлера називали найвидатнішим математиком XVIII ст. чи навіть усіх часів?

2. Наведіть приклади з повсякденного життя, коли ви стикались із функціями різних видів. Яким способом (аналітичним, графічним, табличним чи словесним) були задані ці функції?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вирази.

а) $3m(1-2m)-2m(3m+4)$; б) $(2c-d)^2+d(4c-d)$.

2. Розкладіть на множники.

а) $5a^2b^5-2a^4b^3$; б) $2c^2-18p^2$; в) $2x^2-24x+72$.

3. Маса котика Мурчика становить 8,5 кг, а маса котика Нявчика у $1\frac{3}{17}$ більша за масу Мурчика. Господар обох котиків збирається відвезти їх на огляд до ветеринарної клініки в контейнері, підлога якого витримує масу 20 кг. Чи зможе він зробити це без шкоди для контейнера та котиків?

4. Серед 32 учнів і учениць 7-А класу 8 мають вдома котика, 7 — песика, 4 — папугу, 3 — хом'ячка, 2 — акваріумних рибок. Решта учнів і учениць не мають домашніх улюбленців. Побудуйте кругову діаграму за наведеними даними.

§ 9. Лінійна функція, її графік і властивості

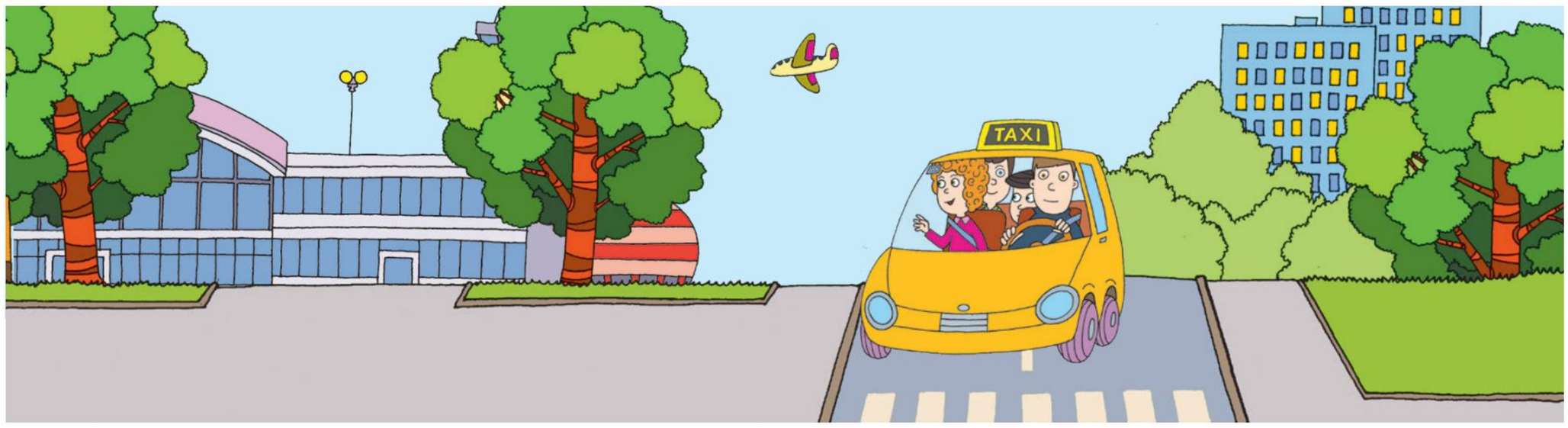


Привіт, Петрику! Як поїздка до Польщі? Було щось цікаве?



Поїздка вдалася! А цікаве почалося одразу, у терміналі аеропорту. Ми замовили таксі до міста. Вартість поїздки

обчислювалася так: за подачу автомобіля слід було заплатити 20 злотих, а потім іще 5 злотих коштував кожен кілометр шляху.





Дійсно, цікаво! Якщо довжина шляху була x км, то вартість y поїздки (у злотих) можна записати формулою $y = 5 \cdot x + 20$.



Та це ж функція! Бо вартість y поїздки на таксі залежить від довжини x шляху, який проїхало таксі. Отже, довжина шляху — аргумент, а вартість — функція! І її можна записати так: $f(x) = 5x + 20$.

До речі, якщо вартість кожного кілометра буде a, а вартість посадки в таксі — b, то функція $f(x) = ax + b$ буде визначати вартість будь-якої поїздки на таксі практично в будь-якій країні світу! Цікаво, як така функція називається?





Функцію вигляду $f(x) = ax + b$ або $y = ax + b$, де a і b — деякі числа, називають лінійною функцією.

Наприклад, лінійними є функції $y = 2x - 3$; $y = -3x + 5$; $y = -0{,}5x + 2{,}2$ тощо.



Побудуємо графік функції $y = 3x - 2$. Для цього складемо таблицю значень функції для кількох значень аргументу:

x	-1	0	1	2	3
y	-5	-2	1	4	7

Побудуємо точки в системі координат (рис. 9.1) і сполучимо їх плавною лінією (рис. 9.2). Бачимо, що всі побудовані точки лежать на одній прямій. Можна довести:



Графік будь-якої лінійної функції є прямою, якщо розглядати областю визначення цієї функції множину всіх чисел.

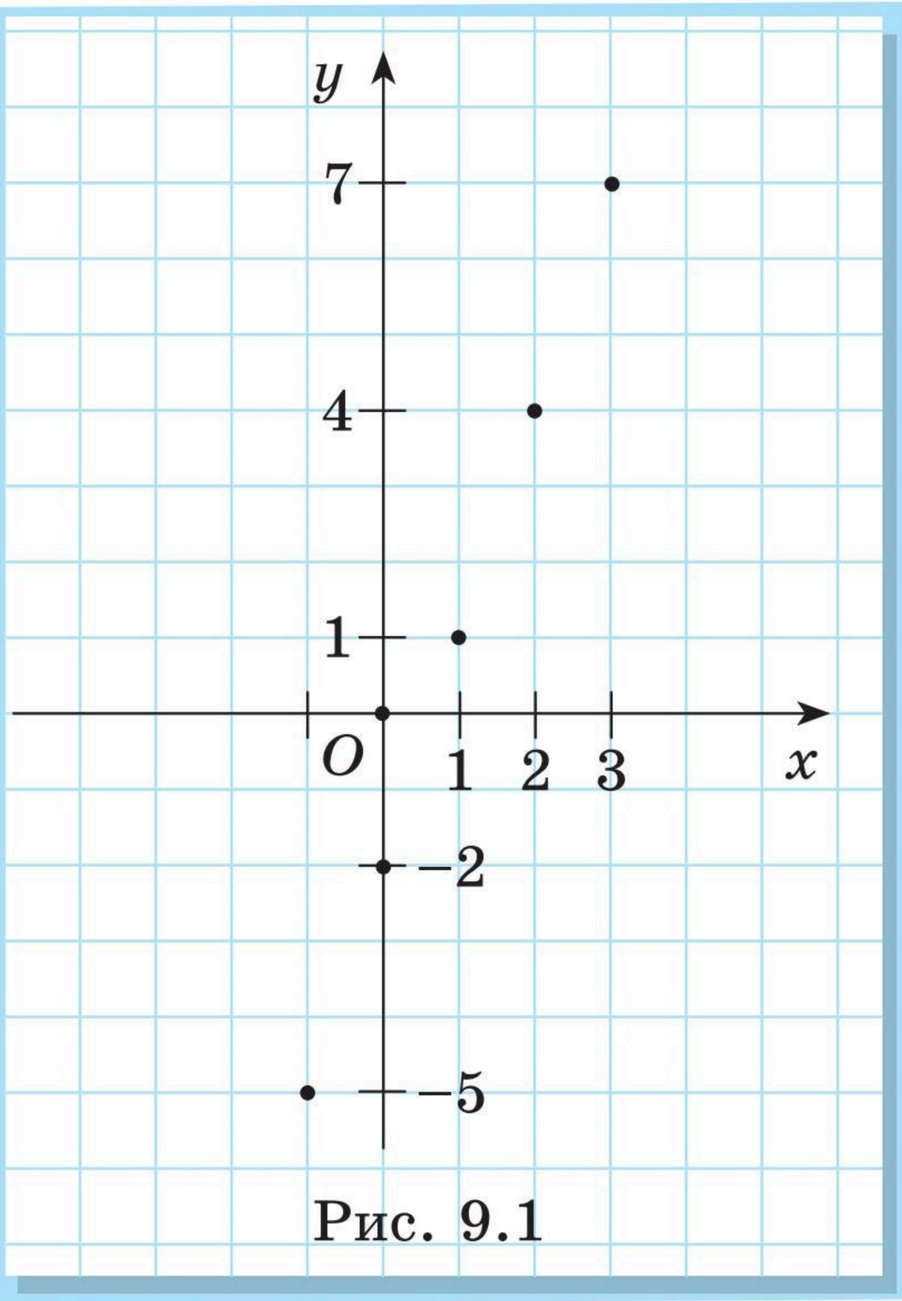


Рис. 9.1

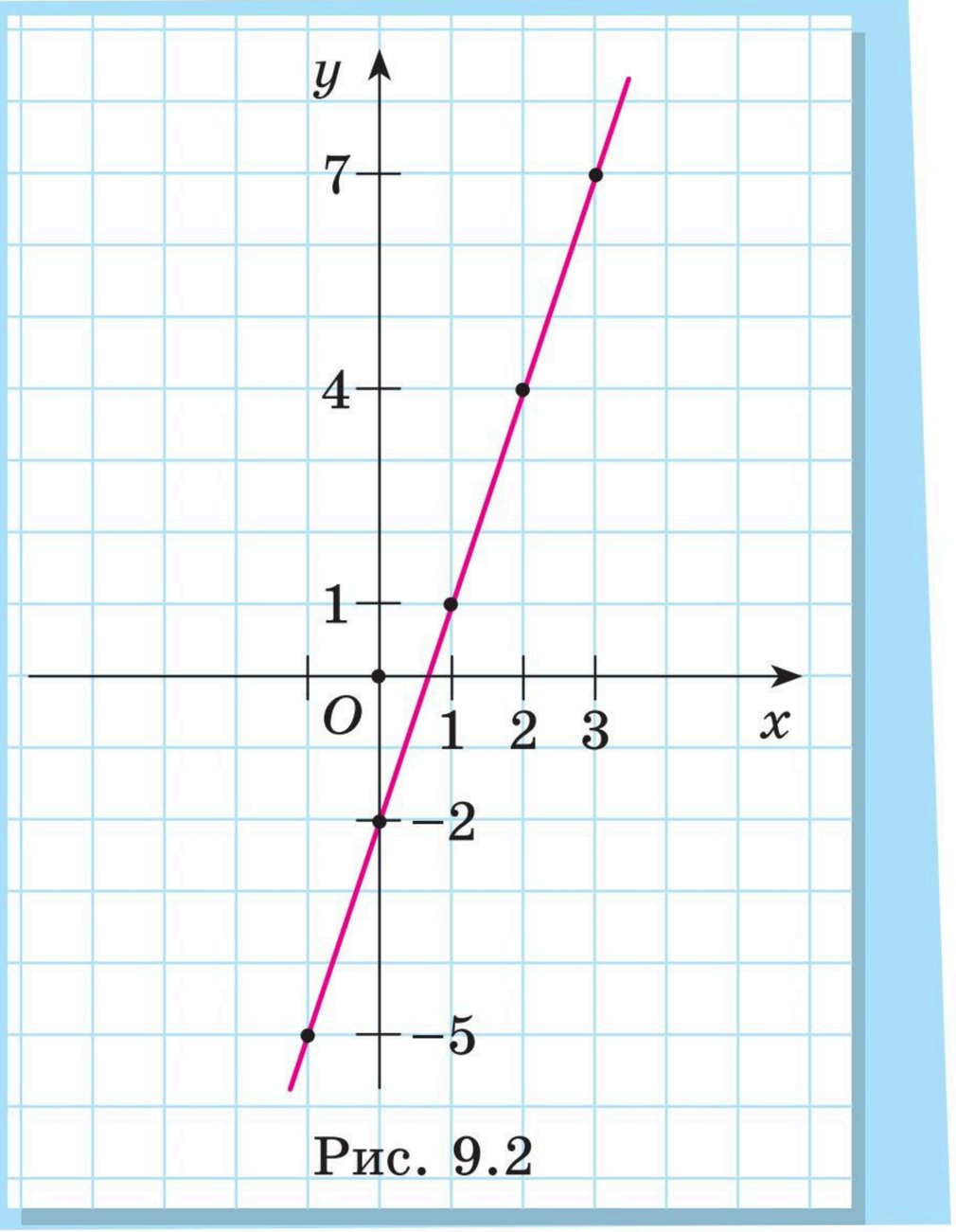


Рис. 9.2

Перевірте правильність побудови за допомогою графічного калькулятора!





Графіком лінійної функції є пряма, тому, як ви дізнаєтеся пізніше, для її побудови досить взяти лише дві точки. Наприклад, побудуємо графік функції $y=-\frac{1}{3}x+2$. Складемо таблицю значень функції лише для двох значень аргументу. Для зручності обчислень візьмемо $x=0$ та $x=3$.

Побудуємо дві точки в системі координат і проведемо через них пряму (рис. 9.3).

x	0	3
y	2	1

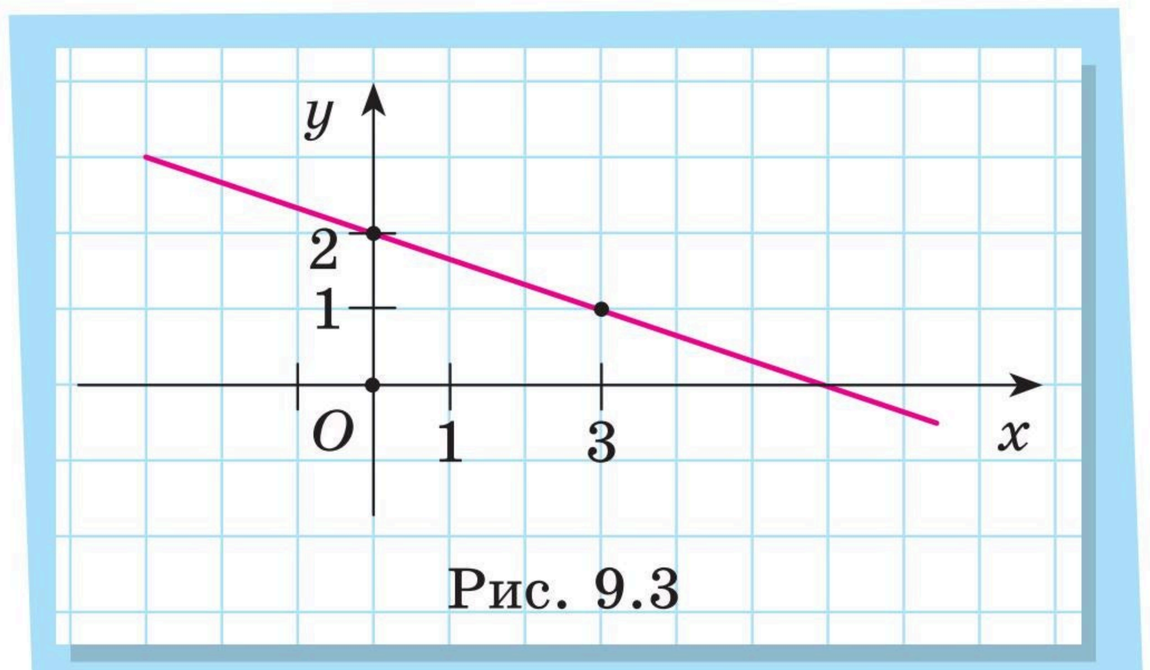


Рис. 9.3



Якщо в лінійній функції $y=ax+b$ число b дорівнює нулю, то таку лінійну функцію називають прямою пропорційністю.

Наприклад, функція $y=2x$, графік якої був побудований у § 8 (див. рис. 8.2, 8.3), є прямою пропорційністю.

Якщо в лінійній функції $y=ax+b$ нулю дорівнює число a, то графік такої функції є прямою, яка паралельна осі абсцис або збігається з нею.

Докладніше про лінійну функцію: https://rnk.com.ua/106090



Перевірте себе!

1. Дайте означення лінійної функції.
2. Якою геометричною фігурою є графік лінійної функції?
3. Як побудувати графік лінійної функції?
4. За якої умови лінійна функція є прямою пропорційністю?
5. За якої умови графік лінійної функції є паралельним осі абсцис або збігається з нею?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з наведених функцій є лінійними?

а) $y=5x+3$; г) $g(x)=-4x$; ж) $y=9$;

б) $y=-2x-6$; д) $y=\frac{1}{6}x-4$; з) $y=\frac{3}{x}$.

в) $f(x)=x-7$; е) $y=x^2+3x-8$;

2. Які з наведених функцій є лінійними?

а) $y=2x-3$; г) $g(x)=-7x+\frac{4}{5}$; ж) $y=9-x^2$;

б) $y=5x$; д) $y=-6$; з) $y=\frac{2}{3x}+1$.

в) $f(x)=\frac{2}{3}x-1$; е) $y=4x^2+6$;

3. Графік яких із наведених лінійних функцій є прямою, паралельною до осі абсцис?

а) $y=-3$; б) $y=5x$; в) $f(x)=4x-4$; г) $g(x)=\frac{4}{5}$.

4. Які з наведених лінійних функцій є прямою пропорційністю?

а) $y=2x$; б) $y=-4x$; в) $f(x)=7x-7$; г) $g(x)=\frac{1}{5}x$.

5. Функція задана формулою $y=3x+2$. Обчисліть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: а) 2; б) 0; в) -1; г) 0,7.

6. Функція задана формулою $f(x)=2x-5$. Обчисліть: а) $f(3)$; б) $f(1)$; в) $f(0)$; г) $f(0{,}5)$.

7. Лінійна функція задана формулою $y=x+1$. Заповніть таблицю. Побудуйте графік функції.

x	0	3
y		

8. Лінійна функція задана формулою $y=x-3$. Заповніть таблицю. Побудуйте графік функції.

x	0	4
y		

9. У магазині груші коштують 30 гривень за кілограм. Яка з поданих лінійних функцій є залежністю вартості груш (у грн) від їхньої маси (у кг)?

а) $f(x)=x-30$; в) $g(x)=30x$;

б) $y=\frac{1}{30}x$; г) $y=x+30$.

10. Середня швидкість руху велосипедистки становить 20 км/год. Яка з поданих лінійних функцій є залежністю подоланого велосипедисткою шляху (у км) від часу руху (у год)?



а) $f(x)=x+20$; в) $g(x)=x-20$;

б) $y=\frac{1}{20}x$; г) $y=20x$.

Середній рівень

11. Функція задана формулою $y=\frac{1}{4}x-2$. Обчисліть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: а) 2; б) 0; в) -8; г) 0,3.

12. Функція задана формулою $f(x)=2x-0{,}6$. Обчисліть: а) $f(2)$; б) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; в) $f(0)$; г) $f(0{,}8)$.

13. Задано функцію $y=\frac{1}{2}x-3$. Складіть таблицю значень і побудуйте графік цієї функції. За побудованим графіком:

а) знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 5; 2; -1;

б) знайдіть значення аргументів, за яких значення функції дорівнює: 0; -3; -5;

в) визначте, чи належать графіку функції точки: $A(1;3{,}5)$, $B(3;-1{,}5)$, $C(4;-1)$, $D(-2;-5)$;

г) знайдіть координати точок перетину графіка з осями координат.

14. Задано функцію $y=-2x+3$. Складіть таблицю значень і побудуйте графік цієї функції. За побудованим графіком:

а) знайдіть ординати точок, абсциси яких дорівнюють: 3; 2; -1; 0;

б) знайдіть абсциси точок, ординати яких дорівнюють: 0; -3; 4;

в) визначте, чи проходить графік функції через точки: $A(1;1)$, $B(2;-1)$, $C(2{,}5;-2)$, $D(-2;6)$;

г) знайдіть координати точок перетину графіка з осями координат.

15. Побудуйте в одній ПДСК графіки функцій $y=2x-3$ і $y=5$. За рисунком знайдіть координати точки перетину графіків.

16. Побудуйте в одній ПДСК графіки функцій $y = x + 3$ і $y = -2$. За рисунком знайдіть координати точки перетину графіків.

17. Побудуйте в одній координатній площині графіки функцій $y = x - 3$ та $y = x$. Чи перетинаються графіки цих функцій?

18. Побудуйте в одній координатній площині графіки функцій $y = 3$ та $y = -4$. Чи перетинаються графіки цих функцій?

19. Вартість доставлення поштою становить 30 гривень плюс 100 гривень за кожен кілограм маси посилки. Запишіть функцію, яка описує залежність вартості доставлення посилки (у грн) від маси посилки (у кг). Чи є ця функція лінійною?

20. Тариф мобільного зв'язку «Лише розмови» складається зі щомісячної абонентської плати 50 гривень плюс 20 копійок за кожну хвилину розмов. Запишіть функцію, яка описує залежність місячної плати за користування мобільним зв'язком за цим тарифом (у грн) від тривалості розмов (у хв). Чи є ця функція лінійною?



Достатній рівень

21. Функція задана формулою $y = -0{,}5x - 1{,}5$. Побудуйте графік цієї функції в зошиті, узявши за масштабну одиницю 2 клітинки. Чи належать цьому графіку точки з координатами: $(1; 2)$; $(1; -2)$; $(0; -1{,}5)$; $(-1{,}5; 0)$?

22. Функція задана формулою $y = 1{,}5x + 0{,}5$. Побудуйте графік цієї функції в зошиті, узявши за масштабну одиницю 2 клітинки. Чи належать цьому графіку точки з координатами $(0; 0)$; $(-1; -1)$; $(-2; 2{,}5)$; $(1; 2)$?

23. Побудуйте графіки заданих функцій в одній координатній площині.

а) $f(x)=\frac{1}{2}x-2$ і $g(x)=2x+1$;

б) $f(x)=x+3$ і $g(x)=3x-1$;

в) $f(x)=2x+1$ і $g(x)=2x-1$;

г) $f(x)=2x$ і $g(x)=-2x$.

Для кожної пари графіків з'ясуйте, чи перетинаються ці графіки. Якщо так, то запишіть координати точки їх перетину.

24. Побудуйте графіки заданих функцій в одній координатній площині.

а) $f(x)=\frac{1}{3}x-2$ і $g(x)=3x-2$;

б) $f(x)=2x-1{,}5$ і $g(x)=1{,}5x-2$;

в) $f(x)=3x+3$ і $g(x)=3x-1$;

г) $f(x)=-4x$ і $g(x)=4x$.

Для кожної пари графіків з'ясуйте, чи перетинаються ці графіки. Якщо так, то запишіть координати точки їх перетину.

25. Відомо, що деяка лінійна функція задана формулою $y=ax+12$. За якого значення a графік цієї функції буде проходити через точку $C(1;14)$?

26. Відомо, що деяка лінійна функція задана формулою $y=-2x+b$. За якого значення b графік цієї функції буде проходити через точку $D(2;-12)$?

27. Один із графіків на рис. 1 відображає залежність кількості y вироблених цукерок (у кг) від часу x роботи кондитерської фабрики (у год), а інший графік — залежність кількості y непроданих цукерок у фірмовому магазині фабрики (у кг) від часу x роботи магазину (у год).

а) Якому процесу відповідає графік на рис. 1, *а*? Якому процесу відповідає графік на рис. 1, *б* ?
б) Скільки кілограмів цукерок було виготовлено за 6 годин роботи фабрики? Скільки кілограмів цукерок залишилися непроданими після 6 годин роботи магазину?
в) Скільки кілограмів цукерок виготовляє фабрика за 1 годину? Скільки кілограмів цукерок продається за 1 годину у фірмовому магазині?
г) Задайте формулою залежність кількості кілограмів цукерок від часу роботи для фабрики та для магазину.

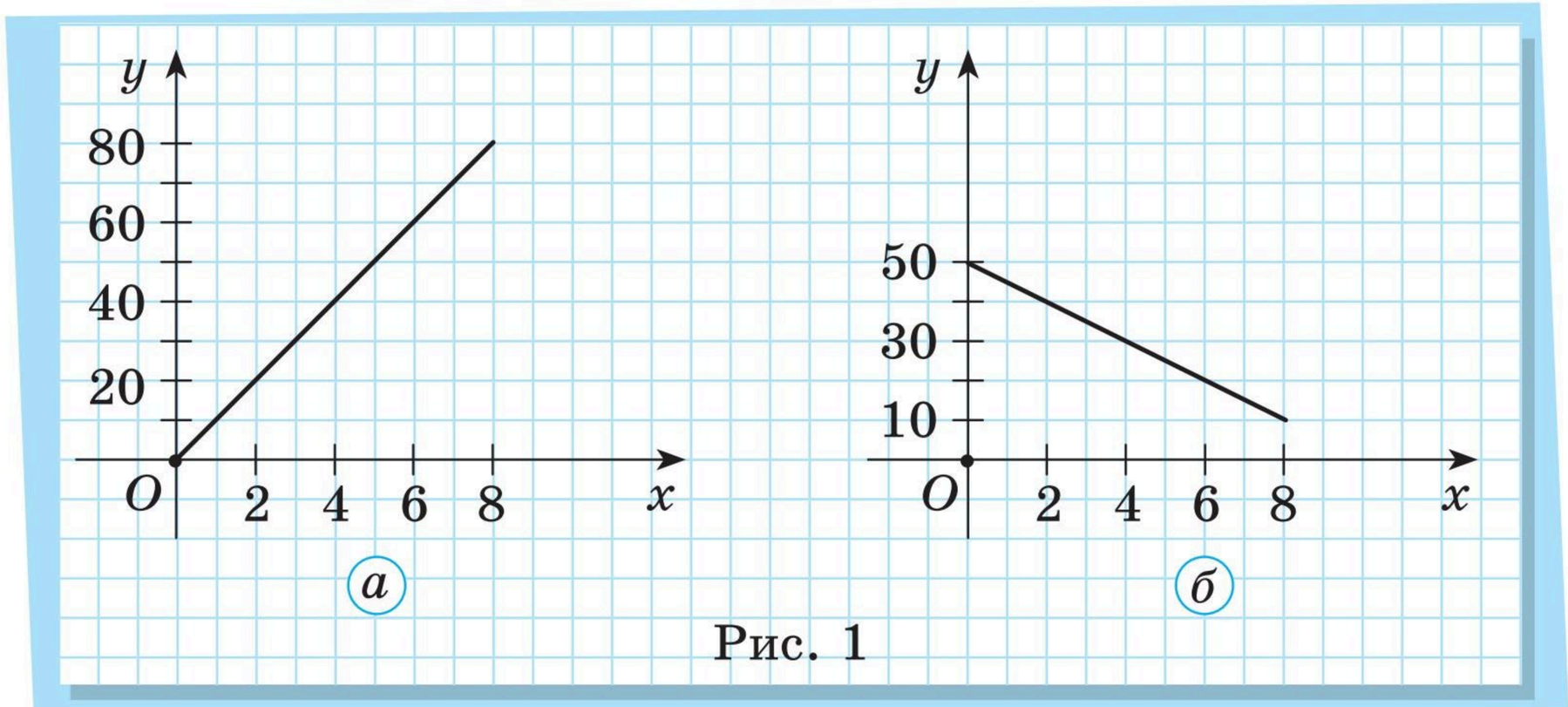


Рис. 1

28. Один із графіків на рис. 2 відображає залежність кількості *y* спечених пиріжків у пекарні (у шт.) від часу *x* роботи пекарні (у год), а інший графік — залежність кількості *y* непроданих пиріжків у шкільному буфеті (у шт.) від часу *x* роботи буфета (у год).
а) Якому процесу відповідає графік на рис. 2, *а*? Якому процесу відповідає графік на рис. 2, *б*?
б) Скільки пиріжків було випечено за 4 години роботи пекарні? Скільки пиріжків було продано за 4 години роботи шкільного буфета?
в) Скільки пиріжків випікає пекарня за 1 годину? Скільки пиріжків залишилось у шкільному буфеті після 1 години його роботи?

г) Задайте формулою залежність кількості пиріжків від часу роботи для пекарні та для шкільного буфета.

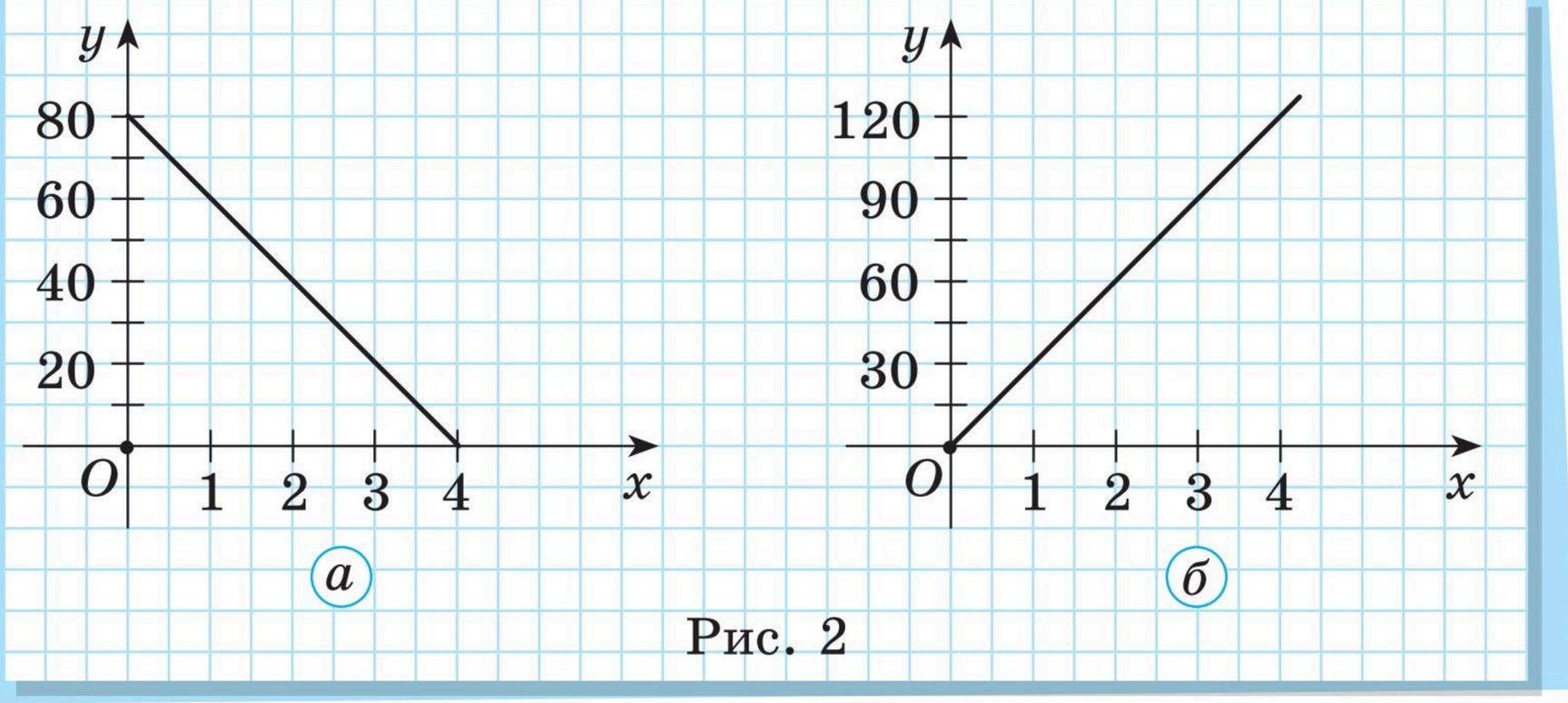


Рис. 2

29. Графік якої з поданих функцій зображено на рис. 3? Відповідь обґрунтуйте.

а) $y = 4x$; б) $y = 4x + 4$; в) $y = 4$; г) $y = -4x + 4$.

30. Графік якої з поданих функцій зображено на рис. 4? Відповідь обгрунтуйте.

а) $y = 2x + 2$; б) $y = 2x$; в) $y = -x$; г) $y = x$.

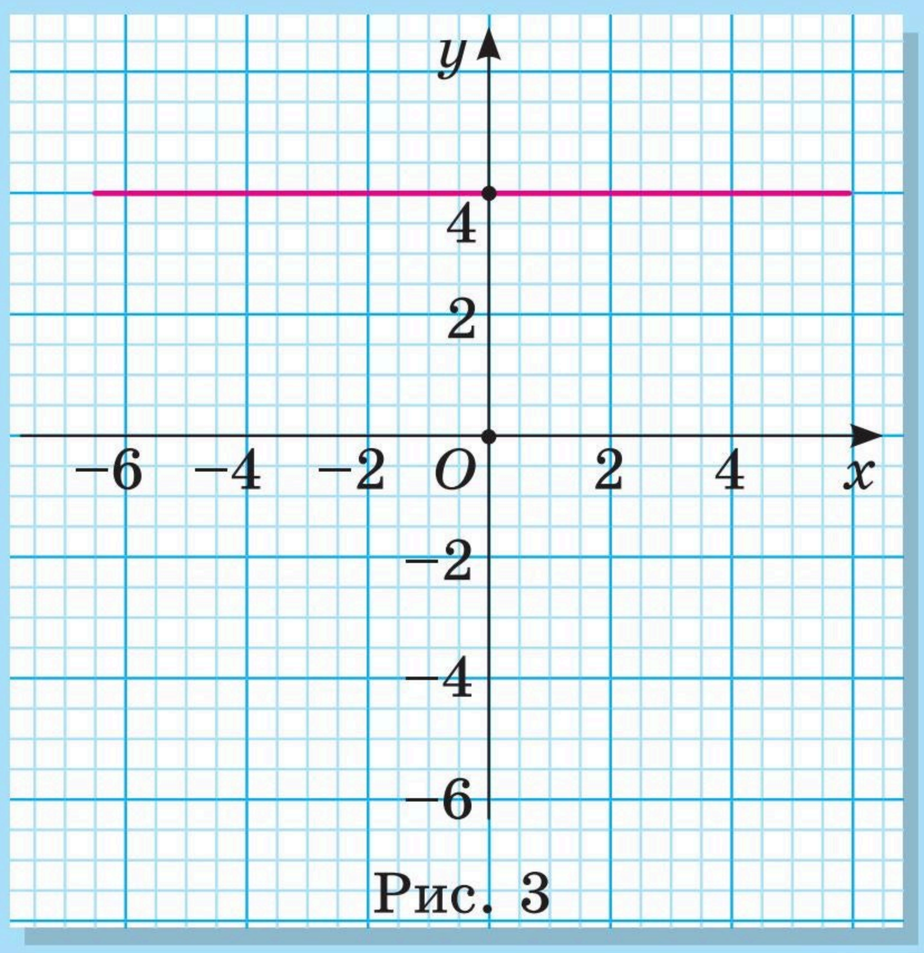


Рис. 3

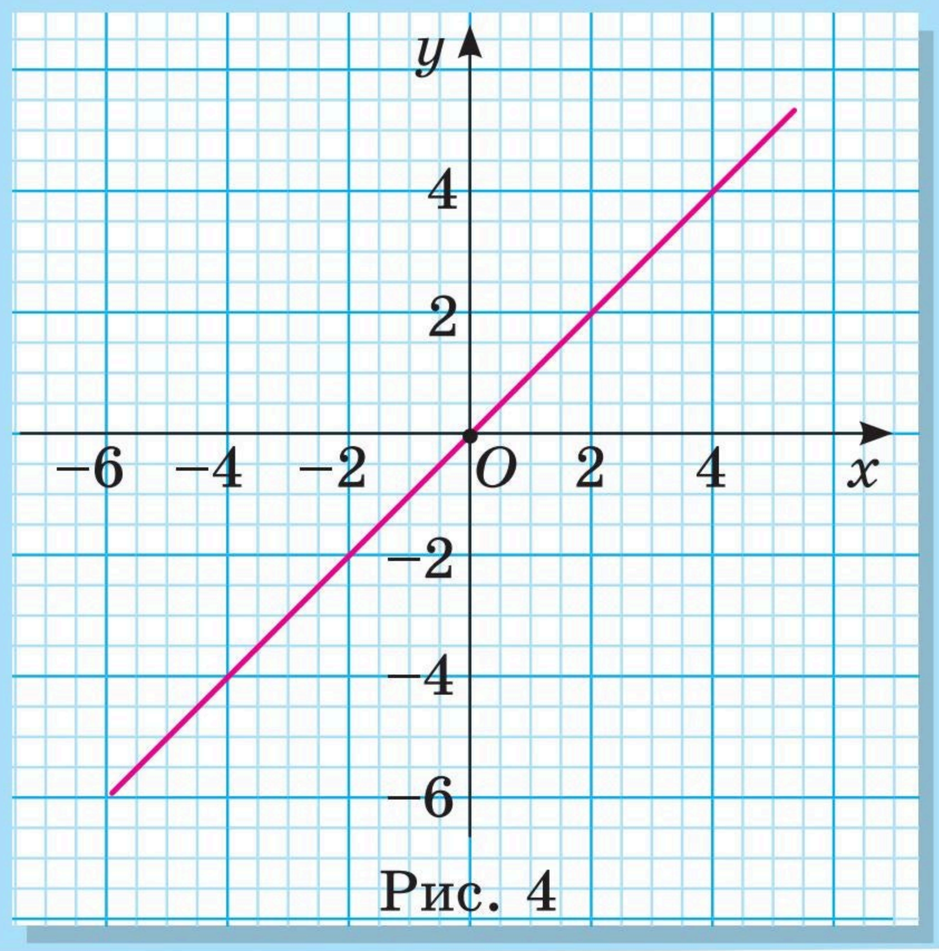


Рис. 4

Високий рівень

31. Графік якої з поданих функцій зображено на рис. 5? Відповідь обґрунтуйте.

а) $y = 0{,}5x - 2$; б) $y = 2x - 8$; в) $y = -x - 4$; г) $y = x - 4$.

32. Графік якої з поданих функцій зображено на рис. 6? Відповідь обґрунтуйте.

а) $y = -2x - 2$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -3x + 2$; г) $y = 3x + 3$.

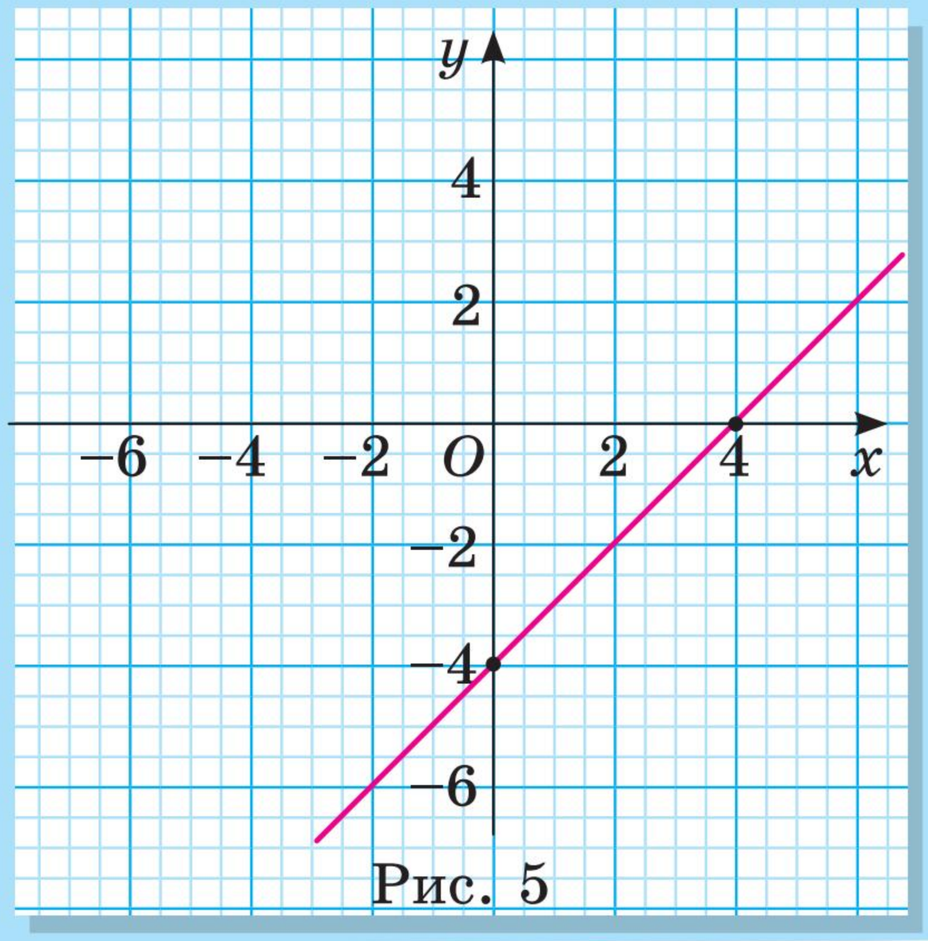


Рис. 5

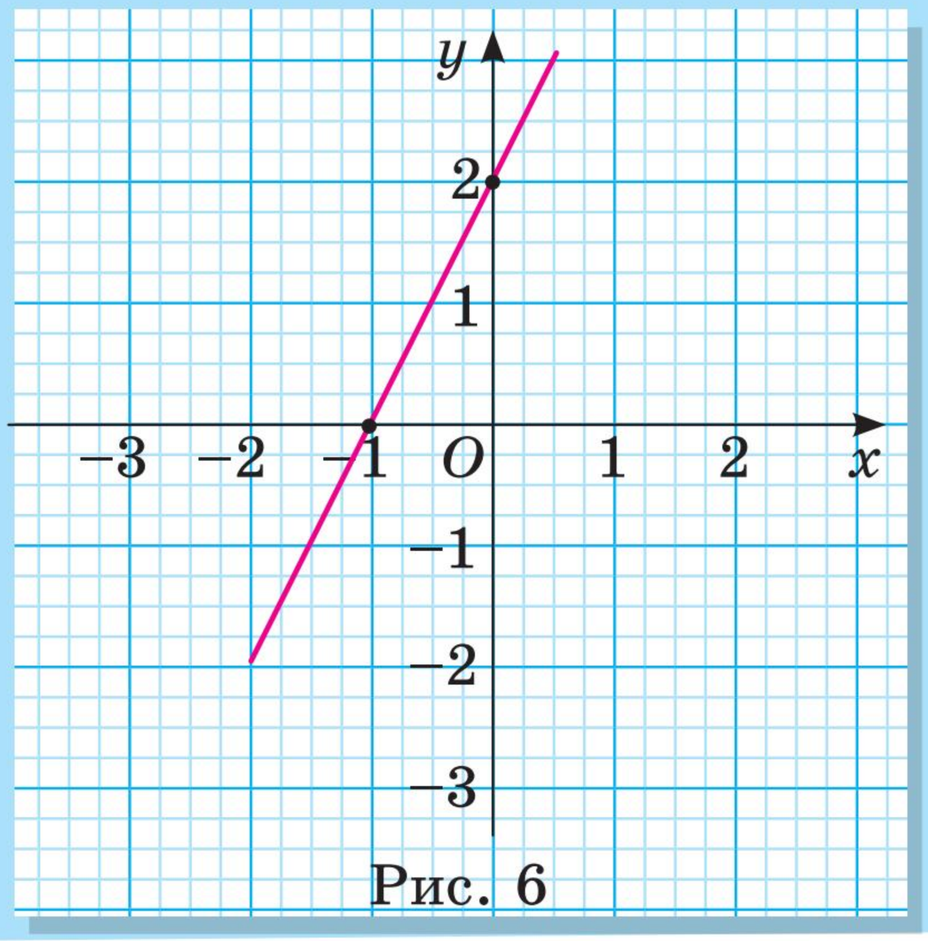


Рис. 6

33. Задайте формулою будь-які дві лінійні функції, графіки яких проходять через точку: а) $A(1; 2)$; б) $B(-1; 0)$.

34. Задайте формулою будь-які дві лінійні функції, графіки яких проходять через точку: а) $C(-2; 0)$; б) $B(5; 4)$.

35. Побудуйте графік функції $g(x) = 2x + 3$. За графіком знайдіть координати точки перетину з віссю абсцис і з віссю ординат.

36. Побудуйте графік функції $g(x) = -3x - 6$. За графіком знайдіть координати точки перетину з віссю абсцис і з віссю ординат.

37. Запишіть формулу прямої пропорційності, графік якої проходить через точку $P(-1;-3)$.

38. Запишіть формулу прямої пропорційності, графік якої проходить через точку $N(2;12)$.

39. Наведіть приклад з особистого досвіду, коли ви стикалися з лінійною залежністю однієї величини від іншої.

40. Наведіть приклад з особистого досвіду, коли ви стикалися з прямою пропорційністю.



Цікавинки від дідуся Тараса

Термін «лінія» має латинське походження (від *linea* — лляна нитка, мотузка, риска, проведена за допомогою цієї мотузки). Спочатку під лініями розуміли тільки прямі, звідси й походить назва приладу для креслення прямих — «лінійка»). Пізніше словом «лінія» почали називати й криві, зокрема давньогрецький математик *Евклід* (бл. 325 — бл. 270 рр. до н. е.) називав лінією «довжину без ширини». Більш чітко поняття лінії визначали французькі математики *Рене Декарт* (1596–1650) і *Каміль Жордан* (1838–1922); сучасне означення лінії дав математик українського походження *Павло Урисон* (1898–1924).



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. З якими лініями ви мали справу в повсякденному житті? Опишіть життєві ситуації, у яких вам доводилося користуватися лініями різних видів.

2. Запитайте у вчительки або вчителя географії про паралелі та меридіани, полярне коло, тропіки. Чи можна їх вважати лініями? Які ще лінії використовують у географії?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вирази.

а) $3(a+2)-4(2-a)$; в) $2b+3(1-b)-4b+2(b-5)$.

б) $2c(3c+5)-3c(2c-4)$;

2. Розв'яжіть рівняння, користуючись правилом знаходження невідомого доданка.

а) $x+2=6$; в) $x+(-3,2)=-2,7$;

б) $0,5+x=-2,4$; г) $x+1\frac{1}{3}=3\frac{1}{4}$.

3. Розв'яжіть рівняння, користуючись правилом знаходження невідомого множника.

а) $-5x=-20$; б) $0,3x=-60$; в) $-\frac{2}{3}x=4$; г) $0,6x=2\frac{1}{4}$.

4. Мишко зробив собі 100 г чаю та виявив, що чай надто солодкий. Мама хлопчика з'ясувала, що концентрація цукру в Мишковому чаї становила 10 %. Визначте:



а) скільки грамів цукру було в чаї Мишка;

б) скільки грамів окропу треба долити Мишкові в чай, щоб концентрація цукру в ньому стала 2,5 % і хлопчик міг із задоволенням його випити.

5. На схематичному рисунку (див. рис. 7) подано відрізок AB, на якому позначено точки C і D. Відомо, що $AD=10$ см, $CB=15$ см, $AB=22$ см. Знайдіть довжину відрізка CD (у см).



Рис. 7

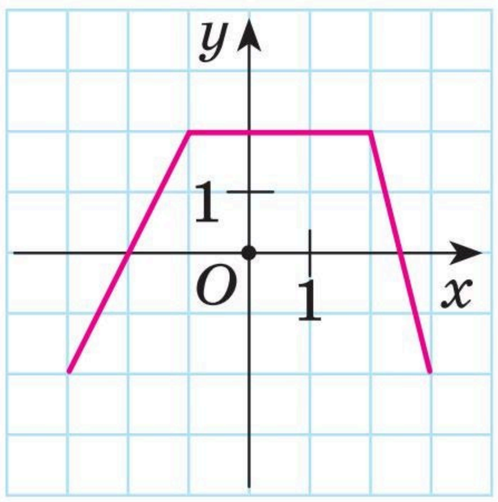
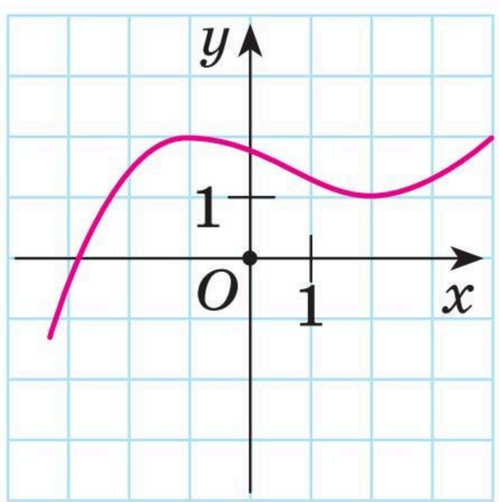
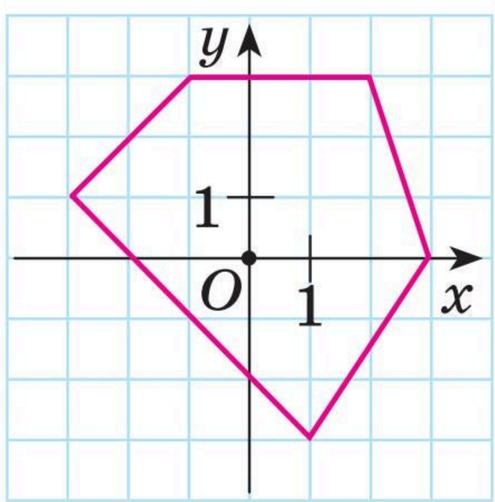
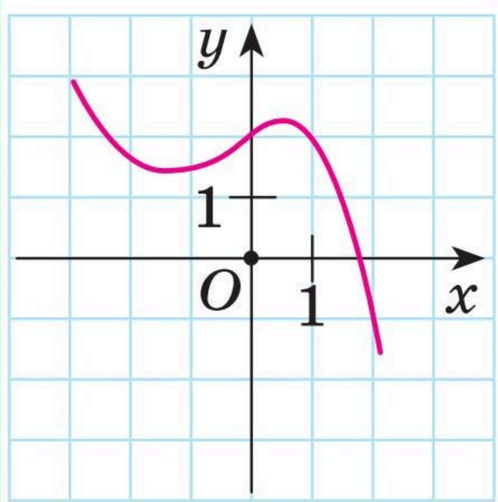
ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 2

У завданнях 1–6 укажіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

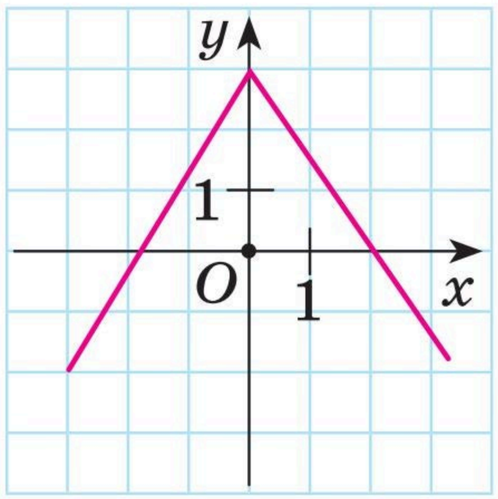
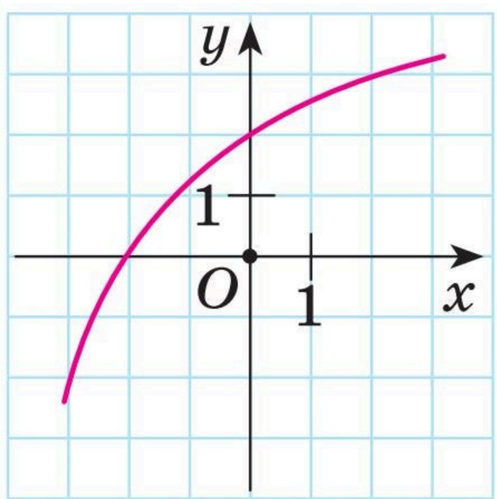
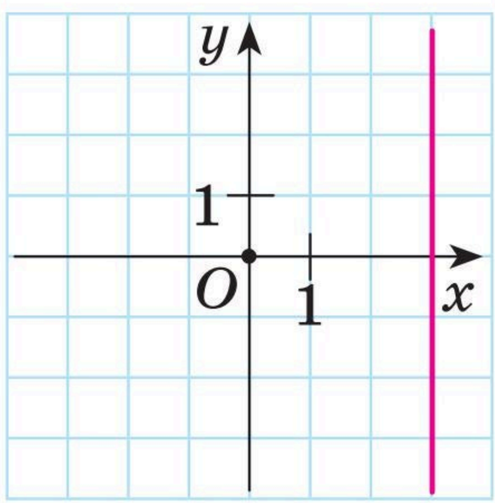
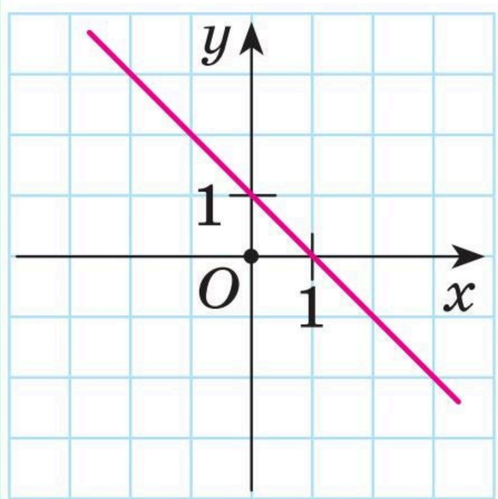
1. Якій координатній чверті належить точка $M(-1;3)$?

А	Б	В	Г
Першій	Другій	Третій	Четвертій

2. На якому рисунку зображено лінію, яка НЕ може задавати функцію?

А	Б	В	Г
			

3. На якому рисунку зображено графік лінійної функції?

А	Б	В	Г
			

4. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	-3	-2	0	1
y	-2	0	-3	-1

Знайдіть $f(-2)$.

А	Б	В	Г	Д
0	-1	-2	-3	1

5. Функцію $y = h(x)$ задано графічно (рис. 1).

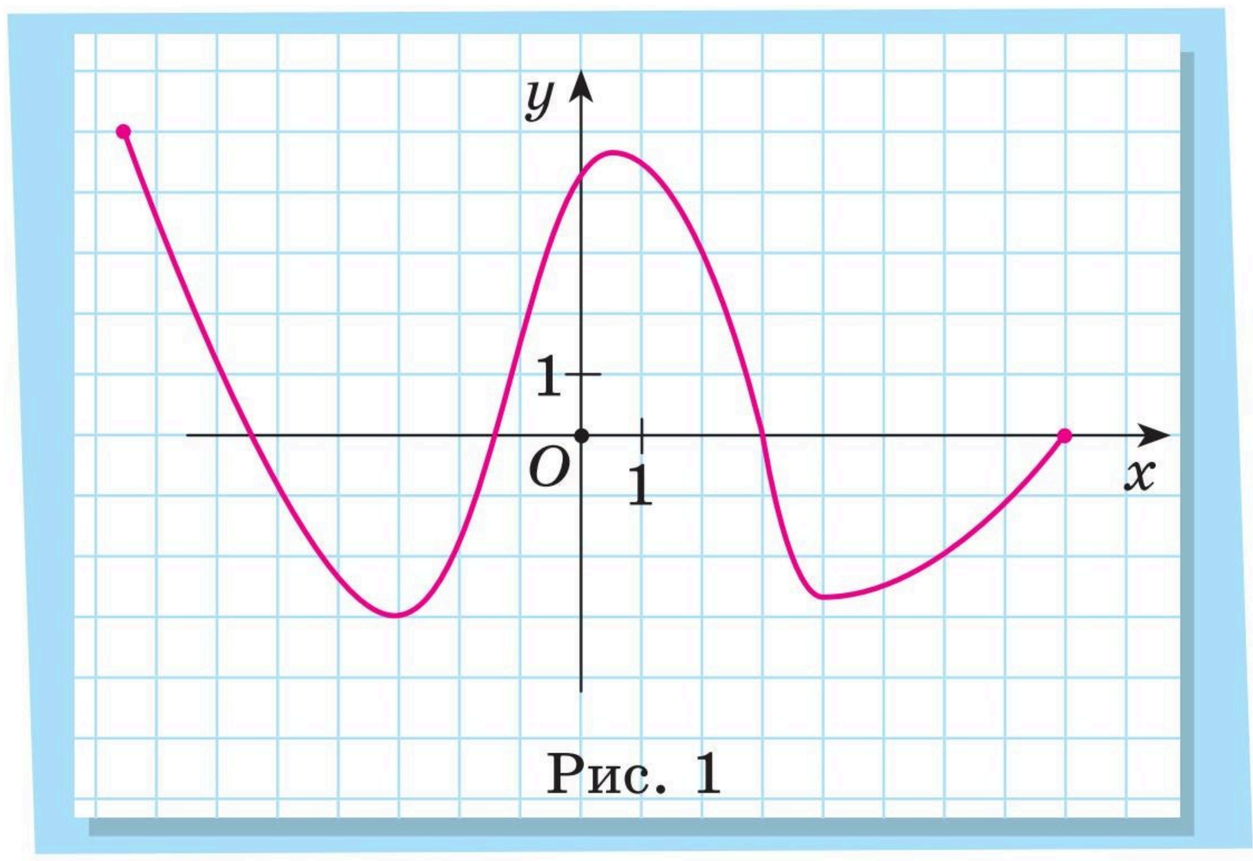


Рис. 1

Скільки існує значень аргументу, за яких $h(x) = 2{,}5$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Одно	Два	Три	Більше ніж три

6. Укажіть точку, яка належить графіку функції $y = 2x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)$	$(1; -2)$	$(2; 5)$	$(-1; 3)$	$(-2; -5)$

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. Знайдіть $f(-3)$, якщо $f(x)=x^2-2x+5$.

8. Функцію $y=g(x)$ задано таблицею:

x	-3	-1	0	3	5	7	10
y	5	3	10	-3	0	-1	-3

Знайдіть значення виразу $g(3)\cdot g(0)+p$, де p — значення аргументу, за якого значення функції дорівнює 5.

9. На рис. 2 зображено графік функції $y=h(x)$. Знайдіть значення виразу $s\cdot h(2)-k\cdot h(-3)$, де s — найбільше значення функції $h(x)$, а k — її найменше значення.

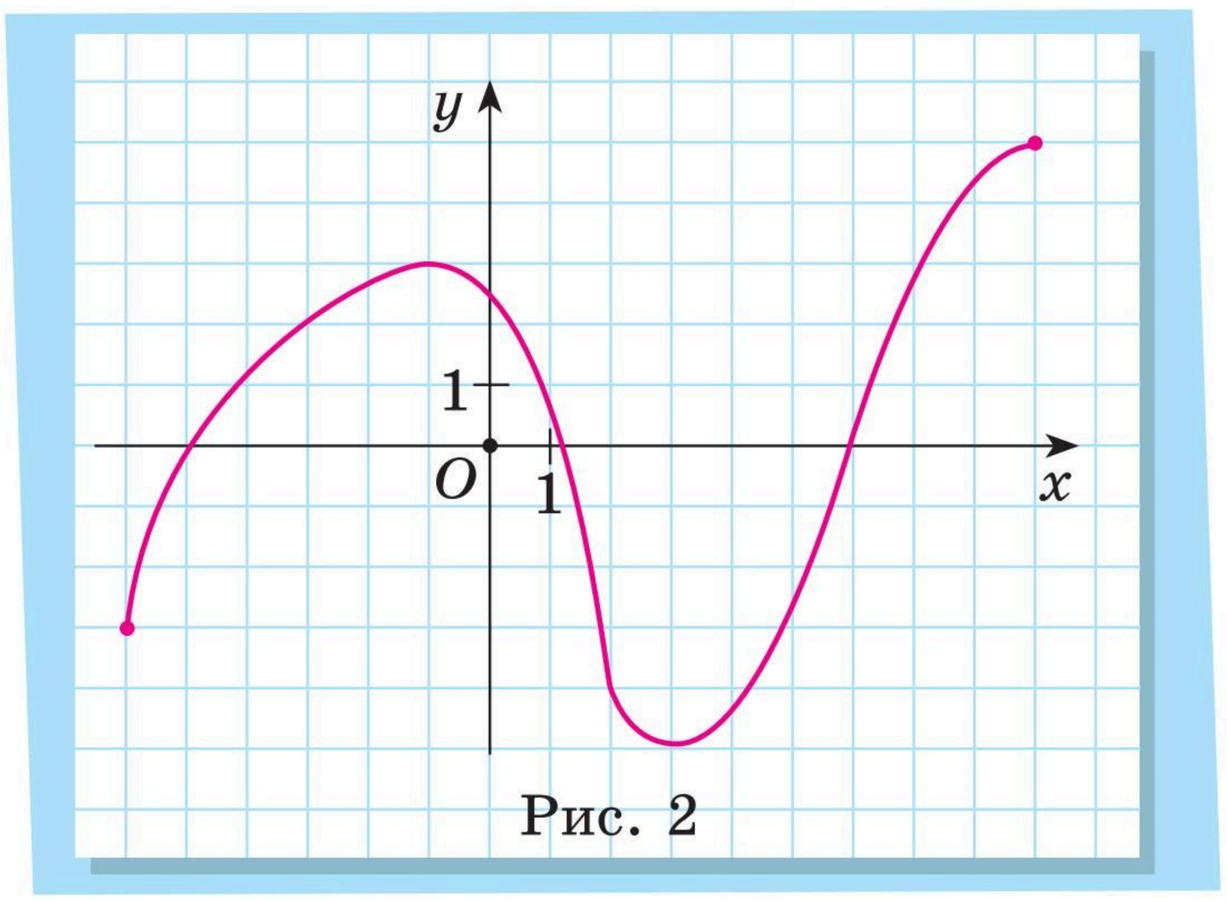


Рис. 2

Завдання 10–14 виконайте з повним поясненням.

10. У супермаркеті продають морозиво. З'ясуйте, чи залежить кількість проданих пачок морозива від: а) кількості охоронців супермаркету; б) кількості відвідувачів супермаркету; в) температури повітря в місті, де розташований супермаркет. Якщо так, то чи є ця залежність функціональною?

11. Вартість оренди електричного самоката складається із комісійного збору 50 грн, який сплачується під час отримання самоката, та вартості користування ним, що становить 5 грн за хвилину. Запишіть функцію $y = f(t)$, яка задає залежність вартості y (грн) оренди самоката від часу t (хв) користування ним. Чи є ця функція лінійною?

12. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	1	3	5	6	8	10	12	15
y	−3	2	0	1	2	−4	7	2

Знайдіть: а) $D(y)$; б) $E(y)$; в) найбільше та найменше значення функції; г) усі значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 2.

13. Складіть таблицю значень функції $f(x) = 2x^2 - 3$, надаючи аргументу значень −2; −1; 0; 1; 2. Побудуйте ці точки в ПДСК і сполучіть плавною лінією. Перевірте правильність побудови за допомогою графічного калькулятора.

14. Екскурсійна група вирушила від пам'ятника Тарасу Шевченку на пішохідну екскурсію містом. На графіку (рис. 3) показано залежність відстані s (у метрах) від екскурсовода до пам'ятника Кобзарю від часу t (у хвилинах). З'ясуйте:

а) скільки годин тривала екскурсія;

б) яку відстань (у км) пройшли екскурсовод із групою під час екскурсії;

в) середню швидкість руху групи (у км/год);

г) відстань від екскурсовода до пам'ятника за 1 годину після початку екскурсії;

д) час після початку екскурсії (у хвилинах), коли екскурсовод був на відстані 1,5 км від пам'ятника.

Що ще цікавого ви можете розповісти за поданим графіком про цю екскурсію?

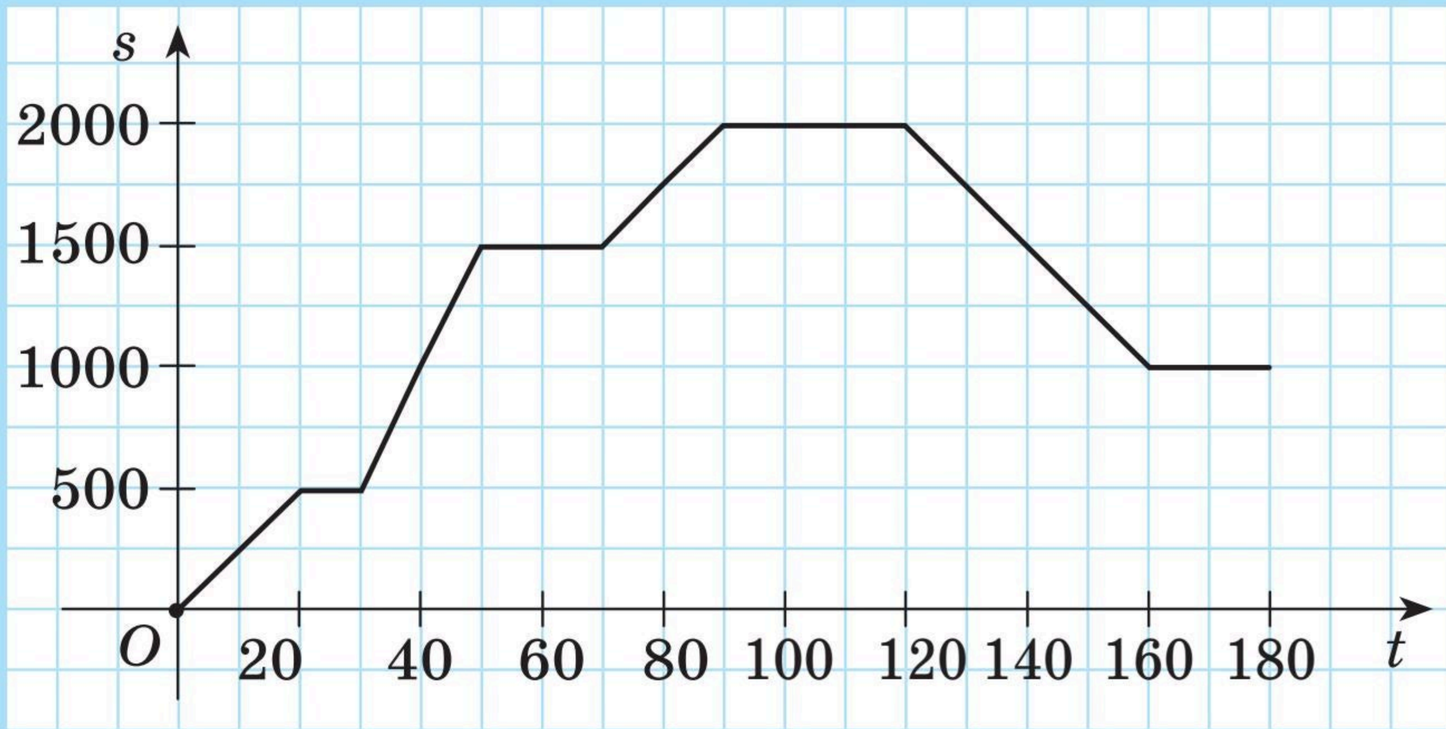


Рис. 3

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Укажіть найбільше значення функції $y = 3 - 2|x|$. Відповідь обґрунтуйте.

2. Укажіть найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 5$. Відповідь обґрунтуйте.

3. Графік функції $y = ax + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(3; -2)$. Знайдіть значення a і b.

4. Графік функції $y = ax + b$ перетинає осі координат у точках $A(0; 4)$ і $B(2; 0)$. Знайдіть значення a і b.

5. Побудуйте графік функції $y = 3x + |x| - 1$.

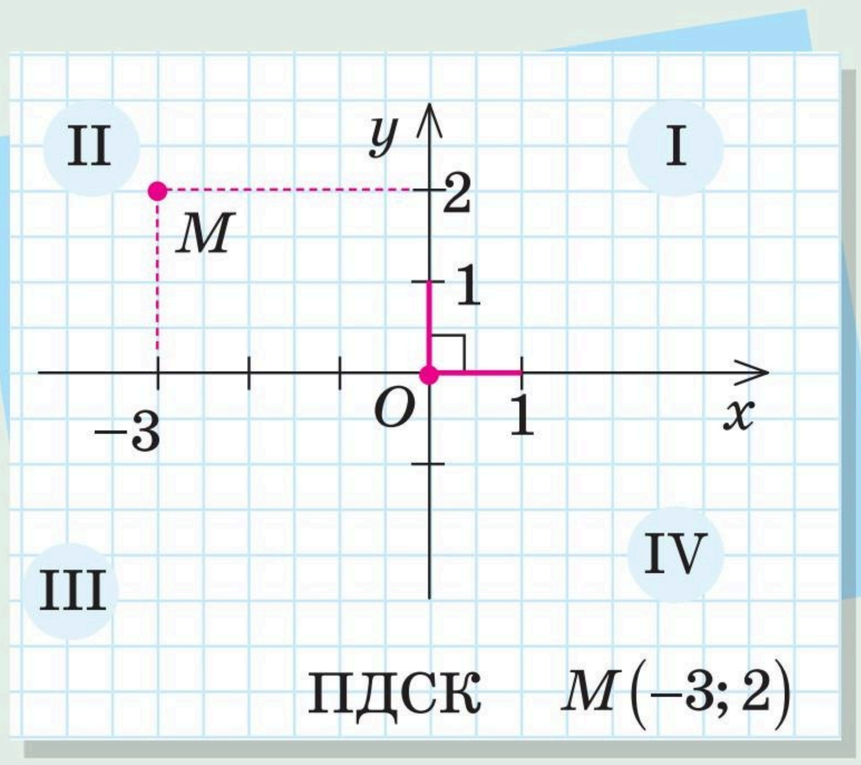
6. Побудуйте графік функції, якщо її область визначення — множина всіх чисел, а кожне значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, що не перевищує відповідного значення аргументу.

7. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару $(2x+40)$ грн, якщо продано товару менше 20 одиниць, і доплачує йому 20 % комісійних, якщо товару продано 20 одиниць або більше. Опишіть залежність між кількістю проданого товару й заробітною платою продавця та побудуйте графік одержаної функції.

Прямокутна декартова система координат — Cartesian coordinate system
Вісь абсцис, вісь ординат — abscissa axis, ordinate axis
Область визначення функції — domain of a function
Множина значень функції — range of a function
Графік функції — graph of a function
Лінійна функція — linear function

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

Прямокутна декартова система координат (ПДСК) на площині



O — початок координат.

x (Ox) — вісь абсцис
y (Oy) — вісь ординат
} Осі координат

Кут між осями прямий.

Масштабні одиниці на осях координат однакові.

I, II, III, IV — нумерація координатних чвертей.

$(-3; 2)$ — координати точки M:
-3 — абсциса, 2 — ордината.

Функція $y = f(x)$

залежність між змінними величинами y та x, за якої одному значенню x відповідає **лише одне** значення y

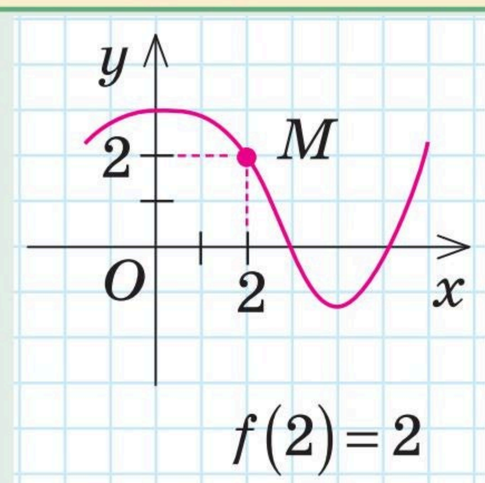
Способи задання функції

Аналітичний

$$f(x) = 4x^2 + x - 1$$
$$f(1) = 4 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 4$$

приклад

Графічний



приклад

Табличний

x	3	5	7	10
$f(x)$	-1	2	-2	4

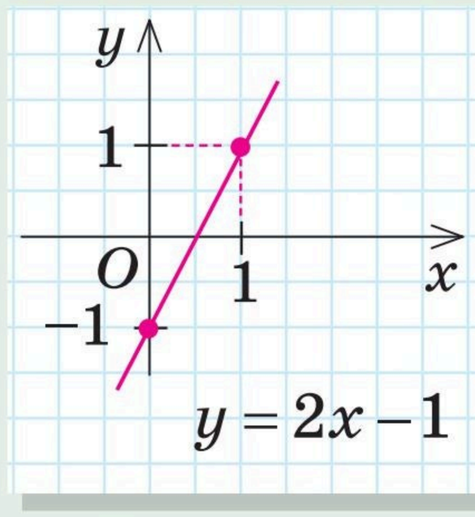
$f(7) = -2$

приклад

Лінійна функція
$y = f(x) = ax + b$

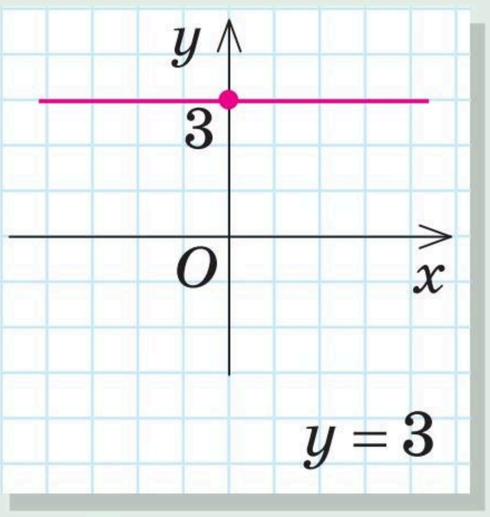
Графіком є пряма

$a \neq 0,\ b \neq 0$



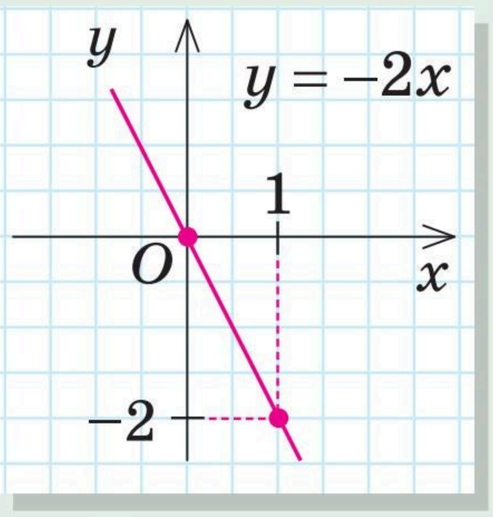
приклад

$a = 0,\ b \neq 0$



приклад

$a \neq 0,\ b = 0$



приклад

РОЗДІЛ 3.
ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

CHAPTER 3.
LINEAR EQUATIONS AND THEIR SYSTEMS

§ 10. Рівняння з однією змінною та їх корені. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться

Рівняння з однією змінною та їх корені



Петрику, допоможи, будь ласка! Були з родиною в магазині, де мені купили светр, джинси та кросівки. Точно пам'ятаю, що кросівки коштували утричі більше за светр, а джинси — на 200 грн більше за светр. Разом за всі ці речі заплатили 3200 грн. А от скільки що коштувало — не пам'ятаю...





Спробуємо використати вирази! Нехай светр коштував x грн, тоді вартість джинсів буде $(x+200)$ грн, а вартість кросівок — $3\cdot x$ грн. Отже, загальна вартість покупки становитиме $x+(x+200)+3x$ грн.



Чудово, це ж поліном! Зведемо його до стандартного вигляду:

$$x+(x+200)+3x=5x+200.$$

Ми одержали біном першого степеня. Тепер залишається знайти значення змінної x, за якого значення цього виразу дорівнює вартості покупки, тобто $5x+200=3200$.



Пам'ятаю, ще в початковій школі ми вчили: щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок. Тому $5x=3200-200$, тобто $5x=3000$.



А я пам'ятаю таке: щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник. Тому $x=3000:5=600$.



Чудово! Отже, твій светр коштував 600 грн. Тоді вартість джинсів була $600+200=800$ грн, а вартість кросівок $600\cdot 3=1800$ грн. І от ми все з'ясували!



Рівності на кшталт $5x+200=3200$, у яких потрібно знайти невідоме значення змінної, за якого ця рівність буде правильною, називають рівняннями з однією змінною. У такому випадку значення невідомої змінної називають коренем рівняння або розв'язком рівняння.

Наприклад, число 600 буде коренем рівняння $5x+200=3200$, оскільки $5\cdot 600+200=3200$.



Бувають і складніші рівняння, що мають корені. Наприклад, число 2 є коренем рівняння $x^2=2x$, бо $2^2=2\cdot 2$. Але цей *корінь не єдиний*, бо число 0 також є коренем цього рівняння: $0^2=0\cdot 0$.



Бувають рівняння, які *не мають коренів*. Наприклад, рівняння $x^4 = -10$ не має коренів, бо парний степінь будь-якого числа не може бути від'ємним.



Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або показати, що їх немає.

Рівносильні рівняння



Рівняння, які мають ту саму множину коренів, називають рівносильними.

Наприклад, рівняння $x + (x + 200) + 3x = 3200$, $5x + 200 = 3200$ і $5x = 3000$ є рівносильними, бо число $x = 600$ є єдиним коренем усіх цих рівнянь.



Зауважимо, що будь-які два рівняння, що не мають коренів, також домовилися вважати рівносильними.



Тобто чи правильно я розумію, що, розв'язуючи рівняння, потрібно виконувати над ним певні перетворення так, щоб утворилося рівносильне рівняння?



Звісно! Природно назвати такі перетворення рівнянь рівносильними. Цікаво, що це за перетворення?



У загальному випадку відповісти на це запитання *зараз* складно, бо типів рівнянь існує багато і не про всі ви поки що знаєте. Але два основні рівносильні перетворення ви з Петриком уже використали, коли розв'язували рівняння $5x + 200 = 3200$.

Перше рівносильне перетворення рівняння: до обох частин рівняння можна додати те саме число або той самий моном.

Друге рівносильне перетворення рівняння: обидві частини рівняння можна помножити чи поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.



Справді, коли Тетянка знаходила невідомий доданок у рівнянні $5x+200=3200$, вона фактично до обох частин рівняння додала число (-200):

$$5x+200+(-200)=3200+(-200), \text{ або } 5x=3200-200.$$

У цьому випадку кажуть, що число 200 перенесли в іншу частину рівняння з протилежним знаком.



А коли Петрик знаходив невідомий множник, він фактично поділив обидві частини рівняння $5x=3000$ на 5:

$$(5x):5=3000:5, \text{ або } x=600.$$

Отже, розв'язуючи рівняння $5x+200=3200$, ми використали обидва наведені рівносильні перетворення і можемо стверджувати, що корінь останнього рівняння є коренем початкового.

Докладніше про рівносильні перетворення:
https://rnk.com.ua/106093



Лінійні рівняння з однією змінною



Я помітив, що ліва частина рівняння $5x+200=3200$ за формою запису схожа на лінійну функцію $y=5x+200$. І, розв'язуючи це рівняння, ми фактично шукаємо таке значення аргументу, за якого значення функції дорівнює 3200.



І справді! То, можливо, назва таких рівнянь і способи їх розв'язування мають бути пов'язані з лінійною функцією?



Правильно, Тетянко!



Рівняння, ліва і права частини якого є числами або мономами чи поліномами першого степеня з однією змінною, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Зрозуміло також, що хоча б одна із частин лінійного рівняння має містити змінну; числові рівності не є рівняннями. Наприклад, лінійними є рівняння $3x=7$, $1-x=3+x$, $-5x+2=0$, $-7=2x-1$ тощо.



Лінійні рівняння розв'язують за допомогою *рівносильних перетворень*, описаних вище. Наприклад, розв'яжемо рівняння $5x+2=3x-5$.

Спочатку додамо до обох частин рівняння число (-2) та моном $(-3x)$. Іншими словами, перенесемо число 2 вправо з протилежним знаком, а вираз $3x$ — вліво з протилежним знаком. Маємо:

$$5x+2+(-2)+(-3x)=3x-5+(-2)+(-3x);\ 5x-3x=-5-2.$$

Зведемо подібні доданки в обох частинах рівняння: $2x=-7$. Поділимо обидві частини рівняння на 2 й одержимо $x=-3{,}5$.

Оскільки виконувалися рівносильні перетворення, то число $(-3{,}5)$ буде єдиним коренем початкового рівняння.



Іноді лінійне рівняння *може не мати коренів*. Наприклад, розглянемо рівняння $x+1=x+2$. Виконаємо рівносильні перетворення: $x-x=2-1$, або $0\cdot x=1$. Остання рівність не виконується за жодного значення змінної, а отже, початкове рівняння не має коренів.



А іноді лінійне рівняння *може мати безліч коренів*. Наприклад, розглянемо рівняння $x+1=x+1$. Виконаємо рівносильні перетворення: $x-x=1-1$, або $0\cdot x=0$. Остання рівність виконується за будь-якого значення змінної, а отже, початкове рівняння має безліч коренів.



Рівняння виду $ax+b=0$, де x — змінна, а a і b — числа, називають найпростішими лінійними рівняннями. Залежно від значень параметрів a і b це рівняння може мати один корінь, безліч коренів або не мати їх зовсім.

Про кількість коренів лінійного рівняння:
https://rnk.com.ua/106094





Іноді корінь рівняння зручно шукати *графічним способом*. Наприклад, розв'яжемо цим способом рівняння $2x+1=4x-2$. Для цього побудуємо в одній системі координат графіки лінійних функцій $y=2x+1$ і $y=4x-2$ (див. рис. 10.1) і знайдемо координати точки їх перетину. *Абсциса* точки перетину графіків буде шуканим *коренем* рівняння.

За графіком бачимо, що точкою перетину графіків є точка $(1,5;\,4)$. Переконаємося, що $x=1,5$ дійсно є коренем рівняння $2x+1=4x-2$. Справді: $2\cdot 1,5+1=4$ і $4\cdot 1,5-2=4$.

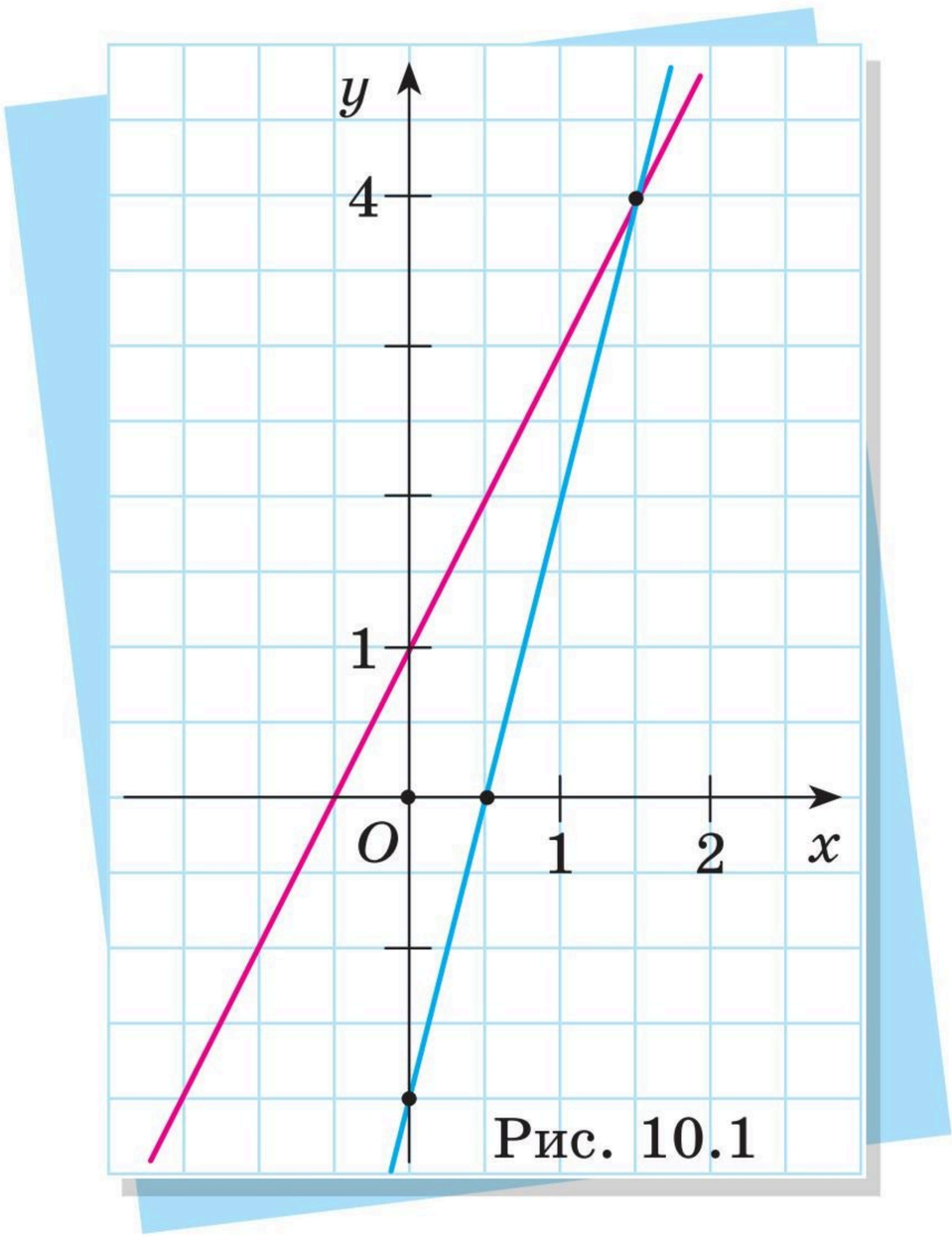


Рис. 10.1



До речі, графічний спосіб і графічний калькулятор можна використовувати й для знаходження коренів більш складних рівнянь!

Детальніше про це:
https://rnk.com.ua/106095







Розв'яжемо більш складне рівняння, яке зводиться до лінійного:

$$2(1-x)+3=3(2x+1)-2.$$

Спочатку розкриємо дужки та зведемо подібні доданки в лівій і правій частинах рівняння:

$$2-2x+3=6x+3-2;\ -2x+5=6x+1.$$

Перенесемо число 5 вправо, а моном $6x$ — вліво з протилежними знаками:

$$-2x-6x=1-5;\ -8x=-4.$$

Поділимо обидві частини рівняння на (-8): $x=0{,}5$.



До лінійних зводяться й рівняння на кшталт $\frac{x-1}{5}=2$. Тут риска дробу означає знак *ділення* за аналогією з тим, що $\frac{1}{5}\cdot 10=\frac{10}{5}=10:5=2$. Тому рівняння $\frac{x-1}{5}=2$ рівносильне рівнянню $(x-1):5=2$ та рівнянню $\frac{1}{5}(x-1)=2$. Щоб розв'язати подане рівняння, обидві частини будь-якого з рівносильних рівнянь помножимо на 5, звідки $x-1=10$; $x=11$.



Перевірте себе!

1. Наведіть приклади рівнянь з однією змінною.
2. Дайте означення кореня рівняння з однією змінною. Наведіть приклади.

3. Що означає «розв'язати рівняння»?
4. Які рівняння називають рівносильними?
5. Наведіть приклади рівносильних перетворень рівнянь.
6. Які рівняння називають лінійними рівняннями з однією змінною?
7. Скільки коренів може мати лінійне рівняння з однією змінною?
8. Які є способи розв'язування лінійних рівнянь? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які записи є лінійними рівняннями з однією змінною?

а) $x+6=5$; г) $x^2-4x=0$; ж) $3x>5$.
б) $y=2x+3$; д) $x-y=0$;
в) $2x=8$; е) $2x-4=5x+6$;

2. Які записи є лінійними рівняннями з однією змінною?

а) $7x=21$; г) $5x^2=0$; ж) $6-x>1$.
б) $y=\frac{1}{2}x-5$; д) $4x-7=5+x$;
в) $2-x=0$; е) $3xy=9$;

3. Розв'яжіть рівняння. Яке число доцільно додати до обох частин рівняння, щоб його розв'язати?

а) $x+5=0$; б) $x-6=3$; в) $x+7=10$; г) $x+9=3$.

4. Розв'яжіть рівняння. Яке число доцільно додати до обох частин рівняння, щоб його розв'язати?

а) $x-4=0$; б) $x-3=5$; в) $x-6=15$; г) $x+8=-5$.

5. Розв'яжіть рівняння. На яке число доцільно поділити (чи помножити) обидві частини рівняння, щоб його розв'язати?

а) $5x = 30$; б) $3x = -9$; в) $\frac{1}{4}x = 5$; г) $-2x = -5$.

6. Розв'яжіть рівняння. На яке число доцільно поділити (чи помножити) обидві частини рівняння, щоб його розв'язати?

а) $6x = -48$; б) $7x = 1$; в) $\frac{1}{3}x = 8$; г) $-5x = -5$.

7. Які з наведених перетворень є рівносильними перетвореннями рівняння?

а) До обох частин рівняння додали число 7.

б) Моном $3x$ перенесли з правої частини рівняння в ліву, перетворивши його на $(-3x)$.

в) Обидві частини рівняння поділили на (-4).

г) Обидві частини рівняння помножили на 0.

д) Число 12 перенесли з лівої частини рівняння в праву.

8. Які з наведених перетворень є рівносильними перетвореннями рівняння?

а) До обох частин рівняння додали моном $5x$.

б) Моном $7x$ перенесли з правої частини рівняння в ліву, перетворивши його на $(-7x)$.

в) Обидві частини рівняння поділили на 8.

г) Обидві частини рівняння помножили на 8.

д) Число (-24) перенесли з лівої частини рівняння в праву, перетворивши його на 24.

9. Розв'яжіть рівняння.

а) $x + 4{,}2 = -1{,}3$; в) $3x = -3{,}6$; д) $\frac{2}{5}x = -\frac{4}{7}$.

б) $x - 4{,}2 = -1{,}1$; г) $-\frac{1}{4}x = 8$;

10. Розв'яжіть рівняння.

а) $x-5{,}2=7{,}6$; в) $-4x=1{,}2$; д) $-\frac{3}{4}x=\frac{6}{11}$.

б) $x+14{,}4=2{,}2$; г) $\frac{1}{6}x=-5$;

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-5}{4}=7$, помноживши спочатку обидві його частини на 4.

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+7}{3}=8$, помноживши спочатку обидві його частини на 3.

13. Дано функцію $y=-3x$. Не виконуючи побудови графіка цієї функції, знайдіть значення аргументу, за якого значення функції дорівнює:

а) 9; б) −12; в) 4,2; г) −6,45; д) $\frac{6}{7}$.

14. Дано функцію $y=4x$. Не виконуючи побудови графіка цієї функції, знайдіть значення аргументу, за якого значення функції дорівнює:

а) 8; б) −24; в) 3,6; г) −1,12; д) $\frac{8}{9}$.

15. Працівник фірми отримує 75 грн за годину роботи. За x годин роботи працівник отримав 2625 грн. Складіть рівняння для знаходження x.

16. Один кілограм яблук коштує 17 грн 90 коп. За x кг цих яблук заплатили 44 грн 75 коп. Складіть рівняння для знаходження x.



Середній рівень

17. За допомогою якого рівносильного перетворення перейшли від першого рівняння до другого?

а) Від $3x+7{,}1=-3{,}6$ до $3x=-3{,}6-7{,}1$.

б) Від $5x-4{,}2=-19{,}1$ до $5x=-19{,}1+4{,}2$.

в) Від $-\frac{1}{3}x=2{,}6$ до $x=2{,}6\cdot(-3)$.

г) Від $\frac{4x+2}{5}=-1{,}9$ до $4x+2=-1{,}9\cdot 5$.

18. За допомогою якого рівносильного перетворення перейшли від першого рівняння до другого?

а) Від $8x-6{,}1=-1{,}7$ до $8x=-1{,}7+6{,}1$.

б) Від $-2x+8{,}2=5{,}1$ до $-2x=5{,}1-8{,}2$.

в) Від $\frac{2}{3}x=-4{,}6$ до $x=-4{,}6\cdot\frac{3}{2}$.

г) Від $\frac{2x+7}{6}=-11{,}9$ до $2x+7=-11{,}9\cdot 6$.

19. Яке рівняння утвориться, якщо до обох частин рівняння $2x+4=7-3x$ додати моном $3x$?

20. Яке рівняння утвориться, якщо від обох частин рівняння $5y+9=7$ відняти число 9?

21. Яке рівняння утвориться, якщо обидві частини рівняння $\frac{4x-8}{3}=-11$ помножити на 3?

22. Яке рівняння утвориться, якщо обидві частини рівняння $6y=-19{,}2$ поділити на 6?

23. Дано рівняння $\frac{x}{3}-16=2$. Які рівносильні перетворення необхідно виконати для розв'язання цього рівняння?

24. Дано рівняння $\frac{x}{5}+9=-4$. Які рівносильні перетворення необхідно виконати для розв'язання цього рівняння?

25. Знайдіть корінь рівняння.

а) $4x+2{,}1=-3{,}5$;

б) $\frac{2}{3}x-1{,}2=-5{,}1$;

в) $-\frac{1}{4}x+5{,}2=1{,}3$;

г) $5x+\frac{3}{4}=-3{,}25$.

26. Знайдіть корінь рівняння.

а) $3x+5{,}1=-3{,}3$;

б) $\frac{1}{3}x-0{,}4=-3{,}6$;

в) $-\frac{1}{5}x+1{,}2=-3{,}4$;

г) $2x-3\frac{3}{4}=-1{,}35$.

27. Розв'яжіть рівняння.

а) $4y+3=6y-7$;

б) $y+14=-2y-7$;

в) $5-y=y-6$;

г) $3y-5=2y-13$.

28. Розв'яжіть рівняння.

а) $3y+5=7y-11$;

б) $2y-24=-y$;

в) $6-4y=y-18$;

г) $-7=2y+23$.

29. Розв'яжіть рівняння. Які з поданих рівнянь є рівносильними?

а) $4x=4x+18$;

б) $3x-4=3x-4$;

в) $6x-6x=-8$;

г) $12x=0$.

30. Розв'яжіть рівняння. Які з поданих рівнянь є рівносильними?

а) $3x-7=3x+8$;

б) $-2x-9+2x=-9$;

в) $5x-6=5x$;

г) $-7x+3=3$.

31. Розв'яжіть рівняння $\frac{6x+4}{5}=2x+1$, помноживши спочатку обидві його частини на 5.

32. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-9}{7}=x-2$, помноживши спочатку обидві його частини на 7.

33. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+3}{2}=\frac{2x-5}{3}$, помноживши спочатку обидві його частини на 6.

34. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x-1}{5}=\frac{x+2}{2}$, помноживши спочатку обидві його частини на 10.

35. Дано функцію $y=2x-6$. Не виконуючи побудови графіка цієї функції, знайдіть значення аргументу, за якого значення функції дорівнює:

а) -12; б) 25; в) 3,4; г) $-2,5$.

36. Дано функцію $y=-5x+2$. Не виконуючи побудови графіка цієї функції, знайдіть значення аргументу, за якого значення функції дорівнює:

а) -8; б) 27; в) 3,5; г) $-4,2$.

37. Вартість відправлення стандартної посилки становить 50 грн за оформлення замовлення та 50 копійок за кожен кілометр відстані перевезення. За відправлення стандартної посилки на відстань y км заплатили 137 грн 50 коп. Складіть рівняння для знаходження y. Розв'яжіть це рівняння.

38. Прокат електросамоката коштує 10 грн за розблокування та 1 грн 50 коп. за кожну хвилину користування. За прокат тривалістю x хвилин користувачка заплатила 26 грн 50 коп. Складіть рівняння для знаходження x. Розв'яжіть це рівняння.



39. Довжини сторін прямокутника дорівнюють 10 см і a см. Знайдіть a, якщо периметр прямокутника — 50 см.

40. Довжини сторін трикутника дорівнюють 12 см, b см і b см. Знайдіть b, якщо периметр трикутника — 78 см.

Достатній рівень

41. Розв'яжіть рівняння.

а) $5x+3-(2x-4)=x-2-(x+3)$;

б) $4x-2-(3x+8)=6+(-4x-8)$;

в) $4-2x-(5-3x)=x-1-(x-8)$;

г) $3x+5=-(-2x-7)+18$.

42. Розв'яжіть рівняння.

а) $y-1+(y-2)=-4-(y-3)$;

б) $19y-(2y-9)=4y-(8+4y)$;

в) $-4y-(5-y)=2y-10$;

г) $2y-(4y-11)=-10-4y$.

43. Знайдіть корінь рівняння.

а) $2(x+4)=15$;

б) $-5x=3(x-1)$;

в) $-2+3(x+1)=-4$;

г) $4(2-x)=3(x+1)$;

д) $5{,}2-2(x+1)=-3x+2{,}7$;

е) $0{,}7x+5(5x-1)=6{,}5+2{,}7x$;

ж) $3{,}1(1-3y)=0{,}4(y-14)-y$.

44. Знайдіть корінь рівняння.

а) $3(1-y)=21$;

б) $4(y+2)=-2y$;

в) $5-2(y+4)=-1$;

г) $-6(1-y)=2(y+2)$;

д) $3(y-3{,}2)+1{,}6=2y-12{,}7$;

е) $0{,}3(2y+1)-0{,}5(1{,}2y-7)=-4{,}2y+3$;

ж) $0{,}3(0{,}4y+0{,}2)+3{,}6y=3{,}42$.

45. Скільки коренів має рівняння?

а) $x = x + 4$;

б) $2x - 6 = 2(x - 3)$;

в) $4 + 5x = 2x + 3(x - 2)$;

г) $6 - 3x = 2(3 - x)$;

д) $1{,}7 - (x - 6{,}2) = -(8{,}5 + x)$;

е) $0{,}2(x - 3) + 0{,}2 = 2(0{,}1x + 0{,}3) - 1$.

46. Скільки коренів має рівняння?

а) $y - 2 = -2 + y$;

б) $4(y + 8) = 3y + 32$;

в) $5(1 - y) = 2 - 5y$;

г) $7(y - 3) - 2y = 5y - 21$;

д) $0{,}5y - 2 = 1{,}4 + 0{,}5y + 0{,}6$;

е) $0{,}8(0{,}5 - 2y) = 0{,}4 - 1{,}6y$.

47. Розв'яжіть рівняння.

а) $x : 3 + 2 = -8$;

б) $y : (-6) + 2 = -1$;

в) $\frac{3m}{4} - 40 = -35\frac{1}{2}$;

г) $-\frac{n}{5} + 3{,}2 = -6{,}4$.

48. Розв'яжіть рівняння.

а) $a : 2 - 5 = 7$;

б) $b : (-4) - 3 = -4$;

в) $\frac{7}{15}c - 50\frac{9}{12} = 19\frac{5}{20}$;

г) $-\frac{d}{8} + 2{,}25 = 8{,}5$.

49. Не виконуючи побудов, знайдіть абсцису точки перетину графіків функцій.

а) $y = 2x + 1$ і $y = 5$;

б) $y = -3x + 4$ і $y = 2x$;

в) $y = \frac{1}{2}x + 3$ і $y = \frac{1}{4}x$.

50. Не виконуючи побудов, знайдіть абсцису точки перетину графіків функцій.

а) $y = -3x + 7$ і $y = -2$;

б) $y = 4x - 2$ і $y = -2x$;

в) $y = \frac{1}{4}x - 2$ і $y = x - 1$.

51. Розв'яжіть рівняння $2x + 3 = x + 2$ графічно та за допомогою рівносильних перетворень. Переконайтеся в ідентичності відповідей.

52. Розв'яжіть рівняння $-4x+1=-3x-4$ графічно та за допомогою рівносильних перетворень. Переконайтеся в ідентичності відповідей.

53. Василько задумав число. До задуманого числа хлопець додав 5, суму помножив на 9, до добутку додав задумане число й одержав 225. Яке число задумав Василько?

54. Марійка задумала число. Задумане число вона збільшила вдвічі, додала половину задуманого числа, від суми відняла 10 і одержала 30. Яке число задумала Марійка?

55. Щоб повернути книжку до бібліотеки вчасно, Дмитро мав читати 40 сторінок щодня. Але Дмитро читав на 15 сторінок у день менше, тому повернув книжку на 6 днів пізніше. За скільки днів Дмитро мав повернути книжку?

56. Пані Ольга вишила картину до дня народження подруги. Вона планувала вишивати щодня 36 рядків, але кожного дня їй вдавалося вишити на 4 рядки більше запланованого, тому роботу вона виконала на 1 день раніше. За скільки днів пані Ольга планувала виготовити подарунок?



Високий рівень

57. За наведеною умовою складіть рівняння та знайдіть його розв'язок.

«Якщо до $\frac{1}{10}$ невідомого числа додати 2, то одержимо 0,8».

58. За наведеною умовою складіть рівняння та знайдіть його розв'язок.

«Якщо від $\frac{3}{10}$ невідомого числа відняти $10\frac{1}{10}$, то одержимо $15\frac{2}{5}$».

59. Наведіть приклад рівняння, рівносильного рівнянню $0,4x+2=-6$. Скільки таких прикладів можна навести? Чому?

60. Наведіть приклад рівняння, рівносильного рівнянню $5,4x-25=2$. Скільки таких прикладів можна навести? Чому?

61. Розв'яжіть рівняння.

а) $x(x+3)=x^2-6$;

б) $2x+3x^2-4=3x(x+1)$;

в) $(5+x)(3-x)=x(7-x)$;

г) $(2y-2)(y-1)=(2+y)(2y-1)$;

д) $4x^2-25=(x+1)(4x-3)+1$.

62. Розв'яжіть рівняння.

а) $y^2+1=y(y-2)$;

б) $-2y(1-y)=3y+1+2y^2$;

в) $x(2x-3)=(2x+1)(x+5)$;

г) $(2y-2)(y+1)=(4+y)(2y-3)$;

д) $8+(y+1)(3y-2)=(y-6)(3y+4)$.

63. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{2x-5}{9}+\frac{x}{3}=5$;

б) $\frac{3x+1}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{3-2x}{6}$;

в) $\frac{x+0,4}{4}-\frac{1+x}{2}=\frac{2x+1}{3}$;

г) $\frac{2x}{3}+\frac{2x+1}{6}=\frac{6x-18}{8}$;

д) $\frac{5x-6}{4}-\frac{x+11}{3}=\frac{7+4x}{2}$;

е) $\frac{6x+6}{8}-\frac{x+2}{4}-2=\frac{8x-3}{6}$.

64. Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{6x+7}{3}-\frac{5x-2}{4}=3;$

б) $\frac{9x-7}{4}-\frac{9x+13}{8}=\frac{3-x}{2}$;

в) $\frac{2x-1}{2}+\frac{2+x}{4}=\frac{x}{8};$

г) $\frac{5x+3}{5}-\frac{x-5}{6}=\frac{2x-1}{15}.$

65. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків функцій (якщо така точка існує).

а) $y=2x+3$ і $y=-x+6;$

б) $y=-5x-3$ і $y=-5x+2;$

в) $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ і $y=\frac{1}{2}x-2;$

г) $y=\frac{1}{8}x-\frac{3}{4}$ і $y=0{,}25x+0{,}75.$

66. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків функцій (якщо така точка існує).

а) $y=-3x-1$ і $y=x+3;$

б) $y=6x+1$ і $y=6x-8;$

в) $y=25x+14$ і $y=-11x-22;$

г) $y=\frac{1}{3}x$ і $y=-\frac{3}{4}x+2.$

67. Використовуючи графічний калькулятор, знайдіть корені рівняння $2x+3=x^2$. Виконайте перевірку.

68. Використовуючи графічний калькулятор, знайдіть корені рівняння $x^2=5x-6$. Виконайте перевірку.

69. У трьох шкільних кабінетах навчається 90 дітей. Кількість дітей у першому кабінеті становить 90 % від кількості дітей у другому, а кількість дітей у третьому кабінеті на 6 більша, ніж у першому. Скільки дітей у кожному кабінеті?



70. У новому будинку 64 квартири. Кількість однокімнатних квартир складає 80 % від кількості двокімнатних,

а кількість трикімнатних квартир на 8 більша, ніж кількість двокімнатних. Скільки в цьому будинку однокімнатних, двокімнатних, трикімнатних квартир?

71. Із двох міст, відстань між якими дорівнює 360 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. За 3 год після початку руху автомобілі зустрілися. Знайдіть швидкість руху кожного автомобіля, якщо швидкість руху одного з них була на 10 км/год більшою за швидкість руху іншого.

72. Із двох міст, відстань між якими дорівнює 1034 км, виїхали одночасно назустріч один одному два поїзди. За 9,4 год після початку руху поїзди зустрілися. Знайдіть швидкість руху кожного поїзда, якщо швидкість руху одного з них була на 10 км/год більшою за швидкість руху іншого.



Цікавинки від дідуся Тараса

Окремі розв'язування рівнянь були відомі ще в Стародавньому Єгипті за 2000 років до нашої ери. Зокрема, у знайдених математичних папірусах зустрічаються задачі, що розв'язуються за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною. У IX ст. до н. е. перський математик і астроном *Аль-Хорезмі* в трактаті «Кітаб аль-джебр ва-ль-мукабала» дав загальні правила розв'язування рівнянь першого степеня. «Аль-джебр» (з арабської — «відновлення») означає перенесення від'ємних членів рівняння з однієї частини в іншу зі зміною знака. Звідси й назва галузі математики, що вивчає методи розв'язування рівнянь, — *алгебра*.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Скориставшись додатковими джерелами інформації, зробіть невелике повідомлення про біографію Аль-Хорезмі.

2. Запитайте вчителя або вчительку інформатики, яке важливе поняття сучасної інформатики пов'язане з ім'ям Аль-Хорезмі. Поясніть суть цього поняття та наведіть приклади, як воно використовується в повсякденному житті та науці.

3. Спробуйте здогадатися, що в перекладі з арабської означає «ва-ль-мукабала». Яким чином воно пов'язане з «аль-джебр»?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Марина міркує: «Усі риби добре плавають. Гуска добре плаває. Отже, гуска — риба!» Чи правильно міркує Марина?

2. Сашко планує на підобідок купити в кав'ярні чай і смаколик. У меню кав'ярні є 4 види чаю і 6 видів смаколиків. Скільки різних варіантів підобідку є в Сашка?

3. Розкладіть поліном на множники.

а) $4xyz+2x^2yz^2$; б) $a^{20}-b^{30}$; в) $4m^4-8m^2k^2+4k^4$.

4. Побудуйте графік функції $y=-x+3$. Пряма, що є графіком цієї функції, ділить координатну площину на дві частини. Укажіть, які з наведених точок: $A(3;-5)$, $B(0;6)$, $C(-2;-4)$, $D(7;1)$ — розташовані відносно цієї прямої у тій самій частині площини, що й початок координат. Подумайте, яку спільну властивість мають такі точки.

5. Побудуйте в зошиті дві прямі a і b, які перетинаються в точці M, і точку K, яка не належить жодній із цих прямих. Через точку K проведіть прямі c і d, паралельні прямим a і b відповідно. Позначте точки перетину прямих a і d, b і c як L і P відповідно. Як би ви назвали чотирикутник $KLMP$? Відповідь обґрунтуйте.

§ 11. Рівняння, що розв'язуються за допомогою лінійних рівнянь. Математичні моделі



Цікава штука рівняння! Виявляється, за допомогою рівнянь можна вирішувати багато задач із реального життя! Тетянко, дивись, ось клумба на нашому шкільному подвір'ї. Наш завгосп сказав, що вона має форму квадрата, а її площа дорівнює 36 м^2. Я вирішив знайти довжину сторони цього квадрата і позначив її через x метрів. Тоді площа квадрата буде x^2 м^2. Оскільки я знаю площу клумби, то $x^2 = 36$. Вийшло рівняння! Але як його розв'язати?





У мене є ідея! Давай перенесемо число 36 у ліву частину рівняння й розкладемо одержаний там вираз на множники за формулою різниці квадратів:

$$x^2 = 36;\ x^2 - 36 = 0;\ (x-6)\cdot(x+6) = 0.$$



Щоб добуток дорівнював нулю, потрібно, щоб хоча б один із множників дорівнював нулю.

Тому або $x - 6 = 0$, або $x + 6 = 0$. Отже, рівняння має два корені: $x_1 = 6$ та $x_2 = -6$.



Але ж довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом! Тому, хоча рівняння має два корені, відповіддю до практичної задачі буде лише додатний корінь. Таким чином, сторона квадрата дорівнює 6 метрів. Дякую, Тетянко!



Будь ласка! Мені здається, що, *розв'язуючи задачі з реального життя, найчастіше діють так.*



- Спочатку життєву задачу зводять до математичної задачі.
- Потім розв'язують математичну задачу й отримують відповідь до неї.
- Нарешті перевіряють, чи може бути відповідь до математичної задачі відповіддю до початкової життєвої задачі.



Саме так, Тетянко! Такий спосіб розв'язування життєвих задач називають математичним моделюванням. А математичну задачу, до розв'язання якої зводиться розв'язання початкової задачі з реального життя, називають математичною моделлю цієї задачі.

Наприклад, рівняння $5x+200=3200$ було математичною моделлю задачі про з'ясування вартості речей, куплених для Тетянки, а рівняння $x^2=36$ — математичною моделлю задачі Петрика про довжину сторони квадратної клумби.

Хочу додати, що математичними моделями життєвих задач можуть бути не лише рівняння, а й послідовності дій, функції, діаграми, схеми тощо.





Рівняння $x^2=36$ не є лінійним, бо його ліва частина не є ані числом, ані мономом чи поліномом першого степеня. Але це рівняння *зводиться до лінійного рівняння* шляхом розкладання на множники.

Приклади

1. Розв'яжіть рівняння $16x^2 = 8x^3$.

Розв'язання.

Подане рівняння не є лінійним. Перенесемо вираз із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком і розкладемо одержаний вираз на множники:

$$16x^2 = 8x^3;\ 16x^2 - 8x^3 = 0;\ 8x^2(2-x) = 0.$$

Добуток дорівнює нулю, якщо принаймні один із його множників дорівнює нулю. Оскільки 8 не дорівнює нулю, то або $x^2 = 0$, або $2 - x = 0$.



Степінь із натуральним показником дорівнює нулю лише тоді, коли його основа дорівнює нулю.

Отже, це рівняння має два корені: $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$.

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Розв'язання.

Оскільки $5x = 2x + 3x$, то ліву частину рівняння можна розкласти на множники:

$$x^2 + 2x + 3x + 6 = 0;\ x(x+2) + 3(x+2) = 0;\ (x+2)(x+3) = 0.$$

Отже, або $x + 2 = 0$, або $x + 3 = 0$, звідки $x_1 = -2$ та $x_2 = -3$.



Перевірте себе!

1. Що може бути математичною моделлю задачі з реального життя? Наведіть приклади.
2. За якою схемою розв'язують задачі з реального життя, використовуючи математичне моделювання?
3. Наведіть приклади нелінійних рівнянь із однією змінною, розв'язування яких зводиться до розв'язування лінійних рівнянь. Яким чином відбувається це зведення?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Розв'яжіть рівняння, якщо відомо, що добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.

а) $(x+2)(x-7)=0$;

б) $(2x+6)(x-4)=0$;

в) $\left(\frac{1}{3}x-8\right)(4x-6)=0$;

г) $(12-2x)(3x+6)=0$.

2. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x-3)(x-5)=0$;

б) $(x+8)(3x+12)=0$;

в) $\left(\frac{1}{5}x-4\right)(3x+15)=0$;

г) $(3-3x)(x+16)=0$.

3. Винесіть спільний множник за дужки та розв'яжіть рівняння.

а) $x^2-7x=0$;

б) $x^2+12x=0$;

в) $2x^2-4x=0$;

г) $15x+3x^2=0$.

4. Винесіть спільний множник за дужки та розв'яжіть рівняння.

а) $y^2+8y=0$;

б) $y^2-4y=0$;

в) $6y^2+12y=0$;

г) $27y-3y^2=0$.

5. Винесіть спільний біном за дужки та розв'яжіть рівняння.

а) $2(y-3)+y(y-3)=0$;

б) $10(3+y)-5y(3+y)=0$;

в) $3y(4-2y)-6(4-2y)=0$.

6. Винесіть спільний біном за дужки та розв'яжіть рівняння.

а) $8(x-11)+x(x-11)=0$;

б) $9(x+40)-3x(x+40)=0$;

в) $3x(4+2x)+6(4+2x)=0$.

7. Мартуся дуже любить кататися на ковзанах. Вартість години катання становить 80 грн. Скільки годин може кататися Мартуся на ковзанах, якщо в неї є 240 грн? Складіть рівняння, що є математичною моделлю цієї задачі, та розв'яжіть його.



8. На виконання однієї вправи з домашнього завдання Данилко витрачає в середньому 5 хвилин. Скільки вправ задали додому Данилкові, якщо хлопчик витратив на їх розв'язання одну годину? Складіть рівняння, що є математичною моделлю цієї задачі, та розв'яжіть його.

Середній рівень

9. Розв'яжіть рівняння, скориставшись формулою:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

а) $y^2 - 5^2 = 0$;
в) $(3y)^2 - 3^2 = 0$;
б) $y^2 - 49 = 0$;
г) $(2y)^2 - 81 = 0$.

10. Розв'яжіть рівняння, скориставшись формулою:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

а) $x^2 - 3^2 = 0$;
в) $(2x)^2 - 5^2 = 0$;
б) $x^2 - 16 = 0$;
г) $(5x)^2 - 36 = 0$.

11. Розв'яжіть рівняння, скориставшись формулою:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

а) $x^2 - 8x + 4^2 = 0$;
в) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
б) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
г) $x^2 - 18x + 81 = 0$.

12. Розв'яжіть рівняння, скориставшись формулою:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

а) $y^2+6y+3^2=0$;
в) $y^2+14y+49=0$;
б) $y^2+12y+36=0$;
г) $y^2+20y+100=0$.

13. Тариф мобільного зв'язку «Дуже вигідний» включає всі мобільні послуги за 5 грн на добу. Перехід на цей тариф коштує 70 грн. Скільки днів пані Марина зможе користуватися мобільними послугами, перейшовши на цей тариф і заплативши 200 грн? Побудуйте до задачі дві математичні моделі: за допомогою виразу та за допомогою рівняння.



14. Фірма «Файні ровери» купує велосипеди по 9000 грн і здає їх напрокат по 50 грн за годину. За скільки годин прокату фірмі окупиться вартість одного велосипеда? Побудуйте до задачі дві математичні моделі: за допомогою виразу та за допомогою рівняння.

Достатній рівень

15. Розв'яжіть рівняння, розклавши вирази за допомогою формул скороченого множення.

а) $x^2-49=0$;
д) $x^2+12x+36=0$;
б) $4x^2-25=0$;
е) $4x^2-20x+25=0$;
в) $9x^2-25=11$;
ж) $81x^2+18x-9=-10$;
г) $16x^2+2=3$;
з) $4x^2-24x+6=-30$.

16. Розкладіть вирази на множники та розв'яжіть рівняння.

а) $25-y^2=0$;
д) $36y^2-12y+1=0$;
б) $9y^2-49=0$;
е) $25y^2+100y+100=0$;
в) $y^2-16=9$;
ж) $4y^2+4y=-1$;
г) $4y^2+4=5$;
з) $5x^2-10x-5=-10$.

17. Розв'яжіть рівняння.

а) $3|x|-15=0$; г) $2|x|+12=2$; ж) $|3x+1|=-5$;

б) $16-2|x|=0$; д) $|x+4|=2$; з) $|7x+14|-28=0$.

в) $0{,}5|x|-3=1$; е) $|2x-1{,}5|=0$;

18. Розв'яжіть рівняння.

а) $4|x|-12=0$; г) $3{,}2|x|+2{,}6=-3{,}8$; ж) $|2x+3|=-11$;

б) $24-6|x|=0$; д) $|x+9|=19$; з) $|5x+85|-25=0$.

в) $2{,}5|x|+3=8$; е) $|4x-1{,}6|=0$;

19. Улітку фірма одержала замовлення на встановлення кондиціонерів. У червні було замовлено 45 % від загальної кількості замовлених улітку кондиціонерів, у липні — $\frac{1}{5}$ від загальної кількості замовлених улітку кондиціонерів, а в серпні було замовлено 182 кондиціонери. Знайдіть, скільки замовлень на встановлення кондиціонерів отримала фірма влітку, створивши математичну модель задачі.

20. Протягом трьох тижнів в ательє виготовили 208 вишиванок, причому за другий тиждень виготовили на 15 % більше вишиванок, ніж за перший, а за третій тиждень — на 10 вишиванок більше, ніж за другий. Знайдіть, скільки вишиванок виготовили за перший тиждень, створивши математичну модель задачі.



Високий рівень

21. Розв'яжіть рівняння.

а) $x^2-3x+2=0$; б) $x^2+7x+6=0$; в) $2x^2-5x+3=0$.

22. Розв'яжіть рівняння.

а) $y^2-4y+3=0$; б) $y^2+2y-8=0$; в) $3y^2-5y+2=0$.

23. Розв'яжіть рівняння.

а) $9-2x+\frac{x^2}{9}=0$; б) $1+x+\frac{x^2}{4}=0$; в) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}-5=0$.

24. Розв'яжіть рівняння.

а) $4+2y+\frac{y^2}{4}=0$; б) $9-2x+\frac{x^2}{9}=16$; в) $\frac{y^2}{7}+\frac{4y}{7}-3=0$.

25. Розв'яжіть рівняння.

а) $|x+9|+(x+1)^2=x^2+2x+10$;

б) $\frac{|x-4|}{3}-\frac{3}{4}=0$;

в) $|3x+11|-x^2=-(x-2)(x+2)$.

26. Розв'яжіть рівняння.

а) $|x-5|+(2x-3)^2=4x^2-12x+19$;

б) $\frac{|x-6|}{6}-\frac{5}{9}=0$;

в) $(x-2)(x+2)+12=|x-8|+x^2$.

27. Довжина футбольного поля на стадіоні в селі Кольорове на 30 м більша за його ширину, а площа поля дорівнює 7000 м^2. Знайдіть довжину й ширину футбольного поля (у метрах), склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.



28. Оксана прочитала на обгортці шоколадки рекламний слоган: «Відчуй 150 см^2 насолоди!». Дівчинка знає, що шоколадка має форму прямокутника, довжина якого на 5 см більша за його ширину. Знайдіть розміри шоколадки (у сантиметрах), склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.



Цікавинки від дідуся Тараса

Україна має значні здобутки в розвитку алгебри як науки. Так, на початку XX ст. в Києві була заснована знана в усьому світі *алгебраїчна наукова школа Дмитра Граве*. Серед її представників — усесвітньо відомі математики *Отто Шмідт*, *Михайло Кравчук*, *Борис Делоне*, *Євген Ремез*, *Марк Крейн* та ін. Нині традиції цієї школи продовжують розвиватися в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Серед її представників можна відзначити *Юрія Дрозда*, *Володимира Кириченка*, *Анатолія Петравчука*, *Оксану Безущак* та ін.

Юрій Анатолійович Дрозд — український математик, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор. Працює в Інституті математики НАН України.

Оксана Омелянівна Безущак — доктор фізико-математичних наук, професор. Працює в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Національна академія наук (НАН) України — наукова самоврядна організація, що є найбільшим центром наукових досліджень в Україні. НАН України організовує та здійснює фундаментальні й прикладні дослідження з найважливіших проблем природничих, технічних, суспільних і гуманітарних наук. НАН України заснована в 1918 р.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Ознайомтеся з біографіями видатних математиків Дмитра Граве й Отто Шмідта та підготуйте невеликі повідомлення про цих учених. Які факти їх біографій вразили вас найбільше? Чому?

2. У 1992 р. ім'я українського математика Михайла Кравчука (1892—1942) було занесено ЮНЕСКО до Міжнародного календаря визначних наукових діячів, а у 2003 р. в Києві було відкрито пам'ятник цьому видатному вченому. У 2009 р. іменем Михайла Кравчука названо одну з київських вулиць. З'ясуйте, у яких галузях науки зараз використовують результати роботи цього видатного українця.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Дмитрик міркує: «Серед дерев у лісі навпроти мого будинку є хвойні. Кожне хвойне дерево взимку залишається зеленим. Отже, перше дерево, яке я зустріну взимку в лісі навпроти мого будинку, буде зеленим». Чи правильно міркує Дмитрик?

2. Щодня з міста А до міста Б є 5 рейсів поїзда, 12 рейсів автобуса та 2 рейси літака. Пані Юлія планує вирушити з міста А до міста Б протягом дня. Скільки різних варіантів поїздки в неї є?

3. Спростіть вирази.

а) $(x-2c)^2+4xc-x^2$;

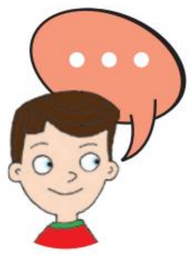
б) $(d+2y)(2y-d)+2d^2$;

в) $m(p+m)-p(m-p)$.

4. Побудуйте в ПДСК точки $A(-3;0)$, $B(1;7)$, $C(-2;2)$, $D(0;6)$. Укажіть, які із цих точок належать графіку функції: а) $y=2x+6$; б) $y=x^2+6$.

5. Є 4 відрізки, що мають довжини 3 см, 6 см, 9 см і 11 см. Із цих відрізків беруть три й складають із них трикутник. Перелічіть усі можливі варіанти таких «наборів» із трьох відрізків. Поміркуйте, скільки різних трикутників можна скласти із цих відрізків. Чому саме стільки?

§ 12. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Рівняння прямої



Тетянко, оце ламаю голову над проблемою. Батьки дали мені 600 грн і на всі ці гроші попросили купити в продуктовій крамниці гречаної та рисової крупи. Гречана крупа коштує 60 грн за 1 кг, а рисова — 40 грн за 1 кг. І я оце думаю, скільки якої крупи купити. Варіантів дуже багато!





Дійсно, варіантів багато. Нехай ти хочеш купити x кг гречаної крупи та y кг рисової. Тоді вартість твоєї покупки буде $60 \cdot x + 40 \cdot y$. Тобі потрібно знайти значення змінних, за яких виконується рівність $60x + 40y = 600$.



Це знову рівняння, але змінних у ньому не одна, а дві. Причому я б сказав, що це рівняння також лінійне, бо ліва його частина є поліномом першого степеня, а права частина — числом. Цікаво, як розв'язати таке рівняння?



Нумо спробуємо виразити одну змінну через іншу, використовуючи рівносильні перетворення. Для цього перенесемо моном $60x$ у праву частину рівняння з протилежним знаком: $40y = -60x + 600$. А потім поділимо ліву та праву

частини рівняння на 40: $y=-1{,}5x+15$. Таким чином ми одержали лінійну функцію. Тепер можна, надаючи значення змінній x, отримати значення змінної y. Наприклад, якщо $x=4$, то $y=-1{,}5\cdot4+15=-6+15=9$. Тож можеш брати 4 кг гречаної крупи й 9 кг рисової!



Чудово! Отже, упорядковану пару чисел $(4;9)$, де перше число позначає значення x, а друге — значення y, можна вважати розв'язком рівняння $y=-1{,}5x+15$. Але зверни увагу, що це рівняння має безліч розв'язків. Наприклад, якщо $x=8$, то $y=3$. Тому я можу купити також 8 кг гречаної крупи й 3 кг рисової, а впорядкована пара чисел $(8;3)$ також буде розв'язком рівняння $60x+40y=600$. До речі, інші варіанти теж можливі!



Так, усі розв'язки рівняння $60x+40y=600$ належать прямій, яка проходить через точки $A(4;9)$ і $B(8;3)$. Зобразимо її на координатній площині (рис. 12.1).

Координати кожної точки цієї прямої будуть розв'язком рівняння $60x+40y=600$. Тому можна вважати, що це рівняння є рівнянням зображеної прямої.

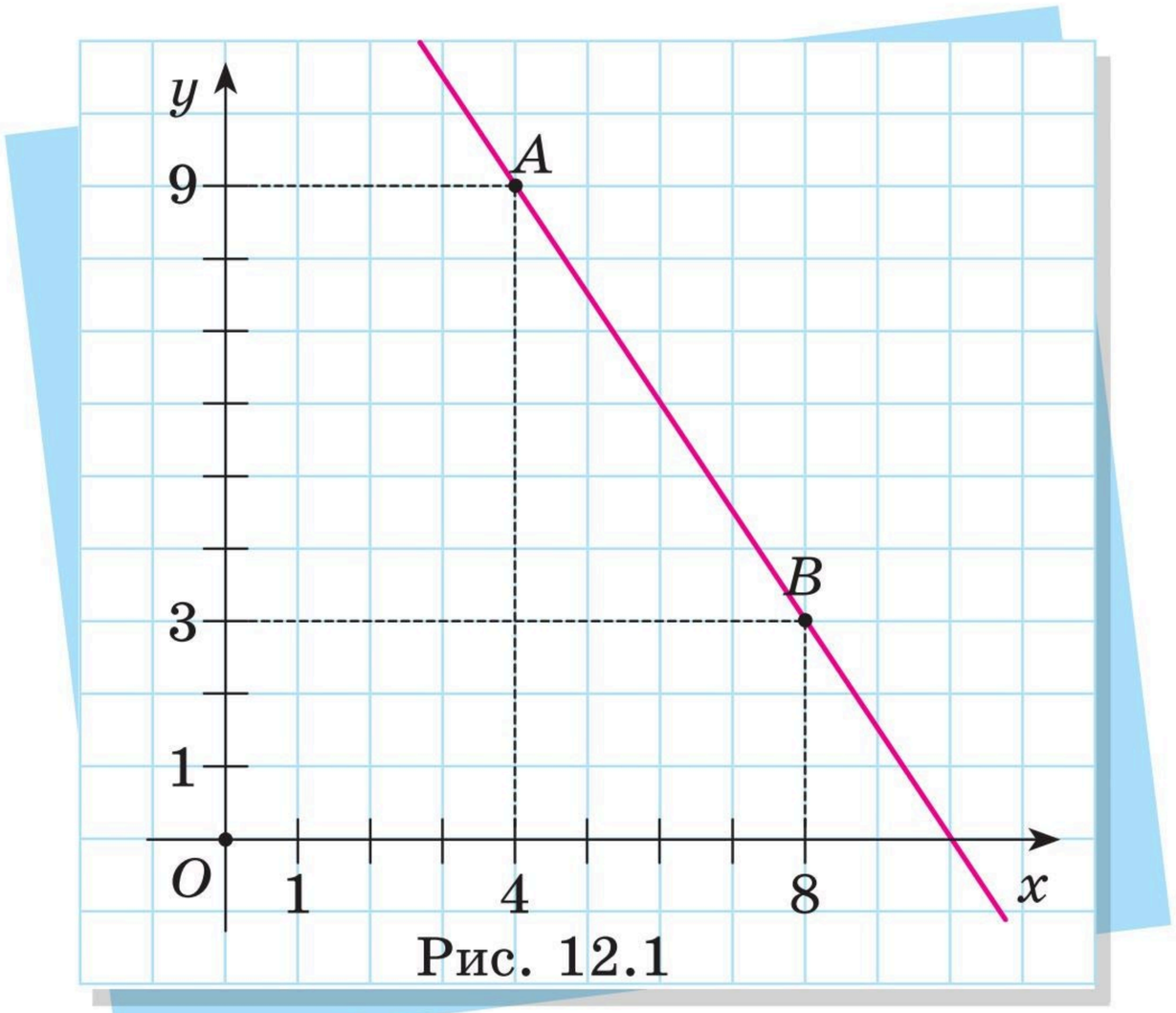


Рис. 12.1



Рівність, що містить дві змінні, для якої потрібно знайти невідомі значення змінних, за яких ця рівність буде

правильною, називають рівнянням із двома змінними. Наприклад, $2(x+y)=30$; $xy=64$; $x^2+y^3-2x=5$ тощо є рівняннями з двома змінними. Традиційно ці змінні позначають буквами x і y, але можливі й інші варіанти: $3t-2m^2=7$; $uv+2=u^2$ тощо.





Рівняння з двома змінними, ліва та права частини якого є або числом, або мономом чи поліномом першого степеня з двома змінними, називають лінійним рівнянням із двома змінними.

Принаймні одна із частин такого рівняння має містити змінні (ви вже знаєте, що числові рівності рівняннями не вважають). Наприклад, лінійними рівняннями з двома змінними є рівняння $5x-2y+1=0$; $4x=1-3y$; $12=y-2x$ тощо.





Розв'язком рівняння з двома змінними називають упорядковану пару чисел, які в результаті підстановки замість змінних у це рівняння дають правильну рівність.

Надалі вважатимемо всі пари чисел упорядкованими, причому перше число з пари чисел — це значення змінної x, а друге число — значення змінної y.



Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

Наприклад, пара чисел $(1;3)$ є розв'язком рівняння $5x-2y+1=0$, бо якщо $x=1$ і $y=3$, то одержуємо правильну рівність: $5\cdot1-2\cdot3+1=0$.



Щоб розв'язати рівняння з двома змінними, потрібно знайти всі його розв'язки (пари чисел) або довести, що їх немає.

Окремі рівняння з двома змінними мають безліч розв'язків, як, наприклад, розглянуте вище рівняння $60x+40y=600$. Рівняння $x^4+y^4=0$ має лише один розв'язок — пару чисел $(0;0)$, оскільки сума двох невід'ємних чисел може дорівнювати нулю тільки якщо $x=y=0$.
Рівняння $x^2+y^2=-10$ не має розв'язків, оскільки сума двох невід'ємних чисел не може бути від'ємною.



Лінійне рівняння з двома змінними зазвичай має *безліч розв'язків*, причому їх можна зобразити на площині. Пізніше ви зможете обґрунтувати, що кожне лінійне рівняння з двома змінними можна звести до *найпростішого вигляду:*

$$ax+by+c=0,$$

де x і y — змінні; a, b, c — деякі числа.

Якщо в рівнянні $ax+by+c=0$ числа a і b одночасно не дорівнюють нулю, то таке рівняння називають рівнянням прямої.



Дійсно, якщо $b\neq 0$, ми завжди можемо змінну y виразити через змінну x, використовуючи *рівносильні перетворення* — перенесення числа чи монома з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком, а також множення чи ділення обох частин рівняння на те саме число. Після цих перетворень одержуємо лінійну функцію, графіком якої є пряма.

Наприклад, зобразимо пряму, задану рівнянням $5x-2y+1=0$. Перенесемо з протилежними знаками моном $5x$ і число 1 у праву частину рівняння, а потім поділимо обидві частини рівняння на (-2). Маємо: $-2y=-5x-1$; $y=2{,}5x+0{,}5$. Потім побудуємо графік лінійної функції (рис. 12.2).



Якщо в рівнянні $ax+by+c=0$ числа $b=0$ і $a\neq 0$, одержимо лінійне рівняння $ax+c=0$, графіком якого є пряма, паралельна осі ординат (або власне вісь ординат, якщо $c=0$). Наприклад, для рівняння $2x-6=0$ після рівносильних перетворень маємо: $2x=6$; $x=3$. Цю умову задовольняють усі точки ПДСК, абсциса яких дорівнює 3. Вони лежать на прямій, паралельній осі ординат (рис. 12.3).

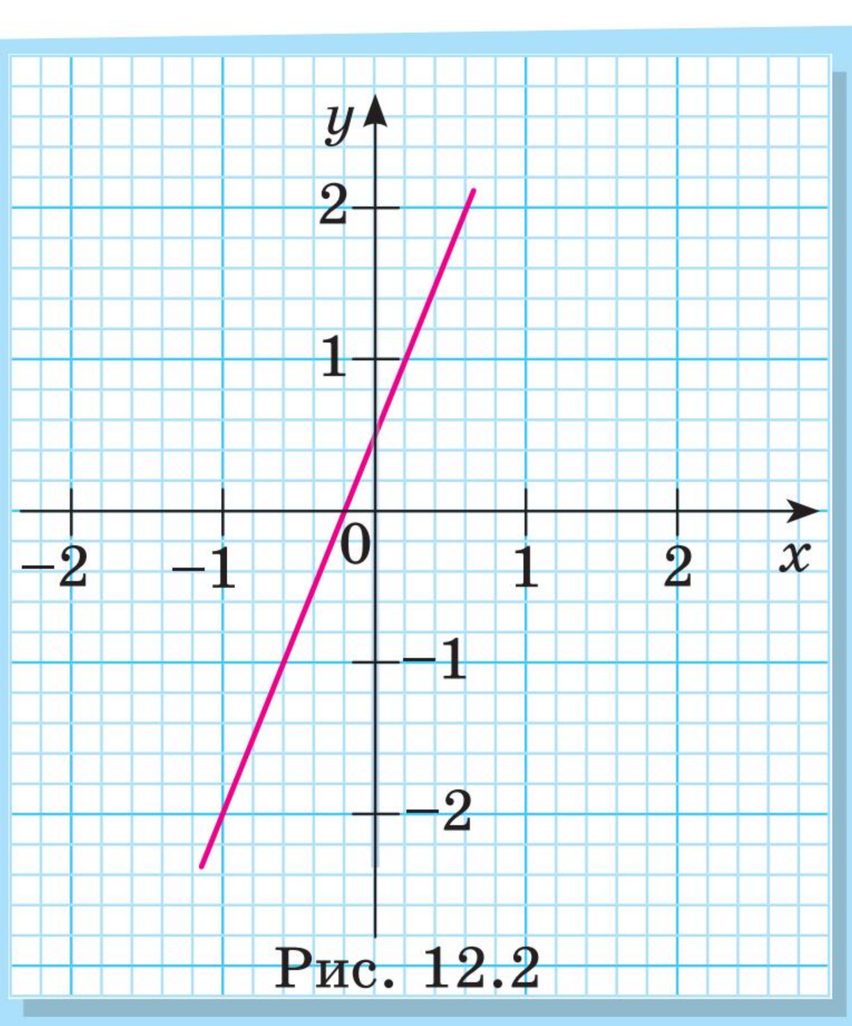


Рис. 12.2

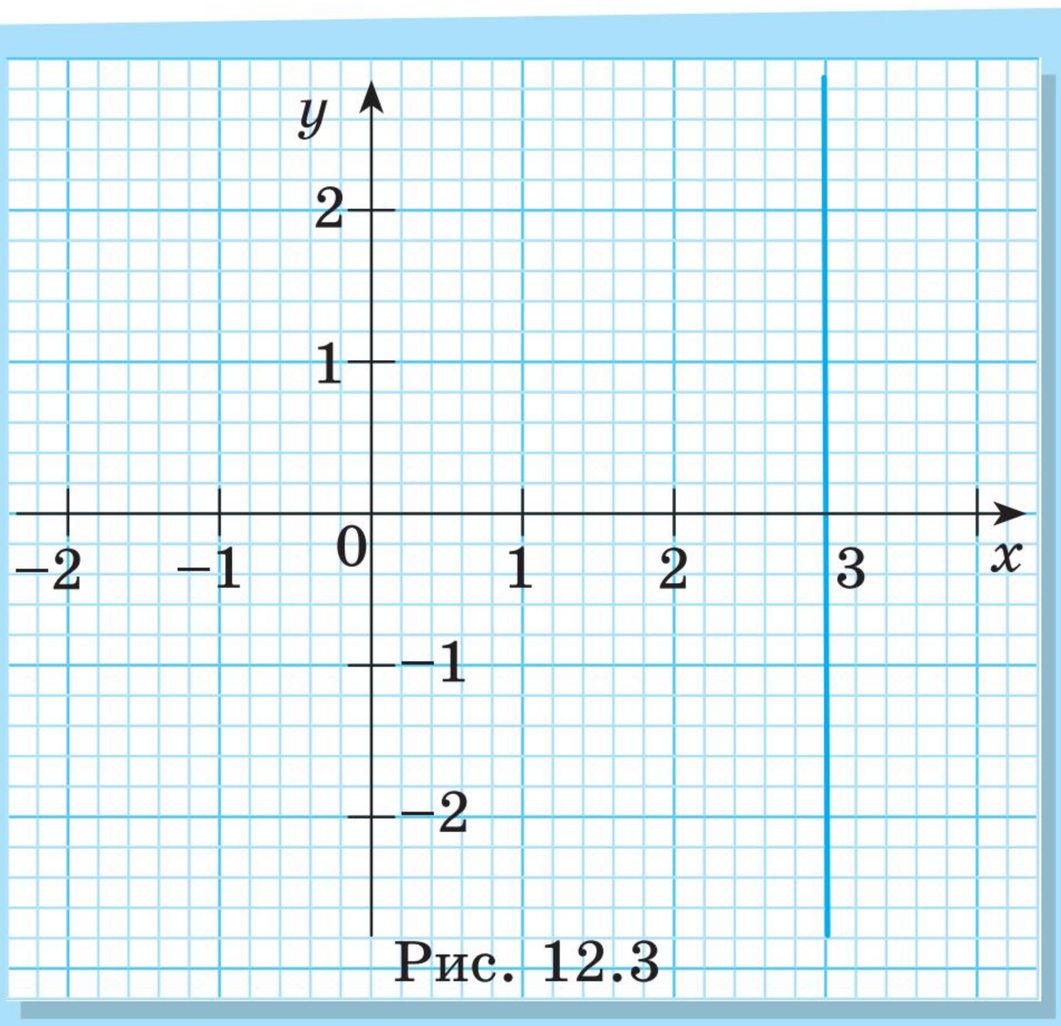


Рис. 12.3

Детальніше про побудову прямих:
https://rnk.com.ua/106096



Перевірте себе!

1. Наведіть приклади рівнянь із двома змінними.
2. Дайте означення розв'язку рівняння з двома змінними. Наведіть приклади.
3. Що означає «розв'язати рівняння з двома змінними»?
4. Які рівняння з двома змінними називають лінійними? Наведіть приклади.
5. Дайте означення графіка рівняння з двома змінними.
6. Дайте означення рівняння прямої. Наведіть приклади таких рівнянь.
7. Яким чином у ПДСК побудувати пряму, задану рівнянням?

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Укажіть рівняння з двома змінними.

а) $2x+6=3y+5$;
б) $y^3+2y-7=2x+3$;
в) $x+y-z=8$;
г) $x^2-4x+4=2y$;
д) $x+y=7$;
е) $2x-8=5y+16$;
ж) $3x>5y$.

2. Укажіть рівняння з двома змінними.

а) $x-y=y+2z$;
б) $2y+7x=4x-9$;
в) $x+y=8$;
г) $2x-1>y+5$;
д) $y^2+7x-4y=x-5$;
е) $5x^2+4y+12=0$;
ж) $2x-4z=y+7z$.

3. Які рівняння є лінійними рівняннями з двома змінними?

а) $2x+6y=1$;
б) $y=4x-3$;
в) $2x=y+8$;
г) $y^3=5x$;
д) $x-y=0$;
е) $2y-14=3x+6$;
ж) $x^2+3x+6=5y$.

4. Які рівняння є лінійними рівняннями з двома змінними?

а) $x^2+2x=6y$;
б) $3y=4x$;
в) $x+1=5y-6$;
г) $y-7x+3=0$;
д) $x+2y=0$;
е) $2y=8x+7$;
ж) $y^2-6x+3=6y-1$.

5. У рівняння $2x+3y-8=0$ підставте 1 замість x і підставте 2 замість y. Чи є пара чисел $(1;2)$ розв'язком цього рівняння?

6. У рівняння $4x-2y+5=0$ підставте 2 замість x і підставте 5 замість y. Чи є пара чисел $(2;5)$ розв'язком цього рівняння?

7. Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить графік рівняння $x-y+7=0$ через: а) точку $A(1;8)$; б) точку $B(5;1)$.

8. Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить графік рівняння $x+y-5=0$ через: а) точку $A(-2;-3)$; б) точку $B(4;1)$.

9. Не виконуючи побудови, визначте, чи належить точка $A(2;1)$ графіку рівняння $x+y+5=0$.

10. Не виконуючи побудови, визначте, чи належить точка $B(3;-5)$ графіку рівняння $x-y-8=0$.

11. Скільки точок належать графіку рівняння $5x-7y-2=0$?

12. Скільки точок належать графіку рівняння $4x+2y=8$?

13. Придумайте пару чисел. Чи є ця пара розв'язком рівняння $x+y-5=0$?

14. Придумайте лінійне рівняння з двома змінними. Чи проходить графік цього рівняння через точку $(2;5)$?

15. Перші дві години автомобіль їхав зі швидкістю x км/год, а наступні чотири години — зі швидкістю y км/год. За весь час руху автомобіль проїхав 350 км. Складіть рівняння, яке є математичною моделлю цієї ситуації.



16. Оксана витрачає 5 хв на розв'язання одного рівняння та 10 хв — на розв'язання однієї задачі. За одну годину Оксана розв'язала x рівнянь і y задач. Складіть рівняння, яке є математичною моделлю цієї ситуації.

Середній рівень

17. З рівняння $4x-3y-12=0$ за допомогою рівносильних перетворень виразіть: а) змінну x; б) змінну y.

18. З рівняння $3x+5y+15=0$ за допомогою рівносильних перетворень виразіть: а) змінну x; б) змінну y.

19. Визначте, чи проходить графік рівняння $3x-5y=8$ через точку:

а) $(1;-1)$; б) $(4;1)$; в) $(0;-2)$; г) $(6;2)$.

20. Визначте, чи проходить графік рівняння $2x-5y=-6$ через точку:

а) $(1;1)$; б) $(2;2)$; в) $(-3;0)$; г) $(3;2)$.

21. Укажіть два різні розв'язки рівняння $x+2y-3=0$.

22. Укажіть три різні розв'язки рівняння $6x-2y-4=0$.

23. Складіть три рівняння, для яких розв'язком є пара чисел $(2;1)$.

24. Складіть три рівняння, для яких розв'язком є пара чисел $(1;2)$.

25. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

а) $x+y-2=0$; в) $3x+2y-6=0$;

б) $x-y-1=0$; г) $-x+2y=0$.

26. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

а) $x+y-1=0$; в) $2x+5y-10=0$;

б) $x-y+2=0$; г) $2x-2y=0$.

27. Побудуйте графік рівняння $y=x-2$.

28. Побудуйте графік рівняння $y=2x+1$.

Достатній рівень

29. З'ясуйте, чи є розв'язком рівняння $9x-2y-13=0$ пара чисел:

а) $(2;2{,}5)$; б) $(1;2)$; в) $\left(\frac{1}{3};-5\right)$; г) $(-3;-7)$.

30. З'ясуйте, чи є розв'язком рівняння $-x+2y-8=0$ пара чисел:

а) $(-2;5)$; б) $(-8;0)$; в) $\left(-7;\frac{1}{2}\right)$; г) $(0{,}5;4{,}25)$.

31. Графік рівняння $2x+5y-30=0$ проходить через точку з абсцисою 5. Чому дорівнює ордината цієї точки?

32. Графік рівняння $2x-7y-20=0$ проходить через точку з ординатою -2. Чому дорівнює абсциса цієї точки?

33. Знайдіть координати точок перетину прямої $0{,}6x+0{,}4y-1{,}2=0$ з осями координат.

34. Знайдіть координати точок перетину прямої $0{,}7y - 0{,}3x - 2{,}1 = 0$ з осями координат.

35. Побудуйте графік рівняння.

а) $3x + 2y - 6 = 0$; б) $1{,}2y - 4{,}8 = 0$.

36. Побудуйте графік рівняння.

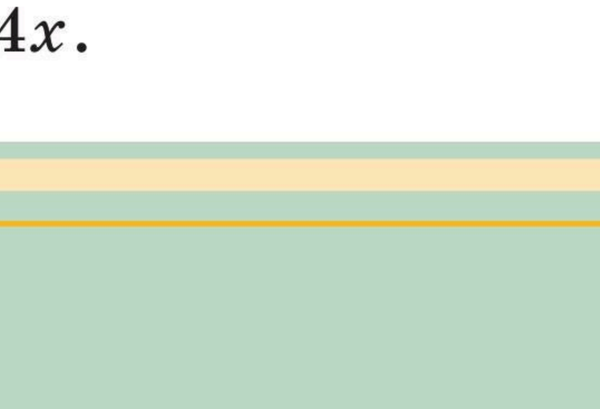
а) $4x + y - 3 = 0$; б) $2{,}5y - 7{,}5 = 0$.

37. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $y = 2$ та $y = -x + 4$.

38. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $y = -2x + 1$ та $y = 5$.

39. Пані Надія купила x кущів малини по 45 грн за кущ і y кущів полуниці по 15 грн за кущ. Усього вона витратила 165 грн. Складіть рівняння, що є математичною моделлю цієї ситуації. Наведіть два можливі варіанти, скільки кущів малини та скільки кущів полуниці могла купити пані Надія.

40. Пан Панас купив x курчат по 18 грн за одного й y гусят по 36 грн за одного. Усього він витратив 252 грн. Складіть рівняння, що є математичною моделлю цієї ситуації. Наведіть два можливі варіанти, скільки курчат і скільки гусят міг купити пан Панас.



Високий рівень

41. Обґрунтуйте, що подане рівняння не має розв'язків.

а) $x^2 - 4x + y^2 = -5$; б) $x^2 + y^2 + 10 = 6y$.

42. Обґрунтуйте, що подане рівняння не має розв'язків.

а) $x^2 + y^2 + 2y = -2$; б) $x^2 + y^2 + 3 = 4x$.

43. Розв'яжіть рівняння та побудуйте його графік.

а) $(x-4)^2+(y+3)^2=0$; б) $|x+4|+|y-5|=0$.

44. Розв'яжіть рівняння та побудуйте його графік.

а) $(x+2)^2+(y-4)^2=0$; б) $|x-1|+|y+3|=0$.

45. Розв'яжіть рівняння та побудуйте його графік.

а) $x^2+y^2-6x+2y+10=0$; б) $4x^2+y^2=4x+10y-26$.

46. Розв'яжіть рівняння та побудуйте його графік.

а) $x^2+y^2-4x-8y+20=0$; б) $x^2+9y^2=2x+6y-2$.

47. Використовуючи означення графіка та розв'язків рівняння з двома змінними, побудуйте графік рівняння.

а) $3x+2y=2y+3x$; б) $2x-8y=2(x-4y)$.

48. Використовуючи означення графіка та розв'язків рівняння з двома змінними, побудуйте графік рівняння.

а) $7x+5y=5y+7x$; б) $3x-9y=3(x-3y)$.

49. Побудуйте графік рівняння, розклавши на множники його ліву частину.

а) $xy-2y=0$; б) $2xy+x^2=0$.

50. Побудуйте графік рівняння, розклавши на множники його ліву частину.

а) $2xy+y=0$; б) $xy+y^2=0$.

51. Побудуйте графік рівняння, розклавши на множники його ліву частину.

а) $x^2-y^2=0$; б) $x^2-y^2+2x+1=0$.

52. Побудуйте графік рівняння, розклавши на множники його ліву частину.

а) $4x^2-9y^2=0$; б) $x^2-y^2-6x+9=0$.



Цікавинки від дідуся Тараса

З матеріалу § 12 ви дізналися, що прямі на площині можна задавати рівняннями. Розділ математики, у якому властивості геометричних фігур вивчають засобами алгебри, називають *аналітичною геометрією*. Створення аналітичної геометрії приписують уже відомому вам французькому математику та філософу *Рене Декарту*, який виклав її основи у своєму трактаті «Міркування про метод» (1637 р.). Значний внесок у розвиток цієї теорії зробили *Ісаак Ньютон* (1642–1727), *Джеймс Стірлінг* (1692–1770), *Алексі Клод Клеро*, *Леонард Ойлер*, *Жозеф-Луї Лагранж*, *Гаспар Монж* (1746–1818) та ін.

Алексі Клод Клеро (1713–1765) — французький математик, фізик, астроном, геодезист. Свою першу наукову роботу написав у 12-річному віці.

Леонард Ойлер (1707–1783) — швейцарський математик і фізик. Ученого вважають найвидатнішим математиком XVIII ст.

Жозеф-Луї Лагранж (1736–1813) — видатний французький математик, фізик, астроном.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

Використовуючи додаткові джерела інформації, ознайомтеся з біографією Ісаака Ньютона та підготуйте невелике повідомлення. Який факт біографії вченого вразив вас найбільше? Чому? На вашу думку, ким Ісаак Ньютон був більше — фізиком чи математиком? Відповідь обґрунтуйте!



Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Знайдіть значення виразу $2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{7}+3\frac{1}{2}:4\frac{1}{5}$.

2. У класі навчаються 12 хлопчиків і 13 дівчаток. Під час уроку математики вчитель навмання викликає до дошки одну дитину. Знайдіть імовірність того, що це буде:
а) хлопчик; б) дівчинка.

3. Остап міркує так: «Усі собаки мають чотири лапи. Біля входу в крамницю сидить рудий пес. Отже, він також має чотири лапи». Чи правильно міркує Остап?

4. Зобразіть у зошиті довільний чотирикутник. Виміряйте довжини сторін одержаного чотирикутника й обчисліть його периметр. Складіть задачу на знаходження сторін цього чотирикутника за відомим периметром.

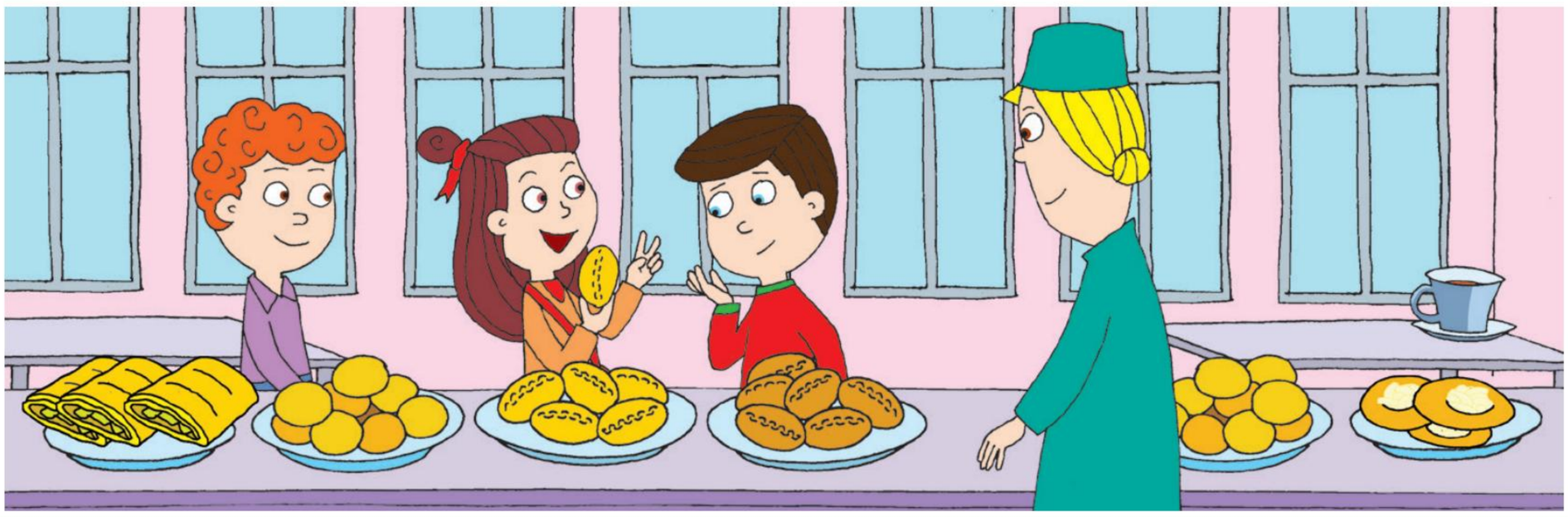
5. Знайдіть, яке число позначено знаком питання.

КОЛЕСО	СЕЛО	5432
МОРКВА	КОРА	4236
ВІХОЛА	ВІХА	?

§ 13. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними



Петрику, допоможи розібратися! Учора купила в шкільному буфеті 1 пиріжок із картоплею та 2 пиріжки з капустою й заплатила за все 34 грн. А сьогодні купила 1 пиріжок із капустою та 2 пиріжки з картоплею й заплатила за все 32 грн. Ціни на пиріжки за ці два дні не змінювалися. Цікаво, скільки коштує один пиріжок із капустою, а скільки — з картоплею?





А спробуємо знову використати рівняння з двома змінними! Нехай ціна пиріжка з картоплею x грн, а пиріжка з капустою — y грн. Тоді першого дня ти заплатила $(x+2y)$ грн, а другого — $(2x+y)$ грн. За твоїми даними $x+2y=34$ і $2x+y=32$. Потрібно знайти спільний розв'язок цих двох рівнянь! Але як це зробити?



У мене є ідея. Використаємо рівносильні перетворення та виразимо з другого рівняння змінну y через змінну x: $y=32-2x$. Оскільки ми шукаємо *спільні розв'язки* двох рівнянь, то підставимо одержаний вираз у перше рівняння: $x+2(32-2x)=34$. Ми одержали рівняння, яке вже вміємо розв'язувати:

$x+64-4x=34;\ -3x+64=34;\ -3x=64-34;\ -3x=-30;\ x=10.$

Тепер одержане значення змінної x підставимо у вираз $y=32-2x$; маємо: $y=32-2\cdot10=32-20=12$. Отже, пиріжок із картоплею коштує 10 грн, а пиріжок із капустою — 12 грн. Дякую, Петрику!



Будь ласка, але якось це все надто довго виходить. Цікаво, чи можна швидше? Наприклад, ми точно знаємо, що 3 пиріжки з картоплею та 3 пиріжки з капустою коштують разом 66 грн — саме стільки ти витратила на пиріжки за два дні. Тоді 1 пиріжок із картоплею й 1 пиріжок із капустою разом будуть коштувати $66:3=22$ грн. Першого дня ти купила 1 пиріжок із картоплею і 2 пиріжки з капустою за 34 грн. Отже, 1 пиріжок із капустою коштує $34-22=12$ грн. А другого дня ти купила 1 пиріжок із капустою і 2 пиріжки з картоплею за 32 грн. Отже, 1 пиріжок із картоплею коштує $32-22=10$ грн.



Дійсно, цей спосіб вимагає меншої кількості перетворень. По суті, ми тут додаємо чи віднімаємо рівняння *почленно*: до лівої чи від лівої частини першого рівняння відповідно додаємо чи віднімаємо ліву частину другого рівняння, а до правої чи від правої частини першого рівняння відповідно додаємо чи віднімаємо праву частину другого рівняння. Але чи можна так робити?



Запитаємо про це вчителів! Можливо, ще якісь способи розв'язування твоєї задачі знайдуться!



Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівнянь із двома змінними, то говорять, що потрібно розв'язати систему цих двох рівнянь. Для запису системи рівнянь використовують фігурну дужку. Для прикладу Петрика і Тетянки система рівнянь виглядає так: $\begin{cases} x+2y=34, \\ 2x+y=32. \end{cases}$



Розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними означає знайти всі їх спільні розв'язки (пари чисел) або довести, що їх немає.

Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+2y=34, \\ 2x+y=32 \end{cases}$ є пара чисел $(10;12)$. Дійсно, якщо $x=10$, $y=12$, то обидва рівняння системи перетворюються на правильні рівності: $10+2\cdot 12=34$ і $2\cdot 10+12=32$.



Дві системи рівнянь із двома змінними називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються.

До рівносильних перетворень системи двох рівнянь із двома змінними відносять:

- рівносильні перетворення кожного окремого рівняння системи: перенесення з протилежним знаком числа чи монома з однієї частини рівняння до іншої; множення або ділення лівої та правої частин рівняння на те саме число, відмінне від нуля;
- підстановку в одне з рівнянь системи значення змінної, вираженої з іншого рівняння цієї системи;
- заміну одного з рівнянь системи на суму або різницю двох рівнянь цієї системи.

Таким чином, обидва способи розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x+2y=34, \\ 2x+y=32, \end{cases}$ запропоновані Тетянкою і Петриком, є можливими та правильними. Спосіб Тетянки називають способом підстановки, а спосіб Петрика — способом додавання.



Наведемо ще один приклад розв'язування системи рівнянь цими двома способами. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x-3y=7, \\ 3x+2y=10. \end{cases}$

Спосіб підстановки. Виразимо змінну x через змінну y із першого рівняння системи: $x=3y+7$. У друге рівняння системи підставимо замість x вираз $3y+7$ і розв'яжемо одержане рівняння: $3(3y+7)+2y=10$; $9y+21+2y=10$; $11y+21=10$; $11y=10-21$; $11y=-11$; $y=-1$.

Підставивши одержане значення y в рівняння $x=3y+7$, маємо: $x=3\cdot(-1)+7=-3+7=4$. Отже, розв'язком поданої системи рівнянь є пара чисел $(4;-1)$.

Спосіб додавання. Помножимо ліву та праву частини першого рівняння на 2, а ліву та праву частини другого

рівняння на 3 й одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 2x-6y=14, \\ 9x+6y=30. \end{cases}$

Додамо ліві та праві частини обох рівнянь одержаної системи: $2x-6y+9x+6y=14+30$. Після зведення подібних доданків маємо: $11x=44;\ x=4$.

На рівняння $11x=44$ можна замінити будь-яке рівняння початкової системи $\begin{cases} x-3y=7, \\ 3x+2y=10, \end{cases}$ тому значення $x=4$ також можна підставити в будь-яке рівняння початкової системи. Підставимо це значення в друге рівняння початкової системи: $3\cdot 4+2y=10$, звідки маємо: $12+2y=10;\ 2y=10-12;\ 2y=-2;\ y=-1$.

Тобто розв'язком початкової системи рівнянь є пара чисел $(4;-1)$. Відповідь до системи можна записати й таким чином: $\begin{cases} x=4, \\ y=-1. \end{cases}$



Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними можна розв'язувати й графічним способом, оскільки кожне з таких рівнянь задає пряму на площині.

Наприклад, розв'яжемо графічно систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x-y=2, \\ x+2y=6. \end{cases}$ Для цього побудуємо в прямокутній системі координат графіки обох рівнянь системи та знайдемо координати точки їх перетину. Для побудови кожної з прямих зручно взяти точки на осях координат, які належать їх графікам. Для першої прямої це точки $(0;-2)$ і $(1;0)$, а для другої прямої — точки $(0;3)$ і $(6;0)$ (рис. 13.1).

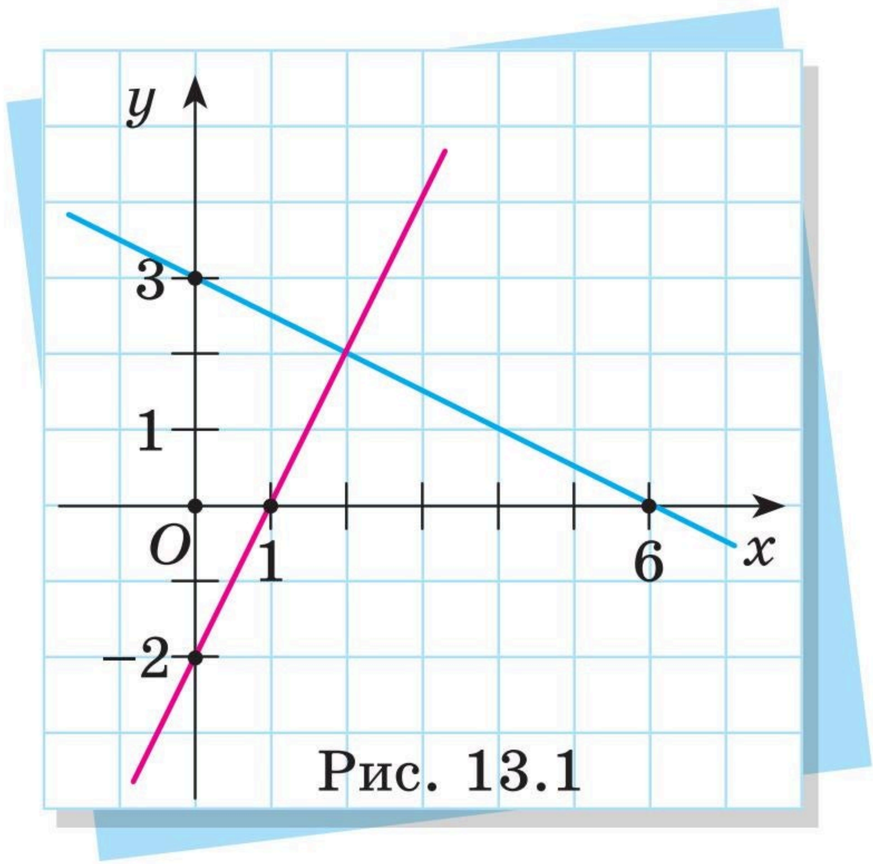


Рис. 13.1

З рис. 13.1 бачимо, що ці дві прямі перетинаються в точці $(2;2)$, тобто $\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$

Виконаємо *перевірку*, підставивши відповідні значення в кожне з рівнянь системи: $2\cdot 2-2=4-2=2$; $2+2\cdot 2=2+4=6$. Отже, наведена пара чисел дійсно є розв'язком заданої системи рівнянь.



До речі, використовуючи графічний калькулятор, можна розв'язувати графічним способом і більш складні системи двох рівнянь із двома змінними.

Детальніше про це:
https://rnk.com.ua/106097







Перевірте себе!

1. Наведіть приклади систем рівнянь із двома змінними.
2. Що означає розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними?
3. Дайте означення рівносильних систем рівнянь із двома змінними.
4. Які перетворення систем рівнянь із двома змінними відносять до рівносильних?
5. Перелічіть способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Які з поданих систем є системами двох лінійних рівнянь із двома змінними?

а) $\begin{cases} 3x+3y-6=0, \\ 4x-5y+1=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y=5-x, \\ 4x-y=y-6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+3y=11, \\ x+y=4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y<x-5, \\ x+2y>6. \end{cases}$

2. Які з поданих систем є системами двох лінійних рівнянь із двома змінними?

а) $\begin{cases} x=3y-4, \\ 2x-5y=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2+3y=x-21, \\ y=5x-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2y-x<0, \\ x>5y-3x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x-6y-11=0, \\ x-3y+8=0. \end{cases}$

3. У системі рівнянь $\begin{cases} x-y-1=0, \\ 2x+y-8=0 \end{cases}$ підставте 3 замість x і підставте 2 замість y. Чи є пара чисел $(3;2)$ розв'язком цієї системи рівнянь?

4. У системі рівнянь $\begin{cases} 5x-y=2, \\ 7x+2y=13 \end{cases}$ підставте 1 замість x і підставте 3 замість y. Чи є пара чисел $(1;3)$ розв'язком цієї системи рівнянь?

5. Значення змінної x із першого рівняння системи підставте в друге рівняння. Знайдіть значення змінної y, розв'язавши друге рівняння системи.

а) $\begin{cases} x=2, \\ 3x+y=15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=3, \\ 4x+y=17. \end{cases}$

6. Значення змінної y із першого рівняння системи підставте в друге рівняння. Знайдіть значення змінної x, розв'язавши друге рівняння системи.

а) $\begin{cases} y = 3, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 1, \\ x + 5y = 24. \end{cases}$

7. Додайте два рівняння, тобто ліву й праву частини першого рівняння додайте відповідно до лівої та правої частин другого рівняння. Розв'яжіть одержане рівняння.

а) $2x + y - 4 = 0$ і $x - y - 11 = 0$;

б) $-3x + 2y = 7$ і $3x + 3y = 13$;

в) $3x = -5y - 9$ і $x = 5y + 13$.

8. Додайте два рівняння. Розв'яжіть одержане рівняння.

а) $x - 2y + 6 = 0$ і $3x + 2y + 18 = 0$;

б) $-x + y = 4$ і $x - 3y = 10$;

в) $2x = 4y - 9$ і $3x = -4y + 14$.

9. У кошику лежать 20 плодів: x груш і y яблук. Запишіть цю умову у вигляді рівняння. Відомо, що груш у кошику на 6 більше, ніж яблук. Запишіть цю умову у вигляді рівняння. Складіть систему двох рівнянь для знаходження значень x і y.

10. Тетянка купила 25 зошитів: x зошитів у лінійку та y зошитів у клітинку. Запишіть цю умову у вигляді рівняння. Зошитів у клітинку Тетянка купила в чотири рази більше, ніж зошитів у лінійку. Запишіть цю умову у вигляді рівняння. Складіть систему двох рівнянь для знаходження значень x і y.



Середній рівень

11. Побудуйте графіки рівнянь заданої системи рівнянь і з'ясуйте, чи має ця система розв'язок, і, якщо має, знайдіть його.

а) $\begin{cases} y = 2, \\ y = x + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 3, \\ y = 2x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x - 2, \\ y = x + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ y = -1. \end{cases}$

12. Побудуйте графіки рівнянь заданої системи рівнянь і з'ясуйте, чи має ця система розв'язок, і, якщо має, знайдіть його.

а) $\begin{cases} y = 3, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 1, \\ y = 2x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x - 2, \\ y = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x - 1, \\ y = x + 3. \end{cases}$

13. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} x = 2, \\ x + y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 1, \\ 3x - 2y = -1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = 2y, \\ x + 3y = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 3, \\ x + y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 4y = -10, \\ y = -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = 3x, \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

14. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} x = -1, \\ x - y = -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 2, \\ 2x + y = -5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = 3y, \\ x + 4y = -21; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 2, \\ x + y = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + y = 13, \\ y = -2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = 5x, \\ -x + y = 20. \end{cases}$

15. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} 3x - 2y = -2, \\ 5x + 2y = 18; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y = 9, \\ -3x - 5y = -9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 2x + 5y = -8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x + 5y = -1, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$

16. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} 6x-2y=10, \\ 5x+2y=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 25x-5y=25, \\ -x+5y=-1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x+56y=-16, \\ 8x-5y=-16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x-9y=40, \\ 6x+2y=29. \end{cases}$

17. Сума двох чисел дорівнює 21, а різниця — 13. Знайдіть ці два числа, склавши систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

18. Бабуся з Марійкою зліпили 72 вареники, причому бабуся зліпила на 24 вареники більше, ніж Марійка. З'ясуйте, скільки окремо вареників зліпила бабуся, а скільки — Марійка, склавши систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

19. Пиріжок із вишнями дорожчий за пиріжок із капустою на 4 грн. За 2 пиріжки з капустою та 5 пиріжків із вишнями заплатили разом 76 грн. Знайдіть, скільки коштують окремо 1 пиріжок із капустою та 1 пиріжок із вишнями, склавши систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

20. У 7-А класі навчалися 33 учні й учениці. Після того як двоє хлопців перейшли до іншої школи, а в 7-А прийшла ще одна дівчина, дівчат і хлопців у класі стало порівну. Знайдіть, скільки дівчат і скільки хлопців навчалося в 7-А класі спочатку, склавши систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

Достатній рівень

21. Побудуйте графіки рівнянь заданої системи рівнянь і з'ясуйте, чи має ця система розв'язок, і, якщо має, знайдіть його.

а) $\begin{cases} 2x-y=6, \\ x+2y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 2x-3y=-6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-2y=6. \end{cases}$

22. Побудуйте графіки рівнянь заданої системи рівнянь і з'ясуйте, чи має ця система розв'язок, і, якщо має, знайдіть його.

а) $\begin{cases} x-y=4, \\ 2x-2y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 4x+2y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 6x-2y=8. \end{cases}$

23. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 3x+8y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-6y=-8, \\ 3x+5y=16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x-y=11, \\ -2x+5y=17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-3y=2, \\ 5x+2y=24. \end{cases}$

24. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} 6x-y=-1, \\ 2x-3y=-11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x-3y=10, \\ 3x+2y=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+4y=12, \\ 2x+7y=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8x-5y=-11, \\ 5x-4y=-6. \end{cases}$

25. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} 10x+2y=14, \\ 7x-4y=-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x-5y=23, \\ 2x-7y=13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10x+2y=12, \\ -5x+3y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-5y=-10, \\ 3x-2y=3. \end{cases}$

26. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 12x+7y=-26; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x-13y=22, \\ 4x+6y=-2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+15y=100, \\ 4x-3y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x+6y=9, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$

27. Різниця двох чисел дорівнює 12. Якщо перше число збільшити на 2, а друге зменшити на 10, то перше число стане в 9 разів більше, ніж друге. Знайдіть два задані числа, склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.

28. Якщо перше з двох чисел збільшити в 3 рази, а друге зменшити на 6, то їх сума дорівнюватиме 24. Якщо від першого числа відняти 5, а друге збільшити в 3 рази, то сума одержаних чисел дорівнюватиме 21. Знайдіть два задані числа, склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.

29. Периметр спортивного майданчика прямокутної форми дорівнює 430 м, причому довжина майданчика на 35 м більша за його ширину. Обчисліть площу спортивного майданчика, склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.

30. Периметр прямокутника дорівнює 88 см, причому ширина прямокутника на 6 см менша від його довжини. Знайдіть площу прямокутника, склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.



Високий рівень

31. Побудуйте графіки рівнянь заданої системи рівнянь. Чи має ця система розв'язок? Якщо так, то скільки цих розв'язків?

а) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=7, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x-3y=9, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

32. Побудуйте графіки рівнянь заданої системи рівнянь. Чи має ця система розв'язок? Якщо так, то скільки цих розв'язків?

а) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 6x+4y=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x+2y=8, \\ 3x+y=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x-2y=4, \\ 3x+y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y=6, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

33. Спростіть систему рівнянь і розв'яжіть її зручним способом.

а) $\begin{cases} \dfrac{5x}{6}=5-\dfrac{3y}{4}, \\ \dfrac{7x}{3}=10+\dfrac{3y}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x-5y=1, \\ \dfrac{3x-y}{4}+\dfrac{y-1}{2}=-4{,}75; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3(x+y)=48+2(x-y), \\ 2x-2y=120-4(x+y); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3+y=2(x-y)+x, \\ (x-y)^2-x(x-2y)=(y-1)(y+1)-x-y. \end{cases}$

34. Спростіть систему рівнянь і розв'яжіть її зручним способом.

а) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=8+\dfrac{x-y}{3}, \\ \dfrac{x-y}{4}=11-\dfrac{x+y}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{6}-\dfrac{3y-7}{8}=3, \\ \dfrac{5x-4}{6}-\dfrac{2y+1}{6}=\dfrac{2x-1}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(3x-1)+9=3x(x+2)+2x, \\ 2(x+y)-7(2x+y)+17=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5(x+y)+15=3(2x-y), \\ (x-y)(x+y)+2(x+y^2)=x^2+y^2-3y-8. \end{cases}$

35. Спростіть рівняння та знайдіть розв'язок системи рівнянь зручним способом.

а) $\begin{cases} 2x-3y=-4,5, \\ 3x+2y=9,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=90, \\ 1,05x+y=92; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+4(x+1)=10, \\ x-5(y-1)=5y-22; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(2x-y)=x-y+29, \\ 5(x+2y)-x(x-2)=y-x^2+79. \end{cases}$

36. Спростіть рівняння та знайдіть розв'язок системи рівнянь зручним способом.

а) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 2(x-y)=x-5y+3,4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3,5x+0,5y=3, \\ -5x+3,2y=1,8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12x-2y=-2x+1420, \\ 3(x-y)-2(x+5y)=230; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-1)^2-y=x^2+2, \\ x(y+1)+5x=y+y(x-1)+6. \end{cases}$

37. До рівняння $x-y=3$ доберіть таке друге лінійне рівняння, щоб одержана система: а) мала один розв'язок; б) не мала розв'язку; в) мала безліч розв'язків.

38. До рівняння $2x+y=5$ доберіть таке друге лінійне рівняння, щоб одержана система: а) мала один розв'язок; б) не мала розв'язку; в) мала безліч розв'язків.

39. За допомогою рівносильних перетворень зведіть систему рівнянь до системи лінійних рівнянь і розв'яжіть її.

а) $\begin{cases}(x-1)(y-1)=x(y-2),\\(x-4)^2+y^2=x^2+(y-2)^2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+1)(y+10)=(x+9)y,\\x^2+(y+5)^2=(x+2)^2+(y+1)^2.\end{cases}$

40. За допомогою рівносильних перетворень зведіть систему рівнянь до системи лінійних рівнянь і розв'яжіть її.

а) $\begin{cases}x(y+2)=(x-4)(y-2),\\(x-4)^2+(y+3)^2=(x-1)^2+(y+4)^2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+2)(y+3)=(x-10)y,\\(x+2)^2+(y+4)^2=(x+3)^2+(y+1)^2.\end{cases}$

41. Знайдіть усі значення a, за яких система рівнянь:

а) $\begin{cases}2x-y=2,\\6x+ay=4\end{cases}$ не має розв'язку;

б) $\begin{cases}x+2y=6,\\ax+8y=24\end{cases}$ має безліч розв'язків.

42. Знайдіть усі значення a, за яких система рівнянь:

а) $\begin{cases}3x+2y=5,\\ax+6y=8\end{cases}$ не має розв'язку;

б) $\begin{cases}5x-y=10,\\x+ay=2\end{cases}$ має безліч розв'язків.

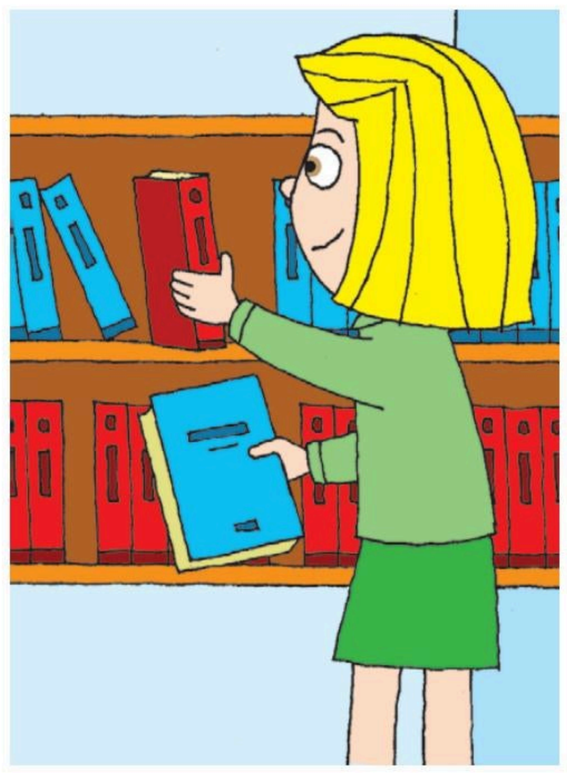
43. Графік лінійної функції $y = ax + b$ проходить через точки $(2; 1)$ і $(-3; -9)$. Знайдіть значення a і b.

44. Графік лінійної функції $y = ax + b$ проходить через точки $(-1; 8)$ і $(3; -4)$. Знайдіть значення a і b.

45. Якщо чисельник заданого дробу зменшити на 3, а знаменник збільшити на 2, то одержимо $\frac{1}{3}$. Якщо чисельник заданого дробу збільшити на 1, а знаменник зменшити на 1, то одержимо 0,75. Знайдіть заданий дріб.

46. Якщо чисельник заданого дробу зменшити на 1, то одержимо $\frac{1}{2}$. Якщо чисельник заданого дробу збільшити на 2, а знаменник зменшити на 1, то одержимо $\frac{5}{3}$. Знайдіть заданий дріб.

47. На двох полицях стоять підручники з математики. Якщо з першої полиці переставити на другу 10 підручників, то на обох полицях підручників стане порівну. Якщо з другої полиці переставити на першу 20 підручників, то на першій стане у 2,5 раза більше підручників, ніж на другій. Знайдіть, скільки підручників було на кожній полиці спочатку, склавши систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.



48. У двох цистернах налито воду. Якщо з першої цистерни перелити 100 л води в другу цистерну, то в другій води стане вдвічі більше, ніж у першій. А якщо з другої цистерни перелити 10 л води в першу цистерну, то в першій води стане в 6 разів більше, ніж у другій. Знайдіть, скільки літрів води було в кожній цистерні спочатку, склавши систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі.

49. За течією річки катер пропливає відстань між двома пристанями за 4 год, а проти течії — за 6 год. Знайдіть швидкість руху катера в стоячій воді та швидкість течії, якщо відстань між пристанями дорівнює 60 км.



50. Коли моторний човен рухався 2 год за течією річки й 1 год проти течії, він подолав 63 км, а коли цей човен рухався 1 год за течією річки й 2 год проти течії, то подолав 57 км. Знайдіть власну швидкість руху човна та швидкість течії річки.

51. Бочку, у якій було 200 л води, спорожнили через дві труби. Спочатку відкрили першу трубу, а за 3 хв — другу. За 8 хв після відкриття першої труби в бочці залишилося 80 л води, а ще за 3 хв — 26 л. Скільки літрів води витікало з кожної труби за 1 хв?

52. У першому сплаві міститься 9 % цинку, а в другому — 24 %. Скільки грамів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати зливок, який має масу 260 г і містить 15 % цинку?



Цікавинки від дідуся Тараса

Спосіб додавання, який використовується в розв'язуванні системи двох рівнянь із двома змінними, є частковим випадком більш загального методу розв'язування систем лінійних рівнянь із довільною кількістю невідомих, який отримав назву *метод Гаусса*. Його суть полягає у зведенні системи рівнянь за допомогою рівносильних перетворень до такого виду, коли кожне наступне рівняння міститиме принаймні на одну змінну менше, ніж попереднє. Цей метод названо на честь німецького

математика *Карла Фрідріха Гаусса* (1777–1855), хоча він був описаний ще в давньокитайському тексті «Математика в дев'яти книгах», у якому було зібрано роботи X–II ст. до н. е. Нині цей метод успішно використовується в різноманітних системах комп'ютерної алгебри (DERIVE, MATLAB, MACSYMA, REDUCE тощо) для розв'язування систем лінійних рівнянь із великою кількістю змінних і рівнянь.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Користуючись додатковими джерелами інформації, ознайомтеся з біографією Карла Фрідріха Гаусса та зробіть невелике повідомлення. Чому, на вашу думку, цього вченого називали «королем математиків»? Який факт його біографії вразив вас найбільше?

2. Чи використовуєте ви для перевірки правильності виконання домашніх завдань системи комп'ютерної алгебри та системи штучного інтелекту? Запитайте більше про такі системи в учителя або вчительки інформатики.



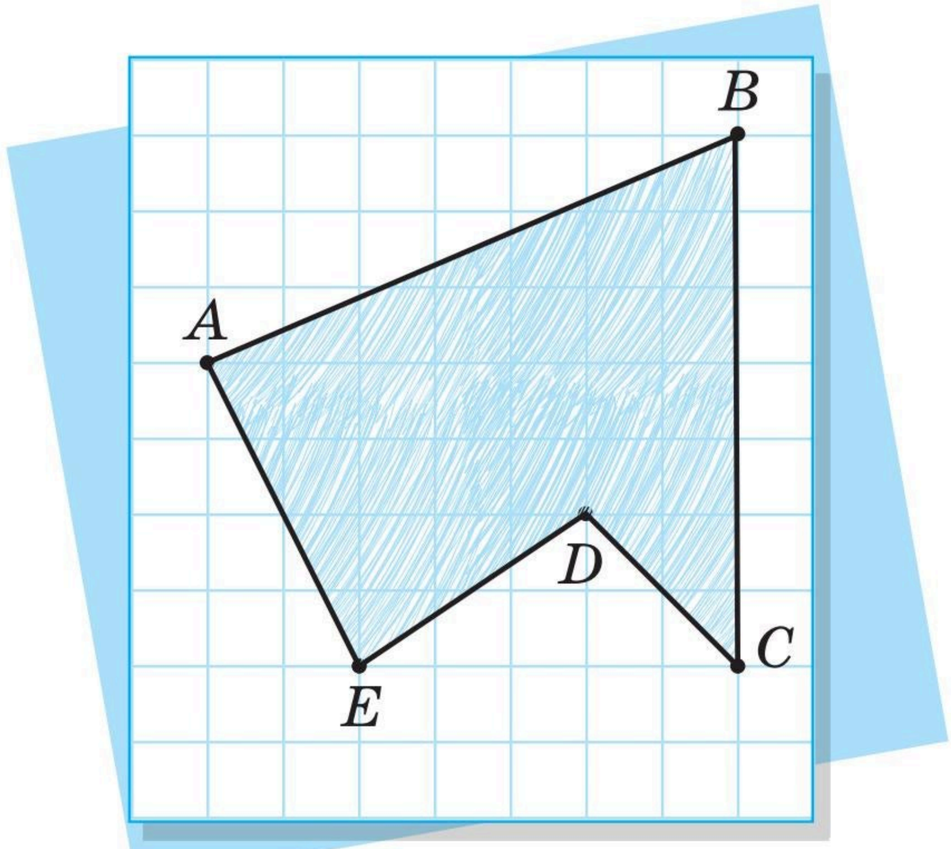
Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Розв'яжіть рівняння $4y(1-y)+6y^2-3=2y(y+2)-y+5$.

2. Василина міркує: «Страуси не вміють літати, але є птахами. Птах, фото якого я бачила вчора в соціальній мережі, теж не вмів літати. Але це не означає, що птах був саме страус!» Чи правильно міркує Василина?

3. Готель «Надзвичайні Карпати» має 40 номерів. У березні були зайняті 60 % його номерів, у квітні — 75 %, у травні — 90 %. Знайдіть відсоток зайнятих номерів цього готелю за всі три весняні місяці.

4. На аркуші в клітинку зображено п'ятикутник $ABCDE$ (див. рисунок). Знайдіть його площу (в $см^2$), якщо довжина сторони однієї клітинки дорівнює 1 см.



5. Знайдіть невідоме чотиризначне число, позначене знаками питання.

КОРМА (КАСА) АЛЬЯНС
278934 (????) 7234

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 3

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть рівняння з однією змінною, яке НЕ є лінійним.

А	Б	В	Г
$2x-1=5$	$4=-x+5$	$\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$	$\frac{1}{x}=\frac{4}{5}$

2. Розв'яжіть рівняння з однією змінною $x-2=-10$.

А	Б	В	Г
$x=-2$	$x=-8$	$x=-12$	$x=-10$

3. Укажіть пару чисел, що є розв'язком рівняння з двома змінними $3x-y=4$.

А	Б	В	Г
$(3;4)$	$(3;-1)$	$(1;-1)$	$(-1;4)$

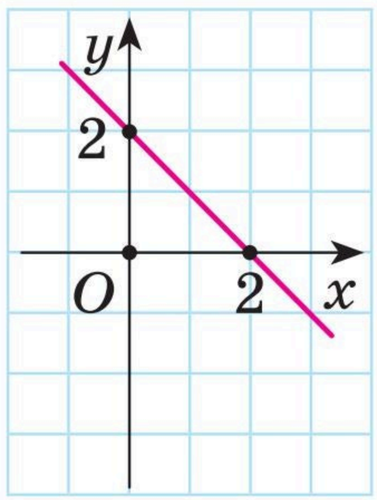
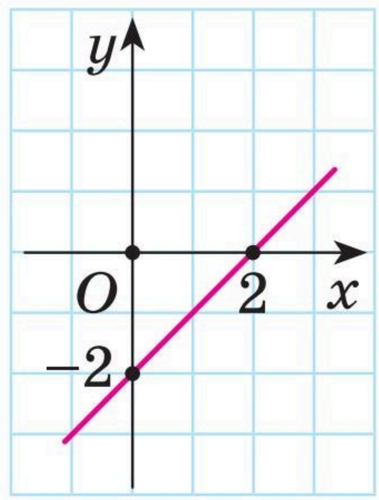
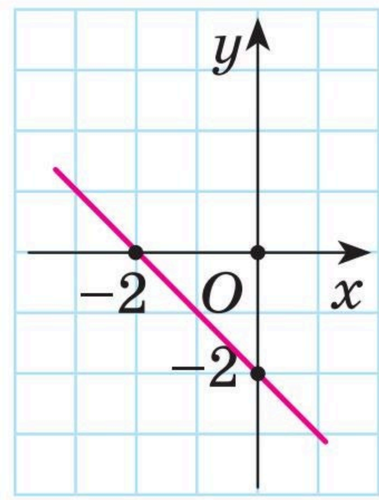
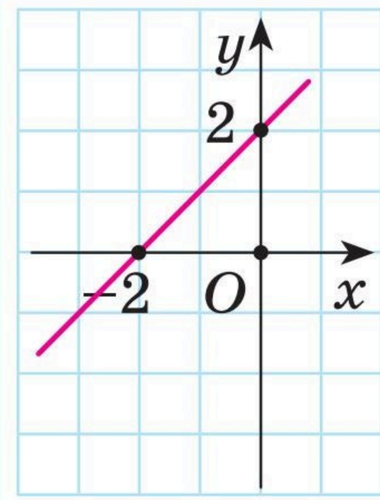
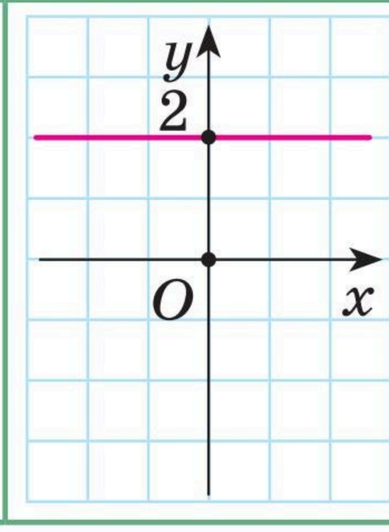
4. З'ясуйте, скільки коренів має рівняння з однією змінною $2x = 3$.

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Два	Три	Безліч

5. Розв'яжіть рівняння з однією змінною $7x = -5$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -2$	$x = -\frac{5}{7}$	$x = -35$	$x = -\frac{7}{5}$	$x = -12$

6. Укажіть рисунок, на якому *може* бути зображено графік лінійного рівняння з двома змінними $x - y = -2$.

А	Б	В	Г	Д
				

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. Не будуючи графіки функцій $y = 4x - 1$ і $y = -x + 12$, знайдіть *абсцису* їх точки перетину.

8. Розв'яжіть рівняння з однією змінною $3(x + 4) - 5 = x - 2$.

9. Три пачки морозива «Білочка» та дві пачки морозива «Їжачок» коштують разом 170 грн, а п'ять пачок морозива «Білочка» та шість пачок морозива «Їжачок» коштують разом 390 грн. Марко хоче купити одну пачку морозива «Білочка» й одну пачку морозива «Їжачок». Скільки гривень він має заплатити за покупку?

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Розв'яжіть рівняння з однією змінною $\frac{2x-1}{3}+\frac{x+1}{2}=5$.

11. Розв'яжіть рівняння з однією змінною $x^2-16=3x+12$.

12. Дано систему двох рівнянь із двома змінними: $\begin{cases}2x-5y=10,\\x+2y=14.\end{cases}$

Розв'яжіть цю систему: а) способом підстановки; б) способом додавання; в) графічним способом. Переконайтеся в ідентичності відповідей.

13. Олена та Ірина вирішили в неділю пройтися туристичною стежкою «Мальовнича Україна». За першу годину дівчата пройшли чверть довжини стежки, а потім відпочивали 30 хвилин, милуючись краєвидами. Наступної години вони пройшли $\frac{2}{3}$ решти довжини стежки та знову зупинилися перепочити на 30 хвилин. Нарешті за наступну годину дівчата пройшли решту стежки — 3 кілометри. Знайдіть довжину туристичної стежки (у км) і середню швидкість руху дівчат протягом усього маршруту (у км/год), склавши дві різні математичні моделі розв'язання задачі.

14. Довжина прямокутника на 10 см більша за його ширину, а периметр цього прямокутника дорівнює 70 см. Знайдіть довжину та ширину прямокутника (у см) і його площу (у $см^2$), склавши дві різні математичні моделі розв'язання задачі.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x.

а) $ax=a^2$; б) $3ax+2a=ax+6a$; в) $2ax+a=2ax+5a$.

2. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x.

а) $(a-1)x=a^2-1$; б) $5ax-a=ax+11a$; в) $ax+7a=ax-8a$.

3. Побудуйте графік рівняння.

а) $|x|-y=0$; б) $|x|-x-y=0$.

4. Побудуйте графік рівняння.

а) $|x|+y=0$; б) $2|x|-x+y=0$.

5. Розв'яжіть рівняння.

а) $(x-3y)^2+(x+y+8)^2=0$; б) $|x+2y-3|+|3x-y-2|=0$.

6. Розв'яжіть рівняння.

а) $(2x+y-1)^2+(x-y+10)^2=0$; б) $|5x+2y-7|+|2x-y-1|=0$.

7. З'ясуйте, за якого значення a пряма $y=ax+5$ проходить через точку перетину прямих $2x+3y=5$ і $4x-7y=-3$.

8. З'ясуйте, за якого значення a пряма $y=3x+a$ проходить через точку перетину прямих $5x-2y=1$ і $2x+3y=8$.

9. Знайдіть усі пари цілих чисел, які задовольняють подане рівняння.

а) $|x|+|y|=2$; б) $x^2+y^2=5$.

10. Знайдіть усі пари цілих чисел, які задовольняють подане рівняння.

а) $|x+1|+|y|=1$; б) $x^2+(y-1)^2=2$.

Прямокутна декартова система координат — Cartesian coordinate system
Вісь абсцис, вісь ординат — abscissa axis, ordinate axis
Область визначення функції — domain of a function
Множина значень функції — range of a function
Графік функції — graph of a function
Лінійна функція — linear function

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

Рівняння з однією змінною

Лінійні рівняння

$a \cdot x + b = 0$

$2x - 8 = 0$

$2x = 8;\ \ x = 4$

приклад

Рівняння, що зводяться до лінійних

$x^2 - 25 = 0$

$(x-5)(x+5) = 0$

$x_1 = 5;\ \ x_2 = -5$

приклад

Інші рівняння

Розв'язати рівняння — знайти *всі* його корені або довести, що їх немає.

Корінь рівняння з однією змінною — число, яке в разі підстановки в рівняння замість змінної дає правильну рівність.

Способи розв'язування рівнянь з однією змінною

Рівносильні перетворення

1 *Додавання* до обох частин рівняння того самого числа чи монома.

2 *Ділення (множення)* обох частин рівняння на те саме число, відмінне від нуля.

Графічний спосіб

1-й крок Побудувати графіки лівої та правої частин рівняння в одній ПДСК.

2-й крок Знайти точки перетину (якщо вони є) графіків і записати абсциси цих точок як корені рівняння.

3-й крок Виконати перевірку шляхом підстановки.

Рівняння з двома змінними

Лінійні рівняння

$ax + by + c = 0$

$2x + 3y - 5 = 0$
$-3x + 0 \cdot y + 6 = 0$
$0 \cdot x + 2y - 3 = 0$

приклад

Інші рівняння

$xy = 35$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$
$x^3 = 3x + y^2$

приклад

Розв'язати рівняння з двома змінними — знайти *всі* його корені або довести, що їх немає.

Розв'язок рівняння з двома змінними — *пара чисел*, які в разі підстановки в рівняння дають правильну рівність.

$\begin{pmatrix} x & y \\ 3; & -1 \end{pmatrix}$ — розв'язок рівняння $2x + y = 5$, оскільки $2 \cdot 3 - 1 = 5$.

приклад

Системи двох рівнянь із двома змінними

Якщо мета — знайти *спільні* розв'язки двох рівнянь із двома змінними

$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

Розв'язок: пара $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

приклад

Спосіб підстановки

Ідея: з одного рівняння виразити значення змінної та підставити в інше.

Спосіб додавання

Ідея: замінити одне з рівнянь на суму цього рівняння та іншого рівняння системи.

Графічний спосіб

Ідея: побудувати графіки обох рівнянь системи та знайти координати точки їх перетину.

Рівносильні перетворення систем рівнянь

Графік лінійного рівняння — *пряма*.

РОЗДІЛ 4. ПОНЯТТЯ ТА ЇХ ОЗНАЧЕННЯ, ТВЕРДЖЕННЯ ТА ЇХ ДОВЕДЕННЯ

CHAPTER 4. NOTIONS AND THEIR DEFINITIONS, STATEMENTS AND THEIR PROOFS

§ 14. Поняття, означення понять

Поняття, зміст і обсяг поняття



Послухай, Петрику, мій менший братик, чотирирічний Андрійко, замучив своїми дивними запитаннями! Учора вперше почув на прогулянці слово «філіжанка» і почав допитуватися, що це слово означає. Я йому пояснила, що філіжанка — це те саме, що й чашка, різновид посуду. Тоді він запитав, що таке «посуд».



Мені самій стало цікаво, я подивилася в інтернеті й прочитала Андрійкові, що посуд — це загальна назва виробів із глини, скла, металу тощо, які використовують для приготування або подавання їжі, напоїв і т. ін., а також для зберігання харчових продуктів.

Тоді Андрійко запитав, а що таке «вироби». Там само в інтернеті я знайшла, що вироби — це вироблена, виготовлена

із чогось річ, предмет для вжитку. Братик сказав, що він нічого не зрозумів, і побіг гратися. А я теж не дуже все зрозуміла...



У мене була схожа ситуація, коли був малечею. Я почув на вулиці слово «лабрадор» і запитав у батьків, що воно означає. Мені сказали, що це така порода собак. Тоді я запитав, а що таке «собака». Мені відповіли, що собака — це вид тварин. Мене зацікавила ця гра, і я запитав, що таке «тварина». Батьки здивувалися, але відповіли, що це такий особливий живий організм, істота. Але коли я запитав, що таке «організм» і «істота», вони обоє замовкли, певний час дивилися один на одного, а потім засміялися. Мені теж стало весело, і я припинив ту гру, але що таке «організм» і «істота», я тоді так і не дізнався.



Я знаю, що «філіжанка», «посуд», «виріб», «лабрадор», «собака», «тварина», «істота» — це такі поняття. Пояснюючи зміст одного поняття, ми мусимо використовувати інше поняття, уже відоме. Але так не може тривати до нескінченності, ми маємо на чомусь зупинитися!



Мабуть, не всі поняття можна пояснити через інші. Наприклад, раніше на уроках математики ми вивчали поняття «множина», але не пояснювали, що це таке, а лише наводили приклади множин: множина учнів і учениць класу, множина стільців у кімнаті, множина крокодилів у зоопарку, множина натуральних чисел тощо.

А далі, коли ми з'ясували на прикладах, що таке множина, то стає зрозумілим, що, наприклад, графік функції $y = f(x)$ — це множина точок $(x; f(x))$ у прямокутній декартовій системі координат. Можливо, аналогічний принцип діє і в ситуаціях із поняттями «виріб» та «істота»?



Так, Тетянко й Петрику, напрямок ваших думок цілком правильний. Насправді ці питання далеко не дитячі, а навпаки — дуже глибокі. Настільки глибокі, що більш ретельно та строго їх можна осягнути, опанувавши *філософію* та *логіку*. Ви обов'язково зробите це пізніше, а зараз спробуємо лише зрозуміти суть того, що відбувається.

Людина мислить, використовуючи *поняття*, які відбивають суттєві властивості, зв'язки та відношення предметів, явищ і процесів навколишнього світу.

Тетянка правильно навела приклади понять. Із повсякденного життя ви знайомі з поняттями «солоність», «доброта», «справедливість», «любов» та іншими. На уроках математики ви нещодавно вивчали поняття «моном», «поліном», «рівняння», «система рівнянь» тощо.



Слово чи словосполучення, яким безпосередньо позначають поняття, називають *терміном*. Для того самого поняття можуть уживатися різні терміни. Наприклад, терміни «моном» і «одночлен» відповідають одному поняттю та позначають ту саму множину об'єктів. Так само одному поняттю відповідають терміни «поліном» і «многочлен» — їх теж можна вживати як синоніми.

Кожне поняття має зміст і обсяг.



Зміст поняття становлять усі властивості, які відображають якість предмета (явища, процесу) і відрізняють його від інших схожих предметів (явищ, процесів).

Наприклад, зміст поняття «філіжанка» становлять властивості:

- невелика;
- посудина;

- переважно зі скла, порцеляни або фаянсу;
- з якої п'ють чай, каву та інші напої.

Обсягом поняття називають множину всіх об'єктів, на які поширюється це поняття.

Наприклад, обсягом поняття «лабрадор» є множина всіх собак цієї породи, обсягом поняття «бабуся» — множина всіх жінок, які є бабусями.



Співвідношення обсягів понять зручно показувати за допомогою *діаграм Венна*, про які ви вже знаєте.

Наприклад, з'ясуємо співвідношення обсягів понять «яблуко», «солодке яблуко» та «червоне яблуко». Усі солодкі та червоні яблука є яблуками, але не всі яблука є солодкими та не всі яблука є червоними. Разом із тим існують солодкі яблука, які є червоними і не є такими. Також існують червоні яблука, які є солодкими і не є такими. Зобразимо ці співвідношення за допомогою діаграми (рис. 14.1).



Рис. 14.1



Зауважимо, що чим більшою кількістю властивостей визначається зміст поняття, тим меншим є його обсяг. І навпаки: чим більшим є обсяг поняття, тим меншою кількістю властивостей визначається його зміст.

Інші приклади встановлення співвідношень між поняттями: https://rnk.com.ua/106098



Означення понять, неозначувані поняття



Роз'яснення змісту якогось поняття називають означенням цього поняття. Під час цього роз'яснення ми фактично домовляємося, що будемо розуміти під тим словом чи словосполученням (терміном), яке відповідає цьому поняттю.

Наприклад, у розділі 2 цього посібника було подано означення лінійного рівняння з двома змінними: «Рівняння з двома змінними, ліва та права частини якого є або числом, або мономом чи поліномом першого степеня з двома змінними, називають *лінійним рівнянням із двома змінними*». Тут означення лінійного рівняння з двома змінними (нове поняття) дається через поняття рівняння з двома змінними (відоме поняття).

А перед цим було подано означення рівняння з двома змінними: «Рівність, що містить дві змінні, для якої потрібно знайти невідомі значення змінних, за яких ця рівність буде правильною, називають *рівнянням із двома змінними*». Тут новим поняттям було поняття «рівняння з двома змінними», а відомим — поняття «рівність».

У початковій школі поняття «рівність» тлумачилось як запис, що містить знак «дорівнює» (=). Тоді новим поняттям було поняття «рівність», а поняття «запис» — відомим.

Поняття «запис» є інтуїтивно зрозумілим, і його означення в початковій школі не давалося. Але за потреби його також можна означити: «Запис — це впорядкована множина символів (букв, чисел, знаків математичних дій тощо)». Тут невідомим поняттям вважається поняття «запис», а відомим — поняття «множина».



Як бачимо, для означення будь-якого нового поняття використовують уже відомі поняття. Так можна побудувати ланцюжки понять, і на початку таких ланцюжків будуть розташовані поняття, які вважатимемо неозначуваними

(первісними) поняттями. Наприклад, у математиці не дають означення поняття «множина», а лише, як слушно зауважив Петрик, наводять приклади, які дозволяють зрозуміти суть цього поняття. Це поняття є неозначуваним (первісним) поняттям.

До первісних понять можна також віднести багато абстрактних понять на кшталт «доброта», «порядність», «справедливість» тощо. Дійсно, складно дати чітке означення таких понять, але досить просто навести приклади ситуацій, у яких ці поняття проявляються. Такі приклади називають моделями неозначуваних (первісних) понять. Наприклад:

- поняття *точки* є неозначуваним поняттям, але змоделювати це поняття дозволяє слід на папері від дотику гостро заточеного олівця чи слід на дошці від дотику крейди;
- поняття *прямої* є неозначуваним поняттям, а його моделлю можна вважати край парти чи лінію горизонту;
- поняття *площини* є неозначуваним поняттям, а його моделлю може виступати поверхня столу чи класної дошки, екран ноутбука тощо.



Усі поняття умовно можна поділити на конкретні й абстрактні.

Конкретні поняття найчастіше відображають об'єкти реального світу, які людина сприймає за допомогою органів чуття (зір, слух, смак, нюх, дотик). За допомогою цих понять описують явища та ситуації дійсності, які існують самостійно, об'єктивно.

Абстрактні поняття не сприймаються людиною безпосередньо, але можуть бути змодельовані через об'єкти, явища чи процеси, які можна сприйняти органами чуттів. Через абстрактні поняття описують властивості об'єктів дійсності або співвідношення між ними.

Наприклад, поняття «лабрадор», «філіжанка», «книжка», «цукор», «папуга» є конкретними поняттями, а поняття

«суворість», «доброта», «милосердя», «гуманізм», «солоність» — абстрактними.



Зауважу, що сприйняття конкретних і абстрактних понять іноді залежить від людини, яка їх сприймає. Наприклад, та сама страва може бути для одних людей солоною, а для інших — ні, та сама людина може бути для одних людей доброю, а для інших — ні. Ці та інші цікаві речі про людину та світ вивчає окрема наука — *філософія*.



Перевірте себе!

1. Наведіть приклади понять і термінів, які їх позначають.
2. Поясніть, що таке зміст і обсяг поняття.
3. Наведіть приклади означень понять.
4. Наведіть приклади неозначуваних (первісних) понять і їх моделей.
5. Наведіть приклади абстрактних і конкретних понять.



Тренажерний зал



Початковий рівень

1. Вставте пропущене слово.

а) Сукня — це різновид жіночого ...

б) Футбол — це вид спортивних ...

в) Стоматолог — це зубний ...

г) Бджола — це корисна ...

2. Вставте пропущене слово.
а) Яблуня — це плодове ...
б) Парта — це вид шкільних ...
в) Трамвай — це вид міського ...
г) Міксер — це побутовий ...

3. Поясніть одне з двох понять через інше поняття.
а) «яблуко» і «фрукт»; б) «транспорт» і «літак»; в) «кіт» і «тварина»; г) «виделка» і «посуд».

4. Поясніть одне з двох понять через інше поняття.
а) «крісло» і «меблі»; б) «годинник» і «механізм»; в) «водойма» і «річка»; г) «дерево» і «дуб».

5. Обсяг якого з двох понять є більшим, а зміст — меншим?
а) «дочка» і «жінка»; б) «телефон» і «пристрій»; в) «прикраса» і «перстень»; г) «учень» і «людина».

6. Обсяг якого з двох понять є більшим, а зміст — меншим?
а) «цибуля» і «городина»; б) «опади» і «сніг»; в) «будівля» і «сарай»; г) «напій» і «кава».

7. Укажіть абстрактні поняття.
а) «будинок»; б) «хмара»; в) «патріотизм»; г) «лампа»; д) «троянда»; е) «честь»; ж) «смартфон»; з) «підлість».

8. Укажіть конкретні поняття.
а) «мужність»; б) «окуляри»; в) «годинник»; г) «асфальт»; д) «сонце»; е) «дружба»; ж) «ганьба»; з) «серце».

9. Укажіть, якій точці на діаграмі Венна (рис. 1) відповідають поняття:
а) «довгі джинси»; б) «короткі джинси»; в) «сорочка»; г) «спортивні штани».

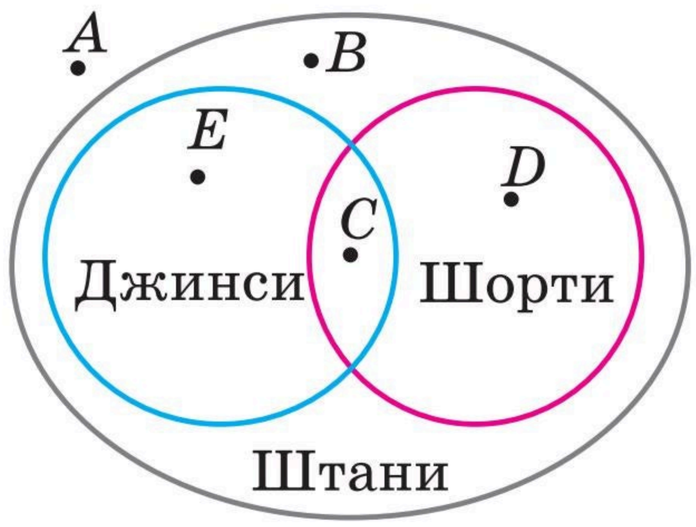


Рис. 1

10. Укажіть, якій точці на діаграмі Венна (рис. 2) відповідають поняття:

а) «фарфорова тарілка»; б) «табуретка»; в) «металева ложка»; г) «дерев'яна ложка».

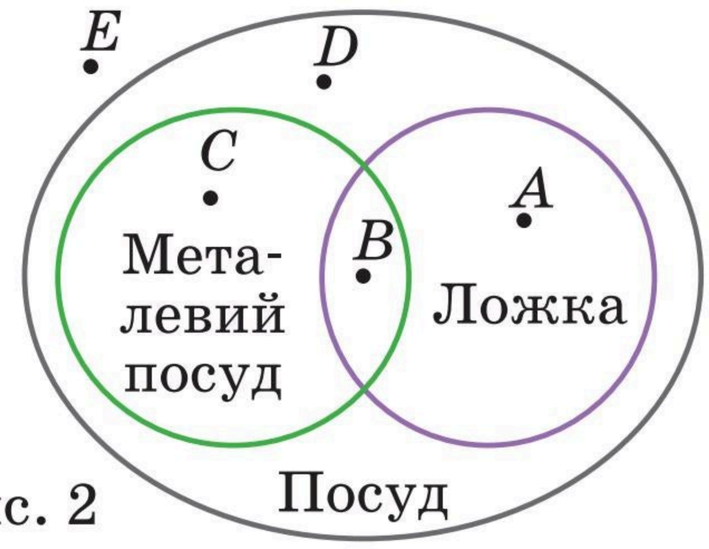


Рис. 2

Середній рівень

11. Яке поняття в поданій групі понять є «зайвим»?

а) «яблуко», «груша», «слива», «ромашка»;
б) «кішка», «собака», «горобець», «лисиця»;
в) «іменник», «речення», «прикметник», «дієслово»;
г) «задача», «трикутник», «чотирикутник», «коло».

12. Яке поняття в поданій групі понять є «зайвим»?

а) «яблуня», «липа», «ялинка», «ліс»;
б) «кома», «літера», «тире», «крапка»;
в) «фізика», «хімія», «підручник», «біологія»;
г) «крісло», «стіл», «ковдра», «ліжко».

13. Для кожної пари понять намалюйте діаграму Венна та впишіть назви понять так, щоб утворилося правильне співвідношення обсягів понять. Скористайтеся прикладом (рис. 3).

а) «іграшка», «лялька»; б) «олівець», «канцелярське приладдя»; в) «школяр», «семикласник»; г) «квадрат», «чотирикутник».



Рис. 3

14. Для кожної пари понять намалюйте діаграму Венна та впишіть назви понять так, щоб утворилося правильне співвідношення обсягів понять.

а) «солодощі», «цукерки»; б) «кондитерський виріб», «тістечко»; в) «геометрична фігура», «кут»; г) «книга», «довідник».

15. Намалюйте в зошиті таблицю та заповніть її, використовуючи такі поняття:
а) «будинок»; б) «річка»; в) «краса»; г) «страх»; д) «диван»; е) «село»; ж) «радість»; з) «щастя».

Абстрактні поняття	Конкретні поняття

16. Намалюйте в зошиті таблицю та заповніть її, використовуючи такі поняття:
а) «рівняння»; б) «вітер»; в) «земля»; г) «коло»; д) «цифра»; е) «дружба»; ж) «кіт»; з) «сміливість».

Абстрактні поняття	Конкретні поняття

17. Яке поняття пропущене в правильній послідовності?
а) «фрукт» → ... → «солодке яблуко»;
б) «геометрична фігура» → ... → «квадрат»;
в) «меблі» → ... → «парта»;
г) «дерево» → ... → «ялинка».

18. Яке поняття пропущене в правильній послідовності?
а) «дерево» → ... → «яблуня»;
б) «одяг» → ... → «спідниця»;
в) «тварина» → ... → «ведмідь»;
г) «геометрична фігура» → ... → «трикутник».

19. Прочитайте означення.
Означення 1. Фігура — це зовнішній вигляд, обрис, форма чого-небудь.
Означення 2. Фігура — це множина точок на площині, які обмежені скінченним числом ліній.
Ці означення описують те саме поняття чи різні поняття? Складіть і запишіть принаймні два речення з поданими поняттями (або поняттям).

20. Прочитайте означення.

Означення 1. Клітка — чотирикутник на поверхні чого-небудь, утворений перехресними лініями.

Означення 2. Клітка — закрите приміщення для птахів або тварин зі стінками з металевих або дерев'яних прутів.

Ці означення описують те саме поняття чи різні поняття? Складіть і запишіть принаймні два речення з поданими поняттями (або поняттям).

Достатній рівень

21. Для кожної групи понять побудуйте діаграму Венна та впишіть назви понять так, щоб утворилися правильні співвідношення.

а) «натуральне число», «ціле число»; б) «взуття»; «жіноче взуття»; «туфлі на підборах»; в) «учні й учениці», «хлопці», «хлопці, які займаються футболом», «хлопці, які займаються баскетболом», «хлопці, які займаються і футболом, і баскетболом».

22. Для кожної групи понять побудуйте діаграму Венна та впишіть назви понять так, щоб утворились правильні співвідношення.

а) «ціле число», «дробове число»; б) «фрукт», «слива», «кисла слива»; в) «жінка»; «тільки мати»; «тільки бабуся»; «жінка, яка одночасно й мати, й бабуся».

23. Розташуйте поняття за зменшенням їх обсягу: а) «парне число», «число», «ціле число»; б) «чайна ложка», «столове приладдя», «виріб для дому»; в) «Ворскла», «річка», «водойма»; г) «зимовий одяг», «шарф», «текстильний виріб».

24. Розташуйте поняття за збільшенням їх змісту: а) «число», «дріб», «десятковий дріб»; б) «свійська тварина», «кінь», «тварина»; в) «кліматична зона», «Сахара», «пустеля»; г) «хижий птах», «птах», «яструб».

25. До заданих понять підберіть поняття більшого обсягу.
а) «суниця», «полуниця»; б) «чотирикутник», «трикутник»; в) «крісло», «стілець»; г) «вишня», «ялинка».

26. До заданих понять підберіть поняття більшого обсягу.
а) «прислівник», «займенник»; б) «відрізок», «пряма»; в) «парне число», «непарне число»; г) «шипшина», «бузок».

27. До заданих понять підберіть поняття більшого змісту.
а) «школярка»; б) «число»; в) «олівець»; г) «многокутник».

28. До заданих понять підберіть поняття більшого змісту.
а) «буква»; б) «рівняння»; в) «учителька»; г) «птах».

29. Прочитайте різні означення, наведені для одного поняття. Випишіть властивості поняття, які вказані в обох означеннях. Випишіть властивості поняття, які вказані тільки в означенні 1. Випишіть властивості поняття, які вказані тільки в означенні 2. Яке з наведених означень, на вашу думку, більш повно описує поняття?
а) *Означення 1.* Дружба — безкорисні взаємовідносини між людьми, засновані на довірі, щирості, взаємній симпатії, спільних інтересах і захопленнях.
Означення 2. Дружба — стосунки, відносини, в основі яких лежать взаємні прихильність, довіра, відданість, товариська солідарність, духовна близькість, спільність інтересів.

б) *Означення 1.* Школа — це навчальний заклад, призначений забезпечувати навчальний простір і середовище для навчання учнів і учениць під керівництвом учителів й учительок.
Означення 2. Школа — це навчальний заклад, який здійснює загальну освіту та виховання молодого покоління.

30. Прочитайте різні означення, наведені для одного поняття. Випишіть властивості поняття, які вказані в обох означеннях. Випишіть властивості поняття, які вказані тільки в означенні 1. Випишіть властивості поняття, які вказані тільки в означенні 2. Яке з наведених означень, на вашу думку, більш повно описує поняття?

а) *Означення 1.* Знання — сукупність відомостей із якої-небудь галузі, набутих у процесі навчання, дослідження.

Означення 2. Знання — це обізнаність у чому-небудь чи розуміння когось або чогось, наприклад фактів, інформації, навичок.

б) *Означення 1.* Громадянин — фізична особа, яка належить до певної держави, де вона має відповідний юридичний статус.

Означення 2. Громадянин — особа, що належить до постійного населення якої-небудь держави, користується її правами та виконує обов'язки, установлені законами цієї держави.

Високий рівень

31. а) Запишіть властивості, які дозволяють виділяти об'єкти, що входять до обсягу поняття «прямокутник».

б) Запишіть означення поняття «прямокутник», використавши записані вами властивості.

в) Які додаткові властивості слід використати, щоб виділити об'єкти, що входять до обсягу поняття «квадрат»? Дайте означення поняття «квадрат».

г) Як співвідносяться обсяги понять «квадрат» і «прямокутник»? Поясніть, чому. Зобразіть співвідношення обсягів цих понять на діаграмі Венна.

32. а) Запишіть властивості, які дозволяють виділяти об'єкти, що входять до обсягу поняття «функція».

б) Запишіть означення поняття «функція», використавши записані вами властивості.

в) Які додаткові властивості слід використати, щоб виділити об'єкти, що входять до обсягу поняття «лінійна функція»? Дайте означення поняття «лінійна функція».

г) Як співвідносяться обсяги понять «функція» і «лінійна функція»? Поясніть, чому. Зобразіть співвідношення обсягів цих понять на діаграмі Венна.

33. Прочитайте запропоноване означення. Визначте, чи містить воно перелік усіх властивостей, які дозволяють відрізнити зазначений об'єкт від інших об'єктів. Якщо означення неправильне, запропонуйте виправлення або уточнення.

а) Квадратом називають чотирикутник, у якого всі сторони рівні.

б) Рівностороннім називають трикутник, у якого всі сторони рівні.

в) Рівнянням називають вираз зі змінними.

г) Фігуру, яка складається з двох променів, що мають спільну вершину, називають кутом.

34. Прочитайте запропоноване означення. Визначте, чи містить воно перелік усіх властивостей, які дозволяють відрізнити зазначений об'єкт від інших об'єктів. Якщо означення неправильне, запропонуйте виправлення або уточнення.

а) Прямі, які мають одну спільну точку, називають перпендикулярними.

б) Іменник — це частина мови.

в) Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

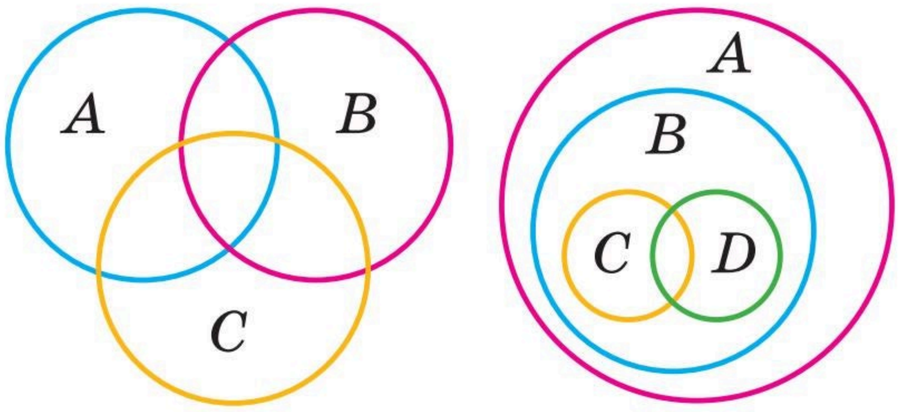
г) Прямокутником називають чотирикутник, у якого всі кути однакові.

35. Терміном «коло» можуть позначатися різні поняття. Скориставшись додатковими джерелами інформації, запишіть означення для двох таких понять — у математиці та в медицині (коло кровообігу). Які інші приклади використання терміну «коло» ви знаєте?

36. Терміном «корінь» можуть позначатися різні поняття. Скориставшись додатковими джерелами інформації, запишіть означення для двох таких понять — в українській мові та в біології. Які інші приклади використання терміну «корінь» ви знаєте?

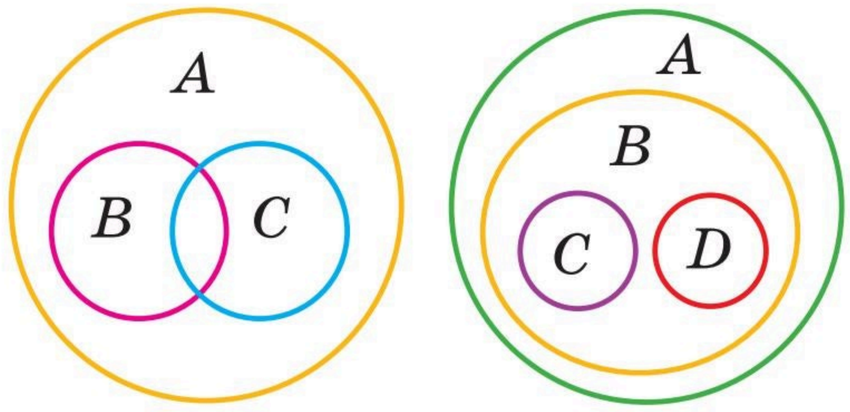
37. Запропонуйте поняття, відношення обсягів яких можна зобразити так, як подано на рис. 4.

38. Запропонуйте поняття, відношення обсягів яких можна зобразити так, як подано на рис. 5.



а *б*

Рис. 4



а *б*

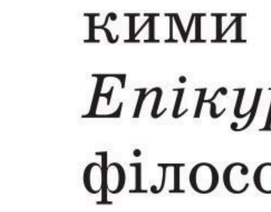
Рис. 5

39. Згадайте з курсу математики та запишіть означення: а) простого числа; б) десяткового дробу. Які більш загальні чи неозначувані поняття ви для цього використовували?

40. Згадайте з курсу математики та запишіть означення: а) перпендикулярних прямих; б) квадрата. Які більш загальні чи неозначувані поняття ви для цього використовували?

41. Спробуйте дати означення поняття «парта», використовуючи більш загальні поняття, і продовжте ланцюжок означень для цих більш загальних понять, наскільки можливо. До якого неозначуваного поняття ви врешті прийшли?

42. Спробуйте дати означення поняття «калина», використовуючи більш загальні поняття, і продовжте ланцюжок означень для цих більш загальних понять, наскільки можливо. До якого неозначуваного поняття ви врешті прийшли?



Цікавинки від дідуся Тараса

Філософія (від грецьк. φιλοσοφία, дослівно *«любов до мудрості»*) — це наука, що вивчає найбільш загальні суттєві властивості та основоположні принципи реальності й пізнання, буття людини, відносини людини й світу, найзагальніші суттєві властивості людського ставлення до природи, суспільства та духовного життя в усіх його основних проявах.

Філософія прагне здебільшого раціональними засобами створити узагальнену картину світу та місця людини в ньому, досліджуючи пізнавальне, ціннісне, соціально-політичне, моральне й естетичне ставлення людини до світу.

Перші філософські вчення виникли приблизно 2500 років тому в Стародавній Греції. Найбільш відомими давньогрецькими філософами були *Сократ, Платон, Арістотель, Діоген, Епікур, Лукрецій, Піфагор* та ін. Приблизно того самого періоду філософські міркування були також поширені в Індії та Китаї. Серед давньокитайських філософів особливе місце посідають роботи *Лао-Цзи* (філософська течія даосистів) і *Конфуція* (філософська течія конфуціанців). У давньоіндійській філософії на основі давніх текстів Веди та Упанішади сформувалися світоглядні системи брахманізму, буддизму, кришнаїзму та інші.

Надалі філософські вчення розвивалися в Середні віки, епоху Відродження, Новий час та в сучасному періоді (XIX–XXI ст.). Серед видатних філософів цих часів — *Тома Аквінський, П'єр Абеляр, Леонардо да Вінчі, Галілео Галілей, Еразм Роттердамський, Бенедикт Спіноза, Рене Декарт, Готфрід Ляйбніц, Імануїл Кант, Людвіг Феєрбах, Георг Гегель, Артур Шопенгауер,*

Фрідріх Ніцше, Григорій Сковорода, Бертран Рассел, Карл Поппер, Мартін Гайдеггер, Альбер Камю, Зігмунд Фройд, Еріх Фромм та ін.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи були ви знайомі раніше з філософськими творами? З якими саме? Чому ви зацікавилися цими джерелами?
2. Підготуйте невелике повідомлення про: а) давньогрецьких філософів; б) філософів стародавніх Індії та Китаю; в) філософів Середньовіччя; г) філософів епохи Відродження; д) українських філософів.
3. Які з відомих вам філософів були також математиками? Як ви вважаєте, чи випадково так сталося? Відповідь обґрунтуйте.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Задано дві множини букв:
$A=\{a;b;c;d;x;y;z\}$ і $B=\{c;d;y;m;p\}$.
Знайдіть $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$. Укажіть усі підмножини множини $A\cap B$.
2. Доведіть тотожності.
а) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; б) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.
3. Юрко вичитав у кулінарній книзі, що концентрація цукру в смачному компоті має бути 8 %. Отже, зваривши 5 кг компоту, Юрко виміряв у ньому вміст цукру. Виявилося, що він становить 12 %. Скільки грамів води має долити хлопець у зварений компот, щоб компот відповідав рекомендаціям кулінарної книжки?

4. Зобразіть на площині пряму l і точку C, яка не належить цій прямій. За допомогою лінійки й транспортира побудуйте пряму, яка проходить через точку C і утворює з прямою l кут, що дорівнює: а) 30°; б) 45°; в) 90°. Скільки рішень має кожне завдання?

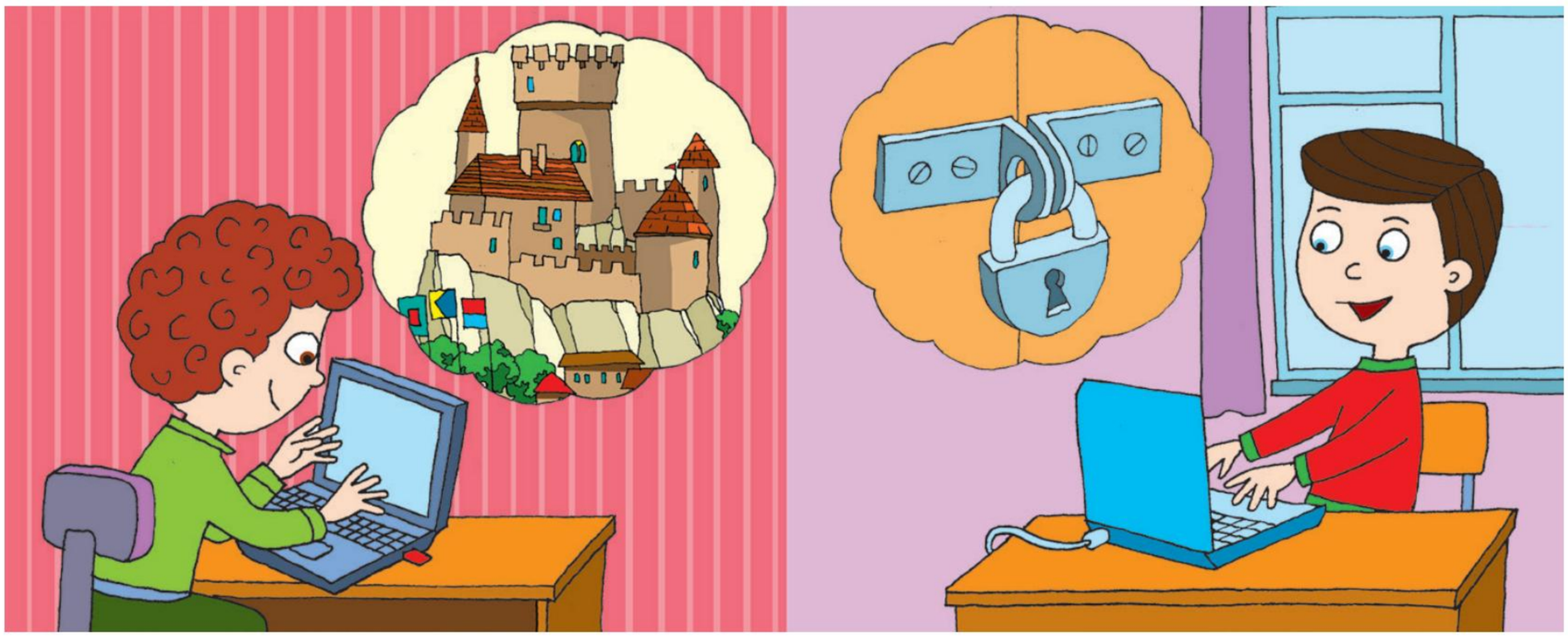
5. У дужках замість знаків питання запишіть таке слово з трьох літер, щоб воно було закінченням слова зліва від дужок і початком слова справа від дужок.
а) ПІ (???) ЕР; б) ТУ (???) БУЛЬ; в) МО (???) ПЕДА.

§ 15. Твердження та способи їх доведення

Твердження та їх істинність



Учора стався зі мною дивний випадок. Спілкувався з другом у месенджері, і в нас виникла суперечка, чи можна купити замок за 400 грн. Він пише, що ні, а я пишу, що можна. Ледь не посварилися, аж доки випадково не зрозуміли, що він пише про зАмок (споруду, у минулому — маєток феодала), а я — про замОк (пристрій для замикання). Тобто написане слово нібито й одне, а сенс — зовсім різний! Потім довго сміялися.





Так, іноді таке трапляється, коли чітко не сформулюєш означення того, що обговорюється. Виходить такий собі каламбур: «Ішов сніг і діти в школу». А в мене інший казус трапився під час спілкування з подругою в чаті. В одному подкасті я почула, що з двох протилежних тверджень одне обов'язково є хибним. Тому, коли подруга сказала, що вирішила не одягати білу блузку завтра в школу, я сказала, що не уявляю її в чорній. На що отримала здивовану відповідь, що, крім білого й чорного, є ще й інші кольори. Також довго сміялись. І дійсно, з двох тверджень: «Блузка є чорною» та «Блузка є білою» — одне обов'язково буде неправильним, оскільки блузка не може бути одночасно і білою, і чорною. Але це ж не означає, що немає інших варіантів!



Петрик і Тетянка розповіли цікаві історії про твердження. Петрик навів приклад твердження: «Замок можна купити за 400 грн». І залежно від наголосу в слові «замок» це твердження може бути як істинним, так і хибним.



Твердженнями називають змістовні розповідні речення, у яких висловлюється думка, положення чи судження про об'єкти, явища чи процеси дійсності та про їх співвідношення.



Істинність чи хибність твердження може встановлюватися на основі життєвого досвіду або домовленості.

Наприклад, якщо говорити про реальну вартість об'єкта, то з нашого життєвого досвіду очевидно, що зазвичай замо́к можна купити за 400 грн, а за́мок — не можна. У першому випадку твердження з розповіді Петрика буде істинним, а в другому — хибним.



Істинність окремих тверджень не можна перевірити *лише* на основі життєвого досвіду, особливо якщо вони стосуються абстрактних понять. Тому іноді просто домовляються, що певні твердження є істинними. Наприклад, біблійна заповідь «Не вкради», тобто «Красти не можна», вважається за суспільною домовленістю істинною.



Твердження, істинність якого встановлюється за домовленістю, називають аксіомою.

У математиці аксіоми використовують для встановлення *основних властивостей* абстрактних понять. Аксіомами в математиці є, зокрема, такі твердження.

- Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій і не належать їй.
- Через дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
- Пряма ділить площину на дві півплощини.

Ці твердження виражають основні властивості точок і прямих на площині. Детальніше про ці властивості ви дізнаєтесь у розділі 5 цього посібника.



У наукових дослідженнях намагаються, щоб система аксіом відповідала таким вимогам: 1) аксіом має бути якомога менше; 2) аксіоми не повинні суперечити одна одній; 3) має існувати модель, на якій аксіоми реалізуються на практиці.

Наприклад, християнська етика заснована на 10 заповідях (аксіомах), котрі відповідають цим вимогам: аксіом небагато, вони не суперечать одна одній і реалізуються на практиці в багатьох країнах. Однак це не означає, що лише така система етичних домовленостей єдино можлива, — є й інші етичні системи, які також задовольняють вимоги до системи аксіом.

Закони логіки. Доведення тверджень



Ті твердження, які не вважають аксіомами, потрібно *доводити* (обґрунтовувати) шляхом проведення логічних міркувань — пов'язаних між собою істинних тверджень.

Петрик і Тетянка розповіли про дві типові логічні помилки в міркуваннях. Щоб їх не допускати, слід знати чотири основні закони логіки, які сформулював ще *Арістотель* понад 2300 років тому. Перелічимо їх.



❶ Закон тотожності стверджує, що в процесі міркування слід завжди говорити про те саме поняття, домовившись про однакове його тлумачення впродовж усього міркування. Порушення цього закону називають підміною понять.

Саме підміна понять відбулася під час спілкування Петрика зі своїм другом щодо можливості придбати за́мок чи замо́к за 400 грн.



❷ Закон протилежності стверджує, що з двох протилежних тверджень одне обов'язково хибне.

Саме про це розповідала Тетянка: блузка не може бути одночасно і білою, і чорною. Однак це зовсім не означає, що, якщо блузка не є білою, то вона чорна, оскільки блузка може бути, наприклад, блакитною чи рожевою.



❸ Закон виключення третього стверджує, що з двох супротивних тверджень, тобто тверджень, які взаємно виключають одне одного, одне є істинним, а друге хибним, а третього варіанту немає.

Наприклад, завтра дощ або піде, або не піде, третього варіанту немає.



❹ Закон достатньої підстави стверджує, що будь-яке твердження може бути істинним тільки тоді, коли воно належним чином обґрунтовано. Тобто істинне твердження може випливати лише з істинного твердження, істинність якого вже встановлено раніше.

Наприклад, істинне твердження «Усі тварини дихають» може вважатися достатньою підставою для встановлення істинності твердження «Усі коти дихають», оскільки кожен кіт є твариною.



Раніше ви вже розглядали правильні й неправильні міркування. Детальніше правила міркування вивчає окрема наука — логіка. Однак про окремі правила побудови логічних ланцюжків корисно дізнатися зараз.

Наприклад, важливо знати: якщо якесь твердження є справедливим для певного поняття, то воно є справедливим і для його окремого випадку, але не навпаки. Тобто якщо всі хвойні дерева в лісі залишаються взимку зеленими, то ялина (хвойне дерево) також залишиться взимку зеленою. Але якщо всі вчителі математики добре знають формули скороченого множення, а всі вчителі математики — люди, то це не означає, що кожна людина добре знає формули скороченого множення.





Твердження, які доводять за допомогою міркувань на основі законів логіки, називають теоремами.

Наприклад, твердження про те, що $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, є теоремою. Доведення цієї теореми ґрунтується на істинності

розподільного та сполучного законів множення, які дозволяють розкрити дужки та звести подібні доданки, побудувавши таким чином ланцюжок істинних тверджень — доведення.



Окрім методу безпосередньої побудови ланцюжка істинних тверджень, теореми можна доводити методом від супротивного. Цей метод ґрунтується на логічному законі виключення третього.

Наприклад, нехай у книгарню зайшли 8 осіб. Доведемо, що принаймні дві особи народилися в той самий день тижня. Для цього *припустимо супротивне тому, що потрібно довести*, тобто припустимо, що всі дні тижня, в які народилися ці люди, є різними.

Якщо це припущення правильне, то тиждень повинен мати принаймні 8 різних днів. Однак ми знаємо, що це не так, — тиждень містить лише 7 різних днів. Ми *прийшли до суперечності з істинним твердженням*. Отже, наше *припущення неправильне*.

За законом виключення третього, із двох супротивних тверджень лише одне істинне, а інше — хибне, третього варіанту немає. Наше *припущення є хибним, а отже, істинним є те, що потрібно довести:* принаймні двоє із 8 людей народилися в той самий день тижня.

Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле́ (1805–1859) — видатний німецький математик.

Розглянута щойно теорема є частковим випадком більш загального твердження, що носить назву принцип Діріхле́. Скориставшись додатковими джерелами інформації, дізнайтеся про принцип Діріхле більше!



Перевірте себе!

1. Поясніть, що називають твердженнями.
2. Яким чином можна встановити істинність чи хибність тверджень?
3. Які твердження називають аксіомами? Яким чином використовують аксіоми в математиці?
4. Яким вимогам має задовольняти система аксіом?
5. Сформулюйте чотири основні закони логіки. Наведіть приклади їх застосувань.
6. Поясніть, які твердження називають теоремами. Яким чином їх доводять?
7. У чому суть методу доведення від супротивного? Наведіть приклади.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Укажіть істинні твердження.

а) Усі яблука солодкі.
б) Серед яблук трапляються зелені.
в) Кожна людина знає англійську мову.
г) Є люди, які знають англійську мову.
д) Усі годинники у світі показують однаковий час.
е) $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

2. Укажіть хибні твердження.

а) Усі слони літають.
б) Серед слонів трапляються такі, що літають.

в) Усі рукавиці шкіряні.
г) Серед рукавиць трапляються шкіряні.
д) Усі квадрати мають по 4 сторони.
е) 9 — парне число.

3. Укажіть пари тверджень, які можуть бути істинними одночасно.

а) Ця черешня жовта; Ця черешня солодка.
б) Це крісло дерев'яне; Це крісло зроблено з пластику.
в) Ці штани сині; Це спортивні штани.

4. Укажіть пари тверджень, які не можуть бути істинними одночасно.

а) Цей автомобіль червоний; Це електромобіль.
б) Це яблуко кисле; Це яблуко солодке.
в) Учора весь день ішов дощ; Учора було сонячно.

5. Укажіть неправильні міркування.

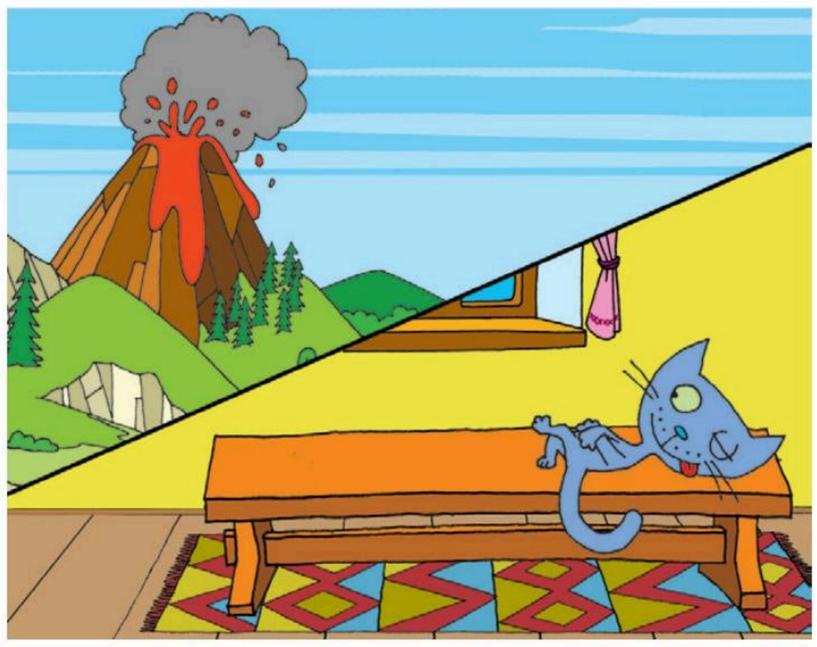
а) Якщо всі художні книжки лежать на полиці, то й підручник із математики теж лежить там.
б) Якщо всі плодові дерева цвітуть навесні, то й липа зацвіте навесні.
в) Якщо всі автомобілі мають колеса, то й електромобіль має колеса.
г) Якщо всі двері в будинку дерев'яні, то двері у ванну кімнату — білі.

6. Укажіть правильні міркування.

а) Якщо всі плодові дерева цвітуть навесні, то яблуня теж цвіте навесні, бо яблуня — плодове дерево.
б) Якщо всі собаки є ссавцями, то і пес Патрон — ссавець.
в) Якщо всі ложки та виделки лежать у кухонній шухляді, то улюблена чайна ложечка Сашка теж лежить у кухонній шухляді.
г) Якщо всі чотирикутники мають 4 кути, то й квадрат $ABCD$ має 4 кути.

7. Дмитрик запитав у Катрусі, якої довжини в неї коса. Катруся відповіла, що не знає, але точно гостра, бо тато її вчора нагострив. Яке слово в діалозі Дмитрика й Катрусі могло вживатися у двох різних значеннях? Який закон логіки міг бути порушений у відповіді Катрусі?

8. Учитель географії запитав, чи знають учні, яка температура лави. Олеся відповіла, що напевне не вища за температуру в кімнаті, де лава стоїть. Яке слово в діалозі вчителя й Олесі могло вживатися у двох різних значеннях? Який закон логіки міг бути порушений у відповіді Олесі?



9. Укажіть пари супротивних тверджень.
а) Учора був понеділок; Учора був не понеділок.
б) Оленка любить яблука; Оленка не любить яблука.
в) Точка A лежить на прямій b; Точка A не лежить на прямій b.
г) Ця ложка — дерев'яна; Ця ложка — металева.

10. Укажіть пари супротивних тверджень.
а) Автомобіль зупинився біля будинку; Автомобіль зупинився не біля будинку.
б) Число 7 є парним; Число 7 є непарним.
в) Ці джинси — чорні; Ці джинси — білі.
г) Дмитрик розв'язав задачу; Дмитрик не розв'язав задачу.

Середній рівень

11. Наведіть три приклади істинних тверджень і три приклади хибних тверджень.

12. Сформулюйте три істинних твердження і три протилежних їм твердження.

13. Визначте, які з поданих тверджень є істинними, а які — хибними: а) Сонце сходить на заході; б) число 3 є простим; в) український алфавіт містить 33 букви; г) кенгуру є морською твариною; д) квадрат має 5 сторін; е) у тижні 7 днів.

14. Визначте, які з поданих тверджень є істинними, а які — хибними: а) Канада — європейська країна; б) число 12 є непарним; в) англійський алфавіт містить 26 літер; г) синій кит — найбільша в світі риба; д) число 111 ділиться націло на 3; е) одразу після березня починається січень.

15. До кожного твердження в лівій колонці виберіть супротивне твердження в правій колонці.

1) Пряма перетинає відрізок.	А) Сьогодні дощу немає.
2) Число a ділиться націло на 12.	Б) Число a не більше за число b.
3) Число a більше за число b.	В) Число a не ділиться націло на 12.
4) Сьогодні йде дощ.	Г) Відрізок перетинає пряму.
	Д) Пряма та відрізок не перетинаються.

16. До кожного твердження в лівій колонці виберіть супротивне твердження в правій колонці.

1) Дніпро впадає в Чорне море.	А) Пряма d не має спільних точок із колом.
2) Точка A належить прямій a.	Б) Пряма a не проходить через точку A.
3) Число a не менше від числа b.	В) Дніпро не впадає в Чорне море.
4) Пряма d має спільні точки з колом.	Г) Число a менше від числа b.
	Д) Пряма d дотикається до кола.

17. Який висновок можна зробити з поданих тверджень?

а) Усі хлопці 7-А класу люблять грати у футбол. Василь навчається в 7-А класі. Отже, Василь...

б) Усі дівчата 7-Б класу гарно співають. Оленка навчається в 7-Б класі. Отже, Оленка...

в) Усі батьки учнів і учениць 7-В класу працюють на електростанції. Син пана Івана навчається в 7-В класі. Отже, пан Іван...

г) Усі учні й учениці 7-Г класу вивчають японську мову. Надійка навчається в 7-Г класі. Отже, Надійка...

18. Який висновок можна зробити з поданих тверджень?

а) Усі риби вміють плавати. Карась — риба. Отже, карась...

б) Усі родичі Марійки мають карі очі. Тарас — Марійчин брат. Отже, Тарас...

в) Усі зірки випромінюють енергію. Сонце — зірка. Отже, Сонце...

г) Сума двох непарних чисел є парним числом. Числа a і b є непарними. Отже, сума $(a+b)$...

Достатній рівень

19. Задано твердження: «Із 32 дітей у класі принаймні у двох збігається число їх дня народження». Доведіть це твердження методом від супротивного. Скористайтеся підказками.

Доведення.

Припустимо супротивне: [ ]. Тоді в місяці має бути [ ] дні, а ми знаємо, що кількість днів у місяці не може бути більше [ ]. Отримали суперечність, отже, наше припущення було неправильним. Тоді правильним є те, що [ ].

20. Задано твердження: «В автобус, обладнаний 12 подвійними місцями, зайшов 21 пасажир. Доведіть, що принаймні

один пасажир має вільне місце поруч». Доведіть твердження методом від супротивного. Скористайтеся підказками.

Доведення.

Припустимо супротивне: . Тоді в автобусі має бути пасажири, а ми знаємо, що за умовою їх . Отримали суперечність, отже, наше припущення було неправильним. Тоді правильним є те, що .

21. Доведіть, що значення виразу $|x-4|+(x+1)^2$ завжди буде невід'ємним числом.

22. Доведіть, що значення виразу $(x+y)^2+|2x-y|$ завжди буде невід'ємним числом.

23. Доведіть, що значення виразу $-x^2+8x-17$ завжди буде від'ємним числом.

24. Доведіть, що значення виразу $a^2-6a+12$ завжди буде додатним числом.

25. Доведіть, що значення виразу $(2+a)^2-2(a+1)-a(a+2)$ не залежить від значення змінної a.

26. Доведіть, що значення виразу $(x+y)^2+2x(y-x)+(x-y)(x+y)$ не залежить від значень змінних x і y.

27. Доведіть, що сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться націло на 3.

28. Доведіть, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться націло на 4.

29. Доведіть, що з будь-яких трьох натуральних чисел завжди є два числа, сума яких ділиться націло на 2.

30. Доведіть: якщо число a — парне, а число b ділиться націло на 3, то добуток ab ділиться націло на 6.

Високий рівень

31. На чарівному острові живуть тільки фантазери й не фантазери. Фантазери завжди говорять неправду, але роблять це не для того, щоб когось надурити, а тому, що будь-яке істинне твердження вважають хибним, а хибне — істинним. Не фантазери ніколи не говорять неправду. В одного з мешканців острова запитали: «До якого типу жителів ви відноситеся?» Чи міг він відповісти: «Я — фантазер»? Відповідь обґрунтуйте.

32. На одному боці аркуша паперу написано: «Те, що написано на іншому боці аркуша, — неправда», а на іншому боці: «Те, що написано на іншому боці аркуша, — правда». Чи можна визначити, на якому боці аркуша написане істинне твердження, а на якому — хибне? Відповідь обґрунтуйте.

33. Один семикласник у компанії друзів запропонував спір: «Я поставлю порожню пляшку на середину кімнати і заповзу в неї». Хлопець зумів перемогти. Внаслідок якої підміни понять він переміг?

34. Батько вирішив задати своїй доньці-семикласниці каверзне завдання: «Назви найбільше число». Донька зуміла назвати таке число й обґрунтувала правильність відповіді. Яке число назвала дівчина? Внаслідок якої підміни понять її відповідь виявилася правильною?



35. Дано три твердження:

1) натуральне число x є дільником числа 12;
2) натуральне число x є парним;
3) натуральне число x є простим.

Знайдіть значення x, якщо перше твердження є істинним, а друге і третє — хибними.

36. Дано три твердження:
1) натуральне число x менше від 70;
2) натуральне число x є двоцифровим;
3) натуральне число x не ділиться на 30.
Знайдіть значення x, якщо друге твердження є істинним, а перше і третє — хибними.

37. З'ясуйте, істинним чи хибним є твердження.

а) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$;

б) $x^4-y^4=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$;

в) $x^4-x^2y^2+y^4=(x^2-y^2)^2$.

38. З'ясуйте, істинним чи хибним є твердження.

а) Периметр квадрата площею 25 см^2 дорівнює 10 см.

б) Якщо периметр квадрата дорівнює 32 см, то його площа дорівнює 64 см^2.

в) Із чотирьох квадратів зі стороною 3 см утворили прямокутник, периметр якого дорівнює 48 см.

39. П'ятнадцять хлопців зібрали 100 грибів. Доведіть, що принаймні двоє з них зібрали однакову кількість грибів.

40. У районі 14 шкіл. Доведіть, що як би між школами не розподіляли 80 комп'ютерів, обов'язково будуть дві школи, які отримають однакову кількість комп'ютерів (можливо — жодного).

41. У деякому місті за місяць народилося 65 малюків. Доведіть, що серед малюків є троє, які народилися в один день.

42. У похід пішла туристична група з 12 осіб. Наймолодшій із них — 13 років, а найстаршій — 23. Доведіть, що в туристичній групі є однолітки.



43. У школі 740 дітей. Доведіть, що серед них є троє, які святкують свій день народження в той самий день.

44. У математичному змаганні брало участь 30 дітей. Кожній дитині було запропоновано 9 задач. Тільки Андрійко розв'язав 9 задач, а всі інші — менше. Доведіть, що є чотири дитини, які розв'язали однакову кількість задач (можливо — жодної).



Цікавинки від дідуся Тараса

Логіка (від грецьк. λογική, а також λόγος — слово, значення, думка, мова) — це наука про закони та різновиди мислення, способи пізнання й умови істинності знань і суджень, про найпростіші форми, принципи та методи правильного міркування. Традиційно логіка є важливою частиною філософії, проте вона широко застосовується й у математиці, природничих науках, інформатиці тощо.

Надзвичайно цікавими в логіці є вчення про софізми та парадокси.

Софізм (у перекладі з грецьк. — хитра вигадка, виверт) — це неправильне твердження, що формально здається правильним, а насправді в його обґрунтуванні *свідомо* було допущено помилку, яка в підсумку й призводить до неправильних висновків. Ці висновки можуть виглядати досить комічно: $4 = 5$; будь-який тупий кут дорівнює прямому тощо.

Парадокс (у перекладі з грецьк. — несподіваний, дивний) — це правильне твердження, висновки з якого є несподіваними та суперечать усталеним поглядам. Парадокси поширені в математиці, мистецтві, природничих науках, філології тощо. Наприклад, ви знаєте, що ймовірність неможливої події дорівнює нулю. Парадоксальним є факт, що обернене твердження є неправильним, тобто якщо ймовірність випадкової події дорівнює нулю, то вона не обов'язково неможлива, а цілком може відбутися. З доведенням цього факту ви ознайомитеся пізніше.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Чи знайомі ви із софізмами та парадоксами? Якщо так, то за бажання розкажіть, за яких обставин відбулося це знайомство і хто саме познайомив вас із софізмами чи парадоксами.

2. Користуючись додатковими джерелами інформації, підготуйте невелике повідомлення про відомі софізми. Які логічні помилки були допущені в їх обґрунтуванні?

3. Користуючись додатковими джерелами інформації, підготуйте невелике повідомлення про відомі парадокси. Як ви вважаєте, чи залежить парадоксальність сприйняття несподіваних фактів від часу та розвитку суспільства? Якщо так, то яким чином? Якщо ні, то чому?

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. В одному з класів лінгвістичного ліцею навчаються 32 учні. Із них 16 вивчають додатково польську мову, а 12 — чеську. 7 учнів вивчають додатково і польську, і чеську мови. З'ясуйте, скільки учнів цього класу вивчають додатково: а) лише польську мову; б) лише чеську мову. Скільки учнів цього класу не вивчають додатково ані польської, ані чеської мови?

2. У трикутнику ABC сторона AB на 5 см більша за сторону BC і вдвічі більша за сторону AC. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 25 см. Як ви вважаєте, чи є в цьому трикутнику тупий кут? Чому ви так вважаєте?

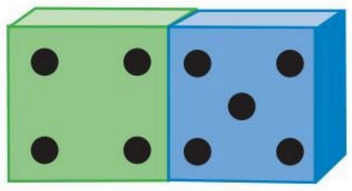
3. Розв'яжіть рівняння.

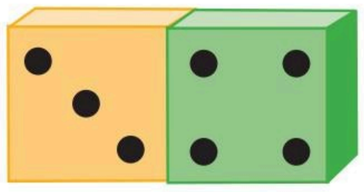
а) $\frac{x+8}{3}=x$; б) $\frac{y}{2}-\frac{y+2}{3}=4$; в) $\frac{2-t}{4}+1=t$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x+y=-7, \\ y-x=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=3, \\ x-3y=-7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=9, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$

5. Поміркуйте, яке слово має бути замість знака питання.

КОРВЕТ  КОРТ

МОЛОТОК  ?

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 4

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Яке з наведених понять є абстрактним?

А	Б	В	Г
«Дерево»	«Апельсин»	«Гордість»	«Струмок»

2. Яке з наведених понять є неозначуваним?

А	Б	В	Г
«Поліном»	«Лінійне рівняння»	«Система рівнянь»	«Множина»

3. Твердження, яке доводять за допомогою логічних міркувань, називається...

А	Б	В	Г
аксіомою	теоремою	означенням	поняттям

4. Укажіть істинне твердження.

А	Усі крокодили мають червоний колір шкіри.
Б	Окремі камені в морі можуть бути сухими.
В	У Києві сонце щодня сходить і заходить.
Г	Усі люди мають зріст, менший від 2 метрів.
Д	Деякі павуки мають 10 лапок.

5. Укажіть хибне твердження.

А	$2(x+y)=2x+2y$
Б	$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
В	$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
Г	$x^2+y^2=(x+y)(x+y)$
Д	$5xy-10y=5y(x-2)$

6. Усі тварини сімейства котячих мають 4 лапи. Леви належать до сімейства котячих. Укажіть правильний висновок, який можна зробити із цих двох тверджень.

А	Кожен лев має 4 лапи.
Б	Лише окремі леви мають 4 лапи.
В	Кожна тварина із сімейства котячих є левом.
Г	Лише окремі леви є тваринами із сімейства котячих.
Д	Кожна тварина із сімейства котячих, яка має 4 лапи, є левом.

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. Дано твердження: «Нехай $f(x)$ — поліном степеня n (n — натуральне число), який містить лише змінну x. Рівняння виду $f(x)=0$ є лінійним». Знайдіть n, якщо відомо, що подане твердження є істинним.

8. На першому поверсі в ліфт 9-поверхового будинку зайшло m осіб. Знайдіть *найменше* з можливих значень m, щоб ще до відправлення ліфта можна було точно сказати, що принаймні дві особи з тих, хто зайшов, вийдуть на одному поверсі.

9. Дано три твердження:
1) натуральне число x більше за 10 і менше від 20;
2) натуральне число x є простим;
3) натуральне число x є парним.
Знайдіть x, якщо перше твердження є істинним, а друге і третє — хибними.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Спробуйте дати означення поняття «стілець», використовуючи більш загальні поняття і продовжуючи ланцюжок означень скільки можливо. До якого неозначуваного поняття ви врешті прийшли?

11. Згадайте вивчене раніше і дайте означення: а) найбільшого спільного дільника (НСД) двох натуральних чисел; б) найменшого спільного кратного (НСК) двох натуральних чисел. Які більш загальні чи неозначувані поняття ви використовували?

12. Чи правильними є наведені міркування? Якщо в них є логічна помилка, то який закон логіки порушено?
«Окремі баскетболісти мають зріст, більший за 190 см. Микола має зріст 192 см. Отже, Микола — баскетболіст».

13. Чи правильними є наведені міркування? Якщо в них є логічна помилка, то який закон логіки порушено?
«Олена купила пиріжок. Відомо, що він не солоний. Отже, Олена купила солодкий пиріжок».

14. Доведіть методом від супротивного, що дріб $\frac{25}{36}$ є нескоротним. Запропонуйте також доведення цього твердження шляхом безпосередньої побудови ланцюжка істинних тверджень. Який зі способів доведення вам видається простішим? Відповідь обґрунтуйте.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. На столі — ряд із 6 однакових чашок. Три перші з них порожні, а інші три — з водою. Як домогтися чергування порожніх чашок і чашок із водою, торкнувшись тільки однієї чашки? Яке істинне твердження доведеться використати додатково до тверджень в умові задачі, щоб побудувати ланцюжок дій для її розв'язування?



2. До річки без мосту одночасно наблизилися дві людини. Дістатися до іншого берега їм може допомогти човен, який розрахований лише на одну людину. Проте без сторонньої допомоги обидві людини переправилися на протилежний берег на цьому човні. Як вони впоралися? Яке додаткове твердження вам довелося додати до умови задачі, щоб вона мала розв'язок?

3. У школі навчаються 1090 дітей. Доведіть, що принаймні у двох із них збігаються ініціали.

4. На 5 полицях шафи стоять 160 книжок. На одній із полиць — 3 книжки. Доведіть, що є полиця, на якій стоїть не менше 40 книжок.

5. Доведіть, що серед будь-яких шести натуральних чисел є два числа, різниця яких буде кратною 5.

6. Доведіть, що серед будь-яких трьох простих чисел, більших за 3, є два числа, різниця яких буде ділитися на 3.

7. Доведіть, що серед довільних семи натуральних чисел можна знайти три числа, сума яких ділиться на 3.

8. Петрик «довів», що $2=4$. Для цього він відняв від обох частин рівності по 3 (правильність рівності не змінилася). А потім підніс обидві частини одержаної рівності до квадрата. Послідовно одержав: $2-3=4-3$; $(-1)^2=1^2$; $1=1$ — правильна рівність. Отже, на думку хлопця, і задана рівність є правильною. Який із законів логіки порушено в цьому «доведенні»? Поясніть свою відповідь.

9. Тетянка «довела», що $4=5$. Для цього вона взяла правильну рівність $4:4=5:5$ і виконала перше перетворення: $4(1:1)=5(1:1)$. Потім, поділивши обидві частини рівності на вираз $1:1$, одержала «правильну» рівність $4=5$. Який із законів логіки порушено в цьому «доведенні»? Поясніть свою відповідь.

Зміст поняття — content of the notion
Обсяг поняття — volume of the notion
Неозначуване поняття — undefined notion
Істинне (хибне) твердження — true (false) statement
Логічні міркування — logical reasoning
Метод доведення від супротивного — method of proof from the contrary

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

Поняття

Неозначувані

«Множина», «доброта», «точка», «справедливість» …

приклади

Означувані

«Чашка», «тарілка», «кіт», «сосна», «графік функції» …

приклади

Зміст поняття

Обсяг поняття

Твердження

Аксіоми

Істинність встановлюється за домовленістю

Теореми

Доводяться, тобто істинність установлюється на основі законів логіки шляхом міркування.

Закони логіки

1) Закон тотожності
2) Закон протилежності
3) Закон виключення третього
4) Закон достатньої підстави

РОЗДІЛ 5.
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

CHAPTER 5.
THE SIMPLEST GEOMETRIC FIGURES ON THE PLANE AND THEIR PROPERTIES

§ 16. Найпростіші геометричні фігури на площині. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками

Геометричні фігури. Точки та прямі



Петрику, потрібна допомога. Збираємося завтра їхати автомобілем із Вінниці до Тернополя. Цікаво, як правильно визначити відстань між цими містами? Бо різні джерела показують різні значення: від 210 до 240 км. А 30 км — це досить велика відмінність!



Це зрозуміло, оскільки міста — це не точки, вони мають розміри, тому треба домовитися, від якої до якої точки рахувати. Раніше точкою відліку відстаней у кожному місті вважали головний поштамт і в довідниках зазначали відстань між містами як відстань між їх головпоштамтами. А на карті будували відрізок між двома головпоштамтами міст, вимірювали його довжину, а далі, ураховуючи масштаб карти, визначали відстань між містами по прямій. Бо природно вважати відстанню між точками саме довжину відрізка, який їх сполучає.



Масштаб — відношення довжини відрізка на карті / на макеті до довжини відрізка на місцевості / на реальному об'єкті.



Цікаво, але зараз, мабуть, якось не так вимірюють відстані, бо вебсервіс Google Maps (Карти Google), наприклад, показує відстані та розраховує приблизний час для пересування пішки, автомобілем, велосипедом чи громадським транспортом. І там скрізь різні відстані!



Правильно, відстань між точками по прямій — найменша з можливих, інші відстані залежать від траєкторії руху. Зараз Google Maps використовує для визначення відстаней карти доріг, а для визначення положення об'єкта — систему GPS.

До речі, на сучасних картах за координатами GPS можна визначити відстань між двома конкретними місцями — точками на карті — як по прямій, так і за траєкторією, якою потрібно рухатися — пішки, автомобілем, громадським транспортом тощо. Як на мене, це дуже зручно!

GPS (від англ. Global Positioning System — система глобального позиціювання) — сукупність радіоелектронних засобів, що дозволяє визначити положення та швидкість руху об'єкта на поверхні Землі або в атмосфері.



Звісно, зручно! Але я подумала ось про що. Точка — це абстрактне неозначуване поняття математики. А виявляється,

що моделлю цього поняття може бути не лише слід від дотику олівця чи крейди, а ще і якесь конкретне місце на місцевості на кшталт головпоштамту або навіть ціле місто, якщо масштаб карти досить великий.



Супер! Тоді довжина відрізка певним чином моделює відстань по прямій між двома реальними об'єктами на місцевості. Хоча поняття відрізка, мабуть, не є неозначуваним — це частина прямої. Цікаво було б дізнатися про це більше!



Дійсно, як ми вже зазначали в розділі 4, поняття точки, прямої та площини є неозначуваними математичними поняттями. Їх моделями можуть виступати різні реальні об'єкти — будинок, шосе, поле тощо. Навіть планета Земля з великої відстані здається маленькою точкою в неозорому океані Всесвіту.

Точки, прямі та частини прямих використовували з давніхдавен для розмежування земельних наділів і вимірювання їх величин. Саме тому розділ математики, пов'язаний із такими завданнями, назвали геометрією (у перекладі з грецької — *землемірство*).



У геометрії, крім неозначуваних понять, використовують також багато важливих понять, яким дають означення. Наведемо деякі з таких означень.



Геометричною фігурою вважатимемо будь-яку множину точок.

Якщо геометрична фігура є частиною площини, то її називають плоскою геометричною фігурою, у протилежному випадку її називають просторовою геометричною фігурою.

Так, прямокутник і круг є плоскими геометричними фігурами*, а прямокутний паралелепіпед і куля — просторовими.



Відрізок — це частина прямої, яка складається з усіх тих і лише тих точок, що лежать між двома заданими точками цієї прямої.

У такому випадку дві задані точки прямої називають кінцями відрізка, а інші точки відрізка — його внутрішніми точками. Будемо вважати, що кінці відрізка також належать цьому відрізку.

Традиційно точку позначають однією великою латинською буквою, пряму — однією маленькою латинською буквою, а відрізок — двома великим латинськими буквами, які водночас позначають його кінці. Наприклад, на рис. 16.1 зображено точки A, B, прямі l, p і відрізок MK, який є частиною прямої p.

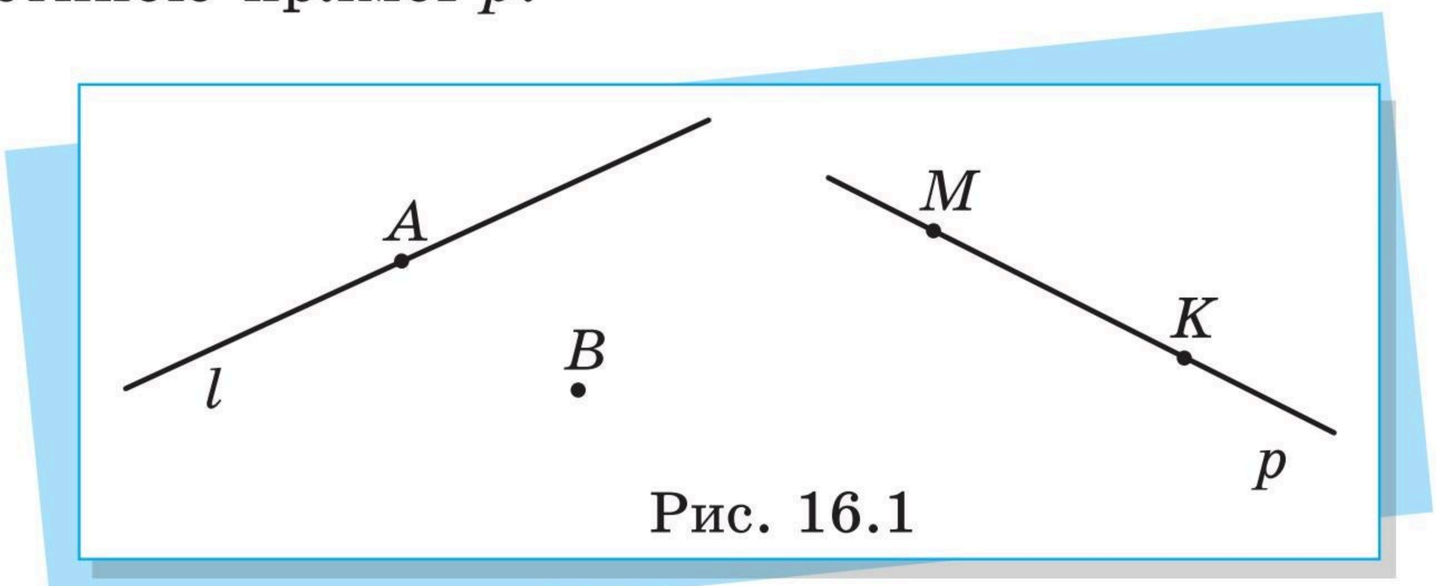


Рис. 16.1



Як бачимо, точка A належить прямій l, а точка B не належить прямій l. Символами це позначають так: $A \in l$ і $B \notin l$. Отже:



Для будь-якої прямої існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

* Далі, якщо не зазначено інше, будемо вважати, що всі геометричні фігури, які ми розглядаємо, є плоскими.

Наведене твердження вважається аксіомою, тож його істинність приймаємо без доведення. Також аксіомою є таке твердження.

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

З останньої аксіоми випливає, що пряму можна також позначати двома точками, оскільки вони її однозначно визначають. Наприклад, пряму p можна позначити як MK (див. рис. 16.1).



Очевидно, що поняття «належати» та «лежати між» також є неозначуваними. Вони інтуїтивно зрозумілі та легко моделюються за допомогою рисунків. Наприклад, очевидним є те, що з трьох точок на прямій одна і лише одна лежить між двома іншими.



Інші властивості геометричних фігур можна подати у вигляді *теорем*. Наприклад, доведемо таке твердження.

ТЕОРЕМА (про кількість спільних точок прямих, що перетинаються).

Якщо дві різні прямі перетинаються, то вони можуть мати лише одну спільну точку.

Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо *супротивне*: дві різні прямі m і l мають більше однієї спільної точки. Тоді існують дві точки — K і P, що належать як прямій m,

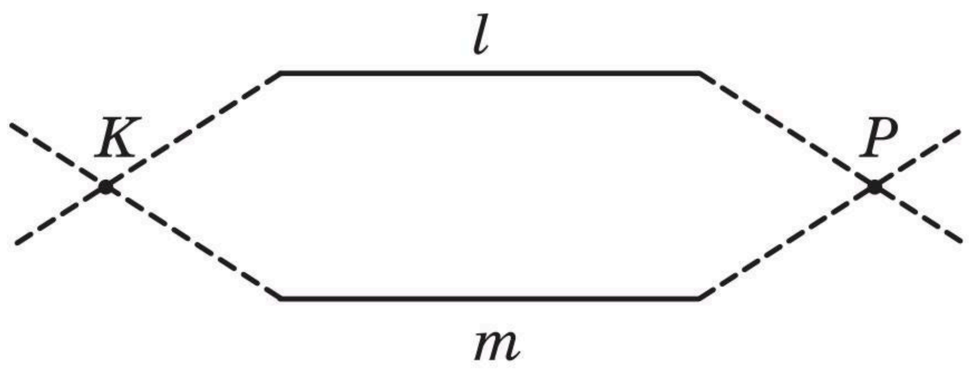


Рис. 16.2

так і прямій l (рис. 16.2). Тобто через точки K і P проведено дві *різні* прямі. Але це суперечить аксіомі про те, що така пряма може бути *тільки одна*. Отже, наше припущення неправильне, а правильним є те, що було потрібно довести: якщо дві різні прямі перетинаються, то вони мають тільки *одну* спільну точку.

Відрізки, вимірювання відрізків



Поняття довжини відрізка роз'яснюється через такі аксіоми:

Кожен відрізок має довжину, більшу за нуль.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

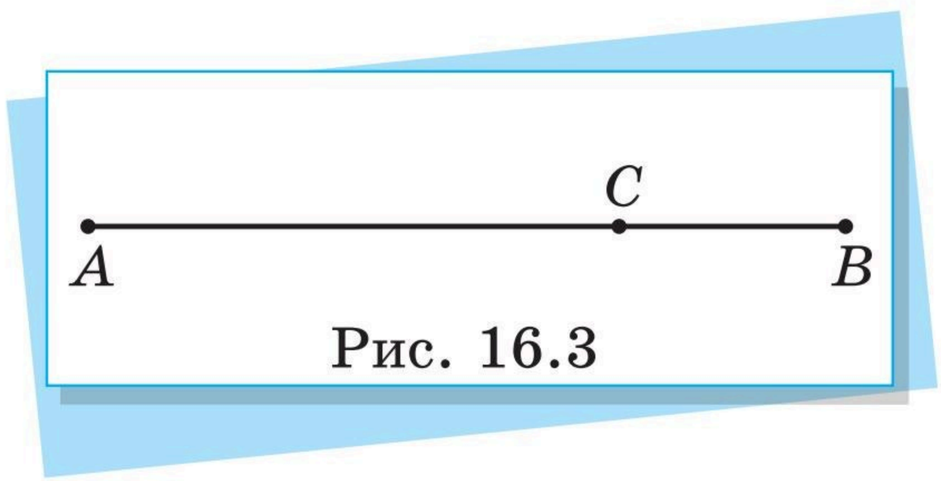


Рис. 16.3

Довжину відрізка позначають так само, як і сам відрізок. Наприклад, на рис. 16.3 зображено відрізок AB і його внутрішню точку C. Аксіома стверджує, що $AB = AC + BC$. А от якщо точка C лежить на прямій AB і не є внутрішньою точкою відрізка, то зрозуміло, що $AB < AC + BC$.



Ви вже вмієте вимірювати довжину відрізка за допомогою лінійки.

Під час вимірювання кожному відрізку ставиться у відповідність певне додатне число, яке позначає кількість одиничних відрізків, на які розбивається цей відрізок його внутрішніми точками.

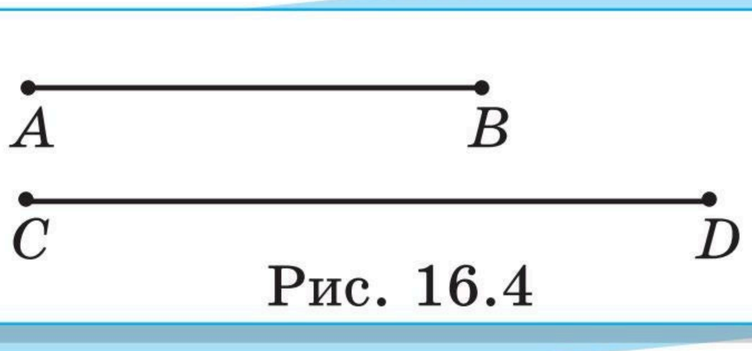


Рис. 16.4

Традиційно довжинами одиничних відрізків є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м тощо. На рис. 16.4 зображено відрізки $AB = 3$ см, $CD = 45$ мм.

Два відрізки називають рівними, якщо вони мають рівні довжини.

Відстань між двома точками — це довжина відрізка, який їх сполучає.

Середина відрізка — це внутрішня точка відрізка, яка розташована на однаковій відстані від його кінців.

Таким чином, якщо точка S — середина відрізка MK, то $MS = SK$.

Наприклад, нехай точки A, B, C, D розташовані так, як показано на рис. 16.5, причому точка C — середина відрізка AB, а D — середина відрізка CB. Відомо, що довжина відрізка CD дорівнює 2 см. Знайдемо довжину відрізка AB.

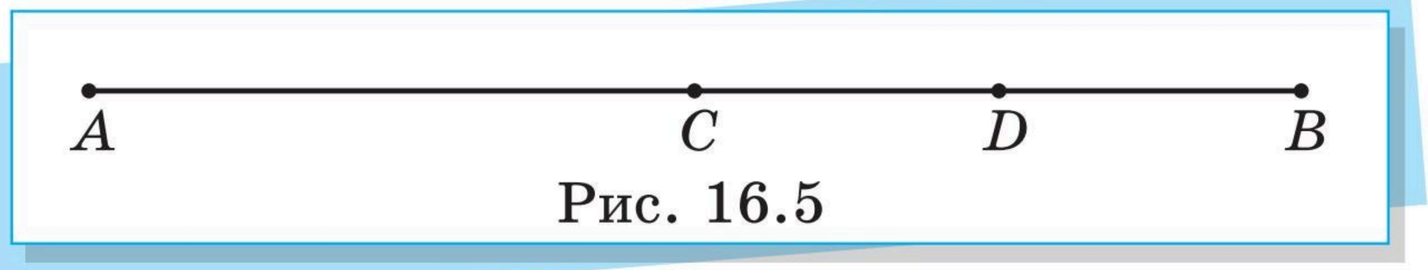


Рис. 16.5

Оскільки за умовою $CD = DB = 2$ см, то $CB = CD + DB = 2 \cdot CD = 4$ см. Крім того, за умовою $AC = CB$. Отже, маємо: $AB = AC + CB = 2 \cdot CB = 8$ см.



Розглянемо складнішу задачу.

Відомо, що села Абрикосове, Вишневе й Сливове розташовані на прямолінійній дорозі, причому село Вишневе розташовано між двома іншими селами. Відстань від Абрикосового до Сливового дорівнює 12 км, а відстань від Абрикосового до Вишневого на 2 км більша за відстань від Вишневого до Сливового. Знайдіть відстані від села Вишневе до двох інших сіл.

Зобразимо на рисунку села Абрикосове, Вишневе й Сливове точками A, B і C відповідно (див. рис. 16.6). За умовою задачі $AC = 12$ км. Якщо позначити відстань BC від Вишневого до Сливового як x (км), то відстань AB від Абрикосового до Вишневого становитиме $x + 2$ (км). За аксіомою про довжину відрізка $AB + BC = AC$, тому $x + x + 2 = 12$. Тобто $2x + 2 = 12$, $2x = 12 - 2$, $2x = 10$, $x = 5$ (км).

Отже, відстань від Вишневого до Сливового дорівнює 5 км, а відстань від Вишневого до Абрикосового — 7 км.

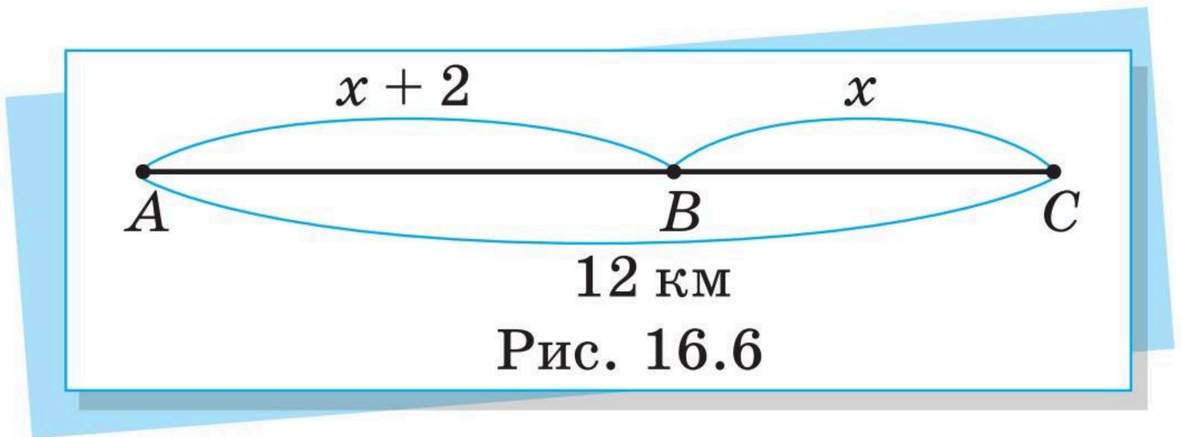


Рис. 16.6

Перевірте себе!

1. Назвіть основні неозначувані поняття геометрії. Наведіть приклади їх моделей.
2. Сформулюйте аксіоми, що стосуються належності точок прямій.
3. Сформулюйте й доведіть теорему про кількість спільних точок двох прямих, що перетинаються.

4. Дайте означення відрізка. Як позначають відрізок?
5. Дайте означення відстані між двома точками.
6. Дайте означення середини відрізка.
7. Які два відрізки називають рівними?
8. Сформулюйте аксіому, яка стосується відрізка та його довжини.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. На рис. 1 зображені прямі та точки.
   а) Які точки належать прямій a?
   б) Які точки не лежать на прямій b?
   в) Яка пряма проходить через точку C?
   г) Якій прямій належить точка E?

2. На рис. 2 зображені прямі та точки.
   а) Які точки не належать прямій c?
   б) Які точки лежать на прямій d?
   в) Яка пряма проходить через точку M?
   г) Якій прямій належить точка K?

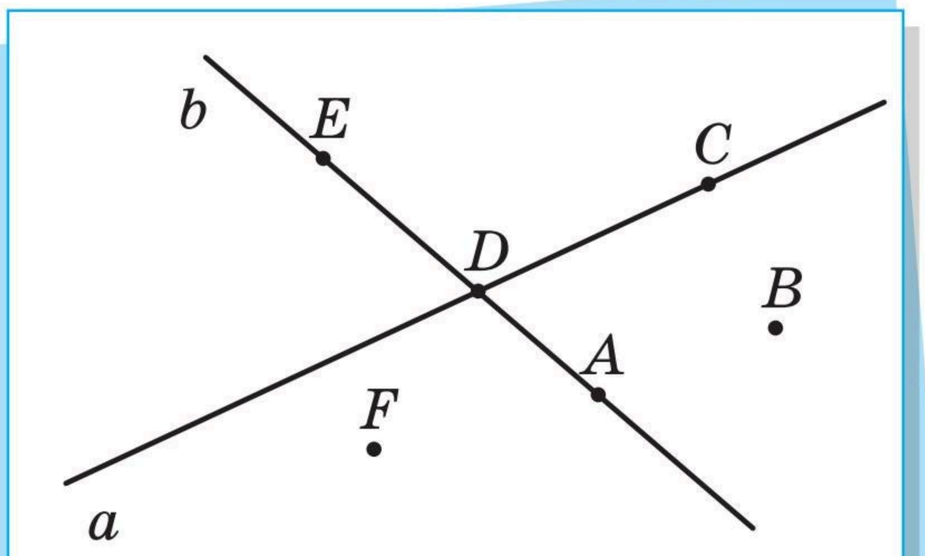


Рис. 1

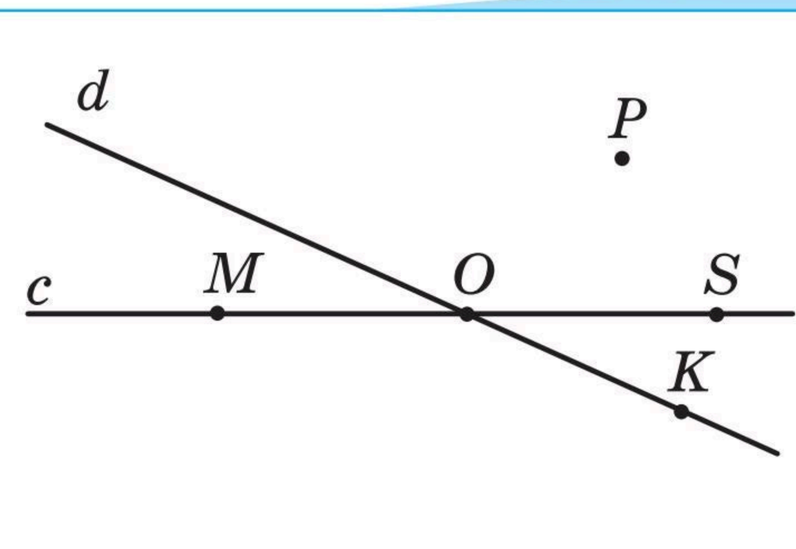


Рис. 2

3. На рис. 3 зображені пряма та точки. З'ясуйте, чи можна позначити пряму c таким чином: а) AD; б) MD; в) DK; г) AM.

4. На рис. 4 зображені пряма та точки. З'ясуйте, чи можна позначити пряму a таким чином: а) KM; б) KS; в) ML; г) SB.

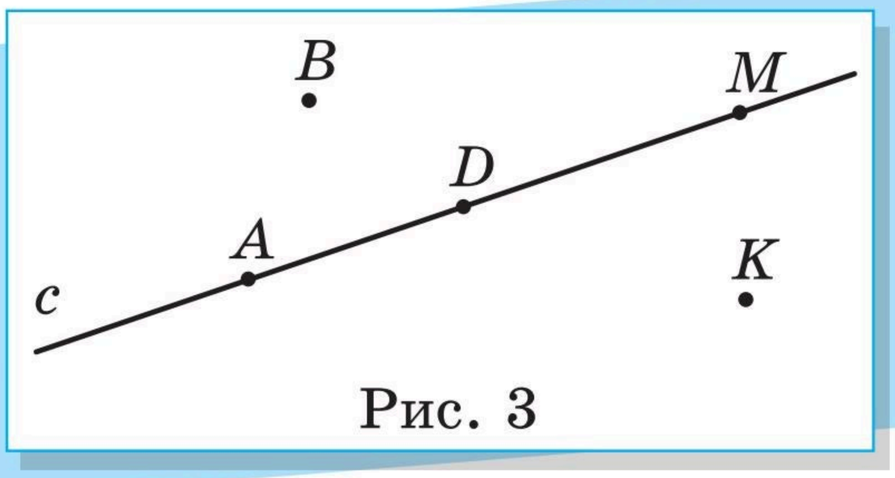


Рис. 3

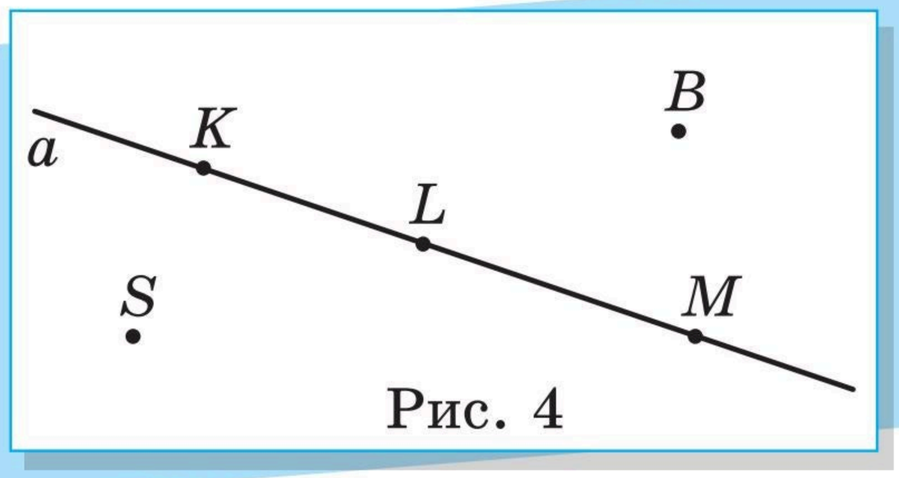


Рис. 4

5. Розгляньте рис. 5. З'ясуйте, скільки різних прямих можна провести так, щоб усі прямі одночасно містили: а) одну точку S; б) дві точки — M, L; в) три точки — K, L, P; г) чотири точки — M, K, L, P.

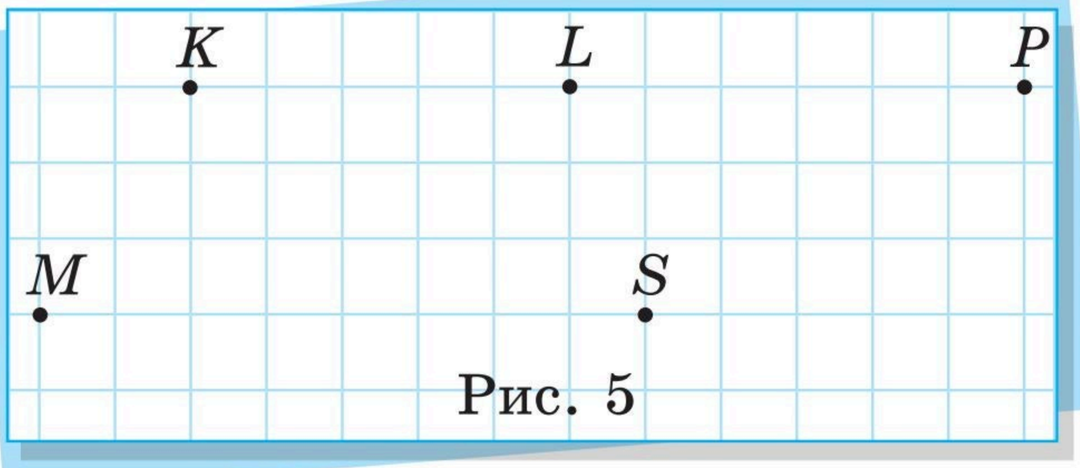


Рис. 5

6. Розгляньте рис. 6. З'ясуйте, скільки різних прямих можна провести так, щоб усі прямі одночасно містили: а) точку A; б) дві точки — B, C; в) три точки — A, B, C; г) чотири точки — A, C, D, E.

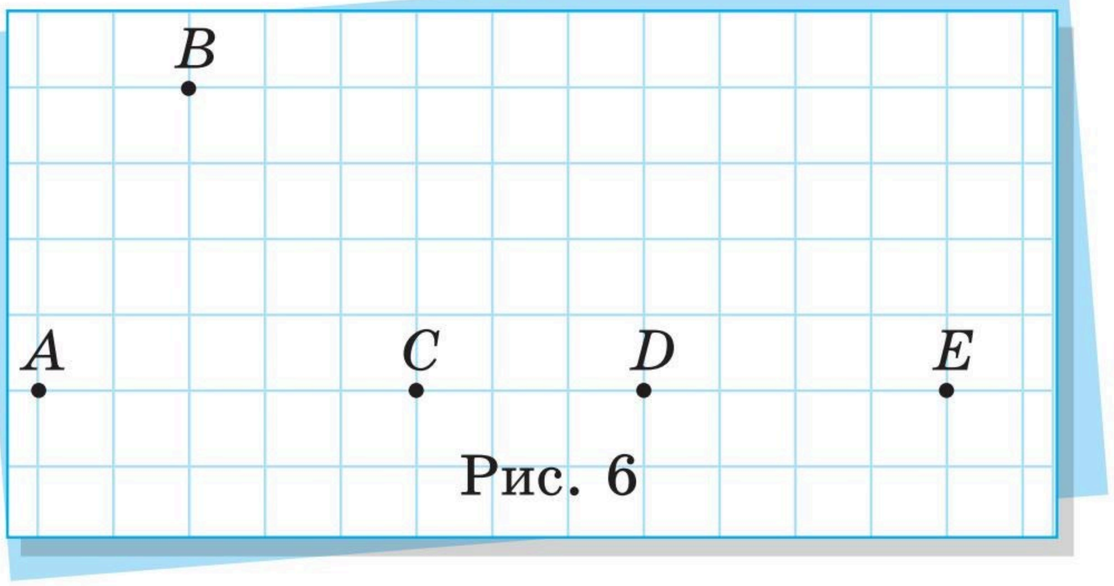


Рис. 6

7. Назвіть усі відрізки, які зображено на рис. 7.

8. Назвіть усі відрізки, які зображено на рис. 8.

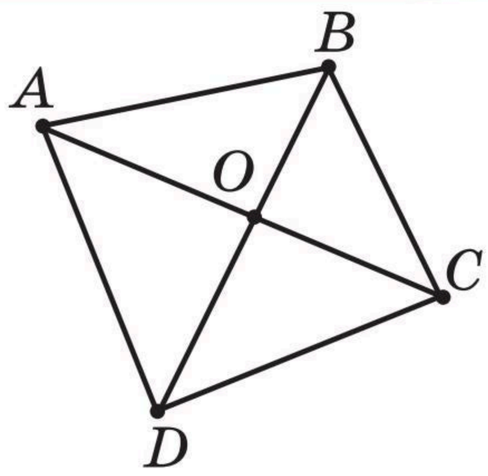


Рис. 7

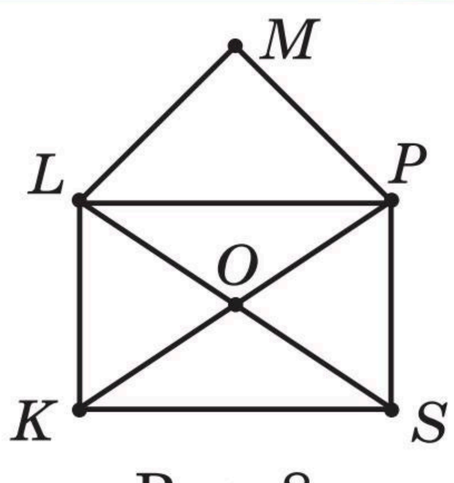


Рис. 8

9. На прямій a побудуйте відрізок BC довжиною 5 см. Позначте на прямій a точку K, яка є внутрішньою точкою відрізка BC.

10. На прямій b побудуйте відрізок KN довжиною 4 см. Позначте на прямій b точку C, яка не є внутрішньою точкою відрізка KN.

11. На рис. 9 зображено пряму й точки K, S, T, M, які їй належать. Укажіть усі трійки точок, у яких одна точка лежить між двома іншими. Запишіть відповідні рівності щодо довжин відрізків для кожної із цих трійок.

12. На рис. 10 зображено пряму й точки A, B, C, D, які їй належать. Укажіть усі трійки точок, у яких одна точка лежить між двома іншими. Запишіть відповідні рівності щодо довжин відрізків для кожної із цих трійок.

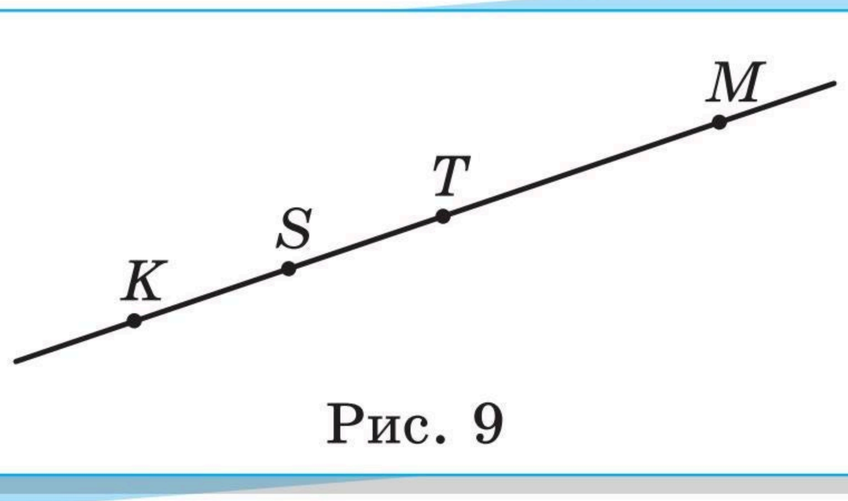


Рис. 9

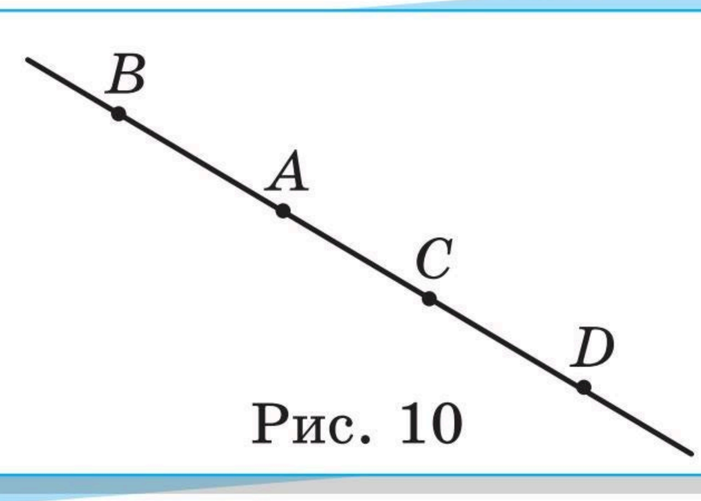


Рис. 10

13. Точка A є серединою відрізка BC, довжина якого дорівнює 8 см. Визначте довжину відрізка AC.

14. Точка K є серединою відрізка AM. Довжина відрізка AK дорівнює 10 см. Визначте довжину відрізка AM.

15. Уявіть, що олівець не має меж, тобто має нескінченну довжину. Тоді можна говорити, що олівець — це модель прямої. Чи можна те саме сказати про електричний стовп? про злітну смугу летовища?

16. Уявіть, що аркуш паперу є безмежним. Тоді можна говорити, що аркуш паперу — це модель площини. Чи можна те саме сказати про поверхню стола? про пшеничне поле?

Середній рівень

17. На рис. 11 задано точки A, M, K. Перенесіть рисунок до зошита та побудуйте всі можливі прямі так, щоб кожна пряма проходила через дві із заданих точок.

18. На рис. 12 задано точки C, D, N. Перенесіть рисунок до зошита та побудуйте всі можливі прямі так, щоб кожна пряма проходила через дві із заданих точок.

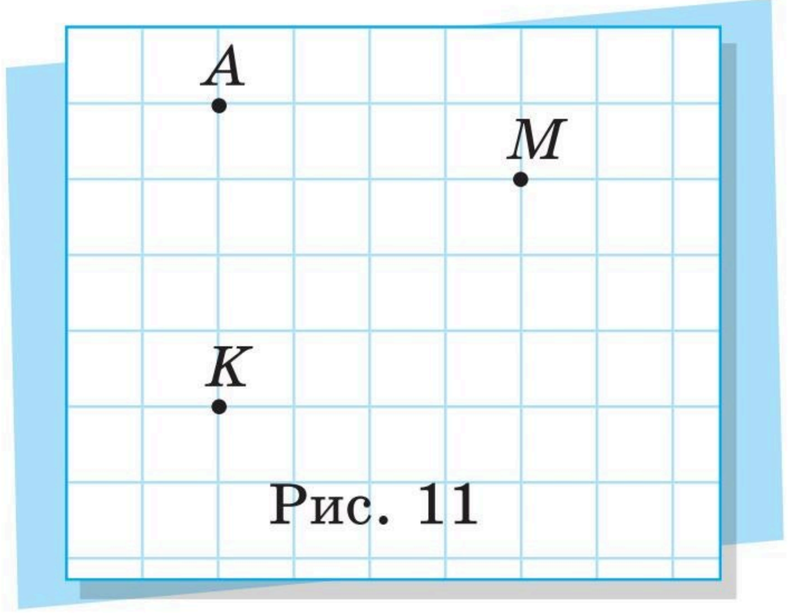


Рис. 11

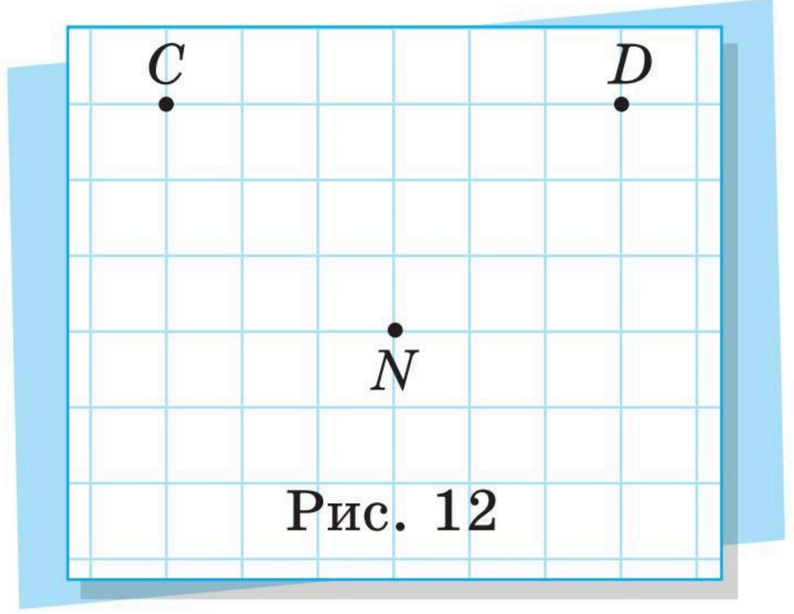


Рис. 12

19. Виміряйте довжини відрізків на рис. 13. Які відрізки рівні? Запишіть довжини виміряних відрізків у сантиметрах і міліметрах.

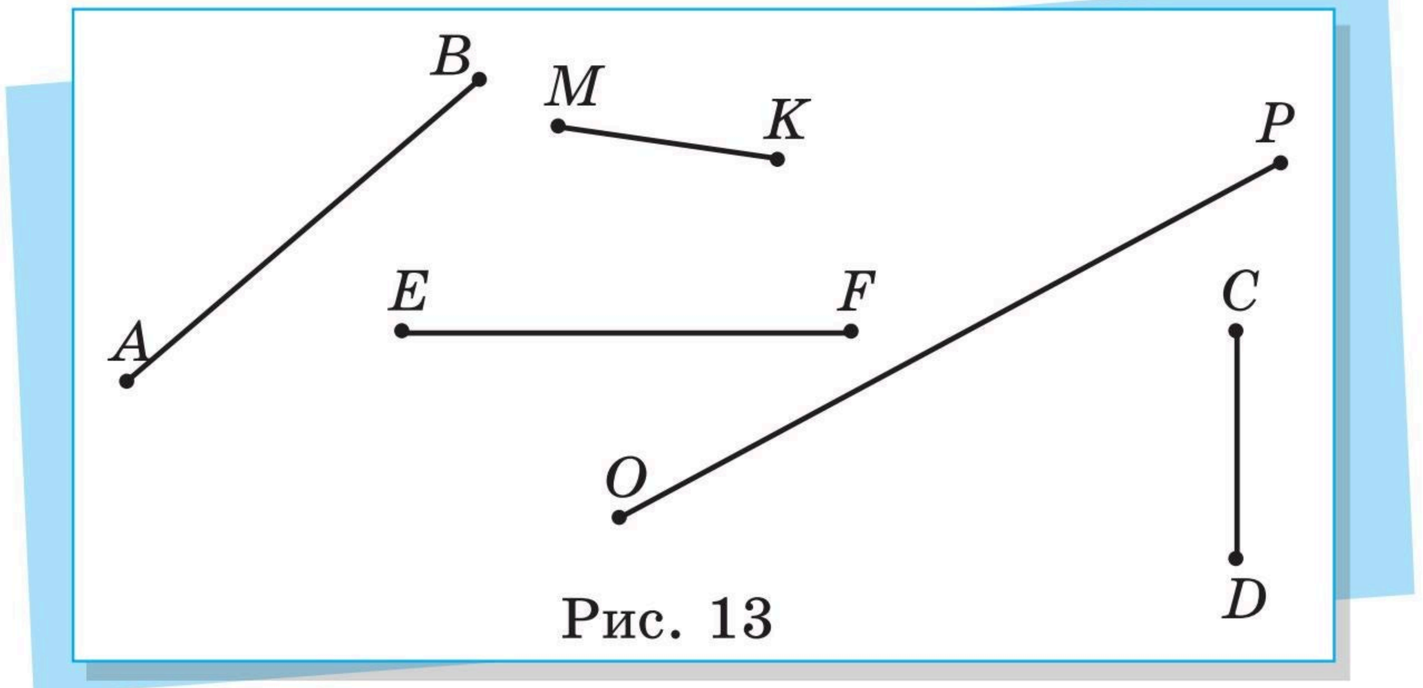


Рис. 13

20. Виміряйте довжини відрізків на рис. 14. Які відрізки рівні? Запишіть довжини виміряних відрізків у сантиметрах і міліметрах.

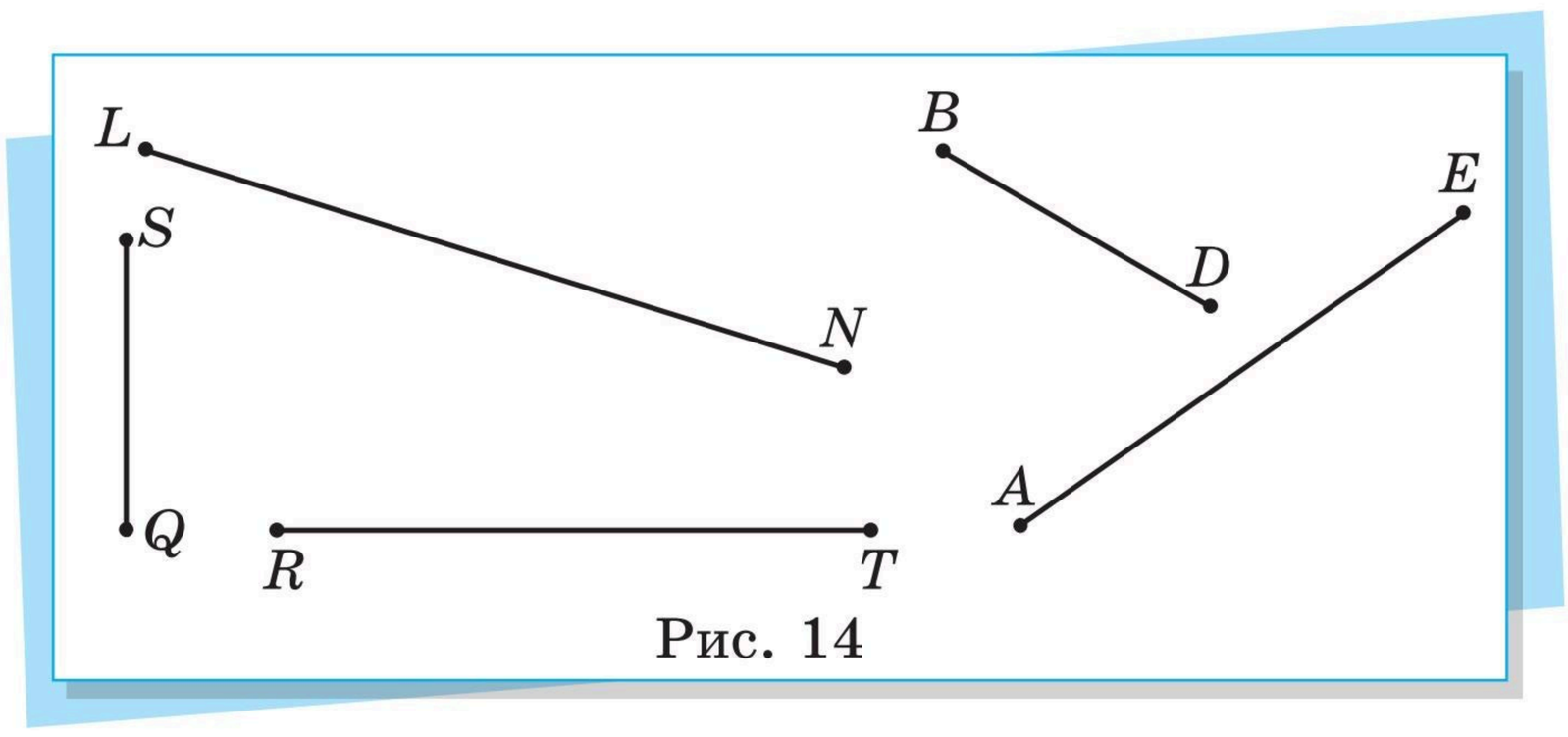


Рис. 14

21. Побудуйте пряму b. На прямій b позначте відрізок MN довжиною 6 см. Позначте точку S — середину відрізка MN.

22. Побудуйте пряму m. На прямій m позначте відрізок AB довжиною 4 см. Позначте точку O — середину відрізка AB.

23. Задано точки A, B, C, причому $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій?

Якщо так, то яка із зазначених точок лежить між двома іншими?

24. Задано точки P, S, T, причому $PS = 12$ мм, $ST = 10$ мм, $PT = 2$ мм. Чи лежать точки P, S, T на одній прямій? Якщо так, то яка із зазначених точок лежить між двома іншими?

25. Задано відрізок AB довжиною 12 см. Точка M є внутрішньою точкою відрізка AB. Знайдіть довжини відрізків AM і BM, якщо довжина відрізка AM на 3 см більша за довжину відрізка BM.

26. Задано відрізок MN довжиною 15 см. Точка O є внутрішньою точкою відрізка MN. Знайдіть довжини відрізків OM і ON, якщо довжина відрізка OM на 2 см менша від довжини відрізка ON.

27. Дарина вийшла з дому на прогулянку. Спочатку вона пройшла 300 м на схід, потім 200 м на південь, потім 300 м на захід і зайшла в кафе «Фіалка». Зобразіть схему маршруту Дарини на аркуші в клітинку. На якій відстані від дому Дарини розташовано кафе «Фіалка»?

28. Ілля шукав «піратський скарб» у себе на дачі. За схемою, яку дав йому дід Грицько, він спочатку йшов від великої яблуні в саду 20 м на північ, потім 40 м на захід, а потім 20 м на південь. У цьому місці Ілля почав копати і побачив, що «піратським скарбом» виявилася банка липового меду. Зобразіть схему діда Грицька на аркуші в клітинку. На якій відстані від великої яблуні був «скарб» діда Грицька?



29. Із пункту A до пункту B можна дістатися трьома різними шляхами (див. рис. 15). Виміряйте за допомогою лінійки довжину кожного шляху. Визначте, який шлях є найдовшим, а який — найкоротшим. На скільки міліметрів найдовший шлях більший, ніж найкоротший?

30. Із пункту M до пункту P можна дістатися трьома різними шляхами (див. рис. 16). Виміряйте за допомогою лінійки довжину кожного шляху. Визначте, який шлях є найдовшим, а який — найкоротшим. На скільки міліметрів найдовший шлях більший, ніж найкоротший?

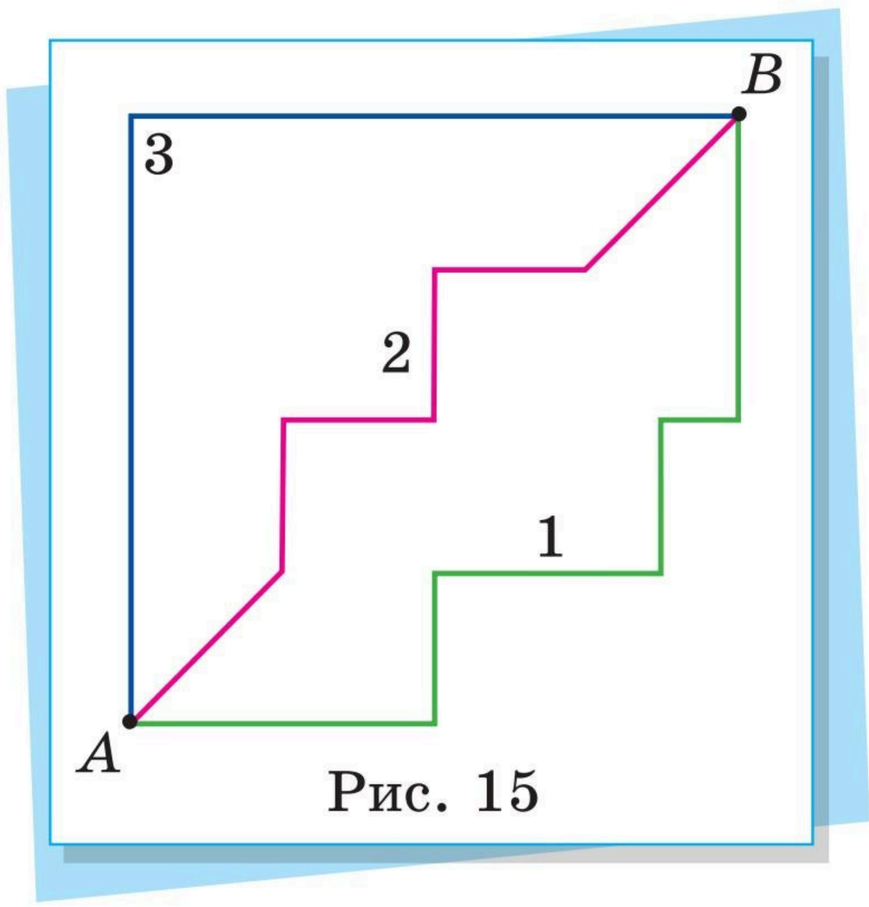


Рис. 15

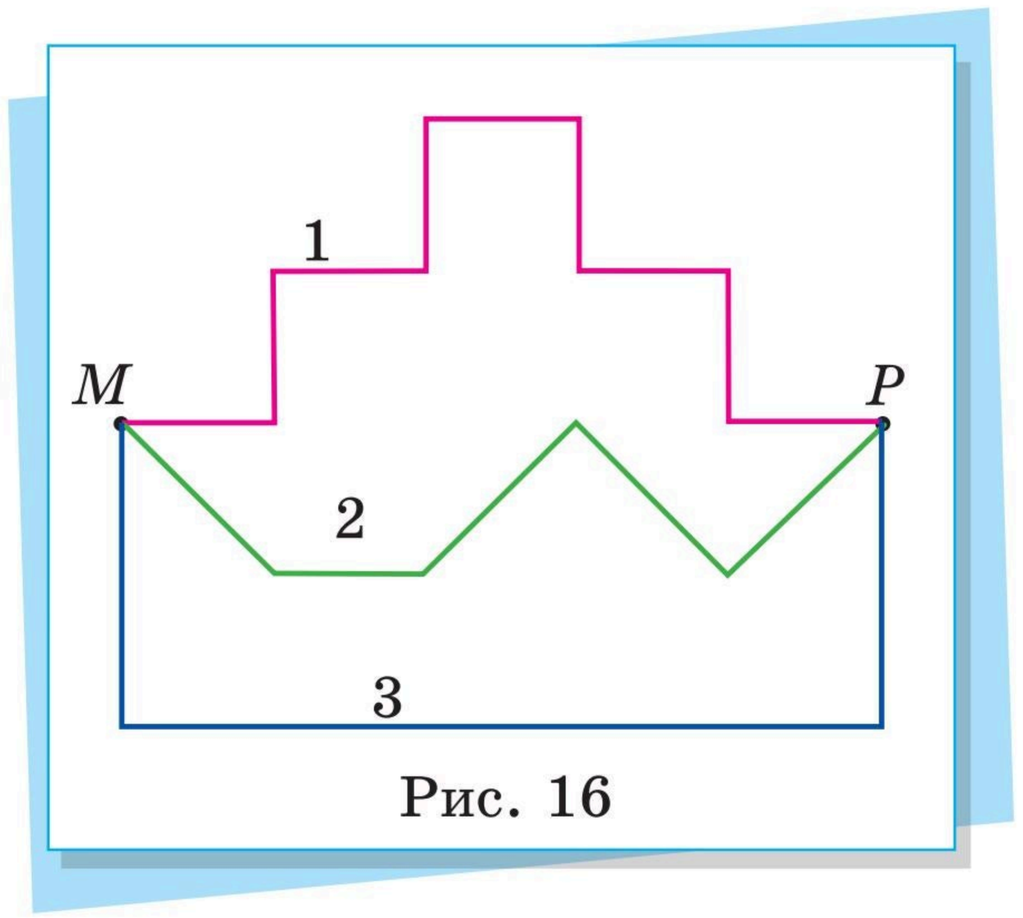


Рис. 16

31. Зобразіть у прямокутній системі координат пряму $y = 4$ і точки $A(-2; 4)$, $B(4; -3)$, $C(0; 4)$. Які із цих точок належать цій прямій, а які — не належать?

32. Зобразіть у прямокутній системі координат пряму $x = -2$ і точки $K(-2; -1)$, $L(4; -3)$, $P(0; -2)$. Які із цих точок належать цій прямій, а які — не належать?

Достатній рівень

33. Задано відрізок AB довжиною 12 см. Точка M — внутрішня точка відрізка AB. Знайдіть довжини відрізків AM і BM, якщо $AM : BM = 1 : 2$.

34. Задано відрізок MN довжиною 15 см. Точка O — внутрішня точка відрізка MN. Знайдіть довжини відрізків OM і ON, якщо $OM : ON = 2 : 3$.

35. Точки A, B і C належать прямій a. Укажіть точку, яка лежить між двома іншими, якщо: а) $AB = 9$ см, $AC = 6$ см, $BC = 3$ см; б) $AB = 7$ см, $AC = 12$ см, $BC = 5$ см.

36. Точки D, F і L належать прямій a. Укажіть точку, яка лежить між двома іншими, якщо: а) $DF = 5$ см, $DL = 12$ см, $LF = 7$ см; б) $DF = 10$ см, $DL = 4$ см, $LF = 6$ см.

37. Відрізок MN має більшу довжину, ніж відрізок PQ, але меншу, ніж відрізок AB. Відрізок PQ має більшу довжину, ніж відрізок ST. Який відрізок із зазначених має найбільшу довжину, а який — найменшу?

38. Відрізок OM має більшу довжину, ніж відрізок AB, але меншу, ніж відрізок PQ. Відрізок PQ має меншу довжину, ніж відрізок CD. Який відрізок із зазначених має найбільшу довжину, а який — найменшу?

39. Точка B — внутрішня точка відрізка AC. Знайдіть довжини відрізків AB, BC і AC, якщо за довжиною відрізок AB на 4 см й одночасно в півтора раза більший за відрізок BC.

40. Точка M — внутрішня точка відрізка KP. Знайдіть довжини відрізків KM, MP і KP, якщо довжина відрізка KM на 20 см менша від довжини відрізка MP, а відрізок MP за довжиною в 3 рази більший за відрізок KM.

41. На відрізку AB позначено точки C і N так, що $AC = 4$ см, $BN = 3$ см, $NC = 1$ см. Знайдіть довжину відрізка AB. Розгляньте всі можливі варіанти розташування точок.

42. На відрізку MN позначено точки O і P так, що $MO = PN = 3$ см, а $OP = 2$ см. Знайдіть довжину відрізка MN. Розгляньте всі можливі варіанти розташування точок.

43. На прямій a взято точки A, B, C так, що $AB = 5$ см, $BC = 3$ см. Якою може бути довжина відрізка AC залежно від розташування точок?

44. На прямій b взято точки O, P, Q так, що $OP = 6$ см, $PQ = 2$ см. Якою може бути довжина відрізка OQ залежно від розташування точок?

45. Відомо, що відстань між головними поштамтами Києва та Білої Церкви по прямій дорівнює 77 км. Визначте довжину (у см) відрізка, який з'єднує точки, що позначають ці населені пункти на карті масштабом $1:3\,100\,000$. Відповідь округліть до десятих.

46. Відомо, що відстань між головними поштамтами Києва та Кременчука по прямій дорівнює 256 км. Визначте довжину (у см) відрізка, який з'єднує точки, що позначають ці населені пункти на карті масштабом $1:5\,000\,000$. Відповідь округліть до цілих.

47. Знайдіть відстань між точками L і F, якщо $L(2;-5)$, $F(-4;-5)$.

48. Знайдіть відстань між точками K і M, якщо $K(-3;6)$, $F(-3;-5)$.

49. Зобразіть у прямокутній системі координат пряму $y = 2x - 3$, точку A, яка належить цій прямій, і точку B, яка не належить цій прямій. Знайдіть координати точок A і B. Яку властивість мають координати: а) точки A; б) точки B?

50. Зобразіть у прямокутній системі координат пряму $y = -3x - 1$, точку S, яка належить цій прямій, і точку N, яка не належить цій прямій. Знайдіть координати точок S і N. Яку властивість мають координати: а) точки S; б) точки N?

Високий рівень

51. З'ясуйте, чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо: а) $AB = 2$ см, $AC = 6$ см, $BC = 5$ см; б) $AB = 1$ см, $AC = 7$ см, $BC = 8$ см. Якщо так, укажіть, яка точка лежить між двома іншими точками.

52. З'ясуйте, чи лежать точки K, L, M на одній прямій, якщо: а) $KL = 8$ см, $KM = 3$ см, $LM = 5$ см; б) $KL = 4$ см, $KM = 6$ см, $LM = 12$ см. Якщо так, укажіть, яка точка лежить між двома іншими точками.

53. Точка M — середина відрізка AB, точка K — середина відрізка AM. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $KB = 12$ см.

54. Точка L — середина відрізка CD, точка N — середина відрізка LD. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $CN = 24$ см.

55. Відрізок довжиною 30 см розділили на три відрізки різної довжини. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

56. Відрізок довжиною 42 см розділили довільною точкою на два відрізки. Знайдіть відстань між серединами цих двох відрізків.

57. Дано чотири точки: A, B, C, D. Відомо, що точки A, B, C лежать на одній прямій і точки B, C, D також лежать на одній прямій. Доведіть, що всі чотири точки лежать на одній прямій.

58. Дано чотири прямі: a, b, c, d. Відомо, що прямі a, b, c перетинаються в одній точці й прямі b, c, d також перетинаються в одній точці. Доведіть, що всі чотири прямі перетинаються в одній точці.

59. Як потрібно розташувати шість точок, щоб вони визначали тільки шість різних прямих? Проілюструйте відповідь рисунком.

60. Провели чотири прямі, кожна з яких перетинається з трьома іншими. Скільки точок перетину можна одержати? Проілюструйте відповідь рисунками.



Цікавинки від дідуся Тараса

Геометрія (з давньогрецької γη — *земля*, μετρέω — *міряю*) була «відкрита» єгиптянами понад 4 тис. років тому й виникла у зв'язку з розливами річки Ніл, які постійно змивали межі земельних ділянок, і це призводило до необхідності заново їх вимірювати. Походження терміну «геометрія» з'ясував давньогрецький філософ *Евдем Родоський* (IV ст. до н. е.). У стародавніх греків геометрія стала математичною наукою, а для науки про вимірювання землі було введено термін «геодезія».

У первинному своєму значенні геометрія — наука про фігури, їх взаємне розташування та розміри їх частин, а також про перетворення фігур. Сьогодні межі геометрії визначити досить непросто, вона проникає в усі інші розділи математики — алгебру, теорію чисел, математичний аналіз тощо. У сучасній геометрії виокремлюють такі підрозділи, як *аналітична геометрія, проєктивна геометрія, конструктивна геометрія* та ін.

У Стародавній Греції значний внесок у розвиток геометрії як науки зробили *Евклід, Архімед, Аполлоній Перзький, Піфагор.* Надзвичайно важливе місце в дослідженнях із геометрії займають складені близько 300 р. до н. е. «Начала» Евкліда. Ця праця

й сьогодні залишається зразковим викладенням у дусі аксіоматичного методу: всі положення виводяться логічним шляхом із невеликого числа явно зазначених і не доводимих припущень — аксіом. Саме тому давньогрецьку геометрію називають сьогодні *евклідовою геометрією* або *елементарною геометрією*.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Підготуйте невелике повідомлення про історію геометрії в Стародавньому Єгипті та Стародавній Греції. Як ви вважаєте, чому геометричні вчення набули такої популярності в учених того часу? Відповідь обґрунтуйте.
2. Дізнайтеся більше про неевклідові геометрії. Як ви вважаєте, чому в математиці та повсякденному житті можуть існувати «паралельні» теорії, які вважають однаково істинними? Відповідь обґрунтуйте.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вирази.

   а) $2a(3b-4)-3b(2a+6)$; б) $(4x-1)(y+2)-(3y-4)(x+1)$.

2. Розв'яжіть рівняння.

   а) $\frac{1-x}{4}=5$; б) $\frac{y}{5}+\frac{y}{4}=2$; в) $\frac{t-2}{3}-\frac{t+1}{2}=1$.

3. Протягом місяця огірки спочатку подорожчали на 20 %, а потім подешевшали на 10 % від нової ціни. Василько хоче купити 5 кг огірків за останньою ціною. Скільки грошей він заплатить, якщо початкова ціна 1 кг огірків до всіх змін цін становила 10 грн?

4. Із села Веселе до села Загадкове є 5 стежок. Пані Харитина, яка живе у Веселому, кожної неділі ходить до своєї подруги пані Єфросинії із Загадкового, обираючи стежку туди й назад навмання. Знайдіть імовірність того, що пані Харитина ходитиме до села Загадкове й назад різними стежками.

5. Зобразіть у зошиті пряму a, точку K, що належить прямій a, і 3 точки, які не належать прямій a. Побудуйте промені з початком у точці K, які проходять через 3 інші точки. Скільки утворилося різних кутів із вершиною в точці K? Виміряйте градусні міри одержаних кутів за допомогою транспортира.

§ 17. Кут, види кутів. Бісектриса кута. Суміжні та вертикальні кути

Промені та кути. Види кутів. Бісектриса кута



Привіт, Тетянко! Щойно підіймався сходами та задумався над таким питанням: чому підйом одними сходами дається важче, ніж іншими?



Це природно, бо кут їх нахилу може бути різним. Чим більший кут, тим крутіші сходи й тим більше сил потрібно, щоб їх подолати. Приблизно те саме із Сонцем відбувається: чим більший кут над горизонтом має Сонце, тим воно гріє сильніше. У південних країнах цей кут улітку взагалі майже прямий, тому там дуже спекотно.





Цікаво! Виявляється, що в нашому житті багато що залежить від кутів. Наприклад, коли їдеш на автомобілі, то чим менший кут повороту, тим простіше виконати цей маневр.



Так, а для будинків на рівнині бажано, щоб вони утворювали з поверхнею землі кут, якомога ближчий до прямого, інакше може бути біда. Думаю, що це корисно — знати про кути якомога більше!



Так, кути надзвичайно важливі й у математиці. Щоб їх зрозуміти краще, дамо спочатку кілька означень.



Променем називають частину прямої, яка складається з усіх точок прямої, що лежать по один бік від заданої точки цієї прямої.

Задану точку називають початком променя, а решту точок променя — внутрішніми точками променя. Будемо вважати, що початок променя також належить променю.

Промінь позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких — початок променя. Наприклад, на рис. 17.1 зображено промінь AB.

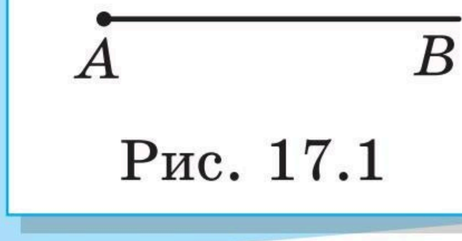


Рис. 17.1



Зауважимо, що поняття «лежати по один бік» є неозначуваним. Воно також інтуїтивно зрозуміле, як і поняття «належати» й «лежати між», та легко моделюється за допомогою рисунка.



Понять відрізка та променя стосується така аксіома.



На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і до того ж тільки один.

Із цієї аксіоми, зокрема, випливає, що рівні відрізки можна сумістити накладанням.





Геометричну фігуру, яка складається з двох променів, що мають спільний початок, називають кутом. Точку, яка є спільним початком променів, називають вершиною кута, а самі промені — сторонами кута.

Кут здебільшого позначають або однією великою латинською буквою (вершина кута), або трьома буквами, причому вершина кута має бути розташована посередині. Наприклад, на рис. 17.2 зображено кут KLP, або кут L. Для позначення кутів також використовуються значок $\angle$. Наприклад: $\angle KLP$, $\angle L$.

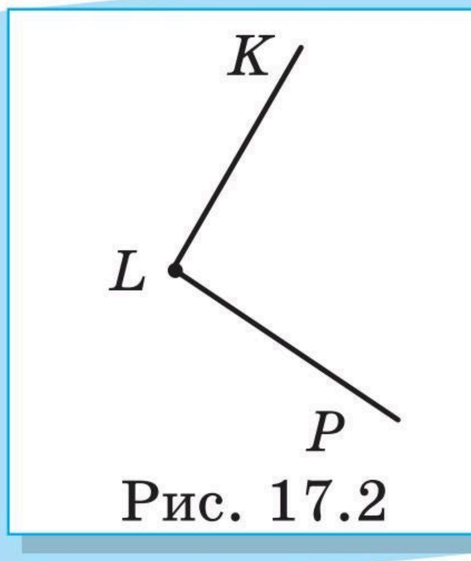


Рис. 17.2

Кути також можна позначати маленькими буквами грецького алфавіту (α, β, γ тощо) або цифрами (1, 2, 3 тощо).

Якщо на прямій AB взяти точку C, то промені CA і CB називають доповняльними променями, а кут ACB — розгорнутим кутом (рис. 17.3).

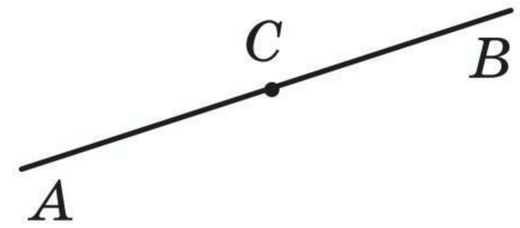


Рис. 17.3



Із рис. 17.3 є зрозумілим:

Кожна пряма на площині розбиває цю площину на дві півплощини.

Істинність останнього твердження приймаємо без доведення, тобто вважаємо його аксіомою.

Кут розбиває площину на дві частини, кожну з яких називають плоским кутом (див. рис. 17.4).

Нехай задано кут ABC, який не є розгорнутим, і промінь із початком у точці B. Вважатимемо, що цей промінь проходить між сторонами кута ABC, якщо він перетинає відрізок AC. Наприклад, на рис. 17.5 промінь BM проходить між сторонами кута ABC, а промінь BK — ні.

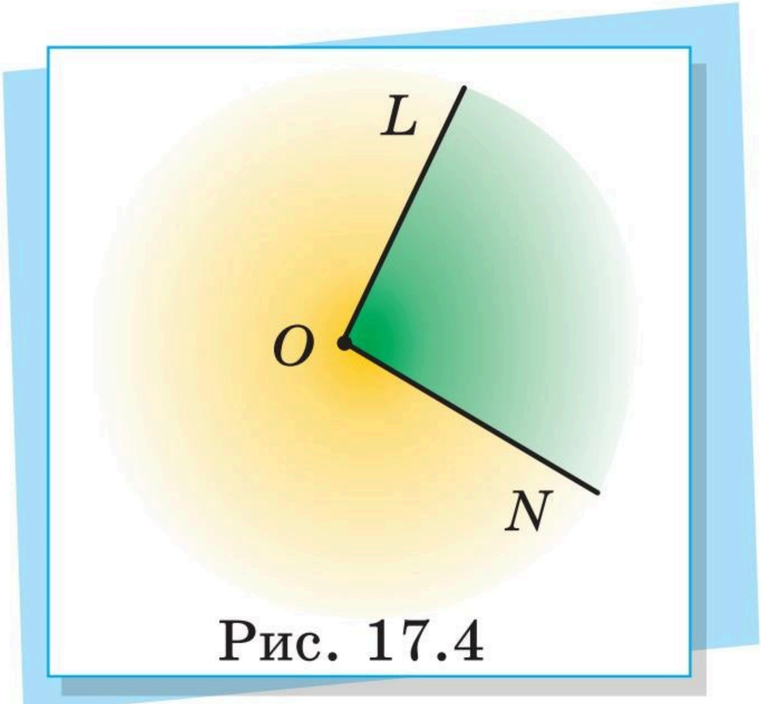


Рис. 17.4

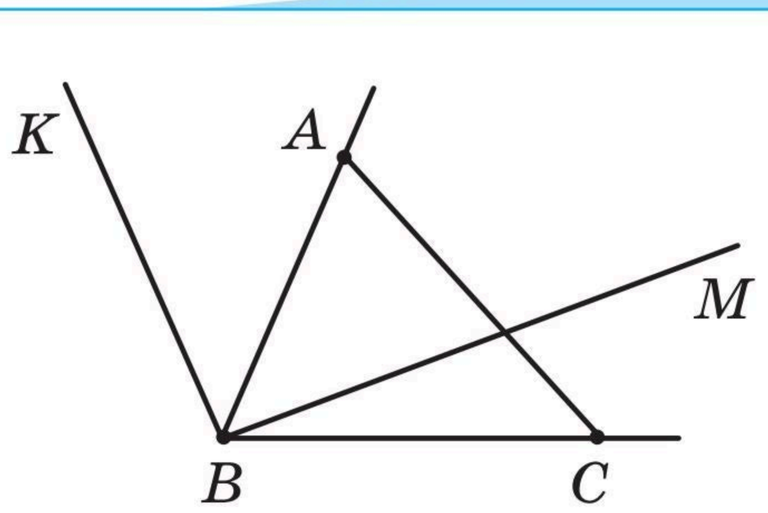


Рис. 17.5

Для розгорнутого кута будемо вважати, що між його сторонами проходить будь-який промінь із початком у його вершині.



Основні властивості кутів описуються такими аксіомами.

Основні властивості кутів

1. Кожен кут має градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут має градусну міру 180°.
2. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які розбивається цей кут будь-яким променем, що проходить між його сторонами.
3. Від будь-якого променя в задану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, і до того ж тільки один.

Ви вже вмієте вимірювати кути за допомогою транспортира. Наприклад, на рис. 17.6 зображено кут M, градусна міра якого дорівнює $65°$.

Замість того щоб говорити, наприклад, що «градусна міра кута дорівнює $65°$», іноді кажуть, що «кут дорівнює $65°$». Можна записати: $\angle M = 65°$.

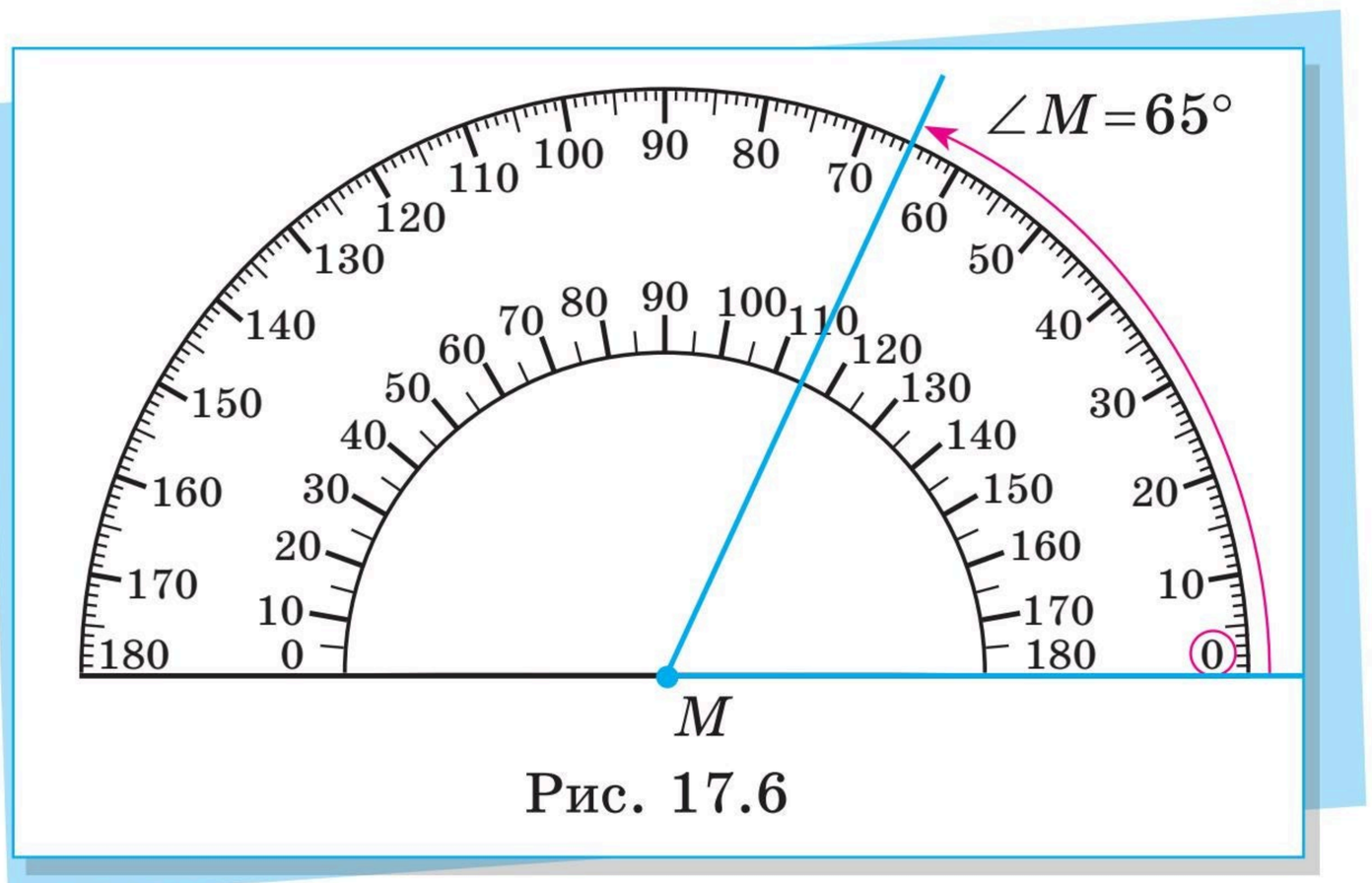


Рис. 17.6



Зауважимо, що градусна міра кута не може бути більшою за 180°, але такою може бути градусна міра плоского кута. Наприклад, на рис. 17.7 градусна міра меншого плоского кута дорівнює 120°, а більшого — 240°.

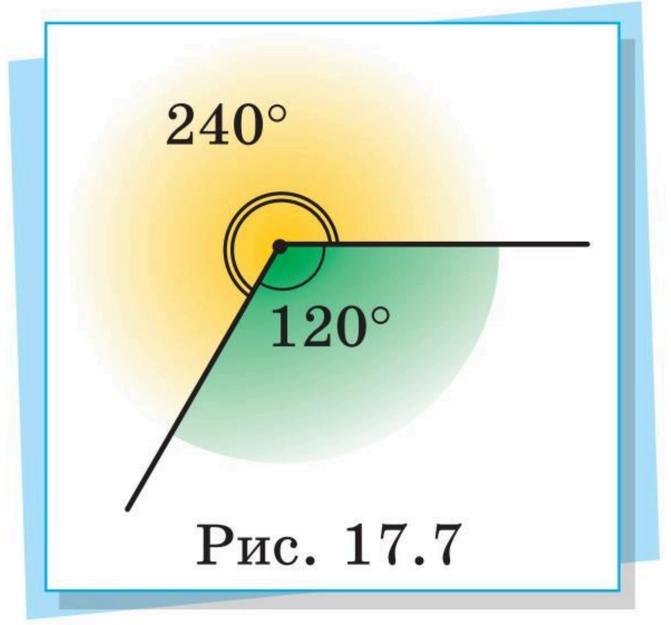


Рис. 17.7



Крім розгорнутих, існує ще три види кутів залежно від їх градусної міри: гострі, тупі та прямі.

Кут називають гострим, якщо його градусна міра менша від 90°; тупим, якщо його градусна міра більша за 90°; прямим, якщо його градусна міра дорівнює 90°.

Наприклад, на рис. 17.8 кут A — гострий, кут B — тупий, а кут C — прямий. Прямий кут на рисунках позначається спеціальним чином, так, як показано на рисунку.

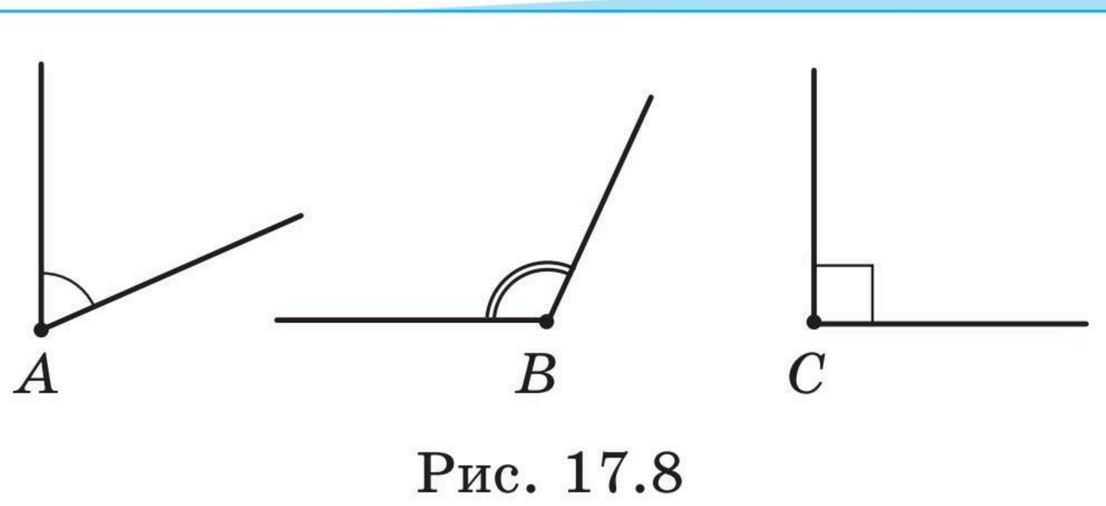


Рис. 17.8



Два кути називають рівними, якщо вони мають рівні градусні міри.

З основних властивостей кутів випливає, що рівні кути суміщаються в результаті накладання. На рисунках рівні кути позначають дужками однакового виду.





Бісектриса кута — це промінь, що виходить із вершини кута, проходить між його сторонами та ділить цей кут на два рівні кути.

Наприклад, на рис. 17.9 зображено кут PST, бісектрисою якого є промінь SK. Для цього випадку

$$\angle TSK = \angle KSP = \frac{1}{2}\angle TSP.$$

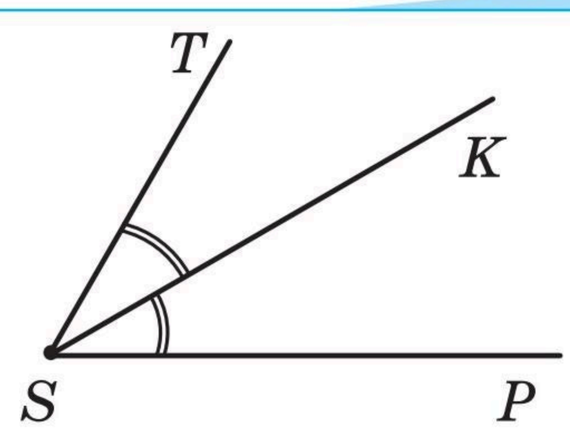


Рис. 17.9

Суміжні та вертикальні кути



Якщо дві прямі AB і CD (див. рис. 17.10) перетинаються в точці O, то утворюються два розгорнуті кути AOB і COD, а також кути AOD, DOB, BOC, COA.

Кути AOD і DOB мають спільну сторону OD, а інші сторони цих кутів є доповняльними променями. Такі кути називають суміжними кутами.

Зрозуміло, що суміжними будуть також кути DOB і BOC, BOC і COA, COA і AOD.

Обидві сторони кутів COA і DOB є доповняльними променями. Такі кути називають вертикальними кутами. Вертикальними є також кути AOD і BOC.

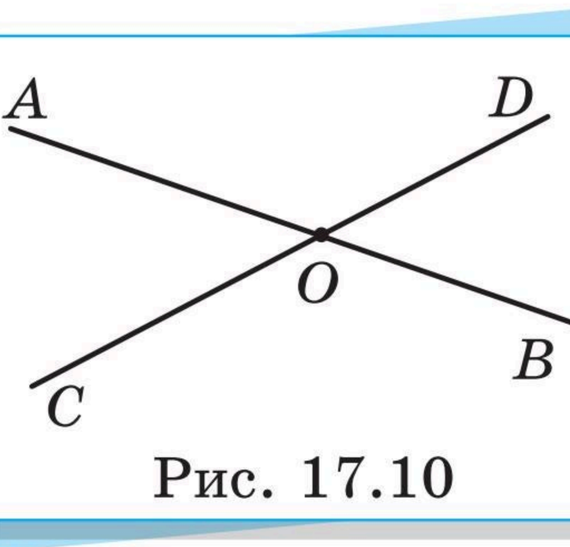


Рис. 17.10



Властивість суміжних кутів описує така теорема.

ТЕОРЕМА (властивість суміжних кутів).

Сума градусних мір суміжних кутів дорівнює 180°.

Дійсно, оскільки спільна сторона OD двох суміжних кутів AOD і DOB (див. рис. 17.10) проходить між сторонами розгорнутого кута AOB, то за основними властивостями кутів маємо: $\angle AOD + \angle DOB = \angle AOB = 180°$. Отже, сума градусних мір двох суміжних кутів дорівнює 180°.



А от властивість вертикальних кутів описує така теорема.

ТЕОРЕМА (властивість вертикальних кутів).

Вертикальні кути рівні.

Два кути рівні тоді, коли вони мають рівні градусні міри. Щойно ми довели, що $\angle AOD + \angle DOB = 180°$ (див. рис. 17.10). Аналогічно $\angle DOB + \angle BOC = 180°$. $\angle AOD + \angle DOB = \angle DOB + \angle BOC$, звідки $\angle AOD = \angle BOC$. Отже, вертикальні кути рівні.



Розв'яжемо задачу.

Градусні міри двох суміжних кутів відносяться як 7 : 5. Знайдіть їх градусні міри та кут між бісектрисами суміжних кутів.

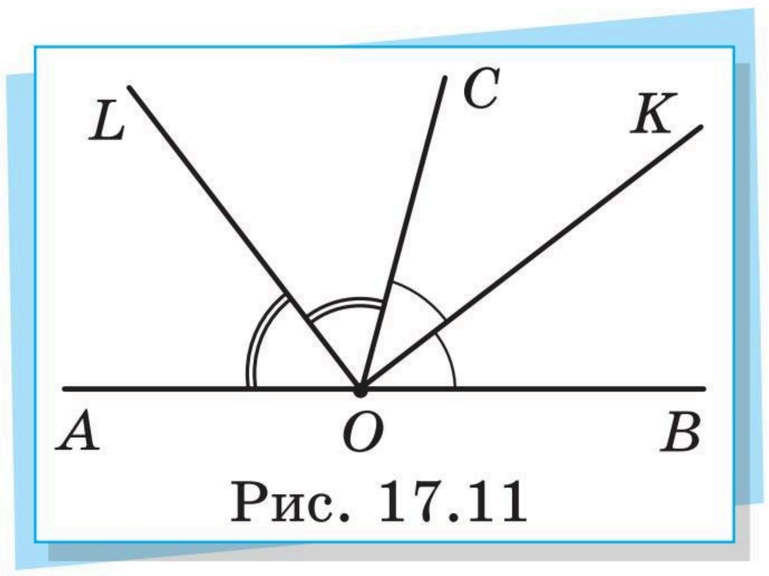


Рис. 17.11

На рис. 17.11 зображено суміжні кути AOC і COB. За умовою задачі їх градусні міри можна позначити як $7x$ і $5x$ відповідно. За властивістю суміжних кутів $7x + 5x = 180°$, звідки $12x = 180°$, $x = 15°$. Отже, шукані градусні міри кутів AOC і COB відповідно дорівнюють $7 \cdot 15° = 105°$ і $5 \cdot 15° = 75°$.

Нехай OL — бісектриса кута AOC, а OK — бісектриса кута COB. Потрібно знайти градусну міру кута LOK.

Оскільки $\angle LOK = \angle LOC + \angle COK$, $\angle LOC = \frac{1}{2}\angle AOC = 52{,}5°$, $\angle COK = \frac{1}{2}\angle COB = 37{,}5°$, то $\angle LOK = 52{,}5° + 37{,}5° = 90°$.



Можна показати, що кут між бісектрисами будь-яких суміжних кутів — прямий. Спробуйте зробити це самостійно!

Наочно про вертикальні та суміжні кути: https://rnk.com.ua/106099



Перевірте себе!

1. Дайте означення: а) променя; б) кута; в) плоского кута. Як їх позначають?
2. Сформулюйте аксіоми, що описують основні властивості променів і кутів.
3. Які є види кутів залежно від їх градусної міри?
4. Дайте означення рівних кутів. Як їх позначають на рисунках?
5. Дайте означення бісектриси кута. Як її будують?
6. Дайте означення суміжних і вертикальних кутів.
7. Сформулюйте й доведіть теорему про властивості суміжних і вертикальних кутів.

Тренажерний зал

Початковий рівень

1. Де на рис. 1 зображено промінь AB?

2. Де на рис. 2 зображено промінь MK?

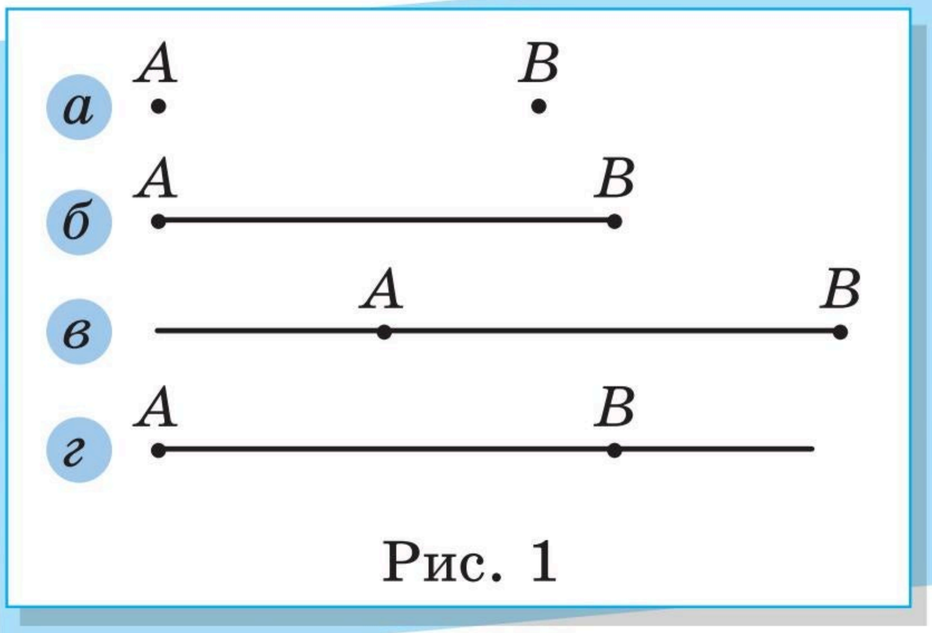


Рис. 1

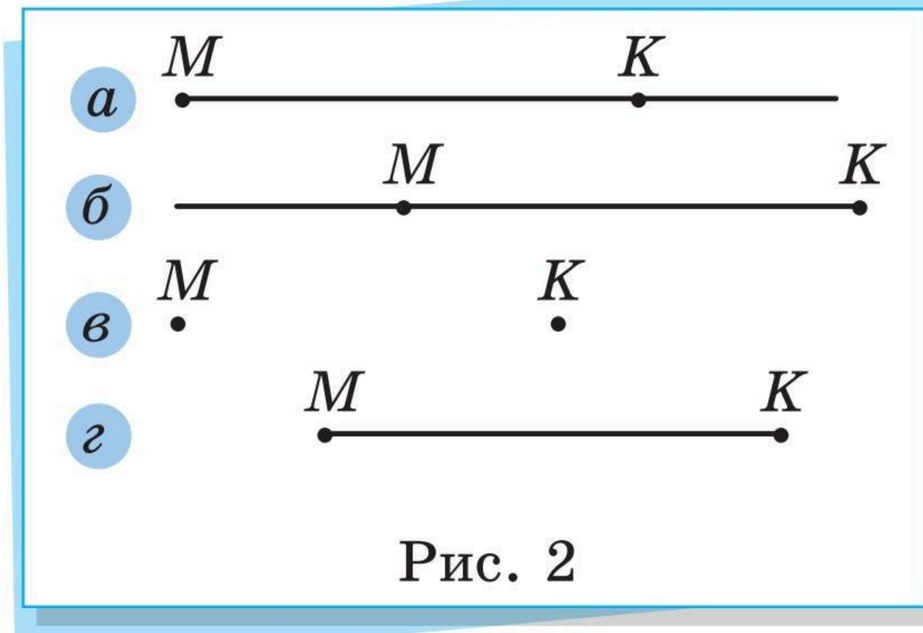


Рис. 2

3. Який кут зображено на рис. 3?

а) $\angle ABC$;
б) $\angle BAC$;
в) $\angle ACB$;
г) $\angle CBA$.

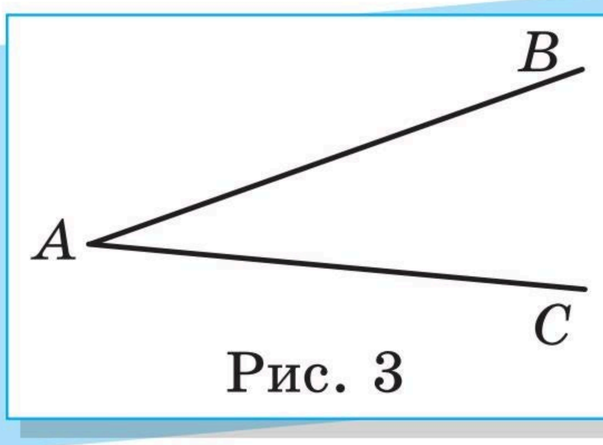


Рис. 3

4. Вершиною кута $\angle AKM$ є точка...

а) A; б) K; в) M.

5. На промені AC відкладено відрізок AB. Де на рис. 4 це відображено?

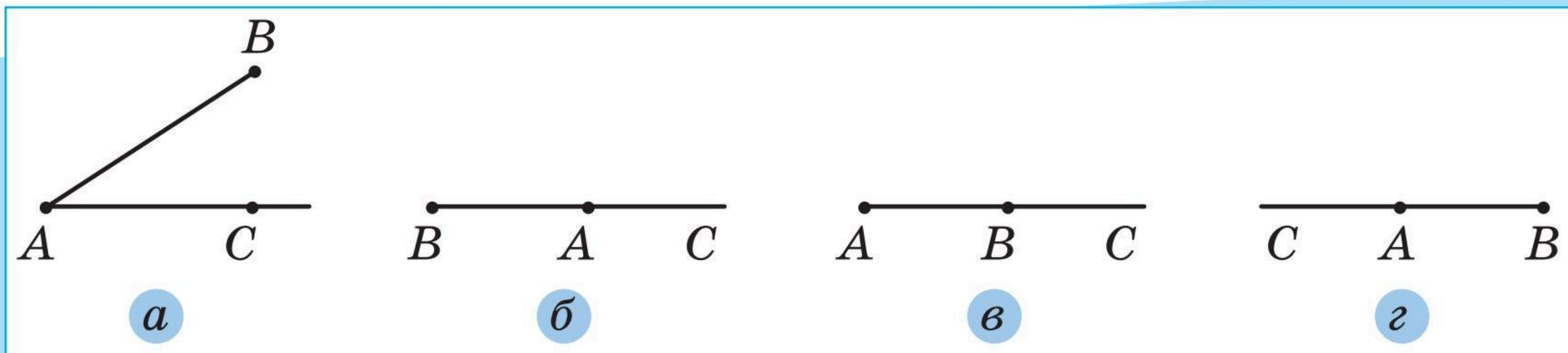


Рис. 4

6. Побудуйте промінь OM, на якому відкладено відрізок OB.

7. Визначте вид кута (гострий, тупий, прямий, розгорнутий), якщо:
а) $\angle A = 40°$; б) $\angle K = 100°$; в) $\angle B = 180°$; г) $\angle M = 50°$.

8. Визначте вид кута, якщо:
а) $\angle C = 140°$; б) $\angle D = 90°$; в) $\angle B = 80°$; г) $\angle K = 120°$.

9. На рис. 5 зображено кути. Визначте вид кута (гострий, тупий, прямий, розгорнутий):
а) $\angle ABC$; б) $\angle KBC$; в) $\angle BKM$; г) $\angle LKM$.

10. На рис. 6 зображено кути. Визначте вид кута:
а) $\angle BCD$; б) $\angle BCA$; в) $\angle EDK$; г) $\angle FDK$.

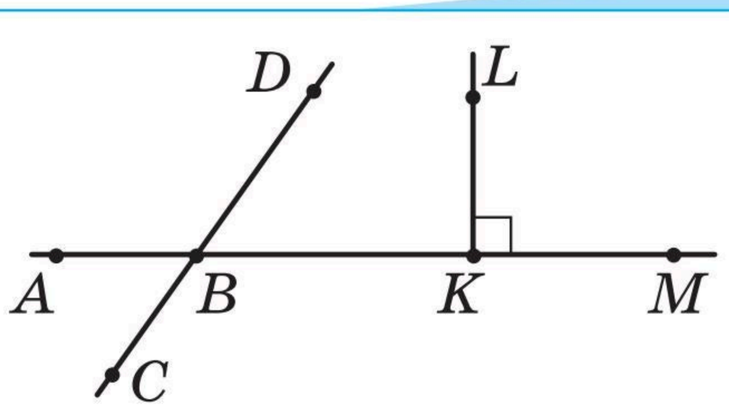


Рис. 5

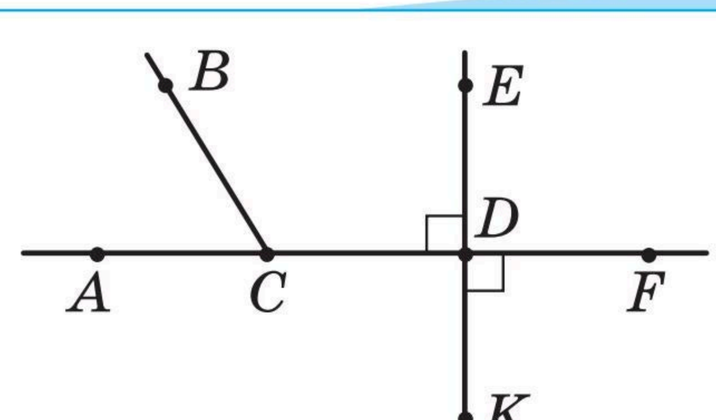


Рис. 6

11. Знайдіть у класній кімнаті об'єкти, які можна вважати моделями прямих, гострих, тупих кутів.

12. Знайдіть на вулиці чи вдома об'єкти, які можна вважати моделями прямих, гострих, тупих кутів. Для кожного виду кутів наведіть принаймні два об'єкти.

13. На рис. 7 зображено дві прямі, які перетинаються в точці O. З'ясуйте: а) чи є кути AOB і DOC вертикальними; б) чи є кути AOD і DOC суміжними.

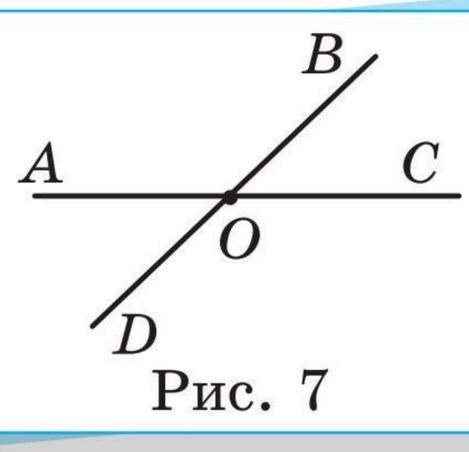


Рис. 7

14. На рис. 8 зображено дві прямі, які перетинаються в точці R. З'ясуйте: а) чи є кут LRK вертикальним до кута MRN; б) чи є кут LRK суміжним до кута KRN.

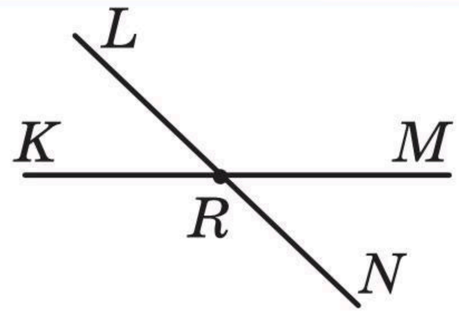


Рис. 8

15. За допомогою транспортира знайдіть градусні міри кутів AOD і DOC на рис. 7. Перевірте, чи дорівнює $180°$ сума градусних мір цих кутів.

16. За допомогою транспортира знайдіть градусні міри кутів LRK і KRN на рис. 8. Перевірте, чи дорівнює $180°$ сума градусних мір цих кутів.

17. Розгляньте рис. 9. Укажіть промені, які проходять і які не проходять між сторонами кута: а) SOL; б) DOL.

18. Розгляньте рис. 10. Укажіть промені, які проходять і які не проходять між сторонами кута: а) MPK; б) BPM.

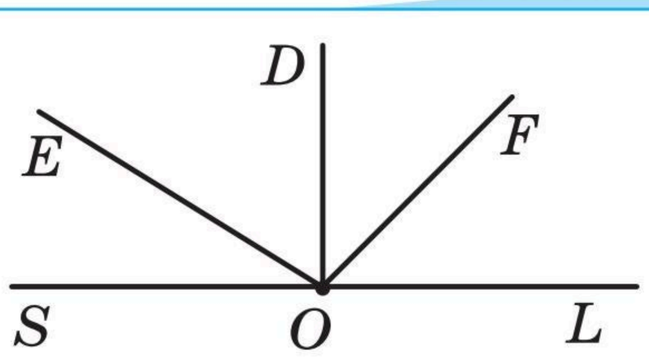


Рис. 9

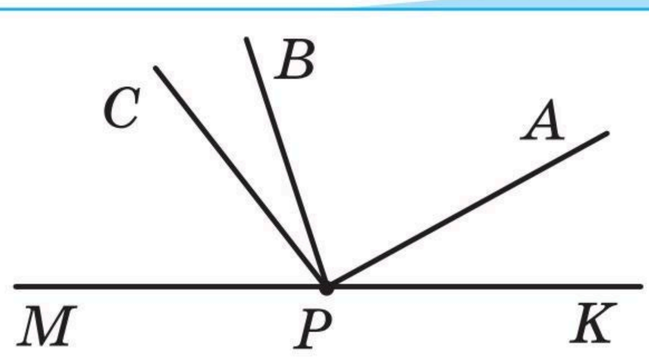


Рис. 10

Середній рівень

19. Промінь, який проходить між сторонами кута A, ділить його на два кути, градусні міри яких дорівнюють $37°$ і $18°$. Знайдіть градусну міру кута A.

20. Промінь, який проходить між сторонами кута B, ділить його на два кути, градусні міри яких дорівнюють $133°$ і $27°$. Знайдіть градусну міру кута B.

21. За допомогою лінійки й транспортира побудуйте кути, градусні міри яких дорівнюють 30° і 120° та які мають: а) спільну вершину та спільну сторону; б) тільки спільну вершину.

22. За допомогою лінійки й транспортира побудуйте кути, градусні міри яких дорівнюють 150° і 45° та які мають: а) спільну вершину та спільну сторону; б) тільки спільну вершину.

23. Зобразіть у зошиті довільний прямий кут і довільний тупий кут. За допомогою лінійки й транспортира побудуйте бісектриси цих кутів.

24. Зобразіть у зошиті довільний розгорнутий кут і довільний гострий кут. За допомогою лінійки й транспортира побудуйте бісектриси цих кутів.

25. На рис. 11 промінь CD — бісектриса кута ACB. Знайдіть градусну міру кута ACB, якщо $\angle DCB = 32°$.

26. На рис. 12 промінь LE — бісектриса кута KLM. Знайдіть градусну міру кута KLE, якщо $\angle KLM = 138°$.

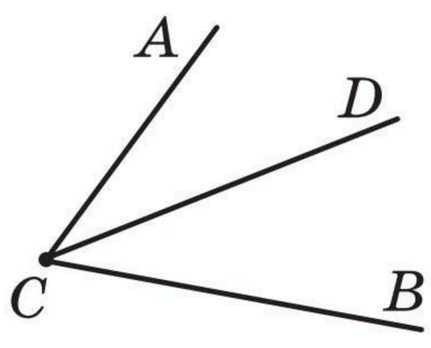


Рис. 11

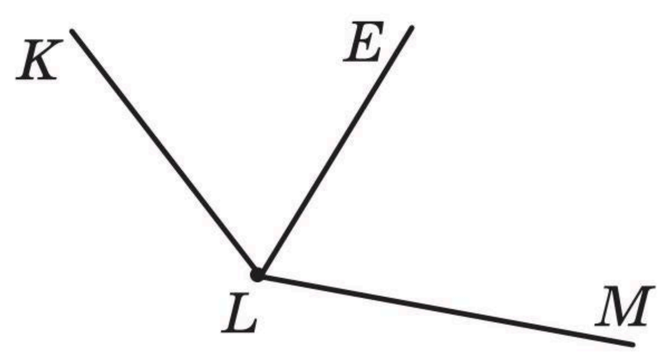


Рис. 12

27. На рис. 13 кут ABC — прямий. Кути DBA, ABO й OBC рівні між собою. Знайдіть градусну міру кута DBC.

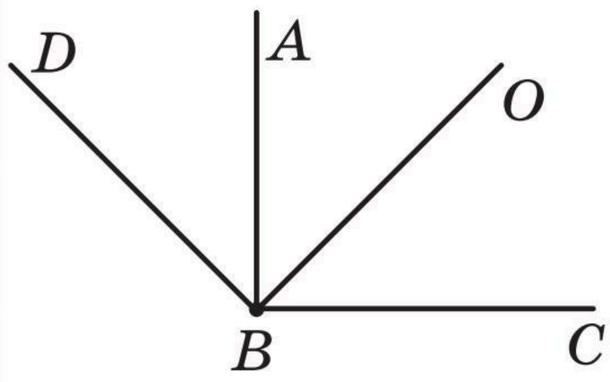


Рис. 13

28. На рис. 14 градусна міра кута ABC дорівнює $120°$. Кути ABP і PBN рівні, а градусна міра кута NBC дорівнює $30°$. Знайдіть градусну міру кута PBN.

29. Годинник показує дванадцяту годину (рис. 15). Знайдіть градусну міру кута, на який повернеться *хвилинна* стрілка за: а) 15 хв; б) 20 хв.

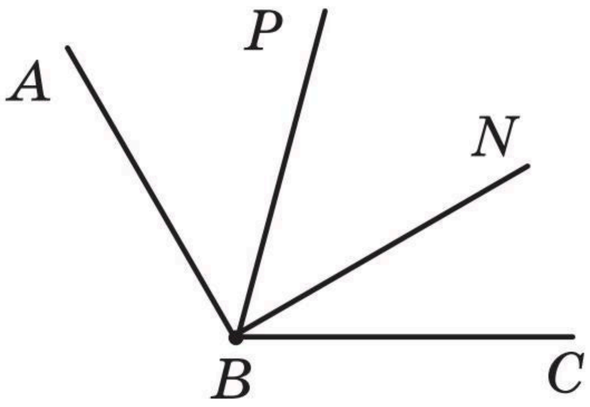


Рис. 14

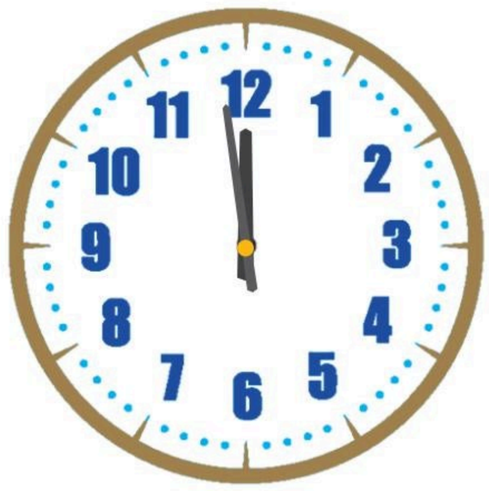


Рис. 15

30. Годинник показує дванадцяту годину (див. рис. 15). Знайдіть градусну міру кута, на який повернеться *хвилинна* стрілка за: а) 30 хв.; б) 10 хв.

31. Кути ABD і CBD — суміжні (рис. 16). Обчисліть градусну міру кута ABD, якщо $\angle DBC = 55°$.

32. Кути MOP і AOM суміжні (рис. 17). Обчисліть градусну міру кута MOP, якщо $\angle AOM = 155°$.

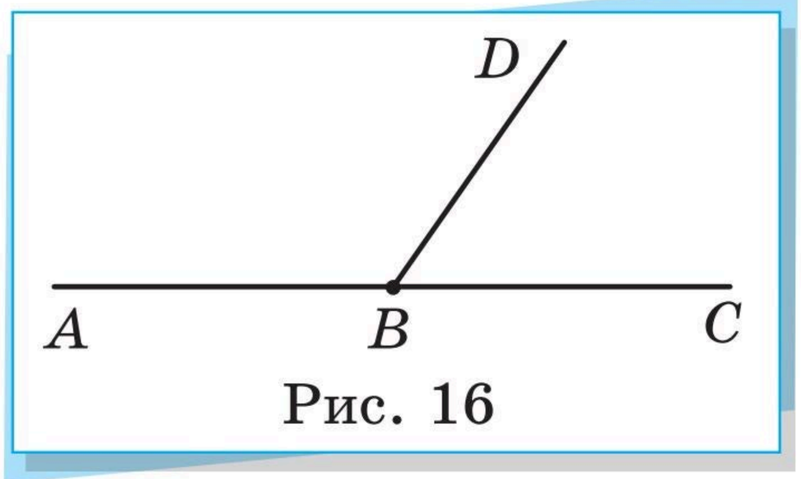


Рис. 16

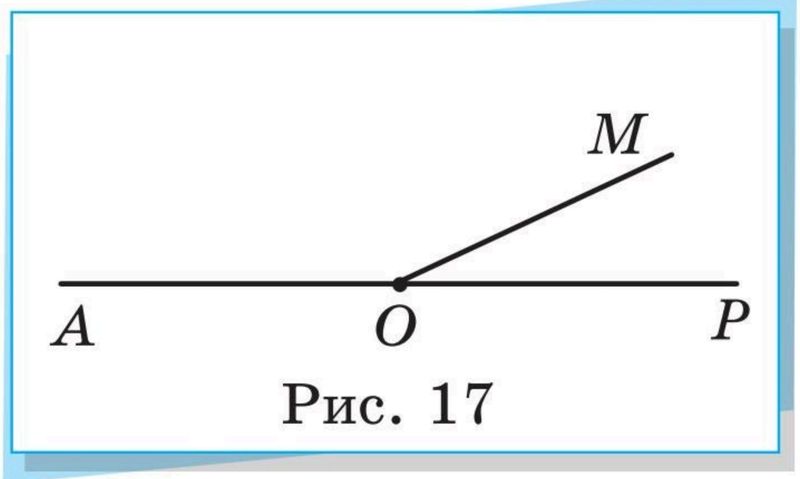


Рис. 17

33. На рис. 18 $\angle AOB = 35°$. Назвіть всі кути на рисунку та знайдіть їх градусні міри.

34. На рис. 19 $\angle MKB = 125°$. Назвіть всі кути на рисунку та знайдіть їх градусні міри.

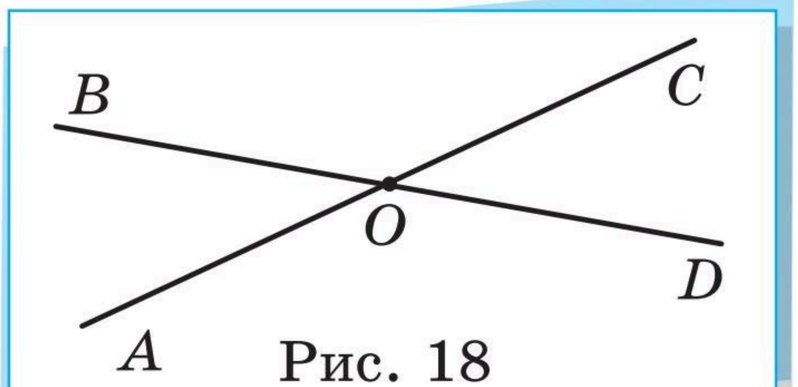


Рис. 18

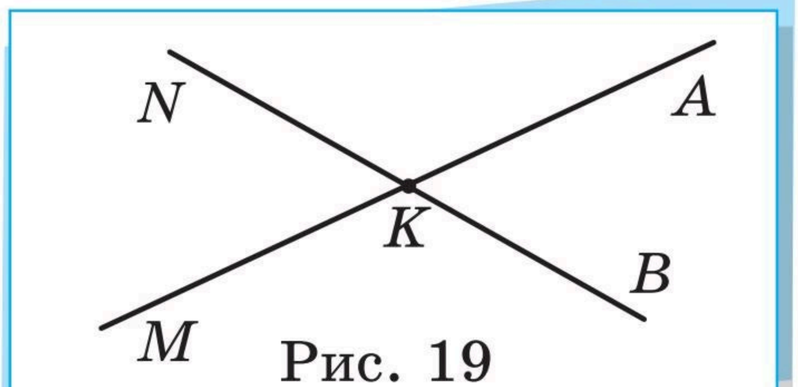


Рис. 19

Достатній рівень

35. Кути ABC і CBD — суміжні. Доведіть, що кут між бісектрисами цих кутів дорівнює $90°$.

36. Кути AOB і COD — вертикальні. Доведіть, що кут між бісектрисами цих кутів дорівнює $180°$.

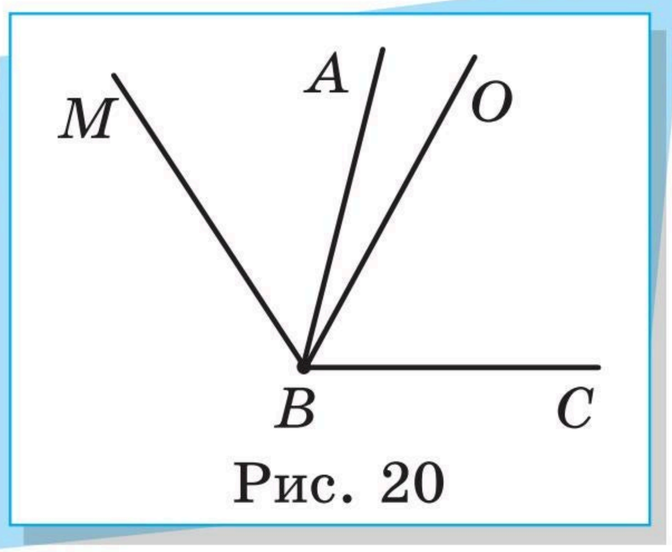


Рис. 20

37. Дано кут ABC і два промені — BO та BM такі, що BO проходить між сторонами кута ABC, а BM — ні (рис. 20); $\angle ABC = 75°$, $\angle OBM = 65°$, $\angle OBA = 15°$. Знайдіть градусну міру кута CBM.

38. Дано кут OMK і два промені — MN і MP такі, що MN проходить між сторонами кута OMK, а MP — ні (рис. 21); $\angle PMK = 70°$, $\angle NMP = 120°$, $\angle OMK = 80°$. Знайдіть градусну міру кута OMN.

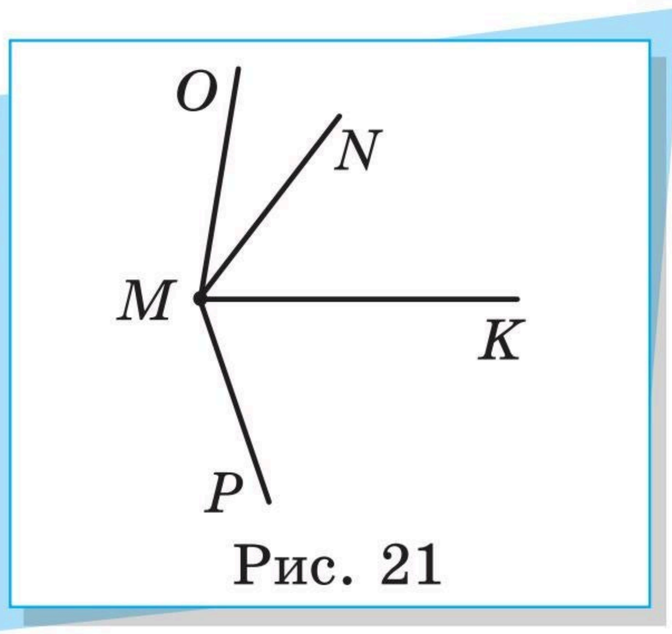


Рис. 21

39. Знайдіть градусні міри двох суміжних кутів, якщо: а) один із кутів на $100°$ більший за інший; б) один із кутів у 3 рази більший за інший; в) градусна міра одного з кутів дорівнює $\frac{2}{3}$ градусної міри іншого; г) градусна міра одного з кутів складає 80 % градусної міри іншого.

40. Знайдіть градусні міри двох суміжних кутів, якщо: а) один із кутів на $84°$ більший за інший; б) один із кутів в 4 рази більший за інший; в) градусна міра одного з кутів дорівнює $\frac{1}{3}$ градусної міри іншого; г) градусна міра одного з кутів складає 50% градусної міри іншого.

41. У результаті перетину двох прямих утворились суміжні кути, причому один із них на $108°$ більший за інший. Знайдіть градусні міри всіх кутів, які утворилися в результаті перетину цих двох прямих.

42. У результаті перетину двох прямих утворились суміжні кути, причому один із кутів на $34°$ менший від іншого. Знайдіть градусні міри всіх кутів, які утворилися в результаті перетину цих двох прямих.

43. Прямі a, b і c перетинаються в одній точці (рис. 22); $\angle 1 = 35°$, $\angle 2 = 59°$. З'ясуйте, чому дорівнює $\angle 3$.

44. Прямі a, b і c перетинаються в одній точці (див. рис. 22); $\angle 2 = 52°$, $\angle 3 = 93°$. З'ясуйте, чому дорівнює $\angle 1$.

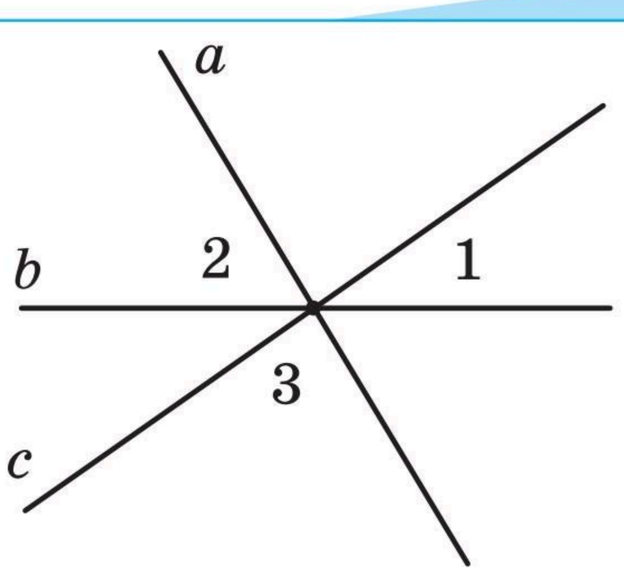


Рис. 22

Високий рівень

45. У результаті перетину двох прямих один з утворених кутів дорівнює $90°$. Доведіть, що всі інші утворені кути (не розгорнуті) теж дорівнюють $90°$.

46. Задано три прямі, які перетинаються в одній точці (рис. 23). Доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

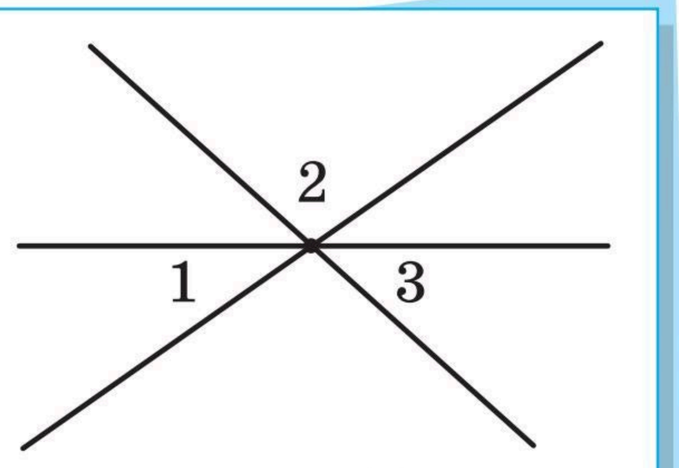


Рис. 23

47. Як, маючи шаблон для кута $27°$, побудувати кут $90°$?

48. Як, маючи шаблон для кута $40°$, побудувати кут $20°$?

49. Точка K лежить усередині кута ABC, промінь BM — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут KBM дорівнює півріз-ниці кутів ABK і CBK.

50. Промінь, проведений із вершини прямого кута, ділить його на два кути. Доведіть, що кут між бісектрисами утворених кутів дорівнює $45°$.

51. На рис. 24 $\angle AOB = \angle COD = 90°$. Доведіть, що $\angle AOC = \angle BOD$.

52. Кут, утворений бісектрисами кутів AOB і AOC, дорівнює $25°$, а $\angle AOB = 40°$ (рис. 25). Доведіть, що $\angle AOC = 90°$.

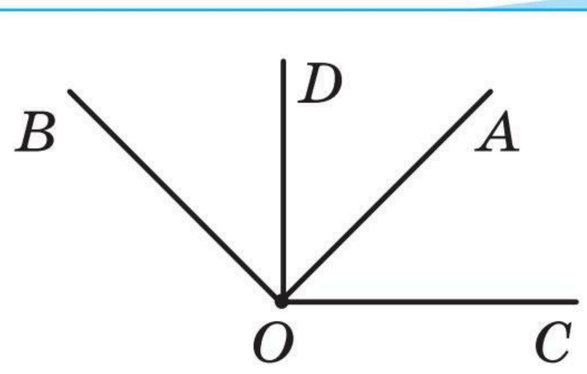


Рис. 24

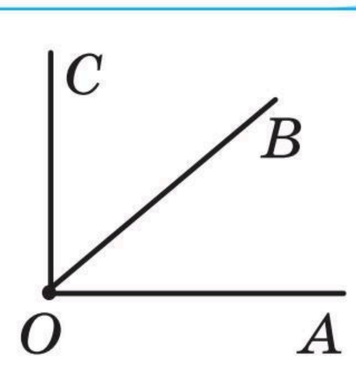


Рис. 25



Цікавинки від дідуся Тараса

Традиційно кути вимірюють *у кутових градусах, мінутах і секундах*. Розгорнутий кут ділиться на 180 градусів, кожен градус ділиться на 60 мінут, кожна мінута — на 60 секунд. Градуси (від лат. *gradus* — крок, ступінь) використовував ще давньогрецький математик *Клавдій Птолемей* (бл. 87 — бл. 165 рр.). Він називав градуси «частинами» та позначав їх знаком «°», мінути позначав штрихом, а секунди — двома штрихами (наприклад, $37°20'40''$).

У морській справі кути вимірюються *в румбах*. 1 румб дорівнює $\frac{1}{32}$ від повного кола компаса ($360°$), тобто 11,25 градуса, або $11°15'$. Деякі плоскі кути в морській справі мають спеціальні назви: *квадрант* — прямий кут, $\frac{1}{4}$ кола компаса; *секстант* — $\frac{1}{6}$ кола компаса; *октант* — $\frac{1}{8}$ кола компаса.

У Міжнародній системі одиниць СІ використовують спосіб вираження величини кута, за якого кут є безрозмірнісною величиною. Цей спосіб вимірювання базується на означенні *радіана*. Кут величиною 1 радіан визначається як такий, для якого довжина дуги кола дорівнює його радіусу.



Запитання і завдання від дідуся Тараса

1. Наведіть приклади випадків із вашого повсякденного життя, коли вам доводилося використовувати вимірювання кутів. У яких одиницях вимірювалися ці кути?

2. Наведіть приклади з художньої літератури та кінематографу, де вимірювання кутів проводилося в румбах. Чи можна

сказати, що тепер ви краще розумієте героїв фільмів і книжок щодо їх висловів про кути повороту судна?

3. Скористайтеся додатковими джерелами інформації та з'ясуйте, за допомогою яких іще приладів, крім транспортира, можна вимірювати кути. Підготуйте невелике повідомлення.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Спростіть вираз.

а) $(3c-2d)^2+(2d-3c)(3c+2d)$; б) $(m-2p)(m^2+4p^2)(2p+m)$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом.

а) $\begin{cases}2x+y=4,\\3x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+3y=12,\\x-2y=-1.\end{cases}$

3. Марина каталася по лісу на велосипеді 10 хв зі швидкістю x км/год, а потім зменшила швидкість на 6 км/год і їхала ще 20 хв, доки не знайшла мальовничу галявину, де вирішила відпочити. Під час відпочинку дівчина підрахувала, що проїхала по лісу на велосипеді 7 км. Знайдіть значення x, склавши рівняння, що є математичною моделлю задачі.

4. Із цифр 0, 2, 5, 7 утворюють трицифрові числа. Скільки різних таких чисел можна утворити, якщо в записі числа кожну цифру можна використати лише один раз? Скільки чисел з утворених: а) є парними; б) діляться на 5; в) діляться на 10?

5. Побудуйте в зошиті прямокутник $ABCD$, який не є квадратом. Нехай діагоналі AC і BD цього прямокутника перетинаються в точці O. Перелічіть усі зображені на рисунку трикутники. Які з них мають: а) лише гострі кути; б) один прямий кут; в) один тупий кут?

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДО РОЗДІЛУ 5

У завданнях 1–6 укажіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Яку геометричну фігуру зображено на рис. 1?

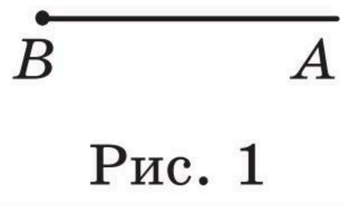


Рис. 1

А	Б	В	Г
Пряму AB	Промінь AB	Промінь BA	Відрізок BA

2. Зображений на рис. 2 кут KLP є...

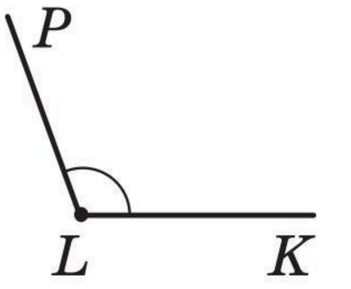


Рис. 2

А	Б	В	Г
гострим	тупим	прямим	розгорнутим

3. На рис. 3 зображено прямі PS і MT, що перетинаються в точці F. Які з наведених пар кутів НЕ є суміжними?

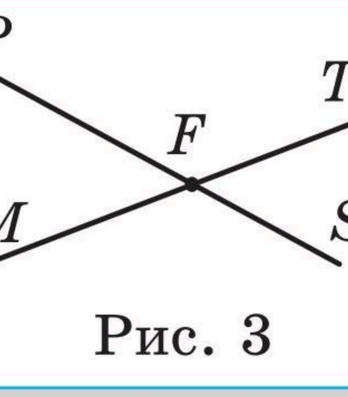


Рис. 3

А	Б
$\angle PFT$ і $\angle TFS$	$\angle PFT$ і $\angle PFM$
В	Г
$\angle TFS$ і $\angle MFS$	$\angle PFT$ і $\angle MFS$

4. На рис. 4 зображено відрізок AC і точку $B \in AC$. Відомо, що $AC = x$ см, $BC = y$ см. Укажіть вираз для знаходження довжини відрізка AB (у см).

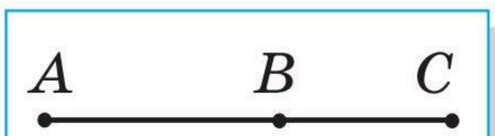


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
$AB = x + y$	$AB = x \cdot y$	$AB = x - y$	$AB = y - x$	$AB = x : y$

5. На рис. 5 зображено промені OA, OB, OC зі спільним початком. Укажіть правильне твердження.

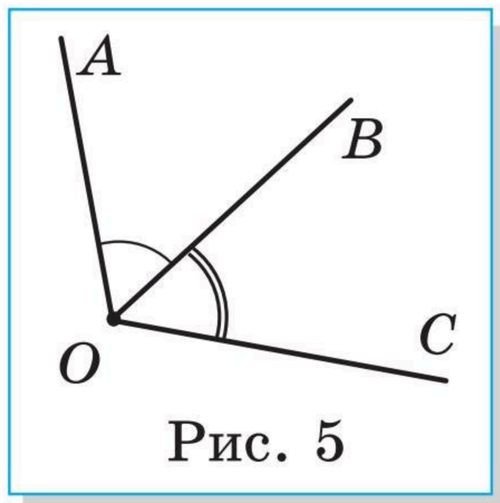


Рис. 5

А	$\angle AOB + \angle AOC = \angle BOC$
Б	$\angle COB = \angle AOB$
В	$\angle COA - \angle COB = 90°$
Г	$\angle COB + \angle BOA = 180°$
Д	$\angle BOC + \angle AOB = \angle COA$

6. Укажіть НЕправильне твердження.

А	Будь-які два вертикальні кути рівні.
Б	Через будь-які дві точки можна провести лише одну пряму.
В	Для кожної прямої існує точка, яка їй не належить.
Г	Із кожної точки може виходити лише один промінь.
Д	Сума будь-яких двох суміжних кутів дорівнює 180°.

У завданнях 7–9 запишіть відповідь десятковим дробом або натуральним числом.

7. На *схематичному* рис. 6 зображено розгорнутий кут AOB та промені OC і OD із початком у точці O. Знайдіть градусну міру кута COD, якщо $\angle COA = 125°$, $\angle DOB = 115°$.

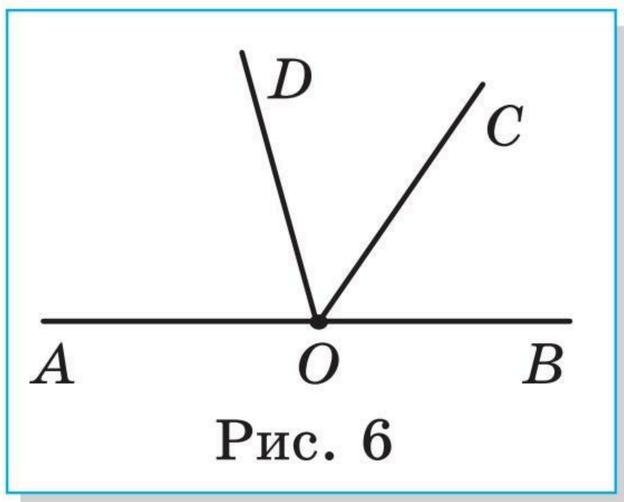


Рис. 6

8. На *схематичному* рис. 7 зображено відрізок $AB = 25$ см і точки K, M, які йому належать. Знайдіть *добуток* довжин відрізків AK, KM і MB, якщо $KM : MB = 5 : 3$, а довжина відрізка AK на 1 см менша від довжини відрізка KM.



Рис. 7

9. Ігор вийшов із дому прогулятися. Він ішов спочатку 200 м на захід, потім 400 м на північ, потім 300 м на схід, потім 600 м на південь і нарешті 100 м на захід. Після цього Ігор сів на лавку почитати. Знайдіть *різницю* між відстанню, яку пройшов Ігор під час прогулянки, та відстанню від лавки до його дому.

Завдання 10–14 розв'яжіть із повним поясненням.

10. Доведіть, що з двох суміжних кутів один обов'язково є гострим або прямим.

11. Доведіть: а) будь-який відрізок має лише одну середину; б) будь-який кут має лише одну бісектрису.

12. Дано кут ABC і промінь BK, який проходить між його сторонами. Доведіть, що градусна міра кута між бісектрисами кутів ABK і KBC дорівнює половині градусної міри кута ABC.

13. Як, маючи відрізки довжиною 5 см і 3 см, зобразити відрізок довжиною 4 см? Користуватися лінійкою з поділками не дозволяється.

14. Як, маючи шаблони кутів, градусні міри яких дорівнюють 50° і 70°, побудувати кут, градусна міра якого дорівнює 90°? Користуватися транспортиром і косинцем не дозволяється.

ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Скільки точок потрібно позначити між точками A і B, щоб разом із відрізком AB утворилося всього шість відрізків? Виконайте рисунок і запишіть усі відрізки.

2. Скільки точок перетину можуть мати чотири різні прямі? Проілюструйте свою відповідь рисунками.

3. Довжина відрізка AB дорівнює 16 см. Знайдіть на прямій AB усі точки, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює: а) 16 см; б) 20 см; в) 14 см. Відповідь обґрунтуйте.

4. Довжина відрізка CD дорівнює 10 см. Знайдіть на прямій CD усі точки, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка CD дорівнює: а) 12 см; б) 10 см; в) 8 см. Відповідь обґрунтуйте.

5. Відрізки AB і AC лежать на одній прямій. Точка M — середина відрізка AB, точка K — середина відрізка AC. Доведіть, що $BC = 2MK$.

6. На прямій задано точки A, B, C і D таким чином, що $AB = CD$ і $AC = BD$. Доведіть, що середина відрізка AD є серединою відрізка BC.

7. Доведіть, що коли середини відрізків AB і CD, розміщених на одній прямій, збігаються, то $AC = BD$ за будь-якого взаємного розміщення точок A, B, C і D.

8. Кути AOB і BOC — суміжні, OM — бісектриса кута AOB. Промінь OK проходить усередині кута BOC і $\angle MOK = 90°$. Доведіть, що OK — бісектриса кута BOC.

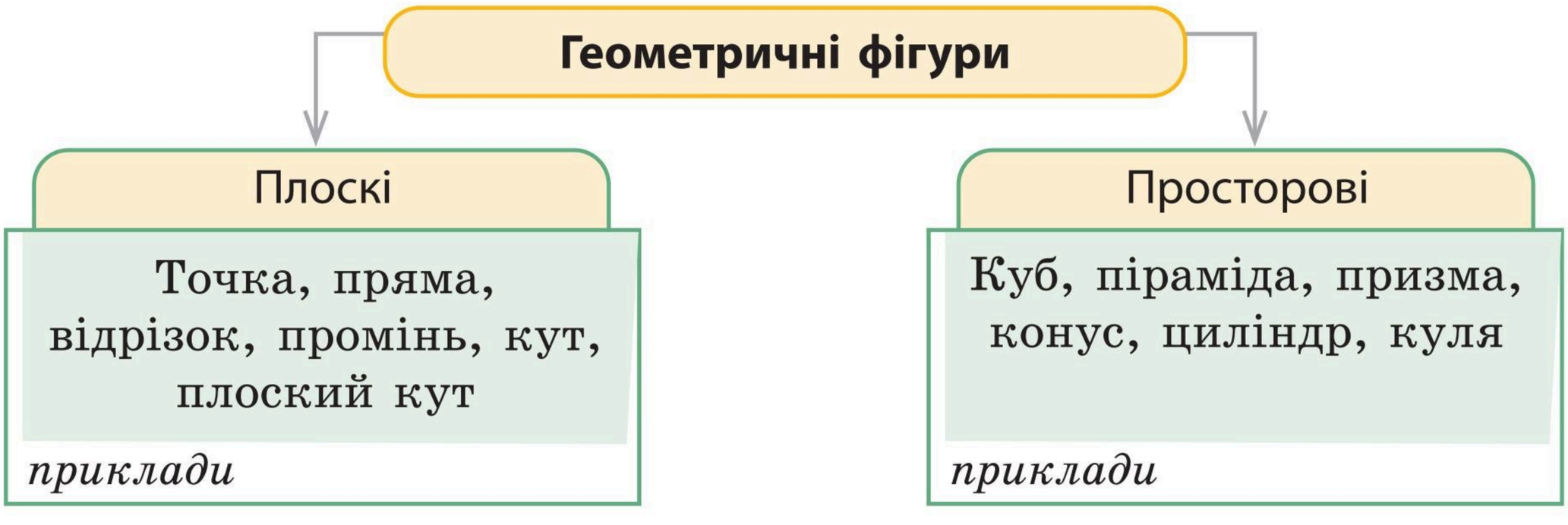
9. Петрик і Тетянка побудували у своїх зошитах відрізок AB, узяли всередині нього точку O та побудували прямий кут KOM. Після цього вони почали досліджувати зв'язок між величинами кутів AOK і BOM. Петрик визначив, що їх сума дорівнює 90°, а Тетянка наполягає на тому, що їх різниця дорівнює 90°. Чия відповідь є правильною?

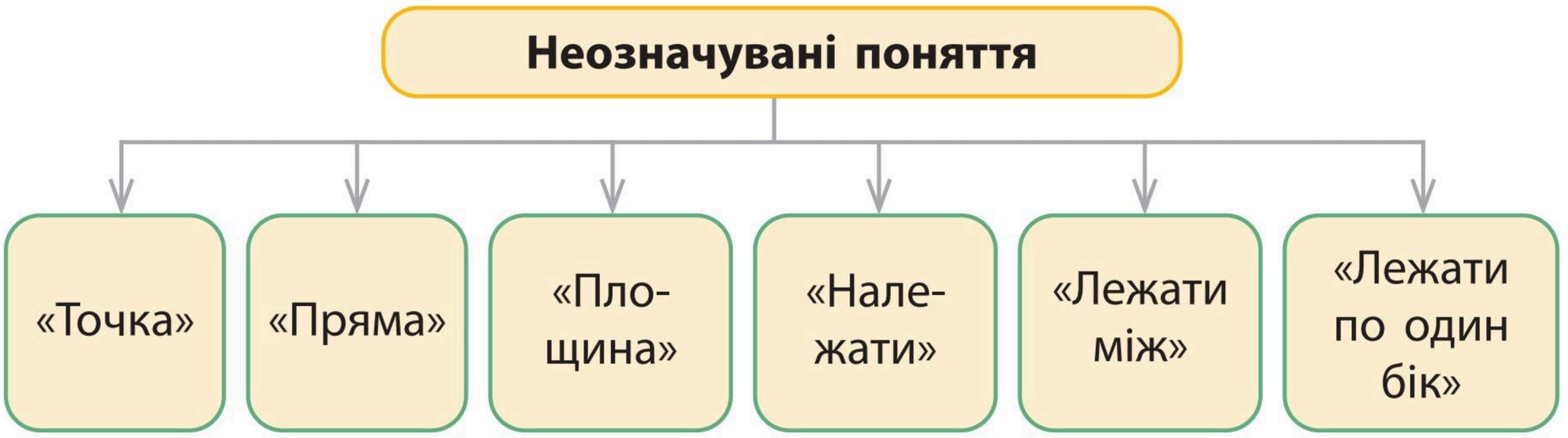
10. Провели 6 прямих, які перетинаються в одній точці. Доведіть, що серед утворених кутів є хоча б один кут, який менший від 31°.

11. Провели 5 прямих, які перетинаються в одній точці. Доведіть, що серед утворених кутів є хоча б один кут, який менший від 37°.

Точка — point
Пряма — straight line
Площина — plane
Довжина відрізка — length of the segment
Градусна міра кута — degree measure of the angle
Гострий (тупий, прямий) кут — acute (obtuse, right) angle
Бісектриса кута — angle bisector
Суміжні кути — adjacent angles
Вертикальні кути — vertical angles

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 5





Основні означення

Відрізок — частина прямої, яка складається з усіх точок, що лежать між двома заданими точками цієї прямої.



A, B — кінці відрізка AB.

приклад

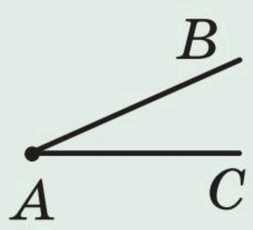
Промінь — частина прямої, яка складається з усіх точок прямої, що лежать по один бік від заданої точки цієї прямої.



A — початок променя AB.

приклад

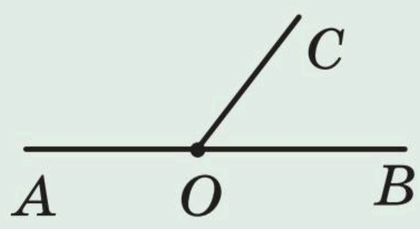
Кут — геометрична фігура, яка складається з двох променів, що мають спільний початок.



AB і BC — сторони $\angle BAC$, або $\angle A$. Точка A — вершина $\angle A$.

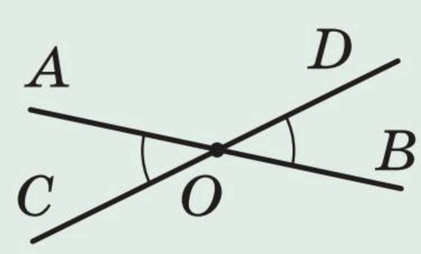
приклад

Суміжні та вертикальні кути



$\angle AOC$ і $\angle BOC$ — суміжні кути.

приклад



$\angle AOC$ і $\angle BOD$ — вертикальні кути.

приклад

Аксіоми

- Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать і які їй не належать.
- Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
- Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- Кожен відрізок має довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
- На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини, і до того ж тільки один.
- Пряма розбиває площину на дві півплощини.
- Кожен кут має градусну міру, більшу за нуль.
- Градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між сторонами даного кута.
- Від будь-якого променя в задану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, і до того ж тільки один.

...

Теореми

Про кількість спільних точок прямих, що перетинаються

Якщо дві різні прямі перетинаються, то вони можуть мати лише одну спільну точку.

Властивість суміжних кутів

Сума градусних мір суміжних кутів дорівнює 180°.

Властивість вертикальних кутів

Вертикальні кути рівні.

...

ІНТЕГРОВАНІ МОДУЛІ

Проєкт до інтегрованого модуля 1. Практичне використання числових і буквених виразів



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкт за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя/вчительки об'єднайтеся в групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть у групах разом із учителем/учителькою сфери можливого актуального й цікавого практичного використання числових і буквених виразів. Оберіть для кожної групи галузь застосування (наприклад, побут, наука, технології). Обговоріть етапи реалізації проєкту.

Етап 3. Проведіть пошук прикладів практичного використання числових і буквених виразів у галузі застосування, обраній вашою групою. Пошук можна проводити різними способами (наприклад, опитування дорослих членів родини, пошук в інтернеті, бібліотеці).

Етап 4. Виконайте необхідні обчислення (за потреби).

Етап 5. Створіть презентацію результатів роботи вашої групи над проєктом «Практичне використання числових і буквених виразів».

Етап 6. Представте результати своєї роботи над проєктом учням і ученицям класу.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку у своїй групі (якщо група складалася з одного учасника, проведіть саморефлексію), а потім із учителем/учителькою та з учнями й ученицями свого класу. Визначте позитивні й проблемні моменти роботи групи, корисність виконаних проєктів для кожної групи та для класу в цілому.

Проєкт до інтегрованого модуля 2. Історія виникнення геометричних учень



Математичні знання постійно використовуються в реальному житті! Щоб іще раз переконатися в цьому, виконайте проєкт за наведеною нижче схемою.

Етап 1. Самостійно чи з допомогою вчителя/вчительки об'єднайтеся в групи для виконання проєкту (група може містити одну, дві чи кілька осіб).

Етап 2. Обговоріть у групах разом з учителем/учителькою цікаві етапи розвитку геометричних знань і цікаві галузі геометричних учень. Оберіть для кожної групи певний етап розвитку чи галузь геометричних знань (наприклад, геометрія у Стародавньому Єгипті, Стародавній Греції; евклідова та неевклідові геометрії, аналітична та проєктивна геометрії та ін.). Обговоріть етапи реалізації проєкту.

Етап 3. Проведіть пошук матеріалів щодо історії виникнення геометричних учень в області, обраній вашою групою, різними способами (наприклад, пошук в інтернеті, бібліотеці).

Етап 4. Виділіть основні досягнення, які характеризують обрані вашою групою етапи чи галузі розвитку геометричних учень. Спробуйте дізнатися цікаві факти із життя вчених, які внесли значний вклад у розвиток відповідних геометричних учень.

Етап 5. Створіть презентацію результатів роботи вашої групи над проєктом «Історія виникнення геометричних учень».

Етап 6. Представте результати своєї роботи над проєктом учням і ученицям класу.

Етап 7. Обговоріть підсумки проєкту спочатку у своїй групі (якщо група складалася з однієї особи, проведіть саморефлексію), а потім з учителем/учителькою та з учнями й ученицями свого класу. Визначте позитивні й проблемні моменти роботи групи, корисність виконаних проєктів для кожної групи та для класу в цілому.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 1. Числові та буквені вирази. Тотожності

Тренажерний зал

1. а, г.
2. в.
3. а) 1, б) 1, в) 2, г) 3.
4. а) 2, б) 2, в) 3, г) 1.
5. а) 19; б) 5,9; в) -36; г) $-13{,}9$.
6. а) 0; б) 10,5; в) -24; г) -5.
7. а) 10; б) 6,4; в) 12; г) $-1{,}2$.
8. а) 23; б) -1; в) 12,2; г) 5.
9. а) 16; б) 46; в) $-25{,}2$; г) $-14{,}1$.
10. а) 9; б) 80; в) -40; г) -5.
11. Так.
12. Так.
13. $s = a \cdot t$; $s = 125$ км.
14. $S = x \cdot y$; $S = 4750$ м^2.
15. а) $(3+8)\cdot 12$; б) $(a-b):2$; в) $x \cdot y + 2{,}7$; г) $2023 - m:n$.
16. а) $a:2+b$; б) $x-2\cdot y$; в) $(x+y)\cdot(a-b)$; г) $(2023-m):n$.
17. а) $\frac{2}{5}$; б) $-\frac{14}{5}$; в) $\frac{6}{35}$; г) $-\frac{46}{15}$.
18. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{7}{6}$; в) -2; г) $-\frac{1}{30}$.
19. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{7}{6}$; в) $-\frac{1}{7}$; г) $\frac{1}{20}$.

20. а) $\frac{11}{8}$; б) $2\frac{3}{4}$; в) $\frac{17}{8}$; г) $-5\frac{3}{5}$.

23. $s=2\left(x+y\right)$; $s=254$ км.

24. $32x+35y$; 236 грн.

25. а) $\frac{26}{7}$; б) $-\frac{11}{4}$.

26. а) -4; б) -5.

29. $100+80\cdot m$; 340 грн.

30. Якщо $p<3$, вартість становить $2000\cdot\left(p+1\right)$, за інших натуральних p вартість становить $6000+1500\cdot\left(p-2\right)$; а) 6000; б) 12 000.

31. $4\cdot\left(a+b+c\right)$.

32. $4\cdot\left(x+y\right)$.

33. а) $\frac{118}{110}$; б) $-\frac{19}{12}$.

34. а) 5,1; б) $\frac{4}{5}$.

37. а) $\left(x+y\right)\cdot 2{,}5$; б) $\left(x-y\right)\cdot 2{,}5$. За поданих значень x і y: а) 55 км; б) 45 км; отже, більше на 10 км.

38. $P=3a$. Сумарний периметр $6a$ більший за периметр $4a$ квадрата на $2a$ см.

39. $P=2\cdot\left(y+z+t\right)$; $S=y\cdot\left(z-t\right)+2\cdot x\cdot t$.

40. $P=2\cdot\left(a+b\right)+4\cdot e$; $S=a\cdot b-2\cdot e\cdot d$ або $3\cdot b\cdot c+2\cdot d\cdot\left(b-e\right)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 12 300; б) 270; в) 47.

2. 12,5 %.

3. 84.

5. а) 16 см^2; б) 12,25 см^2; в) 27,04 см^2.

6. 216 см^2.

§ 2. Степінь з натуральним показником. Властивості степеня. Стандартний вигляд числа

Тренажерний зал

1. а) 10^4; б) 3^7; в) a^5; г) x^3.
2. а) 9^5; б) 14^4; в) c^7; г) n^4.
3. а) $5\cdot5\cdot5$; б) $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$; в) $x\cdot x\cdot x\cdot x$; г) $y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y$.
4. а) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$; б) $5\cdot5$; в) $a\cdot a\cdot a\cdot a$; г) $b\cdot b\cdot b$.
5. а) 32; б) 81; в) 625; г) 16; д) 0,000 064.
6. а) 128; б) 256; в) 243; г) 81; д) 0,0625.
7. а) $8\cdot10^5$; б) $3{,}6\cdot10^9$; в) $1{,}2\cdot10^8$.
8. а) $9\cdot10^7$; б) $4{,}8\cdot10^8$; в) $1{,}7\cdot10^9$.
9. а) -4; б) 7; в) 57 247; г) 8,1.
10. а) 145; б) 100; в) $-260\,000$, або $-2{,}6\cdot10^5$ г) 0,032.
11. $6{,}853\cdot10^3$ км.
12. $9{,}79\cdot10^2$ м.
13. а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{-1}{125}$; в) $\frac{1}{243}$; г) $-0{,}000\,000\,1$.
14. а) $\frac{1}{256}$; б) $\frac{8}{27}$; в) $\frac{81}{16}$; г) 0.
15. а) 10^7; б) $2\cdot10^8$; в) $6\cdot10^9$.
16. а) 10^8; б) $5\cdot10^{11}$; в) $6\cdot10^8$.
17. а) 0; б) $-\frac{24}{625}$; в) 25,9.
18. а) 1; б) 0,1875.
19. а) $-\frac{3}{625}$; б) 0; в) $-\frac{1}{81}$.
20. а) 0,0103; б) $\frac{7}{16}$; в) $\frac{28}{27}$.
21. а) 729; б) 128; в) 125; г) 100 000.
22. а) 256; б) 243; в) 64; г) 64.
23. а) $-m^9$; б) m^2; в) $-m^5$.

24. а) $-p^{11}$; б) $-p^{3}$; в) p^{6}.

25. Знаки: а) менше; б) більше; в) більше; г) менше; д) менше.

26. Знаки: а) більше; б) менше; в) менше; г) більше; д) більше.

27. а) $5{,}52\cdot10^{5}$ км^2; б) $5{,}52\cdot10^{7}$ га.

28. а) $6{,}915\cdot10^{6}$ км^2; б) $6{,}915\cdot10^{10}$ а.

29. а) $\frac{256}{81}$; б) $\frac{121}{25}$; в) $0{,}216$; г) $-\frac{1}{8}$.

30. а) $\frac{3125}{32}$; б) $-\frac{729}{125}$; в) $1{,}44$; г) $\frac{1296}{625}$.

31. а) $-8{,}4\cdot10^{8}$; б) $3{,}5\cdot10^{10}$; в) $7{,}42\cdot10^{8}$; г) $1{,}6\cdot10^{2}$.

32. а) $-5{,}1\cdot10^{8}$; б) $4{,}2\cdot10^{12}$; в) $3\cdot10^{10}$; г) $1{,}5\cdot10^{2}$.

33. а) $\frac{427}{81}$; б) $-0{,}0011$; в) 626.

34. а) $\frac{197}{64}$; б) $0{,}0011$; в) -1296.

35. а) 4; б) 24; в) $-1{,}875$.

36. а) 246; б) -1056; в) $-0{,}015\,68$.

37. а) $0{,}09$; б) 1; в) 16; г) $3\frac{1}{3}$.

38. а) $1{,}44$; б) -1; в) 64; г) $2\frac{2}{3}$.

39. а) $27\cdot b^{5}$; б) $c^{5}+2\cdot c^{2}$; в) $m^{7}+m^{5}$.

40. а) $16\cdot x^{7}$; б) $y^{5}-5\cdot y^{2}$; в) $2\cdot t^{6}-2\cdot t^{5}$.

41. а) 256; б) 25; в) 16.

42. а) 729; б) 64; в) 1.

43. а) $\left(a^{2}\cdot b^{3}\right)^{5}$; б) $(2c)^{3}$; в) $\left(3d^{3}\cdot p^{4}\right)^{4}$.

44. а) $\left(y^{3}\cdot t^{4}\right)^{3}$; б) $\left(10\cdot m^{2}\right)^{3}$; в) $\left(2\cdot k^{4}\cdot s^{7}\right)^{5}$.

45. Еверест $8{,}849\cdot10^{7}$ мм; Маріанський жолоб $1{,}0984\cdot10^{8}$ мм; на $2{,}135\cdot10^{7}$ мм.

46. Стамбул $1{,}5415 \cdot 10^7$ осіб; Мехіко $8{,}919 \cdot 10^6$ осіб; на $6{,}496 \cdot 10^6$ осіб.

47. а) $8 \cdot a^3$; б) $\frac{1}{81} \cdot b^4$; в) $0{,}125 \cdot x^3$.

48. а) $256 \cdot m^4$; б) $\frac{32}{243} \cdot n^5$; в) $\frac{243}{32} \cdot s^5$.

49. а) 3; б) 196.

50. а) 625; б) $\frac{10}{3}$.

51. а) 125; б) $\frac{7}{5}$; в) $\frac{1}{16}$; г) 9.

52. а) 7; б) $\frac{3}{2}$; в) 0,001; г) 1.

53. а) 45; б) 5; в) 1; г) 160.

54. а) 20; б) 324; в) 1225; г) 40 000.

55. $7{,}78 \cdot 10^8$ км; $3{,}844 \cdot 10^5$ км; більша у $2{,}024 \cdot 10^3$ разу.

56. $1{,}415 \cdot 10^9$ осіб; $3{,}85 \cdot 10^7$ осіб; більше у $3{,}7 \cdot 10^1$ разу.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

2. 19,14 г.

3. а) 25; б) 20.

§ 3. Мономи (одночлени)

Тренажерний зал

1. а) Моном, у стандартному вигляді; б) моном, у стандартному вигляді; в) моном, у стандартному вигляді; г) не є мономом; д) моном, але не в стандартному вигляді; е) моном, але не в стандартному вигляді.

2. а) Моном, у стандартному вигляді; б) не є мономом; в) моном, у стандартному вигляді; г) моном, але не в стандартному вигляді; д) моном, у стандартному вигляді; е) моном, але не в стандартному вигляді.

3. а) $6c$, степінь 1; б) $x^2 \cdot y$, степінь 3; в) $2 \cdot n^5 \cdot p^2$, степінь 7; г) $12 \cdot c^6$, степінь 6.

4. а) $-20 \cdot x$, степінь 1; б) $a^2 \cdot b^3$, степінь 5; в) $8 \cdot c^8 \cdot d^2$, степінь 10; г) $60 \cdot k^{10}$, степінь 10.

5. а) $12ab$; б) $x^7 \cdot y^3$; в) $2 \cdot m^9$.

6. а) $30xt$; б) $a^7 \cdot b$; в) $3 \cdot q^{10}$.

7. а) $8 \cdot x^3$; б) $a^8 \cdot b^4$; в) $16 \cdot c^2 \cdot d^4$.

8. а) $9 \cdot y^2$; б) $m^3 \cdot t^6$; в) $8 \cdot k^6 \cdot s^3$.

9. $24 \cdot a^3$; коефіцієнт 24, степінь 3.

10. $16 \cdot b^2$; коефіцієнт 16, степінь 2.

11. а) $\frac{1}{5} \cdot x^2$, степінь 2; б) $-6{,}6 \cdot y^3 \cdot t^2$, степінь 5; в) $3 \cdot z^5 \cdot t^2$, степінь 7.

12. а) $\frac{2}{5} \cdot a^3$, степінь 3; б) $-8{,}6 \cdot b^3 \cdot c^5$, степінь 8; в) $8 \cdot d^3 \cdot e^5$, степінь 8.

13. а) $2x^4 \cdot y^2$; б) $-8 \cdot k^5 \cdot p$; в) $-20 \cdot s^3 \cdot p^4$.

14. а) $3 \cdot a^3 \cdot b^4$; б) $12 \cdot l^5 \cdot g$; в) $-7 \cdot x^5 \cdot y^3$.

15. а) $\frac{1}{9} \cdot b^2$; б) $-8 \cdot c^6 \cdot d^9$; в) $81 \cdot h^8 \cdot z^{20}$.

16. а) $\frac{1}{8} \cdot d^3$; б) $81 \cdot x^{16} \cdot y^8$; в) $-125 \cdot c^{15} \cdot t^9$.

17. $160xy$, степінь 2.

18. $40abc$, степінь 3.

19. а) $320 \cdot a^4$; б) $-b^4 \cdot c^5$; в) $\frac{1}{6} \cdot d^7 \cdot p^9$.

20. а) $-96 \cdot k^6$; б) $2 \cdot l^8 \cdot m^5$; в) $\frac{1}{2} \cdot g^6 \cdot h^8 \cdot p^2$.

21. а) $2x^2$; б) $-9x^4y^4$; в) $\frac{1}{6}xy$.

22. а) $-3a$; б) $9a^7b^5$; в) $-\frac{1}{6}ab$.

23. а) $\left(5x^2\right)^2$; б) $\left(8y^5z^8\right)^2$; в) $\left(0{,}01p^6s^{10}t^{15}\right)^2$.

24. а) $\left(3a^2\right)^3$; б) $\left(4b^4c^5\right)^3$; в) $\left(-0{,}1d^{10}e^{20}f^{30}\right)^3$.

25. а) $0{,}5a^7 \cdot b^8 \cdot c^{11}$; б) $-3x^{14}y^{18}$.

26. а) $-0{,}1k^{11}l^{10}m^{13}$; б) $\frac{2}{5}p^{19}s^{18}$.

27. а) 45; б) 7,5; в) $\frac{5}{4}$; г) 225.

28. а) 84; б) 10,5; в) 3; г) 441.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) -9; б) 0; в) $\frac{5}{3}$.

4. 25 %.

5. а) 200 кг; б) 400 кг; в) 200 кг.

§ 4. Поліноми (многочлени). Додавання і віднімання поліномів

Тренажерний зал

1. а) Поліном, степінь 1, стандартний вигляд; б) поліном, степінь 3, стандартний вигляд; в) не є поліномом; г) поліном, степінь 3, записаний не в стандартному вигляді; д) не є поліномом.

2. а) Не є поліномом; б) поліном, степінь 1, стандартний вигляд; в) поліном, степінь 2, записаний не в стандартному вигляді; г) поліном, степінь 5, записаний не в стандартному вигляді; д) не є поліномом.

3. а) $7a+2$; б) $8b^2-3b+9$; в) $7{,}4c^2-7c-11$; г) $-d^3+d$.

4. а) $-3{,}5x+11$; б) $3y^2-3$; в) $3z^4+12z^2-4z$; г) $-12m^2$.

5. а) $12x-6$; б) $7y^2+12y+12{,}4$; в) $3z^3+16z^2-9z$; г) $12m^2+6m$.

6. а) $14a+1$; б) $4b^2+9b+2$; в) $9c^2-7{,}6c-1$; г) $-d^3-4d+5$.

7. а) $-3a-4b-15$; б) $-7b^2-2{,}3$; в) $10c^2+7bc+21$;
г) $d^4+2d^3-4d^2-5d$.

8. а) $-1{,}5x-5y-11$; б) $5y^3-10y-8$; в) $28{,}3z^2-19z$;
г) $-m^3-7m^2-14m+5$.

9. $3x+7y+4z$; поліном першого степеня.

10. $a+b+c-x-y$; поліном першого степеня.

11. а) $8ab^2-6ab+8a$; б) $3b^3c+8c$; в) $10{,}7ac^2-28ac+6a$;
г) $7cd^3-cd$.

12. а) $-2{,}5xy^2+15xy$; б) $12y^2z^2-12z^2-9y^2$; в) $23xyz^2+8xy-4yz$;
г) $-9m^2k^3$.

13. а) Сума: $2x^2+1{,}5x-37$; різниця: $-14{,}5x-45$;
б) сума: $4y^3+7y^2-20{,}6y+3$; різниця: $4y^3+5y^2-17{,}4y-3$;
в) сума: $mk-3m^3+16k^2$; різниця: $9mk-3m^3+2k^2$.

14. а) Сума: $4a^2-6a+21$; різниця: $2a^2-18a-7$;
б) сума: $7b^4+15b^2+6b-10$; різниця: $7b^4-7b^2-6b$;
в) сума: $49cd^4-2cd^2+cd$; різниця: $53cd^4-12cd^2+cd$.

15. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$; 3,5 кг; поліном першого степеня.

16. $7x$; $0{,}35$; поліном першого степеня.

17. а) Сума: $2{,}4c^2+1{,}1c+0{,}7$; різниця: $0{,}4c^2-0{,}1c+3{,}5$;
б) сума: $0{,}17ab^3-0{,}12ab^2+0{,}1ab$; різниця:
$0{,}13ab^3-0{,}22ab^2+0{,}1ab$;
в) сума: $x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{4}y$; різниця: $-\frac{1}{3}x^2+xy-\frac{5}{4}y$;
г) сума: $-\frac{2}{7}x^2y+\frac{10}{7}xy^2$; різниця: $\frac{6}{7}x^2y+\frac{2}{7}xy^2$.

18. а) Сума: $1{,}7d^4+0{,}7d^2-0{,}6d$; різниця: $1{,}7d^4-1{,}5d^2+0{,}6d+1$;
б) сума: $0{,}46x^2y-0{,}14xy$; різниця: $0{,}4x^2y+0{,}28xy$;

в) сума: $\frac{3}{10}a^2+\frac{7}{10}ab-\frac{13}{10}b$; різниця: $\frac{1}{10}a^2+\frac{1}{10}ad+\frac{1}{10}b$;

г) сума: $-\frac{1}{2}x^3y^2$; різниця: $2x^3y^2+\frac{1}{2}x^2y^3$.

19. а) $10x+y$; б) $200+10x+y$; в) $100x+30+y$; г) $400+10x+5$.

20. а) $100k+10m+p$; б) $500+10p+m$; в) $100p+70+m$;

г) $200+10p$.

21. Нехай $m=\overline{xy}=10x+y$, тоді $p=\overline{yx}=10y+x$. Різниця: $p-m=(10x+y)-(10y+x)=9x-9y=9(x-y)$. Отже, утворена різниця ділиться націло на 9.

22. Нехай $k=\overline{xyz}=100x+10y+z$, тоді $t=\overline{zyx}=100z+10y+x$. Різниця: $k-t=(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=99x-99z=$ $=33(3x-3z)$. Отже, утворена різниця ділиться націло на 33.

23. $-3x^2+6x-8$.

24. $-7a^2-12ab+2b^2+1$.

25. $4y^3+11y-3$.

26. $p^2q+12p-3q+4pq^2$.

27. Найменше значення 10, якщо $a=0$.

28. Найбільше значення -9, якщо $b=0$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. На 2: 4560, 6372, 1234, 5792; на 3: 4560, 6372, 8127; на 4: 4560, 6372, 5792; на 5: 4560, 1325; на 9: 6372, 8127.

2. $\overline{cb2}+\overline{3a8}=100c+10b+2+300+10a+8=100c+10b+10a+310$. Це число ділиться націло на 10.

3. а.

4. 16 днів.

5. 4 см, 8 см, 6 см.

§ 5. Множення поліномів. Розкладання поліномів на множники

Тренажерний зал

1. а) $4a^2+12a$; б) $-16b^2+56b$; в) $6ac-21c^2$; г) $-10ad+6bd-8d^2$.

2. а) $6x^2-42x$; б) $-12y-6y^2$; в) $15z^2-30zy$; г) $12xy-6y^2-3yz$.

3. а) $x(7x-4)$; б) $5y(y+5)$; в) $2xz(5-3y)$; г) $y^3(y+5)$.

4. а) $a(5a+3)$; б) $3b(b-5)$; в) $4a(2b+c)$; г) $c^2(5c^2-7)$.

5. а) $2ab+14a-3b-21$; б) $29b-15-12b^2$; в) $15ac+21c^2+20a+28c$; г) $12-17d+6d^2$.

6. а) $6x+3xy+8+4y$; б) $24y^2+38y-7$; в) $20xz+5z^2-8x-2z$; г) $56z^2+19z-10$.

7. а) $(3+a)(x+y)$; б) $(c+7)(y-z)$; в) $(5-a)(y^2+2)$; г) $(2+a)(3x-4z)$.

8. а) $(5+c)(a+b)$; б) $(x+6)(a-b)$; в) $(4-x)(a^2+4)$; г) $(a+4)(3y-2z)$.

9. а) $7{,}4x^3+10x^2$; б) $-3x^2y+6xy$; в) $21xz^2-33{,}6x^2z$; г) $12x^2y-6xy^2-3xyz$.

10. а) $32{,}5ab-20a^2b$; б) $-5b^3-7b^2$; в) $12b^2c+30bc^2$; г) $12{,}5a^2c+2{,}5abc-7{,}5ac^2$.

11. а) $6a(2a+3b)$; б) $5b^3(2b-5)$; в) $-4ab(4b^2-a)$; г) $7c^2(3a^2-1)$.

12. а) $2x^2(8y-13)$; б) $3y^3(9y^2+4)$; в) $3x^2z(12x-5)$; г) $5y^2(1-7x^2)$.

13. а) $2x^3+x^2-21x$; б) $10y^3-14y^2-12y$; в) $8z^4-18$; г) $40-34x^2+6x^4$.

14. а) $6a^3+31a^2-11a$; б) $20b-39b^2+18b^3$; в) $8c^4+38c^2+35$; г) $4d^4-36$.

15. а) $(a-c)(3x+y)$; б) $(a+b)(5+3c)$; в) $(y-x)(b^2-2c)$;
г) $(c^3+6a)(y+z)$.

16. а) $(7a+c)(y+z)$; б) $(x-y)(9+5c)$; в) $(2x-b)(y^2+2c)$;
г) $(z+a)(3b^2+4)$.

17. а) $21a^2-7{,}8a^3+3a^4$; б) $2b^3-10{,}6b^2-6b$; в) $6a^3b^2-12a^2b^3$;
г) $10a^3c^2+6a^2c$.

18. а) $14x^4-11{,}6x^3+6x^2$; б) $12y+21{,}9y^2-15y^3$;
в) $-15x^3y^2+12xy^4$; г) $40y^3z^2-30y^4$.

19. а) $(b-5)(3a^2+7)$; б) $2(a+2c)(3-5b^3)$; в) $ab(5b^2-2a+7ab)$;
г) $5a^2(c^4+2c^2-3)$.

20. а) $(3x+7)(5-4x^3)$; б) $y^2(1-10y)(9+2z)$;
в) $xy^2(9y^3-7x^2y+5x^4)$; г) $4x^2(x^3z^3+5z^2-2x)$.

21. а) $x^3-4x^2-17x+60$; б) $2y^3-9y^2-32y-21$; в) z^3-z^2+12;
г) $2x^3-53x+15$.

22. а) $2a^3-5a^2-28a+15$; б) $-3b^3-13b^2+6b+40$;
в) $c^3+2c^2-18c+9$; г) $-a^3+8a^2-11a-20$.

23. а) $(y-z)(5b+7)$; б) $(7+5a)(x-2y)$; в) $(2x-5)(z^3+4c)$;
г) $(4y+3x^2)(1+3z)$.

24. а) $(3x+8)(y+z)$; б) $(8-7z)(3x-y)$; в) $(3z-1)(z^3+2x)$;
г) $(5-a)(5x^2-7y)$.

25. $3ax^2$.

26. $3x-y^2+5x^2y^2$.

27. Одержимо вираз x^6+4, який набуває найменшого значення 4, якщо $x=0$.

28. Одержимо вираз $-a^4-2$, який набуває найбільшого значення -2, якщо $a=0$.

29. а) $\left(a-b^2\right)\left(a^2+7-5c^2\right)$; б) $\left(a+3c\right)\left(5a+b^2-7c^2\right)$.

30. а) $\left(2x+y\right)\left(2y-5+x^2y^2\right)$; б) $\left(3-z^2\right)\left(3+5x^2-6z^3\right)$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $-6{,}1$; б) $\frac{11}{60}$; в) $-2{,}7$; г) $\frac{16}{3}$.

2. $s=40t$; а) 80 км; б) 48 км; в) $93\frac{1}{3}$ км.

4. На 25 %.

§ 6. Формули скороченого множення

Тренажерний зал

1. а) $\left(2a+3b\right)^2$; б) $64x^2-81y^2$; в) $\left(3ab-4x^2\right)^2$; г) $\left(c-5d\right)\left(c+5d\right)$.

2. а) $\left(3p-7q\right)^2$; б) $a^2b^2-d^2$; в) $\left(5m+6n^2\right)^2$; г) $\left(x+y\right)\left(x-y\right)$.

3. а) $4-a^2$; б) y^2-121; в) x^2-49; г) c^2-d^2.

4. а) $81-x^2$; б) $144-a^2$; в) n^2-m^2; г) p^2-q^2.

5. а) $\left(5-2\right)\left(5+2\right)$; б) $\left(12-x\right)\left(12+x\right)$; в) $\left(a-7\right)\left(a+7\right)$; г$\left(b-a\right)\left(b+a\right)$.

6. а) $\left(8-4\right)\left(8+4\right)$; б) $\left(15-y\right)\left(15+y\right)$; в) $\left(c-6\right)\left(c+6\right)$; г$\left(b-a\right)\left(b+a\right)$.

7. а) $\left(x+y\right)^2$; б) $\left(a-b\right)^2$; в) $\left(3-b\right)^2$; г) $\left(m+n\right)^2$.

8. а) $\left(c-d\right)^2$; б) $\left(a+b\right)^2$; в) $\left(2-b\right)^2$; г) $\left(3x+y\right)^2$.

9. а) $9+6k+k^2$; б) a^2+2a+1; в) b^2-4b+4; г) $x^2-2abx+a^2b^2$.

10. а) $1+2d+d^2$; б) $25-10l+l^2$; в) $n^2+2npq+p^2q^2$;
г) $121-66x+9x^2$.

11. а) $9-4x^2$; б) $25a^2-36$; в) $49c^2-81d^2$; г) $16x^2-256y^2$.

12. а) $4a^2b^2-c^2$; б) $9x^2-25y^2$; в) $16t^2-1$; г) $169p^2-49q^2$.

13. а) $(8-a)(8+a)$; б) $(5-2x)(5+2x)$; в) $(11c-3m)(11c+3m)$;
г) $(10p-3q)(10p+3q)$.

14. а) $(y-6)(y+6)$; б) $(11v-4u)(11v+4u)$; в) $(ab-1)(ab+1)$;
г) $(9d-7c)(9d+7c)$.

15. а) $(4x+3y)^2$; б) $(a-4b)^2$; в) $(5-2mn)^2$; г) $(1+7n)^2$.

16. а) $(9c+d)^2$; б) $(3a-2b)^2$; в) $(6k+10)^2$; г) $(5x+3y)^2$.

17. а) $169+182a+49a^2$; б) $1-34xy+289x^2y^2$;
в) $81m^2-288mn+256n^2$; г) $49p^2-84pab+36a^2b^2$.

18. а) $144-120k+25k^2$; б) $64-112mn+49m^2n^2$;
в) $4a^2d^2+12acd^2+9c^2d^2$; г) $p^2-26pq+169q^2$.

19. а) $(2+x)(6-x)$; б) $(3y-x+4)(3y+x-2)$;
в) $(3-b^2)(3+b^2)(9+b^4)$; г) $(c^6-d^{11})(c^6+d^{11})$.

20. а) $(1-y)(11-y)$; б) $(3a+b)(3b-a)$; в) $(4-x)(4+x)(16+x^2)$;
г) $(p-q^2)(p+q^2)(p^2+q^4)(p^4+q^8)$.

21. а) $81p^2-6ps+\frac{1}{9}s^2$; б) $4m^4+6m^2t+\frac{9}{4}t^2$; в) $16x^6-25y^4$;
г) z^8-4z^6.

22. а) $16a^2+4ab+\frac{1}{4}b^2$; б) $9c^4-14c^2d+\frac{49}{9}d^2$; в) $9h^6-4g^4$;
г) $16l^4-l^6$.

23. а) $(2x-7)^2$; б) $(4y-5x)^2$; в) $(3x-8y)^2$; г) $(5y+3x)^2$;
д) $(5x+4)^2$; е) $(6+3x)^2$.

24. а) $(3-9a)^2$; б) $(6a-2b)^2$; в) $(7a-5b)^2$; г) $(3y+5x)^2$;
д) $(4+5x)^2$; е) $(6a+7b)^2$.

25. 999 996.

26. 8 999 600.

27. $x^4;\ 5\frac{1}{16}$.

28. $4a^2+20;\ 45$.

29. а) $\left(x^2-2y\right)^2$; б) $\left(5a^4+b^5\right)^2$; в) $\left(\frac{1}{16}x^2+16y^2\right)^2$; г) $\left(0{,}1a+1\right)^2$.

30. а) $\left(3x-5y^4\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$; в) $\left(1{,}2x-0{,}5y\right)^2$; г) $\left(1{,}1a-0{,}4b\right)^2$.

33. 25.

34. 148.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 80; б) -72; в) $-\frac{21}{8}$; г) $\frac{2}{3}$.

2. 2; якщо $a=8,\ b=-6$.

3. $p=80m$; а) 320; б) 200; в) 108.

4. Усього 24 дерева; 12 яблунь, 8 груш.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 1

1) А; 2) В; 3) Б; 4) Б; 5) Д; 6) Г; 7) 122; 8) 2; 9) $3x^2$; 10) 276; 11) b^2; 12) $\left(3y-2t\right)\left(3y+2t+6ty\right)$.

Завдання підвищеної складності

2. 33 і 32.

3. Так.

7. $x^4+x^2y^2+y^4=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)$.

8. *Вказівка.* Оскільки $\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2=4ab$, то, наприклад, $24xy=\left(6x+y\right)^2-\left(6x-y\right)^2$. Задача має безліч розв'язків, оскільки вираз $24xy$ можна подати у вигляді виразу $4ab$ нескінченною кількістю способів.

9. $4a^2-12ab+9b^2$; $4a^2+12ab+9b^2$; $\frac{1}{36}a^2-ab+9b^2$; $4a^2-ab+\frac{1}{16}b^2$.

Розділ 2. ФУНКЦІЇ

§ 7. Прямокутна система координат на площині

Тренажерний зал

1. $A(4;3)$, $B(-4;1)$, $C(0;3)$, $D(-2;0)$, $E(-3;-3)$, $F(5;-3)$, $O(0;0)$;
а) A; б) B; в) E; г) F; д) D, O; е) C, O.

2. $K(3;0)$, $L(1;3)$, $M(-4;3)$, $P(-5;-2)$, $S(0;-4)$, $T(2;-3)$, $O(0;0)$;
а) L; б) M; в) P; г) T; д) K, O; е) S, O.

3. а) A; б) B; в) C; г) немає; д) D; е) E.

4. а) Немає; б) T; в) H; г) S; д) M; е) L.

5. $A(0;-2{,}5)$ — на осі ординат; $B(-3;1{,}5)$ — у II чверті; $C(2{,}5;2{,}5)$ — у I чверті; $D(4{,}5;-1{,}5)$ — у IV чверті.

6. $S(1{,}5;2{,}5)$ — у I чверті; $P(-3{,}5;0)$ — на осі абсцис; $Q(-1{,}5;-2{,}5)$ — у III чверті; $R(4;-2{,}5)$ — у IV чверті.

7. а) A; б) B; в) такої точки немає; г) C; д) D; е) E.

8. а) Такої точки немає; б) V; в) N; г) W; д) Y; е) Z.

9. Координати вершин: $C(2;1)$, $B(2;3)$, $A(-3;3)$, $L(-3;-2)$, $K(4;-2)$, $D(4;1)$; $P=120$ мм; $S=775$ мм^2.

10. Координати вершин: $B(4;4)$, $A(-2;4)$, $P(-2;1)$, $T(-4;1)$, $N(-4;-1)$, $M(-3;-1)$, $F(-3;-4)$, $D(3;-4)$, $K(3;-2)$, $C(4;-2)$; $P=160$ мм; $S=1325$ мм^2.

11. а) A; б) A; в) A.

12. а) P; б) P; в) P.

13. $P(2;b)$ — IV чверть; $Q(a;-3)$ — IV чверть; $S(-a;0)$ — від'ємна частина осі абсцис; $T(0;-b)$ — додатна частина осі ординат; $R(-a;b)$ — III чверть.

14. $F(-3;c)$ — III чверть; $G(d;5)$ — II чверть; $H(-c;0)$ — додатна частина осі абсцис; $K(0;d)$ — від'ємна частина осі ординат; $L(-c;-d)$ — I чверть.

15. 45 см^2.

16. 32 см^2.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $-\frac{3}{8}$; б) $-3\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$.

2. 105.

3. а) 32; б) 1,5; в) 5.

5. 32.

§ 8. Поняття функції, способи задання функцій. Графік функції

Тренажерний зал

1. а, в, г.

2. а, б, в.

5. а) $D(y)=\{0;1;2;3;4;5\}$; б) $E(y)=\{1;2;5;10;17;26\}$; в) $f(1)=2$; г) $f(4)=17$; д) $y=26$ при $x=5$.

6. а) $D(y)=\{0;1;2;3;4;5\}$; б) $E(y)=\{3;5;7;9;11;13\}$; в) $g(2)=7$; г) $g(5)=13$; д) $y=9$, якщо $x=3$.

7. а) 3; б) 4; в) -2; г) -2.

8. а) 3; б) -2; в) 2; г) 2.

9. а) -2; б) 4; в) $-0,5$; г) 0.

10. а) 3; б) 7; в) 8; г) 2.

11. а) $x=2y$; б) $v=s:t$; в) $S=ab$; г) $P=3a$.

12. а) $a=\frac{1}{2}(1{,}5b+c)$; б) $t=s:v$; в) $c=q:k$; г) $P=2(m+n)$.

13. а) Так; б) ні; в) так; г) ні; д) ні.

14. а) Ні; б) так; в) так; г) так; д) ні.

19. а) 8; б) -2; в) 12; г) 1.

20. а) 4; б) -8; в) 20; г) -4.

21. Графіки функцій на рис. 1 і 3.

22. Графіки функцій на рис. 4 і 5.

29. а) 12,5; б) $-\frac{26}{5}$; в) 7,9; г) 0; д) -2 і 6; е) $-2{,}6$ і 7,4.

30. а) $-0{,}3$; б) 2; в) -8; г) 12,4; д) -6 і 6; е) $-3{,}4$ і 8.

33. а) $-1{,}5$; 2,5; 1,5; -1; $-2{,}5$; б) $y=1{,}5$, якщо $x=0$, $x=-3$; в) три значення; г) ні, так, так, ні, так; д) 12; е) 7.

34. а) 3,5; 0; $-2{,}5$; 0,5; 1,5; б) $y=-0{,}5$, якщо $x=-1$, $x=2$; в) чотири значення; г) ні, так, ні, так, так; д) 13; е) 7.

35. б, в.

36. в, г.

37. $y=0{,}075x$; x та y — невід'ємні числа.

38. $y=35x$; x та y — невід'ємні числа.

41. $y=x^2+1$.

42. $y=-x^2+1$.

45. а, в, г.

46. б, в, г.

47. а) 0,6; б) 0; в) 0; г) 0,6.

48. а) 0,7; б) 0; в) 0; г) 0,1.

49. а) 20 хв; б) 1800 м; в) 90 м/хв; г) 600 м; д) за 2 хв та за 17 хв.

50. а) 20 хв; б) 1000 м; в) 50 м/хв; г) 500 м; д) за 2 хв та від вісімнадцятої до дев'ятнадцятої хвилини.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $12m^2-5m$; б) $4c^2$.

2. а) $a^2b^3\left(5b^2-2a^2\right)$; б) $2(c-3p)(c+3p)$; в) $2(x-6)^2$.

3. Загальна маса котиків 18,5 кг; зможе.

§ 9. Лінійна функція, її графік і властивості

Тренажерний зал

1. а, б, в, г, д, ж.

2. а, б, в, г, д.

3. а, г.

4. а, б, г.

5. а) 8; б) 2; в) -1; г) 4,1.

6. а) 1, б) -3, в) -5, г) -4.

7. 1; 4.

8. -3; 1.

9. в).

10. г).

11. а) $-1{,}5$; б) -2; в) -4; г) $-1\frac{37}{40}$.

12. а) 3,4; б) $\frac{1}{15}$; в) $-0{,}6$; г) 1.

13. а) $-0{,}5$; -2; $-3{,}5$; б) 6; 0; -4; в) $A(1;3{,}5)$ — ні, $B(3;-1{,}5)$ — так, $C(4;-1)$ — так, $D(-2;-5)$ — ні; г) $(0;-3)$, $(6;0)$.

14. а) -3; -1; 5; 3; б) 1,5; 3; $-0{,}5$; в) $A(1;1)$ — так, $B(2;-1)$ — так, $C(2{,}5;-2)$ — так, $D(-2;6)$ — ні; г) $(0;3)$, $(1{,}5;0)$.

15. $(4;5)$.

16. $(-5;-2)$.

17. Ні.

18. Ні.

19. $y=100x+30$; так.

20. $y=0{,}2x+50$; так.

21. $(1;2)$, $(-1{,}5;0)$ — ні; $(1;-2)$, $(0;-1{,}5)$ — так.

22. $(0;0)$, $(-2;2{,}5)$ — ні; $(-1;-1)$, $(1;2)$ — так.

23. а) Так, $(-2;-3)$; б) так, $(2;5)$; в) ні; г) так, $(0;0)$.

24. а) Так, $(0;-2)$; б) так, $(-1;-3{,}5)$; в) ні; г) так, $(0;0)$.
25. 2.
26. -8.
27. а) Рис. 1, *а* — виробництво, рис. 1, *б* — продаж; б) 60 кг; 20 кг; в) 10 кг; 5 кг; г) $y=10x$; $y=-5x+50$.
28. а) Рис. 2, *а* — продаж, рис. 2, *б* — виробництво; б) 120; 60; в) 30; 20; г) $y=30x$; $y=-20x+80$.
29. в) $y=4$.
30. г) $y=x$.
31. в) $y=-x-4$.
32. б) $y=2x+2$.
35. $(0;3)$, $\left(\frac{-3}{2};0\right)$.
36. $(0;-6)$, $(-2;0)$.
37. $y=3x$.
38. $y=6x$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $7a-2$; б) $22c$; в) $-3b-7$.
2. а) $x=4$; б) $x=-2{,}9$; в) $x=0{,}5$; г) $x=1\frac{11}{12}$.
3. а) $x=4$; б) $x=-200$; в) $x=-6$; г) $x=3\frac{3}{4}$.
4. а) 10 г; б) 300 г.
5. 3 см.

Готуємося до контрольної роботи до розділу 2

1) Б; 2) В; 3) Г; 4) А; 5) Г; 6) Д; 7) 20; 8) -33; 9) -10; 10) а) Ні; б) так (функціональна); в) можливо; 11) $50+5t$, так; 12) а) $\{1;3;5;6;8;10;12;15\}$; б) $\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7\}$; в) найбільше 7, найменше -4; г) $x=3$; $x=15$;

13)

x	-2	-1	0	1	2
y	5	-1	-3	-1	5

14) а) 3 год; б) 3 км; в) 1 км/год; г) 1,5 км (або 1500 м); д) від 50 до 70 хвилини і на 140 хвилині.

Завдання підвищеної складності

1. 3.

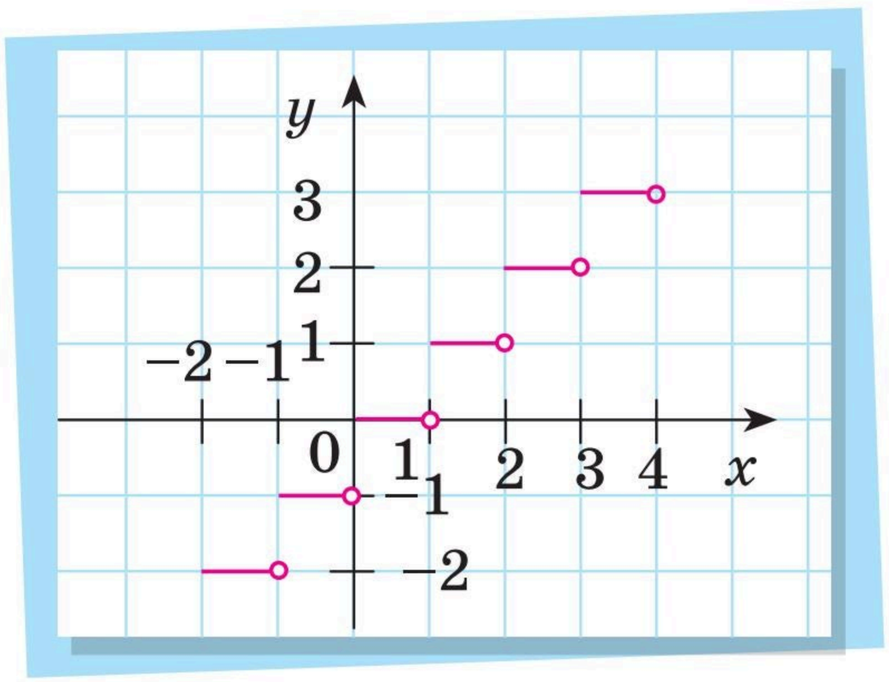
2. *Вказівка.* Використайте, що $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$.

3. $a=0,\ b=-2$.

4. $a=-2,\ b=4$.

5. *Вказівка.* Якщо $x<0$, то $y=2x-1$; якщо $x=0$, то $y=-1$; якщо $x>0$, то $y=4x-1$.

6.



7. Якщо $x<20$, то $y=2x+40$; якщо $x=20$, то $y=96$; якщо $x>20$, то $y=2{,}4x+48$. *Вказівка.* Для побудови графіка використайте, що x — кількість проданого товару — може дорівнювати тільки 0 або натуральному числу.

Розділ 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

§ 10. Рівняння з однією змінною та їх корені. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться

Тренажерний зал

1. а, в, е.
2. а, в, д.
3. а) $x=-5$; б) $x=9$; в) $x=3$; г) $x=-6$.
4. а) $x=4$; б) $x=8$; в) $x=21$; г) $x=-13$.
5. а) $x=6$; б) $x=-3$; в) $x=20$; г) $x=2{,}5$.
6. а) $x=-8$; б) $x=\frac{1}{7}$; в) $x=24$; г) $x=1$.
7. а, б, в.
8. а, б, в, г, д.
9. а) $x=-5{,}5$; б) $x=3{,}1$; в) $x=-1{,}2$; г) $x=-32$; д) $x=-\frac{10}{7}$.
10. а) $x=12{,}8$; б) $x=-12{,}2$; в) $x=-0{,}3$; г) $x=-30$; д) $x=-\frac{8}{11}$.
11. $x=33$.
12. $x=17$.
13. а) $x=-3$; б) $x=4$; в) $x=-1{,}4$; г) $x=2{,}15$; д) $x=-\frac{2}{7}$.
14. а) $x=2$; б) $x=-6$; в) $x=0{,}9$; г) $x=-0{,}28$; д) $x=\frac{2}{9}$.
15. $75\cdot x=2625$.
16. $17{,}9\cdot x=44{,}75$.
19. $5x+4=7$.
20. $5y=-2$.
21. $4x-8=-33$.
22. $y=-3{,}2$.
25. а) $x=-1{,}4$; б) $x=-5{,}85$; в) $x=15{,}6$; г) $x=-0{,}8$.
26. а) $x=-2{,}8$; б) $x=-9{,}6$; в) $x=23$; г) $x=1{,}2$.

27. а) $y=5$; б) $y=-7$; в) $y=5{,}5$; г) $y=-8$.

28. а) $y=4$; б) $y=8$; в) $y=4{,}8$; г) $y=-15$.

29. а) Розв'язків не має; б) усі числа; в) розв'язків не має; г) $x=0$. Рівносильні рівняння а, в.

30. а) Розв'язків не має; б) усі числа; в) розв'язків не має; г) $x=0$. Рівносильні рівняння а, в.

31. $x=-0{,}25$.

32. $x=1$.

33. $x=19$.

34. $x=12$.

35. а) $x=-3$; б) $x=15{,}5$; в) $x=4{,}7$; г) $x=1{,}75$.

36. а) $x=2$; б) $x=-5$; в) $x=-0{,}3$; г) $x=1{,}24$.

37. $50+0{,}5y=137{,}5$; $y=175$ км.

38. $10+1{,}5x=26{,}5$; $x=11$ хв.

39. $a=15$ см.

40. $b=33$ см.

41. а) $x=-4$; б) $x=1{,}6$; в) $x=8$; г) $x=20$.

42. а) $y=\frac{2}{3}$; б) $y=-1$; в) $y=1$; г) $y=-10{,}5$.

43. а) $x=3{,}5$; б) $x=\frac{3}{8}$; в) $x=-\frac{5}{3}$; г) $x=\frac{5}{7}$; д) $x=-0{,}5$; е) $x=0{,}5$; ж) $y=1$.

44. а) $y=-6$; б) $y=-\frac{4}{3}$; в) $y=-1$; г) $y=2{,}5$; д) $y=-4{,}7$; е) $y=-\frac{4}{21}$; ж) $y=\frac{28}{31}$.

45. а) Жодного; б) безліч; в) жодного; г) один; д) жодного; е) безліч.

46. а) Безліч; б) один; в) жодного; г) безліч; д) жодного; е) безліч.

47. а) $x=-30$; б) $y=18$; в) $m=6$; г) $n=48$.

48. а) $a=24$; б) $b=4$; в) $c=150$; г) $d=-50$.

49. а) $x=2$; б) $x=0{,}8$; в) $x=-12$.

50. а) $x=3$; б) $x=\frac{1}{3}$; в) $x=-\frac{4}{3}$.

51. $x = -1$.
52. $x = 5$.
53. 18.
54. 16.
55. За 10 днів.
56. За 10 днів.
57. $0{,}1x + 2 = 0{,}8;\ x = -12$.
58. $0{,}3x - 10{,}1 = 15{,}4;\ x = 85$.

61. а) $x = -2$; б) $x = -4$; в) $x = \frac{5}{3}$; г) $y = \frac{4}{7}$; д) $x = -23$.

62. а) $y = -\frac{1}{2}$; б) $y = -\frac{1}{5}$; в) $x = -\frac{5}{14}$; г) $y = 2$; д) $y = -2$.

63. а) $x = 10$; б) $x = 0$; в) $x = -0{,}8$; г) $x = -\frac{29}{3}$; д) $x = -8$;
е) $x = -1{,}5$.

64. а) $x = \frac{2}{9}$; б) $x = 3$; в) $x = 0$; г) $x = -\frac{15}{7}$.

65. а) $(1; 5)$; б) графіки не перетинаються; в) $(-2{,}8; -3{,}4)$;
г) $(-12; -2{,}25)$.

66. а) $(-1; 2)$; б) графіки не перетинаються; в) $(-1; -11)$;
г) $\left(\frac{24}{13}; \frac{8}{13}\right)$.

69. У першому — 27, у другому — 30, у третьому — 33.
70. Однокімнатних — 16, двокімнатних — 20, трикімнатних — 28.
71. 55 км/год; 65 км/год.
72. 50 км/год; 60 км/год.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Ні.
2. 24.

3. а) $2xyz(2+xz)$; б) $\left(a^{10}-b^{15}\right)\left(a^{10}+b^{15}\right)$; в) $4\left(m^2-k^2\right)^2$.

4. Точки A, C.

§ 11. Рівняння, що розв'язуються за допомогою лінійних рівнянь. Математичні моделі

Тренажерний зал

1. а) $x_1=-2$, $x_2=7$; б) $x_1=-3$, $x_2=4$; в) $x_1=24$, $x_2=1{,}5$; г) $x_1=6$, $x_2=-2$.

2. а) $x_1=3$, $x_2=5$; б) $x_1=-8$, $x_2=-4$; в) $x_1=20$, $x_2=-5$; г) $x_1=1$, $x_2=-16$.

3. а) $x_1=0$, $x_2=7$; б) $x_1=0$, $x_2=-12$; в) $x_1=0$, $x_2=2$; г) $x_1=0$, $x_2=-5$.

4. а) $y_1=0$, $y_2=-8$; б) $y_1=0$, $y_2=4$; в) $y_1=0$, $y_2=-2$; г) $y_1=0$, $y_2=9$.

5. а) $y_1=3$, $y_2=-2$; б) $y_1=-3$, $y_2=2$; в) $y=2$.

6. а) $x_1=-8$, $x_2=11$; б) $x_1=-40$, $x_2=3$; в) $x=-2$.

7. $80x=240$; $x=3$.

8. $5x=60$; $x=12$.

9. а) $y_1=5$, $y_2=-5$; б) $y_1=7$, $y_2=-7$; в) $y_1=1$, $y_2=-1$; г) $y_1=4{,}5$, $y_2=-4{,}5$.

10. а) $x_1=3$, $x_2=-3$; б) $x_1=4$, $x_2=-4$; в) $x_1=2{,}5$, $x_2=-2{,}5$; г) $x_1=1{,}2$, $x_2=-1{,}2$.

11. а) $x=4$; б) $x=1$; в) $x=5$; г) $x=9$.

12. а) $y=-3$; б) $y=-6$; в) $y=-7$; г) $y=-10$.

13. 26 діб; $(200-70):5$; $5x+70=200$.

14. 180 год; $9000:50$; $50x=9000$.

15. а) $x_1=-7$, $x_2=7$; б) $x_1=-2{,}5$, $x_2=2{,}5$; в) $x_1=-2$, $x_2=2$; г) $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{4}$; д) $x=-6$; е) $x=2{,}5$; ж) $x=-\frac{1}{9}$; з) $x=3$.

16. а) $y_1 = -5$, $y_2 = 5$; б) $y_1 = -2\frac{1}{3}$, $y_2 = 2\frac{1}{3}$; в) $y_1 = -5$, $y_2 = 5$; г) $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$; д) $y = \frac{1}{6}$; е) $y = -2$; ж) $y = -\frac{1}{2}$; з) $x = 1$.

17. а) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$; б) $x_1 = -8$, $x_2 = 8$; в) $x_1 = -8$, $x_2 = 8$; г) рівняння розв'язків не має; д) $x_1 = -2$, $x_2 = -6$; е) $x = 0{,}75$; ж) рівняння розв'язків не має; з) $x_1 = 2$, $x_2 = -6$.

18. а) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; б) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; г) рівняння розв'язків не має; д) $x_1 = 10$, $x_2 = -28$; е) $x = 0{,}4$; ж) рівняння розв'язків не має; з) $x_1 = -12$, $x_2 = -22$.

19. Усього 520 (у червні — 234, у липні — 104).

20. Першого тижня — 60 (другого — 69, третього — 79).

21. а) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; б) $x_1 = -6$, $x_2 = -1$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$.

22. а) $y_1 = 3$, $y_2 = 1$; б) $y_1 = -4$, $y_2 = 2$; в) $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{2}{3}$.

23. а) $x = 9$; б) $x = -2$; в) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

24. а) $y = -4$; б) $x_1 = 21$, $x_2 = -3$; в) $y_1 = -7$, $y_2 = 3$.

25. а) $x_1 = 0$, $x_2 = -18$; б) $x_1 = 6\frac{1}{4}$, $x_2 = 1\frac{3}{4}$; в) $x_1 = -5$, $x_2 = -2\frac{1}{3}$.

26. а) $x_1 = 15$, $x_2 = -5$; б) $x_1 = 9\frac{1}{3}$, $x_2 = 2\frac{2}{3}$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = 16$.

27. 70 м і 100 м.

28. Ширина 10 см, довжина 15 см.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. Ні.

2. 19.

3. а) $4c^2$; б) $4y^2 + d^2$; в) $m^2 + p^2$.

4. а) A, C, D; б) B, D.

5. Можна утворити лише два трикутники: зі сторонами 3 см, 9 см, 11 см і зі сторонами 6 см, 9 см, 11 см.

§ 12. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Рівняння прямої

Тренажерний зал

1. а, б, г, е.
2. б, в, д, е.
3. а, б, в, д, е.
4. б, в, г, д, е.
5. Так.
6. Ні.
7. а) Так; б) ні.
8. а) Ні; б) так.
9. Ні.
10. Так.
11. Безліч.
12. Безліч.
15. $2x+4y=350$.
16. $5x+10y=60$.
17. а) $x=\frac{3}{4}y+3$; б) $y=\frac{4}{3}x-4$.
18. а) $x=-\frac{5}{3}y-5$; б) $y=-\frac{3}{5}x-3$.
19. а) Так; б) ні; в) ні; г) так.
20. а) Ні; б) так; в) так; г) ні.
25. а) $(0;2)$ і $(2;0)$; б) $(0;-1)$ і $(1;0)$; в) $(0;3)$ і $(2;0)$; г) $(0;0)$.
26. а) $(0;1)$ і $(1;0)$; б) $(0;2)$ і $(-2;0)$; в) $(0;2)$ і $(5;0)$; г) $(0;0)$.
29. а) Так; б) ні; в) так; г) ні.
30. а) Ні; б) так; в) так; г) так.
31. 4.
32. 3.
33. $(0;3)$ і $(2;0)$.
34. $(0;3)$ і $(-7;0)$.
37. $(2;2)$.
38. $(-2;5)$.

39. $45x+15y=165$.

40. $18x+36y=252$.

43. а) $(4;-3)$, ця точка і є графіком рівняння; б) $(-4;5)$, ця точка і є графіком рівняння.

44. а) $(-2;4)$, ця точка і є графіком рівняння; б) $(1;-3)$, ця точка і є графіком рівняння.

45. а) $(3;-1)$, ця точка і є графіком рівняння; б) $(0{,}5;5)$, ця точка і є графіком рівняння.

46. а) $(2;4)$, ця точка і є графіком рівняння; б) $\left(1;\frac{1}{3}\right)$, ця точка і є графіком рівняння.

47. а) і б) — графіком рівняння є всі точки координатної площини.

48. а) і б) — графіком рівняння є всі точки координатної площини.

49. а) Графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=0$ і $x=2$; б) графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $x=0$ і $y=-0{,}5x$.

50. а) Графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=0$ і $x=-0{,}5$; б) графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=0$ і $y=-x$.

51. а) Графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=x$ і $y=-x$; б) графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=x+1$ і $y=-x-1$.

52. а) Графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=\frac{2}{3}x$ і $y=-\frac{2}{3}x$; б) графіком рівняння є фігура, яка складається з двох прямих: $y=x-3$ і $y=-x+3$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. 3,5.

2. а) $\frac{12}{25}$; б) $\frac{13}{25}$.

3. Так.

5. 1236.

§ 13. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Тренажерний зал

1. а, б.
2. а, г.
3. Так.
4. Так.
5. а) $(2;9)$; б) $(3;5)$.
6. а) $(10;3)$; б) $(19;1)$.
7. а) $x=5$; б) $y=4$; в) $x=1$.
8. а) $x=-6$; б) $y=-7$; в) $x=1$.
9. $x+y=20$; $x-y=6$.
10. $x+y=25$; $y=4x$.
11. а) $(-1;2)$; б) $(1;3)$; в) не має; г) $(0;-1)$.
12. а) $(1;3)$; б) $(0;1)$; в) $(0;-2)$; г) не має.
13. а) $(2;6)$; б) $(4;3)$; в) $(1;2)$; г) $(-6;-4)$; д) $(6;3)$; е) $(2;6)$.
14. а) $(-1;6)$; б) $(9;2)$; в) $(2;-9)$; г) $(3;-2)$; д) $(-9;-3)$; е) $(5;25)$.
15. а) $(2;4)$; б) $(1;-2)$; в) $(3;0)$; г) $(-1;-1)$.
16. а) $(2;1)$; б) $(-2;0)$; в) $(1;0)$; г) $\left(\frac{31}{6};-1\right)$.
17. 4 й 17.
18. Бабуся — 48, Марійка — 24.
19. З капустою — 8 грн, з вишнями — 12 грн.
20. 15 дівчат і 18 хлопців.
21. а) $(4;2)$; б) $(2{,}5;0)$; в) $(0{,}75;2{,}5)$; г) $(4;1)$.
22. а) Не має; б) $(1;1)$; в) не має; г) $(-4;-16)$.
23. а) $(3;-1)$; б) $(4;5)$; в) $(2;2)$; г) $(4;2)$.
24. а) $(0{,}5;4)$; б) $(-4;4)$; в) $(2;0)$; г) $(-2;-1)$.
25. а) $(1;2)$; б) $(0{,}8;2)$; в) $(3;-1)$; г) $(5;6)$.
26. а) $(-1;-2)$; б) $(5;6)$; в) $(1;-1)$; г) $(1{,}5;0{,}5)$.

27. 1,6; 10,4.

28. 8; $5\frac{1}{3}$.

29. 11 250 м^2.

30. 475 см^2.

31. а) Один розв'язок; б) не має розв'язків; в) безліч розв'язків; г) один розв'язок.

32. а) Безліч розв'язків; б) один розв'язок; в) не має розв'язків; г) один розв'язок.

33. а) $\left(5;\frac{10}{9}\right)$; б) $(-4;-5)$; в) $(28;4)$; г) $(0;-1)$.

34. а) $(18;9)$; б) $(4;-3)$; в) $(1;1)$; г) $(-1;-2)$.

35. а) $(1{,}5;2{,}5)$; б) $(40;50)$; в) $(-2;2{,}5)$; г) $(10;1)$.

36. а) $(2{,}8;0{,}2)$; б) $(-1;-1)$; в) $(100;-10)$; г) $(1;-3)$.

39. а) $(4;5)$; б) $(-5;-5)$.

40. а) $(1;1)$; б) $(2;-1)$.

41. а) $a=-3$; б) $a=4$.

42. а) $a=9$; б) $a=-0{,}2$.

43. $a=2,\ b=-3$.

44. $a=-3,\ b=5$.

45. $\frac{8}{13}$.

46. $\frac{3}{4}$.

47. На першій полиці — 80, на другій — 60.

48. У першій цистерні — 170 л, у другій — 40 л.

49. Швидкість руху катера в стоячій воді — 12,5 км/год, швидкість течії — 2,5 км/год.

50. Власна швидкість руху човна — 20 км/год, швидкість течії — 3 км/год.

51. З першої труби — 10 л, з другої — 8 л.

52. 156 г першого сплаву, 104 г — другого.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $y=8$.
2. Так.
3. $75\ \%$.
4. $29{,}5\ \text{см}^2$.
5. 2447.

Готуємось до контрольної роботи до розділу 3

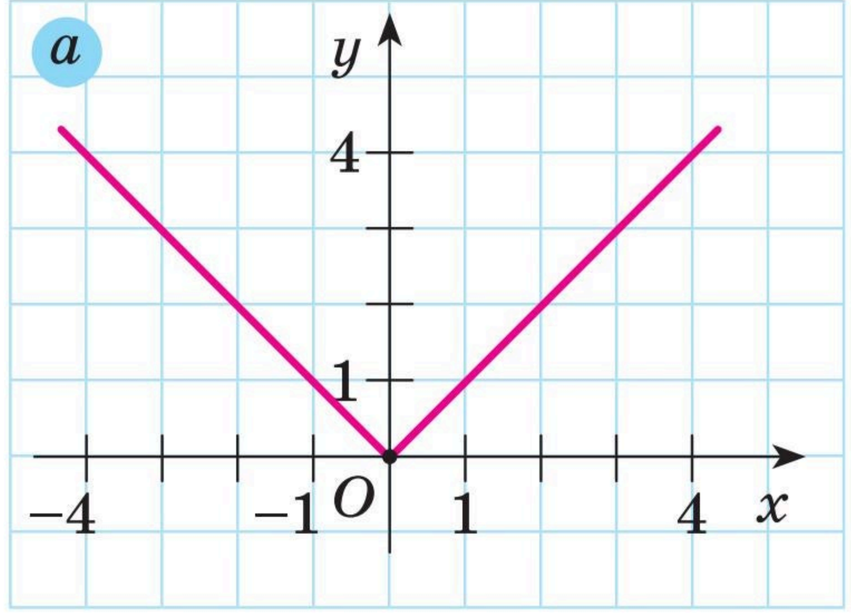
1) Г; 2) Б; 3) В; 4) Б; 5) Б; 6) Г; 7) 2,6; 8) $x=-4{,}5$; 9) 70 грн; 10) $x=4\frac{1}{7}$; 11) $x=-4$, $x=7$; 12) $(10;2)$; 13) 12 км, 3 км/год; 14) 12,5 см, 22,5 см, 281,25 см^2.

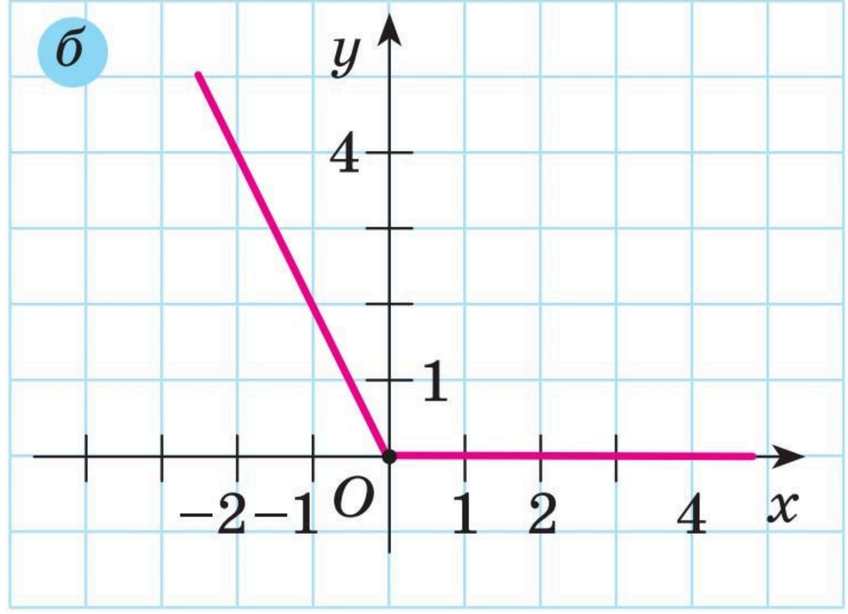
Завдання підвищеної складності

1. а) Якщо $a=0$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$, то $x=a$;
б) якщо $a=0$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$, то $x=2$;
в) якщо $a=0$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$, то коренів немає.

2. а) Якщо $a=1$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 1$, то $x=a+1$; б) якщо $a=0$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$, то $x=3$; в) якщо $a=0$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$, то коренів немає.

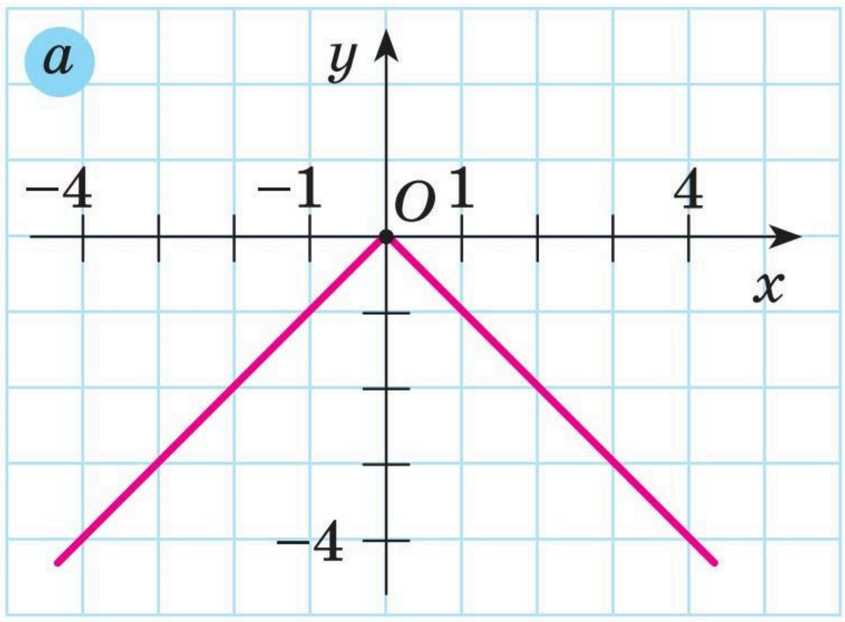
3.

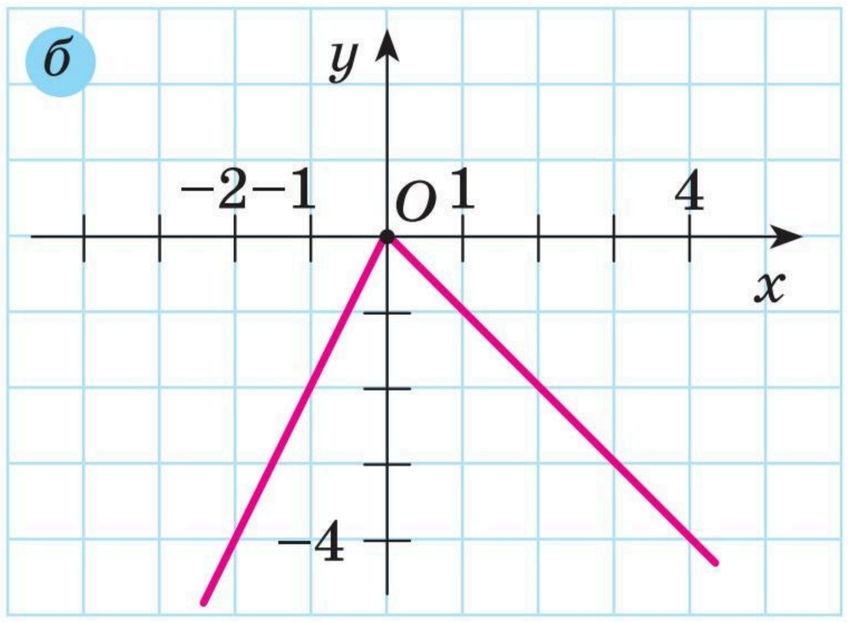




Вказівка до б): якщо $x<0$, то $y=-2x$; якщо $x=0$, то $y=0$; якщо $x>0$, то $y=0$.

4.





5. а) $(-6;-2)$; б) $(1;1)$.

6. а) $(-3;7)$; б) $(1;1)$.

7. $a=-4$.

8. $a=-1$.

9. а) $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(2;0)$, $(-2;0)$.

Вказівка. Візьміть до уваги, що для всіх розв'язків цього рівняння за умови цілих x значення $|x|$ може дорівнювати тільки 0, 1 або 2;

б) $(1;2)$, $(1;-2)$, $(-1;2)$, $(-1;-2)$, $(2;1)$, $(2;-1)$, $(-2;1)$, $(-2;-1)$.

Вказівка. Візьміть до уваги, що для всіх розв'язків цього рівняння за умови цілих x значення x^2 може дорівнювати тільки 0, 1 або 4.

10. а) $(0;0)$, $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$. *Вказівка.* Візьміть до уваги, що для всіх розв'язків цього рівняння за умови цілих y значення $|y|$ може дорівнювати тільки 0 або 1;

б) $(1;2)$, $(1;0)$, $(-1;2)$, $(-1;0)$. *Вказівка.* Візьміть до уваги, що для всіх розв'язків цього рівняння за умови цілих x значення x^2 може дорівнювати тільки 0 або 1.

Розділ 4. ПОНЯТТЯ ТА ЇХ ОЗНАЧЕННЯ, ТВЕРДЖЕННЯ ТА ЇХ ДОВЕДЕННЯ

§ 14. Поняття, означення понять

Тренажерний зал

1. а) одягу; б) ігор; в) лікар; г) комаха.
2. а) дерево; б) меблів; в) транспорту; г) пристрій.
3. а) Яблуко — це фрукт; б) літак — це транспорт; в) кіт — це тварина; г) виделка — це посуд.
4. а) Крісло — це меблі; б) годинник — це механізм; в) річка — це водойма; г) дуб — це дерево.
5. а) «жінка»; б) «пристрій»; в) «прикраса»; г) «людина».
6. а) «городина»; б) «опади»; в) «будівля»; г) «напій».
7. в, е, з.
8. б, в, г, д, з.
9. а) E; б) C; в) A; г) B.
10. а) D; б) E; в) B; г) A.
11. а) «ромашка»; б) «горобець»; в) «речення»; г) «задача».
12. а) «ліс»; б) «літера»; в) «підручник»; г) «ковдра».
15. Абстрактні: в, г, ж, з; конкретні: а, б, д, е.
16. Абстрактні: а, г, д, е, з; конкретні: б, в, ж.
17. а) «яблуко»; б) «чотирикутник»; в) «шкільні меблі»; г) «хвойне дерево».
18. а) «фруктове дерево»; б) «жіночий одяг»; в) «хижа тварина»; г) «многокутник».
23. а) «число», «ціле число», «парне число»; б) «виріб для дому», «столове приладдя», «чайна ложка»; в) «водойма», «річка», «Ворскла»; г) «текстильний виріб», «зимовий одяг», «шарф».
24. а) «число», «дріб», «десятковий дріб»; б) «тварина», «свійська тварина», «кінь»; в) «кліматична зона», «пустеля», «Сахара»; г) «птах», «хижий птах», «яструб».
25. а) «ягода»; б) «многокутник»; в) «меблі»; г) «дерево».

26. а) «частина мови»; б) «геометрична фігура»; в) «ціле число»; г) «кущі».

27. Наприклад: а) «семикласниця»; б) «ціле число»; в) «червоний олівець»; г) «фруктове дерево».

28. Наприклад: а) «латинська буква»; б) «лінійне рівняння»; в) «учителька математики»; г) «лебідь».

31. а) Чотирикутник; усі кути прямі; б) прямокутником називають чотирикутник, у якого всі кути прямі; в) усі сторони прямокутника рівні. Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні; г) *Вказівка.* Обсяг поняття «квадрат» входить до обсягу поняття «прямокутник».

32. а) Дві змінні величини; залежність; кожному значенню однієї величини відповідає тільки одне значення іншої величини; б) означення див. у § 8 посібника; в) вигляд $y = ax + b$, де a і b — деякі числа; означення див. у § 9 посібника; г) обсяг поняття «лінійна функція» входить до обсягу поняття «функція».

33. а) Не містить; б) містить; в) не містить; г) містить.

34. а) Не містить; б) не містить; в) містить; г) містить.

37. Наприклад: а) A — «учень», B — «спортсмен», C — «нагороджений медаллю»; б) A — «архітектурна споруда», B — «будинок», C — «будинок із цегли», D — «недобудований будинок».

38. Наприклад: а) A — «син», B — «батько», C — «дядько»; б) A — «птах», B — «перелітний птах», C — «жайворонок», D — «лелека».

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. $A \cup B = \{a; b; c; d; m; p; x; y; z\}$; $A \cap B = \{c; d; y\}$; $A \setminus B = \{a; b; x; z\}$; $B \setminus A = \{m; p\}$; підмножини множини $A \cap B$: $\{c\}$, $\{d\}$, $\{y\}$, $\{c; d\}$, $\{d; y\}$, $\{c; y\}$.

3. 2500 г.

5. а) ТОН; б) ПІТ; в) ТОР.

§ 15. Твердження та способи їх доведення

Тренажерний зал

1. б, г, е.
2. а, б, в.
3. а, в.
4. б, в.
5. а, б, г.
6. а, б, в, г.
7. Коса. Закон тотожності.
8. Лава. Закон тотожності.
9. а, б, в.
10. а, б, г.
13. Істинні: б, в, е; хибні: а, г, д.
14. Істинні: в, д; хибні: а, б, г, е.
15. 1 — Д; 2 — В; 3 — Б; 4 — А.
16. 1 — В; 2 — Б; 3 — Г; 4 — А.
17. а) Василь любить грати у футбол; б) Олена гарно співає; в) пан Іван працює на електростанції; г) Надійка вивчає японську мову.
18. а) Карась уміє плавати; б) Тарас має карі очі; в) Сонце випромінює енергію; г) сума $(a+b)$ є парним числом.
19. Кожна дитина в класі має своє окреме число дня, коли вона народилася; 32; не більше 31; принаймні у двох дітей збігається число дня їх народження.
20. Жоден пасажир не має вільного місця поруч; 24; 21; принаймні один пасажир в автобусі має вільне місце поруч.
21. *Вказівка.* Згадайте властивості модуля.
22. *Вказівка.* Згадайте властивості модуля.
23. *Вказівка.* Доведіть, що $-x^2+8x-17=-(x-4)^2-1$.
24. *Вказівка.* Доведіть, що $a^2-6a+12=(a-3)^2+3$.
25. *Вказівка.* Доведіть, що $(2+a)^2-2(a+1)-a(a+2)=2$.
26. *Вказівка.* Доведіть, що $(x+y)^2+2x(y-x)+(x-y)(x+y)=0$.
31. Ні.

32. Ні.
33. «У неї» — не в пляшку, а в кімнату.
34. *Вказівка*: Поняття «число» також використовують для позначення днів місяця.
35. 1.
36. 90.
37. а) Істинне; б) істинне; в) хибне.
38. а) Хибне; б) істинне; в) хибне.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) 9; б) 5; не вивчають додатково зазначених мов — 11.
2. 6 см; 7 см; 12 см.
3. а) 4; б) 28; в) 1,2.
4. а) $(-5;-2)$; б) $(-1;2)$; в) $(3;-1)$.
5. МОТОК

Готуємося до контрольної роботи до розділу 4

1) В; 2) Г; 3) Б; 4) В; 5) Г; 6) А; 7) 1; 8) 9; 9) 15; 10) наприклад: стілець — це предмет меблів, що призначений для сидіння однієї людини та має ніжки й спинку; 11) НСД двох натуральних чисел — це найбільше натуральне число, на яке задані числа діляться без остачі; НСК двох натуральних чисел — це найменше натуральне число, яке ділиться на задані числа без остачі; 12) неправильні міркування; порушено закон достатньої підстави; 13) неправильні міркування; порушено закон протилежності.

Завдання підвищеної складності

1. Вилити воду із п'ятої чашки в другу та поставити п'яту чашку на місце.
2. Люди підійшли до річки з різних боків.
3. *Вказівка.* Візьміть до уваги, що в українській абетці 33 букви й тому різних ініціалів може бути не більше ніж $33 \cdot 33$.

5. *Вказівка.* Доведіть, що серед заданих чисел є два, які дають однакові остачі в результаті ділення на 5, і розгляньте їх різницю.

7. *Вказівка.* Доведіть, що серед заданих чисел є три, які дають однакові остачі в результаті ділення на 3, і розгляньте їх суму.

8. Порушено закон достатньої підстави. З того, що квадрати чисел рівні, не завжди випливає, що самі числа рівні.

9. Порушено закон достатньої підстави. Перше перетворення спирається на хибне твердження.

Розділ 5. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

§ 16. Найпростіші геометричні фігури на площині. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками

Тренажерний зал

1. а) C, D; б) D, C, F; в) a; г) b.

2. а) K, P; б) O, K; в) c; г) d.

3. а) Так; б) так; в) ні; г) так.

4. а) Так; б) ні; в) так; г) ні.

5. а) Безліч; б) одну; в) одну; г) жодної.

6. а) Безліч; б) одну; в) жодної; г) одну.

7. AB, BC, CD, AD, AC, BD, AO, OC, BO, OD.

8. KL, LP, PS, SK, LS, KP, LM, PM.

11. Точка S лежить між точками K і T та між точками K і M; точка T лежить між точками K і M та між точками S і M; $KS+SM=KM$, $KS+ST=KT$, $ST+TM=SM$, $KT+TM=KM$.

12. Точка A лежить між точками B і C та між точками B і D; точка C лежить між точками A і D та між точками B і D; $BA + AC = BC$, $BA + AD = BD$, $AC + CD = AD$, $BC + CD = BD$.
13. 4 см.
14. 20 см.
15. Так; так.
16. Так; так.
23. Так; точка A лежить між точками B і C.
24. Так; точка T лежить між точками P і S.
25. $AM = 4{,}5$ см; $BM = 7{,}5$ см.
26. $OM = 6{,}5$ см; $ON = 8{,}5$ см.
27. 200 м.
28. 40 м.
31. Точки A і C належать, точка B не належить.
32. Точка K належить, точки L і P не належать.
33. $AM = 4$ см; $BM = 8$ см.
34. $OM = 6$ см; $ON = 8$ см.
37. Найбільшу — AB, найменшу — ST.
38. Найбільшу — CD, найменшу — AB.
39. $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $AC = 20$ см.
40. $KM = 10$ см, $MP = 30$ см, $KP = 40$ см.
41. 6 см або 8 см.
42. 4 см або 8 см.
43. 8 см або 2 см.
44. 8 см або 4 см.
45. 2,5 см.
46. 5 см.
47. 6.
48. 11.
51. а) Не лежать; б) лежать, точка A між точками B і C.
52. а) Лежать, точка M між точками K і L; б) не лежать.
53. 16 см.
54. 32 см.
55. 6.
56. 21.

59. 5 точок на одній прямій і 1 точку — поза цією прямою.
60. 1, 4 або 6.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $-8a-18b$; б) $xy+12x-4y+2$.

2. а) $x=-19$; б) $y=\frac{40}{9}$; в) $t=-1$.

3. 54 грн.

4. 0,8.

§ 17. Кут, види кутів. Бісектриса кута. Суміжні та вертикальні кути

Тренажерний зал

1. г.
2. а.
3. б.
4. б.
5. в.
7. а) гострий; б) тупий; в) розгорнутий; г) гострий.
8. а) тупий; б) прямий; в) гострий; г) тупий.
9. а) гострий; б) тупий; в) розгорнутий; г) прямий.
10. а) тупий; б) гострий; в) розгорнутий; г) прямий.
13. а) Так; б) так.
14. а) Так; б) так.
17. а) Проходять OE, OD, OF, не проходять — немає; б) проходить OF, не проходить OE.
18. а) Проходять PC, PB, PA, не проходять — немає; б) проходить PC, не проходить PA.
19. 55°.
20. 160°.
25. 64°.
26. 69°.

27. $135°$.
28. $45°$.
29. а) $90°$; б) $120°$.
30. а) $180°$; б) $60°$.
31. $125°$.
32. $25°$.
33. $\angle AOB = \angle COD = 35°$, $\angle BOC = \angle AOD = 145°$.
34. $\angle MKN = \angle AKB = 55°$, $\angle MKB = \angle NKA = 125°$.
37. $125°$.
38. $30°$.
39. а) $40°$ і $140°$; б) $45°$ і $135°$ в) $72°$ і $108°$; г) $80°$ і $100°$.
40. а) $48°$ і $132°$; б) $36°$ і $144°$ в) $45°$ і $135°$; г) $60°$ і $120°$.
41. Два кути по $36°$ і два кути по $144°$.
42. Два кути по $73°$ і два кути по $107°$.
43. $86°$.
44. $35°$.
47. *Вказівка*: Візьміть до уваги, наприклад, що $27° \cdot 10 - 180° = 90°$.
48. *Вказівка*: Візьміть до уваги, наприклад, що $180° - 40° \cdot 4 = 20°$.

Повторення та підготовка до вивчення нового матеріалу

1. а) $8d^2 - 12cd$; б) $m^4 - 16p^4$.
2. а) $(1;2)$; б) $(3;2)$.
3. $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}(x-6) = 7$.
4. 18; а) 10; б) 10; в) 6.

Готуємось до контрольної роботи до розділу 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	Б	Г	В	Д	Г	60	540	1400

Завдання підвищеної складності

1. Дві точки. Якщо це K і M, то AB, AM, AK, BM, BK, MK.

2. 0; 1; 3; 4; 5; 6.

3. а) Усі точки відрізка AB; б) дві точки M і K поза відрізком AB такі, що $MA = KB = 2$; в) таких точок немає.

4. а) Дві точки M і K поза відрізком CD такі, що $MC = KD = 1$; б) усі точки відрізка CD; в) таких точок немає.

9. Обидві можуть бути правильними: якщо промені OK і OM розміщені в одній півплощині відносно прямої AB, то правильна відповідь у Петрика, а якщо в різних півплощинах, то правильна відповідь у Тетянки.

МАТЕМАТИКА

(інтегрований курс)

7 клас

ЧАСТИНА 1

Підручник написаний в інноваційному стилі та містить такі матеріали:

- Діалоги між учнями та вчителями для мотивації навчальної діяльності
- Відповідь на запитання «Навіщо ми це вивчаємо?» для кожного параграфа
- Запитання для самоперевірки засвоєння теоретичних знань
- Завдання різних рівнів для формування практичних навичок із математики
- Завдання для повторення та підготовки до вивчення нового матеріалу
- Завдання підвищеної складності
- Логічні блок-схеми «Головне в розділі» для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу
- «Цікавинки» — матеріал щодо історії виникнення математичних знань і їх застосування
- Відомості про досягнення українських математиків і їх внесок у науку

Електронний додаток до підручника містить:

- Онлайн-тестування за кожною темою з автоматичною перевіркою результату
- Авторські відео, що доповнюють і поглиблюють навчальний матеріал, сприяють його кращому усвідомленню та розширюють математичний кругозір.