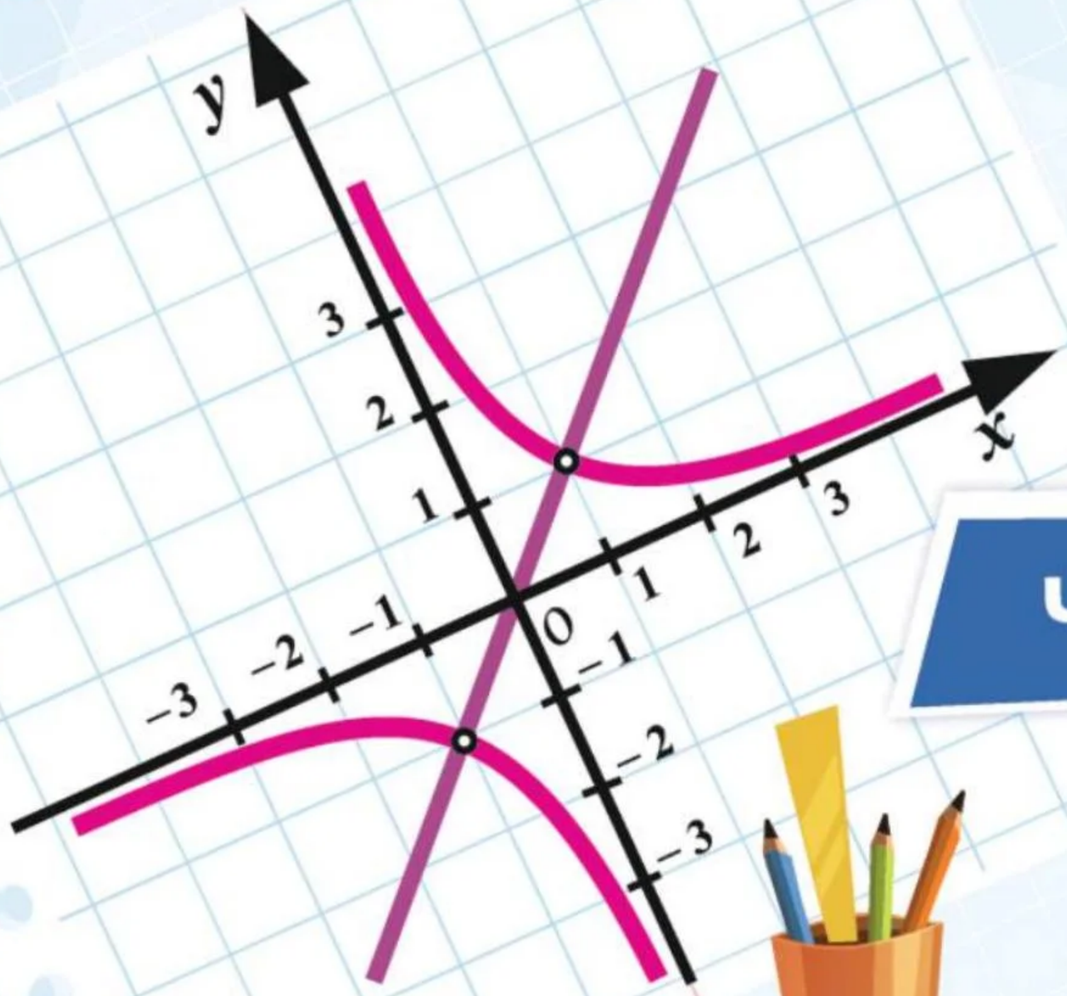
Василь Кравчук, Марія Підручна, Галина Янченко

# АЛГЕБРА

клас **8**

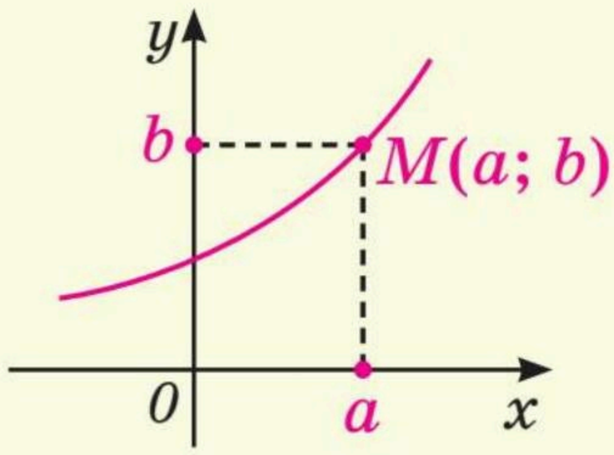
## ЧАСТИНА 1






Видавництво «Підручники і посібники»

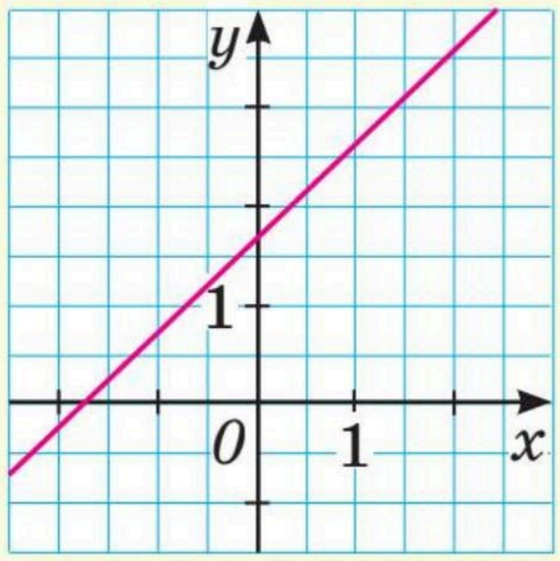
# ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ



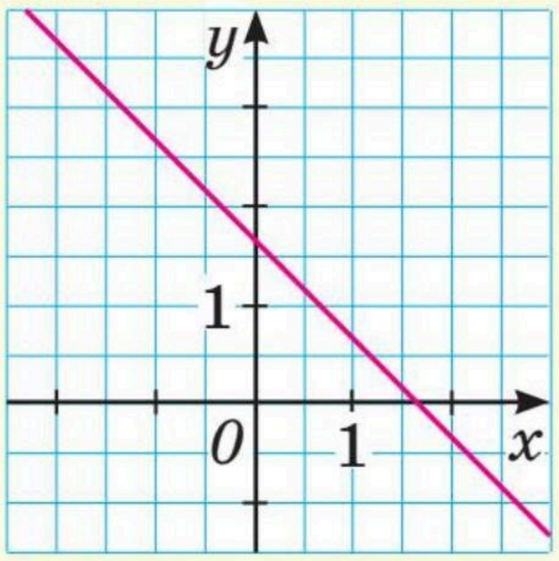

**Точка $M(a; b)$ належатиме графіку функції тоді й тільки тоді, коли значення функції для $x = a$ дорівнює $b$.**

## $y = kx + b$ — лінійна функція

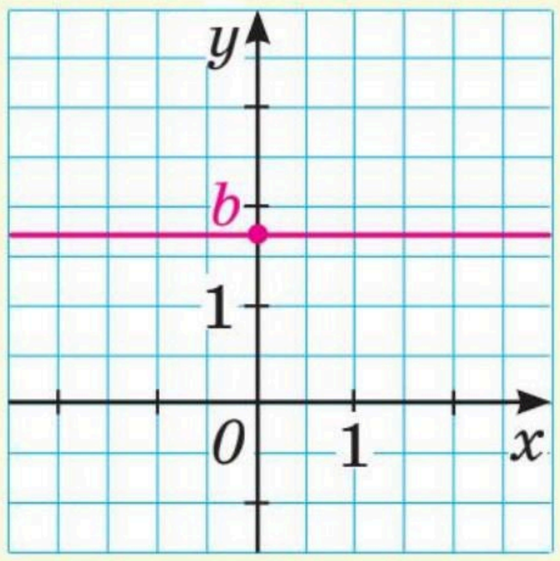
$k > 0$




$k < 0$



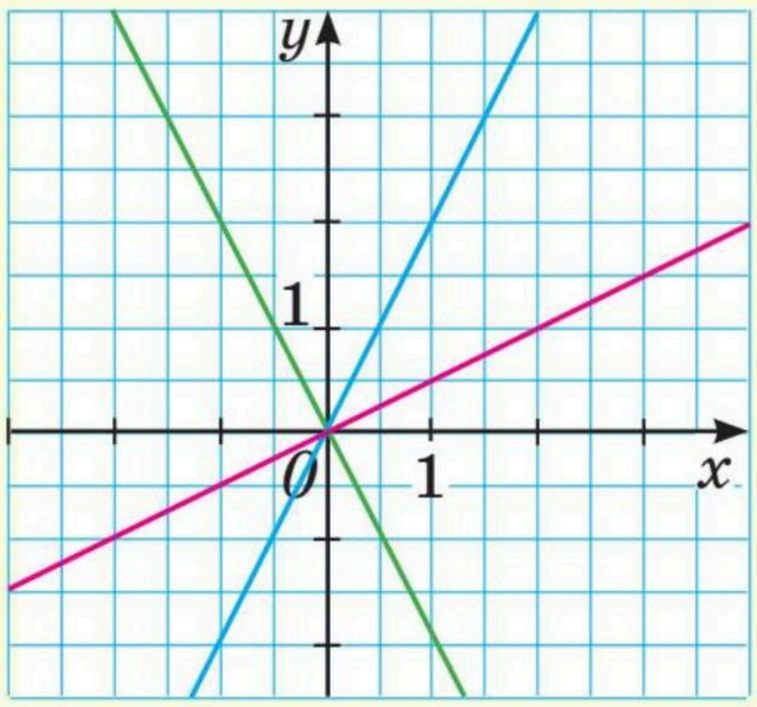

$k = 0$




*Графіки — прямі*

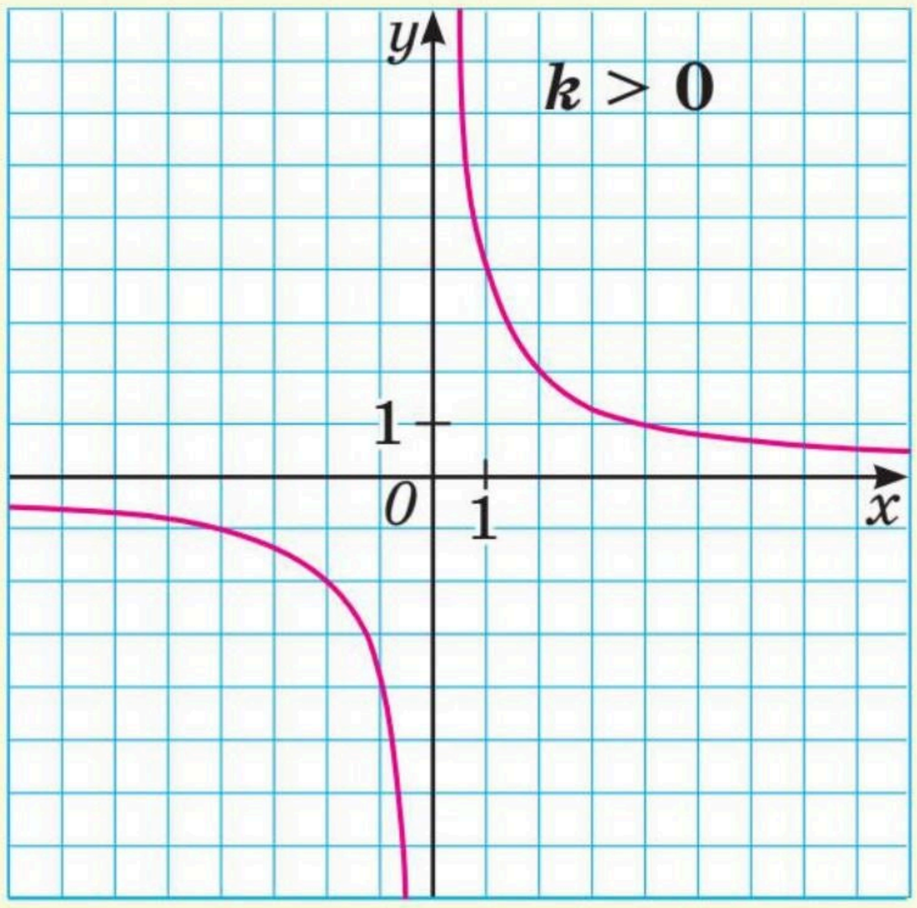
## $y = kx$, $k \neq 0$ — пряма пропорційність

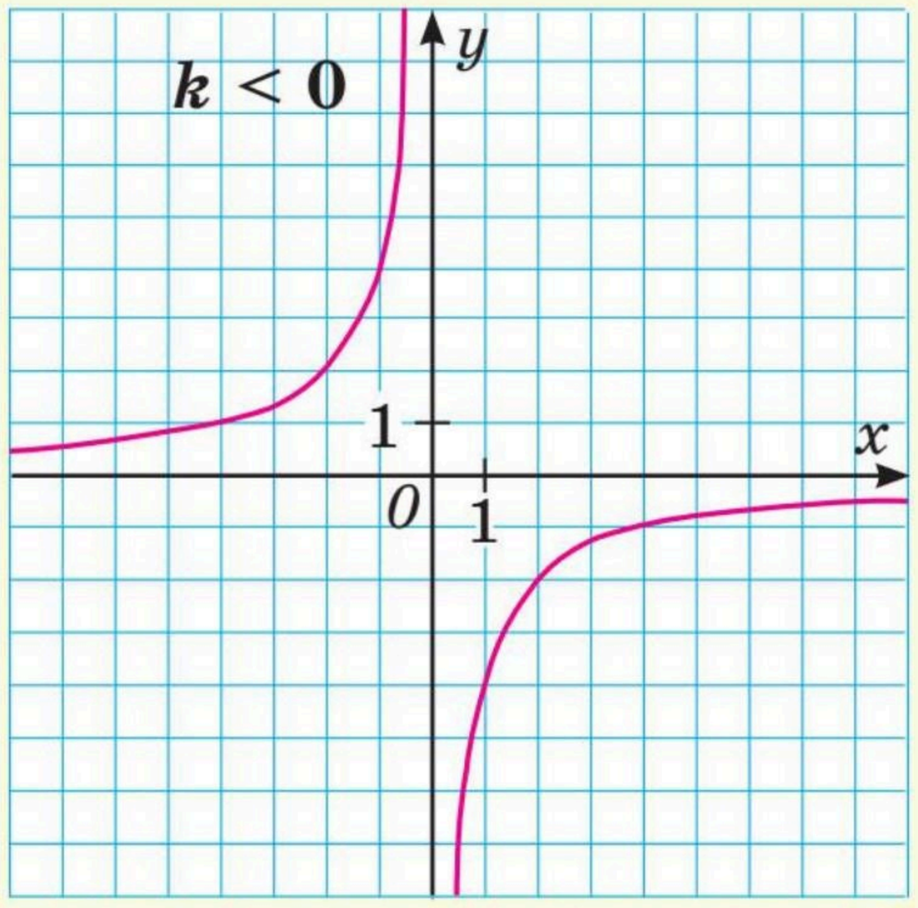
$k = -2$ $k = 2$ $k = 0,5$




*Графіки — прямі*

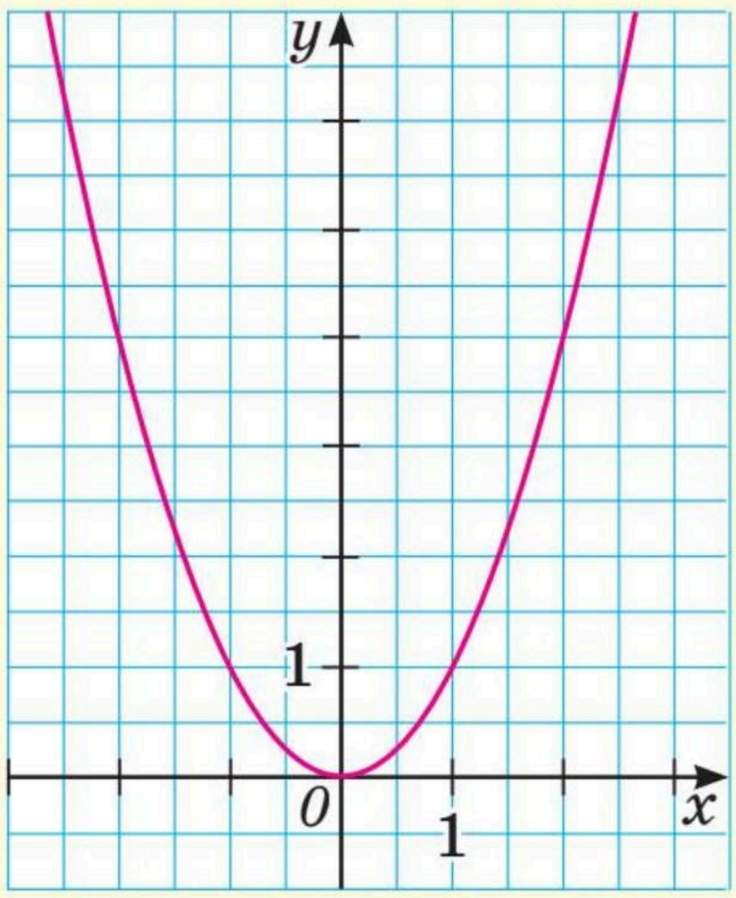
## $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ — обернена пропорційність



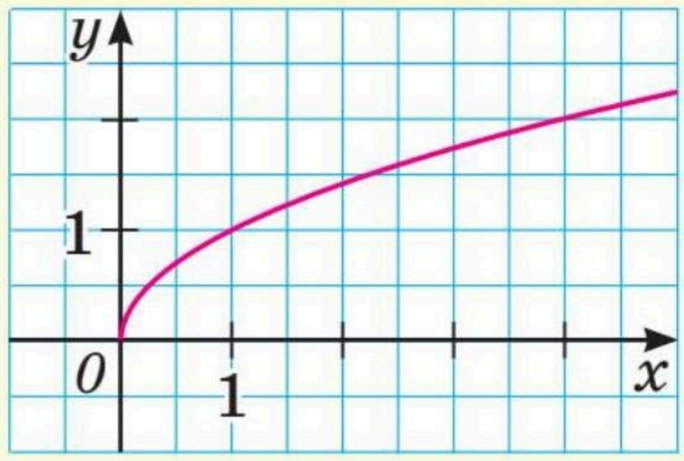

*Графік — гіпербола*

## $y = x^2$




*Графік — парабола*

## $y = \sqrt{x}$




*Графік — вітка параболи*

## ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Aa* | *Bb* | *Cc* | *Dd* | *Ee* | *Ff* | *Gg* | *Hh* |
| а | бе | це | де | е | еф | же | аш |
| *Ii* | *Jj* | *Kk* | *Ll* | *Mm* | *Nn* | *Oo* | *Pp* |
| і | йот(жі) | ка | ель | ем | ен | о | пе |
| *Qq* | *Rr* | *Ss* | *Tt* | *Uu* | *Vv* | *Ww* | |
| ку | ер | ес | те | у | ве | дубль-ве | |
| *Xx* | *Yy* | *Zz* | | | | | |
| ікс | ігрек | зет | | | | | |

Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

# АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

ТМ
Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2025

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

УДК 51(075.3)
К77

**Підручник створено за модельною навчальною програмою «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, М. П. Пихтар, Б. В. Рубльов, В. В. Семенов, М. С. Якір)**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України**

*(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)*

**Кравчук В.**

К77 Алгебра: підр. для 8 класу закл. загал. серед. освіти. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2025. — 240 с.

ISBN 978-966-07-4116-4

**УДК 51(075.3)**

ISBN 978-966-07-4116-4

© Кравчук М., Підручна М., Янченко Г., 2025

© Кравчук В. Р. та ін.

© Видавництво «Підручники і посібники»

## ШАНОВНІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ І ВОСЬМИКЛАСНИЦІ!

Матеріал підручника, за яким ви вивчатимете алгебру у 8 класі, поділено на три параграфи, які складаються з пунктів.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу.



Цим значком виділено означення, твердження та правила пункту, які потрібно зрозуміти і запам'ятати.

Звертайте також особливу увагу на текст, наведений на зеленому тлі. Курсивом у теоретичному матеріалі виділено слова, які означають математичні терміни.



Деякі пункти містять додатковий матеріал, поданий під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».



Щоб зрозуміти, запам'ятати й систематизувати матеріал, дайте відповіді на запитання, уміщені наприкінці теоретичної частини пункту.

Після теоретичного матеріалу розміщено рубрику ***«Приклади розв'язання вправ»***. Вона допоможе ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв'язування та навчить правильно записувати розв'язання. Початок і кінець розв'язання кожного завдання позначено значком ( ● ).

Прочитавши теоретичний матеріал і поміркувавши над зразками розв'язань задач, варто спочатку розв'язати ***усні*** вправи та простіші задачі, а відтак переходити до складніших.

Значками ① , ② , ③ і ④ виділено завдання, які відповідають початковому, середньому, достатньому і високому рівням навчальних досягнень. Завдання для роботи в парі позначено значком  , а для роботи в групі — значком  .

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Якщо під час розв'язування якоїсь задачі ви натрапите на труднощі, перегляньте матеріали рубрики «Приклади розв'язання вправ», а також скористайтеся схемами, підказками, порадами.

Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено синім кольором (наприклад, **175**).



Перевірити свої знання й уміння розв'язувати задачі можна за допомогою інтерактивних завдань. До такого завдання в пункті бажано звертатися тоді, коли опрацюєте ті задачі пункту, які йому передують.



Рубрика «Поміркуйте» пов'язана з особливим аспектом математичної підготовки. Основним для розв'язання задач цієї рубрики є вміння виходити з нестандартних ситуацій.



Завершує матеріал пункту рубрика «Вправи для повторення», яка допоможе періодично повторювати основні види вправ і готуватися до вивчення нових тем.



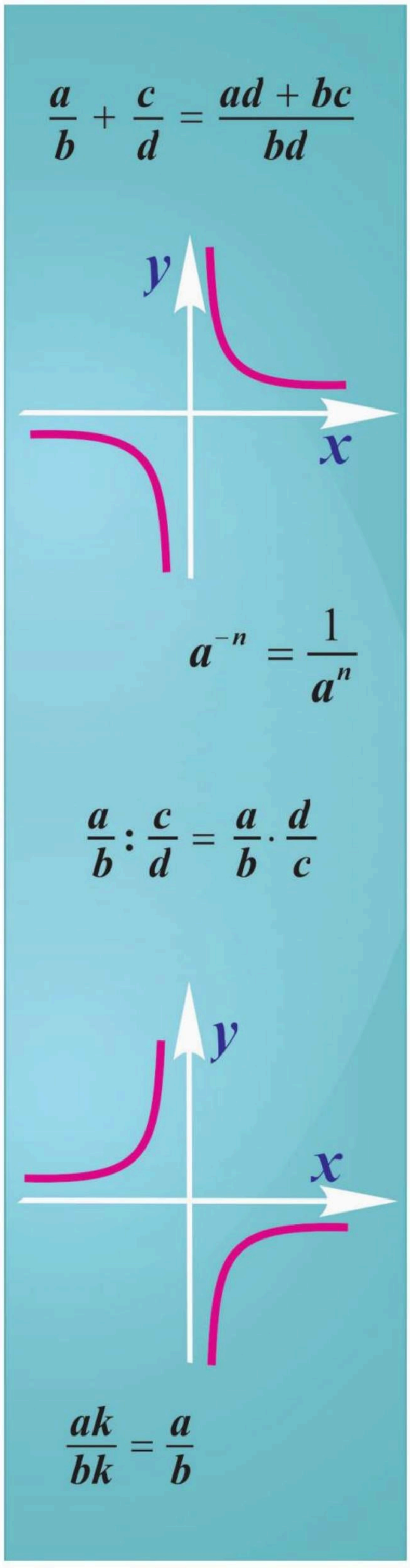
Деякі пункти містять рубрику «Цікаво знати», з якої ви можете дізнатися про походження математичних понять і термінів, а також про внесок українських учених у розвиток математичної науки.

Свої знання можна перевірити, розв'язавши ***завдання для самоперевірки***, уміщені наприкінці кожного параграфа.

Вивчайте алгебру із задоволенням.

Бажаємо успіхів!

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»




# § 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Описуючи реальні процеси мовою математики, часто отримують вирази, які містять дію ділення на вираз зі змінними. У цьому параграфі ми розглядатимемо саме такі вирази.

Ви дізнаєтеся:

- що таке дробовий вираз, дріб, раціональний вираз;
- як здійснюють тотожні перетворення раціональних виразів;
- як розв'язують рівняння з дробовими виразами;
- що таке степінь із цілим показником та які його властивості;
- про функцію $y = \frac{k}{x}$ та її властивості.

**Раціональні вирази**

$2a + b^2$ — **цілий вираз**

$\frac{2a}{a + b}$ — **дріб**

$\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b}$ — **дробовий вираз**

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

**1. Цілі, дробові та раціональні вирази.** Розглянемо дві групи виразів:

1 група

$a + b$; $5c^3$; $2x(x - y)^2$; $m : 4$; $k$; $3$

2 група

$\frac{5y}{y+1} + 1$; $\frac{17ab}{a^2 - b^2}$; $3a : b$; $(x-y)^2 - \frac{x}{x+y}$

Вирази першої групи — *цілі вирази* — ми розглядали в сьомому класі. Такі вирази можуть містити дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня з натуральним показником, а також дію ділення, але тільки на число, відмінне від нуля.

Вирази другої групи відрізняються від цілих виразів тим, що вони містять дію ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *дробовими раціональними виразами*.

Цілі й дробові раціональні вирази називають *раціональними виразами*.

**Раціональні вирази**

| $4b + a^3$ | $\frac{4}{b} + a^3$ |
|---|---|
| *Цілий вираз* | *Дробовий вираз* |

Розглянемо раціональні вирази $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{3}{x(y+2)}$, $\frac{5a}{7}$. Вони є частками двох виразів, до того ж дію ділення записано за допомогою риски дробу. Такі вирази називають *дробами*.

Якщо маємо дріб $\frac{A}{B}$, де $A$ і $B$ — деякі числові вирази або вирази зі змінними, то вираз $A$ називають *чисельником* дробу, а вираз $B$ — *знаменником*.

Отже, $\frac{ab}{a+b}$ — дріб із чисельником $ab$ і знаменником $a + b$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Дріб, чисельник і знаменник якого є многочленами, називають *раціональним дробом*. Наприклад,

$\frac{4}{x+3}$, $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{b}{3}$ — раціональні дроби.

**2. Допустимі значення змінних.** Розглянемо вираз $\frac{5}{a-2}$.

Якщо $a = 3$, то значення виразу дорівнює: $\frac{5}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$;

якщо $a = -6$, то значення виразу дорівнює: $\frac{5}{-6-2} = -\frac{5}{8}$.

Значення виразу $\frac{5}{a-2}$ можна знайти для будь-якого значення $a$, крім $a = 2$. Якщо $a = 2$, то знаменник $a - 2$ дорівнює нулю, а на нуль ділити не можна. Кажуть: якщо $a \neq 2$, то вираз $\frac{5}{a-2}$ *має зміст*, а якщо $a = 2$, то вираз *не має змісту*. Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають *допустимими* значеннями змінних.

*Означення.* ***Допустимими значеннями змінних*** **виразу називають такі їх значення, для яких вираз має зміст.**

Отже, у виразі $\frac{5}{a-2}$ допустимими значеннями змінної є всі числа, крім числа 2.

Допустимими значеннями змінних будь-якого *цілого* виразу є всі числа.

Допустимими значеннями змінних *дробового* раціонального виразу є всі числа, крім тих, для яких дорівнює нулю знаменник хоча б одного з дробів, що входять до даного виразу.

**3. Тотожно рівні вирази. Тотожності.** Розглянемо цілий вираз $2(x - 2) + 4$. Оскільки

$$2(x - 2) + 4 = 2x - 4 + 4 = 2x,$$

то для будь-якого значення змінної $x$ відповідні значення виразів $2(x - 2) + 4$ і $2x$ дорівнюють одне одному. Такі цілі вирази ми називали тотожно рівними.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

А які два не цілі вирази вважають тотожно рівними?

Розглянемо дробові вирази $\frac{2(x-2)+4}{x-1}$ і $\frac{2x}{x-1}$. Допустимими значеннями змінної обох виразів є всі числа, крім числа 1. Ці вирази мають однакові знаменники й тотожно рівні чисельники. Тому для кожного *допустимого* значення $x$ відповідні значення виразів дорівнюють одне одному. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

*Означення.* **Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для будь-яких допустимих значень змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному.**

Якщо два тотожно рівні вирази $\frac{2(x-2)+4}{x-1}$ і $\frac{2x}{x-1}$ сполучити знаком «=», то одержимо рівність

$$\frac{2(x-2)+4}{x-1} = \frac{2x}{x-1},$$

яка є правильною для будь-яких допустимих значень $x$. Таку рівність називають *тотожністю*.

*Означення.* **Рівність, яка є правильною для будь-яких допустимих значень змінних, що входять до неї, називають *тотожністю*.**

Наприклад,

$\frac{2ab\cdot a}{3a\cdot 3b} = \frac{2a^2b}{9ab}$, $\frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{xy}{(x-y)(x+y)}$ — тотожності.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Знайти значення виразу $\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}$, якщо:

1) $a = 8;\ b = 32;$ 2) $a = 0{,}6;\ b = -0{,}6.$

- Спростимо даний вираз:

$$\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b} = \frac{a^2-b^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}.$$

1) Якщо $a = 8;\ b = 32$, то $\frac{a^2}{a+b} = \frac{8^2}{8+32} = \frac{64}{40} = 1{,}6.$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

2) Якщо $a = 0{,}6$; $b = -0{,}6$, то $\dfrac{a^2}{a+b} = \dfrac{0{,}6^2}{0{,}6-0{,}6} = \dfrac{0{,}36}{0}$ — не має змісту (для даних значень змінних значення виразу не існує). ●

**Вправа 2.** Знайти допустимі значення змінної у виразі:

1) $\dfrac{2a-1}{a^2+a}$; 2) $\dfrac{y+2}{y-1} + \dfrac{y+4}{y-3}$; 3) $\dfrac{x+4}{x^2+8}$.

● 1) Знайдемо значення $a$, для яких знаменник дробу дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $a^2 + a = 0$:

$$a(a + 1) = 0; \quad a = 0 \text{ або } a = -1.$$

Отже, допустимими значеннями змінної $a$ є всі числа, крім $-1$ і $0$.

2) Знаменник першого дробу дорівнює нулю, якщо $y = 1$, а другого — якщо $y = 3$. Тому допустимими значеннями змінної $y$ є всі числа, крім 1 і 3.

3) $x^2 + 8 = 0$; $x^2 = -8$ — коренів немає. Оскільки для будь-якого значення $x$ значення знаменника $x^2 + 8$ не дорівнює нулю, то допустимими значеннями змінної $x$ є всі числа.

Вказати допустимі значення змінної у виразах можна так:

1) $a \neq -1$; $a \neq 0$; 2) $y \neq 1$; $y \neq 3$; 3) $x$ — будь-яке число. ●

1. Наведіть приклади цілих раціональних виразів; дробових раціональних виразів; дробів.
2. Який дріб називають раціональним дробом? Наведіть приклади раціональних дробів.
3. Що називають допустимими значеннями змінних певного виразу?
4. Які два вирази називають тотожно рівними?
5. Що називають тотожністю?

«Усно

**1.** Які з наведених виразів є цілими виразами? Дробовими? Раціональними дробами?

1) $\dfrac{a+b}{a-b}$; 2) $\dfrac{x}{3} + x^2$; 3) $\dfrac{4}{k} - k^2$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4) $\left(\frac{1}{2}+b^3\right)\cdot a$; 5) $\frac{5}{m(n+1)}$; 6) $\frac{xy+x}{5}$.

**2.** Для яких значень змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{8}{c}$; 2) $\frac{9-x}{x-1}$; 3) $\frac{2}{b}-\frac{b}{b-2}$?

Назвіть допустимі значення змінної для кожного виразу.

**3.** Знайдіть значення виразу $\frac{10}{a}$, якщо $a=10$; $a=-1$; $a=2$.

**4.** Які з наведених рівностей є тотожностями?

1) $\frac{a+3a}{a-1}=\frac{4a}{a-1}$; 2) $\frac{n\cdot 3n}{n+2}=\frac{3n}{n+2}$; 3) $\frac{b}{a(a+b)}=\frac{b}{a^2+ab}$.

«« 1 2

**5.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{-x^2}{x+5}$, якщо $x=0$; $x=5$; $x=-3$;

2) $\frac{2ab}{a-b}$, якщо $a=4$, $b=2$; $a=-4$, $b=6$.

**6.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y^2}{y-4}$, якщо $y=0$; $y=-1$; 2) $\frac{2b+c}{2b-c}$, якщо $b=3$; $c=4$.

**7.** Заповніть таблицю:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x}{x+1}$ | | | | | | |

**8.** Заповніть таблицю:

| $a$ | $-4$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{a-2}$ | | | | | | |

**9.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{a-3}{5}$; 2) $\frac{2x+1}{x-2}$; 3) $\frac{5k}{3k+6}$;

4) $\frac{m}{(m-1)(m+1)}$; 5) $\frac{b}{b+1}+\frac{1}{2b}$; 6) $\frac{11x}{x^2+2}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**10.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{1-y}{y+3}$; 2) $\frac{5}{x}-\frac{1}{x-2}$; 3) $\frac{c+2}{c(c+3)}$; 4) $\frac{a+1}{a^2+1}$.

**11.** Оператор набрав 45 сторінок тексту за $k$ год. Запишіть у вигляді виразу кількість сторінок, які оператор набирав за 1 год. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 9$.

**12.** Автомобіль проїхав 195 км за $t$ год. Запишіть у вигляді виразу швидкість автомобіля. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 3$.

### 3

**13.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{4x+1}{x^2-4}$; 2) $\frac{8a}{a^2-5a}$; 3) $\frac{y-5}{(y-6)^2}$;

4) $\frac{2b}{|b|+3}+b$; 5) $1+\frac{3k}{|k|-2}$; 6) $\frac{m-6}{m^2+2m}+\frac{m}{m-1}$.

**14.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{3x}{x^2+6x}$; 2) $\frac{2z+7}{9-z^2}$; 3) $\frac{10-b}{|b|-5}$; 4) $\frac{5a}{a^2-4}+\frac{a+1}{a}$.

**15.**  Запишіть раціональний дріб з однією змінною, допустимими значеннями якої є: 1) усі числа, крім 3; 2) усі числа, крім $-1$ і 3; 3) усі числа.

**16.** Запишіть раціональний дріб зі змінною $x$, допустимими значеннями якої є всі числа, крім: 1) $x = 5$; 2) $x = -2$ та $x = 2$.

**17.** Знайдіть значення виразу $\frac{1-x}{5x-3}$, якщо $x = -0{,}4$; $x = 1\frac{1}{5}$.

**18.** Знайдіть значення виразу $\frac{2a-1}{3a+1}$, якщо $a = -0{,}2$; $a = \frac{2}{3}$.

**19.** Знайдіть значення виразу $\frac{m(1-n)+n(1+m)}{4n}$, якщо:

1) $m = 67$; $n = -67$; 2) $m = 15{,}75$; $n = 0{,}25$.

**20.** Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-2xy+y^2}{y}$, якщо:

1) $x = 84$; $y = 84$; 2) $x = 12{,}5$; $y = 2{,}5$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**21.** У магазин привезли 15 л соку в малих пакетах і 25 л — у великих. Скільки всього пакетів соку привезли в магазин, якщо кожний малий пакет містить $a$ л соку, а кожний великий — $b$ л?

**22.** Перший верстат виготовив 480 пластикових пляшок за $n$ хв, а другий — 640 пляшок за $m$ хв. Скільки пляшок виготовляли за 1 хв обидва верстати разом?

**23.** Катер пройшов 25 км за течією річки і 20 км проти течії. Знайдіть час руху катера, якщо його швидкість у стоячій воді дорівнює $x$ км/год, а швидкість течії річки — $y$ км/год.



**Інтерактивне завдання 1**

**Раціональні вирази. Раціональні дроби**



4

**24.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\dfrac{2b-9}{b^3-9b}$; 2) $\dfrac{2x-1}{|x+3|-3}$; 3) $\dfrac{a+3}{|a-1|+1}$.

**25.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\dfrac{3y}{y^2-8y+16}$; 2) $\dfrac{m}{5-2|m|}$; 3) $\dfrac{c-2}{(c-2)^2+2}$.

**26.** Доведіть, що вираз $\dfrac{4x^2-4x+1}{|x-5|+1}$ набуває лише невід'ємних значень.

**27.** Доведіть, що для будь-якого допустимого значення $a$ значення дробу $\dfrac{a^2-4a+6}{a^2-6a+9}$ є додатним числом.

**28.** Доведіть, що вираз $\dfrac{x+y}{x^2+y^2-4x-4y+9}$ має зміст для будь-яких значень змінних.

***Вправи для повторення***



**29.** Скоротіть дроби: $\dfrac{18}{48}$; $\dfrac{56}{98}$; $\dfrac{96}{123}$; $\dfrac{175}{325}$; $\dfrac{750}{1200}$.

**30.** Порівняйте дроби: $\dfrac{7}{9}$ і $\dfrac{20}{27}$; $\dfrac{11}{18}$ і $\dfrac{17}{24}$; $\dfrac{7}{15}$ і $\dfrac{9}{25}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**31.** Розкладіть на множники:

1) $ab^2 - ac^2$; 2) $x^3 + 8$; 3) $m^2 - 4n^2 + m + 2n$.

**32.** Озера Світязь (Волинь) і Синевир (Закарпаття) входять до сімки природних чудес України. Найбільша глибина озера Світязь дорівнює 58 м, а озера Синевир — 24 м. На скільки відсотків найбільша глибина озера Світязь більша за найбільшу глибину озера Синевир? Результат округліть до одиниць відсотків.



Озеро Світязь



Озеро Синевир

### *Поміркуйте*



**33.** На чарівній яблуні ростуть 55 яблук. З неї дозволяють зривати 2, 3, 5 або 6 яблук. Замість них на яблуні відразу виростають відповідно 5, 6, 2 або 3 нові яблука. Чи можна з яблуні зірвати всі яблука?

## 2 ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ

**1. Основна властивість дробу.** Пригадаймо основну властивість звичайних дробів: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на те саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному. Отже, якщо $a$, $b$ і $k$ — натуральні числа, то $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ і $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$.

Аналогічна властивість справедлива для будь-яких дробів. А саме:



**Для будь-яких значень $a$, $b$ і $k$, де $b \neq 0$ і $k \neq 0$, виконуються рівності**

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}; \quad \frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Дані рівності є тотожностями і виражають *основну властивість дробу*, яку можна сформулювати так:



**Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на вираз, не тотожно рівний нулю, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.**

**2. Скорочення дробів.** За допомогою тотожності $\frac{ak}{bk}=\frac{a}{b}$ дріб $\frac{ak}{bk}$ можна замінити дробом $\frac{a}{b}$, тобто дріб $\frac{ak}{bk}$ можна *скоротити* на спільний множник $k$ чисельника і знаменника. Наприклад,

$$\frac{4n^2}{2mn}=\frac{2n\cdot 2n}{m\cdot 2n}=\frac{2n}{m};\qquad \frac{a^2-b^2}{a^2-ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=\frac{a+b}{a}.$$

Рівності $\frac{4n^2}{2mn}=\frac{2n}{m}$ і $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}=\frac{a+b}{a}$ є тотожностями, тобто вони є правильними для будь-яких допустимих значень змінних (перша — для будь-яких значень $m$ і $n$, де $m\neq 0$, $n\neq 0$; друга — для будь-яких значень $a$ і $b$, де $a\neq 0$, $a\neq b$).

Щоб скоротити дріб, потрібно:

1) виділити спільний множник чисельника і знаменника дробу;

2) виконати скорочення на спільний множник.

**3. Зведення дробів до спільного знаменника.** За допомогою тотожності $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$ дріб $\frac{a}{b}$ можна зводити до нового знаменника. Наприклад:

$\frac{3x}{y}=\frac{3x\cdot 2x}{y\cdot 2x}=\frac{6x^2}{2xy}$ — звели дріб $\frac{3x}{y}$ до знаменника $2xy$.

Будь-які дроби з різними знаменниками, як і звичайні дроби, можна звести до спільного знаменника. Розглянемо приклади.

**Приклад 1.** Звести до спільного знаменника дроби $\frac{y}{3x^2}$ і $\frac{4}{y}$.

*Розв'язання.* Спільним знаменником даних дробів є добуток їхніх знаменників, тобто $3x^2y$. Додатковим множником для першого дробу є $y$, для другого — $3x^2$. Тоді:



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

$$\frac{y}{3x^2}=\frac{y\cdot y}{3x^2\cdot y}=\frac{y^2}{3x^2y};\qquad \frac{4}{y}=\frac{4\cdot 3x^2}{y\cdot 3x^2}=\frac{12x^2}{3x^2y}.$$

**Приклад 2.** Звести до спільного знаменника дроби

$$\frac{5}{8a^3b}\ \text{і}\ \frac{7}{12a^2b^2}.$$

*Розв'язання.* Спільним знаменником даних дробів є добуток їхніх знаменників, тобто $96a^5b^3$. Однак можна знайти простіший спільний знаменник. Його шукатимемо у вигляді одночлена якомога меншого степеня. За коефіцієнт цього одночлена візьмемо найменше спільне кратне коефіцієнтів знаменників даних дробів, тобто 24, а кожну змінну візьмемо з найбільшим показником, з яким вона входить у знаменники дробів, тобто візьмемо $a^3$ і $b^2$. Тоді спільним знаменником буде $24a^3b^2$. Додатковим множником для першого дробу є $3b$, бо $24a^3b^2=8a^3b\cdot 3b$; для другого — $2a$, бо $24a^3b^2=12a^2b^2\cdot 2a$. Матимемо:

$$\frac{5}{8a^3b}=\frac{5\cdot 3b}{8a^3b\cdot 3b}=\frac{15b}{24a^3b^2};\qquad \frac{7}{12a^2b^2}=\frac{7\cdot 2a}{12a^2b^2\cdot 2a}=\frac{14a}{24a^3b^2}.$$

Щоб звести до простішого спільного знаменника дроби, знаменниками яких є одночлени, потрібно:

1) знайти найменше спільне кратне (НСК) коефіцієнтів знаменників;

2) утворити спільний знаменник у вигляді добутку НСК і степенів змінних з найбільшими показниками, з якими вони входять до знаменників;

3) знайти додатковий множник для кожного дробу;

4) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

**Приклад 3.** Звести до спільного знаменника дроби

$$\frac{3}{a^2-ab}\ \text{і}\ \frac{2}{a^2+ab}.$$

*Розв'язання.* Розкладемо на множники знаменник кожного дробу:

$$\frac{3}{a^2-ab}=\frac{3}{a(a-b)};\qquad \frac{2}{a^2+ab}=\frac{2}{a(a+b)}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Спільним знаменником дробів є добуток $a(a-b)(a+b) = a(a^2-b^2)$. Додатковим множником для першого дробу є вираз $a+b$, для другого — вираз $a-b$. Помноживши чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник, одержимо:

$$\frac{3}{a^2-ab}=\frac{3(a+b)}{a(a^2-b^2)};\qquad \frac{2}{a^2+ab}=\frac{2(a-b)}{a(a^2-b^2)}.$$

Щоб знайти найпростіший спільний знаменник дробів, знаменниками яких є многочлени, потрібно:

1) розкласти на множники знаменник кожного дробу, якщо це необхідно;

2) утворити спільний знаменник у вигляді добутку одержаних множників з найбільшим показником, з яким вони входять до знаменників.

**4. Зміна знака чисельника або знаменника дробу.** Розглянемо правильну числову рівність $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$. Її можна прокоментувати так: якщо змінити знак у чисельнику дробу і знак перед дробом, то одержимо дріб, що дорівнює даному.

У такий же спосіб змінюють знак чисельника або знаменника будь-якого дробу, використовуючи тотожності:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\qquad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Якщо змінити знак у чисельнику або знаменнику дробу і знак перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.

### *Для тих, хто хоче знати більше*



Доведемо основну властивість дробу. Покажемо, що рівність $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$ є тотожністю, тобто що вона є правильною для будь-яких значень $a$, $b$ і $k$, де $b\neq 0$ і $k\neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b}=m$. За означенням частки маємо: $a=bm$. Помноживши обидві частини одержаної рівності на $k$, матимемо правильну рівність $ak=(bm)k$ або $ak=(bk)m$. Оскільки $b\neq 0$ і



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

$k \neq 0$, то $bk \neq 0$. У такому випадку з рівності $ak = (bk)m$ знову ж таки за означенням частки маємо: $m = \dfrac{ak}{bk}$. Отже, $\dfrac{a}{b} = m = \dfrac{ak}{bk}$.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Скоротити дріб:

1) $\dfrac{-18xy^3}{-6x^2y^2}$; 2) $\dfrac{10b-5a}{a^2-4b^2}$; 3) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}$.

• 1) $\dfrac{-18xy^3}{-6x^2y^2} = \dfrac{-6xy^2 \cdot 3y}{-6xy^2 \cdot x} = \dfrac{3y}{x}$;

2) $\dfrac{10b-5a}{a^2-4b^2} = \dfrac{-5(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \dfrac{-5}{a+2b} = -\dfrac{5}{a+2b}$;

3) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \dfrac{1}{x-y}$. •

**Вправа 2.** Звести дріб $\dfrac{3a}{7b}$ до знаменника $42ab$.

• Оскільки $42ab = 7b \cdot 6a$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу на $6a$, матимемо: $\dfrac{3a}{7b} = \dfrac{3a \cdot 6a}{7b \cdot 6a} = \dfrac{18a^2}{42ab}$.

Скорочений запис: $\dfrac{3a}{7b}^{\backslash 6a} = \dfrac{18a^2}{42ab}$. •

**Вправа 3.** Звести до спільного знаменника дроби

$$\frac{3}{m^2-n^2} \text{ і } \frac{9}{n-m}.$$

• $\dfrac{3}{m^2-n^2} = \dfrac{3}{(m-n)(m+n)}$; $\dfrac{9}{n-m} = -\dfrac{9}{m-n}$. Спільним знаменником дробів є добуток $(m-n)(m+n)$. Додатковим множником для першого дробу є 1, для другого — $m+n$. Тому перший дріб залишаємо без зміни, а для другого дробу матимемо:

$$\frac{9}{n-m} = -\frac{9(m+n)}{(m-n)(m+n)} = -\frac{9(m+n)}{m^2-n^2}. \bullet$$

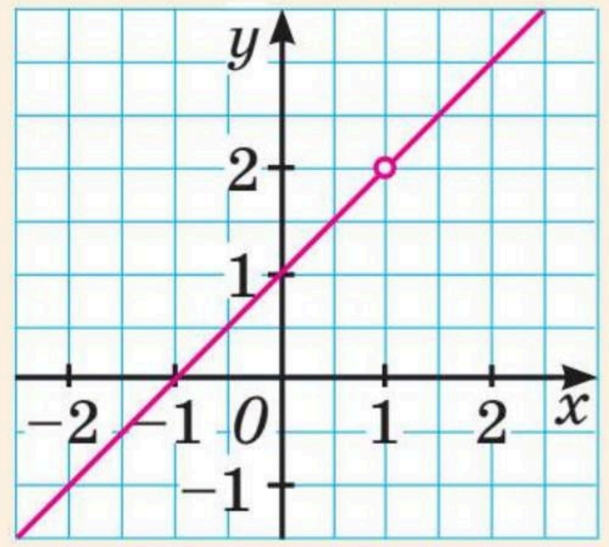


© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Вправа 4.** Побудувати графік функції, заданої формулою

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

● Область визначення даної функції утворюють усі числа, крім числа 1. Оскільки $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, то маємо функцію $y = x + 1$, де $x \neq 1$. Її графіком є пряма $y = x + 1$ без точки, абсциса якої дорівнює 1. (На рисунку цю точку зображено «порожнім» кружечком.) ●




1. Сформулюйте основну властивість дробу.
2. Як скорочують дроби? Наведіть приклад.
3. Як зводять дроби до спільного знаменника? Наведіть приклад.

«Усно

**34.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{5x}{15y}$; 2) $\frac{ab}{4b}$; 3) $\frac{m(n-2)}{n(n-2)}$; 4) $\frac{18a^2}{a^3}$.

**35.** Зведіть дріб $\frac{5}{b}$ до знаменника: 1) $2b$; 2) $b^2$; 3) $ab$.

**36.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{y}$; 2) $\frac{1}{mn}$ і $\frac{1}{2n}$.

**37.** Змініть знак знаменника дробу:

1) $\frac{3}{-a}$; 2) $\frac{2}{x-y}$.

«1 2

**38.** Виділіть спільний множник чисельника та знаменника дробу й скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{5x}$; 2) $\frac{4a}{6a}$; 3) $\frac{9ab}{6b^2}$; 4) $\frac{-10x^2y}{15xy^2}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**39.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{28y^2}{7y^3}$;  2) $\frac{4b^2c^2}{6bc}$;  3) $\frac{3xy^2z}{5xyz^2}$;

4) $\frac{8a^2c^4}{12c^2a^3}$;  5) $\frac{10ab^2c}{-15a^2b^3}$;  6) $\frac{-9k^2m^4}{-15k^4m^3}$.

**40.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{6m^2}{3m}$;  2) $\frac{4ab^2}{9a^2b}$;  3) $\frac{18c^2n^2}{12n^3}$;

4) $\frac{36xy^2}{28xy}$;  5) $\frac{-15mn^2}{40m^2n^2}$;  6) $\frac{-14abc^2}{-21bc^3}$.

**41.** Подайте частку у вигляді дробу й скоротіть дріб:

1) $2a^2b^2 : (8a^3b)$;  2) $4m^2n : (-6mn)$;  3) $-9xy^3 : (6y^4)$.

**42.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{20a^3b}{4a^2b^2}$, якщо $a = 48$; $b = 16$;

2) $15x^2y^3 : (30xy^2)$, якщо $x = 300$; $y = 0{,}06$.

**43.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{18bc^3}{2b^2c^2}$, якщо $b = 15$; $c = 45$;

2) $64m^2n^4 : (16mn^2)$, якщо $m = 0{,}25$; $n = 5$.

**44.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(m-n)}{m-n}$;  2) $\frac{b(c+d)}{3b(c+d)}$;  3) $\frac{5k}{15k+20}$;

4) $\frac{m^2-mn}{mn}$;  5) $\frac{6a-3b}{8a-4b}$;  6) $\frac{12a^2-16a}{3a^2-4a}$;

7) $\frac{xy+x^2y}{xy-xy^2}$;  8) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$;  9) $\frac{a^2-9}{7a+21}$;

10) $\frac{10x-20}{7x^2-28}$;  11) $\frac{4y-8}{y^2-4y+4}$;  12) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$.

**45.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{ab(a+b)}{c(a+b)}$;  2) $\frac{3x-9}{x-3}$;  3) $\frac{7mn}{mn-5n}$;

4) $\frac{9x-6y}{15x-10y}$;  5) $\frac{c^2+2c}{c^2-2c}$;  6) $\frac{ab+a^2}{ab+b^2}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\frac{5x+5y}{x^2-y^2}$; 8) $\frac{m^2+2m+1}{3m+3}$; 9) $\frac{a^2-25}{a^2-10a+25}$.

**46.** Зведіть дріб:

1) $\frac{k}{4p}$ до знаменника: $12p$; $16p^2$;

2) $\frac{5}{2a^2}$ до знаменника: $4a^4$; $10a^2b$.

**47.** Зведіть дріб $\frac{4}{3xy}$ до знаменника: $15xy$; $3xy^2$; $9x^3y$.

**48.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{x}{y}$ і $\frac{2}{x}$; 2) $\frac{m}{ab}$ і $\frac{4}{b}$; 3) $\frac{3}{2c}$ і $\frac{9}{c^2}$;

4) $\frac{3}{8a}$ і $\frac{1}{12a}$; 5) $\frac{5}{6ab}$ і $\frac{5}{4b}$; 6) $\frac{x}{18a^2}$ і $\frac{y}{27a^4}$;

7) $\frac{5}{a+1}$ і $\frac{4}{a+2}$; 8) $\frac{3}{2(a-1)}$ і $\frac{2}{a-1}$; 9) $\frac{1}{ab+b}$ і $\frac{1}{a+1}$.

**49.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{4}{a}$ і $\frac{2}{b}$; 2) $\frac{k}{2b}$ і $\frac{n}{3b}$; 3) $\frac{5}{6a^2}$ і $\frac{7}{18a}$;

4) $\frac{3}{4y^3}$ і $\frac{7}{20xy^2}$; 5) $\frac{1}{c+3}$ і $\frac{2}{c-1}$; 6) $\frac{8}{xy-x}$ і $\frac{7}{y-1}$.



**Інтерактивне завдання 2**

**Основна властивість дробу**



### 3

**50.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^5-4x^3}{x^4+2x^3}$; 2) $\frac{6ab-9b^2}{4a^2-9b^2}$; 3) $\frac{25m^2-4}{25m^2+20m+4}$;

4) $\frac{9c^4-1}{1-3c^2}$; 5) $\frac{2x^3y-8xy^3}{2xy^2-x^2y}$; 6) $\frac{(2m-3n)^2}{9n-6m}$;

7) $\frac{x^3+8}{x+2}$; 8) $\frac{z^2+3z+9}{27-z^3}$; 9) $\frac{x^2-y^2}{x^2-xy-x+y}$.

**51.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^4-3a^3}{a^4-9a^2}$; 2) $\frac{14b-63c}{4b^2-81c^2}$; 3) $\frac{3kn-12n}{k^2-8k+16}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4) $\frac{(2a-b)^2}{2b-4a}$; 5) $\frac{15-5c}{c^3-27}$; 6) $\frac{b^2+2ab+a^2}{a^2+ab-ax-bx}$.

**52.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x^2-4}{5x+10}$, якщо $x=-23$; $x=1{,}95$;

2) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2b+ab^2}$, якщо $a=1{,}25$; $b=0{,}8$.

**53.** Знайдіть значення виразу $\frac{3a^2+9a}{a^2-9}$, якщо $a=4$; $a=2{,}5$.

**54.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{a^2+12ab+36b^2}{a^2-36b^2}=\frac{a+6b}{a-6b}$; 2) $\frac{8x^3+1}{4x^2-2x+1}=2x+1$.

**55.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{x^2-2xy+y^2}{4x^2-4y^2}=\frac{x-y}{4(x+y)}$; 2) $\frac{m^4-8m}{m^2-2m}=m^2+2m+4$.

**56.** Зведіть дріб:

1) $\frac{2}{x+y}$ до знаменника: $x^2+xy$; $x^2-y^2$; $x^2+2xy+y^2$;

2) $\frac{c}{a-b}$ до знаменника: $b-a$; $a^2-b^2$; $a^3-b^3$.

**57.** Зведіть дріб:

1) $\frac{2}{k+2}$ до знаменника: $k^2-4$; $k^2+4k+4$;

2) $\frac{1}{a-c}$ до знаменника: $a^2-c^2$; $a(c-a)$.

**58.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{9}{14a^3b}$ і $\frac{5}{21ab^2}$; 2) $\frac{a}{9x^2y}$ і $\frac{b}{15xy^3}$;

3) $\frac{3}{x^2+xy}$ і $\frac{2}{xy+y^2}$; 4) $\frac{x}{x^2-y^2}$ і $\frac{y}{x+y}$;

5) $\frac{c}{4c^2-1}$ і $\frac{1}{1-2c}$; 6) $\frac{y}{y^3-8}$ і $\frac{2}{y^2+2y+4}$.

**59.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{3}{16m^3n^3}$ і $\frac{5}{24m^4n}$; 2) $\frac{a}{15xy^6}$ і $\frac{b}{25x^5y}$;

3) $\frac{m}{m^2-4m+4}$ і $\frac{3}{m-2}$; 4) $\frac{a}{4a^2-b^2}$ і $\frac{b}{b-2a}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4

**60.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(4b-8)^2}{2ab+b^2-4a-2b}$;  2) $\dfrac{a^3-2a^2-4a+8}{a^2-4a+4}$.

**61.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(2m-4n)^2}{4n^2-m^2}$;  2) $\dfrac{y^3+2y^2-y-2}{y^2-1}$.

**62.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{m^2-n^2-m+n}{(m-n)^2}$, якщо $m=9{,}51$; $n=-0{,}49$.

**63.** Побудуйте графік функції, заданої формулою:

1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;  2) $y=\dfrac{|x|}{x}$.

**64.** Побудуйте графік функції, заданої формулою $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

**65.** Доведіть, що значення виразу $\dfrac{ab+3a+5b+15}{ab+3a-5b-15}$ не залежать від допустимих значень $b$.

## *Вправи для повторення*

**66.** Обчисліть:

1) $\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9}$;  2) $\dfrac{5}{7}-\dfrac{2}{7}$;  3) $3\dfrac{1}{6}+2\dfrac{5}{6}$;  4) $4\dfrac{1}{8}-1\dfrac{5}{8}$.

**67.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5}{7}x-\dfrac{1}{9}=\dfrac{3}{7}x+\dfrac{5}{9}$;  2) $x(x-4)=(x+2)^2$.

**68.** Для школи потрібно купити 60 парт. Перша фірма пропонує парти по 1500 грн за кожну і 4000 грн за їх доставку, а друга — на 5 % дорожчі парти, але безкоштовну доставку. У якій фірмі вигідніше купувати парти?

**69.** Є два сплави міді й цинку. В один сплав мідь і цинк входять у відношенні 5 : 2, а в другий — у відношенні 3 : 4. Скільки потрібно взяти кілограмів кожного сплаву, щоб одержати 28 кг нового з однаковим умістом міді й цинку?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### Поміркуйте



**70.** Кожна із 17 троянд має певний колір. Чи можна серед них вибрати 5 троянд так, щоб усі вони мали різні кольори або якийсь один колір?



## 3 ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

**1. Додавання дробів з однаковими знаменниками.** Дроби з однаковими знаменниками додають так само, як і звичайні дроби з однаковими знаменниками, тобто додають їхні чисельники, а знаменник залишають той самий:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона є правильною для будь-яких значень $a$, $b$ і $c$, де $b \neq 0$.

З тотожності (1) випливає таке *правило додавання дробів з однаковими знаменниками*:

**Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, потрібно додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.**

**2. Віднімання дробів з однаковими знаменниками.** Віднімання дробів з однаковими знаменниками виконують на основі тотожності

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}. \qquad (2)$$

З тотожності (2) випливає *правило віднімання дробів з однаковими знаменниками*:

**Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, потрібно від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.**

**3. Подання дробу у вигляді суми або різниці дробів.** У кожній з тотожностей (1) і (2) переставимо місцями ліву і праву частини:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}; \qquad \frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Одержані тотожності можна використовувати, якщо потрібно записати дріб у вигляді суми або різниці дробів.

### *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Додати дроби:

1) $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}$; 2) $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}$; 3) $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}$.

● 1) $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}=\frac{7+5}{a}=\frac{12}{a}$;

2) $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{2a+1+b-1+3}{ab}=\frac{2a+b+3}{ab}$;

3) $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}=\frac{5x-2y+x-y}{2x-y}=\frac{6x-3y}{2x-y}=$

$=\frac{3(2x-y)}{2x-y}=3$. ●

**Вправа 2.** Відняти дроби:

1) $\frac{4n}{2n^2-3n}-\frac{2n+3}{2n^2-3n}$; 2) $\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{y-x}$.

● 1) $\frac{4n}{2n^2-3n}-\frac{2n+3}{2n^2-3n}=\frac{4n-(2n+3)}{2n^2-3n}=\frac{2n-3}{n(2n-3)}=\frac{1}{n}$.

2) Оскільки $-\frac{3a}{y-x}=\frac{3a}{-(y-x)}=\frac{3a}{x-y}$, то

$\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{y-x}=\frac{2a}{x-y}+\frac{3a}{x-y}=\frac{2a+3a}{x-y}=\frac{5a}{x-y}$. ●

**Вправа 3.** Подати дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу: 1) $\frac{3a+5}{a}$; 2) $\frac{3n+1}{n+1}$.

● 1) $\frac{3a+5}{a}=\frac{3a}{a}+\frac{5}{a}=3+\frac{5}{a}$;

2) $\frac{3n+1}{n+1}=\frac{3n+3-2}{n+1}=\frac{3(n+1)-2}{n+1}=\frac{3(n+1)}{n+1}-\frac{2}{n+1}=$

$=3-\frac{2}{n+1}$. ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

1. Як додають дроби з однаковими знаменниками?
2. Як віднімають дроби з однаковими знаменниками?

«Усно

**71.** Знайдіть суму дробів:

1) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$; 2) $\frac{3a}{x}+\frac{a}{x}$; 3) $\frac{x+a}{d}+\frac{a}{d}$.

**72.** Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{x}{7}-\frac{y}{7}$; 2) $\frac{8n}{9}-\frac{3n}{9}$; 3) $\frac{a+y}{x}-\frac{y}{x}$.

«1 2

**73.** Виконайте додавання (віднімання) дробів:

1) $\frac{2b}{a}+\frac{3b}{a}$; 2) $\frac{5n+3}{3}+\frac{n-2}{3}$; 3) $\frac{2a-3}{x}+\frac{4a}{x}+\frac{3}{x}$;

4) $\frac{8}{n}-\frac{5}{n}$; 5) $\frac{5x+4}{9}-\frac{2x+3}{9}$; 6) $\frac{m-2}{k}-\frac{2m-3}{k}$.

**74.** Виконайте додавання (віднімання) дробів:

1) $\frac{2}{b}+\frac{5}{b}$; 2) $\frac{3m+5}{n}+\frac{2m-7}{n}$; 3) $\frac{c+1}{7}+\frac{2c}{7}+\frac{3}{7}$;

4) $\frac{6a}{5}-\frac{3a}{5}$; 5) $\frac{4x+5}{y}-\frac{3x+2}{y}$; 6) $\frac{2a}{3}-\frac{a-4}{3}$.

**75.** Спростіть вираз:

1) $\frac{2b+5}{4b}+\frac{2b-5}{4b}$; 2) $\frac{6m+5}{3m}-\frac{6m-4}{3m}$;

3) $\frac{a-3}{3a-1}+\frac{5a+1}{3a-1}$; 4) $\frac{6xy}{x-2}-\frac{12y}{x-2}$;

5) $\frac{a-3b}{a+b}-\frac{3a-b}{a+b}$; 6) $\frac{k^2}{k-5}-\frac{25}{k-5}$;

7) $\frac{m-2n}{(m-n)^2}+\frac{n}{(m-n)^2}$; 8) $\frac{2a}{a^2-c^2}+\frac{2c}{a^2-c^2}$.

**76.** Спростіть вираз:

1) $\frac{4-a}{2a}+\frac{4+a}{2a}$; 2) $\frac{7x-2}{4x}-\frac{3x-2}{4x}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\dfrac{x+3y}{x+y}+\dfrac{7x+5y}{x+y}$;

4) $\dfrac{6m-1}{m-1}-\dfrac{m+4}{m-1}$;

5) $\dfrac{k^2-9}{k-2}+\dfrac{5}{k-2}$;

6) $\dfrac{a+3b}{(a+b)^2}-\dfrac{2b}{(a+b)^2}$.

**77.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{a-3}{a^2}+\dfrac{3+a}{a^2}$, якщо $a=0{,}5$;

2) $\dfrac{c^2}{c-1}-\dfrac{2c-1}{c-1}$, якщо $c=-19$.

**78.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{b^2-2}{2b}+\dfrac{3b^2+2}{2b}$, якщо $b=-32$;

2) $\dfrac{y}{y^2-9}-\dfrac{3}{y^2-9}$, якщо $y=17$.

**79.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a+3}{a-9}+\dfrac{3}{9-a}$;

2) $\dfrac{7c}{c-3}-\dfrac{c}{3-c}$;

3) $\dfrac{8m}{m-n}+\dfrac{8n}{n-m}$;

4) $\dfrac{k^2}{k-2}+\dfrac{4}{2-k}$;

5) $\dfrac{x-4y}{x-y}-\dfrac{3x}{y-x}$;

6) $\dfrac{a}{a^2-b^2}-\dfrac{b}{b^2-a^2}$.

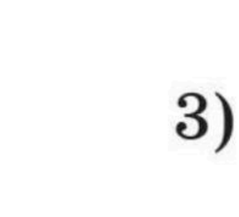
**80.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{2-x}$;

2) $\dfrac{3}{b-5}-\dfrac{2}{5-b}$;

3) $\dfrac{5+a}{a-b}+\dfrac{5+b}{b-a}$;

4) $\dfrac{m^2}{m-n}+\dfrac{n^2}{n-m}$.



## Інтерактивне завдання 3
## Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками



3

**81.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{5y^2-14}{y-2}-\dfrac{y^2-10}{2-y}$;

2) $\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^3}-\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\frac{a^2+1}{a^3-1}+\frac{a}{a^3-1}$;  4) $\frac{18a^2}{3a-b^2}-\frac{2b^4}{3a-b^2}$;

5) $\frac{5x^2-1}{2x-y}-\frac{2y^2-1}{2x-y}+\frac{3x^2}{2x-y}$;  6) $\frac{8a-b}{(5a+b)^2}-\frac{2a-3b}{(5a+b)^2}-\frac{a+b}{(5a+b)^2}$.

**82.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^5}{a-1}-\frac{a^3}{a-1}$;  2) $\frac{b^2+9}{b^2-9}-\frac{6b}{9-b^2}$;

3) $\frac{n^2}{n-3}-\frac{21-n^2}{n-3}+\frac{3}{n-3}$;  4) $\frac{mn-2m}{m^2-n^2}-\frac{mn-3n}{m^2-n^2}-\frac{n}{m^2-n^2}$.

**83.** Знайдіть значення виразу $\frac{3b-2}{b^2-b}-\frac{2b-3}{b-b^2}$, якщо $b=1\frac{3}{7}$.

**84.** Знайдіть значення виразу $\frac{2a^2}{2a-1}-\frac{2a^2-1}{1-2a}$, якщо $a=-3{,}5$.

**85.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{(m+n)^2}{m^2+n^2}+\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}=2$;  2) $\frac{4a^2}{4a^2-b^2}-\frac{2ab}{4a^2-b^2}=\frac{2a}{2a+b}$.

**86.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}=4$;  2) $\frac{x^3+4x}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{(x-2)^2}=x$.

4

**87.** Доведіть, що вираз $\frac{2a-7}{(a-4)^3}-\frac{a-5}{(4-a)^3}$ набуває лише додатних значень.

**88.** Доведіть, що значення виразу $\frac{3c^2+12}{(c-2)^2}-\frac{12c}{(2-c)^2}$ не залежать від допустимих значень змінної.

**89.** Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу:

1) $\frac{4b+5}{b}$;  2) $\frac{8x-3}{2x}$;  3) $\frac{4y+5}{y+2}$.

**90.** Знайдіть усі цілі значення $m$, для яких значення дробу $\frac{3m+2}{m}$ є цілим числом.

**91.** Знайдіть усі натуральні значення $n$, для яких значення дробу $\frac{5n-6}{n}$ є цілим числом.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Вправи для повторення

**92.** Обчисліть:

1) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$; 2) $\frac{3}{14}-\frac{4}{21}$; 3) $\frac{2}{9}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$.

**93.** Подайте одночлен $24a^3b^4$ у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є: 1) $6a^2b^2$; 2) $4ab^3$; 3) $8b^2$.

**94.** Із Києва і Черкас, відстань між якими 190 км, одночасно назустріч один одному виїхали автобус та автомобіль і зустрілися через 1 год 15 хв. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона в $1\frac{1}{9}$ раза більша за швидкість автобуса.

**95.** Поле, площа якого 36 га, засіяли соняшником і кукурудзою, до того ж кукурудзою — на 25 % більшу площу, ніж соняшником. Скільки гектарів поля засіяли соняшником?

## Поміркуйте

**96.** Знайдіть усі цілі значення $x$ та $y$, для яких є правильною рівність $(x-1)|y-|y||=4$.

Хто поборе математичну символіку і вдумається в глибокі царини математичного світу, той відкриє в ній такий ідеальний світ і таку величаву поезію, і стільки естетики й краси, як в ніякій іншій науці.

*Володимир Левицький*

## Цікаво знати



**Володимир Йосипович Левицький (1872–1956)**

Професора Львівського університету **Володимира Левицького** академік Михайло Кравчук назвав *«основоположником математичної культури нашого народу»*.

Володимир Левицький першим написав українською мовою фахову статтю з математики, був редактором першого українського наукового часопису з природничих наук. У його доробку є понад 100 наукових праць, підручники з алгебри та фізики для середньої школи.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 4 ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Щоб додати або відняти звичайні дроби з різними знаменниками, потрібно звести дроби до спільного знаменника і додати або відняти одержані дроби з однаковими знаменниками.

У такий же спосіб додають і віднімають будь-які дроби з різними знаменниками.

Нехай потрібно додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, які мають різні знаменники. Зведемо ці дроби до спільного знаменника $bd$. Для цього чисельник і знаменник першого дробу помножимо на $d$, а другого дробу — на $b$. Одержимо:

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd};\qquad \frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}.$$

Знаючи, як додати дроби з однаковими знаменниками, матимемо:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.}$$

Віднімають дроби з різними знаменниками аналогічно, а саме:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.}$$

**Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, потрібно:**
**1) звести дроби до спільного знаменника;**
**2) додати або відняти одержані дроби з однаковими знаменниками.**

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Виконати додавання (віднімання) дробів:

1) $\frac{5b}{ac}+\frac{4c}{b}$; 2) $\frac{4}{9x^2y^2}+\frac{7}{12xy^3}$; 3) $\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

• 1) Спільним знаменником дробів є добуток їхніх знаменників. Тому додатковий множник для першого дробу — $b$, а для другого — $ac$.

$$\frac{5b}{ac}^{\backslash b} + \frac{4c}{b}^{\backslash ac} = \frac{5b^2+4ac^2}{abc}.$$

2) Спільним знаменником дробів є одночлен $36x^2y^3$. Додатковим множником для першого дробу є $4y$, для другого — $3x$.

$$\frac{4^{\backslash 4y}}{9x^2y^2} + \frac{7^{\backslash 3x}}{12xy^3} = \frac{16y+21x}{36x^2y^3}.$$

3) Розклавши на множники знаменники дробів, матимемо:

$$\frac{2}{xy-y^2} - \frac{2}{x^2-xy} = \frac{2^{\backslash x}}{y(x-y)} - \frac{2^{\backslash y}}{x(x-y)} =$$

$$= \frac{2x-2y}{xy(x-y)} = \frac{2(x-y)}{xy(x-y)} = \frac{2}{xy}. \bullet$$

**Вправа 2.** Подати у вигляді дробу вираз $m-1+\dfrac{2m+1}{2m}$.

• Записавши вираз $m-1$ у вигляді дробу $\dfrac{m-1}{1}$, матимемо:

$$m-1+\frac{2m+1}{2m} = \frac{m-1}{1}^{\backslash 2m} + \frac{2m+1}{2m} = \frac{2m^2-2m+2m+1}{2m} =$$

$$= \frac{2m^2+1}{2m}. \bullet$$

**Вправа 3.** Довести тотожність $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{b}{a} - 1 = \dfrac{b(a+b)}{a(a-b)}$.

• Перетворимо ліву частину рівності:

$$\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{a} - 1 = \frac{a+b}{a-b}^{\backslash a} - \frac{b}{a}^{\backslash a-b} - \frac{1}{1}^{\backslash a(a-b)} =$$

$$= \frac{a(a+b)-b(a-b)-a(a-b)}{a(a-b)} = \frac{a^2+ab-ab+b^2-a^2+ab}{a(a-b)} =$$

$$= \frac{ab+b^2}{a(a-b)} = \frac{b(a+b)}{a(a-b)}.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Примітка.** Нагадаємо: щоб довести, що деяка рівність є тотожністю, використовують один із таких способів:

1) одну частину рівності шляхом тотожних перетворень зводять до другої частини;

2) обидві частини рівності зводять до того самого виразу;

3) утворюють різницю лівої та правої частин рівності та показують, що вона тотожно рівна нулю.

1. Як додають і віднімають дроби з різними знаменниками?

«« 1 2

**97.** Виконайте додавання (віднімання) дробів:

1) $\frac{a}{c}+\frac{m}{n}$; 2) $\frac{x}{z}-\frac{1}{5}$; 3) $\frac{a}{3}+\frac{b}{12}$;

4) $\frac{m}{4x}-\frac{n}{5x}$; 5) $\frac{7c}{9y}-\frac{c}{6y}$; 6) $\frac{5b}{12x}+\frac{7b}{18x}$;

7) $\frac{4}{15a}-\frac{3}{10b}$; 8) $\frac{5}{mn}-\frac{1}{2n}$; 9) $\frac{a}{xz}+\frac{b}{xy}$.

**98.** Виконайте додавання (віднімання) дробів:

1) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$; 2) $\frac{c}{6}+\frac{d}{18}$; 3) $\frac{4}{5a}-\frac{k}{3a}$;

4) $\frac{5n}{12x}-\frac{n}{8x}$; 5) $\frac{7}{8a}+\frac{2}{ab}$; 6) $\frac{7k}{4ac}-\frac{5k}{6ac}$.

**99.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a+2}{a}-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7+3x}{x}+\frac{10-3y}{y}$;

3) $\frac{a+2b}{b}-\frac{2a-b}{a}$; 4) $\frac{m+2}{6m}+\frac{m-6}{18m}$;

5) $\frac{4x-1}{8x}+\frac{5-6x}{12x}$; 6) $\frac{1}{c}-\frac{c-5}{c^2}$;

7) $\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b^2}{ab}$; 8) $\frac{m+n}{m^2n}+\frac{m-n}{mn^2}$;

9) $\frac{k+1}{k^2}-\frac{k+3}{3k}$; 10) $\frac{1-y}{3xy}+\frac{2x+3}{6x^2}$.

**100.** Спростіть вираз:

1) $\frac{2m-1}{m}+\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2a+1}{a}-\frac{2b+3}{b}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\frac{2x-y}{x}-\frac{2y-x}{y}$;

4) $\frac{4n-3}{15n}+\frac{2n+1}{5n}$;

5) $\frac{3b-1}{6b}-\frac{2b-1}{4b}$;

6) $\frac{3x+y}{3xy}+\frac{x-1}{3x}$;

7) $\frac{a+2}{a^2}-\frac{1}{a}$;

8) $\frac{a+b}{ab^2}+\frac{a-2}{2ab}$.

**101.** Знайдіть значення виразу $\frac{2x+1}{10x}-\frac{3x+1}{15x}$, якщо $x=0{,}2$.

**102.** Знайдіть значення виразу $\frac{1}{b}+\frac{1-b}{b^2}$, якщо $b=8$.

**103.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $5+\frac{2}{n}$;

2) $3-\frac{x-2}{2x}$;

3) $\frac{ac+3}{a}-c$;

4) $\frac{m+1}{m}+k-1$;

5) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1$;

6) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

**104.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{5}{y}+2$;

2) $1-\frac{2c+1}{3c}$;

3) $2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

**105.** Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z+1}$;

2) $\frac{a}{a+c}-\frac{a}{c}$;

3) $3-\frac{3x-2}{x+1}$;

4) $\frac{y-1}{y-2}-\frac{y+2}{y+1}$;

5) $\frac{a-3b}{2a-2b}+\frac{a+3b}{4a-4b}$;

6) $\frac{x-1}{3x-12}-\frac{x-3}{2x-8}$;

7) $\frac{4}{c^2-2c}+\frac{2}{c}$;

8) $\frac{k}{k-2}-\frac{k^2}{k^2-4}$.

**106.** Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{a-1}+\frac{4}{a+2}$;

2) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$;

3) $\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-5n}{2m-2n}$;

4) $\frac{2a}{3a+3}-\frac{3a}{5a+5}$;

5) $\frac{15}{b^2+5b}-\frac{3}{b}$;

6) $\frac{16}{x^2-16}+\frac{4}{x+4}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**107.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}=\frac{2m}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{b}{b^2-1}-\frac{1}{b+1}=\frac{1}{b^2-1}$.

**108.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{3}{a-3}-\frac{3}{a}=\frac{9}{a^2-3a}$;

2) $\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{1}{a-b}=\frac{b}{(a-b)^2}$.



## Інтерактивне завдання 4
## Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками





**109.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{1+a}{a^2bc}+\frac{1-bc}{ab^2c^2}$;

2) $\frac{4x+1}{12x^4y^2}-\frac{3y-1}{9x^3y^3}$;

3) $\frac{c+1}{cm+cn}-\frac{d+1}{dm+dn}$;

4) $\frac{x}{12x-12y}+\frac{x}{18x+18y}$;

5) $\frac{a-b}{4a+4b}+\frac{a+b}{4b-4a}$;

6) $\frac{1}{(b-a)^2}-\frac{1}{a^2-b^2}$.

**110.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{2a+1}{16a^3b^2}-\frac{3b+1}{24a^2b^3}$;

2) $\frac{7}{ax-ay}-\frac{5}{by-bx}$;

3) $\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2+ab}$;

4) $\frac{x-y}{(x+y)^2}+\frac{1}{2x+2y}$.

**111.** Спростіть вираз:

1) $\frac{5c+3}{3c+1}-\frac{c^2-1}{6c^2+2c}$;

2) $\frac{b^2}{by-y^2}+\frac{b}{y-b}$;

3) $\frac{n}{6n+9}+\frac{n}{4n^2-9}$;

4) $\frac{5-2x}{x^2-25}-\frac{1}{10-2x}$;

5) $\frac{a-2}{a^2+2a}-\frac{8}{a^2-4}$;

6) $\frac{2a+b}{8a^2-2ab}+\frac{8a+b}{b^2-4ab}$;

7) $\frac{5}{2m+12}-\frac{15}{m^2+12m+36}$;

8) $\frac{x}{9x^2-6xa+a^2}+\frac{x}{3xa-a^2}$;

9) $\frac{9}{a^3+27}+\frac{a-3}{a^2-3a+9}$;

10) $\frac{2}{x-2}-\frac{2x^2+4x}{x^3-8}$.

**112.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a-1}{a}-\frac{a+10}{a^2-10a}$;

2) $\frac{b+1}{ab-b^2}+\frac{a+1}{ab-a^2}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\frac{9}{2x+6}-\frac{9x}{x^2-9}$;

4) $\frac{5}{4b-32}+\frac{20}{64-b^2}$;

5) $\frac{5a}{a-9}+\frac{45a}{a^2-18a+81}$;

6) $\frac{y}{4x^2+4xy+y^2}-\frac{y}{4x^2+2xy}$;

7) $\frac{x}{x^3-1}-\frac{1}{x^2+x+1}$;

8) $\frac{1}{a+2}+\frac{2a}{a^3+8}$.

**113.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{5a+6}{8a}+\frac{a-1}{4a}-\frac{a+1}{2a}$;

2) $\frac{2m-n}{mn}-\frac{2}{n}+\frac{5}{m^2}$;

3) $\frac{3a+b}{2ab}-\frac{3}{2b}+\frac{b}{a^2}$;

4) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+1}+1$;

5) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$;

6) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

**114.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a+3}{3a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{3}$;

2) $\frac{1}{a^2b}-\frac{1}{ab^2}-\frac{a+b}{a^2b^2}$;

3) $m-\frac{(m-n)^2}{m+n}+n$;

4) $\frac{2-x}{x-1}+1-\frac{1}{x+1}$.

**115.** Спростіть вираз:

1) $\frac{x-1}{x^2}-\frac{x-3}{3xy}+\frac{1}{3y}$;

2) $\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{2b-a}-\frac{2a}{a^2-4b^2}$.

**116.** Спростіть вираз:

1) $\frac{x-y}{xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$;

2) $\frac{2}{5a-25}-\frac{4}{a^2-25}-\frac{1}{5a+25}$.

**117.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{2}{b+2}-\frac{b-2}{b^2+2b}+\frac{b-1}{b}$, якщо $b=-\frac{3}{11}$;

2) $\frac{x+2y}{3x-2y}-\frac{6xy+4y^2}{9x^2-4y^2}$, якщо $x=4{,}2$; $y=1{,}3$.

**118.** Знайдіть значення виразу $\frac{3a}{a-3}-\frac{2}{a}-\frac{3a^2}{a^2-3a}$, якщо $a=\frac{2}{17}$.

**119.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+b}{a^2}-\frac{a+b}{ab}=\frac{a-b}{b^2}-\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}$;

2) $\frac{3b-1}{b^2-1}+\frac{5}{2b^2+2b}-\frac{3}{b}=\frac{3b+1}{2b(b^2-1)}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**120.** Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{n}{n^2-2mn+m^2}=\dfrac{m+n}{n^2-mn}+\dfrac{m^2}{n(n-m)^2}$;

2) $\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{3}{3-a}-\dfrac{4a-15}{a^2-9}=\dfrac{21}{a^2-9}$.



**121.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2}{b+2}-\dfrac{b+3}{4-b^2}+\dfrac{3b+1}{b^2-4b+4}$;

2) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4x^3}{1+x^4}$.

**122.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{m-3}{m^2+6m+9}-\dfrac{1}{3-m}-\dfrac{2}{3+m}$;

2) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}$.

**123.** Доведіть, що вираз $\dfrac{2(2k+1)}{k(k-1)(k+1)^2}-\dfrac{k+2}{k^3-k}$ набуває лише від'ємних значень.

**124.** Доведіть, що вираз $\dfrac{n+m}{n^3-mn^2}+\dfrac{m^2}{n^2(n-m)^2}$ набуває лише додатних значень.

**125.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$ дорівнює 0.

## *Вправи для повторення*

**126.** Обчисліть:

1) $\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{24}{25}$; 2) $2\dfrac{2}{9}\cdot 4\dfrac{1}{5}$; 3) $\left(1\dfrac{5}{7}-5\dfrac{2}{3}\right)\cdot 21$.

**127.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2x+3y=12;\\2x-y=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-5y=22;\\7x+2y=24.\end{cases}$

**128.** Банк дав фермеру кредит 25 000 грн на рік зі ставкою 8 % річних. Скільки гривень має повернути фермер банкові через рік?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**129.** Для мережі магазинів мають розфасувати цукор. Перший автомат може розфасувати весь цукор за 16 хв, а другий — за 24 хв. За скільки хвилин можуть розфасувати весь цукор обидва автомати, працюючи разом?

### *Поміркуйте*



**130.** Дошку поділено на 9 рівних квадратів, один з яких зеленого кольору, а інші — білого (рис. 1). За один крок в одному рядку чи стовпці можна перефарбувати зелені квадрати в білі, а білі — в зелені. Чи можна за кілька таких кроків отримати дошку, зображену на: 1) рисунку 2; 2) рисунку 3?

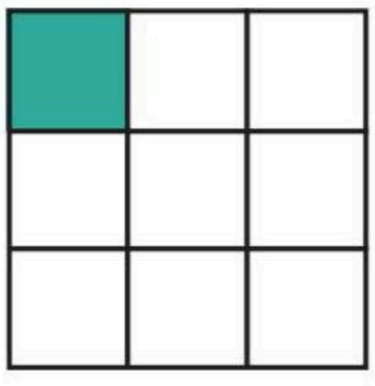


**Рис. 1**

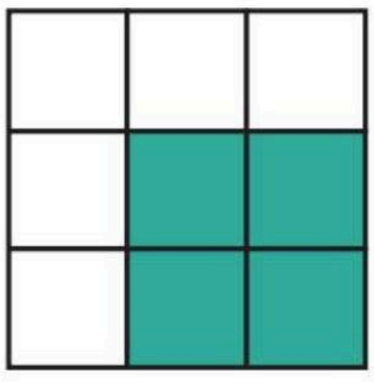


**Рис. 2**

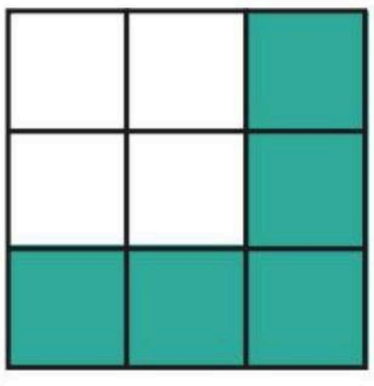


**Рис. 3**



## Інтерактивне завдання для самоперевірки 1

**Раціональні вирази.**
**Додавання і віднімання дробів**



## Завдання для самоперевірки № 1

### *Початковий рівень*

**1.** Чому дорівнює значення виразу $\frac{2x-1}{x-5}$, якщо $x=4$?

**А** $-7$ **Б** $7$ **В** $\frac{7}{9}$ **Г** Не існує

**2.** Для яких значень змінної не має змісту вираз $\frac{5}{2x-4}+x$?

**А** $x=0$ **Б** $x=4$ **В** $x=2$ **Г** $x=0;\ x=2$

**3.** Скоротіть дріб $\frac{18a^2}{3a^3}$.

**А** $\frac{18}{a}$ **Б** $\frac{1}{6a}$ **В** $\frac{6}{a}$ **Г** $\frac{6}{a^3}$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**4.** Зведіть дріб $\frac{3}{b}$ до знаменника $b^2$.

**А** $\frac{3}{b^2}$ **Б** $\frac{3b}{b^2}$ **В** $\frac{3b^2}{b^2}$ **Г** $\frac{3b^2}{b}$

**5.** Додайте дроби: $\frac{3y-1}{x}+\frac{5-2y}{x}$.

**А** $\frac{y-6}{x}$ **Б** $\frac{5y-6}{x}$ **В** $\frac{5y+4}{x}$ **Г** $\frac{y+4}{x}$

**6.** Спростіть вираз $\frac{a+2b}{2a}-\frac{b}{a}$.

**А** $\frac{a+b}{2a}$ **Б** $\frac{a+3b}{2a}$ **В** $\frac{1}{2}$ **Г** $\frac{1}{2a}$

## *Середній рівень*

**7.** До кожного виразу (1–3) доберіть усі значення змінної (А–Д), для яких вираз не має змісту.

**1** $\frac{a+4}{2a-8}$

**2** $\frac{4}{c-4}-\frac{1}{4c}$

**3** $\frac{11x}{x^2-16}$

**А** $-4$

**Б** 4

**В** 16

**Г** 0; 4

**Д** $-4$; 4

**8.** Скоротіть дріб $\frac{27a^3b^2}{18a^4b}$.

**А** $\frac{3a}{2b}$ **Б** $\frac{3b}{2a}$ **В** $\frac{3b}{a}$ **Г** $\frac{2b}{3a}$

**9.** Знайдіть значення виразу $\frac{2x^2}{x-3}-\frac{6x}{x-3}$, якщо $x=1{,}7$.

**А** $-3{,}4$ **Б** 0,85 **В** 1,7 **Г** 3,4

**10.** Спростіть вираз $\frac{2ab+1}{2ab}+\frac{1-a}{a}$.

**А** $\frac{4ab+2b+1}{2ab}$ **Б** $\frac{ab+b+1}{2ab}$ **В** $\frac{2b+1}{2ab}$ **Г** $\frac{b+1}{2ab}$

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### Достатній рівень

**11.** Скоротіть дріб $\dfrac{3a^3-a^2b}{9a^3-ab^2}$.

**12.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{6-y}{y^2-16}-\dfrac{1}{4-y}$;

2) $\dfrac{b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{a+b}{ab-b^2}$.

**13.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{1}{m^2-mn}-\dfrac{1}{mn-n^2}$, якщо $m=0{,}4$; $n=0{,}25$.

**14.** Доведіть тотожність $\dfrac{5c-5}{c^2-4}-\dfrac{4}{c+2}+\dfrac{1}{2-c}=\dfrac{1}{c^2-4}$.

### Високий рівень

**15.** Скоротіть дріб $\dfrac{a^2+ac+bc+ab}{a^2b+abc}$.

**16.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{5c^2+125}{(c-5)^3}+\dfrac{50c}{(5-c)^3}$;

2) $\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{a^2+4}{8a-2a^3}$.

**17.** Доведіть, що вираз $\dfrac{1}{2x-2}-\dfrac{3x-4}{6x^2-12x+6}$ набуває лише додатних значень.

**18.** Доведіть тотожність

$$\frac{1}{m^2-mn}+\frac{1}{mn+n^2}+\frac{2}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{m^2n-mn^2}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 5 МНОЖЕННЯ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

**1. Множення дробів.** Коли множать звичайні дроби, то окремо множать їхні чисельники й окремо знаменники і перший добуток записують чисельником дробу, а другий — знаменником. Наприклад,

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}.$$

Так само множать будь-які дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона є правильною для будь-яких значень $a$, $b$, $c$ і $d$, де $b\neq0$ і $d\neq0$.

З тотожності (1) випливає *правило множення дробів*:

**Щоб помножити дріб на дріб, потрібно перемножити окремо їхні чисельники й окремо знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником дробу.**

Наприклад, $\frac{3a}{b}\cdot\frac{b}{2a^2}=\frac{3a\cdot b}{b\cdot2a^2}=\frac{3}{2a}$.

Правило множення дробів поширюють на випадок, коли потрібно знайти добуток трьох і більше множників.

Наприклад, $\frac{x}{y}\cdot\frac{2z}{x}\cdot\frac{x}{5}=\frac{x\cdot2z\cdot x}{y\cdot x\cdot5}=\frac{2xz}{5y}$.

**2. Піднесення дробу до степеня.** Використовуючи правило множення дробів, піднесемо дріб до $n$-го степеня:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ разів}}=\frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n\text{ разів}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ разів}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Отже,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}. \qquad (2)$$

З тотожності (2) випливає *правило піднесення дробу до степеня*:



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Щоб піднести дріб до степеня, потрібно піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати чисельником, а другий — знаменником дробу.**

Наприклад, $\left(\frac{m}{3n}\right)^3 = \frac{m^3}{(3n)^3} = \frac{m^3}{27n^3}$.

## Приклади розв'язання вправ

**Вправа 1.** Виконати множення:

1) $\frac{a^4b}{8c^2} \cdot \frac{6c^3}{a^3}$; 2) $\frac{3x^2}{y} \cdot \left(-\frac{y}{9x}\right) \cdot \frac{3}{2y}$; 3) $\frac{ab+b^2}{a^2} \cdot \frac{b}{a^2-b^2}$.

• 1) $\frac{a^4b}{8c^2} \cdot \frac{6c^3}{a^3} = \frac{a^4b \cdot 6c^3}{8c^2 \cdot a^3} = \frac{3abc}{4}$;

2) $\frac{3x^2}{y} \cdot \left(-\frac{y}{9x}\right) \cdot \frac{3}{2y} = -\frac{3x^2 \cdot y \cdot 3}{y \cdot 9x \cdot 2y} = -\frac{x}{2y}$;

3) $\frac{ab+b^2}{a^2} \cdot \frac{b}{a^2-b^2} = \frac{b(a+b) \cdot b}{a^2 \cdot (a-b)(a+b)} = \frac{b^2}{a^2(a-b)}$. •

**Вправа 2.** Помножити дріб $\frac{x+3}{x-3}$ на многочлен $x - 3$.

• Записавши многочлен $x - 3$ у вигляді дробу $\frac{x-3}{1}$, матимемо:

$$\frac{x+3}{x-3} \cdot (x-3) = \frac{x+3}{x-3} \cdot \frac{x-3}{1} = \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot 1} = x+3.$$

Скорочений запис: $\frac{x+3}{x-3} \cdot (x-3) = \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{x-3} = x+3$. •

**Вправа 3.** Піднести до квадрата дріб $-\frac{2a^3b}{5m^2n}$.

• $\left(-\frac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2 = \left(\frac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2 = \frac{(2a^3b)^2}{(5m^2n)^2} = \frac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$.

Скорочений запис: $\left(-\frac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2 = \frac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$. •



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

1. Сформулюйте правило множення дробів.
2. Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня.

«Усно

**131.** Виконайте множення:

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$; 2) $\frac{5}{a} \cdot \frac{b}{5}$; 3) $\frac{2}{k} \cdot m$; 4) $\frac{3x}{4} \cdot \frac{1}{x}$.

**132.** Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{a}{c}\right)^2$; 2) $\left(\frac{2x}{y}\right)^2$; 3) $\left(\frac{a^2}{c}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{m^2}{n^3}\right)^3$.

«1 2

**133.** Виконайте множення:

1) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x}{3}$; 2) $\frac{4}{3a} \cdot \frac{5b}{16}$; 3) $\frac{3k}{5} \cdot \frac{2}{9k}$;

4) $\frac{8b^2}{15} \cdot \frac{3}{b}$; 5) $\frac{m^2}{8} \cdot \frac{10}{mn}$; 6) $\frac{12x^3}{5y} \cdot \frac{10y}{x^2}$;

7) $\frac{y^4}{7} \cdot \left(-\frac{14}{y^2}\right)$; 8) $-\frac{2c^2k}{3} \cdot \frac{6c}{k^2}$; 9) $-\frac{9a^2}{4b^3} \cdot \left(-\frac{2b^2}{15a}\right)$.

**134.** Виконайте множення:

1) $\frac{6}{k} \cdot \frac{2}{k^2}$; 2) $\frac{15a}{b} \cdot \frac{b}{20a}$; 3) $\frac{3}{4b^2} \cdot \frac{2b^4}{9}$;

4) $\frac{2x^2}{9y^2} \cdot \frac{27y^2}{4x^3}$; 5) $\frac{6x^3}{a} \cdot \left(-\frac{a^2}{9x}\right)$; 6) $-\frac{4mn^2}{3} \cdot \frac{9m}{16n}$.

**135.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $4x \cdot \frac{3a}{2x^3}$; 2) $\frac{5a}{9b^4} \cdot 3ab^3$; 3) $17xy^2 \cdot \frac{y}{34x^2}$.

**136.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{5a}{4y} \cdot 2a$; 2) $12m^2 \cdot \frac{5}{6mn}$; 3) $\frac{2a}{5b^3} \cdot 10ab^2$.

**137.** Спростіть вираз:

1) $\frac{x-y}{a^2} \cdot \frac{a^3}{(x-y)^2}$; 2) $\frac{x^3}{m+n} \cdot \frac{(m+n)^3}{x}$; 3) $\frac{3x+3y}{b^3} \cdot \frac{b^2}{x+y}$;

4) $\frac{2x-1}{x^2-7x} \cdot \frac{x-7}{2x-1}$; 5) $\frac{k^2-4k+4}{k+4} \cdot \frac{k+4}{k-2}$; 6) $\frac{m^2-9}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m-3}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**138.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a+b}{y^2} \cdot \frac{y^4}{a+b}$; 2) $\frac{x+y}{a^3} \cdot \frac{a^4}{(x+y)^2}$; 3) $\frac{2b+2c}{k^2} \cdot \frac{k}{b+c}$;

4) $\frac{m^2-m}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m}$; 5) $\frac{b^2-2b+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{b-1}$; 6) $\frac{y^2-16}{x} \cdot \frac{2x}{y-4}$.

**139.** Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^2$; 2) $\left(\frac{3a^2b^4}{4c^3}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{2a^3}{3b}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{n^2k^3}{5m}\right)^3$.

**140.** Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{3m}{n^2}\right)^2$; 2) $\left(\frac{2x^2}{y^2z}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{3a^3b}{5c^2}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{9x^3y^4}{5a^3}\right)^2$.



**Інтерактивне завдання 5**

**Множення дробів.**
**Піднесення дробу до степеня**



### 3

**141.** Виконайте множення:

1) $\frac{12a^3}{x^3} \cdot \frac{5x^2y}{18a^2} \cdot \frac{b}{a^2}$; 2) $\frac{3m^2}{4n} \cdot \left(-\frac{2n}{3m^3}\right) \cdot \frac{4n}{3m^2}$;

3) $\frac{5ab}{xy+y^2} \cdot \frac{bx+by}{10a^3}$; 4) $\frac{3a+2b}{ab+b^2} \cdot \frac{ab+a^2}{9a+6b}$;

5) $\frac{a}{2b+6b^2} \cdot (9b^2-1)$; 6) $(m^2-6mk+9k^2) \cdot \frac{k}{3mk-m^2}$.

**142.** Виконайте множення:

1) $\frac{ab^2}{3mn} \cdot \frac{m^3}{4a^3} \cdot \frac{6mn^2}{ab^2}$; 2) $\frac{5x+5y}{x+x^2} \cdot \frac{x^2+x^3}{15x+15y}$;

3) $(2a^2-8) \cdot \frac{a}{3a+6}$; 4) $\frac{1}{y^2-4x^2} \cdot (4x^2-4xy+y^2)$.

**143.** Спростіть вираз:

1) $\frac{3a-1}{a^2-1} \cdot \frac{3a+3}{9a^2-1}$; 2) $\frac{x^2-4x+4}{x+4} \cdot \frac{4x+16}{x^2-4}$;

3) $\frac{b^2-a^2}{9x-9y} \cdot \frac{x^2-xy}{a-b}$; 4) $\frac{(2x+1)^2}{7b-7a} \cdot \frac{a^2-b^2}{4x+2}$;

5) $\left(\frac{5y}{a-y}\right)^2 \cdot \frac{a^2-y^2}{10y}$; 6) $\left(\frac{m-4}{m+4}\right)^3 \cdot \frac{m^2+8m+16}{m^2-8m+16}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\dfrac{m^3-n^3}{2y-2x}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{m^2+mn+n^2}$;

8) $\dfrac{c^2-4a^2}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{3a+3b}{2a+c}$.

**144.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2c^2+4c+2}{c^3}\cdot\dfrac{c^2}{c^2-1}$;

2) $\dfrac{5a-5b}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{x-y}{a-b}$;

3) $\dfrac{(4-x)^2}{xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{12-3x}$;

4) $\dfrac{15a}{2ab+2b^2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{5a}\right)^2$;

5) $\left(\dfrac{2a+2b}{a-b}\right)^2\cdot\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}$;

6) $\dfrac{a^2-1}{x^3-1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{a^2+2a+1}$.

**145.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{2a^2}{7b}\cdot\left(-\dfrac{3b}{4a^3}\right)^2\cdot\dfrac{98a^5}{9}$, якщо $a=-1{,}25;\ b=8$;

2) $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-16}\cdot\dfrac{3x^2-12x}{x+4}$, якщо $x=-1{,}2;\ x=0{,}8$.

**146.** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\dfrac{x}{2y^2}\right)^3\cdot\dfrac{16y^9}{3x^4}\cdot\left(-\dfrac{3}{y^2}\right)$, якщо $x=0{,}25;\ y=0{,}5$;

2) $\dfrac{a^3+27}{2a^3}\cdot\dfrac{4a^3}{a^2-3a+9}$, якщо $a=-4;\ a=1{,}5$.

**147.** Доведіть тотожність $\dfrac{(a-b)^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=a-b$.

**148.** Доведіть тотожність $\dfrac{4xy}{(x+y)^2}\cdot\dfrac{x^2+xy}{2x^2}=\dfrac{2y}{x+y}$.

**149.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{x^2-xy+xz-yz}\cdot\dfrac{x-y}{x+y}$;

2) $\left(\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}\right)^3\cdot\left(\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^3\right)^2$.

**150.** Спростіть вираз $(m^2-2mn+n^2)\cdot\left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^3\cdot\left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^2$.

**151.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{a^2-b^2-a+b}{a^2+2ab+b^2}\cdot\dfrac{a+b}{a-b}$, якщо $a=7{,}4;\ b=-6{,}4$.





© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**152.** Доведіть, що значення виразу $\dfrac{x^2+ax+2x+2a}{x-2}\cdot\dfrac{x}{x+a}$ не залежать від допустимих значень $a$.

## *Вправи для повторення*

**153.** Знайдіть числа, обернені до чисел: $\frac{2}{7}$; 4; $1\frac{5}{6}$; 0,2; 1,6.

**154.** Обчисліть:

1) $\frac{18}{25}:\frac{4}{15}$; 2) $4\frac{2}{3}:42-\frac{1}{6}$; 3) $0{,}125:3\frac{1}{8}-1\frac{2}{5}:7$.

**155.** Щоб зробити світлину, фотограф хоче розташувати вряд двох дівчат і двох хлопців так, щоб хлопці не стояли поруч. Скількома способами він може це зробити?

**156.** Подорожуючи Національним природним парком «Подільські Товтри», група туристів здійснила прогулянку по Дністру на теплоході. Грошові витрати, пов'язані з орендою теплохода, туристи розподілили між собою порівну. Якби туристів було на 3 більше, то кожному прогулянка обійшлася б в $1\frac{1}{6}$ раза дешевше. Скільки туристів у групі?





**Національний природний парк «Подільські Товтри» (входить до семи природних чудес України)**

## *Поміркуйте*



**157.** У класі 28 учнів; усі сидять за партами по двоє. Відомо, що третина хлопців сидить із дівчатами, а четверта частина дівчат — з хлопцями. Скільки дівчат у класі?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 6 ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Коли ділять звичайні дроби, то перший дріб множать на дріб, обернений до другого. Наприклад, $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{21}$.

У такий же спосіб ділять будь-які дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона є правильною для будь-яких значень $a$, $b$, $c$ і $d$, де $b\neq 0$, $c\neq 0$ і $d\neq 0$. З цієї тотожності випливає *правило ділення дробів*:

**Щоб поділити один дріб на другий, потрібно перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.**

Наприклад, $\frac{2a}{b^2}:\frac{a}{2b}=\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{2b}{a}=\frac{2a\cdot 2b}{b^2\cdot a}=\frac{4}{b}$.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Виконати ділення:

1) $\frac{5a^2}{14c^3}:\left(-\frac{a^3}{7c}\right)$; 2) $\frac{ab}{a^2-1}:\frac{3b}{a+1}$; 3) $\frac{6x-3y}{2x}:(2x-y)$.

• 1) $\frac{5a^2}{14c^3}:\left(-\frac{a^3}{7c}\right)=-\left(\frac{5a^2}{14c^3}\cdot\frac{7c}{a^3}\right)=-\frac{5a^2\cdot 7c}{14c^3\cdot a^3}=-\frac{5}{2c^2a}$;

2) $\frac{ab}{a^2-1}:\frac{3b}{a+1}=\frac{ab}{a^2-1}\cdot\frac{a+1}{3b}=\frac{ab\cdot(a+1)}{(a-1)(a+1)\cdot 3b}=\frac{a}{3(a-1)}$;

3) $\frac{6x-3y}{2x}:(2x-y)=\frac{6x-3y}{2x}\cdot\frac{1}{2x-y}=\frac{3(2x-y)}{2x\cdot(2x-y)}=\frac{3}{2x}$. •

1. Сформулюйте правило ділення дробів.

«Усно

**158.** Виконайте ділення:

1) $\frac{x}{y}:\frac{m}{n}$; 2) $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$; 3) $\frac{a}{4}:2$; 4) $n:\frac{1}{m}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

«« 1 2

**159.** Виконайте ділення:

1) $\frac{a}{9} : \frac{2a}{3}$;  2) $\frac{6ab}{5c} : \frac{2b}{15}$;  3) $\frac{c^3}{2a^5} : \frac{c}{4a^3}$;

4) $x^2 : \frac{1}{x}$;  5) $\frac{9}{d} : 3$;  6) $9n^3 : \frac{18n}{5k^2}$;

7) $-\frac{xy^3}{5} : \left(-\frac{x^2y}{10}\right)$;  8) $-\frac{9b^3}{20n^2} : \frac{12b^4}{5n^3}$;  9) $\frac{18a^3}{-5b^4} : \frac{-6a^4}{15b}$.

**160.** Виконайте ділення:

1) $\frac{3a}{b^2} : \frac{a}{5b}$;  2) $\frac{6x^2}{5y^2} : \frac{3x}{y^3}$;  3) $8k^3 : \frac{4k^2}{3c}$;

4) $\frac{4mn}{5} : (4mn^2)$;  5) $-\frac{15m^3}{2n^2} : \frac{9m^4}{8n}$;  6) $-\frac{2y^2}{xz} : \left(-\frac{4y^3}{5z}\right)$.

**161.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{36c}{b} : (9c^2)$, якщо $b = 0{,}2$; $c = 5$;

2) $\frac{27a^2}{25} : \frac{18a^3}{5b}$, якщо $a = 0{,}4$; $b = 4$.

**162.** Знайдіть значення виразу $\frac{12b^2}{25x^3} : \frac{3b^3}{5x^4}$, якщо $x = 25$; $b = 4$.

**163.** Спростіть вираз:

1) $\frac{6a+6b}{c^4} : \frac{a+b}{c^2}$;  2) $\frac{m^2n-mn}{y^5} : \frac{m-1}{y}$;

3) $\frac{2a-a^2}{c^4} : \frac{2-a}{c^4}$;  4) $\frac{x^6}{x^2-16} : \frac{x^4}{x-4}$;

5) $\frac{c^2-d^2}{k^2} : \frac{c+d}{2k^2}$;  6) $\frac{b^3}{b^2-6b+9} : \frac{b}{b-3}$.

**164.** Спростіть вираз:

1) $\frac{x^3}{ab+ac} : \frac{x}{b+c}$;  2) $\frac{mn-n^2}{a^3} : \frac{m-n}{a}$;

3) $\frac{k+5}{k^2} : \frac{k^2-25}{2k^2}$;  4) $\frac{x^2-2xy+y^2}{10} : \frac{x-y}{25}$.



**Інтерактивне завдання 6**
**Ділення дробів**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3

**165.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{36a^2x^6}{25b}:\left(-\dfrac{3ax^2}{5b^2}\right)^3$;

2) $\left(-\dfrac{2m}{3n}\right)^4:\left(\dfrac{10m^2}{9n^3}\right)^2$;

3) $\left(\dfrac{5a^2b}{2c^2}\cdot\dfrac{a}{7b}\right):\dfrac{15a^2}{14bc}$;

4) $\dfrac{9x^3}{5y^4}:\left(\dfrac{3x^4b}{5y}:\dfrac{3y^3}{4x}\right)$.

**166.** Спростіть вираз:

1) $\left(-\dfrac{mn^2}{2}\right)^5:\dfrac{5m^3n^7}{64}$;

2) $\left(\dfrac{3a^2b}{2c}\right)^3:\left(\dfrac{9a^3}{4c}\right)^2$;

3) $\left(\dfrac{3xy}{5z^3}:\dfrac{5z}{6y}\right):\dfrac{6x^2y^2}{5z^4}$;

4) $\dfrac{27a^3b^2}{4c^4}\cdot\left(\dfrac{2a^2c}{3b^2}:\dfrac{3b^2}{4ac^2}\right)$.

**167.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{18ab^2}{1-x^2}:\dfrac{24a^2b}{(1-x)^2}$;

2) $\dfrac{5a^2-a}{(a-b)^2}:\dfrac{10a-2}{a-b}$;

3) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}:\dfrac{a+b}{ac-bc}$;

4) $\dfrac{4c^2+4c+1}{3x-3y}:\dfrac{1-4c^2}{x^2-y^2}$;

5) $\left(\dfrac{3a}{a-b}\right)^2:\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$;

6) $\dfrac{2x-2y}{(x+y)^3}:\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$;

7) $\dfrac{mn^2}{m^3+n^3}:\dfrac{4m^2n}{m^2-mn+n^2}$;

8) $\dfrac{a^3-27}{a-2a^2}:\dfrac{a^2+3a+9}{4a^2-1}$.

**168.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{c^3-2c^2}{12ab^3}:\dfrac{c-2}{18a^3b}$;

2) $\dfrac{4-x^2}{x+x^2}:\dfrac{2x-x^2}{x+1}$;

3) $\dfrac{k-2}{k^2+2k+1}:\dfrac{k-2}{k^2-1}$;

4) $\dfrac{x+2y}{3x-3y}:\dfrac{2(x+2y)^2}{x^2-y^2}$;

5) $\dfrac{(a-b)^2}{ab+b^2}:\dfrac{a^2-b^2}{ab^2+b^3}$;

6) $\dfrac{ab-ac}{4-2a+a^2}:\dfrac{c^2-b^2}{a^3+8}$.

**169.** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\dfrac{2a^2}{7b}\right)^4:\left(-\dfrac{a^3}{49b^3}\right)^2$, якщо $a=-0{,}25;\ b=4$;

2) $\dfrac{4m^2+4m+1}{4m^2-1}:\dfrac{2m^2+m}{10m-5}$, якщо $m=-5;\ m=0{,}5;\ m=\dfrac{1}{15}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**170.** Знайдіть значення виразу $\left(\dfrac{a}{a+2b}\right)^2 : \dfrac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$, якщо:

1) $a=-3;\ b=4$; 2) $a=78;\ b=11$.

**171.** Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{5m^2-5n^2}{4mn} : \dfrac{m+n}{8mn^2} = 10n(m-n)$;

2) $(a^2b+ab^2) : \dfrac{ab}{a^2-ab+b^2} = a^3+b^3$.

**172.** Доведіть тотожність $(3x-12y) : \dfrac{x^2-16y^2}{2x} = \dfrac{6x}{x+4y}$.

«««4

**173.** Доведіть, що вираз $\dfrac{x^2-x+0{,}25}{x^6-x^4-x^2+1} : \left(\dfrac{x-0{,}5}{x^2-1}\right)^2$ набуває лише додатних значень.

**174.** Доведіть, що значення виразу $\dfrac{a^2-ab+a-b}{a^2+ab-a-b} : \dfrac{a-b}{a+b}$ не залежать від допустимих значень $b$.

**175.** Доведіть тотожність $\dfrac{m+n-1}{m-n} : \dfrac{m^2-n^2-m+n}{m^2+2mn+n^2} = \left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^2$.

## *Вправи для повторення*

**176.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3(x+4)=4(x+3)$; 2) $2x(x-1)+x(x-2)=3x^2-2$.

**177.** Функцію задано формулою $y=5x-8$.

1) Знайдіть значення функції, якщо $x=-1;\ x=3$.

2) Знайдіть значення аргументу, якщо $y=-3;\ y=6$.

**178.** Зріст Тетяни на 16 см менший від зросту її старшого брата Максима. Знайдіть зріст Тетяни, якщо він становить 0,9 зросту Максима.

**179.** У першому баку 480 л води, а в другому — 282 л. Щодня з першого бака беруть 25 л води, а з другого — 16 л. Через скільки днів у першому баку води стане вдвічі більше, ніж у другому?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Поміркуйте

**180.** На олімпіаді з математики чотири дівчини набрали разом 105 балів, до того ж кожна з них — не менше, ніж 12 балів. Перша дівчина набрала балів більше, ніж кожна інша, а друга і третя разом — 61 бал. Скільки балів набрала перша дівчина?

## Цікаво знати

Українські школярі успішно виступають на міжнародних олімпіадах з математики.




2023 року збірна України перемогла на Європейській олімпіаді з математики для дівчат. Чотири українки здобули золоту та 3 срібні медалі.



2022 року на Міжнародній математичній олімпіаді українські школярі здобули 4 золоті та 2 срібні медалі, посівши четверте командне місце.

# 7 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

У курсі алгебри нам уже траплялося чимало завдань, для розв'язання яких потрібно було перетворювати той чи інший вираз. Зокрема, перетворення *цілих* раціональних виразів ми використовували для розв'язування рівнянь, доведення тотожностей, знаходження значень виразів. Розглянемо деякі задачі, пов'язані з тотожними перетвореннями *дробових* раціональних виразів.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Приклад 1.** Спростити вираз $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$.

*Розв'язання.* Спочатку подамо вирази в кожній дужці у вигляді дробів, а потім знайдемо їх частку:

1) $\frac{a}{a+1}+1=\frac{a+a+1}{a+1}=\frac{2a+1}{a+1}$;

2) $1-\frac{3a^2}{1-a^2}=\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{1-4a^2}{1-a^2}$;

3) $\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=$

$$=\frac{(2a+1)\cdot(1-a)(1+a)}{(a+1)\cdot(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}.$$

Проведені перетворення можна записувати в рядок:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)=\frac{a+a+1}{a+1}:\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=$$

$$=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=\frac{(2a+1)\cdot(1-a)(1+a)}{(a+1)\cdot(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}.\bullet$$

Раціональний вираз у прикладі 1 ми звели до раціонального дробу $\frac{1-a}{1-2a}$.

Узагалі, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді раціонального дробу.

**Приклад 2.** Довести, що для всіх допустимих значень змінних вираз $\frac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\frac{x+2y}{x+y}+\frac{2x+3y}{x+2y}$ набуває того самого значення.

*Розв'язання.* Спростимо даний вираз:

$$\frac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\frac{x+2y}{x+y}+\frac{2x+3y}{x+2y}=\frac{y(x-y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x+y}{x+2y}+\frac{2x+3y}{x+2y}=$$

$$=\frac{y}{x+2y}+\frac{2x+3y}{x+2y}=\frac{2x+4y}{x+2y}=\frac{2(x+2y)}{x+2y}=2.$$

Отже, для всіх допустимих значень змінних значення виразу дорівнює тому самому числу (числу 2). ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Приклад 3.** Довести тотожність $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\dfrac{b+a}{b-a}$.

*Розв'язання.* Спростимо ліву частину рівності:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

«« 1 2

**181.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a^2-49}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a+7}-\dfrac{1}{a}$;

2) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{x^2-1}{3}$;

3) $\left(\dfrac{m}{4}+\dfrac{m+1}{m}\right)\cdot\dfrac{4m}{m+2}$;

4) $\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{2}{b}\right):\left(\dfrac{b}{2}-1\right)$;

5) $\left(\dfrac{1}{a+5}-\dfrac{1}{a-5}\right):\dfrac{5}{a+5}$;

6) $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x+y}{y}$.

**182.** Спростіть вираз:

1) $\left(1-\dfrac{3}{b}\right)\cdot\dfrac{4}{b^2-3b}$;

2) $\dfrac{a-5}{a}-\dfrac{a^2-100}{2a}\cdot\dfrac{1}{a+10}$;

3) $\dfrac{x^2+2x}{3}\cdot\dfrac{9}{x+2}-\dfrac{3x^2}{x-4}$;

4) $\left(\dfrac{4}{c+2}-\dfrac{2}{c+1}\right):\dfrac{8c}{c+2}$.

**183.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{x^2+x}{2}\cdot\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{6x^2}{x+3}$, якщо $x=6$; $x=-6$.

**184.** Знайдіть значення виразу $\left(\dfrac{1}{c-9}-\dfrac{1}{c+9}\right):\dfrac{9}{c+9}$, якщо $c=11$; $c=8$.

**185.** Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{9}{(a+9)^2}:\dfrac{1}{a+9}+\dfrac{a}{a+9}=1$;

2) $2x:\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)=x^2-y^2$.

**186.** Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{5b+10}{b}\cdot\dfrac{b+3}{b+2}-\dfrac{15}{b}=5$;

2) $\left(m-\dfrac{n^2}{m}\right):\left(1-\dfrac{n}{m}\right)=m+n$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**187.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{b^4}{b^2-8b+16}:\dfrac{b}{2b-8}-\dfrac{b^3}{b-4}$;

2) $\left(\dfrac{c-5}{c+5}-\dfrac{c+5}{c-5}\right):\dfrac{5c}{c^2-25}$;

3) $\dfrac{a}{3-a}+\dfrac{a^2+3a}{2a+3}\cdot\left(\dfrac{a+3}{a^2-3a}-\dfrac{a}{a^2-9}\right)$;

4) $\left(\dfrac{1}{2a+b}-\dfrac{2a}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$;

5) $\dfrac{m}{n-m}-\dfrac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\dfrac{m}{(m-n)^2}-\dfrac{n}{m^2-n^2}\right)$;

6) $\left(\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+5}{x+1}\right)$.

**188.** Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{5a}{a^2-9}-\dfrac{2}{a+3}\right)\cdot\dfrac{a^2-9}{a+2}$;

2) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)$;

3) $\dfrac{b^2-4}{b-6}\cdot\left(\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{8}{b^2-4}-\dfrac{b}{b^2-4b+4}\right)$;

4) $\left(\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}-\dfrac{6x-13}{x^3+8}\right):\dfrac{15-5x}{2x^3+16}$.

**189.** Знайдіть значення виразу $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab}$, якщо $a=0{,}8;\ b=0{,}25$.

**190.** Знайдіть значення виразу $\left(m-\dfrac{mn}{m+n}\right):\left(n-\dfrac{mn}{m+n}\right)$, якщо $m=1{,}8;\ n=0{,}9$.

**191.** Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2$;

2) $\left(x+\dfrac{k}{x}\right)^2+\left(x-\dfrac{k}{x}\right)^2-2x^2$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**192.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2$;

2) $\left(1+\frac{y}{x}\right)^2+\left(1-\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

**193.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{ab}}$;  2) $\dfrac{x-6+\frac{9}{x}}{1-\frac{3}{x}}$;  3) $\dfrac{\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}}{\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}}$.

**194.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$;  2) $\dfrac{\frac{1}{c-1}-\frac{1}{c+1}}{\frac{1}{c-1}+\frac{1}{c+1}}$.

**195.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}-\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a}{b}$ дорівнює тому самому числу.

**196.** Доведіть, що значення виразу $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}:\left(\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-n}{m+n}\right)$ не залежать від допустимих значень змінних.

**197.** Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right):\left(1-\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}\right)$ не залежать від допустимих значень $b$.

**198.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-3a}\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{3}{a^2-a}\right)=\frac{a-1}{a^2}$;

2) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{a+b}$.

**199.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{b^6}{b^2-2b+1}:\frac{b^4}{3b-3}-\frac{2b^2+1}{b-1}=b+1$;

2) $\left(\frac{m}{m+n}-\frac{m}{m^2+2mn+n^2}\right):\left(\frac{m}{m-n}-\frac{m}{m^2-n^2}\right)=\frac{m-n}{m+n}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4

**200.** Доведіть, що для будь-яких допустимих значень змінних значення виразу $\left(\dfrac{3}{ab-3a-3b+9}-\dfrac{1}{3-a}\right):\dfrac{ab-3b}{b-3}$ є додатним числом.

**201.** Доведіть, що вираз $\left(1+\dfrac{9y^2+9xy}{x^2-3xy}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{x+3y}-\dfrac{6xy}{(x+3y)^2}\right)$ набуває лише одного значення.

**202.** Доведіть тотожність

$$\left(\frac{m^2-n^2}{mn}-\frac{1}{m+n}\left(\frac{m^2}{n}-\frac{n^2}{m}\right)\right):\frac{m-n}{m}=\frac{m}{m+n}.$$

**203.** Знайдіть значення виразу:

1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, якщо $x+\dfrac{1}{x}=2{,}5$;

2) $x^2+\dfrac{1}{4x^2}$, якщо $x-\dfrac{1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

**204.** Знайдіть значення виразу $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, якщо $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6}$.

**205.** Подайте у вигляді раціонального дробу вираз $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$.

### *Вправи для повторення*

**206.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)^2-4=0$;  2) $\dfrac{y-3}{5}+\dfrac{y+3}{4}=6$.

**207.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\dfrac{z+1}{3z-9}$;  2) $\dfrac{4x+1}{x^2-4}$;  3) $\dfrac{8y}{y^2+5y}-\dfrac{4}{2y-5}$.

**208.** Для яких значень $a$ рівняння $(a^2-3a)x=2a-6$:

1) не має коренів;  2) має безліч коренів?

**209.** По круговій доріжці велотреку дві велосипедистки їдуть зі сталими швидкостями. Коли вони їдуть у протилежних напрямках, то зустрічаються через кожні 10 с; коли



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

ж їдуть в одному напрямку, то одна наздоганяє другу через кожні 100 с. Знайдіть швидкості велосипедисток, якщо довжина доріжки 200 м.

### Поміркуйте



**210.** На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 25. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати їх добуток. Повторивши таку операцію 24 рази, одержимо одне число. Доведіть, що це число ділиться на 1 000 000.

## 8 РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**1. Цілі та дробові раціональні рівняння.** Розглянемо рівняння:

$2(x-7)=3x-9$; $\quad \frac{6x}{x-9}=4$; $\quad \frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}$.

Ліва і права частини кожного з цих рівнянь є раціональними виразами. Такі рівняння називають *раціональними рівняннями*.



**Рівняння, ліва і права частини якого є раціональними виразами, називають *раціональним рівнянням.***

Раціональні рівняння поділяють на цілі й дробові. Якщо обидві частини раціонального рівняння є цілими виразами, то таке рівняння називають *цілим раціональним рівнянням*. Раціональне рівняння, у якого хоча б одна частина є дробовим раціональним виразом, називають *дробовим раціональним рівнянням*.

**Цілі раціональні рівняння**

$2(x-7)=3x-9$; $\quad \frac{3(y-2)}{5}=\frac{2(y+1)}{3}$

**Дробові раціональні рівняння**

$\frac{6z}{z-9}=4$; $\quad \frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**2. Рівносильність рівнянь.** Розглянемо дробове раціональне рівняння

$$\frac{x^2-2x}{x-2}=0. \qquad (1)$$

Ви знаєте, що дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. Тому для розв'язання рівняння (1) прирівняємо чисельник дробу до нуля:

$$x^2-2x=0; \quad x(x-2)=0; \quad x=0 \text{ або } x=2.$$

Перевіримо, чи для знайдених значень $x$ знаменник $x-2$ відмінний від нуля.

Якщо $x=0$, то $x-2=0-2=-2\neq 0$ — знаменник відмінний від нуля. Тому $x=0$ — корінь рівняння.

Якщо $x=2$, то $x-2=2-2=0$ — знаменник дорівнює нулю. Тому $x=2$ — не корінь рівняння.

Отже, рівняння (1) має один корінь — число 0.

Розв'язуючи рівняння (1), ми мали ланцюжок рівнянь.

| Рівняння | $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$ | $x^2-2x=0$ | $x(x-2)=0$ |
|---|---|---|---|
| Корені | 0 | 0; 2 | 0; 2 |

Перше з цих рівнянь має один корінь — число 0, друге та третє рівняння мають два ті самі корені — числа 0 і 2.



*Означення.* **Два рівняння, які мають ті самі корені, або кожне з яких не має коренів, називають *рівносильними*.**

Отже,

рівняння $x^2-2x=0$ й $x(x-2)=0$ рівносильні;

рівняння $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$ й $x^2-2x=0$ не рівносильні.

Рівняння $x+6=x$ і $0x=1$ рівносильні, бо кожне з них не має коренів.

У 7 класі ми розглядали перетворення рівнянь, виконуючи які, одержують рівняння з тими самими коренями. Отже, ці перетворення переводять рівняння у рівносильне йому рівняння. З ними пов'язані такі *основні властивості рівнянь*:



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Якщо в деякій частині рівняння виконати тотожне перетворення, яке не змінює допустимі значення змінної, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**

**Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**

**Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**

**3. Розв'язування дробових раціональних рівнянь.** Розглянемо приклади.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння $\frac{6x}{x-9}=4$.

*Розв'язання.* Зведемо дане рівняння до рівняння, ліва частина якого є дробом, а права — нулем:

$$\frac{6x}{x-9}-4=0; \qquad \frac{6x-4(x-9)}{x-9}=0; \qquad \frac{2x+36}{x-9}=0.$$

Прирівняємо чисельник останнього дробу до нуля:

$$2x+36=0; \quad 2x=-36; \quad x=-18.$$

Якщо $x=-18$, то $x-9=-18-9=-27\neq 0$ — знаменник $x-9$ відмінний від нуля. Отже, $x=-18$ — корінь даного рівняння.

Відповідь. $-18$. ●

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:

1) звести його до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — цілі вирази;

2) розв'язати рівняння $P(x)=0$;

3) виключити з його коренів ті, для яких знаменник $Q(x)$ дорівнює нулю.

Оскільки розв'язування рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ зводиться до розв'язування рівняння $P(x)=0$ і перевірки умови $Q(x)\neq 0$, то кажуть, що

рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ рівносильне системі $\begin{cases} P(x)=0; \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння $\frac{3}{y-1}+\frac{2}{y+2}=0$.

*Розв'язання.* Запишемо ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{3(y+2)+2(y-1)}{(y-1)(y+2)}=0; \quad \frac{3y+6+2y-2}{(y-1)(y+2)}=0; \quad \frac{5y+4}{(y-1)(y+2)}=0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі $\begin{cases}5y+4=0;\\(y-1)(y+2)\neq 0,\end{cases}$ звідки:

$$\begin{cases}5y=-4;\\y-1\neq 0;\\y+2\neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}y=-0{,}8;\\y\neq 1;\\y\neq -2;\end{cases} \qquad y=-0{,}8.$$

Відповідь. $-0{,}8$. ●

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розв'язати рівняння $\frac{2x^2-2}{x^2+2x}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x+2}$.

● $\frac{2x^2-2}{x(x+2)}+\frac{1}{x}-\frac{x}{x+2}=0; \quad \frac{2x^2-2+(x+2)-x^2}{x(x+2)}=0;$

$\frac{x^2+x}{x(x+2)}=0; \quad \begin{cases}x^2+x=0;\\x(x+2)\neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x(x+1)=0;\\x(x+2)\neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x=0 \text{ або } x=-1;\\x\neq 0;\\x\neq -2;\end{cases}$

$x=-1$.

Відповідь. $-1$. ●

**Вправа 2.** Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x-2}=\frac{2x+5}{x+1}$.

● Розглядатимемо рівність $\frac{2x}{x-2}=\frac{2x+5}{x+1}$ як пропорцію. За основною властивістю пропорції маємо:

$$2x(x+1)=(x-2)(2x+5),$$

за умови, що $x-2\neq 0$ й $x+1\neq 0$, тобто $x\neq 2$ й $x\neq -1$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Розв'яжемо одержане рівняння:

$2x^2 + 2x = 2x^2 + 5x - 4x - 10$; $2x = x - 10$; $x = -10$.

Для $x = -10$ умови $x \neq 2$ й $x \neq -1$ виконуються. Тому $x = -10$ — корінь рівняння.

Відповідь. $-10$. ●

**Вправа 3.** Із міста $A$ в місто $B$, відстань між якими 36 км, виїхала велосипедистка, а через 20 хв услід за нею — автомобіль, швидкість якого втричі більша за швидкість велосипедистки. Знайти швидкість велосипедистки, якщо відомо, що в місто $B$ вона приїхала на 40 хв пізніше, ніж автомобіль.

● Нехай швидкість велосипедистки дорівнює $x$ км/год, тоді швидкість автомобіля — $3x$ км/год. Шлях завдовжки 36 км велосипедистка подолала за $\frac{36}{x}$ год, а автомобіль — за $\frac{36}{3x} = \frac{12}{x}$ (год). Оскільки велосипедистка була в дорозі на 20 хв + 40 хв = 60 хв = 1 год довше, ніж автомобіль, то маємо рівняння

$$\frac{36}{x} - \frac{12}{x} = 1.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$\frac{36}{x} - \frac{12}{x} - 1 = 0$; $\frac{36 - 12 - x}{x} = 0$; $\frac{24 - x}{x} = 0$; $\begin{cases} 24 - x = 0; \\ x \neq 0; \end{cases}$ $x = 24$.

Відповідь. 24 км/год. ●

1. Яке рівняння називають раціональним рівнянням? Цілим раціональним рівнянням? Дробовим раціональним рівнянням?
2. Які рівняння називають рівносильними? Наведіть приклад двох рівносильних рівнянь.
3. Сформулюйте властивості рівнянь.
4. Як розв'язують дробове раціональне рівняння виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

«Усно

**211.** Які з наведених рівнянь є цілими раціональними рівняннями, а які — дробовими?

1) $\frac{5}{x-7}=1$; 2) $3(y-4)=0$; 3) $\frac{1}{3}-x=3$; 4) $\frac{2x-1}{x}=x$.

**212.** Коренем яких із наведених рівнянь є число 1?

1) $\frac{x-1}{x-5}=0$; 2) $\frac{x-1}{4x-4}=0$; 3) $\frac{y^2-1}{y+1}=0$; 4) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x}$.

**213.** Чи рівносильні рівняння:

1) $\frac{4x}{x-1}=8$ і $\frac{x}{x-1}=2$; 2) $\frac{1}{2x}=\frac{3}{x+1}$ і $\frac{1}{2x}-\frac{3}{x+1}=0$;

3) $\frac{z^2(z+3)}{z}=0$ і $z(z+3)=0$; 4) $\frac{2x}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ і $2x=4$?

«1 2

**214.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x+1}=0$; 2) $\frac{3y+6}{y-1}=0$; 3) $\frac{3x-3}{x-1}=0$;

4) $\frac{2z-10}{z^2-25}=0$; 5) $\frac{x^2+4x}{x-4}=0$; 6) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$.

**215.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-4}{x+4}=0$; 2) $\frac{5y+10}{y+2}=0$; 3) $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$.

**216.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x-6}{x-3}=0$; 2) $\frac{y-1}{y}-\frac{1}{2y}=0$; 3) $\frac{x-1}{x+5}+2=0$;

4) $\frac{3z+1}{z+1}=\frac{2z-2}{z+1}$; 5) $\frac{2x+5}{x+2}=\frac{1}{x+2}$; 6) $\frac{2x}{x-2}=\frac{4}{2-x}$;

7) $\frac{3}{x-4}=-1$; 8) $\frac{y}{y+1}=2$; 9) $\frac{x-5}{x-1}=\frac{1}{3}$.

**217.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{x-2}-\frac{12}{x-2}=0$; 2) $\frac{z-1}{2z}+\frac{1}{z}=0$; 3) $\frac{y-3}{y}+1=0$;

4) $\frac{3x-4}{2x}=\frac{x-6}{2x}$; 5) $\frac{2y-6}{y-3}=-1$; 6) $\frac{x-10}{x}=\frac{1}{2}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**218.** Яке число потрібно додати до знаменника дробу $\frac{19}{25}$, щоб одержати дріб, що дорівнює $\frac{1}{3}$?

**219.** Яке число потрібно відняти від знаменника дробу $\frac{7}{36}$, щоб одержати дріб, що дорівнює $\frac{1}{4}$?

**220.** Знайдіть звичайний дріб, що дорівнює $\frac{2}{3}$, у якому чисельник на 5 менший від знаменника.



**Інтерактивне завдання 7**
**Раціональні рівняння**





**221.** Чи рівносильні рівняння:

1) $\frac{x(x-3)}{x}=0$ та $x(x-3)=0$;

2) $\frac{x(x-3)}{x^2+1}=0$ та $x(x-3)=0$;

3) $2x+\frac{3}{x-2}=4+\frac{3}{x-2}$ та $2x=4$?

Відповіді обґрунтуйте.

**222.** Доведіть, що:

1) рівняння $\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{x-1}$ та $x+2=3$ не рівносильні;

2) рівняння $\frac{x+2}{x-1}=\frac{4}{x-1}$ та $x+2=4$ рівносильні.

**223.**  Складіть два рівносильні рівняння, які мають: 1) один корінь; 2) жодного кореня; 3) безліч коренів.

**224.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{9y^2+6y+1}{9y^2-1}=0$;

2) $\frac{x^3-16x}{x^2+4x}=0$;

3) $\frac{x-1}{2x-1}=\frac{x-4}{2(1-2x)}$;

4) $\frac{y+3}{y-1}=\frac{2y}{2y-7}$;

5) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x}=1$;

6) $\frac{4}{3x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{6}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\frac{5x+4}{x-2}-\frac{4x+1}{x+3}=1$;

8) $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{x+4}{2x+3}=1$;

9) $\frac{x-10}{x^2-5x}+\frac{x}{x-5}=\frac{2}{x}$;

10) $\frac{2z+1}{z+1}-\frac{2z-5}{z-1}=\frac{2}{1-z^2}$.

**225.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y^2-9}{4y^2+12y+9}=0$;

2) $\frac{3y}{y-3}+\frac{3}{2(3-y)}=0$;

3) $\frac{y+3}{y+2}=\frac{3y}{3y-2}$;

4) $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{5}$;

5) $\frac{x+6}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=2$;

6) $\frac{6z-5}{3z+1}-\frac{z-2}{z-3}=1$;

7) $\frac{2x-3}{x^2+4x}-\frac{3}{x}=\frac{5}{x+4}$;

8) $\frac{x+5}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{2}{x^2-4}$.

**226.** З Одеси до Миколаєва, відстань між якими 120 км, одночасно виїхали автомобіль і велосипедист. У Миколаїв автомобіль прибув на 4 год раніше, ніж велосипедист. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона в 4 рази менша від швидкості автомобіля.

**227.** Катер проходить 27 км за течією річки за той самий час, що й 23 км проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера в стоячій воді дорівнює 25 км/год.

**228.** Теплохід пройшов 17 км за течією річки і 15 км проти течії за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

«4

**229.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{x^2-3x}+\frac{5}{x^2+3x}=\frac{8}{x^2-9}$;

2) $\frac{3y-1}{2y+5}+\frac{4-3y}{5-2y}=\frac{15}{25-4y^2}$;

3) $\frac{|z-3|-4}{z^2-1}=0$;

4) $\frac{|2x+1|-3}{x^2+x-2}=0$.

**230.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2z-3}{2z+3}-\frac{2z+3}{2z-3}=\frac{9+4z}{9-4z^2}$;

2) $\frac{|x-4|-5}{x+1}=0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**231.** Знайдіть усі значення $a$, для яких є рівносильними рівняння $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-a}=0$ та $(x-1)(x-2)=0$.

**232.** Для яких значень $a$ рівняння $\dfrac{(x+a)(x-2a)}{x-5}=0$ має один корінь?

**233.** Для яких значень $b$ рівняння $\dfrac{x+2b}{(x-4)(x+3)}=0$ не має коренів?

**234.** Батько й дочка скопали грядку за 16 хв. За скільки хвилин може скопати грядку батько, працюючи сам, якщо він може це зробити вдвічі швидше, ніж дочка?

## *Вправи для повторення*



**235.** Знайдіть значення виразу:

1) $2^5+(-5)^3$; 2) $5^7:5^5-4^4\cdot 0{,}5^4$; 3) $16^3:(4^{12}:8^4)$.

**236.** Спростіть вираз:

1) $(a^5)^3:(aa^4)^2$; 2) $(a^2b^4)^3\cdot(2a^2b)^2$; 3) $x^7y\cdot(-4xy^3)^3$.

**237.** Протягом дня три менеджери надали 60 консультацій по телефону. Чи могло статися так, що перший менеджер надав на 5 консультацій більше, ніж другий, і на 7 консультацій менше, ніж третій?

**238.** У баку автомобіля є 40 л бензину. Чи зможе він без заправки проїхати від Києва до Харкова автомобільною трасою завдовжки 476 км, якщо на подолання кожних 100 км шляху витрачатиме 8 л бензину?

## *Поміркуйте*



**239.** Для чисел $a$, $b$ і $c$ виконуються рівності:

$$a+b+c=10;\quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=0{,}9.$$

Знайдіть для цих чисел значення виразу

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»



## Інтерактивне завдання для самоперевірки 2

## Множення і ділення дробів. Раціональні рівняння

### Завдання для самоперевірки № 2

*Початковий рівень*

**1.** Виконайте множення: $\frac{4m^2}{n} \cdot \frac{n}{m^3}$.

**А** $\frac{4m^5}{n^2}$ **Б** $\frac{4}{m^2}$ **В** $\frac{4}{m}$ **Г** $4m$

**2.** Виконайте ділення: $\frac{b}{a} : \frac{b^2}{a^4}$.

**А** $\frac{b^3}{a^5}$ **Б** $\frac{a^3}{b}$ **В** $\frac{a^4}{b}$ **Г** $a^3b$

**3.** Піднесіть до степеня: $\left(\frac{2x^3}{a^2b}\right)^3$.

**А** $\frac{6x^6}{a^5b^4}$ **Б** $\frac{8x^6}{a^6b^3}$ **В** $\frac{2x^9}{a^6b^3}$ **Г** $\frac{8x^9}{a^6b^3}$

**4.** Знайдіть значення виразу $\frac{a+1}{a-2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{a-2}$, якщо $a = 3$.

**А** $-7$ **Б** $-1$ **В** $1$ **Г** $7$

**5.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x+3}{x-3} = 0$.

**А** $-3; 3$ **Б** $-3$

**В** $3$ **Г** Коренів немає

**6.** Розв'яжіть рівняння $\frac{2x}{x^2+3x} = 0$.

**А** $-3; 0$ **Б** $-3$

**В** $0$ **Г** Коренів немає



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## *Середній рівень*

**7.** Доберіть до кожного виразу (1–3) тотожно рівний йому вираз (А–Д).

**1** $\dfrac{3a^3}{2b}\cdot\dfrac{6b^4}{a^3}$

**2** $\dfrac{3a^3}{2b}:\dfrac{6b^4}{a^3}$

**3** $\left(-\dfrac{a^3}{2b^2}\right)^4$

**А** $\dfrac{a^6}{4b^5}$

**Б** $\dfrac{a^{12}}{16b^8}$

**В** $-\dfrac{a^{12}}{16b^8}$

**Г** $\dfrac{9}{b^5}$

**Д** $9b^3$

**8.** Спростіть вираз $\dfrac{a-3}{a+2}:\left(1-\dfrac{a}{a+2}\right)$.

**А** $\dfrac{2(a-3)}{(a+2)^2}$ **Б** $\dfrac{a-3}{2a+2}$ **В** $\dfrac{a-3}{2}$ **Г** $a-3$

**9.** Знайдіть значення виразу $\left(\dfrac{y}{y+1}+1\right)\cdot\dfrac{y+1}{2y-1}$, якщо $y=5{,}5$.

**А** $-1{,}2$ **Б** $1{,}2$ **В** 11 **Г** 12

**10.** Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2-4x}{x-4}=0$.

**А** 0 **Б** 4 **В** 0; 4 **Г** $-4$

## *Достатній рівень*

**11.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{4ab^3}{9c^2}\cdot\left(\dfrac{3ac^2}{4b^2}\right)^3$;

2) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$.

**12.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{3x-3}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}$, якщо $x=1{,}5$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**13.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3}{4x}+\frac{1}{6x}=2$;

2) $\frac{3x^2+10x-25}{x+5}=x-5$.

**14.** Автомобіль за певний час проїхав 40 км, а потім збільшив швидкість на 10 км/год і за той самий час подолав 45 км. Знайдіть початкову швидкість автомобіля.

### *Високий рівень*

**15.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{2b}{a+b}\cdot\left(\frac{a+b}{3ab}-\frac{a}{b}-1\right)$ не залежать від значень $b$.

**16.** Доведіть тотожність

$$\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{x^2-y^2}\right)=\frac{y-x}{y+x}.$$

**17.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4-5y}{y+5}-\frac{1+5y}{5-y}=\frac{7}{y^2-25}$;

2) $\frac{|2x-5|-1}{x-3}=0$.

**18.** Два екскаватори, працюючи разом, можуть вирити котлован за 6 год. За скільки годин може вирити котлован кожний екскаватор, працюючи окремо, якщо перший може це зробити вдвічі швидше, ніж другий?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 9 СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

**1. Степінь з натуральним показником.** Степені з натуральним показником ми вивчали у 7 класі. Нагадаємо, що степенем числа $a$ з натуральним показником $n$, де $n > 1$, називають добуток $n$ множників, кожний з яких дорівнює $a$. Наприклад,

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

У виразі $2^5$ число 2 називають *основою степеня*, число 5 — *показником степеня*, а весь вираз $2^5$ — *степенем*. Степенем числа $a$ з показником 1 називають саме число $a$: $a^1 = a$.

Степені з натуральним показником часто використовують для запису великих значень величин у компактному вигляді. Наприклад, 10 000 000 т $= 10^7$ т.

Якщо значення величини мале, то її задають за допомогою степенів, показники яких не є натуральними числами. Наприклад, з довідкових джерел можна дізнатися, що маса молекули води дорівнює $2{,}99 \cdot 10^{-23}$ г. Щоб зрозуміти подібні задання величин, розширимо дію піднесення до степеня. Розглянемо, що означає піднесення до степеня з нульовим і цілим від'ємним показником.

**2. Степінь з нульовим і цілим від'ємним показником.** Виконуючи ділення степенів з однаковими основами й натуральними показниками, ми використовуємо рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ де } a \neq 0,\ m > n.$$

Якби в цій рівності обмеження $m > n$ не було, то для $a \neq 0$ мали б:

$$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1;$$

$$a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}.$$

Виконані перетворення підтверджують доцільність таких означень.

*Означення.* **Степінь числа $a$ з нульовим показником, де $a \neq 0$, дорівнює 1:**

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Наприклад, $3^0 = 1$, $(-0{,}5)^0 = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$.

*Означення.* **Якщо $a \neq 0$ і $n$ — натуральне число, то степенем числа $a$ із цілим від'ємним показником $-n$ називають число $\frac{1}{a^n}$, тобто**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \text{ — натуральне число}).$$

Наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = \frac{1}{36}$.

Степінь числа 0 з нульовим і цілим від'ємним показником не визначені. Так, вирази $0^0$, $0^{-2}$ не мають змісту.

Розглянемо таблицю:

| $n$ | ... | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^n$ | ... | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | ... |

Як видно з другого рядка таблиці, значення цілих степенів числа 10 мають таку властивість: кожне наступне значення у 10 разів більше за попереднє.

**3. Піднесення дробу до від'ємного степеня.** Щоб піднести до від'ємного степеня дріб, можна використати рівність

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ де } a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \text{ — натуральне число.}$$

Ця рівність випливає з таких перетворень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Наприклад, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Приклади розв'язання вправ

**Вправа 1.** Знайти значення виразу:

1) $100 \cdot 5^{-3}$; 2) $\frac{1}{27} : 3^{-5}$; 3) $\left(2\frac{2}{9}\right)^{-1} + 0{,}2^{-1}$.

• 1) $100 \cdot 5^{-3} = 100 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0{,}8$;

2) $\frac{1}{27} : 3^{-5} = \frac{1}{27} : \frac{1}{3^5} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3^5}{1} = \frac{3^5}{3^3} = 3^2 = 9$;

3) $\left(2\frac{2}{9}\right)^{-1} + 0{,}2^{-1} = \left(\frac{20}{9}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{9}{20} + 5 = 5\frac{9}{20}$. •

**Вправа 2.** Використовуючи від'ємний показник, подати дріб $\frac{3}{ab^3}$ у вигляді добутку.

• $\frac{3}{ab^3} = 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^3} = 3a^{-1}b^{-3}$. •

**Вправа 3.** Спростити вираз $\left(x^{-1} + y^{-1}\right) \cdot (x + y)^{-1}$.

• $\left(x^{-1} + y^{-1}\right) \cdot (x + y)^{-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x + y} = \frac{y + x}{xy} \cdot \frac{1}{x + y} = \frac{1}{xy}$. •

1. Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого числа, відмінного від нуля?
2. Сформулюйте означення степеня із цілим від'ємним показником.

### Усно

**240.** Подайте у вигляді дробу степінь: $5^{-2}$; $4^{-1}$; $3^{-3}$; $2^{-4}$.

**241.** Подайте у вигляді степеня дріб: $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{4^3}$; $\frac{1}{2^9}$.

**242.** Обчисліть:

1) $12^0$; $(-1{,}5)^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; $0^0$; 2) $5^{-1}$; $3^{-2}$; $2^{-3}$; $1^{-4}$.

### 1 2

**243.** Подайте числа 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степенів з основою 3.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**244.** Подайте числа 125, 25, 5, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$ у вигляді степенів з основою 5.

**245.** Подайте у вигляді степенів з основою 10 числа 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

**246.** Знайдіть значення степеня:

1) $9^{-2}$; 2) $15^{-1}$; 3) $(-2)^{-4}$; 4) $(-3)^{-3}$;

5) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}$; 6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; 7) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$; 8) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

9) $0{,}5^{-2}$; 10) $(-0{,}1)^{-3}$; 11) $0{,}25^{-1}$; 12) $(-1{,}5)^{-2}$.

**247.** Знайдіть значення степеня:

1) $5^{-3}$; 2) $25^{-1}$; 3) $(-3)^{-2}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$;

5) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 6) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 7) $0{,}2^{-2}$; 8) $(-2{,}5)^{-1}$.

**248.** Заповніть таблицю:

| $n$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | | | | | | | | | |

**249.** Знайдіть значення виразу:

1) $5 \cdot 10^{-2}$; 2) $16 \cdot 2^{-5}$; 3) $5^{-3} : 25^0$; 4) $8 : (-2)^{-3}$;

5) $6^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-1}$; 6) $4^{-1} + 3^{-1}$; 7) $2^{-3} - 2^{-4}$; 8) $2^{-4} + 8^{-2}$.

**250.** Знайдіть значення виразу:

1) $14 \cdot 7^{-2}$; 2) $4 : (-2)^{-4}$; 3) $5^{-1} + 10^{-1}$; 4) $2^{-3} - 4^{-2}$.

**251.** Знайдіть значення виразу $(b + 1)^{-2}$, якщо $b = -2$; $b = 0$; $b = 2$.

**252.** Знайдіть значення виразу $8a^{-3} + 1$, якщо $a = -2$; $a = 2$.

**253.** Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степенів з від'ємним показником:

1) $a^{-2}b^{-1}$; 2) $7^{-1}ab^{-5}$; 3) $5x^{-2}y^{-3}$; 4) $2(a + b)^{-2}$.

**254.** Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степенів з від'ємним показником:

1) $x^{-1}y^{-4}$; 2) $3m^{-3}n^{-4}$; 3) $4^{-1}a^{-3}b^3$; 4) $5(x - 1)^{-1}$.



**Інтерактивне завдання 8**

**Степінь із цілим показником**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**255.** Подайте дріб у вигляді степеня одноцифрового натурального числа:

1) $\frac{1}{625}$; 2) $\frac{1}{512}$; 3) $\frac{1}{243}$; 4) $\frac{1}{128}$.

**256.** Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}1^{-2} + (-1)^{-24}$; 2) $2{,}5^{-1} : 1{,}5^{-2}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-1}$; 4) $\left(1\frac{1}{7}\right)^{-2} - \left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$;

5) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-3\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 6) $(1 + 5^{-1})^{-2} - (2 + 2^{-2})^{-1}$.

**257.** Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}2^{-3} - (-0{,}5)^{-2}$; 2) $(-1{,}6)^{-1} : 4^{-2}$;

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1}$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(-1\frac{7}{9}\right)^{-2}$;

5) $(1 - 2^{-1})^{-3} - (1 + 4^{-1})^{-1}$.

**258.** Розташуйте степені в порядку спадання їхніх значень:

1) $5^{-2}; 5^2; 5^{-1}; 5^0; 5^4$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2; \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}; \left(\frac{1}{3}\right)^0; \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

**259.** Розташуйте степені в порядку зростання їхніх значень:

1) $3^2; 3^{-2}; 3^0; 3^{-3}; 3^{-1}$; 2) $0{,}5^{-2}; 0{,}5^2; 0{,}5^{-1}; 0{,}5^0$.

**260.** Використовуючи від'ємний показник, подайте у вигляді добутку дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$; 2) $\frac{4}{xy^2}$; 3) $\frac{3}{2ab}$; 4) $\frac{a+b}{(a-b)^2}$.

**261.** Використовуючи від'ємний показник, подайте у вигляді добутку дріб:

1) $\frac{2}{a^2}$; 2) $\frac{m}{ab}$; 3) $\frac{a^4}{2b^3}$; 4) $\frac{x}{x+y}$.

**262.** Спростіть вираз:

1) $(3a + 15)(a + 5)^{-2}$; 2) $(b - 4)^{-1} - (b + 4)^{-1}$;

3) $(a^{-2} - b^{-2}) : (a + b)$; 4) $\left(1 - \frac{c^{-1}}{c^{-1}+1}\right) : \frac{1}{1-c^2}$.

**263.** Спростіть вираз:

1) $(a^2 - b^2)(a - b)^{-2}$; 2) $\left(m^{-1} - n^{-1}\right) : \left(\frac{m^2 n^2}{m^2 - n^2}\right)^{-1}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4

**264.** Подайте вираз $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$ у вигляді раціонального дробу.

**265.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2(5+x^{-1})=9-2x^{-1}$; 2) $\dfrac{1}{y^{-1}+1}=3$.

**266.** Розв'яжіть рівняння:

1) $16-3x^{-1}=1+3x^{-1}$; 2) $y+y^{-1}=2$.

**267.** Скільки коренів має рівняння $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=0$?

## *Вправи для повторення*

**268.** Знайдіть значення виразу:

1) $5^4\cdot 2^4$; 2) $4^9:(2^3)^3$; 3) $2{,}5^5\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}4^5$.

**269.** Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-5x^3y^2\cdot 2xy^3$; 2) $(-2xy^5)^3$; 3) $(m^4n^3)^2\cdot(-mn)^3$.

**270.** За три дні у сервісному центрі відремонтували 45 гаджетів. Другого дня було відремонтовано вдвічі менше гаджетів, ніж першого, і на 5 менше, ніж третього. Скільки гаджетів було відремонтовано кожного дня?

**271.** Маючи 150 г солі, потрібно приготувати її 12-відсотковий розчин. Скільки для цього потрібно взяти грамів води?

## *Поміркуйте*

**272.** 25 карток Світлана пронумерувала числами 1, 2, ..., 25, перетасувала картки, розклала чистим боком догори і знову пронумерувала числами 1, 2, ..., 25. Потім для кожної картки додала числа, які на ній написані, і перемножила 25 одержаних сум. Доведіть, що знайдений нею добуток є парним числом.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 10 ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Степінь із цілим показником має всі властивості, установлені для степеня з натуральним показником, а саме:

**Для будь-яких чисел $a \neq 0$ та $b \neq 0$ і будь-яких цілих чисел $m$ і $n$ виконуються рівності:**

$$a^m a^n = a^{m+n}; \qquad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

Для доведення цих властивостей використовують означення степеня із цілим показником і властивості степеня з натуральним показником.

Покажемо, наприклад, що рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ є правильною, якщо показники степенів є цілими від'ємними числами. Для даного випадку показники степенів можна записати у вигляді $m = -p$, $n = -q$, де $p$ і $q$ — натуральні числа. Тоді:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p+(-q)} = a^{m+n}.$$

Так само можна довести, що рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ є правильною, коли один з показників степеня $m$ або $n$ є від'ємним, а другий — додатним, коли один або обидва показники дорівнюють нулю.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Подати у вигляді степеня з основою $a$ вираз:

1) $a^{10} \cdot a^{-12}$; 2) $(a^3)^{-2} : a^{-9}$.

● 1) $a^{10} \cdot a^{-12} = a^{10+(-12)} = a^{-2}$;

2) $(a^3)^{-2} : a^{-9} = a^{3 \cdot (-2)} : a^{-9} = a^{-6} : a^{-9} = a^{-6-(-9)} = a^3$. ●

**Вправа 2.** Обчислити:

1) $3^{-5} \cdot 3^{10} \cdot 3^{-4}$; 2) $(5^{-2})^3 \cdot 25^2$; 3) $\dfrac{5^{-6} \cdot 4^{-2}}{10^{-6}}$.

● 1) $3^{-5} \cdot 3^{10} \cdot 3^{-4} = 3^{-5+10+(-4)} = 3^1 = 3$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

2) $(5^{-2})^3 \cdot 25^2 = 5^{-6} \cdot (5^2)^2 = 5^{-6} \cdot 5^4 = 5^{-6+4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$;

3) $\frac{5^{-6} \cdot 4^{-2}}{10^{-6}} = \frac{5^{-6}}{10^{-6}} \cdot 4^{-2} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-6} \cdot 4^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \cdot (2^2)^{-2} =$

$= 2^6 \cdot 2^{-4} = 2^2 = 4.$ ●

**Вправа 3.** Спростити вираз:

1) $(2a^{-2}b^3)^2 \cdot 0{,}5ab^{-2}$; 2) $(x^{-1} - x)^2 - x^{-2}$.

● 1) $(2a^{-2}b^3)^2 \cdot 0{,}5a^3b^{-2} = 4a^{-4}b^6 \cdot 0{,}5a^3b^{-2} =$

$= (4 \cdot 0{,}5) \cdot (a^{-4} \cdot a^3) \cdot (b^6 \cdot b^{-2}) = 2a^{-1}b^4$;

2) $(x^{-1} - x)^2 - x^{-2} = (x^{-1})^2 - 2 \cdot x^{-1} \cdot x + x^2 - x^{-2} =$

$= x^{-2} - 2x^0 + x^2 - x^{-2} = x^2 - 2.$ ●

1. Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.

«Усно

**273.** Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^{-5}a^2$; 2) $b^{-4}b^{-5}$; 3) $yy^{-7}$; 4) $a^4 : a^8$;

5) $b^7 : b^{-3}$; 6) $(c^{-1})^4 : c$; 7) $m^{-2}n^{-2}$; 8) $\frac{x^{-4}}{y^{-4}}$.

**274.** Обчисліть:

1) $6^5 \cdot 6^{-3}$; 2) $5^{-8} \cdot 5^8$; 3) $4^3 : 4^5$; 4) $3^{-4} : 3^{-5}$;

5) $(8^{-1})^{-1}$; 6) $(7^{-1})^2$; 7) $2^{-2} \cdot 5^{-2}$; 8) $\frac{8^{-2}}{4^{-2}}$.

«1 2

**275.** Подайте вираз у вигляді степеня з основою $a$:

1) $a^5a^{-10}$; 2) $a^{-3}a^{-6}$; 3) $a^{-7}a^7$; 4) $a^2a^{-10}a^3$;

5) $a^{10} : a^{15}$; 6) $a^{-2} : a^5$; 7) $(a^5)^{-3}$; 8) $(a^{-4})^{-6}$.

**276.** Подайте вираз у вигляді степеня з основою $b$:

1) $b^{-4}b^{-1}$; 2) $b^{-3}b^7$; 3) $b^{-2}b^{-6}b$;

4) $b^3 : b^{10}$; 5) $b^{-4} : b^{-8}$; 6) $(b^{-7})^{-2}$.

**277.** Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $x^{-5}y^{-5}$; 2) $\frac{2^{-6}}{b^{-6}}$; 3) $(m^3 : m^{-7}) \cdot m^5$;

4) $m^3 : (m^{-7} \cdot m^5)$; 5) $(a^{-2})^5 : a^{-6}$; 6) $b^4 \cdot (b^{-1})^{-2}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**278.** Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $k^{-4}n^{-4}$; 2) $\dfrac{x^{-3}}{5^{-3}}$; 3) $(x^4 \cdot x^{-3}) : x^3$;

4) $(c^4 : c^{-5}) \cdot c$; 5) $(y^{-3})^{-2} \cdot y^{-3}$; 6) $k : (k^5)^{-2}$.

**279.** Подайте вираз $(x^{-8})^2 : x^{-14}$ у вигляді степеня з основою $x$ та знайдіть його значення, якщо $x = 0{,}1$.

**280.** Подайте вираз $(b^3)^{-4} \cdot b^{15}$ у вигляді степеня з основою $b$ та знайдіть його значення, якщо $b = 0{,}5$.

**281.** Подайте степінь $c^{-5}$ у вигляді добутку двох степенів з основою $c$, одним з яких є: $c$; $c^2$; $c^{-4}$; $c^{-10}$.

**282.** Подайте степінь $x^{-2}$ у вигляді добутку двох степенів з основою $x$, одним з яких є: $x$; $x^3$; $x^{-6}$.

**283.** Знайдіть значення виразу:

1) $2^{11} \cdot 2^{-7}$; 2) $15 \cdot 15^{-2}$; 3) $0{,}5^{-4} \cdot 0{,}5^6$;

4) $4^{15} : 4^{17}$; 5) $8 : 8^{-1}$; 6) $(3^{-2})^{-2}$;

7) $5^{-3} : (5^{-1})^4$; 8) $(10^{-6} : 10^{-7}) \cdot 10^2$; 9) $4^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

**284.** Знайдіть значення виразу:

1) $3^8 \cdot 3^{-10}$; 2) $2{,}5^{-5} \cdot 2{,}5^7$; 3) $6^{-5} : 6^{-7}$;

4) $(2^{-3})^{-2}$; 5) $(6^{-3})^2 : 6^{-5}$; 6) $4^{-6} : (4^{-4} \cdot 4^{-3})$.

**285.** Спростіть вираз:

1) $7c^{-4} \cdot 5c^{-2}$; 2) $3a^{-2}b^{-5} \cdot 4a^5b$; 3) $3n^{-4} \cdot (2n^{-2})^3$;

4) $(xy^{-2})^{-1} \cdot 4x^3y^{-2}$; 5) $1{,}2m^2k^{-1} \cdot 5m^{-3}k^2$; 6) $\left(\dfrac{1}{3}b^{-5}c^3\right)^{-2} \cdot c^6$.

**286.** Спростіть вираз:

1) $5x^2y^{-4} \cdot 4x^{-5}y^{-1}$; 2) $3m^{-3}n^{-2} \cdot 0{,}5m^3n^3$; 3) $(a^3b^{-2})^{-1} \cdot 2a^4b^{-4}$.



**Інтерактивне завдання 9**

**Властивості степеня із цілим показником**



«3

**287.** Знайдіть значення виразу:

1) $16^{-1} \cdot 4^{-2} \cdot 2^9$; 2) $(9^{-3} : 3^{-5}) : 27^{-2}$; 3) $2^6 : (2^{-5} : 8^{-1})^{-2}$;

4) $4^{-5} \cdot 3^3 \cdot 0{,}25^{-5}$; 5) $2^{-8} \cdot 1{,}25^{-8} \cdot 0{,}4^{-8}$; 6) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3} - 1$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\dfrac{15^{-8}\cdot 15^{3}}{15^{-6}}$; 8) $\dfrac{9^{-4}\cdot 4^{-4}}{2^{-9}\cdot 3^{-9}}$; 9) $\dfrac{9^{-6}\cdot 0{,}5^{-8}}{3^{-6}\cdot 1{,}5^{-8}}$.

**288.** Знайдіть значення виразу:

1) $3^{-4}\cdot 9^{5}\cdot 27^{-1}$; 2) $5^{8} : (125 : 25^{-1})$; 3) $2{,}5^{-5}\cdot 10^{8}\cdot 4^{-5}$;

4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}\cdot 3^{-5}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; 5) $\dfrac{8^{-3}\cdot 4^{-3}}{2^{-20}}$; 6) $\dfrac{5^{-4}\cdot 6^{-6}}{5^{-5}\cdot 3^{-6}}$.

**289.** Спростіть вираз і зведіть результат до вигляду, який не містить степенів із від'ємним показником:

1) $5xy^{-3}\cdot 0{,}4(x^{-2})^{2}\cdot 1{,}5x^{2}y^{4}$; 2) $3\dfrac{1}{3}m^{5}n^{-17}\cdot 0{,}12m^{-1}n^{19}$;

3) $-\dfrac{a^{-1}b^{2}}{5} : \left(\dfrac{a^{-3}b^{3}}{10}\right)$; 4) $\left(\dfrac{9x^{-1}}{z^{2}}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{3z^{-2}}{x^{-1}}\right)^{-4}$;

5) $\dfrac{(4a^{-3}b^{-4})^{-1}}{0{,}25a^{-2}b^{6}}$; 6) $\dfrac{0{,}5mn^{-2}}{(2m^{3}n^{-2})^{-2}}$.

**290.** Спростіть вираз і зведіть результат до вигляду, який не містить степенів із від'ємним показником:

1) $(0{,}25c^{-2}x)^{-1}\cdot(2c^{2}x^{-1})^{-2}$; 2) $(0{,}2ab^{3}c)^{-3} : (a^{2}b^{5}c)^{-2}$;

3) $\dfrac{27a^{-2}b^{3}}{(3a^{-1}b)^{4}}$; 4) $5n^{-3}k^{-1}\cdot\left(\dfrac{n^{-2}}{2k^{-1}}\right)^{-2}$.

**291.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{2a^{-5}b^{3}}{3}\cdot\dfrac{9b^{-9}}{a^{-4}}\cdot\dfrac{a}{3b^{-6}}$ дорівнює тому самому числу.

**292.** Доведіть, що для будь-яких допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{5x^{-3}y^{-3}}{4z}\cdot\dfrac{12x^{4}z^{-3}}{y^{2}}\cdot\dfrac{y^{5}}{25z^{-6}}$ не залежать від значень $y$.

**293.** У виразі $b^{-4} - b^{-2}$ винесіть за дужки множник: $b^{-4}$; $b^{-1}$; $b^{2}$.

**294.** У виразі $a^{-2} - a^{2}$ винесіть за дужки множник: $a^{-2}$; $a^{-1}$; $a$.

**295.** Спростіть вираз:

1) $(a^{-1} - 1)(a^{-1} + 1) - a^{-2}$; 2) $(x^{-1} - y^{-1})^{2} - (x^{-1} + y^{-1})^{2}$.

**296.** Спростіть вираз:

1) $(x^{-1} - y^{-1})(x^{-1} + y^{-1}) + y^{-2}$; 2) $(b^{-2} - b^{2})^{2} + 2 - b^{-4}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4

**297.** Доведіть, що вираз $\dfrac{3^{m+1}\cdot 6^{m+1}}{2^{m-2}\cdot 3^{2m}}$, де $m$ — ціле число, набуває лише одного значення. Знайдіть це значення.

**298.** Знайдіть значення виразу $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4n}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2n}\cdot\left(\dfrac{9}{16}\right)^{n+1}$, якщо $n=-28$.

**299.** Спростіть вираз:

1) $\left(a^{-2}-1\right)\left(\dfrac{1}{a^{-1}-1}-\dfrac{1}{a^{-1}+1}\right)$; 2) $\dfrac{a^{-2}+4a^{-1}b^{-1}+4b^{-2}}{a^{-2}-4b^{-2}}$.

**300.** Спростіть вираз $\dfrac{m^{-2}-n^{-2}}{m^{-2}-2m^{-1}n^{-1}+n^{-2}}$.

**301.** Доведіть, що для будь-яких допустимих значень змінних значення виразу $(m^{-1}n-n)(m^{-1}n^{-1}-n^{-1})$ є невід'ємним числом.

## *Вправи для повторення*

**302.** Обчисліть:

1) $1{,}7\cdot 10^{4}$; 2) $3{,}2\cdot 10^{-2}$; 3) $5{,}2 : 10^{3}$; 4) $0{,}3 : 10^{-4}$.

**303.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases}2x-y=3;\\ 3x+2y=1.\end{cases}$

**304.** Два станки за 1 год спільної роботи виготовляють 250 деталей. Перший станок за 4 год і другий за 2 год разом виготовляють 740 деталей. Скільки деталей виготовляє за годину кожний станок?

**305.** У повісті 120 сторінок. Кількість сторінок, які прочитала Руслана, на 40 % більша за кількість сторінок, які їй залишилося прочитати. Скільки сторінок повісті прочитала Руслана?

## *Поміркуйте*



**306.** На дошці записано кілька різних натуральних чисел. Добуток двох найменших із них дорівнює 16, а двох найбільших — 225. Чому дорівнює сума всіх чисел, записаних на дошці?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### Цікаво знати



Марина Сергіївна В'язовська (нар. 1984)

2022 року українську математикиню Марину В'язовську було нагороджено найпрестижнішою світовою відзнакою з математики — медаллю Філдса. Цю нагороду неофіційно називають Нобелівською премією з математики.

Медаллю Філдса нагороджують молодих математиків віком до сорока років за значний вклад у науку. Марина В'язовська стала другою з жінок, які отримали цю медаль за всю історію їх вручення (з 1936 року). Вона запропонувала просте розв'язання задачі про «досконале» розміщення куль у просторі, сформульованої ще у XVII столітті німецьким математиком та астрономом Йоганном Кеплером.

Марина В'язовська, яка народилася та здобула освіту в Києві, демонструвала високі результати на учнівських олімпіадах з математики, двічі здобувала золоті медалі на Міжнародних студентських олімпіадах з математики.

## 11 СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

У науці й техніці доводиться мати справу з величинами, значення яких дуже великі або дуже малі. Наприклад:

площа Світового океану 361 000 000 000 000 м$^2$;
діаметр молекули води 0,00000028 мм;
маса молекули води 0,00000000000000000000299 г.

Вказані значення важко прочитати, а виконання з ними певних дій призводить до громіздких записів. Щоб ефективніше оперувати великими та малими додатними числами, їх зручно записувати за допомогою степенів числа 10. Наприклад:

$361\,000\,000\,000\,000 \text{ м}^2 = 3{,}61 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$;
$0{,}00000028 \text{ мм} = 2{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ мм}$;
$0{,}00000000000000000000299 \text{ г} = 2{,}99 \cdot 10^{-23} \text{ г}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Про числа $3{,}61 \cdot 10^{14}$, $2{,}8 \cdot 10^{-7}$, $2{,}99 \cdot 10^{-23}$ кажуть, що вони записані у *стандартному вигляді*.



*Означення.* ***Стандартним виглядом додатного числа*** $x$ **називають його запис у вигляді** $a \cdot 10^n$**, де** $1 \leqslant a < 10$ **і** $n$ **— ціле число.**

Число $n$ називають *порядком* числа $x$.

Наприклад, порядок числа $3{,}61 \cdot 10^{14}$ дорівнює 14, а порядок числа $2{,}99 \cdot 10^{-23}$ дорівнює $-23$. Порядок числа дає уявлення про те, наскільки великим чи наскільки малим є це число.

Звернемо увагу на особливість числа $a$: оскільки $1 \leqslant a < 10$, то в цілій частині десяткового запису числа $a$ повинна бути лише одна цифра, до того ж відмінна від нуля.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число.

Наприклад, запишемо число $x = 345{,}8$ у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$. Щоб одержати число $a$, перенесемо в числі $x$ кому на 2 цифри ліворуч: $a = 3{,}458$. Число $a$ у $100 = 10^2$ разів менше від числа $x$, тому $x = a \cdot 10^2 = 3{,}458 \cdot 10^2$.

Інший приклад: $0{,}000235 = 2{,}35 \cdot 10^{-4}$.

(У числі $x = 0{,}000235$ перенесли кому праворуч на 4 цифри, одержали число $a = 2{,}35$, яке у $10^4$ разів більше за число $x$. Тому $x = a : 10^4 = a \cdot \dfrac{1}{10^4} = 2{,}35 \cdot 10^{-4}$.)

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Записати у стандартному вигляді число:

1) 0,56; 2) 31,6; 3) 2000.

• 1) $0{,}56 = 5{,}6 \cdot 10^{-1}$; 2) $31{,}6 = 3{,}16 \cdot 10$; 3) $2000 = 2 \cdot 10^3$. •

**Вправа 2.** Виконати дії і записати результат у стандартному вигляді:

1) $(8{,}4 \cdot 10^3) \cdot (2{,}3 \cdot 10^{-6})$; 2) $(4{,}2 \cdot 10^5) : (8{,}4 \cdot 10^{-3})$;

3) $2{,}3 \cdot 10^7 + 5{,}6 \cdot 10^6$.

• 1) $(8{,}4 \cdot 10^3) \cdot (2{,}3 \cdot 10^{-6}) = (8{,}4 \cdot 2{,}3) \cdot (10^3 \cdot 10^{-6}) =$
$= 19{,}32 \cdot 10^{-3} = 1{,}932 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1{,}932 \cdot 10^{-2}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

2) $(4{,}2 \cdot 10^5) : (8{,}4 \cdot 10^{-3}) = \dfrac{4{,}2 \cdot 10^5}{8{,}4 \cdot 10^{-3}} = 0{,}5 \cdot 10^8 =$

$= 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^7.$

3) Доданок, який містить більший степінь числа 10 (перший доданок), залишимо без змін, а в другому виділимо множник $10^7$:

$$5{,}6 \cdot 10^6 = 5{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^7 = 5{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 10^7 = 0{,}56 \cdot 10^7.$$

Тоді:

$2{,}3 \cdot 10^7 + 5{,}6 \cdot 10^6 = 2{,}3 \cdot 10^7 + 0{,}56 \cdot 10^7 = (2{,}3 + 0{,}56) \cdot 10^7 =$

$= 2{,}86 \cdot 10^7.$ ●

1. Що називають стандартним виглядом додатного числа?

«Усно

**307.** Які з наведених чисел записані у стандартному вигляді?

1) $0{,}3 \cdot 10^5$; 2) $3{,}8 \cdot 10^{-5}$; 3) $12 \cdot 10^{-1}$; 4) $1{,}01 \cdot 10^8$.

**308.** Назвіть порядок числа, записаного у стандартному вигляді:

1) $1{,}33 \cdot 10^4$; 2) $4{,}5 \cdot 10^{-3}$; 3) $8{,}5 \cdot 10^{23}$; 4) $3{,}4 \cdot 10^{-9}$.

«1 2

**309.** Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 7500; 2) 110 000; 3) 45 600 000; 4) 30,17;

5) 0,359; 6) 0,00534; 7) 0,00015; 8) 0,000002.

**310.** Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 15 600; 2) 70 000; 3) 5 350 000; 4) 17,93;

5) 0,0143; 6) 0,00101; 7) 0,00004; 8) 0,000011.

**311.** Запишіть у стандартному вигляді величину:

1) 149 600 000 км — відстань від Землі до Сонця;

2) 510 000 000 000 000 $м^2$ — площа поверхні земної кулі;

3) 1 989 100 000 000 000 000 000 000 000 т — маса Сонця;

4) 0,00000000000000000000000017 г — маса атома Гідрогену.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**312.** Запишіть у стандартному вигляді величину:
1) 2061 м — висота Говерли;
2) 300 000 000 м/с — швидкість світла;
3) 73 477 000 000 000 000 000 000 кг — маса Місяця;
4) 0,00000006 см — товщина плівки мильної бульбашки.

**313.** Округліть число до найвищого розряду і запишіть одержаний результат у стандартному вигляді:
1) 8427; 2) 19 507; 3) 863; 4) 491 120.

**314.** Запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу число:
1) $1{,}2 \cdot 10^3$; 2) $3{,}5 \cdot 10^5$; 3) $4{,}2 \cdot 10^{-3}$; 4) $5{,}7 \cdot 10^{-5}$.

**315.** Запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу число:
1) $3{,}3 \cdot 10^2$; 2) $8{,}1 \cdot 10^4$; 3) $1{,}8 \cdot 10^{-2}$; 4) $9{,}9 \cdot 10^{-4}$.

**316.** Порівняйте числа:
1) $3{,}4 \cdot 10^6$ і $5{,}4 \cdot 10^6$; 2) $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ і $1{,}59 \cdot 10^{-5}$.

**317.** Порівняйте числа:
1) $1{,}8 \cdot 10^7$ і $1{,}55 \cdot 10^7$; 2) $7{,}6 \cdot 10^{-3}$ і $8 \cdot 10^{-3}$.

**318.**  Запишіть у стандартному вигляді значення виразу:
1) $48 \cdot 10^6$; 2) $15 \cdot 10^{-4}$; 3) $0{,}64 \cdot 10^5$; 4) $0{,}9 \cdot 10^{-3}$.

**319.** Виконайте дії і запишіть результат у стандартному вигляді:
1) $3 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-5}$; 2) $5{,}6 \cdot 10^7 + 7{,}5 \cdot 10^7$;
3) $8 \cdot 10^9 - 4 \cdot 10^9$; 4) $2{,}8 \cdot 10^{-5} - 2{,}5 \cdot 10^{-5}$;
5) $(3 \cdot 10^4) \cdot (2{,}4 \cdot 10^6)$; 6) $(4{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (4 \cdot 10^5)$;
7) $(6{,}4 \cdot 10^8) : (1{,}6 \cdot 10^{-3})$; 8) $(2 \cdot 10^9) : (8 \cdot 10^4)$.

**320.** Виконайте дії і запишіть результат у стандартному вигляді:
1) $4 \cdot 10^{-7} + 2{,}5 \cdot 10^{-7}$; 2) $7{,}1 \cdot 10^5 + 4{,}5 \cdot 10^5$;
3) $5{,}8 \cdot 10^8 - 5{,}5 \cdot 10^8$; 4) $(5 \cdot 10^{-4}) \cdot (1{,}4 \cdot 10^7)$;
5) $(4{,}2 \cdot 10^3) \cdot (6 \cdot 10^5)$; 6) $(3{,}5 \cdot 10^4) : (1{,}4 \cdot 10^{-4})$.

**321.** За рік дуб виділив $3{,}5 \cdot 10^4$ л кисню, а клен — $2{,}1 \cdot 10^4$ л. У скільки разів більше кисню виділив дуб, ніж клен? Результат округліть до десятих.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3

**322.** Подайте:
1) $5{,}2 \cdot 10^{-5}$ м у сантиметрах; 2) $6{,}4 \cdot 10^{2}$ мм у метрах;
3) $2{,}8 \cdot 10^{-1}$ т у кілограмах; 4) $1{,}9 \cdot 10^{15}$ г у тоннах.

**323.** Подайте:
1) $7{,}3 \cdot 10^{-6}$ м у міліметрах; 2) $1{,}1 \cdot 10^{2}$ м у кілометрах;
3) $9{,}3 \cdot 10^{2}$ кг у грамах; 4) $8{,}6 \cdot 10^{3}$ г у центнерах.

**324.** Відомо, що перша космічна швидкість для Землі дорівнює $7{,}91 \cdot 10^{3}$ м/с, друга — $1{,}12 \cdot 10^{4}$ м/с, третя — $1{,}67 \cdot 10^{4}$ м/с. Виразіть ці швидкості у кілометрах за секунду і запишіть одержані результати числами у стандартному вигляді.

**325.** Обчисліть, записавши компоненти дій у стандартному вигляді:
1) $64\,000\,000 \cdot 250\,000\,000\,000$;
2) $0{,}000008 \cdot 52\,000\,000\,000$;
3) $300\,000 : 0{,}000002$;
4) $0{,}00000045 : 0{,}0000000015$.

**326.** Обчисліть, записавши компоненти дій у стандартному вигляді:
1) $480\,000\,000 \cdot 0{,}0000045$;
2) $0{,}0000064 : 80\,000\,000$.

**327.** Виконайте дії та запишіть результат у стандартному вигляді:
1) $5{,}1 \cdot 10^{8} + 1{,}4 \cdot 10^{9}$; 2) $9{,}8 \cdot 10^{-8} + 3{,}6 \cdot 10^{-9}$;
3) $8{,}3 \cdot 10^{7} - 5{,}3 \cdot 10^{6}$; 4) $7{,}2 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-6}$.

**328.** Виконайте дії та запишіть результат у стандартному вигляді:
1) $3{,}6 \cdot 10^{9} + 4{,}8 \cdot 10^{8}$; 2) $2{,}8 \cdot 10^{-3} - 8{,}7 \cdot 10^{-4}$.

**329.** Порівняйте числа:
1) $9{,}4 \cdot 10^{15}$ і $1{,}04 \cdot 10^{16}$; 2) $1{,}2 \cdot 10^{-12}$ і $1{,}9 \cdot 10^{-11}$.

**330.** Порівняйте числа:
1) $1{,}85 \cdot 10^{9}$ і $1{,}89 \cdot 10^{8}$; 2) $5{,}6 \cdot 10^{-8}$ і $8{,}5 \cdot 10^{-9}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**331.** У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів.

| Елемент | Маса атома, г |
|---|---|
| Алюміній | $4{,}48 \cdot 10^{-23}$ |
| Барій | $2{,}28 \cdot 10^{-22}$ |
| Бор | $1{,}79 \cdot 10^{-23}$ |
| Гелій | $6{,}64 \cdot 10^{-24}$ |
| Плюмбум | $3{,}44 \cdot 10^{-22}$ |
| Ферум | $9{,}28 \cdot 10^{-23}$ |

1) Який з даних елементів має найбільшу масу, а який — найменшу?
2) На скільки грамів маса атома Бору менша від маси атома Барію?
3) У скільки разів маса атома Алюмінію більша за масу атома Гелію? Результат округліть до одиниць.
4) На скільки порядків маса атома Гелію менша від маси атома Плюмбуму?

**332.** У таблиці наведено маси планет Сонячної системи.

| Планета | Маса, кг |
|---|---|
| Меркурій | $3{,}31 \cdot 10^{23}$ |
| Венера | $4{,}87 \cdot 10^{24}$ |
| Земля | $5{,}98 \cdot 10^{24}$ |
| Марс | $6{,}42 \cdot 10^{23}$ |
| Юпітер | $1{,}90 \cdot 10^{27}$ |
| Сатурн | $5{,}68 \cdot 10^{26}$ |
| Уран | $8{,}68 \cdot 10^{25}$ |
| Нептун | $1{,}02 \cdot 10^{26}$ |

1) Яка планета має найбільшу масу, а яка — найменшу?
2) На скільки тонн маса Землі більша за масу Венери?
3) У скільки разів та на скільки порядків маса Землі менша від маси Юпітера?

**333.** Довжина срібного бруска дорівнює 20 см, ширина — 5 см, а висота — 1 см. Знайдіть масу бруска, якщо маса 1 $м^3$ срібла дорівнює $1{,}05 \cdot 10^4$ кг.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**334.** Полярна зірка розташована на відстані 433 світлових років від Сонця. Виразіть цю відстань у кілометрах, уважаючи, що 1 світловий рік дорівнює $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км.

**335.** Площа Чорного моря $4{,}22 \cdot 10^5$ км$^2$, Азовського — $3{,}9 \cdot 10^4$ км$^2$. У скільки разів площа Чорного моря більша за площу Азовського? Результат округліть до одиниць.



**Інтерактивне завдання 10**
**Стандартний вигляд числа**



## *Вправи для повторення*



**336.** Функцію задано формулою $y = -2x + 5$.

1) Знайдіть значення функції, які відповідають значенням аргументу: 0; 3.
2) Знайдіть значення аргументу, яким відповідають значення функції: $-3$; 1.
3) Побудуйте графік функції.
4) Використовуючи графік, укажіть нуль функції та координати точки перетину графіка з віссю ординат.

**337.** Довжина кімнати 5 м, ширина — 4 м, висота — $x$ м, а об'єм — $V$ м$^3$. Задайте формулою об'єм $V$ кімнати як функцію від висоти $x$. Знайдіть значення функції, якщо $x = 3$; $x = 2{,}8$.

**338.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x - 1)(4x + 1) = 15x^2 + 3$; 2) $\dfrac{x-3}{3x} - \dfrac{x}{3x-1} = 0$.

**339.** Масажний салон працює 8 год на день і щоденно обслуговує 50 клієнтів, по 50 хв кожного. Скільки щонайменше масажистів може працювати в цьому салоні?

## *Поміркуйте*



**340.** Першого тижня ціна квитка на художню виставку становила 200 грн. Другого тижня, після зниження ціни на квитки, кількість відвідувачів збільшилася на 50 %, а виручка з проданих квитків — на 20 %. Скільки гривень став коштувати квиток на виставку другого тижня?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 12 ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$

Розглянемо два приклади залежностей між величинами.

**Приклад 1.** Нехай потяг, рухаючись зі сталою швидкістю, проїхав 180 км. Якщо він рухався $t$ год, то швидкість потяга $v$ км/год можна обчислити за формулою

$$v = \frac{180}{t}. \qquad (1)$$

Дана формула задає залежність швидкості від часу руху за сталого шляху. Ця залежність є *оберненою пропорційністю*, бо якщо збільшимо (зменшимо) час $t$ у кілька разів, то у стільки ж разів зменшиться (збільшиться) швидкість $v$.

**Приклад 2.** Нехай у порожній басейн почала надходити вода. Якщо басейн розрахований на 120 м$^3$ води, а в нього щогодини надходить $x$ м$^3$ води, то час $t$ год, за який буде наповнено басейн, можна обчислити за формулою

$$t = \frac{120}{x}. \qquad (2)$$

Залежність змінної $t$ від змінної $x$ також є оберненою пропорційністю. Тому кожну з функцій, які задають формулами (1) і (2), називають *оберненою пропорційністю*.

В обох прикладах математичною моделлю реальних процесів є функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.



*Означення.* **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $x$ — незалежна змінна, $k \neq 0$ — деяке число, називають *оберненою пропорційністю*.**

Область визначення цієї функції утворюють усі числа, крім 0.

Побудуємо графік функції $y = \frac{4}{x}$. Для цього складемо таблицю кількох значень $x$ і відповідних значень $y$:

| $x$ | −8 | −4 | −2 | −1 | −0,5 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −0,5 | −1 | −2 | −4 | −8 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 |



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подані в таблиці (рис. 4).

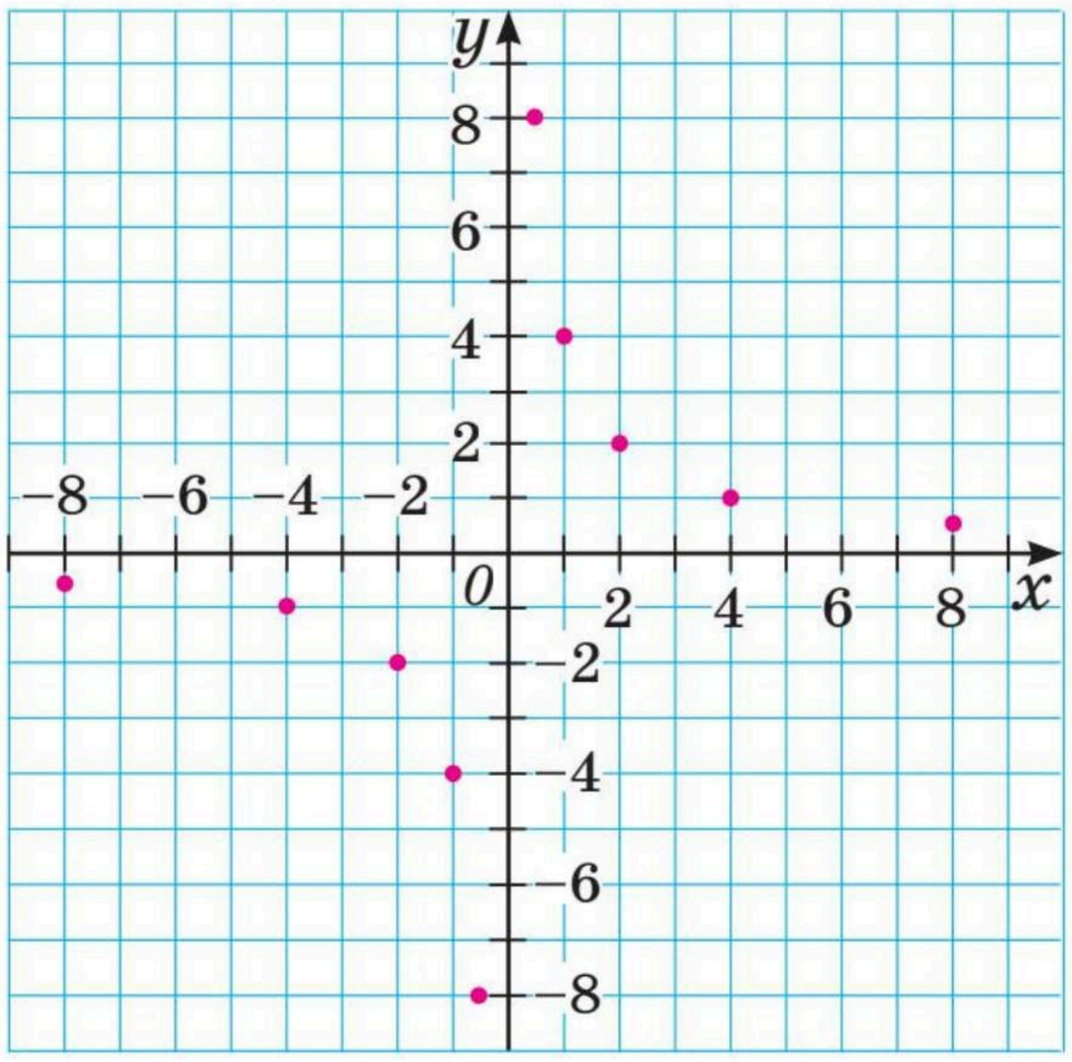



**Рис. 4**

Якби для кожного значення $x$, крім $x = 0$, обчислили відповідне значення $y$ і позначили точки з одержаними координатами на координатній площині, то мали б лінію, яку називають *гіперболою* (рис. 5). Вона складається із двох віток, розташованих у першій і третій координатних чвертях. Кожна з віток осей координат не перетинає.

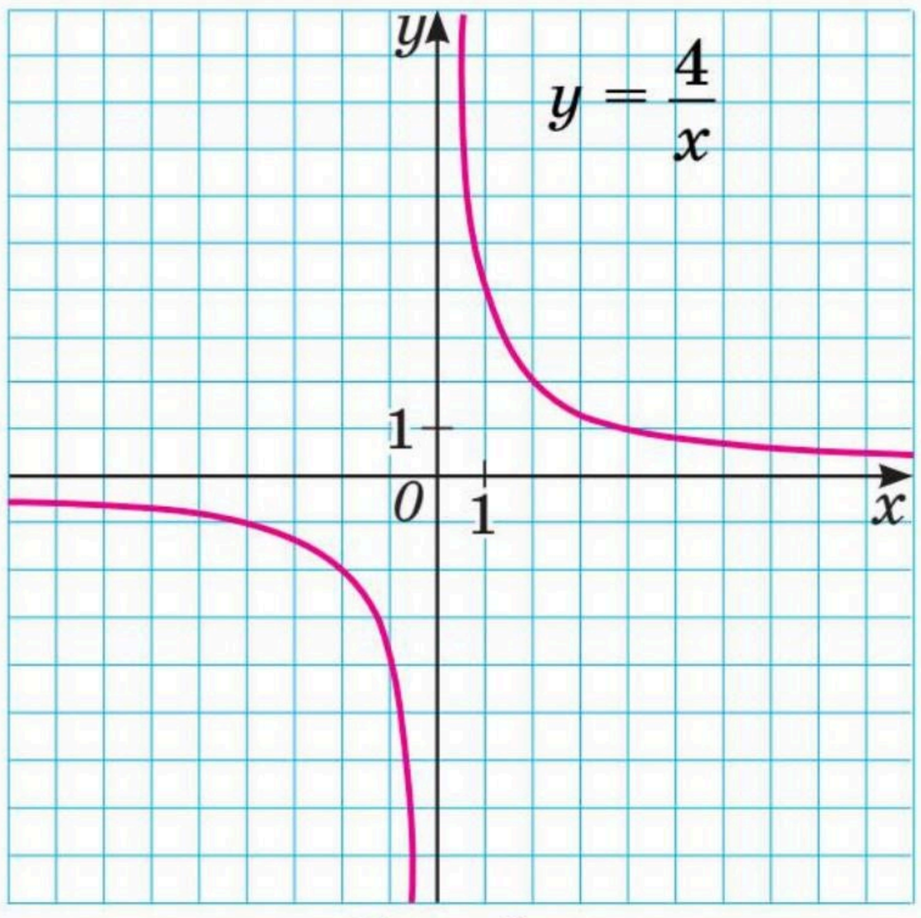



**Рис. 5**

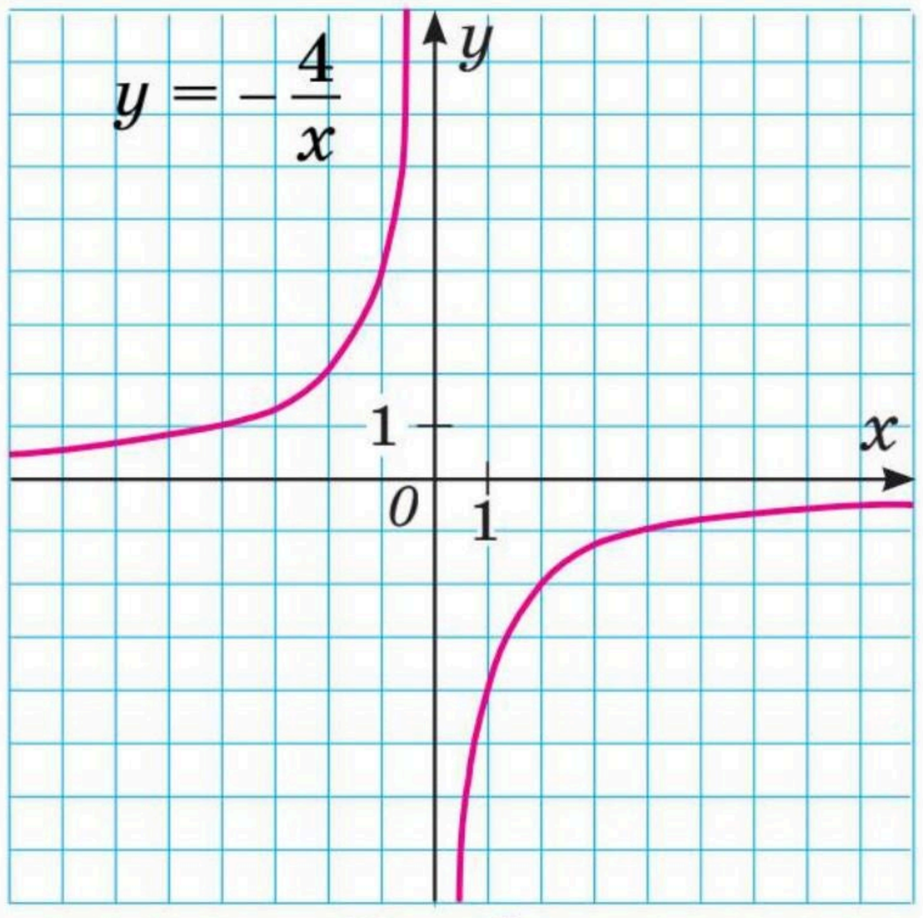



**Рис. 6**

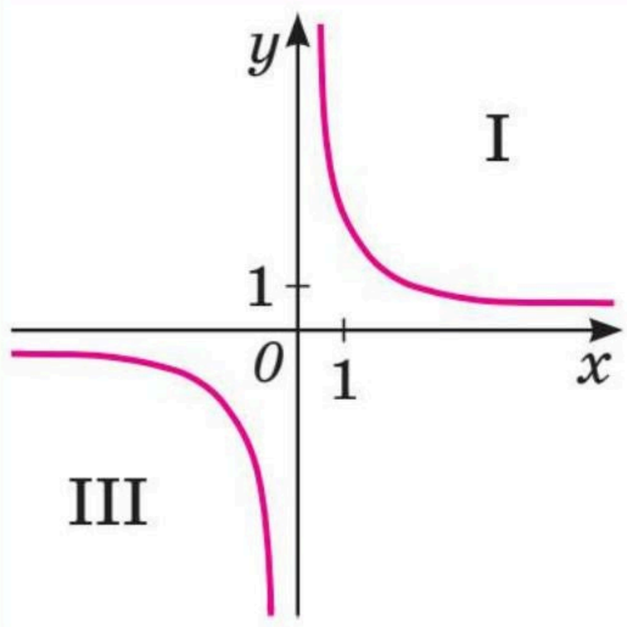
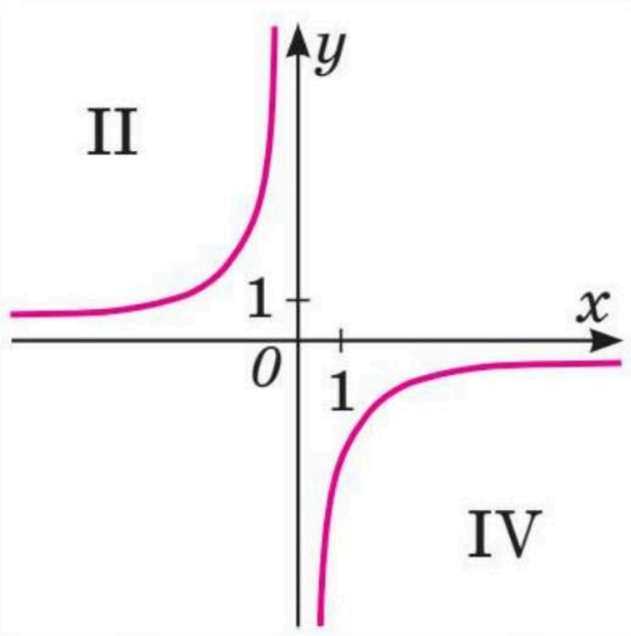
Узагалі, графік будь-якої оберненої пропорційності називають ***гіперболою***.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

На рисунку 6 зображено гіперболу, яка є графіком функції $y = -\frac{4}{x}$. Ця гіпербола складається із двох віток, розташованих у другій і четвертій координатних чвертях.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$ (оберненої пропорційності).

| | $k > 0$ | $k < 0$ |
|---|---|---|
| Графік — гіпербола |   |   |
| Область визначення | Усі числа, крім 0 | |
| Область значень | Усі числа, крім 0 | |
| Додатні значення | $y > 0$, якщо $x > 0$ | $y > 0$, якщо $x < 0$ |
| Від'ємні значення | $y < 0$, якщо $x < 0$ | $y < 0$, якщо $x > 0$ |

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розв'язати графічно рівняння $\frac{6}{x} = x - 1$.

● Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ та $y = x - 1$ (рис. 7). Ці графіки перетинаються в точках з абсцисами $x = -2$ та $x = 3$.

Перевіркою встановлюємо, що значення $x = -2$ та $x = 3$ є коренями рівняння.

Відповідь. $-2$; 3. ●

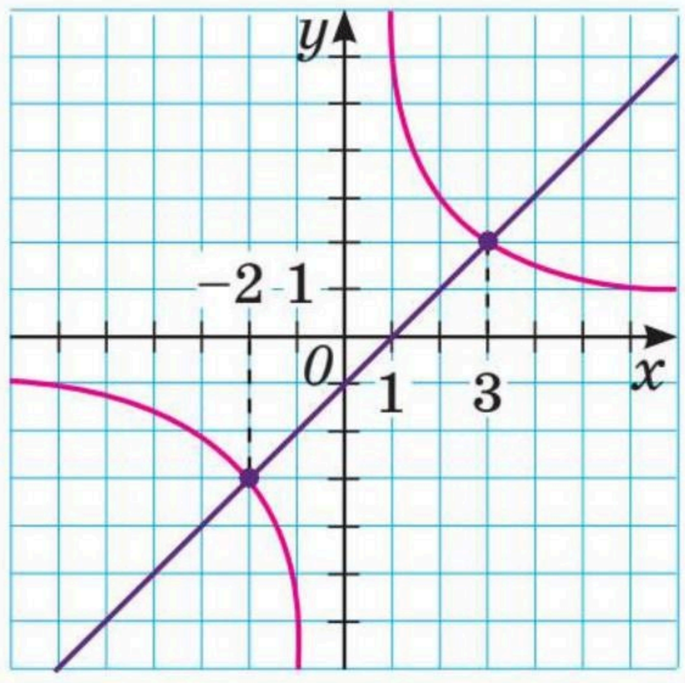



**Рис. 7**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

1. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?
2. Як називають графік оберненої пропорційності?
3. Які властивості має обернена пропорційність?

«Усно

**341.** Які з наведених функцій є оберненими пропорційностями?

1) $y = 16x$; 2) $y = \frac{16}{x}$; 3) $y = \frac{x}{16}$; 4) $y = -\frac{16}{x}$.

**342.** Укажіть область визначення функції: 1) $y = \frac{3}{x}$; 2) $y = -\frac{10}{x}$.

У яких чвертях розташований графік кожної функції?

**343.** На рисунку 8 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$. Користуючись графіком, укажіть:

1) значення функції, якщо $x = -2$; $x = 1$; $x = 2$;
2) значення аргументу, якщо $y = -2$; $y = 1$; $y = 2$;
3) чверті, в яких розташований графік функції;
4) значення $k$.

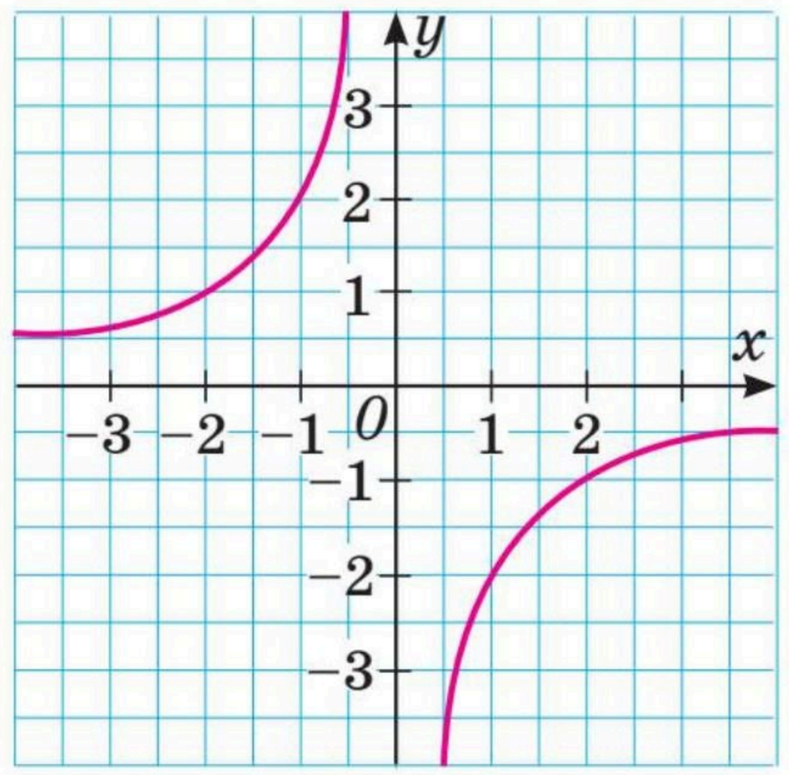


Рис. 8

«1 2

**344.** Функцію задано формулою $y = -\frac{15}{x}$.

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = 3$; $x = 6$; $x = -5$.
2) Для яких значень аргументу значення функції дорівнює $-5$; $-1$; $15$?

**345.** Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$.

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = 2$; $x = -4$.
2) Для яких значень $x$ значення функції дорівнює $4$; $-1$?

**346.** Функцію задано формулою $y = \frac{10}{x}$. Заповніть таблицю:

| $x$ | 0,01 | 0,1 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | |



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**347.** Чи належить графіку функції $y = -\frac{8}{x}$ точка:

1) $A(-8; 1)$; 2) $B(-4; -2)$; 3) $C(-0{,}5; 8)$; 4) $D(-2; 4)$?

**348.** Чи належить графіку функції $y = \frac{9}{x}$ точка:

1) $K(-1; 9)$; 2) $L(3; 3)$; 3) $M(-2; 4{,}5)$; 4) $N(9; 1)$?

**349.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = -\frac{4}{x}$, де $-4 \le x \le 4$ $(x \ne 0)$.

**350.** Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, яке відповідає значенням аргументу: $-2$; 3;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює: 3; $-2$;
3) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень.

**351.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = -\frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{3}{x}$, де $-3 \le x \le 3$ $(x \ne 0)$.

**352.** 90 кг борошна розфасували в $n$ пакетів, по $x$ кг у кожному. Задайте формулою залежність змінної $n$ від змінної $x$. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Знайдіть $n$, якщо $x = 2$; $x = 6$.

**353.** Автомобіль за $t$ год проїхав 240 км, рухаючись зі швидкістю $v$ км/год. Задайте формулою змінну $t$ як функцію від змінної $v$. Знайдіть $t$, якщо $v = 80$; $v = 75$.



**354.** Запишіть формулу оберненої пропорційності, графік якої проходить через точку: 1) $A(-3; 12)$; 2) $B(8; 4)$.

**355.** Запишіть формулу оберненої пропорційності, графік якої проходить через точку: 1) $M(2; 8)$; 2) $K(-2; -1)$.

**356.** Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{a}{x}$. Знайдіть значення $a$, якщо для $x = 0{,}5$ значення функції дорівнює 2.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**357.** Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = -\frac{8}{x}$ та $y = -0{,}5x$; 2) $y = \frac{12}{x}$ та $y = -3x$.

**358.** Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = \frac{3}{x}$ та $y = 3x$; 2) $y = -\frac{4}{x}$ та $y = 2$.



**359.** Побудуйте графік функції $y = \frac{5}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, для яких значення функції:

1) більші за 1; 2) менші від 1.

**360.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x - 1 = \frac{2}{x}$; 2) $-\frac{5}{x} = 2x - 7$.

**361.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{3}{x} = x + 2$; 2) $2x - 5 = -\frac{2}{x}$.

**362.** Із шматка пластиліну, об'єм якого 18 см$^3$, потрібно виготовити модель прямокутного паралелепіпеда. Нехай площа основи цього паралелепіпеда має дорівнювати $S$ см$^2$, а висота — $h$ см. Задайте формулою залежність площі $S$ від висоти $h$. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Знайдіть $S$, якщо $h = 4{,}5$.

**363.** Автоцистерну, місткість якої 12 м$^3$, потрібно заповнити бензином. Нехай на це потрібно $t$ хв за умови, що за кожну хвилину в цистерну надходитиме $a$ м$^3$ бензину. Задайте формулою залежність часу $t$ від об'єму $a$. Знайдіть час наповнення цистерни, якщо $a = 1{,}6$.



**Інтерактивне завдання 11**

**Функція $y = \frac{k}{x}$**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**364.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{3x+9}{x^2+3x}$; 2) $y=\dfrac{4}{|x|}$; 3) $y=\begin{cases} -\dfrac{3}{x}, \text{ якщо } x\le -1; \\ 3, \text{ якщо } -1<x<1; \\ \dfrac{3}{x}, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$

**365.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{4x-8}{x^2-2x}$; 2) $y=\begin{cases} -\dfrac{2}{|x|}, \text{ якщо } x<-2; \\ x+1, \text{ якщо } x\ge -2. \end{cases}$

**366.** Використовуючи графіки функцій, установіть, скільки коренів має рівняння $-\dfrac{3}{|x|}=x-4$.

**367.** Розв'яжіть графічно рівняння $\dfrac{2}{|x|}=x+1$.

## *Вправи для повторення*

**368.** Спростіть вираз $\left(m+1+\dfrac{1}{m-1}\right):\left(m-\dfrac{m^2}{m-1}\right)$.

**369.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x-3y=8; \\ 3x+y=1. \end{cases}$

**370.** З банківської картки зняли 20 % усіх грошей, а згодом — 30 % залишку. Після цього на рахунку залишилося 2800 грн. Скільки гривень було на картці спочатку?

**371.** Відстань між морськими портами $A$ і $B$ дорівнює 150 км. Від порту $A$ до порту $B$ вийшов теплохід і рухається зі швидкістю 25 км/год. Через 30 хв від порту $B$ назустріч йому вийшов другий теплохід, швидкість якого 30 км/год. Скільки кілометрів пройде кожний теплохід до моменту їх зустрічі?

## *Поміркуйте*



**372.** На тарілці лежать яблука. Маса двох найлегших яблук і маса трьох найважчих становлять відповідно 22 % і 48 % від загальної маси всіх яблук. Скільки яблук на тарілці?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»



## Інтерактивне завдання для самоперевірки 3

## Степінь із цілим показником. Функція $y = \frac{k}{x}$



### Завдання для самоперевірки № 3

*Початковий рівень*

**1.** Яка з наведених рівностей є неправильною?

**А** $5^{-2} = \frac{1}{25}$ **Б** $(-3)^0 = 1$ **В** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ **Г** $0^{-3} = 0$

**2.** Подайте число 0,001 у вигляді степеня з основою 10.

**А** $10^3$ **Б** $10^{-3}$ **В** $10^{-2}$ **Г** $10^{-4}$

**3.** Знайдіть значення виразу $2^4 \cdot 2^{-3} + 2^{-1}$.

**А** 2 **Б** 130 **В** $2\frac{1}{2}$ **Г** $2\frac{1}{4}$

**4.** Подайте у вигляді степеня вираз $b^{-2}b^4b^{-3}$.

**А** $b^9$ **Б** $b^5$ **В** $b^{-5}$ **Г** $b^{-1}$

**5.** Запишіть у стандартному вигляді число 2570.

**А** $25{,}7 \cdot 10^2$ **Б** $2{,}57 \cdot 10^{-3}$ **В** $0{,}257 \cdot 10^4$ **Г** $2{,}57 \cdot 10^3$

**6.** Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції $y = -\frac{8}{x}$ дорівнює $-2$.

**А** $-4$ **Б** 4 **В** 2 **Г** 16

*Середній рівень*

**7.** Доберіть до кожного виразу (1–3) тотожно рівний йому вираз (А–Д).

**1** $(a^{-2} \cdot a^6) : a^2$
**2** $a^{-2} : (a : a^{-3})$
**3** $a^2 : (a^{-1})^4$

**А** $a^6$
**Б** $a^2$
**В** $a^{-2}$
**Г** $a^{-4}$
**Д** $a^{-6}$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**8.** Знайдіть значення виразу $3^{-2}+12:\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

**А** $48\frac{1}{9}$ **Б** 12 **В** $3\frac{1}{3}$ **Г** $3\frac{1}{9}$

**9.** Спростіть вираз $4xy^{-4}\cdot 1{,}5x^{-3}y^{-2}$.

**А** $6x^{-3}y^{8}$ **Б** $6x^{4}y^{-2}$ **В** $6x^{-2}y^{-6}$ **Г** $6x^{-2}y^{-2}$

**10.** Яке з наведених тверджень щодо функції $y=\frac{10}{x}$ є неправильним?

**А** Якщо $x=-5$, то значення функції дорівнює $-2$.

**Б** Графік функції проходить через точку $(2;\,5)$.

**В** Значення 0 дана функція не набуває.

**Г** Графік функції розташований у II і IV координатних чвертях.

## *Достатній рівень*

**11.** Знайдіть значення виразу:

1) $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}+0{,}2^{-2}$; 2) $3^{-5}:(3^{-6}:9^{-2})$.

**12.** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2b^{-1}}{2c^{-2}}\cdot\frac{8a^{-1}c}{b^{-4}}$; 2) $(a^{-2}-b^{-2}):\frac{a-b}{ab}$.

**13.** Обчисліть і запишіть результат числом у стандартному вигляді:

1) $(2{,}4\cdot 10^{4})\cdot(7{,}5\cdot 10^{-9})$; 2) $5{,}1\cdot 10^{-7}-9\cdot 10^{-8}$.

**14.** Побудуйте графіки функцій $y=\frac{2}{x}$ та $y=-x+3$ і знайдіть координати точок їх перетину.

## *Високий рівень*

**15.** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}$; 2) $\frac{27^{-3}\cdot 16^{-6}}{8^{-9}\cdot 81^{-2}}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**16.** Спростіть вираз $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}y^{-2}}\cdot\left(x^4-y^4\right)^{-1}$.

**17.** Доведіть, що вираз $(a^{-5}-a^5)^2-a^{10}(1+a^{-20})$ набуває лише одного значення.

**18.** Розв'яжіть графічно рівняння $-\dfrac{2}{|x|}=-2x+3$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Завдання для повторення § 1

**373.** Для яких значень змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{6}{x-3}$; 2) $\frac{6a-1}{2a+1}$; 3) $\frac{b+4}{b^2-4b}$; 4) $\frac{11x}{x^2-16}$?

**374.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{8xy^2}{4x^2y}$; 2) $\frac{72ab^3}{48a^3}$; 3) $\frac{128mn^4}{32m^2n^5}$; 4) $\frac{75x^2y^4z}{175x^4z^3}$.

**375.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3c-4d}{3c^2-4cd}$; 2) $\frac{a^2-9}{3a+9}$; 3) $\frac{c^2-16}{(c+4)^2}$;

4) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-9}$; 5) $\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}$; 6) $\frac{5x^3y-10x^2y^2}{x^2-4xy+4y^2}$.

**376.** Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2-9}{x+3}+2$.

**377.** Спростіть вираз:

1) $\frac{4a+1}{2a}-\frac{1-2a}{2a}$; 2) $\frac{4x}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}$; 3) $\frac{y^2-9}{y-2}-\frac{5}{2-y}$.

**378.** Знайдіть значення виразу $\frac{6a^3-4}{5a}-\frac{a^3-4}{5a}$, якщо $a=14$; $a=-8$.

**379.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{b}{a}+\frac{2}{3a}$; 2) $\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}$; 3) $\frac{1}{2ab}-\frac{3-b}{6b^2}$.

**380.** Спростіть вираз:

1) $x-y+\frac{2x-y}{5}$; 2) $x-\frac{2x^2}{2x+y}$;

3) $\frac{a+b}{b}-\frac{2a+b}{a+b}$; 4) $\frac{x-b}{x^2-xy}+\frac{y-b}{y^2-xy}$;

5) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-2mn+n^2}$; 6) $\frac{4}{a-4}-\frac{1}{a+4}+\frac{a-7}{a^2-16}$.

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**381.** Виконайте множення:

1) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{5a}$; 2) $\frac{12a^3}{25x^3}\cdot\frac{5x^2}{18a^2}$; 3) $\frac{a^3b^2}{12c^4}\cdot\frac{18c^5}{8b^4}\cdot\frac{4b}{a^4}$;

4) $\frac{xy-x^2}{2x^3}\cdot\frac{2x^2}{x^2-y^2}$; 5) $\frac{x^3+y^3}{xy-y^2}\cdot\frac{xy-x^2}{x^2-xy+y^2}$.

**382.** Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3$; 2) $\left(-\frac{x^3}{3y^2}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{m^2n^4}{2k^3}\right)^5$.

**383.** Виконайте ділення:

1) $\frac{5x^3}{4a^3}:\frac{15x^2}{8a^4}$; 2) $\frac{x-y}{x+y}:\frac{2x-2y}{x^2+xy}$; 3) $\frac{4-b^2}{1-b}:\frac{2b+b^2}{1-b^2}$.

**384.** Знайдіть значення виразу $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right):\frac{x-y}{10}$, якщо $x=0{,}25$; $y=20$.

**385.** Спростіть вираз:

1) $\left(k+\frac{1}{k-2}\right)\cdot\left(\frac{k}{2k-2}-\frac{1}{k-1}\right)$; 2) $\left(\frac{2a}{a^2-4}-\frac{1}{a-2}\right):\frac{a}{a+2}$;

3) $\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right):\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right)$.

**386.** Доведіть тотожність:

1) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right)\cdot\frac{x+y}{x-y}=x-y$;

2) $\left(\frac{1}{m-2n}+\frac{1}{m+2n}\right):\left(\frac{m^2+4n^2}{m^2-4n^2}+1\right)=\frac{1}{m}$.

**387.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{xy-y^2}{x^4-y^4}:\left(1-\frac{x}{x+y}\right)$ дорівнює нулю.

**388.** Подайте вираз $\frac{1}{1+\frac{2x}{x+1}}$ у вигляді раціонального дробу.

**389.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{x-2}=0$; 2) $\frac{x^3+3x}{x+3}=0$; 3) $\frac{2x+4}{x^2-4}=0$; 4) $\frac{3x}{x-1}=2$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**390.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x+3}{x-1}$;

2) $\frac{x-2}{2x+1}+\frac{x-4}{3x-2}=0$;

3) $\frac{x+7}{x}-\frac{x+5}{x+4}=\frac{2}{x^2+4x}$;

4) $\frac{z-1}{z+5}+\frac{4-z}{5-z}=\frac{1-2z^2}{25-z^2}$.

**391.** Знайдіть усі значення $a$, для яких рівняння $\frac{x-a}{(x-2)(x-2a)}=0$ не має коренів.

**392.** Знайдіть значення виразу:

1) $81\cdot 3^{-3}-(-1{,}5)^0$;

2) $0{,}1^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$;

3) $(-2{,}5)^{-1}:1{,}5^{-2}$;

4) $3^{-4}\cdot 3^3+2^{-4}\cdot 2^5$;

5) $(4^{-4})^{-4}:2^{30}$;

6) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-4}\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^{-4}-\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

**393.** Подайте у вигляді степеня з основою 2 вираз:

1) $2^{-4}\cdot 4^4$;

2) $16:(8^{-2}:2^{-8})$;

3) $\frac{1}{32}\cdot 2^{-8}\cdot 16^3$.

**394.** Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

1) $\frac{ab^{-2}}{c}$;

2) $\frac{(a-b)^{-1}}{a^{-1}(a+b)}$;

3) $\left(\frac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-1}$.

**395.** Спростіть вираз:

1) $(a^{-2})^4:a^{-10}$;

2) $4x^{-2}y\cdot 5x^6y^{-7}$;

3) $\left(a^{-1}c^2\right)^{-3}:\frac{ac}{2}$;

4) $m^{-1}:(m^2-3m)^{-1}$;

5) $\left(\frac{1}{x^{-1}}-\frac{1}{y^{-1}}\right)(x-y)^{-1}$.

**396.** Знайдіть значення виразу $\frac{25a^{-2}b^5}{(5a^{-1}b^2)^3}$, якщо $a=15$; $b=0{,}2$.

**397.** Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 5 640 000;

2) 0,0533;

3) 0,0000012.

**398.** Виразіть час у секундах і запишіть одержане число у стандартному вигляді: 1 год; 1 доба; 30 діб.

**399.** Побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{3}{x}$;

2) $y=\frac{3x-3}{x^2-x}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**400.** Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(1; 8)$. Чи проходить цей графік через точку $B(0{,}5; 16)$? $C(-0{,}4; -20)$?

**401.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = x$;

2) $\frac{2}{|x|} = 0{,}5x$.



## Інтерактивне завдання для самоперевірки 4

**Підсумкове завдання за I семестр**

## Завдання для самоперевірки № 4 (за I семестр)

### *Початковий рівень*

**1.** Укажіть усі значення змінної, для яких не має змісту вираз $\frac{a}{2} + \frac{a+1}{a-2}$.

**А** $a = 0$ **Б** $a = -1$ **В** $a = 2$ **Г** $a = 0; a = 2$

**2.** Знайдіть значення виразу $\frac{10c^4}{5c^2}$, якщо $c = -5$.

**А** 50 **Б** $-50$ **В** 25 **Г** $\frac{2}{25}$

**3.** Знайдіть різницю дробів: $\frac{4m-3}{n} - \frac{2m-1}{n}$.

**А** $\frac{2m-4}{n}$ **Б** $\frac{6m-4}{n}$ **В** $\frac{6m-2}{n}$ **Г** $\frac{2m-2}{n}$

**4.** Виконайте множення: $\frac{9x}{2y} \cdot \frac{y^3}{6x^2}$.

**А** $\frac{27x^3}{y^4}$ **Б** $\frac{3y^2}{4x}$ **В** $\frac{3y^2}{2x}$ **Г** $27x^3y^4$

**5.** Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-18}{x^2-9} = 0$.

**А** $-3; 3$ **Б** 18

**В** 9 **Г** Коренів немає



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**6.** Обчисліть: $(7^{-2})^{-3} : 7^8 + 14^0$.

**А** 50 **Б** $1\frac{2}{7}$ **В** $1\frac{1}{49}$ **Г** $\frac{1}{49}$

## *Середній рівень*

**7.** Доберіть до кожного виразу (1–3) тотожно рівний йому вираз (А–Д).

**1** $\frac{2}{b} + \frac{b-2a}{ab}$

**2** $\frac{3a^3}{2b} : \frac{a^4}{6b}$

**3** $a \cdot \left(\frac{a}{9b}\right)^{-1}$

**А** $\frac{9}{a}$

**Б** $\frac{9b}{a}$

**В** $\frac{1}{a}$

**Г** $\frac{a^7}{4b^2}$

**Д** $9b$

**8.** Скоротіть дріб $\frac{m^2-4m}{m^2-16}$.

**А** $\frac{m}{4}$ **Б** $\frac{m}{m+4}$ **В** $\frac{m}{m-4}$ **Г** $\frac{m-4}{m+4}$

**9.** Знайдіть значення виразу $y^{-8} : (y^3)^{-2}$, якщо $y = -2$.

**А** $-4$ **Б** 4 **В** $\frac{1}{4}$ **Г** $-\frac{1}{4}$

**10.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-2x}{x+2} = 0$.

**А** 0 **Б** 2 **В** 0; 2 **Г** $-2$

## *Достатній рівень*

**11.** Спростіть вираз:

1) $(0{,}2a^{-2}b^3)^{-2} : (2a^{-1}b^3)^{-2}$;

2) $\frac{b+3}{b^2+9} \cdot \left(\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-3}{b+3}\right)$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**12.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-5}{x-1}=\frac{x+1}{x-7}$;

2) $\frac{3}{y-2}+\frac{2y+4}{y^2-4}=0$.

**13.** Доведіть тотожність $\left(\frac{2}{m^2-n^2}-\frac{1}{m^2+mn}\right):\frac{1}{m^2-mn}=1$.

**14.** Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{3}{x}=x+2$.

### *Високий рівень*

**15.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\left(\frac{x-z}{x^2-xy}+\frac{y-z}{y^2-xy}\right):\left(\frac{x+y}{2z}\right)^{-1}$ не залежать від значень $z$.

**16.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{y+3}{y-3}+\frac{3}{9-y^2}=\frac{y-3}{y+3}$;

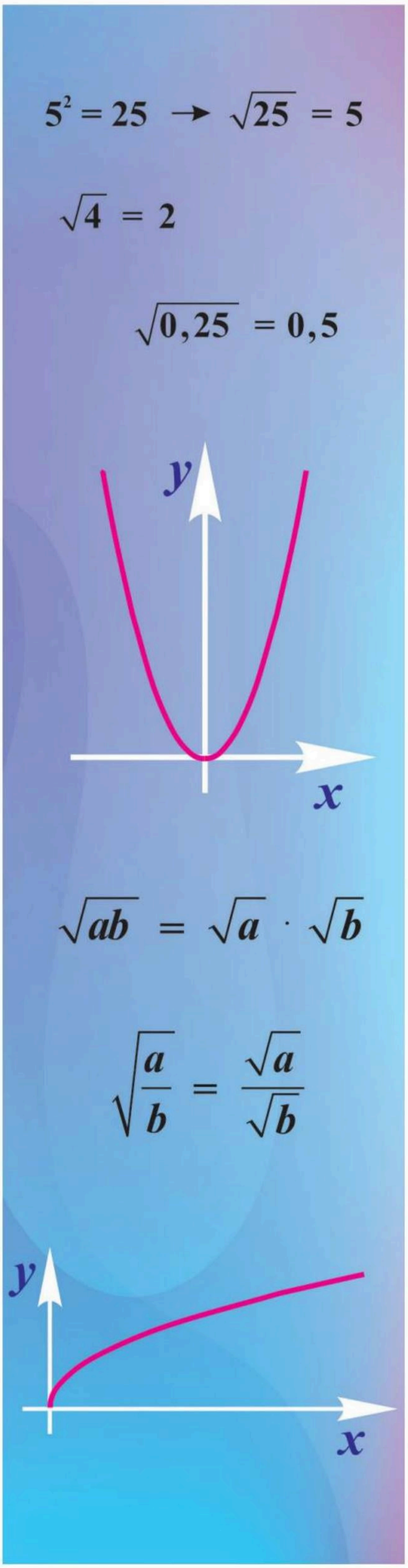
2) $\frac{|2z-1|-7}{z+3}=0$.

**17.** Знайдіть значення виразу $\left(\frac{a^{-4}b^2}{4}\right)^{-3}:\left(\frac{a^{-9}b^6}{8}\right)^{-2}$, якщо $a=1{,}2$; $b=-1{,}2$.

**18.** Знайдіть усі значення $a$, для яких рівняння $\frac{(x+a)(x-a+2)}{x-2}=0$ має один корінь.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

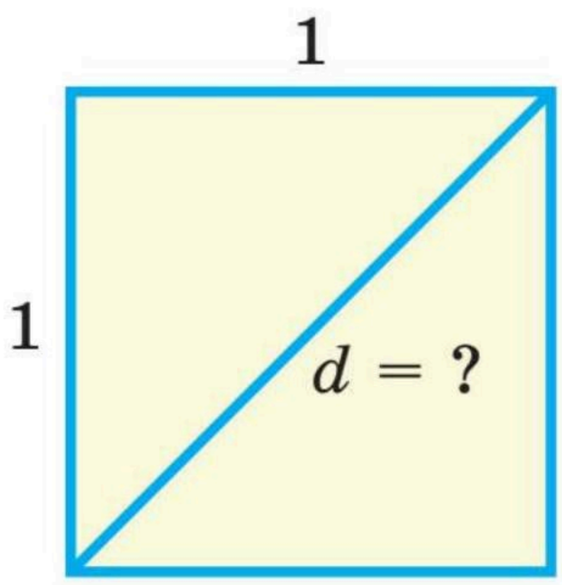



# § 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

У попередніх класах ми розглядали натуральні, цілі та раціональні числа. Виявляється, що для практичних і теоретичних потреб таких чисел замало. Серед них, наприклад, немає числа, яке виражало б довжину діагоналі квадрата зі стороною 1.

У цьому параграфі ви дізнаєтеся:

- що таке квадратний корінь; арифметичний квадратний корінь;
- які властивості має арифметичний квадратний корінь;
- які числа називають ірраціональними; дійсними;
- що таке множина; підмножина;
- про функції $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ та їхні властивості.




© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## 13 ФУНКЦІЯ $y = x^2$

Ви знаєте, що площу квадрата обчислюють за формулою $S = a^2$, де $a$ — сторона квадрата ($a > 0$). Оскільки кожному значенню $a$ відповідає єдине значення площі $S$, то змінна $S$ є функцією від змінної $a$. Якщо незалежну змінну позначити через $x$, а залежну — через $y$, то матимемо функцію $y = x^2$.

Надалі розглядатимемо функцію $y = x^2$, у якій змінна $x$ може набувати будь-яких значень. Щоб побудувати графік цієї функції, складемо таблицю кількох значень $x$ і відповідних значень $y$:

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці (рис. 9). Якби для кожного значення $x$ обчислили відповідне значення $y$ й позначили точки з одержаними координатами на координатній площині, то мали б лінію, яка є графіком функції $y = x^2$ (рис. 10). Цю лінію називають *параболою*.

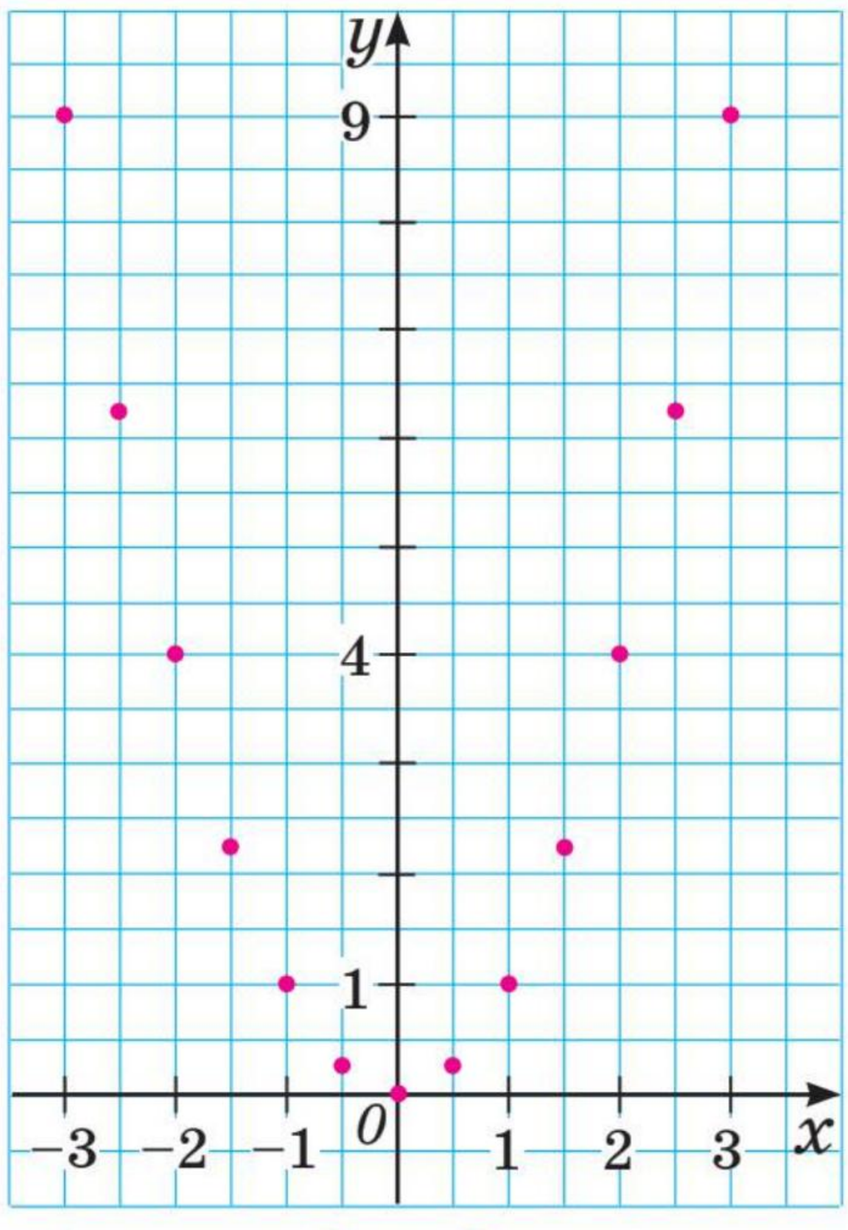



Рис. 9

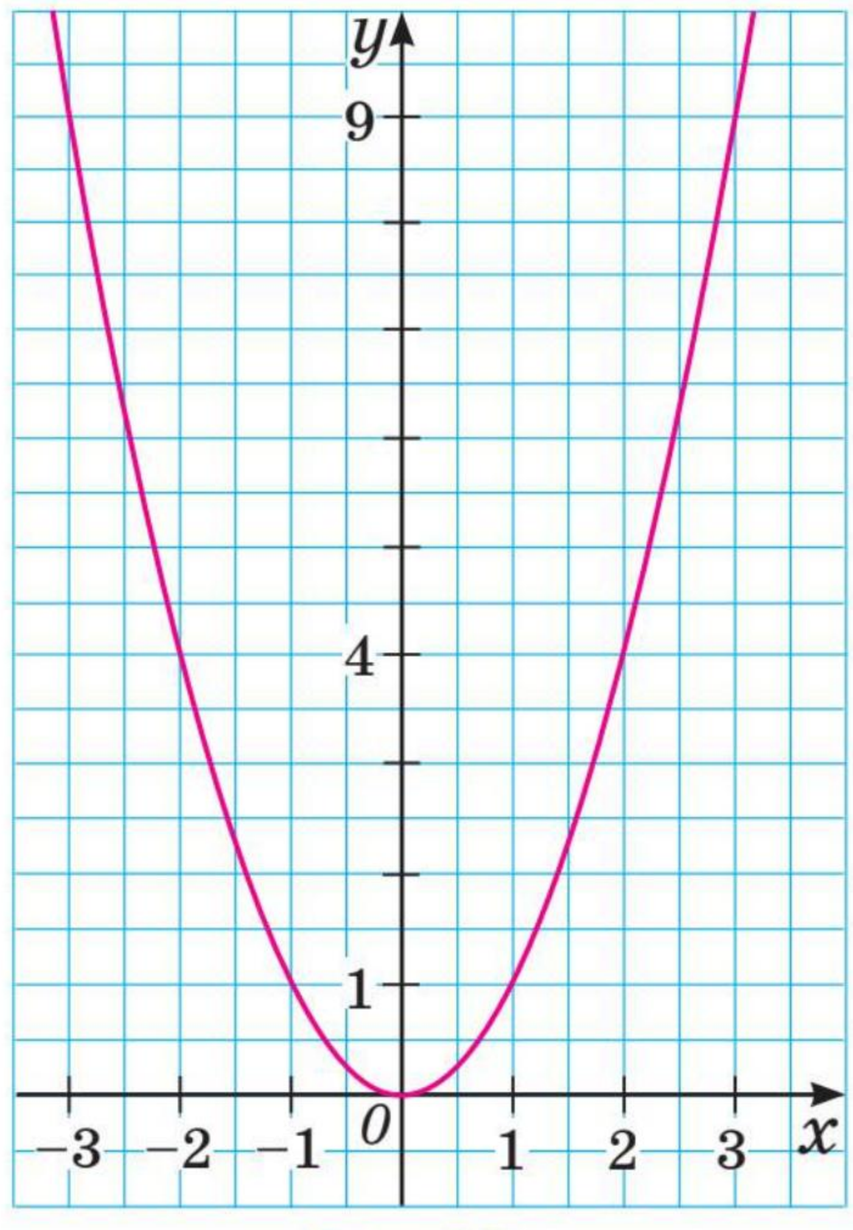



Рис. 10



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Функція $y = x^2$ має такі властивості:

1. *Область визначення функції утворюють усі числа.*
2. *Область значень функції утворюють усі невід'ємні числа.*
3. *Графіком функції є парабола.*
4. *Якщо* $x = 0$, *то* $y = 0$; *якщо* $x \neq 0$, *то* $y > 0$.
5. *Протилежним значенням аргументу відповідає те саме значення функції.* (Наприклад, значенням аргументу $x = -2$ та $x = 2$ відповідає те саме значення функції $y = 4$.)

Із властивості 4 випливає, що графік функції проходить через точку (0; 0). Цю точку називають *вершиною* параболи. Друга частина властивості означає, що всі точки параболи, крім її вершини, розташовані над віссю $x$.

Властивість 5 обумовлює таку особливість графіка функції $y = x^2$: якщо графіку належить точка $(a; b)$, то йому належить і точка $(-a; b)$.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розв'язати графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

● Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x + 2$ (рис. 11). Ці графіки перетинаються в точках з абсцисами $x = -1$ та $x = 2$.

Перевіркою встановлюємо, що значення $x = -1$ та $x = 2$ є коренями рівняння.

Відповідь. $-1$; 2. ●

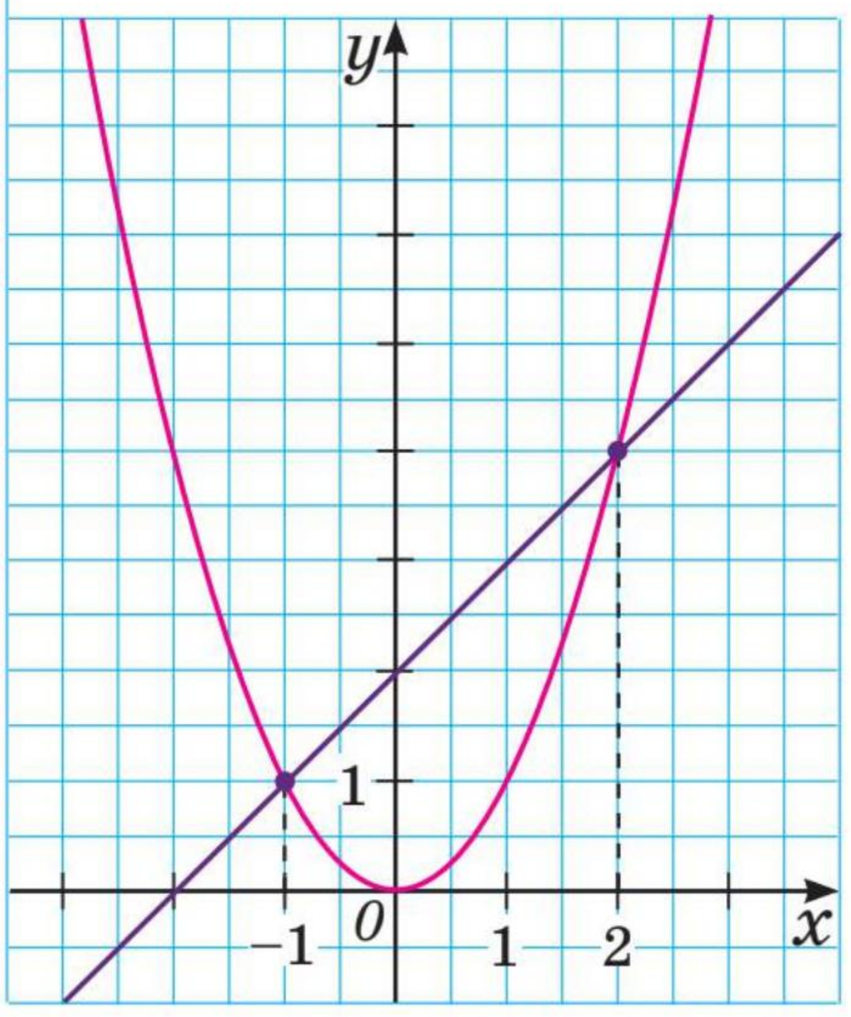



**Рис. 11**

1. Як називають графік функції $y = x^2$?
2. Які властивості має функція $y = x^2$?

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

«Усно

**402.** Які з наведених тверджень щодо функції $y = x^2$ є правильними?

1) Область визначення функції утворюють усі числа.
2) Область значень функції утворюють усі числа.
3) Від'ємних значень функція не набуває.
4) Графіком функції є гіпербола.
5) Графік функції проходить через точку $(-5; 25)$.

«1 2

**403.** Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:

1) значення функції, які відповідають значенням аргументу $-4$; $-1{,}2$; $0{,}1$; $8$;
2) значення аргументу, для яких значення функції дорівнює $36$; $100$; $625$.

**404.** Для функції $y = x^2$ заповніть таблицю:

| $x$ | $-10$ | $-1{,}5$ | | | $15$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $0$ | $49$ | |

**405.** Користуючись графіком функції $y = x^2$ (рис. 10), укажіть два від'ємні та два додатні значення аргументу, для яких значення функції більші за 1.

**406.** Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

1) $A(-15; 225)$; 2) $B(0{,}3; 0{,}9)$; 3) $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{16}{25}\right)$?

**407.** Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

1) $K(14; 186)$; 2) $L(-0{,}8; 0{,}64)$; 3) $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$?

**408.** Побудуйте графік функції $y = x^2$, де:

1) $-3 \le x \le 2$; 2) $x \le 0$.

**409.** Побудуйте графік функції $y = x^2$, де:

1) $-2 \le x \le 3$; 2) $x \ge 0$.

«3

**410.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x - 1$. Скільки коренів має рівняння $x^2 = x - 1$?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**411.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x + 1$. Скільки коренів має рівняння $x^2 = -x + 1$?

**412.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -2x + 3$; 2) $x^2 = -\frac{1}{x}$.

**413.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -x + 2$; 2) $x^2 = \frac{8}{x}$.

**414.** Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = x^2$ та $y = 4x - 4$; 2) $y = x^2$ та $y = 16$.

**415.** Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ та $y = -5x$.

**416.** Знайдіть область значень функції:

1) $y = x^2$, де $0 \le x \le 2$. 2) $y = x^2$, де $-2 \le x \le 2$.

**417.** Знайдіть область значень функції $y = x^2$, де $-1 \le x \le 3$.

**418.** Користуючись графіком функції $y = x^2$ (рис. 10), укажіть усі значення $x$, для яких значення функції:

1) менші від 1; 2) не менші від 1.



**Інтерактивне завдання 12**

**Функція $y = x^2$**



**419.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$; 2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1; \\ -x + 2, & \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$

**420.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^3}{x}$; 2) $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0; \\ x^2, & \text{якщо } x \ge 0. \end{cases}$

**421.** Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = |x|$.

**422.** Знайдіть значення $k$, для якого графіки функцій $y = kx + 4$ та $y = x^2$ перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює $-1$.

### *Вправи для повторення*

**423.** Розв'яжіть рівняння: 1) $x^2 - 49 = 0$; 2) $(3x)^2 - 9 = 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**424.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$;  2) $\frac{2mn}{m-n}\cdot\left(m^{-1}-n^{-1}\right)$.

**425.** Катер за певний час пройшов 14 км за течією річки. На зворотному шляху за той самий час він пройшов 12 км. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

**426.** Довжина обода заднього колеса трактора дорівнює 2 м, переднього — 1,5 м. Скільки метрів має проїхати трактор, щоб переднє колесо зробило на 10 обертів більше, ніж заднє?

### *Поміркуйте*



**427.** Руслана зафарбувала деякі клітинки смужки розміру $1\times 50$: 14 клітинок — у зелений колір, 12 — у червоний і 10 — у синій. Виявилося, що жодні дві зафарбовані клітинки різного кольору не межують одна з одною. Доведіть, що деякі три зафарбовані клітинки, розташовані підряд, мають той самий колір.

### *Цікаво знати*

## Параболічні форми навколо нас















© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 14 КВАДРАТНІ КОРЕНІ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

**1. Квадратні корені.** Розглянемо задачу.

**Задача.** Знайти сторону квадрата, площа якого дорівнює 4 см$^2$.

*Розв'язання.* Нехай сторона квадрата дорівнює $x$ см. Тоді його площа становитиме $x^2$ см$^2$, що за умовою задачі дорівнює 4 см$^2$. Отже, $x^2 = 4$.

Розв'яжемо одержане рівняння графічно. Парабола $y = x^2$ перетинає пряму $y = 4$ у двох точках з абсцисами 2 і $-2$ (див. рис. 12). Тому коренями рівняння $x^2 = 4$ є два числа $x = 2$ та $x = -2$.

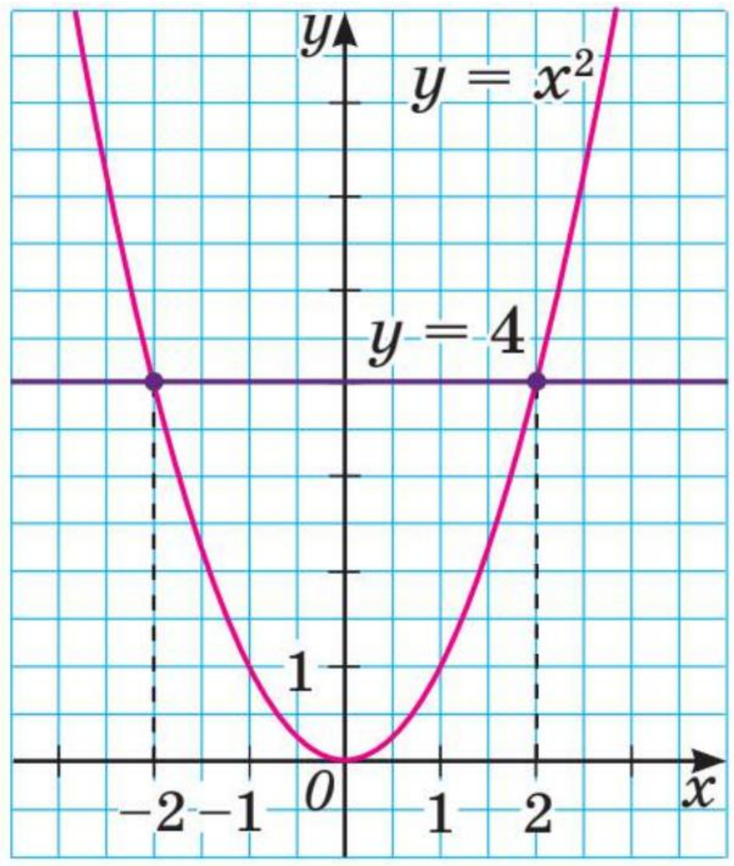



**Рис. 12**

Довжина сторони квадрата не може виражатися від'ємним числом. Отже, шукана сторона дорівнює 2 см. ●

Розв'язуючи задачу, ми знайшли числа 2 і $-2$, квадрати яких дорівнюють 4. Кожне з цих чисел називають *квадратним коренем* з числа 4.

**Означення. *Квадратним коренем* з числа $a$ називають таке число, квадрат якого дорівнює $a$.**

Квадратними коренями з числа 4, як ми вже показали, є два числа: 2 і $-2$.

Квадратними коренями з числа 6,25 є числа 2,5 і $-2{,}5$, бо $2{,}5^2 = 6{,}25$ і $(-2{,}5)^2 = 6{,}25$.

Квадратним коренем з числа 0 є тільки число 0, бо тільки квадрат нуля дорівнює нулю.

Квадратних коренів з від'ємного числа не існує, бо немає чисел, квадрат яких дорівнював би від'ємному числу.

**2. Арифметичний квадратний корінь.** Ми встановили, що числа 2 і $-2$ є квадратними коренями з числа 4. Невід'ємний з цих коренів, тобто число 2, називають *арифметичним квадратним коренем* з числа 4.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»



*Означення.* ***Арифметичним квадратним коренем*** **з числа $a$ називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $a$.**

Арифметичний квадратний корінь з числа $a$ позначають $\sqrt{a}$ ($\sqrt{\ }$ — знак арифметичного квадратного кореня). Вираз $\sqrt{a}$ читають: квадратний корінь з $a$ (правильно було б: арифметичний квадратний корінь з $a$, але під час читання слово «арифметичний» опускають).

Отже, $\sqrt{4} = 2$ (читають: квадратний корінь з чотирьох дорівнює два).

За означенням арифметичного квадратного кореня:

$\sqrt{144} = 12$, бо число 12 невід'ємне ($12 \geq 0$) і $12^2 = 144$;

$\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, бо $0{,}6 \geq 0$ і $0{,}6^2 = 0{,}36$;

$\sqrt{0} = 0$, бо $0 \geq 0$ і $0^2 = 0$.

У загальному випадку маємо:



**Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо виконуються дві умови:**

**1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.**

Коренів із числа $-1$ не існує, тому не існує й арифметичного квадратного кореня з цього числа. Кажуть, що *вираз* $\sqrt{-1}$ *не має змісту*.

Узагалі, вираз $\sqrt{a}$ має зміст, якщо $a \geq 0$.

Знаходження значення арифметичного квадратного кореня називають ще *добуванням квадратного кореня*. Для добування квадратного кореня з числа можна використати мікрокалькулятор, а в окремих випадках — таблицю квадратів (див. форзац). Наприклад, за таблицею квадратів можна знайти, що число 5476 є квадратом числа 74, тому $\sqrt{5476} = 74$.

**3. Тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, де $a \geq 0$.** Ця тотожність випливає з означення арифметичного квадратного кореня. Справді, оскільки $\sqrt{a}$ — це таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $a$, то:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad (a \geq 0).$$

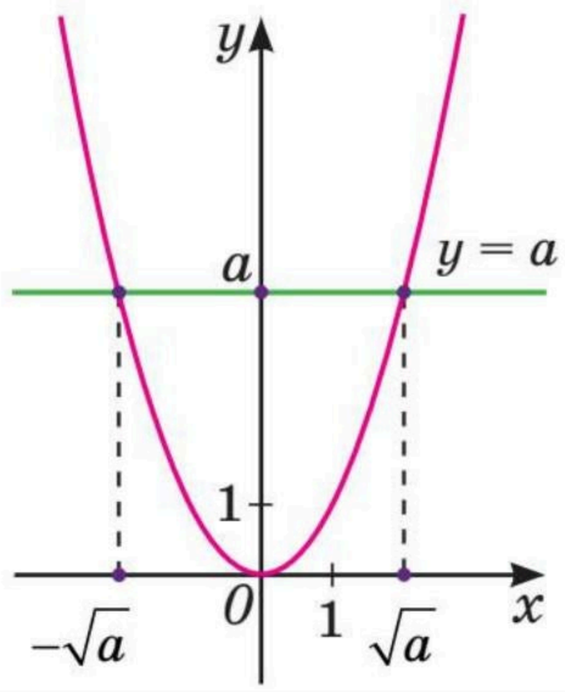
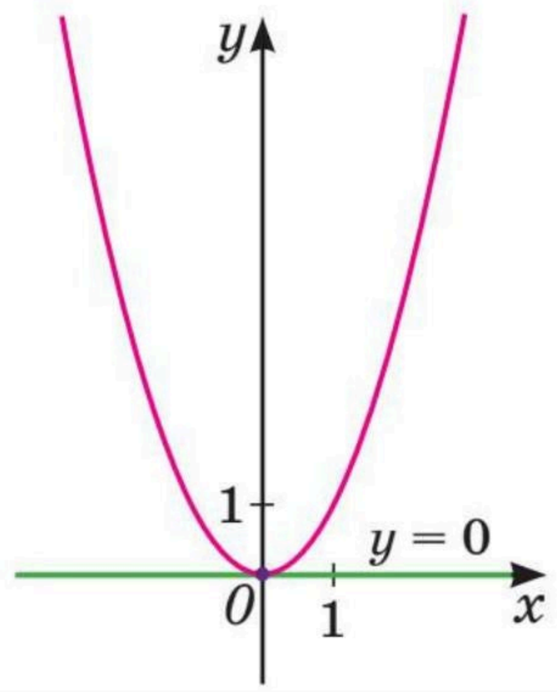
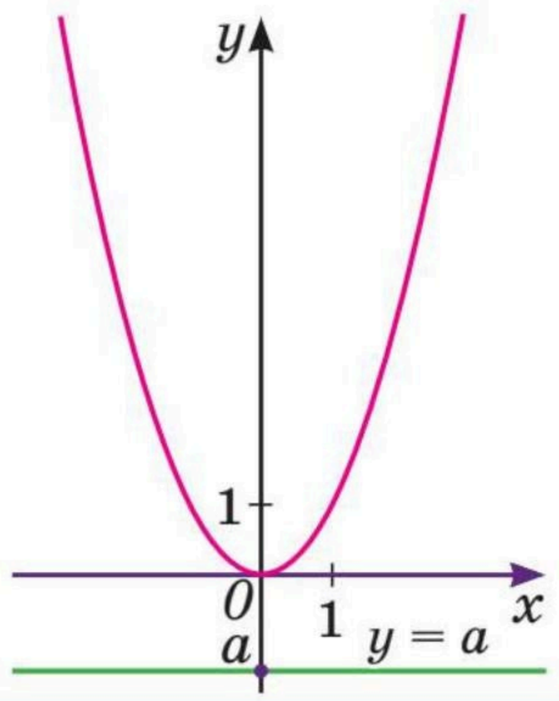


© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Наприклад, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4, \left(\sqrt{1{,}5}\right)^2 = 1{,}5.$

**4. Рівняння $x^2 = a$.** Дане рівняння можна розв'язати графічно, побудувавши в одній системі координат параболу $y = x^2$ і пряму $y = a$ для трьох випадків: $a > 0$, $a = 0$ та $a < 0$.

**Рівняння $x^2 = a$**

| $a > 0$ | $a = 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Два корені: $x = -\sqrt{a}$; $x = \sqrt{a}$ | Один корінь: $x = 0$ | Коренів немає |







Наприклад,
рівняння $x^2 = 36$ має два корені

$$x = -\sqrt{36} = -6 \text{ та } x = \sqrt{36} = 6;$$

рівняння $x^2 = 3$ має два корені $x = -\sqrt{3}$ та $x = \sqrt{3}$;
рівняння $x^2 = -3$ коренів не має.

### *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Довести, що $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$.

• Маємо: 1) $0{,}2 \geq 0$; 2) $0{,}2^2 = 0{,}04$. Тому $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$. •

**Вправа 2.** Знайти значення виразу $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}25} - \sqrt{2\frac{7}{9}}$.

• $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}25} - \sqrt{2\frac{7}{9}} = 8 \cdot 0{,}5 - \sqrt{\frac{25}{9}} = 4 - \frac{5}{3} = 4 - 1\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$. •



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Вправа 3.** Розв'язати рівняння $(x-2)^2=9$.

• $(x-2)^2=9$; $x-2=-3$ або $x-2=3$; $x=-1$ або $x=5$.
Відповідь. $-1$; 5. •

1. Що називають квадратним коренем з числа $a$? Арифметичним квадратним коренем з числа $a$?
2. Для яких значень $a$ має зміст вираз $\sqrt{a}$?
3. За яких умов є правильною рівність $\sqrt{a}=b$?
4. Чому дорівнює значення виразу $\left(\sqrt{a}\right)^2$, де $a\geq 0$?
5. Для яких значень $a$ рівняння $x^2=a$ має корені? Чому дорівнюють корені, якщо $a>0$? $a=0$?

«Усно

**428.** Знайдіть квадратні корені з числа; арифметичний квадратний корінь з числа:
1) 49; 2) 1; 3) 0; 4) $-16$.

**429.** Доведіть, що:
1) $\sqrt{81}=9$; 2) $\sqrt{0,49}=0,7$; 3) $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$.

**430.** Чи є правильною рівність:
1) $\sqrt{36}=8$; 2) $\sqrt{36}=-6$; 3) $\sqrt{36}=6$?

**431.** Для яких значень $x$ має зміст вираз:
1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\left(\sqrt{x}\right)^2$?

**432.** Знайдіть значення виразу:
1) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{4,32}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$.

**433.** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2=11$; 2) $x^2=0$; 3) $x^2=-11$.

«1 2

**434.** Обчисліть:
1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{100}$; 3) $\sqrt{196}$; 4) $\sqrt{400}$;
5) $\sqrt{0,09}$; 6) $\sqrt{0,64}$; 7) $\sqrt{1,21}$; 8) $\sqrt{2,25}$;
9) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; 10) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; 11) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 12) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**435.** Обчисліть:

1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{64}$; 3) $\sqrt{169}$; 4) $\sqrt{225}$;

5) $\sqrt{0,01}$; 6) $\sqrt{0,25}$; 7) $\sqrt{1,44}$; 8) $\sqrt{6,25}$;

9) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; 10) $\sqrt{\frac{4}{121}}$; 11) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; 12) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

**436.** Доведіть, що:

1) $\sqrt{1024} = 32$; 2) $\sqrt{11,56} = 3,4$.

**437.** Доведіть, що:

1) $\sqrt{2025} = 45$; 2) $\sqrt{5,29} = 2,3$.

**438.** За допомогою таблиці квадратів або мікрокалькулятора знайдіть значення квадратного кореня:

1) $\sqrt{576}$; 2) $\sqrt{2116}$; 3) $\sqrt{5929}$; 4) $\sqrt{9216}$.

**439.** За допомогою таблиці квадратів або мікрокалькулятора знайдіть значення квадратного кореня:

1) $\sqrt{361}$; 2) $\sqrt{1444}$; 3) $\sqrt{4096}$; 4) $\sqrt{8836}$.

**440.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{36} + \sqrt{64}$; 2) $\sqrt{36 + 64}$;

3) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{0,25}$; 4) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$;

5) $3\sqrt{1,69} - \sqrt{4}$; 6) $\sqrt{625} \cdot \sqrt{0,04} - 7,5$;

7) $\sqrt{81} + \sqrt{225} - \sqrt{441}$; 8) $\sqrt{1600} : \sqrt{6400} - 5\sqrt{0,25}$.

**441.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{100} - \sqrt{36}$; 2) $\sqrt{100 - 36}$;

3) $\sqrt{144} : \sqrt{9}$; 4) $\sqrt{144 : 9}$;

5) $\sqrt{1,96} + 2\sqrt{1,44}$; 6) $\sqrt{0,36} \cdot \sqrt{900} - 3\sqrt{81}$.

**442.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2x+3}$, якщо $x = 3$; $x = -1$; $x = 0,12$;

2) $\sqrt{a-2b}$, якщо $a = 28$, $b = -4$.

**443.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{4a-3}$, якщо $a = 7$; $a = 21$; $a = 0,75$.

**444.** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{2,7}\right)^2$; 3) $2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{7}\right)^2 - 9$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**445.** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{10}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{0{,}2}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{6}\right)^2 : 3$; 4) $1+\left(\sqrt{5}\right)^2$.

**446.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 81$; 2) $x^2 = 0{,}16$; 3) $x^2 = 5$; 4) $x^2 = 0{,}3$.

**447.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$; 2) $x^2 = 15$; 3) $x^2 = 1{,}21$; 4) $x^2 = 1{,}5$.

**448.** Знайдіть за допомогою мікрокалькулятора значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{1{,}6}$; 4) $\sqrt{4{,}38}$.

**449.** Знайдіть за допомогою мікрокалькулятора значення квадратного кореня (результат округліть до десятих):

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{28}$; 3) $\sqrt{12{,}5}$; 4) $\sqrt{0{,}15}$.



**Інтерактивне завдання 13**

**Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь**





**450.** Для яких значень $x$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{-x}$; 2) $\sqrt{(-x)^2}$; 3) $\sqrt{x^4}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$?

**451.** Для яких значень $a$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{-a^2}$; 3) $\sqrt{|a|}$; 4) $\sqrt{a^3}$?

**452.**  Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{15\cdot 17 - 16^2}$; 2) $\sqrt{(-0{,}3)\cdot(-1{,}8) - 0{,}5}$?

**453.** Знайдіть значення виразу:

1) $10\sqrt{0{,}0049} + 4\sqrt{0{,}49}$; 2) $\sqrt{\dfrac{16}{81}}\cdot\sqrt{2\dfrac{1}{4}} - \sqrt{5\dfrac{4}{9}}$;

3) $\dfrac{2}{9}\sqrt{81} + \left(\sqrt{1{,}5}\right)^2 + 2\sqrt{3{,}24}$; 4) $\left(1{,}6 - \dfrac{30}{\sqrt{625}}\right) : \sqrt{160000}$.

**454.** Знайдіть значення виразу:

1) $5\sqrt{0{,}0064} - 40\sqrt{0{,}0001}$; 2) $\sqrt{2\dfrac{7}{9}} : \left(\sqrt{\dfrac{81}{400}} + \left(\sqrt{4{,}55}\right)^2\right)$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**455.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 1)^2 = 16$; 2) $(3 - x)^2 = 2{,}25$.

**456.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 = 49$; 2) $(1 - 2x)^2 = 0{,}64$.

4

**457.** Доведіть, що вираз має зміст для будь-яких значень $x$:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16}$; 2) $\sqrt{x^2 - 30x + 226}$.

**458.** Чи існує значення $a$, для якого вираз $\sqrt{a^2 - 10a + 20}$ не має змісту?

**459.** Для яких значень $b$ рівняння $x^2 = b^2 - 3$ має один корінь?

**460.** Для яких значень $a$ рівняння $x^2 = a^2 - 2a$ має один корінь?

**461.** Знайдіть усі значення $x$, для яких є правильною рівність:

1) $\sqrt{x} = -x$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 0$.

## *Вправи для повторення*

**462.** Подайте у вигляді десяткових дробів числа: $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{9}$; $-3\frac{1}{25}$.

**463.** Порівняйте числа:

1) 6098 і 6980; 2) $-82$ і $-78$; 3) $-0{,}72$ і $-0{,}702$.

**464.** Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + 2y = 5$ і $3x - y = -6$.

**465.** Майстриня та її учениця, працюючи разом, виконали замовлення за 6 днів. Якби майстриня працювала сама, то виконала б це замовлення за 10 днів. За скільки днів виконала б замовлення учениця, працюючи сама?

## *Поміркуйте*



**466.** На крайній клітинці смужки розміру $1 \times 20$ стоїть фішка. Тарас, а за ним Олег по черзі пересувають фішку на одну або три клітинки в напрямку другого краю смужки. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Хто з хлопців може забезпечити собі перемогу (незалежно від ходів суперника)?





© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### Цікаво знати



Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала заданому числу $m$? Таку задачу ставили й уміли розв'язувати ще 2 тис. років до н. е. вавилонські вчені. Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно добути арифметичний квадратний корінь з числа $m$.

Якщо число $m$ було натуральним, але не було квадратом деякого натурального числа, то вавилоняни шукали наближене значення $\sqrt{m}$. Для цього вони записували $m$ у вигляді суми $a^2 + b$, де $b$ доволі мале порівняно з $a^2$, а далі використовували правило, яке можна записати у вигляді формули

$$\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Наприклад, якщо $m = 105$, то

$$\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{2 \cdot 10} = 10{,}25.$$

Зараз ми можемо шукати наближені значення арифметичних квадратних коренів за допомогою мікрокалькулятора. Для $\sqrt{105}$ маємо: $\sqrt{105} = 10{,}246950\ldots \approx 10{,}25$.

## 15 ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

**1. Множина та її елементи. Підмножина.** Термін «множина» використовують, коли йдеться про набір, сукупність будь-яких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою. Наприклад, множина натуральних чисел, множина учнів школи, множина дерев у парку, множина букв алфавіту, множина планет Сонячної системи тощо. Поняття «множина» належить до основних понять математики, таких як «число», «точка», «пряма», тому його не означують.

Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами* множини. Так, число 5 — елемент множини натуральних



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

чисел. Для позначення множин використовують великі букви латинського алфавіту ($A$, $B$, $C$, ..., $Z$), а для позначення елементів множини — малі букви ($a$, $b$, $c$, ..., $z$).

Якщо $a$ — елемент множини $M$, то записують: $a \in M$ (читають: *$a$ належить $M$*). Запис $b \notin M$ означає, що елемент $b$ *не належить* множині $M$.

Наприклад:

нехай $P$ — множина простих чисел; тоді $7 \in P$, $8 \notin P$;

нехай $G$ — множина букв українського алфавіту, які позначають голосні звуки; тоді $e \in G$, $c \notin G$.

Записуючи множину, яка складається зі скінченної кількості елементів, ці елементи беруть у фігурні дужки. Наприклад, $M = \{1; 3; 5\}$ — множина, яка складається із трьох елементів — чисел 1, 3 і 5. Тоді $1 \in M$, $2 \notin M$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною* і позначають символом $\varnothing$. Так, множиною коренів рівняння $x^2 = -1$ є порожня множина (це рівняння не має коренів).

Розглянемо множини $A = \{-1; 1\}$ і $B = \{-1; 0; 1; 2\}$. Обидва елементи $-1$ і 1 множини $A$ є елементами множини $B$. У такому випадку кажуть, що множина $A$ є *підмножиною* множини $B$.



*Означення.* **Множину $A$ називають *підмножиною* множини $B$, якщо кожний елемент множини $A$ є елементом множини $B$.**

Це записують так: $A \subset B$ (читають: множина $A$ є підмножиною множини $B$). На рисунку 13 зображено схематично, що $A \subset B$. Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing \subset M$ для будь-якої множини $M$.

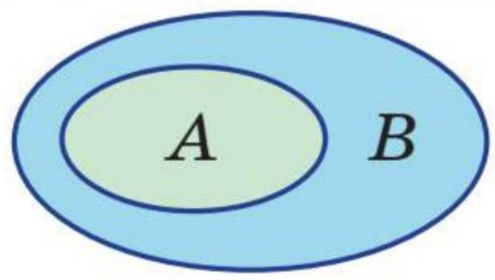


Рис. 13

**2. Натуральні, цілі та раціональні числа.** Множину всіх натуральних чисел позначають буквою $N$, множину всіх цілих чисел — буквою $Z$, а множину всіх раціональних чисел — буквою $Q$.

Той факт, що $-3$ є цілим, раціональним, але не натуральним числом, можна записати так: $-3 \in Z$; $-3 \in Q$; $-3 \notin N$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Кожне натуральне число є цілим числом, а кожне ціле — раціональним. Тому $N \subset Z \subset Q$.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m$ — ціле число, а $n$ — натуральне.

Наприклад,

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3};\quad -3{,}7 = \frac{-37}{10};\quad 2 = \frac{2}{1};\quad -3 = \frac{-3}{1}.$$

Раціональні числа, як ми знаємо, можна подавати також у вигляді десяткових дробів. Наприклад,

$\frac{3}{4} = 0{,}75$; $0{,}75$ — скінченний десятковий дріб;

$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8(3)$; $0{,}8(3)$ — нескінченний періодичний десятковий дріб з періодом 3.

Скінченний десятковий дріб $0{,}75$ можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, дописуючи праворуч у вигляді десяткових знаків безліч нулів: $0{,}75 = 0{,}75000\ldots = 0{,}75(0)$.

Отже, обидва раціональні числа $\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ можна подати у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів.

Для раціональних чисел є правильними твердження:

**Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.**

**Будь-який нескінченний періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа.**

**3. Ірраціональні числа.** Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2 (доведення у рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»). Однак це рівняння має два корені: $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$. Отже, числа $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ не є раціональними. Вони є прикладами *ірраціональних чисел*. Префікс «ір» означає заперечення: ірраціональне — не раціональне.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Наближене значення $\sqrt{2}$ можна знайти за допомогою мікрокалькулятора. Наприклад, $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ — значення, округлене до десятитисячних. Точне ж значення

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

подається у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу (цей дріб не може бути періодичним, бо $\sqrt{2}$ — не раціональне число).

Для ірраціональних чисел є правильним твердження:

**Будь-яке ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.**

Прикладами ірраціональних чисел є:

$$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots,\ \sqrt{5} = 2{,}236\ldots.$$

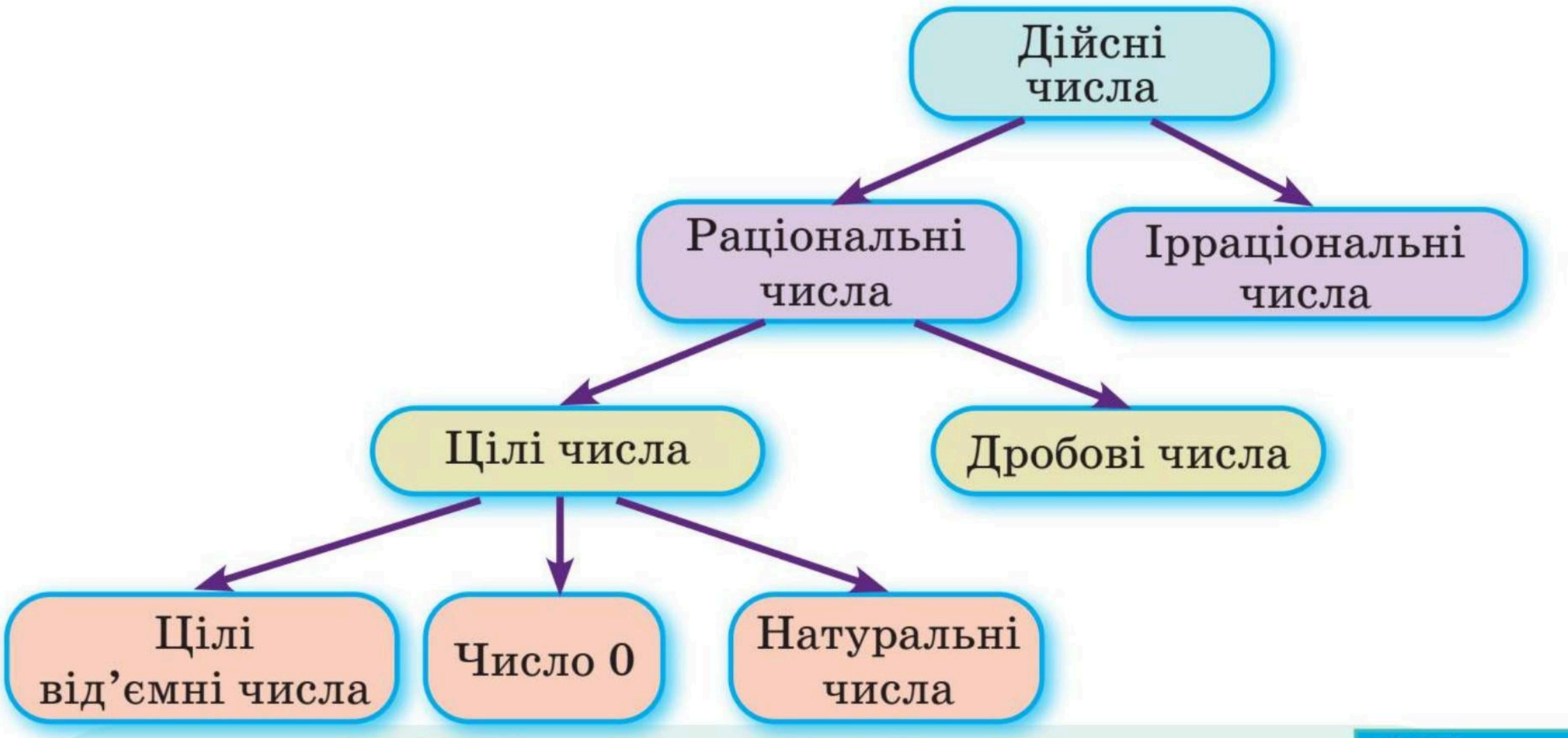
Узагалі, якщо натуральне число $n$ не є квадратом деякого натурального числа, то числа $\sqrt{n}$ і $-\sqrt{n}$ є ірраціональними.

Ірраціональними є також числа:

$\pi = 3{,}1415926\ldots$, яке виражає відношення довжини кола до його діаметра;

$0{,}505005000500005\ldots$ (кількість нулів між п'ятірками послідовно збільшується на 1).

**4. Дійсні числа.** *Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину* ***дійсних*** *чисел*, яку позначають буквою $\boldsymbol{R}$.






© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Множини натуральних, цілих і раціональних чисел є підмножинами множини дійсних чисел (див. рис. 14).

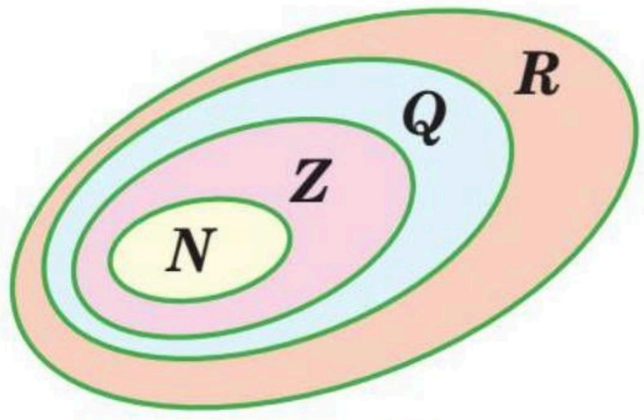


Рис. 14

Будь-яке дійсне число можна зобразити точкою координатної прямої (див. рис. 15), і навпаки, будь-яка точка координатної прямої зображає дійсне число.

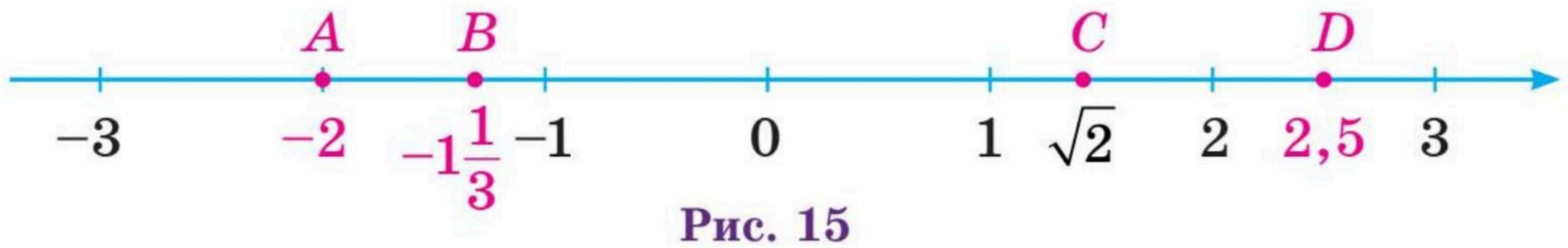


Рис. 15

Кожне дійсне число $a$ можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Якщо цей дріб періодичний, то дійсне число $a$ є раціональним; якщо ж цей дріб неперіодичний — ірраціональним.

Будь-які два дійсні числа можна порівняти. Якщо числа записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, то їх порівнюють за тими ж правилами, що й скінченні десяткові дроби. Наприклад,

$$5{,}1\underline{3}869\ldots < 5{,}1\underline{4}308\ldots ,$$

бо дані числа мають однакові цілі частини, однакове число десятих, однак друге число має більше число сотих.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити (крім ділення на нуль), підносити до степеня, до того ж для цих дій виконуються властивості, установлені для дій над раціональними числами. Зокрема, для дій додавання і множення справджуються переставна, сполучна та розподільна властивості.

Наприклад: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $3\cdot\left(\pi+\sqrt{5}\right)=3\cdot\pi+3\cdot\sqrt{5}$.

### *Для тих, хто хоче знати більше*



Доведемо, що серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2.

Припустимо, що раціональне число $x$, квадрат якого дорівнює 2, існує. Подамо число $x$ у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де $m$ — ціле число, $n$ — натуральне. Тоді:



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

$$x^2 = 2; \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2; \qquad \frac{m^2}{n^2} = 2; \qquad m^2 = 2n^2.$$

З останньої рівності випливає, що $m^2$ — парне число. Тоді парним є й число $m$ (якби число $m$ було непарним, то й число $m^2$ було б непарним). Нехай $m = 2k$, де $k$ — ціле число. Підставивши в рівність $m^2 = 2n^2$ замість $m$ число $2k$, матимемо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $2k^2 = n^2$. З рівності $2k^2 = n^2$ випливає, що число $n^2$, а з ним і число $n$, — парне. Оскільки числа $m$ і $n$ парні, то дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. Це суперечить тому, що цей дріб нескоротний.

Отже, припущення, що існує раціональне число, квадрат якого дорівнює 2, привело до протиріччя. Це означає, що серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2.

### *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Порівняти числа $\sqrt{2}$ і 1,415.

• За допомогою мікрокалькулятора знаходимо: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$. Оскільки $1{,}41\underline{4}2\ldots < 1{,}41\underline{5}$, то $\sqrt{2} < 1{,}415$. •

**Вправа 2.** Знайти наближене значення виразу $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ з точністю до сотих.

• Округливши значення коренів до тисячних, матимемо:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}414 + 1{,}732 = 3{,}146 \approx 3{,}15.$$ •

**Вправа 3.** Записати усі двохелементні підмножини множини $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

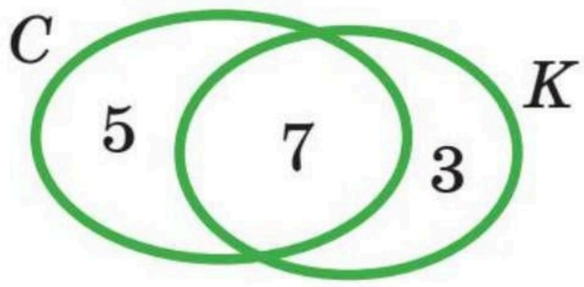
• $\{1; 2\}$; $\{1; 3\}$; $\{1; 4\}$; $\{2; 3\}$; $\{2; 4\}$; $\{3; 4\}$. •

**Вправа 4.** У класі 12 дівчат мають чорні брови, 10 дівчат — карі очі, 7 дівчат — чорні брови і карі очі. Скільки дівчат мають чорні брови або карі очі?

• Нехай $C$ — множина тих дівчат, які мають чорні брови, а $K$ — множина тих дівчат, які мають карі очі. Схематично зобразимо ці множини на рисунку.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»




За умовою чорні брови і карі очі мають 7 дівчат, тому множини $C$ і $K$ мають 7 спільних елементів. Оскільки 12 дівчат мають чорні брови, 7 дівчат — чорні брови і карі очі, то лише чорні брови мають $12 - 7 = 5$ (дівчат). Лише карі очі мають $10 - 7 = 3$ (дівчини). Отже, чорні брови або карі очі мають $5 + 7 + 3 = 15$ (дівчат).

Відповідь. 15 дівчат. ●

1. Наведіть приклад множини та деякої її підмножини.
2. У вигляді яких дробів можна подати будь-яке раціональне число?
3. У вигляді якого дробу можна подати будь-яке ірраціональне число? Наведіть приклади ірраціональних чисел.
4. Які числа утворюють множину дійсних чисел?

«Усно

**467.** Дано множину $M = \{1; -2; 0; 5; -3\}$.

1) Зі скількох елементів складається множина $M$?
2) Чи належить множині $M$ число 5? Число 3?
3) Які з множин $A = \{1; 0\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{-3; -2\}$, $D = \{5\}$ є підмножинами множини $M$?

**468.** Дано числа: $0$; $-2{,}5$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{7}$; $-\sqrt{2}$; $\pi$; $0{,}121122111222\ldots$ (кількість одиниць і двійок послідовно збільшується на 1). Які з даних чисел є раціональними? Ірраціональними?

**469.** Які з наведених тверджень є правильними?

1) Будь-яке натуральне число є раціональним числом.
2) Будь-яке раціональне число є дійсним числом.
3) Будь-яке дійсне число є ірраціональним числом.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**470.** Чи правильно, що:

1) $2 \in N$; 2) $0{,}6 \notin Z$; 3) $\sqrt{7} \in Q$; 4) $\sqrt{7} \notin R$;
5) $N \subset Z$; 6) $Z \subset Q$; 7) $Z \subset R$; 8) $Q \subset Z$?

1 2

**471.** Запишіть множину, перелічивши її елементи:

1) множину шести перших натуральних чисел;
2) множину всіх коренів рівняння $x^2 = 1$;
3) множину всіх від'ємних цілих чисел, які більші за $-4$;
4) множину всіх пір року.

**472.** Запишіть множину, перелічивши її елементи:

1) множину всіх дільників числа 6;
2) множину всіх цілих чисел, модуль яких менший від 3;
3) множину п'яти перших букв українського алфавіту.

**473.** Дано множини $K = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $L = \{5; 6; 7; 8\}$.

1) Запишіть, належить чи не належить кожній із цих множин число 4; число 8; число 9.
2) Запишіть множину $M$ всіх тих елементів, які належать множині $K$ і не належать множині $L$.
3) Чи є множина $M$ підмножиною множини $K$? Множини $L$?
4) Запишіть усі трьохелементні підмножини множини $L$.

**474.** Дано множини $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

1) Запишіть, належить чи не належить кожній із цих множин число 4; число 5; число 6.
2) Запишіть множину $C$ всіх тих елементів, які належать множині $A$ і множині $B$.
3) Чи є множина $C$ підмножиною множини $A$? Множини $B$?
4) Запишіть усі двохелементні підмножини множини $A$.

**475.** Дано множину

$$M = \left\{-5;\ 3{,}2;\ \sqrt{7};\ 1\frac{3}{7};\ -2{,}(28);\ 0;\ 12;\ -\sqrt{3};\ -\pi\right\}.$$

Запишіть підмножину множини $M$, яка складається з усіх тих елементів множини $M$, які є:

1) цілими числами;
2) раціональними, але не цілими числами;
3) ірраціональними числами.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**476.** Із чисел $15$; $-\sqrt{10}$; $0$; $\frac{2}{9}$; $-0{,}64$; $\sqrt{6}$; $3{,}(7)$; $-37$ випишіть усі:

1) раціональні числа; 2) ірраціональні числа.

**477.**  Подайте числа $1{,}5$ і $2\frac{5}{9}$ у вигляді: 1) звичайних дробів; 2) нескінченних періодичних десяткових дробів.

**478.** Порівняйте числа:

1) $8{,}998\ldots$ і $9{,}113\ldots$; 2) $-0{,}579\ldots$ і $-0{,}58$;

3) $2{,}7$ і $2{,}(7)$; 4) $\frac{3}{7}$ і $0{,}4$;

5) $\sqrt{6}$ і $-3$; 6) $1{,}7$ і $\sqrt{3}$;

7) $-1{,}(6)$ і $-\sqrt{3}$; 8) $\sqrt{10}$ і $\pi$.

**479.** Порівняйте числа:

1) $7{,}351\ldots$ і $7{,}452\ldots$; 2) $5{,}338\ldots$ і $5{,}(3)$;

3) $-0{,}986\ldots$ і $-0{,}(9)$; 4) $\frac{5}{7}$ і $0{,}72$;

5) $3{,}34$ і $\sqrt{10}$; 6) $-\sqrt{6}$ і $-2$.

**480.** Укажіть два сусідні цілі числа, між якими на координатній прямій розташоване число: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{17}$; 3) $-\sqrt{2}$.

**481.** Укажіть два сусідні цілі числа, між якими на координатній прямій розташоване число: 1) $\sqrt{10}$; 2) $-\sqrt{5}$.

**482.** Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:

1) $2+\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{15}-3{,}75$; 3) $5\sqrt{2}$.

**483.** Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до десятих:

1) $\sqrt{3}+4$; 2) $3{,}5-\sqrt{12}$; 3) $2\sqrt{7}$.



**484.** Порівняйте числа:

1) $2\frac{1}{3}$ і $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{2}$ і $1{,}4(14)$; 3) $-\sqrt{2{,}5}$ і $-1{,}(5)$.

**485.** Порівняйте числа:

1) $\sqrt{10}$ і $3\frac{1}{6}$; 2) $-2{,}1(90)$ і $-\sqrt{4{,}5}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**486.** Запишіть у порядку зростання числа:

$$4{,}482\ldots;\ -1{,}32;\ -1\frac{1}{3};\ \sqrt{20};\ 4{,}(45).$$

**487.** Запишіть у порядку спадання числа:

$$3{,}(7);\ -\frac{1}{7};\ 3{,}74;\ -0{,}149\ldots;\ \sqrt{14}.$$

**488.** Знайдіть наближене значення виразу з точністю до сотих:

1) $\sqrt{30}-\sqrt{15}$; 2) $\sqrt{12}+\pi$; 3) $3\sqrt{2}-4\frac{1}{9}$.

**489.** Знайдіть наближене значення виразу з точністю до десятих:

1) $\sqrt{3}+\sqrt{14}$; 2) $\pi-\sqrt{7}$; 3) $2\frac{2}{7}+\sqrt{27}$.

**490.** Радіус кола дорівнює $\sqrt{10}$ см. Знайдіть наближене значення довжини кола з точністю до десятих сантиметра.

**491.** Множину $M$ утворюють усі дійсні числа $x$, які задовольняють нерівність $-1 \le x < 7$. Які з наведених множин є підмножинами множини $M$:

1) $A=\{-1;\ 0;\ 1{,}5\}$; 2) $B=\{2{,}5;\ 7\}$; 3) $C=\left\{2;\ \sqrt{30}\right\}$?

**492.** Множину $K$ утворюють усі дійсні числа, модулі яких менші від 2. Які з чисел $-2{,}(3)$; $1{,}(7)$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$ належать множині $K$?



**Інтерактивне завдання 14**

**Числові множини. Ірраціональні та дійсні числа**



4

**493.** Із червоних і білих троянд зробили 30 букетів. Виявилося, що червоні троянди є у 24 букетах, червоні та білі — у 8 букетах. У скількох букетах є білі троянди?

**494.** У туристичній фірмі працюють 28 осіб, 18 з яких володіють англійською мовою, 14 — французькою, 10 — англійською і французькою. Скільки осіб не володіють жодною з цих мов?

**495.** У математичному турнірі беруть участь 25 команд. Хлопці входять до складу 20 команд, а дівчата — до складу 21 команди. У скількох командах є хлопці та дівчата?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Вправи для повторення

**496.** Піднесіть до квадрата: 1) $(mn)^2$; 2) $\left(\frac{m}{n}\right)^2$; 3) $(m^3)^2$.

**497.** Знайдіть значення виразу $|2a - 3|$, якщо $a = 5$; $a = 1{,}4$; $a = 1{,}6$.

**498.** Для чисел $a$ і $b$ виконуються рівності $a - b = 4$ та $a^2 - b^2 = 4$. Знайдіть для цих чисел значення виразу $3a + 5b$.

**499.** До 2 кг сплаву міді й олова додали 200 г міді й одержали новий сплав, у якому міді стало на 20 % більше, ніж олова. Скільки відсотків міді містив перший сплав?

## Поміркуйте



**500.** У дворі будинку стоять 18 автомобілів, номерні знаки яких містять букви $A$, $B$ або $C$. Букву $A$ містять 10 знаків, букву $B$ — 12, букву $C$ — 6, букви $A$ і $B$ — 5, букви $A$ і $C$ — 3, букви $A$, $B$ і $C$ — 2. Скільки знаків містять букви $B$ і $C$, але не містять букву $A$?

## Цікаво знати



Число є одним з найзагальніших понять математики. Спочатку це поняття пов'язувалося тільки з процесами підрахунку або вимірювання. Саме на цій основі виникли і використовувалися натуральні та дробові числа, до того ж дробові числа розглядали тільки як відношення натуральних.

Основи теорії натуральних чисел заклали піфагорійці — учні та послідовники легендарного давньогрецького математика і філософа Піфагора, який жив на межі VI–V ст. до н. е.

Кожне наступне розширення й узагальнення поняття числа проходило під впливом потреб практики або самої математики.

Спочатку китайці у II ст. до н. е. ввели поняття від'ємного числа. Такі числа потрібні були для розв'язування рівнянь. Другий напрямок узагальнення поняття числа привів до дійсних чисел і тим самим розв'язав проблему



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

вимірювання довжини відрізка, адже за вибраної одиниці вимірювання довжина будь-якого відрізка виражається дійсним числом.

Строгі теорії дійсних чисел були розроблені лише у другій половині XIX ст. німецькими математиками **К. Вейєрштрассом** (1815–1897), **Р. Дедекіндом** (1831–1916) і **Г. Кантором** (1845–1918).

# 16 ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

Властивості арифметичного квадратного кореня сформулюємо у вигляді теорем, доведення яких ґрунтується на одному твердженні:

рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо: 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.

## 1. Арифметичний квадратний корінь з добутку.



***Теорема 1.*** **Для будь-яких дійсних чисел $a$ і $b$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$, виконується рівність:**

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

*Доведення.* 1) За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} \geq 0$, тому й $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$.

2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває невід'ємних значень, і його квадрат дорівнює $ab$. Тому рівність $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ є правильною. ●

Наприклад, $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35$.

Використовуючи теорему 1, можна знаходити квадратний корінь з добутку, який містить три і більше невід'ємні множники. Наприклад, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Узагалі, *арифметичний квадратний корінь з добутку кількох невід'ємних множників дорівнює добутку коренів з цих множників.*

### 2. Арифметичний квадратний корінь із дробу.

*Теорема 2.* **Для будь-яких дійсних чисел $a$ і $b$, де $a \geq 0$, $b > 0$, виконується рівність:**

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

*Доведення.* 1) Оскільки $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} > 0$, то $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$.

2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$. Отже, рівність $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ є правильною. ●

Наприклад, $\sqrt{\dfrac{25}{49}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \dfrac{5}{7}$.

### 3. Арифметичний квадратний корінь зі степеня.

*Теорема 3.* **Для будь-якого дійсного числа $a$ виконується рівність:**

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

*Доведення.* Для будь-якого значення $a$ маємо: 1) $|a| \geq 0$; 2) $|a|^2 = a^2$. Отже, рівність $\sqrt{a^2} = |a|$ є правильною. ●

Наприклад, $\sqrt{1{,}8^2} = |1{,}8| = 1{,}8$; $\sqrt{(-35)^2} = |-35| = 35$.

Якщо $a \geq 0$ і $n$ — натуральне число, то за теоремою 3 маємо:

$$\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{\left(a^n\right)^2} = \left|a^n\right| = a^n.$$

*Теорема 4.* **Для будь-якого дійсного числа $a$, де $a \geq 0$, і будь-якого натурального числа $n$ виконується рівність:**

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n.$$

Наприклад, $\sqrt{5^4} = 5^2 = 25$; $\sqrt{(-3)^6} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Приклади розв'язання вправ

**Вправа 1.** Знайти значення виразу:

1) $\sqrt{36\cdot 0{,}16}$; 2) $\sqrt{128\cdot 18}$; 3) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$.

• 1) $\sqrt{36\cdot 0{,}16}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{0{,}16}=6\cdot 0{,}4=2{,}4$;

2) $\sqrt{128\cdot 18}=\sqrt{(2\cdot 64)\cdot(2\cdot 9)}=\sqrt{4\cdot 64\cdot 9}=2\cdot 8\cdot 3=48$;

3) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12\cdot 3}=\sqrt{36}=6$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}=\sqrt{\dfrac{3}{75}}=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\dfrac{1}{5}$. •

**Вправа 2.** Знайти значення виразу:

1) $\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{3^2}$; 2) $\sqrt{2{,}5^4}\cdot\sqrt{(-2)^6}$.

• 1) $\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{3^2}=|-5|+|3|=5+3=8$;

2) $\sqrt{2{,}5^4}\cdot\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{2{,}5^4}\cdot\sqrt{2^6}=2{,}5^2\cdot 2^3=6{,}25\cdot 8=50$. •

**Вправа 3.** Спростити вираз $\sqrt{4a^2(-b)^2}$, де $a\le 0$; $b\ge 0$.

• $\sqrt{4a^2(-b)^2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(-b)^2}=2|a|\cdot|-b|=2|a|\cdot|b|$.

Оскільки $a\le 0$, $b\ge 0$, то $|a|=-a$, $|b|=b$. У такому випадку $2|a|\cdot|b|=2(-a)b=-2ab$. •

**Вправа 4.** Знайти значення виразу $\sqrt{9a^2+6a+1}$, якщо $a=-1{,}4$.

• $\sqrt{9a^2+6a+1}=\sqrt{(3a+1)^2}=|3a+1|$.

Якщо $a=-1{,}4$, то $|3a+1|=|3\cdot(-1{,}4)+1|=|-3{,}2|=3{,}2$. •

1. Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь з добутку невід'ємних множників?
2. Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь із дробу $\dfrac{a}{b}$, де $a\ge 0$, $b>0$?
3. Якому виразу тотожно рівний вираз $\sqrt{a^2}$?
4. Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь зі степеня $a^{2n}$, де $a\ge 0$?

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

«Усно

**501.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16 \cdot 25}$; 2) $\sqrt{81 \cdot 4}$; 3) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$;

5) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; 6) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; 7) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}}$.

**502.** Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{8^2}$; 2) $\sqrt{(-3)^2}$; 3) $\sqrt{2^6}$; 4) $\sqrt{0{,}5^4}$.

«1 2

**503.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16 \cdot 49}$; 2) $\sqrt{121 \cdot 81}$; 3) $\sqrt{0{,}04 \cdot 36}$;

4) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}16}$; 5) $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}25}$; 6) $\sqrt{441 \cdot 0{,}01}$;

7) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 64}$; 8) $\sqrt{4 \cdot 81 \cdot 625}$; 9) $\sqrt{0{,}36 \cdot 225 \cdot 16}$.

**504.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{25 \cdot 81}$; 2) $\sqrt{36 \cdot 144}$; 3) $\sqrt{0{,}09 \cdot 49}$;

4) $\sqrt{3{,}24 \cdot 0{,}25}$; 5) $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$; 6) $\sqrt{64 \cdot 0{,}04 \cdot 225}$.

**505.** Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; 2) $\sqrt{\frac{196}{225}}$; 3) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

**506.** Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt{\frac{121}{289}}$; 3) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

**507.** Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{2 \cdot 7}$; 2) $\sqrt{21}$; 3) $\sqrt{5a}$.

**508.** Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{8 \cdot 3}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $\sqrt{8b}$.

**509.** Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; 2) $\sqrt{\frac{b}{7}}$; 3) $\sqrt{\frac{2}{a}}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**510.** Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{6}{7}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{x}}$; 3) $\sqrt{\frac{y}{5}}$.

**511.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; 3) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{0,5}$;

4) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{0,03}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{15}}$;

7) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; 8) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{99}}$; 9) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

**512.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}$; 3) $\sqrt{1,5}\cdot\sqrt{6}$;

4) $\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$; 5) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 6) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

**513.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{325^2}$; 2) $\sqrt{(-325)^2}$; 3) $\sqrt{(-0,2)^2}$;

4) $\sqrt{5^4}$; 5) $\sqrt{3^6}$; 6) $\sqrt{0,5^6}$.

**514.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{98^2}$; 2) $\sqrt{(-98)^2}$; 3) $\sqrt{(-7,5)^2}$;

4) $\sqrt{3^4}$; 5) $\sqrt{2^8}$; 6) $\sqrt{1,2^4}$.

**515.** Знайдіть значення виразу:

1) $9-\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; 2) $\sqrt{17^2}+\sqrt{(-17)^2}$; 3) $\sqrt{8,9^2}-4,8$.

**516.** Знайдіть значення виразу:

1) $100-\sqrt{99^2}$; 2) $\sqrt{67^2}-\sqrt{(-67)^2}$; 3) $4,2+\sqrt{2,8^2}$.



## Інтерактивне завдання 15
## Властивості арифметичного квадратного кореня



3

**517.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18\cdot 32}$; 2) $\sqrt{360\cdot 90}$; 3) $\sqrt{15\cdot 21\cdot 35}$;

4) $\sqrt{250\cdot 0,036}$; 5) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{75}$; 6) $\sqrt{250}\cdot\sqrt{160}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}$; 8) $\sqrt{1\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{4\frac{4}{7}}$; 9) $\sqrt{1{,}4}\cdot\sqrt{5\frac{3}{5}}$.

**518.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{45\cdot125}$; 2) $\sqrt{48\cdot27}$; 3) $\sqrt{8\cdot14\cdot7}$;

4) $\sqrt{640}\cdot\sqrt{810}$; 5) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}$; 6) $\sqrt{1\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{5\frac{1}{2}}$.

**519.** Знайдіть значення кореня, розклавши підкореневий вираз на прості множники: 1) $\sqrt{1764}$; 2) $\sqrt{5625}$.

**520.** Знайдіть значення кореня, розклавши підкореневий вираз на прості множники: 1) $\sqrt{1156}$; 2) $\sqrt{3969}$.

**521.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{29^2-20^2}$; 2) $\sqrt{52^2-48^2}$; 3) $\sqrt{20{,}5^2-4{,}5^2}$.

**522.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{20^2-16^2}$; 2) $\sqrt{65^2-16^2}$; 3) $\sqrt{6{,}5^2-2{,}5^2}$.

**523.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{28^4}-\sqrt{22^4}$; 2) $\sqrt{2^{10}}+\sqrt{(-2{,}5)^2}$; 3) $\sqrt{18^4}:\sqrt{(-9)^4}$;

4) $\sqrt{16^3}$; 5) $\sqrt{8^2\cdot4^3}$; 6) $\sqrt{9^3}-\left(\sqrt{9}\right)^2$.

**524.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{4^6}-\sqrt{6^4}$; 2) $10+\sqrt{(-2)^{10}}$; 3) $\sqrt{(-6)^2}\cdot\sqrt{5^4}$;

4) $\sqrt{4^5}$; 5) $\sqrt{9^3\cdot3^2}$; 6) $\left(\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{25^3}$.

**525.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2b^2}$, де $a\geq0$; $b\geq0$; 2) $\sqrt{a^2b^2}$, де $a\geq0$; $b\leq0$;

3) $\sqrt{4x^4y^6}$, де $y<0$; 4) $\sqrt{\frac{25m^2}{n^8}}$, де $m\geq0$;

5) $\sqrt{9(-a)^2b^4}$, де $a<0$; 6) $\sqrt{(-x)^2(-y)^2}$, де $x>0$; $y<0$.

**526.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^4b^2}$, де $b<0$; 2) $\sqrt{36a^{10}b^6}$, де $a<0$; $b\geq0$;

3) $\sqrt{\frac{x^2}{y^8}}$, де $x\geq0$; 4) $\sqrt{49(-x)^2y^2}$, де $x\geq0$; $y\geq0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**527.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(2b-3)^2}$, якщо $b=-6$; $b=1{,}6$;

2) $\sqrt{a^2-2a+1}$, якщо $a=-8$; $a=2{,}7$.

**528.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(m-7)^2}$, якщо $m=-1$; $m=9{,}2$;

2) $\sqrt{x^2-4x+4}$, якщо $x=-3$; $x=1{,}4$.

4

**529.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}-\sqrt{10}$;

2) $\sqrt{21}+\sqrt{\left(\sqrt{21}-5\right)^2}$.

**530.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{15}+\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}$.

**531.** Для яких значень $x$ є правильною рівність:

1) $\sqrt{x^8}=x^4$;

2) $\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2$?

**532.** Спростіть вираз $\sqrt{4n^4+4n^2+1}-\sqrt{n^4+6n^2+9}$.

**533.** Спростіть вираз $\sqrt{a^4+2a^2+1}-a^2$.

**534.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2}=4-|x|$;

2) $\sqrt{y^2+2|y|+1}=5$.

**535.** Розв'яжіть рівняння $3|x|-\sqrt{x^2}=6$.

## *Вправи для повторення*

**536.** Спростіть вираз:

1) $3(2a-1)-2(a+5)$;

2) $(b+5)^2+(2-b)(2+b)$.

**537.** Розкладіть на множники:

1) $2b^2c^2-18b^2$;

2) $m^2-8m+16-n^2$.

**538.** Із міста $A$ до міста $B$, відстань між якими 42 км, виїхав автобус, а через 6 хв — автомобіль. До міста $B$ автобус та автомобіль прибули одночасно. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона в 1,2 раза більша за швидкість автобуса.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**539.** Чернівчани встановили рекорд світу за кількістю людей у вишиванках, які одночасно зібралися в одному місці. Знайдіть цю кількість, якщо вона є чотирицифровим числом, сума цифр якого дорівнює 22, і в якому число тисяч у 4 рази більше за число сотень, але вдвічі менше від числа десятків.



### *Поміркуйте*



**540.** У кожній вершині шестикутника стоїть фішка. За один хід будь-яку фішку можна перемістити в сусідню вершину. Чи можна зібрати всі фішки в деякій одній вершині рівно за 28 ходів?

## 17 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЯКІ МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

**1. Найпростіші перетворення.** Розглянемо перетворення, пов'язані з додаванням, відніманням, множенням, діленням і піднесенням до степеня виразів, які містять квадратні корені:

$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{a}+2\sqrt{a}=3\sqrt{a}$

$5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ $\qquad$ $2\sqrt{b}-4\sqrt{b}=-2\sqrt{b}$

$4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}=20\sqrt{6}$ $\qquad$ $4\sqrt{a}\cdot\left(-2\sqrt{b}\right)=-8\sqrt{ab}$

$15\sqrt{6}:\left(3\sqrt{2}\right)=\dfrac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=5\sqrt{3}$ $\qquad$ $10\sqrt{x}:\left(5\sqrt{x}\right)=\dfrac{10\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}=2$

$\left(4\sqrt{2}\right)^2=4^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=16\cdot 2=32$ $\qquad$ $\left(2\sqrt{a}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2=4a$

**2. Винесення множника з-під знака кореня.** Розглянемо перетворення:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

Виконане перетворення називають *винесенням множника з-під знака кореня*. У даному випадку з-під знака кореня винесено множник 3.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Приклад 1.** Винести множник з-під знака кореня у виразі:

1) $\sqrt{3b^2}$, де $b > 0$; 2) $\sqrt{24a^2}$, де $a < 0$.

*Розв'язання.* 1) $\sqrt{3b^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{3} \cdot |b| = b\sqrt{3}$ (оскільки $b > 0$, то $|b| = b$);

2) $\sqrt{24a^2} = \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot 6} = 2 \cdot |a| \cdot \sqrt{6} = -2a\sqrt{6}$ (оскільки $a < 0$, то $|a| = -a$). ●

**Винесення множника з-під знака кореня**

$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, якщо $a \geq 0$; $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$, якщо $a < 0$.

**3. Внесення множника під знак кореня.** Розглянемо перетворення:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}.$$

Таке перетворення називають *внесенням множника під знак кореня*. Замінивши вираз $3\sqrt{2}$ на вираз $\sqrt{18}$, ми внесли під знак кореня множник 3.

**Приклад 2.** Внести множник під знак кореня у виразі:

1) $a\sqrt{3}$, де $a > 0$; 2) $c\sqrt{2}$, де $c < 0$.

*Розв'язання.* 1) Оскільки $a > 0$, то $a = |a| = \sqrt{a^2}$. Тому

$$a\sqrt{3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3a^2}.$$

2) Оскільки $c < 0$, то $|c| = -c$, звідки $c = -|c| = -\sqrt{c^2}$. Тому

$$c\sqrt{2} = -\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2c^2}. \bullet$$

**Внесення множника під знак кореня**

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, якщо $a \geq 0$; $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$, якщо $a < 0$.

**4. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.** Розглянемо приклади перетворень, які дозволяють позбутися коренів у знаменниках дробів:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{6}+2}{6-4} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Виконані перетворення називають *звільненням від ірраціональності в знаменнику дробу*. Кожне таке перетворення зводиться до множення чисельника і знаменника дробу на певний вираз.

### *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Знайти значення виразу:

1) $\sqrt{18}-\sqrt{8}-\sqrt{2}$; 2) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$; 3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}$.

● 1) $\sqrt{18}-\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$;

2) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-3^2=4\cdot 3-9=3$;

3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=$

$=3-2\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}=5$. ●

**Вправа 2.** Розкласти на множники:

1) $\sqrt{18}-\sqrt{6}$; 2) $m+\sqrt{m}$; 3) $a-b$, де $a>0$; $b>0$.

● 1) $\sqrt{18}-\sqrt{6}=\sqrt{6\cdot 3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

2) Вираз $m+\sqrt{m}$ має зміст, якщо $m\geq 0$. Для таких значень $m$ виконується рівність $m=\left(\sqrt{m}\right)^2$, тому:

$$m+\sqrt{m}=\left(\sqrt{m}\right)^2+\sqrt{m}=\sqrt{m}\left(\sqrt{m}+1\right).$$

3) Урахувавши, що $a>0$, $b>0$, матимемо:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$ ●

**Вправа 3.** Спростити вираз:

1) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-a$; 2) $\dfrac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}$.

● 1) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-a=\left(\sqrt{a}\right)^2-16-a=a-16-a=-16$.

2) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, матимемо:

$$\frac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}=\frac{b^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(b-\sqrt{3}\right)\left(b+\sqrt{3}\right)}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{b-\sqrt{3}}{2}.$$ ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Вправа 4.** Спростити вираз $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$.

● Звільнившись від ірраціональності в знаменниках дробів, матимемо:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}+\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}+\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-1=-3.$$ ●

1. На прикладі виразу $\sqrt{9a}$ покажіть, як винести множник з-під знака кореня.
2. На прикладі виразу $2\sqrt{b}$ покажіть, як внести множник під знак кореня.
3. На прикладі виразів $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ і $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ покажіть, як звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу.

«Усно

**541.** Спростіть вираз:

1) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$; 2) $9\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}-2\sqrt{5}$;

4) $2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}$; 5) $\left(2\sqrt{2}\right)^2$; 6) $3\sqrt{2}:\sqrt{2}$.

«1 2

**542.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{27}$; 3) $\sqrt{50}$; 4) $\sqrt{48}$;

5) $\sqrt{160}$; 6) $\sqrt{300}$; 7) $\sqrt{108}$; 8) $\sqrt{0{,}72}$.

**543.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{45}$; 3) $\sqrt{250}$; 4) $\sqrt{0{,}18}$.

**544.** Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$; 2) $\frac{2}{5}\sqrt{75}$; 3) $0{,}1\sqrt{300}$; 4) $-2{,}5\sqrt{8}$.

**545.** Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{27}$; 3) $0{,}2\sqrt{200}$; 4) $0{,}25\sqrt{48}$.

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**546.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $9\sqrt{10}$; 3) $4\sqrt{x}$; 4) $2\sqrt{3b}$;

5) $5\sqrt{0,2}$; 6) $0,1\sqrt{3}$; 7) $8\sqrt{\frac{1}{2}}$; 8) $\frac{1}{3}\sqrt{3a}$.

**547.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{5a}$; 3) $0,2\sqrt{10}$; 4) $2\sqrt{\frac{c}{2}}$.

**548.** Спростіть вираз:

1) $12\sqrt{3}+4\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{5}-6\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$;

4) $2\sqrt{3}+\sqrt{75}$; 5) $3\sqrt{6}-\sqrt{24}$; 6) $\sqrt{12}-\sqrt{27}$.

**549.** Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{32}-2\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{18}+\sqrt{8}$.

**550.** Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}$; 2) $\left(3\sqrt{3}\right)^2-25$;

3) $5\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{7}-10\sqrt{21}$; 4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}$;

5) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$; 6) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$;

7) $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$; 8) $\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)$.

**551.** Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{15}$; 2) $10-\left(2\sqrt{2}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{2}\left(3\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)$;

5) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+5\right)$; 6) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$.

**552.** Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-\sqrt{a}$; 2) $4\sqrt{x}-\sqrt{y}-3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$;

3) $\sqrt{4c}-\sqrt{9c}+\sqrt{49c}$; 4) $3\sqrt{2a}-\sqrt{18a}$.

**553.** Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{b}-\sqrt{9b}$; 2) $\sqrt{25x}+\sqrt{16x}-\sqrt{64x}$.

**554.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{3}{2\sqrt{a}}$.

**555.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{3b}{\sqrt{c}}$; 4) $\frac{x}{3\sqrt{2}}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**556.** Спростіть вираз:

1) $\left(2\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$;
2) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$;
3) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$;
4) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{(-11)^2}$;
5) $10\sqrt{10}:\left(2\sqrt{10}\right)+3$;
6) $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)-\sqrt{18}$.

**557.** Спростіть вираз:

1) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$;
2) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$;
3) $\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{360}$;
4) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{27}$.

**558.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{ab}$;
2) $\sqrt{k}\left(2\sqrt{k}-3\right)+3\sqrt{k}$;
3) $\left(\sqrt{x}+2\right)^2-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$;
4) $\left(a+\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{a}\right)+\left(\sqrt{a}\right)^2$.

**559.** Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)+n$;
2) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{ab}+1\right)^2$.

**560.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{5a^2}$, де $a>0$;
2) $\sqrt{kx^2}$, де $x<0$;
3) $\sqrt{m^3}$;
4) $\sqrt{25c^7}$;
5) $\sqrt{8n^4}$;
6) $\sqrt{2a^4b^2}$, де $b<0$.

**561.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{2x^2}$, де $x>0$;
2) $\sqrt{7b^2}$, де $b<0$;
3) $\sqrt{64a^3}$;
4) $\sqrt{27m^4n^6}$, де $n<0$.

**562.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{5}$, де $m>0$;
2) $3c\sqrt{3}$, де $c\geq 0$;
3) $b\sqrt{\frac{1}{b}}$;
4) $a^2\sqrt{2}$;
5) $x\sqrt{6}$, де $x<0$;
6) $2m^3\sqrt{\frac{mn}{2}}$, де $m<0$.

**563.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $b\sqrt{7}$, де $b\geq 0$;
2) $2x\sqrt{y}$, де $x>0$;
3) $n\sqrt{2n}$;
4) $b^2\sqrt{ab}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

5) $a\sqrt{3}$, де $a < 0$;

6) $3c\sqrt{\frac{b}{c}}$, де $c < 0$.

**564.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

3) $\frac{14}{3-2\sqrt{2}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;

5) $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$;

6) $\frac{2}{2\sqrt{b}+3}$.

**565.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$;

3) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

5) $\frac{c}{1-\sqrt{c}}$;

6) $\frac{1}{\sqrt{a}-a}$.

**566.** Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{15}+\sqrt{3}$;

2) $6-\sqrt{6}$;

3) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}$;

4) $c-\sqrt{c}$;

5) $m^2-5$;

6) $9-b$, де $b \geq 0$.

**567.** Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$;

2) $5+\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{2a}-\sqrt{a}$;

4) $\sqrt{b}+b$;

5) $c^2-3$;

6) $x-4$, де $x \geq 0$.

**568.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1}$;

2) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$;

3) $\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$;

4) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+2\sqrt{ab}+b}$.

**569.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2+2\sqrt{5}}$;

2) $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$;

3) $\frac{a+\sqrt{7}}{a^2-7}$;

4) $\frac{m-5}{\sqrt{m}+\sqrt{5}}$.

**570.** Доведіть, що є правильною рівність:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$;

2) $\sqrt{14-4\sqrt{6}}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

**571.** Доведіть, що рівність $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2$ є правильною.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**572.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;

2) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-2}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}+2}$.

**573.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$;

2) $\dfrac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}$.



## Інтерактивне завдання 16
## Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені



4

**574.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $x\sqrt{-x}$;

2) $3ab\sqrt{-\dfrac{1}{ab}}$, де $a>0$.

**575.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $2k\sqrt{-k}$;

2) $ab^3\sqrt{-ab}$, де $a<0$.

**576.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{2}{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{2}{9-4\sqrt{5}}$;

2) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

*Вказівка.* 3) Звільніться від ірраціональності в знаменниках дробів.

**577.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

2) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

**578.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{a-b}$;

2) $\dfrac{\sqrt{mn}+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{mn}-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

**579.** Спростіть вираз $\dfrac{x-y}{y+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$.

**580.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{mn}\left(\dfrac{1}{m-\sqrt{mn}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{mn}}\right)$, якщо $m=1{,}8$; $n=0{,}8$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### Вправи для повторення

**581.** Знайдіть значення виразу:

1) $3^{-4} \cdot (9^{-5} : 3^{-14})$; 2) $5^8 \cdot (5^{-5} + 5^{-6} + 5^{-7} + 5^{-8})$.

**582.** Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = 2x + 3$.

**583.** Чи існує значення змінної, для якого значення виразу $\left(\dfrac{x}{x+4} - \dfrac{x}{x-4}\right) : \dfrac{4x}{x^2-16}$ дорівнює 1?

**584.** Шлях між двома мостами плавець проплив за течією річки на 16 хв швидше, ніж проти течії. Знайдіть відстань між мостами, якщо швидкість плавця в стоячій воді дорівнює 60 м/хв, а швидкість течії річки — 40 м/хв.

### Поміркуйте



**585.** Доведіть, що значення виразу $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ є натуральним числом.

## 18 ФУНКЦІЯ $y = \sqrt{x}$

Якщо відома площа $S$ квадрата, то для знаходження його сторони $a$ можна скористатися формулою $a = \sqrt{S}$. Оскільки кожному значенню площі $S$ відповідає єдине значення сторони $a$, то змінна $a$ є функцією від змінної $S$. Перейшовши до прийнятих позначень функції й аргументу, матимемо функцію $y = \sqrt{x}$.

Вираз $\sqrt{x}$ має зміст, якщо $x \geq 0$. Тому областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина всіх невід'ємних чисел.

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$, склавши таблицю кількох значень $x$ та відповідних значень $y$:

| $x$ | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці (див. рис. 16). Якби для кожного не-



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

від'ємного значення $x$ обчислили відповідне значення $y$ й позначили точки з одержаними координатами на координатній площині, то мали б лінію, яка є графіком функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 17).

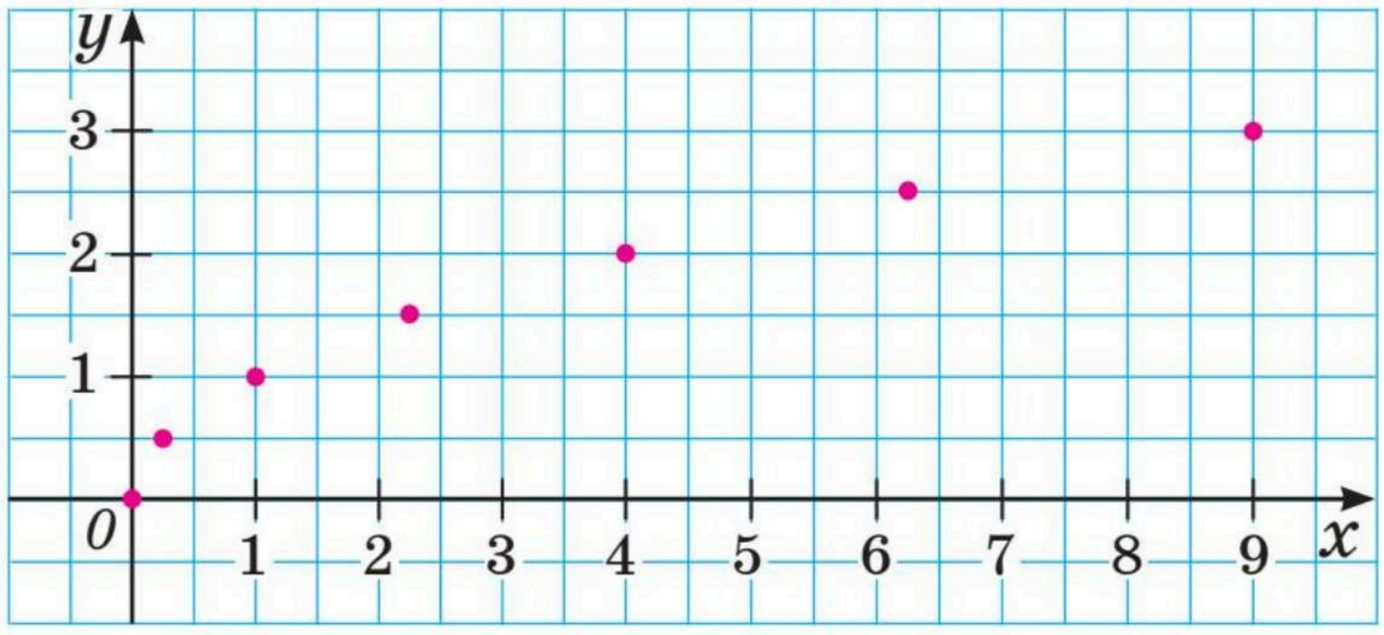



**Рис. 16**

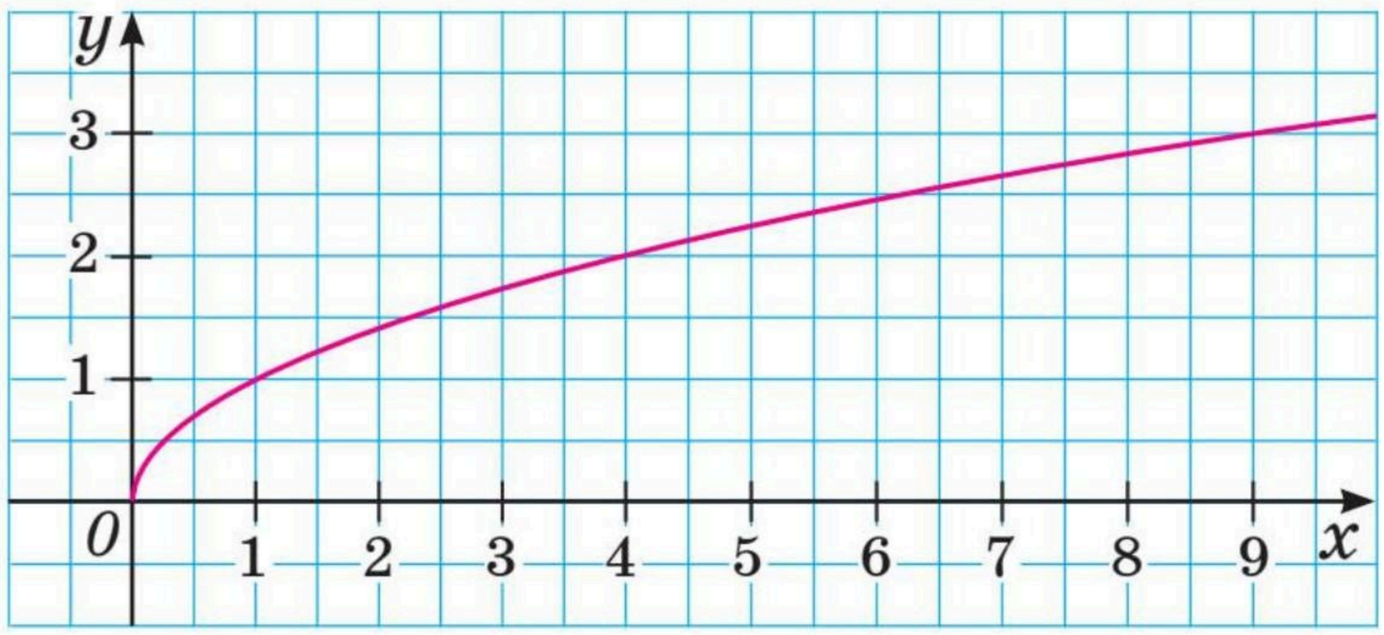



**Рис. 17**

Графік функції $y = \sqrt{x}$ називають *віткою параболи*. (Якщо цей графік повернути навколо початку координат на 90° проти годинної стрілки, то одержимо графік функції $y = x^2$, де $x \leq 0$.)

Функція $y = \sqrt{x}$ має такі властивості:

*1. Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел.*

*2. Областю значень функції теж є множина всіх невід'ємних чисел.*

*3. Якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $x > 0$, то $y > 0$.*

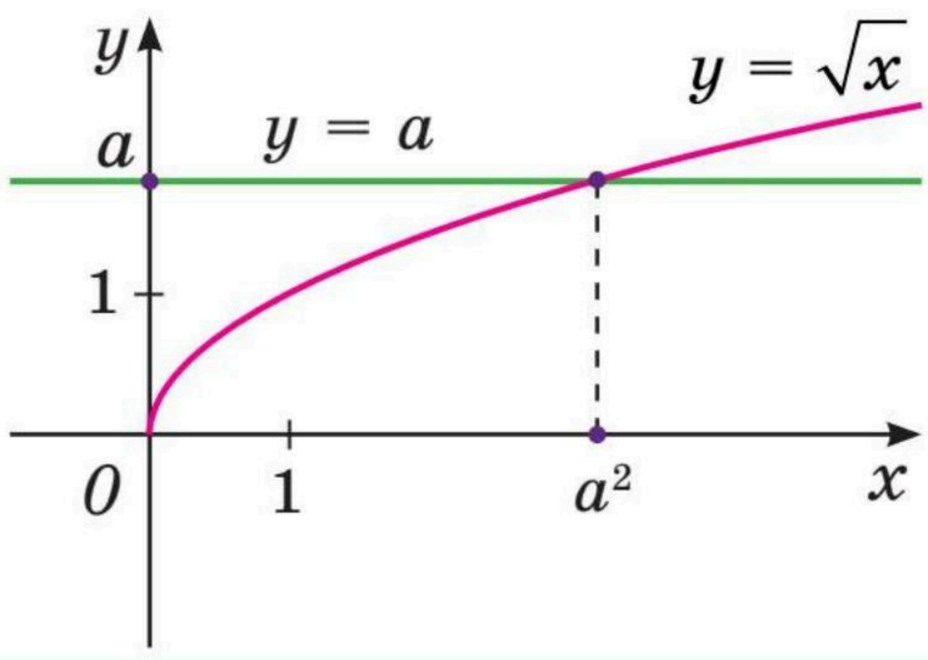
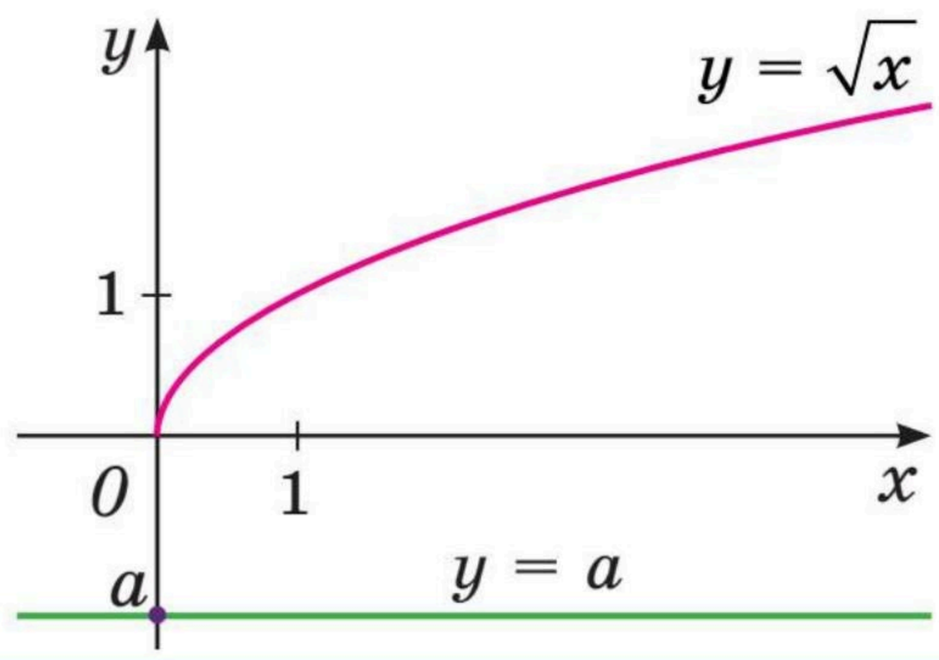
*4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції: якщо $x_1 < x_2$, то $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.*

Із властивості 3 випливає, що графік функції проходить через точку (0; 0), а інші точки графіка розташовані в першій чверті координатної площини.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Рівняння $\sqrt{x} = a$.** За означенням арифметичного квадратного кореня рівність $\sqrt{x} = a$ буде правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $a \geq 0$; 2) $x = a^2$. Отже, якщо $a \geq 0$, то рівняння $\sqrt{x} = a$ має єдиний корінь $x = a^2$, а якщо $a < 0$ — не має коренів.

| Рівняння $\sqrt{x} = a$ | |
|---|---|
| $a \geq 0$ | $a < 0$ |
|  |  |
| Один корінь: $x = a^2$ | Коренів немає |





Наприклад,
рівняння $\sqrt{x} = 5$ має єдиний корінь $x = 5^2 = 25$;
рівняння $\sqrt{x} = -2$ коренів не має.

### *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Порівняти числа:

1) $\sqrt{18}$ і $\sqrt{19}$; 2) $2{,}5$ і $\sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{50}$.

● Скористаємося властивістю 4 функції $y = \sqrt{x}$ (більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції).

1) Оскільки $18 < 19$, то $\sqrt{18} < \sqrt{19}$.

2) $2{,}5 = \sqrt{6{,}25}$. Оскільки $6{,}25 > 6$, то $\sqrt{6{,}25} > \sqrt{6}$, тобто $2{,}5 > \sqrt{6}$.

3) $3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$. Оскільки $45 < 50$, то $\sqrt{45} < \sqrt{50}$, тобто $3\sqrt{5} < \sqrt{50}$. ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Вправа 2.** Розв'язати рівняння:

1) $3\sqrt{x} - 12 = 0$; 2) $2\sqrt{x} + 4 = 0$; 3) $\sqrt{2x-3} = 7$.

● 1) $3\sqrt{x} - 12 = 0$; $3\sqrt{x} = 12$; $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Відповідь. 16.

2) $2\sqrt{x} + 4 = 0$; $2\sqrt{x} = -4$; $\sqrt{x} = -2$ — рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

3) $\sqrt{2x-3} = 7$; $2x - 3 = 49$; $2x = 52$; $x = 26$.

Відповідь. 26. ●

1. Які властивості має функція $y = \sqrt{x}$?
2. Як називають графік функції $y = \sqrt{x}$?
3. Для яких значень $a$ рівняння $\sqrt{x} = a$ має корені? Чому дорівнює корінь рівняння, якщо $a \geq 0$?

## Усно

**586.** Які з наведених тверджень щодо функції $y = \sqrt{x}$ є правильними?

1) Областю визначення функції є множина всіх додатних чисел.
2) Функція набуває лише невід'ємних значень.
3) Графік функції проходить через точку (25; 5).
4) Точка (16; 4) не належить графіку функції.

**587.** На рисунку 18 зображено графіки функцій $y = x$ та $y = \sqrt{x}$. Використовуючи рисунок, порівняйте числа $x$ і $\sqrt{x}$, якщо:

1) $x = 0$; 2) $0 < x < 1$;
3) $x = 1$; 4) $x > 1$.

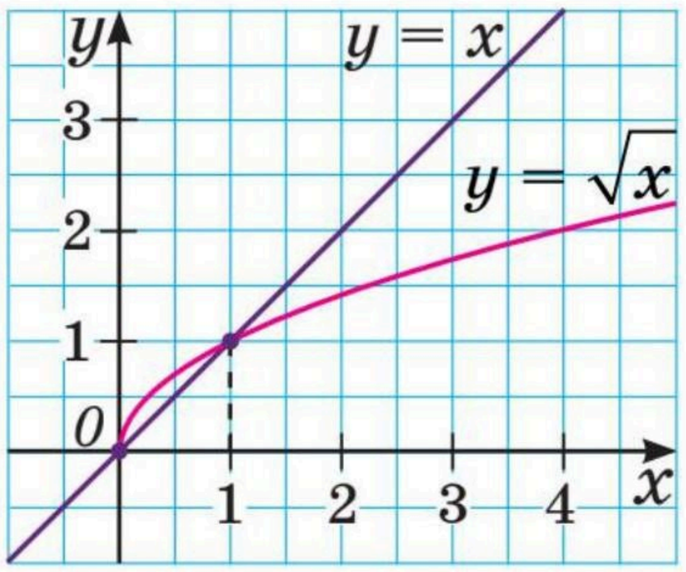



Рис. 18

## 1 2

**588.** Знайдіть значення функції $y = \sqrt{x}$, якщо $x = 16$; $x = 100$; $x = \frac{9}{25}$; $x = 0{,}49$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**589.** Знайдіть значення функції $y = \sqrt{x}$, якщо $x = 36$; $x = 1{,}44$; $x = \frac{4}{9}$.

**590.** Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:
1) $A(3; 9)$; 2) $B(49; 7)$; 3) $C(1{,}44; 1{,}2)$?

**591.** Чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точку:
1) $K(64; 8)$; 2) $L(6; 36)$; 3) $M(0{,}36; 0{,}6)$?

**592.** Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$, де $0 \le x \le 4$, та вкажіть область її значень.

**593.** Порівняйте числа:
1) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{2{,}4}$ і $\sqrt{2{,}3}$; 3) 9 і $\sqrt{80}$;
4) $2\sqrt{5}$ і $\sqrt{21}$; 5) 3 і $2\sqrt{2}$; 6) $5\sqrt{3}$ і $3\sqrt{5}$.

**594.** Порівняйте числа:
1) $\sqrt{8}$ і $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{24}$ і 5;
3) $4\sqrt{2}$ і $\sqrt{30}$; 4) $7\sqrt{2}$ і $4\sqrt{6}$.

**595.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{x} = 8$; 2) $\sqrt{x} = 1{,}5$; 3) $\sqrt{x} = -4$.

**596.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{x} = 10$; 2) $\sqrt{x} = -1$; 3) $\sqrt{x} = 0{,}6$.

**597.** Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює: 5; 12; 0,3.

**598.** Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює: 4; 20; 1,5.



**599.** Кінетичну енергію $E$ тіла обчислюють за формулою $E = \frac{mv^2}{2}$, де $m$ — маса тіла, $v$ — його швидкість. Задайте формулою залежність швидкості $v$ від енергії $E$.

**600.** Площу $S$ поверхні кулі обчислюють за формулою $S = 4\pi R^2$, де $R$ — радіус кулі. Задайте формулою залежність радіуса $R$ від площі $S$.

**601.** Знайдіть усі натуральні значення $x$, для яких значення функції $y = \sqrt{x}$ більші за $4\sqrt{3}$, але не більші за $\sqrt{52}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**602.** Скільки існує натуральних значень $x$, для яких виконується нерівність $4\sqrt{5}<\sqrt{x}\le 3\sqrt{10}$?

**603.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=x-2$; 2) $\sqrt{x}=x^2$.

**604.** Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x}=0{,}5x$.

**605.** Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sqrt{x}-3=9$; 2) $2\sqrt{x}-3=\sqrt{x}-4$;

3) $\sqrt{3x-2}=5$; 4) $3\sqrt{2x+5}-5=1$.

**606.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sqrt{x}+5=3$; 2) $8-\sqrt{x}=2$;

3) $\sqrt{2x+7}=1$; 4) $2\sqrt{x-1}+5=11$.



**Інтерактивне завдання 17**

**Функція $y=\sqrt{x}$**



**607.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-1}$; 2) $y=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x<0; \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 0. \end{cases}$

**608.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$; 2) $y=\begin{cases} x, \text{ якщо } x<1; \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$

**609.** Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x}=|x|$.

**610.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)\sqrt{x-2}=0$; 2) $\sqrt{x^2+2x+2}=1$.

**611.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$; 2) $\sqrt{2x^2-1}=7$.

***Вправи для повторення***

**612.** Спростіть вираз:

1) $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\cdot\dfrac{a^2-a}{a+1}$; 2) $\left(\dfrac{b-3}{b+2}-\dfrac{b-2}{b+3}\right):\dfrac{5}{b+3}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**613.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-5)^2=(5-x)(5+x)$; 2) $(x-3)(x+4)=x+24$.

**614.** На принтері мають надрукувати 24 сторінки тексту. Перші 5 сторінок принтер надрукував за 20 с. За скільки секунд принтер надрукує решту сторінок?

**615.** Із першого поля зібрали 96 т картоплі, а з другого — 36 т. Урожайність картоплі на першому полі на 2 т/га менша, ніж на другому. Знайдіть площу першого поля, якщо вона втричі більша за площу другого.

### *Поміркуйте*



**616.** Туристична група складається із 29 осіб. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є принаймні двоє друзів. Доведіть, що у групі знайдеться особа, яка має не менше ніж 14 друзів.

## Завдання для повторення § 2

**617.** Дано числа: $-25$; $3{,}8$; $8$; $0$; $-2{,}1$; $\sqrt{5}$; $\frac{2}{9}$; $0{,}(6)$; $-\sqrt{3}$; $1$; $-2\frac{1}{3}$; $\pi$; $0{,}101101110111110\ldots$ (кількість одиниць послідовно збільшується на 1). Із даних чисел випишіть:

1) усі цілі числа;
2) усі раціональні числа, які не є цілими;
3) усі ірраціональні числа.

**618.** Дано множину $M=\{-2;\ 1{,}5;\ 6{,}(25);\ \sqrt{7};\ 10;\ -\sqrt{3};\ 25\}$.

1) Чи правильно, що $1{,}5\in M$? $6\in M$? $7\notin M$? $25\notin M$?
2) Запишіть підмножину множини $M$, якій належать усі цілі числа множини $M$; усі ірраціональні числа.
3) Чи є множина $M$ підмножиною множини $\boldsymbol{Q}$? Множини $\boldsymbol{R}$?

**619.** Порівняйте числа:

1) $1{,}18$ і $1{,}183$; 2) $-3{,}4$ і $-3{,}5$; 3) $\frac{5}{12}$ і $\frac{4}{9}$; 4) $0{,}3$ і $\frac{1}{3}$;
5) $\sqrt{5}$ і $2{,}5$; 6) $-\sqrt{10}$ і $-\pi$; 7) $1{,}1745\ldots$ і $1{,}175\ldots$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**620.** Для яких значень $x$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{x}-1$; 2) $-\sqrt{x}$; 3) $\sqrt{-x}$; 4) $\sqrt{x^2}$?

**621.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16}+\sqrt{625}$; 2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{2,25}-10\sqrt{0,49}$;

3) $\frac{2}{3}\sqrt{81}+2\sqrt{\frac{9}{16}}$; 4) $\sqrt{8100}-6\sqrt{5\frac{4}{9}}$.

**622.** Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення коренів до сотих:

1) $\sqrt{10}-\sqrt{3}$; 2) $10\sqrt{4,5}+\sqrt{0,5}$.

**623.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{9\cdot 36}$; 2) $\sqrt{15\cdot 24\cdot 40}$; 3) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{500}$;

4) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$; 5) $\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{16}{81}}$; 6) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$;

7) $\sqrt{48^2}+\sqrt{(-48)^2}$; 8) $\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^8}$; 9) $\sqrt{(-5)^4}\cdot\sqrt{0,2^2}$.

**624.** Спростіть вираз:

1) $5\sqrt{6}-7\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; 2) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)+\left(\sqrt{3}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{10}$; 4) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+3\sqrt{3}$;

5) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1$; 6) $\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2-\sqrt{a^2}-9b$.

**625.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{200}$; 3) $\sqrt{5c^2}$, де $c>0$;

4) $\sqrt{27x^4}$; 5) $\sqrt{8ab^2}$, де $b<0$; 6) $\sqrt{2,25k^5}$.

**626.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $m\sqrt{7}$, де $m>0$; 3) $2n\sqrt{k}$, де $n<0$.

**627.** Запишіть у порядку зростання числа $7$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$, $\sqrt{50}$.

**628.** Розкладіть на множники:

1) $10+\sqrt{10}$; 2) $c-4$, де $c>0$; 3) $m^2-6$.

**629.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-1}$; 2) $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{b-3}$; 3) $\frac{c^2-10}{2c-2\sqrt{10}}$.

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**630.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{5}{2\sqrt{10}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{6}-2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}$.

**631.** Доведіть, що $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5}+2$.

**632.** Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\sqrt{6}-3} - \frac{1}{\sqrt{6}+3}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

**633.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 15$; 2) $(x-1)^2 = 9$; 3) $2x^2 = -0{,}2$.

**634.** Знайдіть усі значення $a$, для яких рівняння $x^2 = a^2 - 5$ має єдиний корінь.

**635.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 12$; 2) $2\sqrt{x}+5 = 3$; 3) $\sqrt{1-2x} = 3$.

**636.** Знайдіть усі значення $b$, для яких коренем рівняння $\sqrt{x} = b^2 - 1$ є число 9.

**637.** Побудуйте графік функції та знайдіть область її значень:

1) $y = x^2$, де $-0{,}5 \le x \le 2$; 2) $y = \sqrt{x}$, де $1 \le x \le 9$.

**638.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 + x|x|}{2}$; 2) $y = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \ge 0. \end{cases}$

**639.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 + 2 = -3x$; 2) $\sqrt{x} = 5 - 4x$.



**Інтерактивне завдання для самоперевірки 5**
**Квадратні корені. Дійсні числа**



## Завдання для самоперевірки № 5

***Початковий рівень***

**1.** Яке з наведених тверджень є неправильним?

**А** 5 — раціональне число.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Б** $\frac{2}{3}$ — дійсне число.

**В** $\sqrt{3}$ — ірраціональне число.

**Г** $\sqrt{5}$ — раціональне число.

**2.** Яка з наведених рівностей є правильною?

**А** $\sqrt{36}=4$ **Б** $\sqrt{49}=-7$ **В** $\sqrt{0{,}16}=0{,}4$ **Г** $\sqrt{4}=16$

**3.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{25\cdot 36}+\sqrt{\frac{9}{16}}$.

**А** $900\frac{9}{16}$ **Б** $30\frac{9}{16}$ **В** $20\frac{3}{4}$ **Г** $30\frac{3}{4}$

**4.** Спростіть вираз $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)+4\sqrt{2}$.

**А** $2-7\sqrt{2}$ **Б** $2+\sqrt{2}$ **В** $4-7\sqrt{2}$ **Г** $4+\sqrt{2}$

**5.** Яка з наведених точок належить графіку функції $y=x^2$?

**А** $K(16;\,4)$ **Б** $L(4;\,8)$ **В** $M(4;\,16)$ **Г** $N(-4;\,8)$

**6.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x}=9$.

**А** 3 **Б** $-3;\,3$ **В** $-81$ **Г** 81

### *Середній рівень*

**7.** Доберіть до кожного виразу (1–3) його значення (А–Д).

**1** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

**2** $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

**3** $\sqrt{3^2}+\sqrt{(-3)^2}$

**А** $-3$

**Б** 0

**В** 3

**Г** 6

**Д** 9

**8.** Спростіть вираз $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)-\left(\sqrt{3}\right)^2$.

**А** $-4$ **Б** $-2$ **В** 2 **Г** 4



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**9.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{3\sqrt{6}}$.

**А** $\frac{2}{3}$ **Б** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **В** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **Г** $\frac{\sqrt{6}}{9}$

**10.** Яке з чисел $4\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, $6$, $\sqrt{30}$ є найменшим?

**А** $4\sqrt{2}$ **Б** $3\sqrt{3}$ **В** $6$ **Г** $\sqrt{30}$

### *Достатній рівень*

**11.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$; 2) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}-b$.

**12.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$; 2) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$.

**13.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

**14.** Розв'яжіть графічно рівняння $x^2=-0{,}5x+1{,}5$.

### *Високий рівень*

**15.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-5\right)^2}+\sqrt{15}$; 2) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$.

**16.** Доведіть тотожність $\sqrt{m^4+4m^2+4}=m^2+2$.

**17.** Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{\sqrt{7}-3}-\frac{2}{\sqrt{7}+3}$; 2) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.

**18.** Розв'яжіть рівняння $(x-1)(x+2)\sqrt{2x+1}=0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

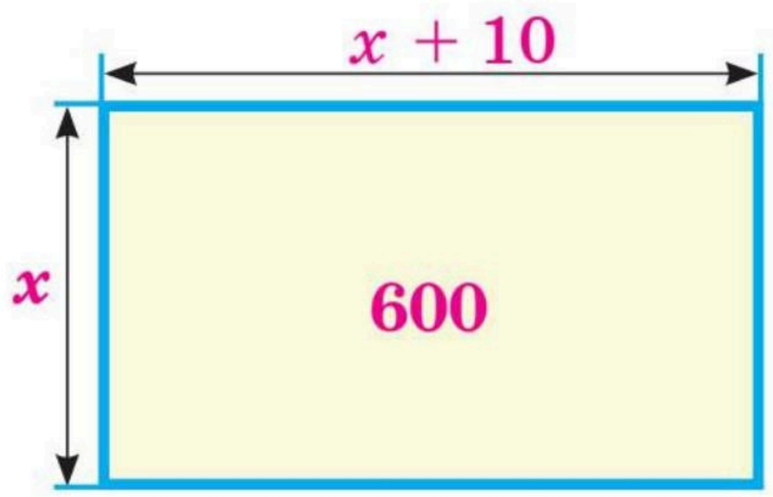
$$x_1 \cdot x_2 = 2$$

# § 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Є чимало задач, розв'язуючи які, одержують рівняння, що містять квадрат змінної.

У цьому параграфі ви дізнаєтеся:

- що таке квадратне рівняння;
- скільки коренів може мати квадратне рівняння;
- за якою формулою шукають корені квадратного рівняння;
- які властивості мають корені квадратного рівняння;
- що таке квадратний тричлен та як його розкладають на множники;
- як розв'язують задачі за допомогою квадратних рівнянь і рівнянь, які зводяться до квадратних.




$x(x + 10) = 600;$

$x^2 + 10x - 600 = 0$ — квадратне рівняння

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## 19 КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

**1. Квадратні рівняння.** У 7 класі ми розглядали лінійні рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, де $x$ — змінна, $a$ і $b$ — деякі числа (коефіцієнти рівняння). Рівняння $ax = b$ містить змінну $x$ лише в першому степені, і якщо $a \neq 0$, то саме рівняння називають ще рівнянням першого степеня з однією змінною.

Розглянемо задачу, яка приводить до рівняння, що містить змінну в другому степені (у квадраті).

**Задача.** Ділянка прямокутної форми має площу 600 м$^2$, а її довжина на 10 м більша за ширину. Знайти ширину ділянки.

Нехай ширина ділянки дорівнює $x$ м. Тоді її довжина дорівнює $(x + 10)$ м, а площа — $x(x + 10)$ м$^2$. За умовою задачі ця площа дорівнює 600 м$^2$, тому маємо рівняння $x(x + 10) = 600$, звідки

$$x^2 + 10x - 600 = 0.$$

Одержане рівняння називають *квадратним*.



*Означення.* ***Квадратним рівнянням*** **називають рівняння виду**

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

**де $x$ — змінна, $a$, $b$ і $c$ — деякі числа, до того ж $a \neq 0$.**

Числа $a$, $b$ і $c$ називають *коефіцієнтами* квадратного рівняння:

$a$ — перший коефіцієнт;

$b$ — другий коефіцієнт;

$c$ — вільний член.

Наприклад, $7x^2 - 3x + 5 = 0$ — квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт $a = 7$, другий коефіцієнт $b = -3$, вільний член $c = 5$.

Якщо у квадратному рівнянні перший коефіцієнт дорівнює 1, то таке рівняння називають ***зведеним квадратним рівнянням.***



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Наприклад, $x^2 + 10x - 600 = 0$, $x^2 + 3x = 0$, $x^2 - 6 = 0$ — зведені квадратні рівняння.

Будь-яке квадратне рівняння, яке не є зведеним, можна перетворити у рівносильне йому зведене квадратне рівняння. Наприклад, квадратне рівняння $7x^2 - 3x + 5 = 0$ не є зведеним. Поділивши обидві його частини на 7, одержимо зведене квадратне рівняння $x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{5}{7} = 0$.

**2. Неповні квадратні рівняння.**

Якщо в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів $b$ або $c$ дорівнює нулю, то таке рівняння називають ***неповним квадратним рівнянням.***

Наприклад, рівняння

$$x^2 + 9x = 0, \qquad 5x^2 - 25 = 0, \qquad 4x^2 = 0$$

є неповними квадратними рівняннями. У першому рівнянні $c = 0$, у другому — $b = 0$, у третьому — $b = 0$ і $c = 0$.

Отже, є три види неповних квадратних рівнянь:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$;

2) $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0, c \neq 0)$;

3) $ax^2 = 0$ $(a \neq 0)$.

Знайдемо корені рівнянь кожного виду.

1) Рівняння $ax^2 + bx = 0$ рівносильне рівнянню $x(ax + b) = 0$ і має два корені: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$ (оскільки $b \neq 0$, то $x_1 \neq x_2$).

2) Рівняння $ax^2 + c = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} > 0$ або $-\frac{c}{a} < 0$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; \qquad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то рівняння коренів не має.

3) Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь: $x = 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

| Неповні квадратні рівняння | | |
|---|---|---|
| $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ | $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0,\ c \neq 0)$ | $ax^2 = 0$ $(a \neq 0)$ |
| **Рівносильні рівняння** | | |
| $x(ax + b) = 0$ | $x^2 = -\frac{c}{a}$ | $x^2 = 0$ |
| **Корені рівняння** | | |
| $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$ | Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}};\ x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то коренів немає. | $x = 0$ |

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розв'язати рівняння $3x^2 - 6x = 0$.

● $3x(x - 2) = 0$; $3x = 0$ або $x - 2 = 0$; $x = 0$ або $x = 2$.
Відповідь. 0; 2. ●

**Вправа 2.** Розв'язати рівняння $2y^2 + 8 = 0$.

● $2y^2 = -8$; $y^2 = -4$ — рівняння коренів не має.
Відповідь. Коренів немає. ●

**Вправа 3.** Розв'язати рівняння $x(x - 2) = 9 - 2x$.

● $x^2 - 2x = 9 - 2x$; $x^2 = 9$; $x_1 = -3,\ x_2 = 3$.
Відповідь. $-3$; 3. ●

1. Що називають квадратним рівнянням?
2. Як у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ називають числа $a$, $b$ і $c$?
3. Яке рівняння називають зведеним квадратним рівнянням?
4. Які є види неповних квадратних рівнянь?
5. Як розв'язують неповні квадратні рівняння кожного виду? Наведіть приклади.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

«Усно

**640.** Які з наведених рівнянь є квадратними рівняннями?

1) $4x + 5^2 = 0$; 2) $7x^2 - x - 3 = 0$; 3) $\frac{1}{x^2} + 2x - 3 = 0$;

4) $9x^2 = 0$; 5) $-x^2 + 2 = 0$; 6) $-6y^2 - 24y = 0$.

**641.** Які з наведених рівнянь є неповними квадратними рівняннями? Зведеними квадратними рівняннями?

1) $x^2 + 5x - 2 = 0$; 2) $7y^2 + 1{,}8 = 0$; 3) $-x^2 - 2x = 0$;

4) $x^2 + \sqrt{3}\,x = 0$; 5) $3z^2 + 7z + 1 = 0$; 6) $x^2 = 0$.

**642.** Розв'яжіть неповне квадратне рівняння:

1) $x^2 - 4 = 0$; 2) $y^2 - 2y = 0$; 3) $5x^2 = 0$.

«1 2

**643.** Заповніть таблицю:

| Квадратне рівняння | Коефіцієнти рівняння | | |
|---|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c = 0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| | 4 | 1 | 3 |
| $-2x^2 - 3x + 1 = 0$ | | | |
| | 1 | 0 | $-24$ |
| | 3 | $-5$ | 0 |
| $5x^2 - 8 = 0$ | | | |
| | 7 | 0 | 0 |

**644.** Запишіть квадратне рівняння, коефіцієнти якого дорівнюють:

1) $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$; 2) $a = 3$; $b = 0$; $c = -7$;

3) $a = -1$; $b = 4$; $c = 5$; 4) $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$.

**645.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $2x^2 - 4 = 0$; 3) $7x^2 + 49 = 0$;

4) $x^2 - 3x = 0$; 5) $-5x^2 + 20x = 0$; 6) $4x^2 - 8{,}8x = 0$.

**646.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 64 = 0$; 2) $-6x^2 + 18 = 0$; 3) $2x^2 + 8 = 0$;

4) $x^2 + 8x = 0$; 5) $3x^2 - 81x = 0$; 6) $5x^2 + 3{,}5x = 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**647.** Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $3x^2 - 2x = 3x - 6$; 2) $x(x - 2) + 4 = 2x$;

3) $5x(x + 3) = 2x^2 + 1$; 4) $2x(x - 9) = x(x + 7)$.

**648.** Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $7x^2 - 2 = 4x + 5$; 2) $3x(x + 1) - 2 = x - 5$.

**649.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x = 5x$; 2) $7 - 2x^2 = 7 + 5x^2$;

3) $4(x^2 - 3) = 4x - 12$; 4) $2x(x - 3) = -x^2$.

**650.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 15x = 8x$; 2) $5x^2 - 3 = x^2 - 3$;

3) $2(x^2 + 5) = x + 10$; 4) $x(x + 2) = -x^2$.

**651.** Запишіть зведене квадратне рівняння, рівносильне рівнянню:

1) $2x^2 + 2x - 6 = 0$; 2) $-4x^2 - 10x + 8 = 0$.

**652.** Запишіть зведене квадратне рівняння, рівносильне рівнянню:

1) $5x^2 - 9x + 2 = 0$; 2) $-2x^2 + 12x + 6 = 0$.



## Інтерактивне завдання 18
## Неповні квадратні рівняння



3

**653.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7x + 3 = 3x^2 + 2x + 3$; 2) $2x^2 - (5x - 1) = 17 - 5x$;

3) $(x - 1)(x - 4) = 2x^2 - 5x$; 4) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 3x + 8$;

5) $3x(x - 0{,}4) + 1{,}2x = 1{,}08$; 6) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{6} = \dfrac{x^2}{9}$.

**654.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x + 7 = 7x^2 + x + 7$; 2) $3 - 2x + 3x^2 = x(x - 2)$;

3) $(3x - 5)(3x + 5) = 6x - 25$; 4) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 64$;

5) $3x(2x + 0{,}6) - 2x^2 - 0{,}64 = 1{,}8x$.

**655.** Знайдіть найменший корінь рівняння $(x^2 + 5x)(x^2 - 36) = 0$.

**656.** Знайдіть найбільший корінь рівняння $(x^2 - 49)(x^2 - 8x) = 0$.

**657.** Для яких значень $x$ значення виразу $x^2 - 5x$ на 4 більше за значення виразу $2x^2 + 4x - 4$?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**658.** Знайдіть усі значення $x$, для яких значення виразу $(2x - 7)(x + 4)$ дорівнює $-28$.

**659.** Знайдіть значення $b$, для якого число 5 є коренем рівняння $2x^2 + bx - 15 = 0$.

**660.** Знайдіть значення $c$, для якого число $-2$ є коренем рівняння $x^2 - 3x - c = 0$.

**661.** Для яких значень $a$ рівняння $(a^2 - 1)x^2 - ax + 3 = 0$ не є квадратним рівнянням?

«4

**662.** Знайдіть значення коефіцієнтів $a$ і $b$, для яких коренями рівняння $ax^2 + bx - 16 = 0$ є числа $-2$ і 4.

**663.** Знайдіть значення коефіцієнтів $a$ і $c$, для яких коренями рівняння $ax^2 + 3x + c = 0$ є числа $-1$ і $-2$.

**664.** Знайдіть усі значення $a$, для яких число 2 є коренем рівняння $a^2x^2 - 7x + 2a + 14 = 0$.

## *Вправи для повторення*

**665.** Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $x^2 - 14x + 49$; 2) $49x^2 - 28xy + 4y^2$.

**666.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$, якщо $x = 9{,}5$;

2) $\dfrac{2\sqrt{y} + 6}{y + 6\sqrt{y} + 9}$, якщо $y = 49$.

**667.** У парку першого дня посадили на 20 дерев більше, або на 40 % більше, ніж другого. Скільки дерев посадили в парку за два дні?

**668.** У сім'ї наприкінці кожного місяця записують покази лічильника холодної води. У таблиці наведено ряд показів.

| Місяць | Січень | Лютий | Березень |
|---|---|---|---|
| Покази лічильника ($м^3$) | 1454 | 1466 | 1480 |

За лютий заплатили за воду 312 грн. Скільки гривень доведеться заплатити за березень, якщо вартість 1 $м^3$ води протягом цих трьох місяців не змінюють?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### Поміркуйте



**669.** На дошці записано 99 натуральних чисел. Доведіть, що можна витерти одне з них так, що сума чисел, які залишаться, буде парною.

## 20 ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Виведемо формулу, яка дозволяє шукати корені будь-якого квадратного рівняння, знаючи його коефіцієнти. Для цього розв'яжемо в загальному вигляді квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (оскільки $a \neq 0$, то $4a \neq 0$). Одержимо рівносильне йому рівняння

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

У лівій частині рівняння виділимо квадрат двочлена:

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають ***дискримінантом*** квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою $D$, тобто

$$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac.}$$

Враховуючи дане позначення, рівняння (2) можна записати у вигляді:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Наявність коренів рівняння та їх кількість залежать від знака числа $D$. Розглянемо три можливі випадки: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

**1)** Якщо $D > 0$, то з рівняння (3) матимемо:

$$2ax + b = -\sqrt{D} \text{ або } 2ax + b = \sqrt{D};$$

$$2ax = -b - \sqrt{D} \text{ або } 2ax = -b + \sqrt{D};$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ або } x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Отже, якщо $D > 0$, то квадратне рівняння (1) має два корені:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Ці дві формули для коренів можна об'єднати в одну:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.}$$

Одержану формулу називають ***формулою коренів квадратного рівняння.***

**2)** Якщо $D = 0$, то з рівняння (3) матимемо:

$$(2ax + b)^2 = 0; \quad 2ax + b = 0; \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Отже, якщо $D = 0$, то квадратне рівняння (1) має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$.

Цей корінь можна знайти і за формулою коренів квадратного рівняння. Справді, якщо $D = 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Тому іноді кажуть: якщо $D = 0$, то квадратне рівняння (1) має два рівні корені, кожний з яких дорівнює $-\frac{b}{2a}$.

**3)** Якщо $D < 0$, то рівняння (3) не має коренів, бо його ліва частина набуває невід'ємних значень, а права частина є від'ємним числом.

Отже, якщо $D < 0$, то квадратне рівняння (1) не має коренів.

### *Підсумок: корені квадратного рівняння*

| Квадратне рівняння | Дискримінант $D = b^2 - 4ac$ | Корені рівняння |
|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c = 0$ | $D > 0$ | $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ |
| | $D = 0$ | $x = -\frac{b}{2a}$ |
| | $D < 0$ | Коренів немає |



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

*Розв'язувати квадратне рівняння доцільно так:*

1. Обчислити дискримінант $D = b^2 - 4ac$ і порівняти його з нулем.

2. Якщо $D \geq 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Якщо $D < 0$, то записати, що рівняння не має коренів.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розв'язати рівняння:

1) $x^2 + 3x - 10 = 0$; 2) $x^2 - 5x + 2 = 0$.

● 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$; $D > 0$.

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2}$; $x_1 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$; $x_2 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$.

Відповідь. $-5$; $2$.

2) $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$; $D > 0$. $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. (Або $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$; $\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.) ●

**Вправа 2.** Розв'язати рівняння:

1) $5x^2 + 3x + 2 = 0$; 2) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

● 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9 - 40 = -31$.

Оскільки $D < 0$, то рівняння не має коренів.

Відповідь. Коренів немає.

2) $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5. ●

**Вправа 3.** Розв'язати рівняння $x^2 - \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{6} = 0$.

● Помноживши обидві частини рівняння на 6, одержимо рівносильне йому рівняння з цілими коефіцієнтами: $6x^2 - 5x + 1 = 0$. Для цього рівняння матимемо:

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$; $D > 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}; \qquad x_1 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}$. ●

**Вправа 4.** Для яких значень $m$ рівняння $2x^2 - mx + 2m = 0$ має один корінь?

● Знайдемо дискримінант рівняння:

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2m = m^2 - 16m.$$

Рівняння матиме один корінь, якщо $D = 0$, звідки:

$$m^2 - 16m = 0; \quad m(m - 16) = 0; \quad m = 0 \text{ або } m = 16.$$

Відповідь. $m = 0$; $m = 16$. ●

1. Що називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від знака дискримінанта?
3. За якою формулою шукають корені квадратного рівняння?

«Усно

**670.** Чи правильно записано дискримінант квадратного рівняння:

1) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$;
2) $x^2 - 3x - 4 = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$;
3) $3y^2 - y + 2 = 0$; $D = (-1)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2$;
4) $-2x^2 + 5x + 7 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7$?

**671.** Скільки коренів має рівняння:

1) $7x^2 - x + 1 = 0$; $D = -27$; 2) $z^2 + 4z - 3 = 0$; $D = 28$;
3) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = 0$?

«1 2

**672.** Знайдіть дискримінант і вкажіть кількість коренів квадратного рівняння:

1) $x^2 + 6x + 10 = 0$; 2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;
3) $4y^2 + 4y + 1 = 0$; 4) $-3x^2 + 6x - 2 = 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**673.** Знайдіть дискримінант і вкажіть кількість коренів квадратного рівняння:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
2) $2z^2 - 5z + 4 = 0$;
3) $-x^2 + 8x - 16 = 0$.

**674.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
2) $x^2 + 4x - 12 = 0$;
3) $y^2 + 7y + 10 = 0$;
4) $x^2 - 3x + 4 = 0$;
5) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
6) $z^2 - 3z - 2 = 0$.

**675.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $y^2 + 5y + 4 = 0$;
3) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
4) $x^2 - 2x + 6 = 0$;
5) $z^2 - 8z + 16 = 0$;
6) $x^2 - 5x + 5 = 0$.

**676.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
2) $2y^2 + y - 1 = 0$;
3) $3k^2 + 5k - 2 = 0$;
4) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
5) $2x^2 - 3x + 2 = 0$;
6) $7x^2 - 6x - 1 = 0$.

**677.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;
2) $3m^2 - 4m + 1 = 0$;
3) $2x^2 + x - 3 = 0$;
4) $4y^2 - 4y + 1 = 0$.

**678.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 5x - 4$;
2) $y^2 - 2y = 2 - y$;
3) $2k^2 + 7k - 3 = 1$;
4) $2x^2 + 3x = 1 - 2x^2$.

**679.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 2x = 3$;
2) $2z^2 - 3z = 2z - 2$.

**680.** Знайдіть усі значення $x$, для яких:

1) значення виразу $x^2 + 10x + 16$ дорівнює 0;
2) значення функції $y = x^2 - 2x$ дорівнює 15;
3) значення виразу $2x^2 + 7x$ дорівнює значенню виразу $2x - 3$.

**681.** Знайдіть усі значення $a$, для яких:

1) значення виразу $a^2 - 9a + 27$ дорівнює 7;
2) значення виразу $2a^2 - a$ дорівнює значенню виразу $2a + 5$.



**Інтерактивне завдання 19**
**Формула коренів квадратного рівняння**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**682.** Розв'яжіть рівняння:

1) $-4z^2 + 8z + 4 = 0$;

2) $-25x^2 + 50x + 75 = 0$;

3) $y^2 + 1{,}2y + 0{,}2 = 0$;

4) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$.

**683.** Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 30x + 30 = 0$;

2) $-12y^2 - 36y + 48 = 0$;

3) $x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 = 0$;

4) $5x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$.

**684.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = x^2$ та $y = 4x + 12$;

2) $y = x^2$ та $y = -3x - 5$.

**685.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ та $y = -2x + 8$.

**686.** Знайдіть усі значення $k$, для яких значення різниці многочленів $k^2 - 6k$ і $2k^2 - 3k - 4$ дорівнює $-6$.

**687.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 1)(x - 3) = 3x - 7$;

2) $x(x - 2) + x^2 = 3(x + 1)$;

3) $(x - 1)^2 = 4(1 - x)(1 + x)$;

4) $(3x - 2)(3x + 2) = 6(x - 1) + 9$;

5) $(2x + 1)^2 - (x - 2)(x + 2) = (x + 3)^2$.

**688.** Розв'яжіть рівняння:

1) $5(x^2 - 2) = x(1 - x) - 5x$;

2) $(x - 4)(x - 6) = x(2x - 15)$;

3) $6x^2 + 20x = (2x - 5)(2x + 5)$;

4) $(2x + 3)^2 - 8(x + 2) = 1 - (x + 2)^2$.

**689.** Знайдіть два послідовні цілі числа, сума квадратів яких дорівнює 85.

**690.** Знайдіть два послідовні натуральні числа, добуток яких більший за їх суму на 29.

**691.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - x}{3} = \frac{x^2 - 1}{4}$;

2) $\frac{y^2 + y}{4} = \frac{7y - 5}{6} + \frac{1}{3}$.

**692.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{t^2 + 3t}{2} = \frac{t + 7}{4}$;

2) $\frac{y^2 - 3}{9} - \frac{y - 3}{6} = \frac{2}{3}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

4

**693.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3\sqrt{2}x - 8 = 0$;

2) $\sqrt{x-4}\left(x^2 - 7x + 10\right) = 0$;

3) $y^2 + 4|y| - 12 = 0$;

4) $|z^2 - 3z - 4| = 6$.

**694.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$;

2) $|y^2 - 4y + 3| = 8$;

3) $\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x^2 + 2x - 15\right) = 0$.

**695.** Знайдіть усі значення $b$, для яких число $-3$ є одним з коренів рівняння $20x^2 + bx - b^2 = 0$.

**696.** Для яких значень $a$ має один корінь рівняння:

1) $3x^2 - 6x + 2a = 0$; 2) $x^2 + (a+1)x + a = 0$?

**697.** Для яких значень $b$ рівняння $2x^2 - bx + 8 = 0$ має один корінь?

**698.** Доведіть, що рівняння $x^2 - 2bx + b^2 + 1 = 0$ не має коренів для будь-якого значення $b$.

**699.** Доведіть, що рівняння $x^2 + kx - 3 = 0$ має два корені для будь-якого значення $k$.

### *Вправи для повторення*

**700.** Доберіть два числа, сума яких дорівнює 8, а добуток — 12. Перевірте, чи є ці числа коренями квадратного рівняння $x^2 - 8x + 12 = 0$.

**701.** Знайдіть значення виразів $x_1 + x_2$ та $x_1 x_2$, якщо:

1) $x_1 = 5 - \sqrt{10}$; $x_2 = 5 + \sqrt{10}$;

2) $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.

**702.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{a^2}{1-a} - \dfrac{a^3}{1-a^2}$, якщо $a = \sqrt{3}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**703.** Від Кропивницького до Харкова автомобіль рухався трасою, довжина якої на карті з масштабом 1 : 5 000 000 дорівнює 7,7 см. З якою швидкістю рухався автомобіль, якщо поїздка тривала 5 год?

### *Поміркуйте*



**704.** Розв'яжіть рівняння $\left[x^2\right]+x-12=0$, де $[a]$ — найбільше ціле число, що не перевищує $a$. (Наприклад, $[3{,}2]=3$; $[3]=3$; $[-3{,}2]=-4$.)

### *Цікаво знати*



Квадратні рівняння окремих видів вміли розв'язувати вавилонські вчені ще близько 2 тис. років до н. е. Пізніше давньогрецькі та індійські математики розв'язували деякі види квадратних рівнянь геометрично (з використанням побудов). У IX ст. перський математик **Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі** зібрав і систематизував способи розв'язування квадратних рівнянь. У трактаті «Кітаб аль-джебр ва-ль-мукабала» він описав прийоми розв'язування рівнянь виду $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, де $a$, $b$, $c$ — додатні числа. Поділ квадратних рівнянь на такі види обумовлений тим, що на той час не використовували від'ємних чисел (їх вважали «несправжніми»), тому коефіцієнти у рівняннях мали бути додатними.

Спосіб розв'язування квадратних рівнянь набув сучасного вигляду лише у XVII ст. завдяки працям **А. Жирара***, **Р. Декарта** та **І. Ньютона**.

## 21 ТЕОРЕМА ВІЄТА

**1. Теорема Вієта.** Розглянемо зведені квадратні рівняння:

$x^2+2x-3=0$; $x^2-6x+8=0$; $x^2+5x+4=0$.

Знайдемо корені кожного із цих рівнянь, а також суму коренів і їх добуток. Результати занесемо в таблицю:

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»



* Альбе́р Жирар (1595–1632) — французький математик.

| Рівняння | Корені: $x_1;\ x_2$ | Сума коренів: $x_1 + x_2$ | Добуток коренів: $x_1 \cdot x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x^2 + 2x - 3 = 0$ | $-3; 1$ | $-2$ | $-3$ |
| $x^2 - 6x + 8 = 0$ | $2; 4$ | $6$ | $8$ |
| $x^2 + 5x + 4 = 0$ | $-4; -1$ | $-5$ | $4$ |

З таблиці видно, що сума коренів кожного з рівнянь дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Це правильно для будь-якого зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, яке має корені.

*Теорема (Вієта).* **Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.**

*Доведення.* Нехай $x_1$ та $x_2$ — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. Тоді

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2},\quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2},\ \text{де}\ D = p^2 - 4q.$$

Оскільки рівняння має корені, то $D \geq 0$. Якщо $D > 0$, то корені різні, а якщо $D = 0$, то в даному випадку вважають, що рівняння має два рівні корені: $x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$.

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорему доведено. ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Теорему Вієта можна сформулювати так:

**Якщо $x_1$, $x_2$ — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то:**

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доведену теорему називають «теоремою Вієта» на честь французького математика Франсуа Вієта, який першим помітив залежність між коренями та коефіцієнтами квадратного рівняння.

На основі теореми Вієта можна, не шукаючи коренів квадратного рівняння, знаходити їх суму та добуток.



**Франсуа Вієт**
(1540–1603),
французький математик

Зазначимо, що теорема Вієта стосується лише квадратних рівнянь, які *мають корені*.

Розглянемо, наприклад, рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$. Воно має корені, бо $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$. Якщо $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння, то, за теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 = -(-5) = 5; \quad x_1 \cdot x_2 = 3.$$

*Зауваження 1.* Нехай рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені. З рівності $x_1 \cdot x_2 = q$ випливає: якщо $q > 0$, то ці корені обидва додатні або обидва від'ємні; якщо $q < 0$, то корені мають різні знаки.

*Зауваження 2.* Якщо коефіцієнти рівняння $x^2 + px + q = 0$ є цілими числами, то з рівності $x_1 \cdot x_2 = q$ випливає, що цілими коренями такого рівняння можуть бути лише дільники числа $q$.

Наприклад, цілими коренями рівняння $x^2 + px + 5 = 0$ можуть бути лише числа 1, 5, −1 або −5.

**2. Сума та добуток коренів довільного квадратного рівняння.** Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ рівносильне зведеному квадратному рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Тому за теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Якщо $x_1$, $x_2$ — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

## 3. Теорема, обернена до теореми Вієта.

*Теорема.* **Якщо числа $m$ і $n$ такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то ці числа є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.**

*Доведення.* Оскільки $m + n = -p$, $m \cdot n = q$, то $p = -(m + n)$, $q = mn$. Тому рівняння $x^2 + px + q = 0$ можна записати у вигляді

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0. \qquad (1)$$

Якщо $x = m$ або $x = n$, то значення лівої частини рівняння (1) дорівнює нулю. Справді,

якщо $x = m$, то $m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0$;

якщо $x = n$, то $n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0$.

Отже, числа $m$ і $n$ є коренями рівняння (1), а тому й коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$. Теорему доведено. ●

На основі теореми, оберненої до теореми Вієта, можна:

1) перевірити, чи є деякі два числа коренями заданого квадратного рівняння;

2) розв'язати квадратне рівняння шляхом добору його коренів;

3) скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є деякі задані два числа.

Розглянемо відповідні приклади.

**Приклад 1.** Чи є коренями рівняння $x^2 - 2x - 15 = 0$ числа $-3$ і $5$?

*Розв'язання.* Знайдемо суму чисел $-3$ і $5$ та їх добуток: $-3 + 5 = 2$; $(-3) \cdot 5 = -15$. Сума чисел дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток — вільному члену. Тому за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа $-3$ і $5$ є коренями даного рівняння. ●

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$ шляхом добору його коренів.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

*Розв'язання.* Нехай $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння. Тоді

$$x_1 + x_2 = -2,$$
$$x_1 \cdot x_2 = -8.$$

Перевіримо, чи можуть коренями рівняння бути цілі числа. Рівність $x_1 \cdot x_2 = -8$ є правильною для таких пар цілих чисел: $-1$ і 8; $-2$ і 4; $-4$ і 2; $-8$ і 1. Із цих пар лише сума чисел третьої пари дорівнює $-2$. Тому за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа $-4$ і 2 є коренями даного квадратного рівняння. Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Відповідь. $-4$; 2. ●

**Приклад 3.** Скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа $-9$ і 4.

*Розв'язання.* Нехай $x_1 = -9$, $x_2 = 4$. Оскільки $x_1 + x_2 = -5$, $x_1 \cdot x_2 = -36$, то за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа $x_1$ та $x_2$ є коренями рівняння $x^2 + 5x - 36 = 0$.

Відповідь. $x^2 + 5x - 36 = 0$. ●

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 6x + 1 = 0$, знайти суму та добуток його коренів.

● $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 36 - 12 = 24$. Оскільки $D > 0$, то дане рівняння має корені. Нехай $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння. За формулами $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ знаходимо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-6}{3} = 2; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. 2; $\frac{1}{3}$. ●

**Вправа 2.** Знайти коефіцієнти зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа $-3$ і 6.

● Нехай $x_1 = -3$, $x_2 = 6$. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Тому

$$p = -(x_1 + x_2) = -(-3 + 6) = -3; \qquad q = x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 6 = -18.$$

Відповідь. $p = -3$; $q = -18$. ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Вправа 3.** Знайти значення виразу $5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2$, де $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $x^2 - 9x + 16 = 0$.

● За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 \cdot x_2 = 16$. Тоді:

$$5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2 = 5\sqrt{16} - 9^2 = 5 \cdot 4 - 81 = -61.$$

Відповідь. $-61$. ●

**Вправа 4.** Корені $x_1$ та $x_2$ рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = -6$. Знайти ці корені та коефіцієнт $c$.

● За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 10$. Урахувавши рівність $3x_1 - x_2 = -6$, матимемо систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10; \\ 3x_1 - x_2 = -6, \end{cases}$ звідки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10; \\ 4x_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 9. \end{cases}$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 9$ — корені рівняння. Тоді

$$c = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 9 = 9.$$

Відповідь. 1; 9 — корені рівняння; $c = 9$. ●



1. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
2. Чому дорівнює сума та добуток коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.

## Усно

**705.** Кожне з наведених рівнянь має корені. Знайдіть суму та добуток цих коренів:

1) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
2) $y^2 + 6y - 27 = 0$;
3) $3x^2 - 6x - 2 = 0$;
4) $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

**706.** Один з коренів рівняння дорівнює 3. Знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
2) $z^2 - 2z - 3 = 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**707.** Кожне з наведених рівнянь має корені. Які з цих рівнянь мають додатні корені? Від'ємні корені? Корені різних знаків?

1) $x^2 - 15x + 18 = 0$; 2) $x^2 + 15x + 18 = 0$;
3) $y^2 - 15y - 18 = 0$; 4) $18x^2 - 15x + 1 = 0$.

**708.** Використовуючи теорему Вієта, поясніть, чому наведені числа не є коренями рівняння.

| Рівняння | Числа |
|---|---|
| 1) $x^2 - 11x + 10 = 0$ | 5 і 6 |
| 2) $x^2 + 9x + 14 = 0$ | 2 і 7 |
| 3) $x^2 + 4x - 21 = 0$ | $-3$ і 7 |

«« 1 2

**709.** Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

1) $x^2 + 14x + 36 = 0$; 2) $x^2 + 8x - 15 = 0$;
3) $3y^2 - 4y + 1 = 0$; 4) $10x^2 - x - 3 = 0$;
5) $x^2 + 1{,}5x = 0$; 6) $10z^2 - 3 = 0$.

**710.** Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

1) $x^2 - 9x + 18 = 0$; 2) $x^2 + 20x + 25 = 0$;
3) $2z^2 + 16z - 5 = 0$; 4) $6x^2 - x - 1 = 0$.

**711.** Перевірте, чи є коренями рівняння наведені числа:

1) $x^2 - 15x + 54 = 0$; 6 і 9;
2) $y^2 + 2y - 35 = 0$; $-5$ і 7;
3) $x^2 + 2{,}5x + 1 = 0$; $-2$ і $-0{,}5$;
4) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$.

**712.** Перевірте, чи є коренями рівняння наведені числа:

1) $x^2 + 3x - 28 = 0$; $-7$ і 4;
2) $k^2 + 17k + 60 = 0$; 5 і 12;
3) $y^2 - 4{,}5y + 5 = 0$; 2 і 2,5;
4) $9x^2 - x + 2 = 0$; $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**713.** Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 4 і 6; 2) −4 і 5; 3) −7 і 2; 4) −3 і −2.

**714.** Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 2 і 5; 2) −2 і 5; 3) 2 і −5; 4) −2 і −5.

**715.** Запишіть усі цілі числа, які можуть бути коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо:

1) $q = 7$; 2) $q = -3$; 3) $q = 9$; 4) $q = -6$.

**716.** Розв'яжіть рівняння шляхом добору його коренів:

1) $x^2 + 4x + 3 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
3) $z^2 + 7z + 12 = 0$; 4) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
5) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 6) $y^2 - 8y - 9 = 0$;
7) $x^2 - 2x - 8 = 0$; 8) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

**717.** Розв'яжіть рівняння шляхом добору його коренів:

1) $x^2 - 6x + 5 = 0$; 2) $x^2 + 8x + 15 = 0$;
3) $y^2 + 10y + 16 = 0$; 4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $z^2 + 7z - 18 = 0$.

**718.** Не розв'язуючи рівняння, знайдіть знаки його коренів (якщо корені існують):

1) $x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $m^2 - 12m + 38 = 0$;
3) $2x^2 - 15x - 18 = 0$; 4) $8x^2 - 8x + 1 = 0$.

**719.** Не розв'язуючи рівняння, знайдіть знаки його коренів (якщо корені існують):

1) $x^2 - 9x + 15 = 0$; 2) $3x^2 + 20x + 30 = 0$.

**720.** Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

1) 2 і −1,5; 2) $\frac{1}{5}$ і $\frac{2}{15}$; 3) $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ і $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

**721.** Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

1) −0,5 і −4; 2) $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{3}$; 3) $1-\sqrt{3}$ і $1+\sqrt{3}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**722.** Знайдіть коефіцієнти $p$ і $q$ зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа:
1) $-15$ і $3$; 2) $-1{,}4$ і $-5$.

**723.** Число $-9$ є коренем рівняння $x^2 + 10x + q = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт $q$.

**724.** Число $-2$ є коренем рівняння $x^2 + px - 6 = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт $p$.

**725.** Числа $x_1$ та $x_2$ є коренями рівняння $x^2 - 6x - 4 = 0$. Знайдіть значення виразу:
1) $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$; 2) $7x_1x_2 - 5x_1 - 5x_2$.

**726.** Знайдіть значення виразу $4x_1 + 4x_2 - 3x_1x_2$, якщо $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $x^2 - 7x + 9 = 0$.

**727.** Знайдіть значення $m$, для якого добуток коренів рівняння $x^2 + 8x + 4m + 7 = 0$ дорівнює: 1) 15; 2) 19.

**728.** Знайдіть усі значення $b$, для яких сума коренів рівняння $x^2 - 5b^2x - 4 = 0$ дорівнює 20.



**Інтерактивне завдання 20**
**Теорема Вієта**



«« 4

**729.** Рівняння $x^2 + px + 8 = 0$ має додатні корені, один з яких у 4 рази більший за другий. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт $p$.

**730.** Один з коренів рівняння $x^2 - 5x + q = 0$ більший за другий на 4. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт $q$.

**731.** Корені $x_1$ та $x_2$ рівняння $x^2 - 10x + b = 0$ задовольняють умову $x_1 - 3x_2 = 2$. Знайдіть ці корені та коефіцієнт $b$.

**732.** Рівняння $x^2 - 2x - 5 = 0$ має корені $x_1$ та $x_2$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:
1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $(x_1 + 2)(x_2 + 2)$;
3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $(x_1 - x_2)^2$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**733.** Рівняння $x^2 + 8x + 5 = 0$ має корені $x_1$ та $x_2$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$; 2) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

**734.** Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого на 2 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 5x - 2 = 0$.

## *Вправи для повторення*

**735.** Розкладіть на множники:

1) $x^2 - a^2 - 2x - 2a$; 2) $x^2 - 4x + bx - 4b$.

**736.** Спростіть вираз:

1) $\frac{m^3 - 4m}{m-2} - m^2 + 2m$; 2) $\frac{5a - a^2}{a^2 - 10a + 25} - \frac{a+1}{5-a}$.

**737.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - 3y = 7; \\ 3x + 8y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = xy; \\ x^2 - y = (x+1)^2. \end{cases}$

**738.** Із двох виноградників цього року зібрали 300 ц винограду, а торік — 290 ц. Знайдіть площу кожного виноградника, використовуючи дані таблиці:

| | Урожайність винограду, ц/га | |
|---|---|---|
| | Цього року | Торік |
| 1-й виноградник | 200 | 220 |
| 2-й виноградник | 250 | 225 |

## *Поміркуйте*

**739.** Готуючись до математичного турніру, Мар'яна за 5 днів розв'язала 31 задачу, до того ж кожного дня вона розв'язувала більше задач, ніж попереднього, а п'ятого — утричі більше, ніж першого. Скільки задач розв'язала Мар'яна четвертого дня?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Інтерактивне завдання для самоперевірки 6**
**Квадратні рівняння. Теорема Вієта**

# Завдання для самоперевірки № 6

## *Початковий рівень*

**1.** Скільки коренів не може мати квадратне рівняння?

**А** Один **Б** Два **В** Три **Г** Жодного

**2.** Яка з наведених рівностей щодо дискримінанта квадратного рівняння $3x^2 + 2x - 1 = 0$ є правильною?

**А** $D = 2^2 - 4 \cdot (-1)$ **Б** $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$

**В** $D = 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot (-1)$ **Г** $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)$

**3.** Розв'яжіть рівняння $y^2 - 2y = 0$.

**А** 0 **Б** 0; −2 **В** 0; 2 **Г** 2

**4.** Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x - 8 = 0$.

**А** 1; 8 **Б** 7; 8 **В** −8; 1 **Г** −1; 8

**5.** Знайдіть суму коренів рівняння $x^2 + 11x + 30 = 0$.

**А** 11 **Б** −11 **В** 30 **Г** −30

**6.** Яке з наведених рівнянь не має коренів?

**А** $x^2 + 6x - 10 = 0$ **Б** $x^2 + 6x + 9 = 0$

**В** $x^2 + 6x + 8 = 0$ **Г** $x^2 - 6x + 10 = 0$

## *Середній рівень*

**7.** Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та їхніми коренями (А–Д).

**1** $2x^2 - 8 = 0$
**2** $x^2 - 4x - 12 = 0$
**3** $2x^2 + 5x + 2 = 0$

**А** −2; −0,5
**Б** −2; 0,5
**В** −2, 2
**Г** −2; 6
**Д** −6; 2

**8.** Знайдіть усі значення $a$, для яких значення виразу $a^2 - 5a$ дорівнює 24.

**А** −3 **Б** −3; 8 **В** 8 **Г** −8; −3



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**9.** Коренями якого з наведених рівнянь є числа $-9$ і $4$?

**А** $x^2 - 5x + 36 = 0$ **Б** $x^2 - 5x - 36 = 0$

**В** $x^2 + 5x + 36 = 0$ **Г** $x^2 + 5x - 36 = 0$

**10.** Знайдіть добуток коренів рівняння $5x^2 - 4x - 2 = 0$.

**А** $-2$ **Б** $\frac{2}{5}$ **В** $-\frac{2}{5}$ **Г** $\frac{4}{5}$

## *Достатній рівень*

**11.** Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^2 - 3x + \frac{1}{3} = 0$; 2) $(x + 3)(2x - 1) = (x + 1)^2$.

**12.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ та $y = 1{,}5x + 1$.

**13.** Знайдіть значення виразу $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2$, якщо $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $3x^2 + 6x - 2 = 0$.

**14.** Число $-5$ є коренем рівняння $x^2 + 2x + q = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт $q$.

## *Високий рівень*

**15.** Для яких значень $a$ рівняння $x^2 - (a + 2)x + a + 5 = 0$ має один корінь?

**16.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 2|x| - 15 = 0$; 2) $(2x^2 - 7x + 3)\sqrt{2 - x} = 0$.

**17.** Знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, якщо $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $x^2 - 5x - 2 = 0$.

**18.** Знайдіть значення $c$, для якого один з коренів рівняння $x^2 - 2x + c = 0$ менший від другого на $6$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 22 КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

**1. Квадратний тричлен та його корені.** Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Його лівою частиною є многочлен другого степеня з однією змінною. Такий многочлен називають *квадратним тричленом*.

*Означення.* ***Квадратним тричленом*** **називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де $x$ — змінна, $a$, $b$ і $c$ — деякі відомі числа, до того ж $a \neq 0$.**

Наприклад, $x^2 - 4x + 3$, $2x^2 + 3x + 1$, $-x^2 + x + 1{,}5$ — квадратні тричлени.

Значення квадратного тричлена $x^2 - 4x + 3$ для $x = 1$ дорівнює нулю. Кажуть, що число 1 є *коренем* цього тричлена.

*Означення.* ***Коренем*** **квадратного тричлена називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.**

Щоб знайти всі корені квадратного тричлена $x^2 - 4x + 3$, потрібно розв'язати рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$. Коренями рівняння є числа 1 і 3, тому квадратний тричлен $x^2 - 4x + 3$ має два корені: 1 і 3.

Дискримінант $D$ квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ називають і *дискримінантом квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$. Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два корені, якщо $D = 0$ — один корінь (або по-іншому два рівні корені), якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має.

**2. Розкладання квадратного тричлена на множники.** Розкладемо квадратний тричлен $x^2 - 4x + 3$ на множники способом групування:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3).$$

Подавши тричлен $x^2 - 4x + 3$ у вигляді добутку $(x - 1)(x - 3)$, кажуть, що цей тричлен розклали на *лінійні множники* $x - 1$ та $x - 3$. Звернемо увагу, що в добутку $(x - 1)(x - 3)$ числа 1 і 3 — корені тричлена $x^2 - 4x + 3$, який ми розкладали на множники.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Зв'язок між коренями квадратного тричлена і його розкладом на лінійні множники дає така теорема:



*Теорема.* **Якщо $x_1$ та $x_2$ — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

*Доведення.* Корені $x_1$ та $x_2$ даного тричлена є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тому за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

звідки

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \frac{c}{a} = x_1 x_2.$$

Урахувавши ці рівності, матимемо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right) =$$

$$= a\left(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right) = a\left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right) =$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2). \bullet$$

Розглянемо квадратний тричлен $x^2 + 2x + 3$. Він не має коренів, бо $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$. Цей тричлен розкласти на лінійні множники не можна. (Якби його можна було подати у вигляді добутку $(x - m)(x - n)$, то числа $m$ і $n$ були б коренями тричлена, а він коренів не має.)

Узагалі, якщо квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на лінійні множники.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 5x - 14$; 2) $2x^2 - 3x + 1$; 3) $-x^2 + 8x - 16$.

• Розв'яжемо рівняння $x^2 + 5x - 14 = 0$:

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 81; \; x_1 = \frac{-5-9}{2} = -7; \; x_2 = \frac{-5+9}{2} = 2.$$

Отже, $x^2 + 5x - 14 = (x + 7)(x - 2)$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

2) Розв'яжемо рівняння $2x^2 - 3x + 1 = 0$:

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3+1}{4} = 1$.

Тоді $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x - 1)(x - 1)$.

3) Розв'яжемо рівняння $-x^2 + 8x - 16 = 0$:

$D = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) = 0$; $x_{1,2} = \frac{-8 \pm 0}{-2} = 4$.

Рівняння має два рівні корені, тому

$$-x^2 + 8x - 16 = -(x - 4)(x - 4) = -(x - 4)^2.$$ ●

**Вправа 2.** Скоротити дріб $\frac{4x+8}{x^2-2x-8}$.

● Розкладемо квадратний тричлен $x^2 - 2x - 8$ на множники. Коренями рівняння $x^2 - 2x - 8 = 0$ є числа $-2$ і $4$. Тому

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4).$$

Отже, $\frac{4x+8}{x^2-2x-8} = \frac{4(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{4}{x-4}$. ●

1. Що називають квадратним тричленом? Наведіть приклади квадратних тричленів.
2. Що називають коренем квадратного тричлена?
3. За якою формулою можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники?
4. У якому випадку квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники?

«Усно

**740.** Які з наведених многочленів є квадратними тричленами:

1) $2x^2 + x - 1$; 2) $-k^2 - 3k + 2$; 3) $3^2 + 2x + 7$;

4) $3x^2 - 3x - 4x^3$; 5) $y^2 + 0{,}4y - 1{,}2$; 6) $-\frac{1}{8}z^2 - z + 1$?

**741.** Які з чисел $-1$, $1$, $3$ є коренями квадратного тричлена $x^2 - 2x - 3$?

**742.** Коренями квадратного тричлена $x^2 + 2x - 3$ є числа $-3$ й $1$. Який з наведених виразів є розкладом цього тричлена на множники:

1) $(x - 3)(x + 1)$; 2) $(x - 3)(x - 1)$; 3) $(x + 3)(x - 1)$?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

1 2

**743.** Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 - 8x - 9$; 2) $z^2 - 12z + 32$; 3) $3x^2 + 2x + 3$.

**744.** Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $x^2 - 8x + 16$; 3) $3y^2 - 8y - 3$.

**745.** Чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 4x - 12$; 2) $y^2 + 2y + 2$; 3) $2x^2 - 7x + 4$?

**746.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 6x + 8$; 2) $x^2 + 8x + 15$; 3) $y^2 + 2y - 8$;

4) $m^2 - 4m - 5$; 5) $2x^2 - 5x + 2$; 6) $3z^2 - z - 2$;

7) $3x^2 - 6x + 3$; 8) $-y^2 - 2y + 8$; 9) $-2x^2 + 3x - 1$.

**747.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 4x + 3$; 2) $y^2 + y - 12$; 3) $2x^2 + 3x - 5$;

4) $4k^2 + 8k + 4$; 5) $-x^2 - 4x + 5$; 6) $-2z^2 + z + 3$.

**748.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2+a-2}{a+2}$; 2) $\frac{x-3}{x^2-4x+3}$; 3) $\frac{m^2-6m+9}{m-3}$.

**749.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{b-2}{b^2+2b-8}$; 2) $\frac{y^2-3y-4}{y-4}$.

**Інтерактивне завдання 21**

**Квадратний тричлен**

3

**750.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 4x - 2$; 2) $0{,}5x^2 - 3x + 4$;

3) $-0{,}2y^2 + 0{,}5y + 0{,}7$; 4) $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$.

**751.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 2x - 4$; 2) $0{,}5x^2 - 2x + 2$; 3) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$.

**752.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{2a^2+a-6}{4a+8}$; 2) $\frac{6x^2-5x+1}{4x^2-1}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\dfrac{b^2-7b+10}{b^2-10b+25}$;

4) $\dfrac{4x^2+4x-3}{4x^2-8x+3}$.

**753.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3a-3}{a^2+3a-4}$;

2) $\dfrac{k^2+k-2}{2k^2+3k-2}$.

**754.** Скоротіть дріб $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+5x+2}$ і знайдіть його значення, якщо $x=-0{,}4$.

**755.** Скоротіть дріб $\dfrac{b^2+8b+16}{2b^2+7b-4}$ і знайдіть його значення, якщо $b=0{,}6$.

**756.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2m^2+3m-2}{m^2+m-2}:\dfrac{2m-1}{m-1}$;

2) $\dfrac{c^2+6c}{c^2+7c+6}-\dfrac{2}{c+1}$.

**757.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{b^2-1}{b^2+5b-6}\cdot\dfrac{2b+12}{b+1}$;

2) $2y+5-\dfrac{y^2+4y-5}{y-1}$.

**758.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{8}{b^2+4b-12}+\dfrac{2}{b+6}-\dfrac{1}{b-2}$;

2) $\dfrac{k^2-1}{k+3}\cdot\left(\dfrac{k-1}{k^2+4k+3}+\dfrac{8}{k^2+2k-3}\right)$.

**759.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{3}{a^2+2a-3}-\dfrac{2}{a^2-1}\right):\dfrac{a-3}{a+3}$.

**760.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$;

2) $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{1-x}$.

**761.** Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$.

**762.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2-ax-2a^2$;

2) $2x^2+5ax+2a^2$.

*Вказівка.* 1) Розгляньте многочлен $x^2-ax-2a^2$ як квадратний тричлен зі змінною $x$ і коефіцієнтами $1$, $-a$ та $-2a^2$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**763.** Розкладіть на множники многочлен $x^2 + 4bx + 3b^2$.

**764.** Спростіть вираз $\dfrac{a^2+3ab+2b^2}{a^2-ab-2b^2}+1$.

## Вправи для повторення

**765.** Розкладіть на множники:

1) $2x^4 - 8x^2$;
2) $y^3 + 2y^2 - y - 2$.

**766.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2z^2-8}{3z+6}=0$;
2) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$.

**767.** Банк дав підприємцеві кредит 150 000 грн на рік зі ставкою 8 % річних. Скільки гривень має повернути підприємець банкові через рік?

**768.** Першу половину дистанції велосипедистка їхала зі швидкістю 27 км/год, а другу — зі швидкістю 33 км/год. Знайдіть середню швидкість велосипедистки.

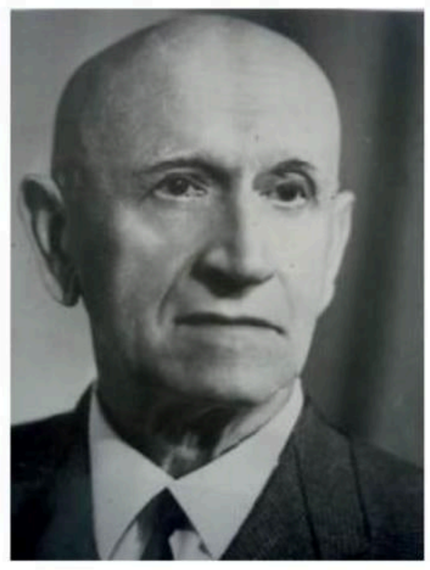
## Поміркуйте

**769.** У деякій компанії є 5 дівчат і 4 хлопці. Чи може статися так, що всі дівчата знайомі з різною кількістю хлопців, а всі хлопці — з тією самою кількістю дівчат?

## Цікаво знати

**Микола Чайковський** — видатний український математик, педагог, громадський діяч. Його наукові дослідження стосуються здебільшого алгебри й теорії чисел.

Микола Чайковський зробив вагомий внесок у розробку української математичної термінології, є автором багатьох науково-методичних робіт, серед яких великою популярністю користувався посібник для вчителів і студентів «Квадратні рівняння», який після першого видання було перевидано.



**Микола Андрійович Чайковський (1887–1970)**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# 23 РІВНЯННЯ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

**1. Дробові раціональні рівняння.** Розв'язування деяких дробових раціональних рівнянь зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Розглянемо приклад.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x-1} = \frac{12}{x+2}$.

*Розв'язання.* Зведемо дане рівняння до рівняння, ліва частина якого є дробом, а права — нулем:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{12}{x+2} = 0; \quad \frac{(x+1)(x+2)-12(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{x^2+2x+x+2-12x+12}{(x-1)(x+2)} = 0; \quad \frac{x^2-9x+14}{(x-1)(x+2)} = 0.$$

Знайдемо значення $x$, для яких чисельник дробу дорівнює нулю:

$$x^2 - 9x + 14 = 0; \quad D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 25;$$

$$x_1 = \frac{9-5}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{9+5}{2} = 7.$$

Якщо $x = 2$ або $x = 7$, то знаменник $(x - 1)(x + 2)$ не дорівнює нулю. Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ — корені рівняння.

Відповідь. 2; 7. ●

**2. Біквадратні рівняння.**



*Означення.* **Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають *біквадратним рівнянням*.**

За допомогою заміни $x^2 = t$ (тоді $x^4 = t^2$) біквадратне рівняння можна звести до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$.

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

*Розв'язання.* Зробимо заміну: $x^2 = t$. Відносно змінної $t$ маємо квадратне рівняння:

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа 2 і 4.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Повертаючись до заміни $x^2 = t$, матимемо:

1) $x^2 = 2$; звідки $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$;

2) $x^2 = 4$; звідки $x_3 = -2$; $x_4 = 2$.

Відповідь. $-2$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 2. ●

Розв'язуючи біквадратне рівняння прикладу 2, ми скористалися заміною $x^2 = t$. Тому кажуть, що це рівняння розв'язано *методом заміни змінної*.

**3. Розв'язування рівнянь методом заміни змінної.** Метод заміни змінної можна використовувати при розв'язуванні не лише біквадратних рівнянь. Розглянемо приклад.

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння

$$(x^2 - 3x)^2 + 2x^2 - 6x - 24 = 0.$$

*Розв'язання.* Запишемо рівняння у вигляді

$$(x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) - 24 = 0.$$

Нехай $x^2 - 3x = t$. Відносно змінної $t$ маємо квадратне рівняння $t^2 + 2t - 24 = 0$. Його коренями є числа $t_1 = -6$, $t_2 = 4$.

Урахувавши заміну, матимемо:

1) $x^2 - 3x = -6$; $x^2 - 3x + 6 = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -15$.

Оскільки $D < 0$, то рівняння коренів не має.

2) $x^2 - 3x = 4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Відповідь. $-1$; 4. ●

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Розв'язати рівняння $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-2x} = \dfrac{5}{x}$.

● $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{4}{x(x-2)} - \dfrac{5}{x} = 0$; $\dfrac{x^2-4-5(x-2)}{x(x-2)} = 0$;

$\dfrac{x^2-5x+6}{x(x-2)} = 0$; $\begin{cases} x^2-5x+6=0; \\ x(x-2) \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \text{ або } x = 3; \\ x \neq 0; \\ x \neq 2; \end{cases}$ $x = 3$.

Відповідь. 3. ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**Вправа 2.** Розв'язати рівняння $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$.

• Нехай $\sqrt{x} = t$, тоді $x = t^2$. Відносно змінної $t$ маємо рівняння $t^2 - 2t - 8 = 0$, коренями якого є числа $t_1 = -2$, $t_2 = 4$.

Урахувавши заміну, матимемо:

1) $\sqrt{x} = -2$ — рівняння коренів не має;

2) $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Відповідь. 16. •

1. Яке рівняння називають біквадратним?
2. Як розв'язують біквадратне рівняння?

«Усно

**770.** Які з наведених рівнянь є біквадратними рівняннями:

1) $x^4 - 4x + 5 = 0$;
2) $x^4 + 9x^2 - 14 = 0$;
3) $-2y^4 + y^2 + 3 = 0$;
4) $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$?

«1 2

**771.** Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$;
3) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$;
4) $y^4 + 6y^2 + 8 = 0$;
5) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$;
6) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

**772.** Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
2) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
3) $x^4 + x^2 - 6 = 0$;
4) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$.

**773.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 4}{x + 4} = 0$;
2) $\frac{z^2 - 3z}{z - 3} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = 0$;
4) $\frac{y^2 + y - 6}{y - 2} = 0$.

**774.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{y^2 - 8y + 7}{y + 7} = 0$;
2) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 0$.

**775.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x + 5} - \frac{100}{x + 5} = 0$;
2) $\frac{y^2 - 4y}{y - 2} + \frac{y + 2}{y - 2} = 0$;

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\dfrac{5z^2}{z-4}=\dfrac{20z}{z-4}$;

4) $\dfrac{x^2}{x+3}=\dfrac{x+12}{x+3}$.

**776.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-12}{x-6}-\dfrac{4x}{x-6}=0$;

2) $\dfrac{z^2+7z}{z+4}=\dfrac{2z-6}{z+4}$.

**777.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-5x}{x-3}=2$;

2) $\dfrac{3x+2}{x+2}=x$;

3) $z+\dfrac{3}{z}=4$;

4) $y-1=\dfrac{12}{y}$;

5) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{2}{x}=0$;

6) $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{10}{x+1}$.

**778.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+9x}{x+1}=14$;

2) $\dfrac{2x-15}{x-6}=x$;

3) $y+6=\dfrac{7}{y}$;

4) $\dfrac{x+10}{x-2}=\dfrac{4}{x}$.



## Інтерактивне завдання 22

## Рівняння, які зводяться до квадратних



3

**779.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-16}=0$;

2) $\dfrac{3y^2-5y-2}{3y^2+y}=0$;

3) $\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+6x+5}=0$;

4) $\dfrac{2x^2-5x+2}{(2x-1)(x-2)}=0$.

**780.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x^2-11x+5}{4x^2-1}=0$;

2) $\dfrac{2y^2+3y-2}{y^2-y-6}=0$.

**781.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}=2$;

2) $\dfrac{2x-1}{2x+3}=x-2$;

3) $\dfrac{x-2}{2x-1}=\dfrac{3}{x+4}$;

4) $\dfrac{y+8}{2y+1}=\dfrac{3y}{2y-1}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**782.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x^2+x-12}{x+2}=x-4$; 2) $\frac{8y-5}{y}=\frac{9y}{y+2}$.

**783.** Знайдіть усі значення $b$, для яких дроби $\frac{b}{b+1}$ і $\frac{b+1}{4b}$ набувають того самого значення.

**784.** Знайдіть усі значення $a$, для яких значення дробу $\frac{a-5}{a^2-5}$ дорівнює 3.

**785.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}=1$; 2) $\frac{z}{z-3}-\frac{z-10}{z+2}=5$;

3) $\frac{2x+6}{x^2-2x}-\frac{3}{x}=\frac{x}{x-2}$; 4) $\frac{4}{y^2-6y+9}-\frac{y}{3-y}=2$;

5) $\frac{y-2}{y+1}+\frac{y+5}{y-1}=\frac{6}{y^2-1}$; 6) $\frac{6}{x^2-4}+\frac{3}{2-x}-\frac{2}{x+2}=2$.

**786.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3}{y-2}+\frac{3}{y+2}=2$; 2) $\frac{3x}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}=1$;

3) $\frac{z-30}{z^2-5z}+\frac{z}{z-5}=\frac{2}{z}$; 4) $\frac{x-9}{x-1}+\frac{12}{x+1}+\frac{8}{1-x^2}=-1$.

**787.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3-5x=0$; 2) $4x^3-3x^2-x=0$.

**788.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3-4x=0$; 2) $x^3-11x^2+30x=0$.

**789.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4-9x^2+4=0$; 2) $x^5-3x^3-18x=0$;

3) $(x-4)^4-3(x-4)^2-4=0$;

4) $(2x+3)^4-10(2x+3)^2+9=0$;

5) $(y^2-y)^2+2(y^2-y)-8=0$;

6) $(x^2-2x+2)^2-3(x^2-2x+2)=10$.

**790.** Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^4-17x^2+4=0$; 2) $x^5+8x^3-9x=0$;

3) $(x+2)^4-2(x+2)^2-8=0$;

4) $(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24=0$;

5) $(x^2+x+1)^2-2(x^2+x+1)=3$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**791.** Знайдіть найменший корінь рівняння

$$(x+5)^4 - 2(x+5)^2 - 3 = 0.$$

**792.** Знайдіть найбільший корінь рівняння $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$.

4

**793.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3}{x-9} + \dfrac{5}{x^2+9x} - \dfrac{10}{81-x^2} = 0;$

2) $\dfrac{x-4}{x^2-3x-10} - \dfrac{x-7}{x+2} + \dfrac{1}{x-5} = 2;$

3) $\dfrac{x+5}{x^2+2x+1} - \dfrac{10}{1-x} = \dfrac{15}{x+1}.$

**794.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x^2-9} + \dfrac{2}{x^2-3x} = 0;$

2) $\dfrac{2}{x-5} + \dfrac{7x}{x+3} + \dfrac{14}{x^2-2x-15} = 0.$

**795.** Знайдіть усі значення $a$, для яких рівняння $\dfrac{x^2-2x-3}{x+a} = 0$ має один корінь.

**796.** Знайдіть усі значення $b$, для яких рівняння $\dfrac{x-b}{x^2+4x-21} = 0$ не має коренів.

**797.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x^2 + x + 1)(2x^2 + x + 3) = 8;$

2) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1;$

3) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2 - 7 \cdot \dfrac{x+1}{x-3} + 10 = 0;$

4) $\dfrac{x^2}{x+6} + \dfrac{x+6}{x^2} = 2.$

**798.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x - 2) = 24;$

2) $(x^2 - 3x)^2 - (x+1)(x-4) = 16;$

3) $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{x+2}{x-1} - 8 = 0.$

**799.** Розкладіть на множники вираз $a^4 - 10a^2 + 9$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**800.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-3x+5}=3$; 2) $x-6\sqrt{x}+5=0$.

**801.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+4x-1}=2$; 2) $x+\sqrt{x}-6=0$.

## *Вправи для повторення*

**802.** Спростіть вираз:

1) $7\sqrt{2}+5\sqrt{8}-3\sqrt{32}$; 2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)$.

**803.** Доведіть тотожність $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):\dfrac{a-b}{a+b}=a-b$.

**804.** У 100 г ягід смородини є 200 мг вітаміну С, а в 100 г ягід малини — 25 мг (1 мг = 0,001 г). Добова доза вітаміну С для учня/учениці 8 класу становить 70 мг. Скільки грамів ягід смородини потрібно спожити, щоб забезпечити цю добову дозу вітаміну С? Скільки грамів ягід малини?

**805.** Мирон та Ігор почали одночасно рухатися на скейтах назустріч один одному. Проїхавши 500 м, Мирон зустрів Ігоря, який на цей час проїхав 600 м. Знайдіть швидкість Мирона, якщо вона на 50 м/хв менша від швидкості Ігоря.

## *Поміркуйте*



**806.** Розв'язавши рівняння, Валентина одержала чотири корені. Добуток усіх коренів дорівнює 360, а якщо їх записати в порядку зростання, то кожний наступний корінь буде на 1 більшим за попередній. Знайдіть найменший корінь рівняння.

## *Цікаво знати*

Формула коренів квадратного рівняння виражає корені рівняння через його коефіцієнти. Тривалий час математики намагалися вивести загальну формулу для коренів кубічного рівняння — рівняння виду $ax^3+bx^2+cx+d=0$, де $a\neq 0$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Таку формулу було отримано в XVI ст. Зараз вона відома як *формула Кардано* за ім'ям італійського ученого Джироламо Кардано (1501–1576). Згодом Людовіко Феррарі (1522–1565), учень Кардано, знайшов спосіб розв'язування рівнянь 4-го степеня.



**Джироламо Кардано**



**Нільс Генрік Абель**

Протягом майже трьох наступних століть спроби математиків знайти формули для коренів рівнянь п'ятого і вищих степенів були невдалими. Лише на початку XIX століття норвезький математик Нільс Генрік Абель (1802–1829) довів, що не існує загальних формул, які виражали б корені таких рівнянь через їхні коефіцієнти за допомогою скінченного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня.

## 24 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ ТА РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Ключ до розв'язання багатьох задач — їх умілий переклад на мову математики.

*Дмитро Граве**

Розглянемо задачі, математичними моделями яких є квадратні рівняння та рівняння, які зводяться до квадратних.

**Задача 1.** Клумба прямокутної форми має площу 48 м$^2$, а її довжина на 8 м більша за ширину. Знайти довжину та ширину клумби.

* Дмитро Граве (1863–1939) — один із фундаторів і перший директор Інституту математики Академії наук України.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

*Розв'язання.* Нехай ширина клумби дорівнює $x$ м. Тоді її довжина дорівнює $(x + 8)$ м, а площа — $x(x + 8)$ м$^2$. За умовою задачі площа клумби дорівнює 48 м$^2$, тому маємо рівняння $x(x + 8) = 48$, звідки

$$x^2 + 8x - 48 = 0.$$

Коренями одержаного рівняння є числа $x_1 = -12$ та $x_2 = 4$. Перший корінь не задовольняє умову задачі. Отже, ширина клумби дорівнює 4 м, а довжина — $4 + 8 = 12$ (м).

Відповідь. 12 м; 4 м. ●

**Задача 2.** Потяг вирушив зі станції із запізненням на 10 хв. Щоб прибути на наступну станцію вчасно, він збільшив заплановану швидкість на 16 км/год. З якою швидкістю мав рухатися потяг за розкладом, якщо відстань між станціями дорівнює 80 км?

*Розв'язання.* За умовою задачі складаємо таблицю:

| Умова руху | Шлях, км | Швидкість, км/год | Час, год |
|---|---|---|---|
| За розкладом | 80 | $x$ | $\frac{80}{x}$ |
| Ліквідовуючи запізнення | 80 | $x + 16$ | $\frac{80}{x+16}$ |

Час руху за розкладом мав бути на 10 хв $= \frac{1}{6}$ год більшим, тому маємо рівняння:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+16} = \frac{1}{6}.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+16} - \frac{1}{6} = 0; \quad \frac{80 \cdot 6(x+16) - 80 \cdot 6x - x(x+16)}{6x(x+16)} = 0;$$

$$\frac{-x^2 - 16x + 7680}{6x(x+16)} = 0; \quad \begin{cases} -x^2 - 16x + 7680 = 0; \\ 6x(x+16) \neq 0; \end{cases} \quad x_1 = -96; \; x_2 = 80.$$

Число $-96$ не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість потяга за розкладом дорівнює 80 км/год.

Відповідь. 80 км/год. ●



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, здебільшого дотримуються таких кроків:

1) вибирають невідоме й позначають його буквою $x$ (або якою-небудь іншою буквою);

2) використовуючи умову задачі, складають рівняння;

3) розв'язують рівняння і відповідають на поставлені в задачі запитання.

## *Приклади розв'язання вправ*

**Вправа 1.** Катер за 30 хв пройшов 8 км за течією річки і 3 км проти течії. Знайти швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

● Нехай швидкість катера в стоячій воді дорівнює $x$ км/год. За умовою задачі складаємо таблицю:

| Рух | Шлях, км | Швидкість, км/год | Час, год |
|---|---|---|---|
| За течією | 8 | $x + 3$ | $\frac{8}{x+3}$ |
| Проти течії | 3 | $x - 3$ | $\frac{3}{x-3}$ |

За умовою задачі катер рухався 30 хв $= \frac{1}{2}$ год, тому маємо рівняння:

$$\frac{8}{x+3} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо його корені: $x_1 = 1$; $x_2 = 21$.

Швидкість катера в стоячій воді не може бути меншою від швидкості течії річки, тому шукана швидкість дорівнює 21 км/год.

Відповідь. 21 км/год. ●

**Вправа 2.** Два автомати, працюючи разом, виготовили замовлену партію пластикових пляшок за 4 год. За скільки годин може виконати замовлення кожний автомат, працюючи окремо, якщо перший може це зробити на 6 год швидше, ніж другий?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

● За умовою задачі складаємо таблицю:

| Автомати | Час виконання замовлення, год | Частина замовлення, яку виконують за 1 год |
|---|---|---|
| I | $x$ | $\frac{1}{x}$ |
| II | $x + 6$ | $\frac{1}{x+6}$ |
| I і II | 4 | $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6}$ або $\frac{1}{4}$ |

Маємо рівняння: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$.

Розв'язавши рівняння, знайдемо його корені: $x_1 = -4$; $x_2 = 6$.

Число $-4$ не задовольняє умову задачі. Отже, перший автомат може виконати замовлення за 6 год, а другий — за $6 + 6 = 12$ (год).

Відповідь. 6 год; 12 год. ●

1. Яких кроків потрібно дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою рівнянь?

«Усно

**807.** Добуток двох додатних чисел дорівнює 135. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 6 більше за друге.

**808.** Добуток двох натуральних чисел дорівнює 108. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 3 менше від другого.

**809.** Одне число менше від другого на 8, а їх добуток дорівнює $-15$. Знайдіть ці числа.

**810.** Периметр стільниці прямокутної форми дорівнює 40 дм, а площа — 96 дм$^2$. Знайдіть довжину та ширину стільниці.

**811.** Ділянку прямокутної форми, площа якої 48 м$^2$, обнесли парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо довжина ділянки на 2 м більша за ширину.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**812.** Від керамічної плитки квадратної форми відрізали смугу завширшки 10 см (рис. 19). Знайдіть сторону плитки, якщо площа її частини, утвореної після відрізання смуги, дорівнює 1200 см$^2$.

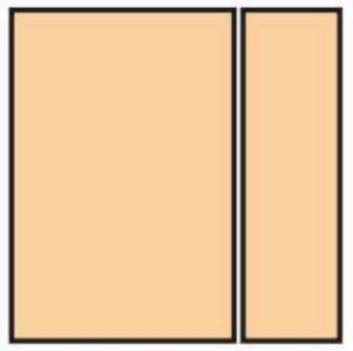


Рис. 19

**813.** У прямокутній таблиці кількість рядків на 12 більша за кількість стовпців. Скільки рядків у таблиці, якщо всього вона має 108 клітинок?

**814.** Із двох натуральних чисел перше число втричі більше за друге. Якщо від першого числа відняти число, обернене до другого, то одержимо 2. Знайдіть ці числа.

**815.** Із двох натуральних чисел перше число вдвічі більше за друге. Якщо до першого числа додати число, обернене до другого, то одержимо 3. Знайдіть ці числа.

«« 3

**816.** Навколо спортивного майданчика, який має форму прямокутника, зроблена доріжка завширшки 3 м (рис. 20). Знайдіть розміри майданчика, якщо його довжина на 12 м більша за ширину, а загальна площа майданчика та доріжки дорівнює 1260 м$^2$.



Рис. 20

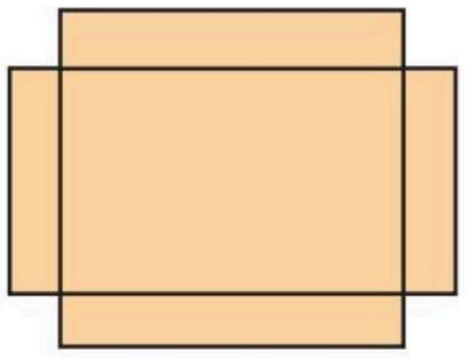


Рис. 21

**817.** Із прямокутного листа картону розміру 20 см × 30 см потрібно виготовити відкриту коробку, вирізавши по кутах рівні квадрати, а потім загнувши краї листа (рис. 21). Знайдіть, якою має бути сторона вирізаних квадратів, щоб площа дна коробки дорівнювала 264 см$^2$.

**818.** Дитячий майданчик має прямокутну форму. З одного боку його обмежує стіна, з інших боків — паркан завдовжки 30 м, є також вхід завширшки 2 м (рис. 22). Знайдіть розміри майданчика, якщо його площа дорівнює 128 м$^2$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**819.** У куті двору господар відгородив сіткою завдовжки 7 м прямокутну ділянку, зробивши вхід завширшки 1 м (рис. 23). Знайдіть розміри ділянки, якщо її площа дорівнює 16 м$^2$.



Рис. 22

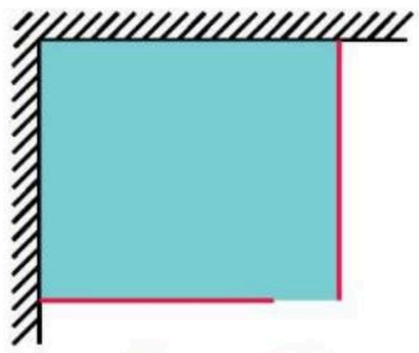


Рис. 23

**820.** Знайдіть діагональ екрана планшета, якщо вона на 8 см більша за його ширину і на 16 см більша за висоту.

**821.** Відстань між двома містами 180 км. Пасажирський потяг подолав шлях між цими містами на 1 год швидше, ніж товарний, бо його швидкість була на 30 км/год більшою за швидкість товарного. Знайдіть швидкості потягів.

**822.** Шлях від міста до села велосипедист подолав за 1 год, рухаючись спочатку 15 км по шосе, а потім ще 10 км бруківкою. Знайдіть швидкість велосипедиста на бруківці, якщо вона на 10 км/год менша від швидкості на шосе.

**823.** Із міста виїхав автобус, а через 24 хв услід за ним — автомобіль. Проїхавши 126 км, автомобіль наздогнав автобус. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша за швидкість автобуса.

**824.** Потяг затримали на станції на 6 хв. Збільшивши швидкість на 10 км/год, він на перегоні завдовжки 90 км ліквідував відставання від графіка. Знайдіть швидкість потяга за розкладом.

**825.** Майстриня за певний час мала виготовити 96 писанок. Виготовляючи щодня на 2 писанки більше, ніж планувалося, вона виконала замовлення на 4 дні швидше. Скільки писанок майстриня планувала виготовляти за 1 день?

**826.** Оператор набрав на комп'ютері 20 сторінок тексту за певний час. Якби він набирав щогодини на 1 сторінку більше, то завершив би набір на 1 год швидше. Скільки сторінок набирав оператор за 1 год?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**827.** Школі виділили 240 тис. грн на придбання певної кількості однакових комп'ютерів. На час придбання комп'ютерів їх ціна зменшилася на 1 тис. грн, тому на всю виділену суму купили на один комп'ютер більше. Скільки купили комп'ютерів?

**828.** Із першої ділянки зібрали 180 т картоплі, а з другої, площа якої на 5 га більша, — 240 т. Знайдіть площу кожної ділянки, якщо врожайність картоплі на першій ділянці на 2 т/га більша, ніж на другій.

**829.** Два автомати розфасували по 560 кг цукру кожний. Перший автомат розфасував цукор на 2 хв швидше, ніж другий, бо за 1 хв розфасовував на 5 кг цукру більше, ніж другий. Скільки кілограмів цукру розфасовував за 1 хв кожний автомат?

**830.** Катер за 1 год пройшов 12 км за течією річки і 9 км проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера в стоячій воді дорівнює 21 км/год.

**831.** Теплохід за 2 год пройшов 54 км за течією річки і 16 км проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

**832.** Катер пройшов 8 км по озеру, а наступні 14 км — по річці, яка впадає в озеро. Шлях по озеру він подолав на 20 хв швидше, ніж шлях по річці. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

**833.** Порожній бак наповнили водою за 8 хв, відкривши одночасно два крани. Через перший кран бак можна наповнити на 12 хв швидше, ніж через другий. За скільки хвилин можна наповнити бак через кожний кран окремо?

**834.** Двоє операторів, працюючи разом, набрали рукопис посібника за 18 год. Перший оператор, працюючи сам, може набрати рукопис на 15 год швидше, ніж другий. За скільки годин кожний оператор може набрати рукопис, працюючи окремо?

**835.** Двоє майстрів виклали плиткою доріжку, до того ж перший працював 6 днів, а другий — 4 дні. За скільки днів



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

може викласти доріжку перший майстер, працюючи сам, якщо він може це зробити на 3 дні швидше, ніж другий?

**836.** Знаменник звичайного дробу на 1 більший за чисельник. Якщо від чисельника дробу відняти 2, а до знаменника додати 3, то одержимо дріб, який на 0,5 менший від даного. Знайдіть даний дріб.

**837.** Чисельник звичайного нескоротного дробу менший від знаменника на 5. Якщо від чисельника дробу відняти 1, а від знаменника — 3, то одержимо дріб, який на $\frac{1}{12}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

### 4

**838.** Кожна дівчина 8 класу подарувала свою світлину кожній іншій дівчині класу. Скільки дівчат у класі, якщо вони обмінялися 210 світлинами?

**839.** Кожний учасник вайбер групи привітав з Новим роком кожного іншого учасника групи. Усього було 110 привітань. Скільки учасників у групі?

**840.** Опуклий многокутник має 27 діагоналей. Скільки вершин має цей многокутник?

**841.** У першому колі чемпіонату області з футболу було зіграно 66 матчів. Скільки команд бере участь у чемпіонаті, якщо кожна команда зіграла з кожною іншою командою по одному матчу?

**842.** Автомобіль за певний час мав подолати шлях 440 км, рухаючись зі сталою швидкістю. Через 1 год після початку руху він зробив зупинку 30 хв і, щоб прибути до місця призначення вчасно, збільшив швидкість на 10 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля протягом першої години руху.

**843.** Катер пройшов 9 км за течією річки і 14 км проти течії, затративши на весь шлях стільки часу, скільки йому потрібно для подолання 24 км у стоячій воді. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Вправи для повторення

**844.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$;  2) $\dfrac{\sqrt{56}-\sqrt{8}}{\sqrt{14}-\sqrt{2}}$.

**845.** Спростіть вираз $\dfrac{b+1}{b-1}+\dfrac{4}{1-b}\cdot\dfrac{b}{1+b}$ і знайдіть його значення, якщо $b=-2$; $b=1{,}5$.

**846.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b^2}{a^2-b^2}:\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)$ дорівнює 1.

**847.** У саду ростуть яблуні, сливи і вишні, кількості яких відносяться як 6 : 3 : 2. Скільки слив росте в саду, якщо в ньому яблунь на 8 більше, ніж вишень?

## Поміркуйте



**848.** У кожній вершині квадрата записано число, як показано на рисунку 24. За один крок два числа будь-якої сторони можна помножити на $-1$. Чи можна за кілька таких кроків добитися того, щоб в усіх вершинах квадрата були додатні числа?

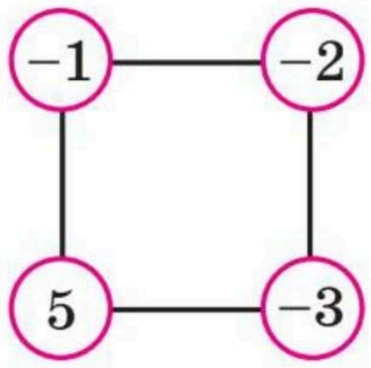



Рис. 24

## Завдання для повторення § 3

**849.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-49=0$;  2) $0{,}5-2y^2=0$;

3) $4x^2+2x=0$;  4) $2{,}4x^2-7{,}2x=0$.

**850.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-5x-14=0$;  2) $x^2+4x-60=0$;

3) $2z^2+5z+3=0$;  4) $5x^2-21x+4=0$.

**851.** Чи може значення виразу $x^2-5x+15$ дорівнювати 5?

**852.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)^2-36=0$;  2) $(2x+1)^2=x(2x+7)$;

3) $(x-2)(x-4)=(8-x)(8+x)$;  4) $(2x-5)^2=10-(x-5)^2$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**853.** Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:
1) $x^2 - 6x - 4 = 0$; 2) $5x^2 + 15x + 2 = 0$.

**854.** Знайдіть коефіцієнти зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа 5 і $-2$.

**855.** Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа: 1) 4 і 8; 2) 4 і $-8$.

**856.** Розв'яжіть рівняння шляхом добору його коренів:
1) $x^2 + 3x - 4 = 0$; 2) $x^2 + 9x + 18 = 0$.

**857.** Числа $x_1$ та $x_2$ є коренями рівняння $x^2 - 4x - 7 = 0$. Знайдіть значення виразу:
1) $(x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2$; 2) $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

**858.** Число 5 є коренем рівняння $x^2 + px - 20 = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт $p$.

**859.** Знайдіть усі значення $a$, для яких сума коренів рівняння $x^2 + (2 - a - a^2)x - 4 = 0$ дорівнює нулю.

**860.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:
1) $x^2 - 10x + 21$; 2) $2x^2 + 3x - 5$.

**861.** Скоротіть дріб:
1) $\frac{x^2+3x-18}{x-3}$; 2) $\frac{4a^2+3a-1}{a^2+6a+5}$.

**862.** Спростіть вираз:
1) $\frac{2a^2-5a-3}{2a-6} \cdot \frac{6}{2a+1}$; 2) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4} + \frac{2}{x+1}$.

**863.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{4m^2-4m-3}{4m^2+4m-15} : \frac{4m+2}{2m+5}$ дорівнює тому самому числу.

**864.** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 - 3x = 0$; 2) $x^4 - 0{,}64x^2 = 0$.

**865.** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; 2) $4y^4 + 7y^2 - 2 = 0$;
3) $(z + 7)^4 - 2(z + 7)^2 - 8 = 0$; 4) $(x^2 - x)^2 + x^2 - x = 6$;
5) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 20$; 6) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$.

**866.** Знайдіть найбільший корінь рівняння $x^4 - 15x^3 + 54x^2 = 0$.

**867.** Знайдіть суму всіх коренів рівняння $\sqrt{x^2 - 7x + 7} = 5$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**868.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{z^2+5z-24}{z-3}=0$;

2) $\frac{2}{x}+\frac{6}{x+5}=1$;

3) $\frac{x}{x+5}=\frac{1+2x}{3-x}$;

4) $\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}=\frac{14x}{x^2-16}$;

5) $\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-5}=\frac{12-5x}{x^2-3x-10}$.

**869.** Знайдіть усі значення $b$, для яких рівняння $\frac{x^2-3x-18}{x-b}=0$ має один корінь.

**870.** Одна сторона прямокутника на 3 см довша за другу, а його площа дорівнює 130 см$^2$. Знайдіть периметр прямокутника.

**871.** Ширина кімнати менша від її довжини на 1 м, а від діагоналі — на 2 м. Знайдіть площу кімнати.

**872.** Добуток двох послідовних натуральних чисел більший за їх суму на 5. Знайдіть ці числа.

**873.** Принтер надрукував за певний час 240 сторінок. Якби він за 1 хв друкував на 4 сторінки більше, то завершив би друк на 2 хв швидше. Скільки сторінок друкує принтер за 1 хв?

**874.** Велосипедистка подолала дистанцію завдовжки 100 км. На другій половині дистанції вона зменшила швидкість на 5 км/год, тому другу половину долала на 20 хв довше, ніж першу. Знайдіть швидкість велосипедистки на першій половині дистанції.

**875.** Теплохід за 1 год пройшов 24 км за течією річки і 7 км проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

**876.** Два екскаватори, працюючи разом, вирили котлован за 4 дні. Третину котловану перший екскаватор може вирити на 2 дні швидше, ніж другий. За скільки днів може вирити котлован кожний екскаватор, працюючи окремо?



**Інтерактивне завдання для самоперевірки 7**
**Квадратний тричлен.**
**Рівняння, які зводяться до квадратних**



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# Завдання для самоперевірки № 7

## *Початковий рівень*

**1.** Коренями квадратного тричлена $x^2 - x - 6$ є числа $-2$ і $3$. Який з наведених виразів є розкладом цього тричлена на множники?

**А** $(x - 2)(x + 3)$ **Б** $(x - 1)(x + 6)$

**В** $(x + 2)(x - 3)$ **Г** $(x + 2)(x + 3)$

**2.** Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\frac{z^2 + 3z - 4}{z - 1} = 0$?

**А** $-4$ **Б** $-1$ **В** $1$ **Г** $4$

**3.** Скільки коренів має рівняння $x^3 + 2x = 0$?

**А** Один **Б** Два **В** Три **Г** Жодного

**4.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 + 3x}{x - 3} = 0$.

**А** $3$ **Б** $-3$ **В** $0; -3$ **Г** $0$

**5.** Розв'яжіть рівняння $\frac{y^2 - 4y - 5}{y + 1} = 0$.

**А** $-1; 5$ **Б** $-5; 1$ **В** $-1$ **Г** $5$

**6.** Довжина кімнати на 3 м більша за ширину. Знайти розміри кімнати, якщо її площа дорівнює 28 м$^2$.

Нехай ширина кімнати дорівнює $x$ м. Яке рівняння відповідає умові задачі?

**А** $2x + 2(x + 3) = 28$ **Б** $2x + 2(x - 3) = 28$

**В** $x(x + 3) = 28$ **Г** $x(x - 3) = 28$

## *Середній рівень*

**7.** Установіть відповідність між квадратними тричленами (1–3) та їх розкладами на множники (А–Д).

**1** $x^2 - 5x - 14$

**2** $x^2 + 5x - 14$

**3** $2x^2 - 5x + 2$

**А** $(x + 2)(x - 7)$

**Б** $(x + 2)(x + 7)$

**В** $(x - 2)(x + 7)$

**Г** $(x - 2)(2x - 1)$

**Д** $(x + 2)(2x + 1)$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**8.** Розв'яжіть рівняння $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

**А** $-2; 2$ **Б** $-1; 1$ **В** $-4; 1$ **Г** $-2; -1; 1; 2$

**9.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x-6}{x-2} + x = 0$.

**А** 2 **Б** $-2$ **В** 3 **Г** $-2; 3$

**10.** Добуток двох натуральних чисел дорівнює 48. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 більше за друге.

**А** 8; 6 **Б** 12; 4 **В** 16; 3 **Г** $-4; -12$

### *Достатній рівень*

**11.** Скоротіть дріб $\frac{2a^2 - 3a - 9}{a^2 - 9}$.

**12.** Розв'яжіть рівняння $\frac{4x}{x-1} - \frac{12}{x+2} = 5$.

**13.** Знайдіть найбільший корінь рівняння

$$(x + 3)^4 - 12(x + 3)^2 + 27 = 0.$$

**14.** Шлях між двома містами автомобіль подолав на 30 хв швидше, ніж автобус. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша за швидкість автобуса, а відстань між містами дорівнює 120 км.

### *Високий рівень*

**15.** Спростіть вираз $\left(\frac{2m+2}{m^2+2m-8} - \frac{1}{m+4}\right) : \frac{1}{m-2}$.

**16.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x) = 3$; 2) $\frac{2x+3}{4x^2-9} - \frac{16x}{2x+3} = \frac{5}{2x-3}$.

**17.** Для яких значень $a$ рівняння $\frac{2x^2 - 7x - 4}{x + a} = 0$ має один корінь?

**18.** Двоє майстрів виконали замовлення. Протягом 6 год вони працювали разом, після чого ще 2 год працював лише другий майстер. За скільки годин може виконати замовлення перший майстер, якщо він може це зробити на 4 год швидше, ніж другий?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

Багато чого з математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при нагоді згадати призабуте.

*Михайло Остроградський*

## Цілі вирази

**877.** Які з наведених виразів є цілими виразами? Дробовими виразами? Раціональними дробами?

1) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; 2) $\frac{8x}{5y}$; 3) $\frac{m-2n}{4}$; 4) $\frac{c+1}{c(c-1)}$.

**878.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{3b}{2b+1}$; 2) $\frac{x+2}{x^2+3x}$; 3) $\frac{4}{k^2+2}+\frac{1}{k}$; 4) $\frac{a}{a^2-4}$.

**879.** Знайдіть значення виразу $\frac{2a+1}{a-4}$, якщо $a=-6$; $a=4{,}5$.

**880.** Два автомобілі одночасно виїхали з міста $M$ до міста $N$, відстань між якими $S$ км. Перший автомобіль рухається зі швидкістю $a$ км/год, а другий — зі швидкістю $b$ км/год, де $a>b$.

1) За скільки годин подолає шлях між містами перший автомобіль? Другий автомобіль?
2) На якій відстані від міста $N$ перебуватиме другий автомобіль у момент прибуття до цього міста першого автомобіля?

Запишіть результати у вигляді виразів.

**881.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{42x^2y^5}{36x^4y^3}$; 2) $\frac{6ab+6b^2}{a^2-b^2}$; 3) $\frac{m^2-6m+9}{(m-2)^2-1}$.

**882.** Спростіть вираз:

1) $\frac{3x}{x-2}-\frac{6}{x-2}$; 2) $\frac{1-b}{a-b}+\frac{1-a}{b-a}$;

3) $\frac{1+a}{a^2b}+\frac{1-b^2}{ab^3}$; 4) $\frac{2}{15x^3y^4}-\frac{1}{9x^4y^3}$;

5) $b-\frac{(b-2)^2}{b+2}+2$; 6) $\frac{5}{3z+9}+\frac{10}{z^2-9}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\dfrac{2a}{a-2b}-\dfrac{2a^2-5ab}{a^2-4ab+4b^2}$;  8) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x-6}{x^2-4}$.

**883.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{a+1}{a^2-2a+1}-\dfrac{1}{a-1}$, якщо $a=1{,}5$; $a=-9$.

**884.** Виконайте множення:

1) $\dfrac{24(a+1)^3}{5b^3}\cdot\dfrac{25b^2a}{18(a+1)^2}$;  2) $\dfrac{27x}{xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{36xy}$;

3) $\dfrac{a^2-49}{3a+9}\cdot\dfrac{a^2+3a}{a^2+14a+49}$;  4) $\dfrac{b^3-27}{3b^2-27}\cdot\dfrac{b+3}{2b^2+6b+18}$.

**885.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\dfrac{2a^3b^4}{5c^2}\right)^4$;  2) $\left(-\dfrac{4xy^3}{3z^2}\right)^3$.

**886.** Виконайте ділення:

1) $\dfrac{x^3}{12yz^2}:\dfrac{yx^4}{16z^3}$;  2) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab+b^2}:\dfrac{a^2-b^2}{3b^2}$.

**887.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{xb}{2y^2}\cdot\dfrac{6y}{x}+\dfrac{b}{y}$;  2) $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a+b}{a-b}:\dfrac{a^2+ab}{ab-b^2}$;

3) $\left(\dfrac{c}{c+2}+1\right):\left(1-\dfrac{3c^2}{4-c^2}\right)$;  4) $\left(\dfrac{x-2y}{x^2-xy}-\dfrac{x-3y}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{x+y}{2y}$;

5) $\dfrac{3}{a+b}-\dfrac{3a-3b}{2a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a^2-b^2}-2a\right)$.

**888.** Доведіть, що вираз $\dfrac{a^2+ax-ab-bx}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{a+x}$ набуває лише невід'ємних значень.

**889.** Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{1}{a+2b}\right)\left(a^2-4b^2\right)=2a$;

2) $\left(x-\dfrac{xy}{x+y}\right):\left(y-\dfrac{y^2}{x+y}\right)=\dfrac{x^2+xy}{y^2+xy}$.

**890.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x-8}{3x-2}=0$;  2) $\dfrac{x^2+5x}{2x+10}=0$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $\dfrac{2}{z+1}=\dfrac{z-3}{z^2-1}$;  4) $\dfrac{5}{y+4}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{2y-3}{y^2+4y}$.

**891.** Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-2}+4\cdot(0{,}4)^{-3}-1{,}8^0$;  2) $0{,}2^{-4}\cdot 0{,}2^3+5^{-4}:5^{-6}$;

3) $\left(1\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\left(5^{-1}\right)^2$;  4) $\dfrac{5^{-3}\cdot 25^4}{125^2}$.

**892.** Спростіть вираз:

1) $(m^{-2})^5:m^{-12}$;  2) $2a^{-3}b^4\cdot 1{,}5a^2b^{-2}$;

3) $\left(\dfrac{x^4}{5y^{-3}}\right)^{-2}:(x^{-12}y^{-9})$;  4) $(b^{-1}-b)^2-b^{-1}(b^{-1}+b^3)$.

**893.** Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 2800;  2) 64 000 000;  3) 0,025;  4) 0,00005.

**894.** Обчисліть і запишіть результат числом у стандартному вигляді:

1) $4{,}2\cdot 10^{-9}+2{,}5\cdot 10^{-9}$;  2) $5{,}1\cdot 10^8-7{,}5\cdot 10^7$;

3) $(7{,}5\cdot 10^{-9})\cdot(4\cdot 10^7)$;  4) $(6\cdot 10^9):(1{,}2\cdot 10^{-3})$.

**895.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\dfrac{4}{x}=x-3$;  2) $-\dfrac{2}{x}=x-3$.

**896.** Графік оберненої пропорційності проходить через точку $A(-3;\,2)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-4;\,1{,}5)$?

## Квадратні корені. Дійсні числа

**897.** Для яких значень $x$ має зміст вираз:

1) $1+\sqrt{x}$;  2) $\sqrt{|x|}$;  3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;  4) $\sqrt{x^2+1}$?

**898.** Знайдіть значення виразу:

1) $3\sqrt{625}-12\sqrt{\dfrac{25}{36}}$;  2) $10\sqrt{0{,}81}-3\sqrt{2\dfrac{7}{9}}$;

3) $\sqrt{625\cdot 0{,}64}+\sqrt{90\cdot 1{,}6}$;  4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}+\dfrac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$;

5) $\sqrt{1{,}2^2}-\sqrt{(-1{,}2)^2}$;  6) $\left(\sqrt{28}\right)^2-3\sqrt{\sqrt{(-8)^2}-4}$.

**899.** Доведіть, що $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**900.** Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-3\sqrt{32}$;
2) $\left(\sqrt{75}+0{,}5\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$;
3) $\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)$;
4) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$;
5) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2-\left(4-\sqrt{2}\right)^2$;
6) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{2}$.

**901.** Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)-a+2$;
2) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}$;
3) $\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-3\sqrt{ab}+4\sqrt{b^2}$.

**902.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{32}$;
2) $\sqrt{3xy^2}$, де $y>0$;
3) $\sqrt{8a^2}$, де $a<0$.

**903.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{5}$;
2) $2b\sqrt{5}$, де $b>0$;
3) $n\sqrt{5k}$, де $n<0$.

**904.** Розкладіть на множники:

1) $8-\sqrt{8}$;
2) $a-25$, де $a>0$;
3) $m^2-2$.

**905.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{20}-4}{\sqrt{5}-2}$;
2) $\dfrac{c-3}{\sqrt{c}+\sqrt{3}}$;
3) $\dfrac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$.

**906.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$;
2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$;
3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$.

**907.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{8}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{8}+3}$;
2) $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{2}}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$;
3) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$;
4) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

**908.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=0{,}3$;
2) $\sqrt{x}=-8$;
3) $\sqrt{2x-5}=1$.

**909.** Через які з наведених точок проходить графік функції $y=x^2$? Графік функції $y=\sqrt{x}$?

1) $A(9;\,81)$;
2) $B(81;\,9)$;
3) $C(-5;\,25)$;
4) $D(25;\,-5)$.

**910.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y=-2x$ та $y=x^2$;
2) $y=2$ та $y=\sqrt{x}$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**911.** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = 1{,}5x + 1$; 2) $\sqrt{x} = -0{,}5x + 4$.

## Квадратні рівняння

**912.** Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2 - 36 = 0$; 2) $1 - 0{,}25y^2 = 0$;
3) $x^2 - 5x = 0$; 4) $4x^3 - 9x = 0$.

**913.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$; 2) $2x^2 - 5x - 7 = 0$;
3) $15z^2 + 75z + 60 = 0$; 4) $3x^2 - 4x - 8 = 0$.

**914.** Для яких значень змінної не має змісту вираз:

1) $\dfrac{b-1}{b^2+3b-18}$; 2) $\dfrac{2m^2+3m+1}{m^2-6m+5}$?

**915.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 6)(x - 6) = 5x$; 2) $(x - 4)^2 = x(10 - x)$;
3) $(x + 3)(x - 4) = 3(x^2 - 6)$; 4) $(2x - 7)^2 = (2 - x)^2$.

**916.** Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:

1) $x^2 - 4x - 8 = 0$; 2) $3x^2 + 6x + 1 = 0$.

**917.** Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа: 1) 3 і 6; 2) 3 і $-6$.

**918.** Розв'яжіть рівняння шляхом добору його коренів:

1) $x^2 + 6x - 7 = 0$; 2) $y^2 - 7y + 12 = 0$.

**919.** Числа $x_1$ та $x_2$ є коренями рівняння $x^2 - 8x + 2 = 0$. Знайдіть значення виразу:

1) $2(x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2$; 2) $(x_1 - x_2)^2$.

**920.** Один із коренів рівняння $x^2 - px + 2 = 0$ дорівнює 0,5. Знайдіть другий корінь рівняння і коефіцієнт $p$.

**921.** Числа $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $2x^2 - 5x - c = 0$. Знайдіть ці корені та коефіцієнт $c$, якщо $2x_1 - x_2 = 2$.

**922.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 12x + 32$; 2) $2y^2 - 9y - 5$.

**923.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a^2+4a-12}{a+6}$; 2) $\dfrac{3k^2-5k-2}{9k^2+6k+1}$.

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**924.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{z^2-5z-14}{2z+4}:\dfrac{z-7}{2z}$;

2) $\dfrac{9b}{b^2+3b-18}+\dfrac{b}{b+6}$.

**925.** Доведіть, що вираз $\dfrac{2a^2+a-1}{2a^2-a}\cdot\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^{-1}$ набуває лише невід'ємних значень.

**926.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3-5x^2+6x=0$;

2) $x(x-1)+x(x^2-5)=0$.

**927.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4-7x^2-18=0$;

2) $4y^4+11y^2-3=0$;

3) $(x+4)^4-15(x+4)^2-16=0$;

4) $(x^2-3x)^2+3x^2-9x=28$;

5) $(x^2-2x-4)(x^2-2x-3)=20$;

6) $x-8\sqrt{x}+15=0$.

**928.** Знайдіть найбільший корінь рівняння $|x^2-2x|=3$.

**929.** Знайдіть добуток усіх коренів рівняння $\sqrt{x^2-2x+1}=5$.

**930.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+12x+35}{x+7}=0$;

2) $\dfrac{x+5}{x+2}=\dfrac{2}{2x-1}$;

3) $\dfrac{2y+6}{y^2+3y+2}=\dfrac{y}{y+2}$;

4) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x+3}=1$;

5) $\dfrac{3}{1+x}-\dfrac{12}{1-x}-\dfrac{6}{1-x^2}=3$;

6) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=2{,}5$;

7) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{35}{x^2-2x}-\dfrac{7}{x^2-4}=0$.

**931.** Для яких значень $a$ рівняння $\dfrac{x^3-5x^2+4x}{x-a}=0$ має два корені?

**932.** Довжина ділянки прямокутної форми на 10 м більша за ширину. Знайдіть розміри ділянки, якщо її площа дорівнює 96 м$^2$.

**933.** Діагональ кімнати дорівнює $4\sqrt{5}$ м, а її довжина на 4 м більша за ширину. Знайдіть площу кімнати.

**934.** Гіпотенуза прямокутного трикутника довша за його катети на 4 см і на 2 см. Знайдіть периметр трикутника.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**935.** Добуток двох послідовних натуральних чисел більший за їх подвоєну суму на 16. Знайдіть ці числа.

**936.** На волейбольному турнірі було зіграно 28 ігор. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо кожна команда зіграла по одному разу з усіма іншими?

**937.** Знаменник звичайного дробу на 4 більший за чисельник. Якщо до чисельника дробу додати 1, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, який на $\frac{3}{10}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

**938.** Надрукувати 120 сторінок текстового документа перший принтер може на 1 хв швидше, ніж другий. Скільки сторінок друкує за 1 хв перший принтер, якщо другий за 1 хв друкує на 4 сторінки менше?

**939.** Катер за 1 год пройшов 15 км річкою і 14 км озером, у яке впадає річка. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

**940.** Із міста $A$ в місто $B$, відстань між якими 40 км, виїхав автобус, а через 6 хв услід за ним — автомобіль, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо в місто $B$ він прибув на 4 хв раніше, ніж автобус.

**941.** Два насоси, працюючи разом, можуть наповнити водою порожній басейн за 6 год. За скільки годин може наповнити басейн кожний насос, працюючи окремо, якщо один з них зможе це зробити на 5 год швидше, ніж другий?

**942.** Щоб виконати замовлення, дві майстрині працювали разом 2 год, після чого перша — ще 1 год. За скільки годин могла б виконати замовлення кожна майстриня, працюючи окремо, якщо друга могла б це зробити на 2 год швидше, ніж перша?

**943.** Зі станції $A$ до станції $B$, відстань між якими 230 км, вирушив товарний потяг, а через 1 год назустріч йому зі станції $B$ — пасажирський. Потяги зустрілися на відстані 140 км від станції $A$. Знайдіть швидкість пасажирського потяга, якщо вона на 20 км/год більша за швидкість товарного.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## Інтерактивне завдання для самоперевірки 8
## Підсумкове завдання за рік

# Завдання для самоперевірки № 8 (за рік)

***Початковий рівень***

**1.** Укажіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{a-5}{a}+\frac{a}{a+5}$.

**А** Усі числа **Б** Усі числа, крім 0

**В** Усі числа, крім 0 і 5 **Г** Усі числа, крім 0 і $-5$

**2.** Знайдіть значення виразу $\frac{15b^3}{5b^4}$, якщо $b=0{,}5$.

**А** 12 **Б** 6 **В** 1,5 **Г** 0,75

**3.** Яка з наведених рівностей є неправильною?

**А** $2^{-3}=\frac{1}{8}$ **Б** $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{5}$

**В** $\sqrt{0{,}81}=0{,}9$ **Г** $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{16}$

**4.** Розв'яжіть рівняння $x^2-3x-18=0$.

**А** $-2$; 9 **Б** 2; $-9$ **В** $-3$; 6 **Г** 3; $-6$

**5.** Яке з наведених тверджень є неправильним?

**А** Функція $y=x^2$ від'ємних значень не набуває.

**Б** Графік функції $y=-\frac{4}{x}$ називають гіперболою.

**В** Графік функції $y=x^2$ проходить через точку $M(-0{,}6;\ 0{,}36)$.

**Г** Якщо значення аргументу дорівнює 4, то значення функції $y=\sqrt{x}$ дорівнює 16.

**6.** Спростіть вираз $\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{m^2}\right)\cdot\frac{m}{m+2}$.

**А** $\frac{(m+2)^2}{m^3}$ **Б** $\frac{1}{m}$ **В** $\frac{1}{m^2}$ **Г** $m$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## *Середній рівень*

**7.** Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та їхніми коренями (А–Д).

**1** $x^2 - 7x - 18 = 0$

**2** $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

**3** $\dfrac{x^2 - 7x - 18}{4x + 8} = 0$

**А** $-2$

**Б** 9

**В** $-2;\ 9$

**Г** $-3;\ 3$

**Д** $-2;\ 2$

**8.** Знайдіть значення виразу $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} - \sqrt{(-3)^2}$.

**А** 10 **Б** 7 **В** 4 **Г** $-2$

**9.** Скоротіть дріб $\dfrac{a^2 + 9a + 20}{a^2 - 16}$.

**А** $\dfrac{a+5}{a+4}$ **Б** $\dfrac{a+5}{a-4}$ **В** $\dfrac{a-4}{a+5}$ **Г** $\dfrac{a-5}{a+4}$

**10.** Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 48 см$^2$, а довжина на 8 см більша за ширину.

**А** 38 см **Б** 32 см **В** 28 см **Г** 24 см

## *Достатній рівень*

**11.** Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{b+3}{b-3} - \dfrac{b-3}{b+3}\right)\left(\dfrac{3}{b} - 1\right)$;

2) $\left(\sqrt{x} + 2\right)^2 - \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 4\right)$.

**12.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{8}{y+2} + \dfrac{3y-4}{y^2-4} = 2$;

2) $(x^2 + x)^2 - 2x^2 - 2x = 24$.

**13.** Знайдіть значення виразу $(x_1x_2 - 1)^2 + 2x_1 + 2x_2$, якщо $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $x^2 + 9x - 2 = 0$.

**14.** Велосипедист подолав дистанцію завдовжки 52 км за 2 год. Перші 40 км він проїхав зі сталою швидкістю, а на решті дистанції збільшив швидкість на 5 км/год. Знайдіть швидкість велосипедиста на перших 40 км дистанції.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

### *Високий рівень*

**15.** Доведіть, що вираз $\left(a^2-ab\right)^{-1}:\left(\dfrac{1}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a^2-b^2}\right)$ набуває лише одного значення.

**16.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{6x-4}{x^2+4x-5}-\dfrac{x}{x-1}=2$;

2) $(x^2+2x)(x^2+2x-3)=4$.

**17.** Знайдіть значення виразу $mn\left(m^{-1}+n^{-1}\right)-\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$, якщо $m=0{,}8$; $n=20$.

**18.** Майстриня та її учениця виконали замовлення за 18 год, працюючи разом. За скільки годин може виконати замовлення майстриня, працюючи сама, якщо третину замовлення вона може виконати на 5 год швидше, ніж учениця?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Пам'ятайте: хочете навчитися плавати — сміливіше входьте в воду. Хочете навчитися математики — беріться за задачі. Кожен розв'язок є своєрідним мистецтвом пошуку.

*Михайло Кравчук*

## До § 1. Раціональні вирази

**944.** Доведіть, що вираз $\dfrac{a+b}{a^2+4b^2-4a-4b+6}$ має зміст для будь-яких значень змінних.

**945.** Скоротіть дріб $\dfrac{x^4+x^2a^2+a^4}{x^3+a^3}$.

**946.** Доведіть, що для будь-якого натурального значення $n$ дріб $\dfrac{n+1}{n+2}$ є нескоротним.

**947.** Знайдіть усі натуральні значення $m$, для яких значення дробу $\dfrac{m^3-m+2}{m-1}$ є цілим числом.

**948.** Спростіть вираз

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

**949.** Доведіть тотожність $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

**950.** Для чисел $a$, $b$ і $c$ виконується рівність $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\dfrac{a-b+c}{a-b-c}$. Доведіть, що $a=0$ або $b=0$.

**951.** Доведіть, що вираз $\dfrac{2^m\cdot 3^{n+1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$, де $m$ і $n$ — цілі числа, набуває лише одного значення. Знайдіть це значення.

**952.** Доведіть, що для будь-яких допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ не залежать від значень $a$.

**953.** Знайдіть усі значення $a$, для яких рівняння $\dfrac{x-a+1}{(x-2)(x-2a)}=0$ не має коренів.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**954.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{|2x+1|-3}{|x-2|-4}=0$;

2) $\dfrac{9(x-3)^2-4(x-1)^2}{x^4+2x^2+3x+4}=0$.

**955.** Побудуйте графік функції:

1) $y=x-\dfrac{|x|}{x}$;

2) $y=\dfrac{4x-4}{x|x|-|x|}$.

## До § 2. Квадратні корені. Дійсні числа

**956.** Доведіть, що:

1) сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональними числами;

2) сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

**957.** Доведіть, що числа $\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$ є ірраціональними.

**958.** Доведіть, що значення виразу $\sqrt{96^{15}+2}$ не є натуральним числом.

**959.** Спростіть вираз $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}$.

**960.** Доведіть тотожність

$$\sqrt{b^2+2+2\sqrt{b^2+1}}-\sqrt{b^2+2-2\sqrt{b^2+1}}=2.$$

**961.** Знайдіть усі значення $x$, для яких значення виразу $\sqrt{4x^4+4x^2+1}-\sqrt{x^4+6x^2+9}$ дорівнює 2.

**962.** Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

1) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$;

2) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

**963.** Знайдіть значення виразу

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}-\sqrt{5}.$$

**964.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+1=0$;

2) $\sqrt{4+\sqrt{28-\sqrt{x-1}}}=3$;

3) $\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}=3$;

4) $\sqrt{x+4-4\sqrt{x+2}}=\sqrt{2}$.

**965.** Для яких значень $a$ рівняння $(\sqrt{x}-2)(x-a)=0$ має один корінь?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**966.** Знайдіть усі значення $x$ та $y$, для яких виконується рівність

$$x^2 - 8x + y - 4\sqrt{y} + 20 = 0.$$

**967.** 1) Доведіть, що коли $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = a$, то $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{a}$.

2) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 2$.

**968.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y = \sqrt{x^2} - x + 1$.

## До § 3. Квадратні рівняння

**969.** Дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює нулю й $a > 0$. Доведіть, що ліва частина рівняння є повним квадратом.

**970.** Доведіть, що рівняння $x^2 - (a + b)x + ab - c^2 = 0$ має корені для будь-яких значень $a$, $b$ і $c$.

**971.** Для яких значень $c$ рівняння $x^2 - 8x + 5c = 0$ і $2x^2 + 6x - c = 0$ мають спільний корінь?

**972.** Знайдіть значення виразу $x_1^3 + x_2^3$, якщо $x_1$ та $x_2$ — корені рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$.

**973.** Знайдіть значення $a$, для якого сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 1 = 0$ є найменшою.

**974.** Корені $a$ і $b$ квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ є додатними числами. Виразіть $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ через $p$ і $q$.

**975.** Корені рівняння $x^2 + mx + n + 1 = 0$ є натуральними числами. Доведіть, що $m^2 + n^2$ є складеним натуральним числом.

**976.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x^2 + 3x + 4)^2 = (x^2 + x + 7)^2$;

2) $(2x - 1)^2 + (2x^2 + 5x - 3)^2 = 0$;

3) $x(x + 2)(x + 3)(x + 5) = 280$.

**977.** Знайдіть суму всіх коренів рівняння

$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0.$$

**978.** Знайдіть найбільший корінь рівняння

$$(x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3)(x^4 + 4x^2 - 5) = 0.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**979.** Скоротіть дріб $\dfrac{(a^2+a)^2-a^2-a-2}{a^2+a+1}$.

**980.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)$;

2) $\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=2$;

3) $\dfrac{5}{(x-1)(x+3)}+\dfrac{9}{(x+1)^2}=2$.

**981.** Знайдіть чотири послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 1680.

**982.** На рисунку 25 точка $C$ ділить відрізок $AB$ на дві частини так, що $AB:AC=AC:CB$. (Такий поділ відрізка називають «золотим поділом», або «золотим перерізом».) Знайдіть відношення $AC:CB$.




**Рис. 25**

**983.** Для визначення глибини підземної порожнини спелеолог кинув на її дно камінь і через 4 с почув звук від падіння. Знайдіть глибину порожнини з точністю до 1 м, вважаючи, що швидкість звуку дорівнює 340 м/с, а камінь при падінні за перші $t$ с пролітає $5t^2$ м.

**984.** Щоб очистити зібрану пшеницю від домішок, першій зерноочисній машині потрібно на 9 год менше часу, ніж другій, і на 3 год більше, ніж обом за спільної роботи. За скільки годин кожна машина, працюючи окремо, може очистити всю пшеницю?



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

## Вирази зі змінними. Цілі вирази

*Вирази зі змінними* утворюють зі змінних, чисел, знаків дій і дужок.

Наприклад, $3x + 1$; $a(a - b)$; $-1{,}5mn^2$; $\frac{1}{k}$ — вирази зі змінними. Три перші вирази не містять дії ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають *цілими*.

Якщо у виразі $3x + 1$ узяти $x = 2$, то одержимо числовий вираз $3 \cdot 2 + 1$, значення якого дорівнює 7. Число 7 називають *значенням виразу* $3x + 1$ для значення змінної $x = 2$.

## Степінь з натуральним показником

*Степенем* числа $a$ з натуральним показником $n$, більшим за 1, називають добуток $n$ множників, кожний з яких дорівнює $a$.

Степенем числа $a$ з показником 1 називають саме число $a$.

$$a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n}, \text{ якщо } n > 1; \qquad a^1 = a.$$

Наприклад, $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. У виразі $5^4$ число 5 називають *основою степеня*, число 4 — *показником степеня*, а весь вираз $5^4$ називають *степенем*.

### *Властивості степеня з натуральним показником*

$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0,\ m > n)$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$a^{m+n} = a^m a^n$

$a^{m-n} = a^m : a^n$ $(a \neq 0,\ m > n)$

$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$

$a^n b^n = (ab)^n$

## Одночлени

Вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів, називають *одночленом*.

Наприклад, $9a^2b^3$, $-0{,}2xy^4$, $2zaz$ — одночлени.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, та степені різних змінних, називають *одночленом стандартного вигляду*.

*Степенем одночлена* називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього.

Наприклад, $9a^2b^3$ — одночлен стандартного вигляду п'ятого степеня; числовий множник $9$ — *коефіцієнт* цього одночлена.

Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Піднесемо одночлен $-3a^2b$ до куба:

$$(-3a^2b)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -27a^6b^3.$$

## Многочлени

*Многочленом* називають суму кількох одночленів.

Наприклад, $2a^2 - 3ab + 5$ — многочлен. Він є сумою одночленів $2a^2$, $-3ab$ і $5$, які називають членами многочлена.

Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Наприклад, $x^2 + 4xy - 3y^2$ — многочлен стандартного вигляду; $x^2 + 4xy - 3xy$ — не многочлен стандартного вигляду (він має подібні члени $4xy$ і $-3xy$).

*Степенем многочлена* стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, які складають даний многочлен.

Наприклад, $4a^2b - 2b^2$ — многочлен третього степеня.

## Дії з многочленами

Суму та різницю многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена. Наприклад:

$$(a^2 - 6a + 5) + (-a^2 + 3a) = \underline{a^2} - \underline{\underline{6a}} + 5 - \underline{a^2} + \underline{\underline{3a}} = -3a + 5.$$

$$(a^2 - 6a + 5) - (-a^2 + 3a) = \underline{a^2} - \underline{\underline{6a}} + 5 + \underline{a^2} - \underline{\underline{3a}} = 2a^2 - 9a + 5.$$



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад, $2b(b^2 - 3b) = 2b \cdot b^2 - 2b \cdot 3b = 2b^3 - 6b^2$.

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад, $(a + b)(a - c) = a^2 - ac + ba - bc$.

*Формули скороченого множення*

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

## Способи розкладання многочленів на множники

1) *Винесення спільного множника за дужки.* Наприклад:

$$2a^2b - 8ab^2 = 2ab \cdot a - 2ab \cdot 4b = 2ab(a - 4b).$$

2) *Спосіб групування.* Наприклад:

$$ab - ay - by + y^2 = (ab - ay) - (by - y^2) =$$
$$= a(b - y) - y(b - y) = (b - y)(a - y).$$

3) *Використання формул скороченого множення*:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Наприклад, $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a - 2b)(a + 2b)$.

## Рівняння з однією змінною

Рівність з невідомим значенням змінної називають *рівнянням з однією змінною* (або *рівнянням з одним невідомим*).

Значення змінної, для якого рівняння перетворюється в правильну числову рівність, називають *коренем*, або *розв'язком* рівняння.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Наприклад, число 2 є коренем рівняння $3x = x + 4$, бо числова рівність $3 \cdot 2 = 2 + 4$ є правильною.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

## Лінійні рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax = b$, у якому $a$ і $b$ — деякі відомі числа, а $x$ — змінна, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Числа $a$ і $b$ називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння.

*Кількість коренів лінійного рівняння*

| Рівняння | Коефіцієнти | Корені |
|---|---|---|
| $ax = b$ | $a \neq 0$ | $\frac{b}{a}$ — єдиний корінь |
| | $a = 0$ і $b \neq 0$ | Коренів немає |
| | $a = 0$ і $b = 0$ | Коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів) |

## Лінійні рівняння з двома змінними

Рівняння виду $ax + by = c$, де $a$, $b$ і $c$ — деякі відомі числа (коефіцієнти рівняння), $x$ та $y$ — змінні, називають *лінійним рівнянням із двома змінними*.

*Розв'язком* лінійного рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється в правильну числову рівність.

Наприклад, розв'язком рівняння $2x + y = 8$ є пара чисел $x = 2$, $y = 4$, бо числова рівність $2 \cdot 2 + 4 = 8$ є правильною. Скорочено цей розв'язок записують так: (2; 4).

Лінійне рівняння з двома змінними або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку. Наприклад, рівняння $x + y = 8$ має безліч розв'язків; рівняння $0x + 0y = 8$ розв'язків не має.

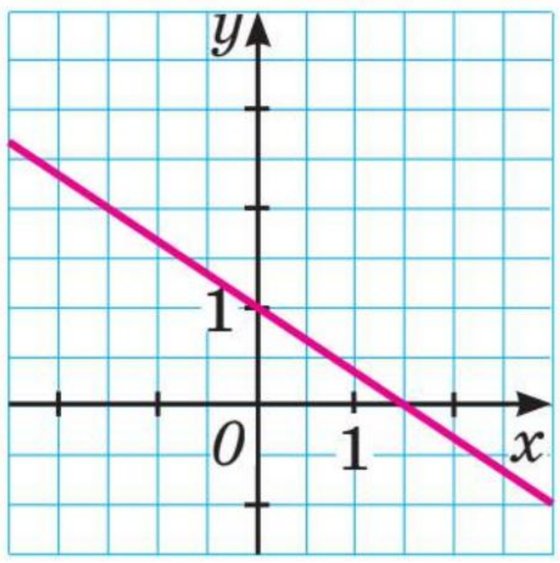


© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

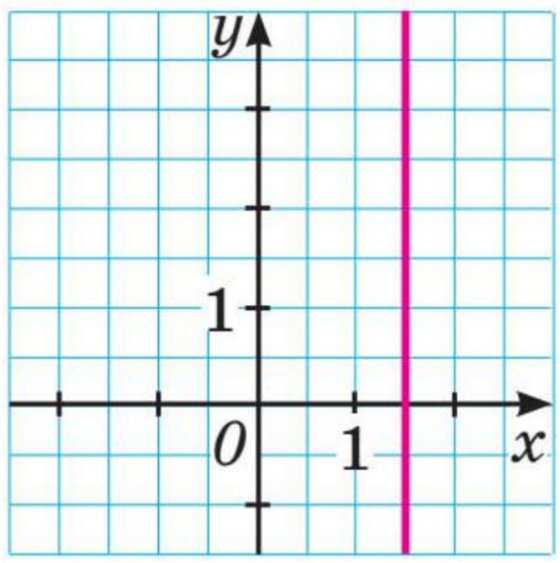
*Графіком рівняння з двома змінними* називають фігуру, утворену всіма точками координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.

Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів $a$ або $b$ відмінний від нуля, є пряма.

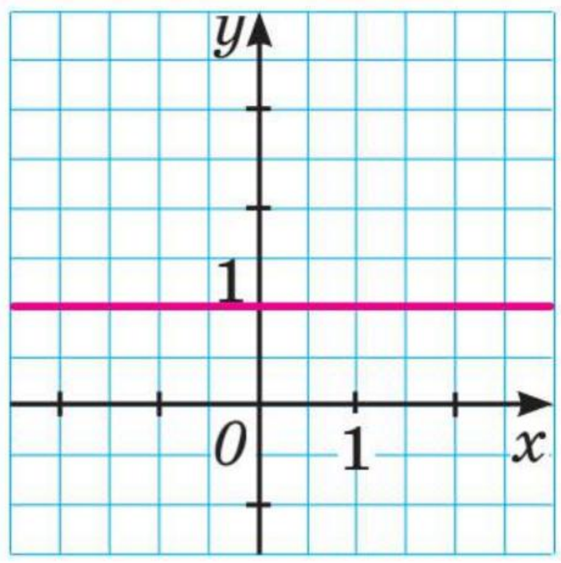
Щоб побудувати графік такого рівняння, достатньо знайти два його розв'язки, позначити на координатній площині точки, що відповідають цим розв'язкам, і провести через них пряму.




$2x + 3y = 3$




$2x + 0y = 3$




$0x + 3y = 3$

## Системи лінійних рівнянь із двома змінними

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки кількох рівнянь, то кажуть, що потрібно розв'язати *систему рівнянь*.

*Розв'язком* системи лінійних рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння системи перетворюється в правильну числову рівність.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

*Способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними*

1) *Спосіб підстановки.* Наприклад:

$$\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 7x = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ y = -1. \end{cases}$$

$(2; -1)$ — розв'язок системи рівнянь.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

2) *Спосіб додавання.* Наприклад:

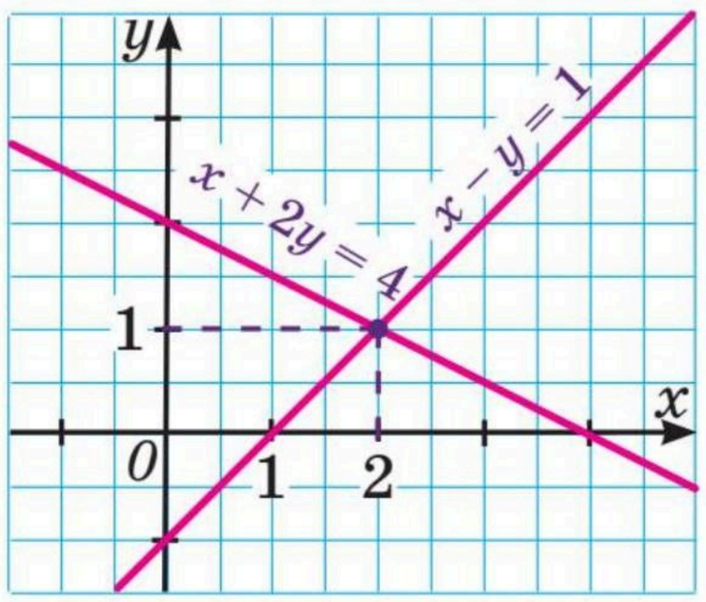
$$\begin{cases} 3x+4y=16; \\ 2x-3y=5; \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x+8y=32; \\ -6x+9y=-15; \end{cases} +$$

$$\begin{cases} 3x+4y=16; \\ 17y=17; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+4\cdot 1=16; \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4; \\ y=1. \end{cases}$$

(4; 1) — розв'язок системи рівнянь.

3) *Графічний спосіб.*

Щоб розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=4; \\ x-y=1, \end{cases}$ будуємо графіки обох рівнянь системи в одній системі координат.




Графіки перетинаються в точці (2; 1).

(2; 1) — розв'язок системи рівнянь.

## Функції

Залежність мінної $y$ від змінної $x$ називають *функцією*, якщо *кожному* значенню змінної $x$ відповідає *єдине* значення змінної $y$.

Змінну $x$ називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну $y$ — *залежною змінною*, або *функцією*.

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*, а всі значення, яких набуває залежна змінна (функція), — *область значень* функції.

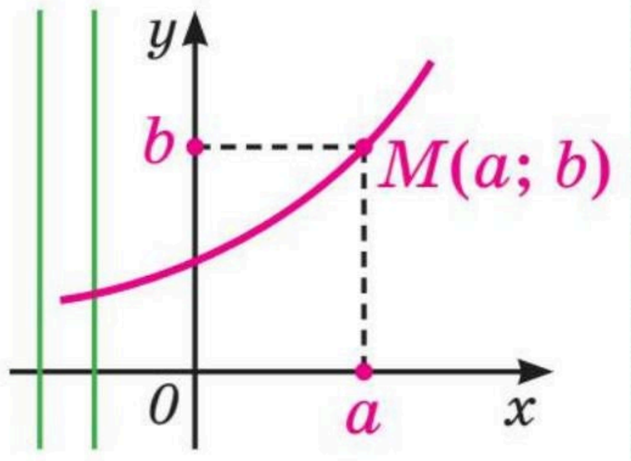
*Графіком функції* називають фігуру, утворену всіма точками координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Деяка точка $M(a; b)$ належатиме графіку функції тоді й тільки тоді, коли значення функції для $x = a$ дорівнює $b$.

Будь-яка пряма, перпендикулярна до осі $x$, перетинає графік функції не більше ніж в одній точці.

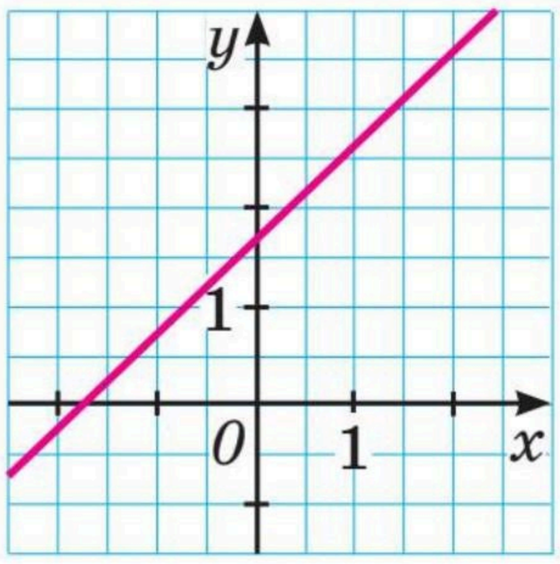



## Лінійна функція

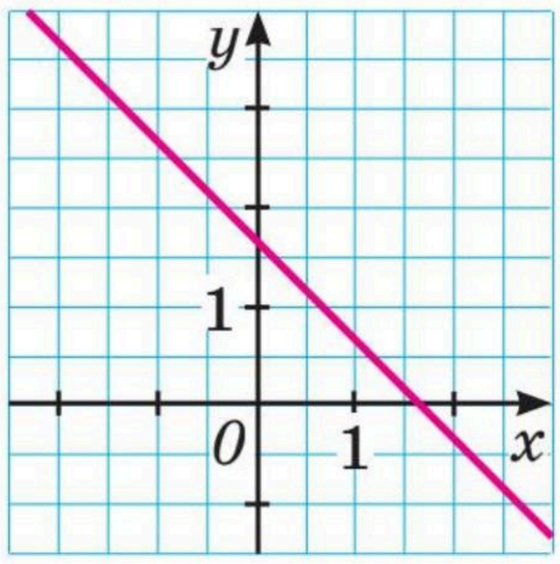
Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де $x$ — незалежна змінна, $k$ і $b$ — деякі числа, називають *лінійною*.

Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є пряма.

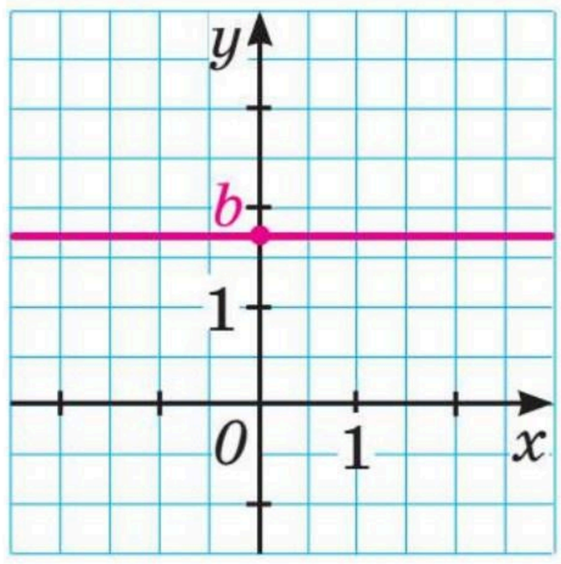
$k > 0$




$k < 0$




$k = 0$




Щоб побудувати графік лінійної функції, достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині й провести через них пряму.

*Властивості лінійної функції*

1. Область визначення функції утворюють усі числа.

2. Якщо $k \neq 0$, то область значень функції утворюють усі числа; якщо $k = 0$, то функція набуває лише одного значення $y = b$.

3. Графіком функції є пряма.

Лінійну функцію, яку можна задати формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають ще *прямою пропорційністю*.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

**§ 1.** **13.** 4) Усі числа; 5) усі числа, крім $-2$ і 2; 6) усі числа, крім $-2$, 0 і 1. **14.** 3) Усі числа, крім $-5$ і 5; 4) усі числа, крім $-2$, 0 і 2. **19.** 1) 0; 2) 16. **20.** 1) 0; 2) 40. **21.** $\left(\frac{15}{a}+\frac{25}{b}\right)$ пакетів. **22.** $\left(\frac{480}{n}+\frac{640}{m}\right)$ пляшок. **23.** $\left(\frac{25}{x+y}+\frac{20}{x-y}\right)$ год. **24.** 1) Усі числа, крім $-3$, 0 і 3; 2) усі числа, крім $-6$ і 0; 3) усі числа. **25.** 1) Усі числа, крім 4; 2) усі числа, крім $-2{,}5$ і 2,5; 3) усі числа. **31.** 3) $(m + 2n)(m - 2n + 1)$. **32.** На 142 %. **33.** Не можна. *Вказівка.* Врахуйте, що: 1) кількість яблук на яблуні може збільшуватися або зменшуватися на 3; 2) за один раз з яблуні не можна зірвати 1, 4 і більше, ніж 6 яблук. **42.** 1) 15; 2) 9. **43.** 1) 27; 2) 25. **44.** 1) $a$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{k}{3k+4}$; 4) $\frac{m-n}{n}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) 4; 7) $\frac{1+x}{1-y}$; 8) $a + b$; 9) $\frac{a-3}{7}$; 10) $\frac{10}{7(x+2)}$; 11) $\frac{4}{y-2}$; 12) $\frac{x+3}{x-3}$. **45.** 1) $\frac{ab}{c}$; 2) 3; 3) $\frac{7m}{m-5}$; 4) $\frac{3}{5}$; 5) $\frac{c+2}{c-2}$; 6) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{5}{x-y}$; 8) $\frac{m+1}{3}$; 9) $\frac{a+5}{a-5}$. **50.** 1) $x - 2$; 2) $\frac{3b}{2a+3b}$; 3) $\frac{5m-2}{5m+2}$; 4) $-3c^2 - 1$; 5) $-2(x + 2y)$; 6) $\frac{3n-2m}{3}$; 7) $x^2 - 2x + 4$; 8) $\frac{1}{3-z}$; 9) $\frac{x+y}{x-1}$. **51.** 1) $\frac{a}{a+3}$; 2) $\frac{7}{2b+9c}$; 3) $\frac{3n}{k-4}$; 4) $\frac{b-2a}{2}$; 5) $-\frac{5}{c^2+3c+9}$; 6) $\frac{a+b}{a-x}$. **52.** 1) $-5$; $-0{,}01$; 2) 2,05. **53.** 12; $-15$. **60.** 1) $\frac{16(b-2)}{2a+b}$; 2) $a + 2$. **61.** 1) $\frac{4(2n-m)}{2n+m}$; 2) $y + 2$. **62.** 0,802. **67.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $-0{,}5$. **68.** У першій фірмі. **69.** 7 кг; 21 кг. **70.** Можна. *Вказівка.* Врахуйте: якщо вибрати 5 троянд різних кольорів не можна, то різних кольорів може бути щонайбільше 4. **75.** 1) 1; 2) $\frac{3}{m}$; 3) 2; 4) $6y$; 5) $-2$; 6) $k + 5$; 7) $\frac{1}{m-n}$; 8) $\frac{2}{a-c}$. **76.** 1) $\frac{4}{a}$; 2) 1; 3) 8; 4) 5; 5) $k + 2$; 6) $\frac{1}{a+b}$. **77.** 1) 4; 2) $-20$. **78.** 1) $-64$; 2) 0,05. **79.** 1) $\frac{a}{a-9}$; 2) $\frac{8c}{c-3}$; 3) 8; 4) $k + 2$; 5) 4; 6) $\frac{1}{a-b}$. **80.** 1) 1; 2) $\frac{5}{b-5}$; 3) 1; 4) $m + n$. **81.** 1) $6(y + 2)$; 2) $\frac{1}{x-y}$; 3) $\frac{1}{a-1}$; 4) $2(3a + b^2)$; 5) $2(2x + y)$; 6) $\frac{1}{5a+b}$. **82.** 1) $a^3(a + 1)$; 2) $\frac{b+3}{b-3}$; 3) $2(n + 3)$; 4) $-\frac{2}{m+n}$. **83.** 3,5. **84.** $-6$. **90.** $-2$; $-1$; 1; 2. **91.** 1; 2; 3; 6. **94.** 80 км/год. **95.** 16 га. **96.** $x = 2$, $y = -2$; $x = 3$, $y = -1$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**99.** 1) $\frac{a+8}{4a}$; 2) $\frac{7y+10x}{xy}$; 3) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; 4) $\frac{2}{9}$; 5) $\frac{7}{24x}$; 6) $\frac{5}{c^2}$; 7) $\frac{b+1}{b}$; 8) $\frac{m^2+n^2}{m^2n^2}$; 9) $\frac{3-k^2}{3k^2}$; 10) $\frac{2x+3y}{6x^2y}$. **100.** 1) $\frac{7m-3}{3m}$; 2) $\frac{b-3a}{ab}$; 3) $\frac{x^2-y^2}{xy}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{12b}$; 6) $\frac{y+3}{3y}$; 7) $\frac{2}{a^2}$; 8) $\frac{b+2}{2b^2}$. **101.** $\frac{1}{6}$. **102.** $\frac{1}{64}$. **105.** 1) $\frac{4z}{z^2-1}$; 2) $-\frac{a^2}{c(a+c)}$; 3) $\frac{5}{x+1}$; 4) $\frac{3}{(y-2)(y+1)}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7-x}{6(x-4)}$; 7) $\frac{2}{c-2}$; 8) $\frac{2k}{k^2-4}$. **106.** 1) $\frac{6a}{(a-1)(a+2)}$; 2) $-\frac{1}{x(x-1)}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{a}{15(a+1)}$; 5) $-\frac{3}{b+5}$; 6) $\frac{4x}{x^2-16}$. **109.** 1) $\frac{a+bc}{a^2b^2c^2}$; 2) $\frac{3y+4x}{36x^4y^3}$; 3) $\frac{d-c}{cd(m+n)}$; 4) $\frac{5x^2+xy}{36(x^2-y^2)}$; 5) $\frac{ab}{b^2-a^2}$; 6) $\frac{2b}{(a^2-b^2)(a-b)}$. **110.** 1) $\frac{3b-2a}{48a^3b^3}$; 2) $\frac{7b+5a}{ab(x-y)}$; 3) $\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$; 4) $\frac{3x-y}{2(x+y)^2}$. **111.** 1) $\frac{3c+1}{2c}$; 2) $\frac{b}{y}$; 3) $\frac{2n^2}{3(4n^2-9)}$; 4) $-\frac{3}{2(x+5)}$; 5) $\frac{a+2}{a(a-2)}$; 6) $-\frac{4a+b}{2ab}$; 7) $\frac{5m}{2(m+6)^2}$; 8) $\frac{3x^2}{a(3x-a)^2}$; 9) $\frac{a^2}{a^3+27}$; 10) $\frac{8}{x^3-8}$. **112.** 1) $\frac{a-12}{a-10}$; 2) $\frac{1}{ab}$; 3) $\frac{9}{2(3-x)}$; 4) $\frac{5}{4(b+8)}$; 5) $\frac{5a^2}{(a-9)^2}$; 6) $-\frac{y^2}{2x(2x+y)^2}$; 7) $\frac{1}{x^3-1}$; 8) $\frac{a^2+4}{a^3+8}$. **113.** 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{5-m}{m^2}$; 3) $\frac{a+2b}{2a^2}$; 4) $\frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x+2)}$; 5) $\frac{2xy}{x+y}$; 6) $\frac{2}{1-a^2}$. **114.** 1) $\frac{2}{a}$; 2) $-\frac{2}{ab^2}$; 3) $\frac{4mn}{m+n}$; 4) $\frac{2}{x^2-1}$. **115.** 1) $\frac{xy+x-y}{x^2y}$; 2) 0. **116.** 1) $-\frac{2}{x}$; 2) $\frac{1}{5(a+5)}$. **117.** 1) 1; 2) 0,42. **118.** −17. **121.** 1) $\frac{6b^2+4}{(b-2)^2(b+2)}$; 2) $\frac{8x^7}{1-x^8}$. **122.** 1) $\frac{36}{(m+3)^2(m-3)}$; 2) $\frac{8}{1-a^8}$. **127.** 1) (3; 2); 2) (4; −2). **128.** 27 000 грн. **129.** 9,6 хв. **130.** 1) Так; 2) ні. *Вказівка.* 2) Обґрунтуйте, що в квадраті розміру $2 \times 2$, який визначається першими двома рядками і першими двома стовпцями, отримати 4 білі квадрати розміру $1 \times 1$ не можна.

**Завдання для самоперевірки № 1.** **1.** А. **2.** В. **3.** В. **4.** Б. **5.** Г. **6.** В. **7.** 1–Б; 2–Г; 3–Д. **8.** Б. **9.** Г. **10.** В. **11.** $\frac{a}{3a+b}$. **12.** 1) $\frac{10}{y^2-16}$; 2) $\frac{a^2}{b(a-b)^2}$. **13.** −10. **15.** $\frac{a+b}{ab}$. **16.** 1) $\frac{5}{c-5}$; 2) $\frac{a+2}{2a(a-2)}$.

**137.** 1) $\frac{a}{x-y}$; 2) $x^2(m+n)^2$; 3) $\frac{3}{b}$; 4) $\frac{1}{x}$; 5) $k-2$; 6) $m+3$. **138.** 1) $y^2$; 2) $\frac{a}{x+y}$; 3) $\frac{2}{k}$; 4) $m-1$; 5) $b-1$; 6) $2(y+4)$. **141.** 1) $\frac{10by}{3ax}$; 2) $-\frac{2n}{3m^3}$; 3) $\frac{b^2}{2a^2y}$; 4) $\frac{a}{3b}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

5) $\frac{a(3b-1)}{2}$; 6) $\frac{k(3k-m)}{m}$. **142.** 1) $\frac{m^3n}{2a^3}$; 2) $\frac{x}{3}$; 3) $\frac{2a(a-2)}{3}$; 4) $\frac{y-2x}{y+2x}$.

**143.** 1) $\frac{3}{(a-1)(3a+1)}$; 2) $\frac{4(x-2)}{x+2}$; 3) $-\frac{x(a+b)}{9}$; 4) $-\frac{(2x+1)(a+b)}{14}$; 5) $\frac{5y(a+y)}{2(a-y)}$;

6) $\frac{m-4}{m+4}$; 7) $\frac{(n-m)(x+y)}{2}$; 8) $\frac{3(c-2a)}{a^2-ab+b^2}$. **144.** 1) $\frac{2(c+1)}{c(c-1)}$; 2) $\frac{5}{x-y}$;

3) $\frac{(4-x)(x-y)}{3y}$; 4) $\frac{3(a+b)}{10ab}$; 5) 4; 6) $\frac{a-1}{(x-1)(a+1)}$. **145.** 1) $-17,5$; 2) $-3,6$; $2,4$.

**146.** 1) $-4$; 2) $-2$; 9. **149.** 1) 1; 2) 1. **150.** $m^2-n^2$. **151.** 0. **155.** 12 способами.

**156.** 18 туристів. **157.** 16 дівчат. **159.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{9a}{c}$; 3) $\frac{2c^2}{a^2}$; 4) $x^3$; 5) $\frac{3}{d}$; 6) $\frac{5k^2n^2}{2}$;

7) $\frac{2y^2}{x}$; 8) $-\frac{3n}{16b}$; 9) $\frac{9}{ab^3}$. **160.** 1) $\frac{15}{b}$; 2) $\frac{2xy}{5}$; 3) $6ck$; 4) $\frac{1}{5n}$; 5) $-\frac{20}{3mn}$; 6) $\frac{5}{2xy}$.

**161.** 1) 4;2) 3. **162.** 5. **163.** 1) $\frac{6}{c^2}$; 2) $\frac{mn}{y^4}$; 3) $a$; 4) $\frac{x^2}{x+4}$; 5) $2(c-d)$; 6) $\frac{b^2}{b-3}$.

**164.** 1) $\frac{x^2}{a}$; 2) $\frac{n}{a^2}$; 3) $\frac{2}{k-5}$; 4) $\frac{5(x-y)}{2}$. **165.** 1) $-\frac{20b^5}{3a}$; 2) $0,16n^2$; 3) $\frac{ab}{3c}$; 4) $\frac{9}{4bx^2}$.

**166.** 1) $-0,4m^2n^3$; 2) $\frac{2b^3}{3c}$; 3) $\frac{3}{5x}$; 4) $\frac{6a^6}{b^2c}$. **167.** 1) $\frac{3b(1-x)}{4a(1+x)}$; 2) $\frac{a}{2(a-b)}$; 3) $c(a+b)$;

4) $\frac{(2c+1)(x+y)}{3(1-2c)}$; 5) $\frac{9a}{a-b}$; 6) $\frac{2}{x^2-y^2}$; 7) $\frac{n}{4m(m+n)}$; 8) $\frac{(3-a)(1+2a)}{a}$.

**168.** 1) $\frac{3a^2c^2}{2b^2}$; 2) $\frac{x+2}{x^2}$; 3) $\frac{k-1}{k+1}$; 4) $\frac{x+y}{6(x+2y)}$; 5) $\frac{b(a-b)}{a+b}$; 6) $-\frac{a(a+2)}{c+b}$. **169.** 1) 16;

2) $-1$; 10; 75. **170.** 1) $-0,6$; 2) 0,78. **176.** 1) 0; 2) 0,5. **178.** 144 см.

**179.** 12 днів. **180.** 32 бали. *Вказівка*. Врахуйте, що перша і четверта дівчини набрали разом $105-61=44$ бали. Оскільки четверта дівчина набрала не менше, ніж 12 балів, то перша набрала не більше, ніж $44-12=32$ бали. Обґрунтуйте, що перша дівчина не могла набрати 31 або менше балів. **181.** 1) $-\frac{7}{a^2}$; 2) $\frac{3}{x(x-1)}$; 3) $m+2$; 4) $\frac{b+2}{b}$; 5) $-\frac{2}{a-5}$; 6) $\frac{2}{x-y}$. **182.** 1) $\frac{4}{b^2}$;

2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{12x}{x-4}$; 4) $\frac{1}{4(c+1)}$. **183.** 12; 36. **184.** 1; $-2$. **187.** 1) $\frac{b^3}{b-4}$; 2) $-4$;

3) $-1$; 4) $\frac{b-2a}{b+2a}$; 5) $\frac{2m}{n-m}$; 6) $\frac{x-1}{x(x+1)}$. **188.** 1) 3; 2) $\frac{2y}{x-y}$; 3) $\frac{2}{b-2}$; 4) $\frac{2(3-x)}{5}$.

**189.** 5. **190.** 4. **191.** 1) $-4$; 2) $\frac{2k^2}{x^2}$. **192.** 1) $\frac{4}{mn}$; 2) 2. **193.** 1) $a$; 2) $x-3$; 3) $-\frac{m}{n}$.

**194.** 1) $-a-b$; 2) $\frac{1}{c}$. **203.** 1) 4,25; 2) 1,25. **204.** $2\frac{25}{36}$. **205.** $\frac{x}{2x-1}$. **206.** 1) $-4$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

0; 2) 13. **208.** 1) $a = 0$; 2) $a = 3$. **209.** 11 м/с; 9 м/с. **210.** *Вказівка.* Врахуйте, що після кожної операції добуток усіх чисел, записаних на дошці, не змінюється і дорівнює $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 25$. **216.** 1) 2; 2) 1,5; 3) $-3$; 4) $-3$; 5) коренів немає; 6) $-2$; 7) 1; 8) $-2$; 9) 7. **217.** 1) 3; 2) $-1$; 3) 1,5; 4) $-1$; 5) коренів немає; 6) 20. **218.** 32. **219.** 8. **220.** $\frac{10}{15}$. **224.** 1) Коренів немає; 2) 4; 3) 2; 4) 21; 5) $\frac{7}{12}$; 6) 5; 7) $-0{,}8$; 8) $-\frac{1}{9}$; 9) 1; 10) $-3$. **225.** 1) 1,5; 2) 0,5; 3) 6; 4) $-0{,}5$; 5) $-6$; 6) 2; 7) $-2{,}5$; 8) $-2\frac{1}{3}$. **226.** 22,5 км/год. **227.** 2 км/год. **228.** 32 км/год. **229.** 1) $-9$; 2) 0; $\frac{5}{6}$; 3) 7; 4) коренів немає. **230.** 1) 0,45; 2) 9. **231.** Усі значення, крім $a = 1$ і $a = 2$. **232.** $a = -5$; $a = 2{,}5$. **233.** $b = -2$; $b = 1{,}5$. **234.** 24 хв. **237.** Ні. **238.** Так. **239.** 6. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{10}{a+b} + \frac{10}{b+c} + \frac{10}{c+a} = 9$, замінивши в ній число 10 сумою $a + b + c$.

**Завдання для самоперевірки № 2.** **1.** В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** В. **5.** Б. **6.** Г. **7.** 1–Д; 2–А; 3–Б. **8.** В. **9.** Б. **10.** А. **11.** 1) $\frac{3a^4c^4}{16b^3}$; 2) $\frac{a-1}{2a-1}$. **12.** $-6$. **13.** 1) $\frac{11}{24}$; 2) 0. **14.** 80 км/год. **17.** 1) 0,4; 2) 2. **18.** 9 год; 18 год.

**256.** 1) 101; 2) 0,9; 3) 0; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $4\frac{3}{4}$; 6) 0,25. **257.** 1) 121; 2) $-10$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 0,75; 5) 7,2. **262.** 1) $\frac{3}{a+5}$; 2) $\frac{8}{b^2-16}$; 3) $\frac{b-a}{a^2b^2}$; 4) $c(1 - c)$. **263.** 1) $\frac{a+b}{a-b}$; 2) $-\frac{mn}{m+n}$. **264.** $\frac{ab}{b-a}$. **265.** 1) $-4$; 2) $-1{,}5$. **266.** 1) 0,4; 2) 1. **267.** Жодного. **270.** 20, 10 і 15 гаджетів. **271.** 1100 г. **272.** *Вказівка.* Врахуйте, що серед чисел 1, 2, ..., 25 є 12 парних і 13 непарних, тому принаймні на одній з карток написані два непарні числа. **284.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 6,25; 3) 36; 4) 64; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 4. **285.** 3) $24n^{-10}$; 4) $4x^2$; 5) $6m^{-1}k$; 6) $9b^{10}$. **286.** 2) $1{,}5n$; 3) $2ab^{-2}$. **287.** 1) 2; 2) 243; 3) 4; 4) 27; 5) 1; 6) 0; 7) 15; 8) 6; 9) 9. **288.** 1) 27; 2) 125; 3) 1000; 4) 0,5; 5) 32; 6) $\frac{5}{64}$. **289.** 1) $\frac{3y}{x}$; 2) $0{,}4m^4n^2$; 3) $-\frac{2a^2}{b}$; 4) $\frac{9z^2}{x^7}$; 5) $\frac{a^5}{b^2}$; 6) $\frac{2m^7}{n^6}$. **290.** 1) $\frac{x}{c^2}$; 2) $\frac{125ab}{c}$; 3) $\frac{a^2}{3b}$; 4) $\frac{20n}{k^3}$. **295.** 1) $-1$; 2) $-4x^{-1}y^{-1}$. **296.** 1) $x^{-2}$; 2) $b^4$. **297.** 72. **298.** $\frac{9}{16}$. **299.** 1) 2; 2) $\frac{b+2a}{b-2a}$. **300.** $\frac{n+m}{n-m}$. **303.** (1; $-1$). **304.** 120 і 130 деталей. **305.** 70 сторінок. **306.** 44. **320.** 2) $1{,}16 \cdot 10^6$; 3) $3 \cdot 10^7$; 4) $7 \cdot 10^3$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

5) $2{,}52 \cdot 10^9$; 6) $2{,}5 \cdot 10^8$. **321.** В 1,7 раза. **322.** 1) $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ см; 2) $6{,}4 \cdot 10^{-1}$ м; 3) $2{,}8 \cdot 10^2$ кг; 4) $1{,}9 \cdot 10^9$ т. **323.** 1) $7{,}3 \cdot 10^{-3}$ мм; 2) $1{,}1 \cdot 10^{-1}$ км; 3) $9{,}3 \cdot 10^5$ г; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-2}$ ц. **324.** 7,91 км/с; $1{,}12 \cdot 10$ км/с; $1{,}67 \cdot 10$ км/с. **327.** 1) $1{,}91 \cdot 10^9$; 2) $1{,}016 \cdot 10^{-7}$; 3) $7{,}77 \cdot 10^7$; 4) $6{,}7 \cdot 10^{-5}$. **328.** 1) $4{,}08 \cdot 10^9$; 2) $1{,}93 \cdot 10^{-3}$. **333.** 1,05 кг. **335.** В 11 разів. **338.** 1) $-2$; 2; 2) 0,3. **339.** 6 масажистів. **340.** 160 грн. **354.** 1) $y = -\frac{36}{x}$; 2) $y = \frac{32}{x}$. **355.** 1) $y = \frac{16}{x}$; 2) $y = \frac{2}{x}$. **356.** $a = 1$. **357.** 1) $(4; -2)$ і $(-4; 2)$; 2) графіки не перетинаються. **358.** 1) $(1; 3)$ і $(-1; -3)$; 2) $(-2; 2)$. **360.** 1) $-1$; 2; 2) 1; 2,5. **361.** 1) $-3$; 1; 2) 0,5; 2. **362.** $S = \frac{18}{h}$; якщо $h = 4{,}5$, то $S = 4$. **363.** $t = \frac{12}{a}$; якщо $a = 1{,}6$, то $t = 7{,}5$. **366.** Три корені. **367.** 1. **368.** $-m$. **369.** $(1; -2)$. **370.** 5000 грн. **371.** 75 км; 75 км. **372.** 7 яблук.

**Завдання для самоперевірки № 3.** **1.** Г. **2.** Б. **3.** В. **4.** Г. **5.** Г. **6.** Б. **7.** 1–Б; 2–Д; 3–А. **8.** Г. **9.** В. **10.** Г. **11.** 1) 65,5; 2) $\frac{1}{27}$. **12.** 1) $4ab^3c^3$; 2) $-\frac{a+b}{ab}$. **13.** 1) $1{,}8 \cdot 10^{-4}$; 2) $4{,}2 \cdot 10^{-7}$. **14.** $(1; 2)$; $(2; 1)$. **15.** 1) 1,5; 2) $2\frac{2}{3}$. **16.** $\frac{1}{x^2 - y^2}$. **18.** 2.

**Завдання для повторення § 1.** **375.** 1) $\frac{1}{c}$; 2) $\frac{a-3}{3}$; 3) $\frac{c-4}{c+4}$; 4) $\frac{b-3}{b+3}$; 5) $m - n$; 6) $\frac{5x^2y}{x-2y}$. **377.** 1) 3; 2) 2; 3) $y + 2$. **378.** 196; 64. **380.** 3) $\frac{a^2}{b(a+b)}$; 4) $\frac{b}{xy}$; 5) $-\frac{2n^2}{(m-n)^2}$; 6) $\frac{4a+13}{a^2-16}$. **381.** 2) $\frac{2a}{15x}$; 3) $\frac{3c}{4ab}$; 4) $-\frac{1}{x+y}$; 5) $-\frac{x(x+y)}{y}$. **383.** 1) $\frac{2ax}{3}$; 2) $\frac{x}{2}$; 3) $\frac{(2-b)(1+b)}{b}$. **384.** $-2$. **385.** 1) $\frac{k-1}{2}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) $a + b$. **388.** $\frac{x+1}{3x+1}$. **389.** 1) $-1$; 2) 0; 3) коренів немає; 4) $-2$. **390.** 1) 0,6; 2) 0; 3; 3) $-4\frac{1}{3}$; 4) $-2{,}8$. **391.** $a = 0$; $a = 2$. **392.** 1) 2; 2) 127; 3) $-0{,}9$; 4) $2\frac{1}{3}$; 5) 4; 6) 0,7. **394.** 1) $\frac{a}{b^2c}$; 2) $\frac{a}{a^2-b^2}$; 3) $2x^2y^3$. **395.** 3) $\frac{2a^2}{c^7}$; 4) $m - 3$; 5) 1. **396.** 15. **398.** $3{,}6 \cdot 10^3$ с; $8{,}64 \cdot 10^4$ с; $2{,}592 \cdot 10^6$ с. **401.** 1) $-2$; 2; 2) 2.

**Завдання для самоперевірки № 4.** **1.** В. **2.** А. **3.** Г. **4.** Б. **5.** В. **6.** В. **7.** 1–В; 2–А; 3–Д. **8.** Б. **9.** В. **10.** В. **11.** 1) $100a^2$; 2) $\frac{2}{b-3}$. **12.** 1) 3; 2) коренів немає. **14.** $-3$; 1. **16.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 4. **17.** 1. **18.** $a = -2$; $a = 4$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**§ 2. 410.** Жодного. **411.** Два. **412.** 1) $-3; 1$; 2) $-1$. **413.** 1) $-2; 1$; 2) 2. **414.** 1) $(2; 4)$; 2) $(-4; 16)$; $(4; 16)$. **415.** $(0; 0)$; $(-5; 25)$. **416.** 1) $0 \le y \le 4$; 2) $0 \le y \le 4$. **417.** $0 \le y \le 9$. **421.** $-1$; 0; 1. **422.** $k = 3$. **423.** 2) $-1$; 1. **424.** 1) $\frac{a+b}{ab}$; 2) $-2$. **425.** 26 км/год. **426.** 60 м. **427.** *Вказівка*. Припустимо, що вказаних трьох клітинок немає. Тоді щонайбільше дві клітинки, розташовані підряд, можуть мати той самий колір. Врахуйте, що смужка має 14 незафарбованих клітинок, які можуть розділяти щонайбільше 15 пар клітинок того самого кольору. **440.** 5) 1,9; 6) $-2,5$; 7) 3; 8) $-2$. **441.** 5) 3,8; 6) $-9$. **442.** 1) 3; 1; 1,8; 2) 6. **443.** 5; 9; 0. **453.** 1) 3,5; 2) $-1\frac{2}{3}$; 3) 7,1; 4) 0,001. **454.** 1) 0; 2) $\frac{1}{3}$. **455.** 1) $-1,5$; 2,5; 2) 1,5; 4,5. **456.** 1) $-9$; 5; 2) 0,1; 0,9. **459.** $b = -\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$. **460.** $a = 0$; $a = 2$. **461.** 1) $x = 0$; 2) $x = 0$. **464.** $(-1; 3)$. **465.** 15 днів. **466.** Тарас. *Вказівка*. Врахуйте, що фішкою потрібно пройти 19 клітинок, і що Тарас може доповнювати ходи Олега до 4 клітинок. **493.** У 14 букетах. **494.** 6 осіб. **495.** У 16 командах. **498.** 0. **499.** 50 %. **500.** 2 знаки. **517.** 1) 24; 2) 180; 3) 105; 4) 3; 5) 45; 6) 200; 7) 42; 8) $2\frac{2}{7}$; 9) 2,8. **518.** 1) 75; 2) 36; 3) 28; 4) 720; 5) 105; 6) $2\frac{3}{4}$. **521.** 1) 21; 2) 20; 3) 20. **522.** 1) 12; 2) 63; 3) 6. **523.** 1) 300; 2) 34,5; 3) 4; 4) 64; 5) 64; 6) 18. **524.** 1) 28; 2) 42; 3) 150; 4) 32; 5) 81; 6) 130. **525.** 1) $ab$; 2) $-ab$; 3) $-2x^2y^3$; 4) $\frac{5m}{n^4}$; 5) $-3ab^2$; 6) $-xy$. **526.** 1) $-a^2b$; 2) $-6a^5b^3$; 3) $\frac{x}{y^4}$; 4) $7xy$. **527.** 1) 15; 0,2; 2) 9; 1,7. **528.** 1) 8; 2,2; 2) 5; 0,6. **529.** 1) $-3$; 2) 5. **530.** 1) $-2$; 2) 4. **532.** $n^2 - 2$. **533.** 1. **534.** 1) $-2$; 2; 2) $-4$; 4. **535.** $-3$; 3. **536.** 2) $10b + 29$. **538.** 84 км/год. **539.** 4189 осіб. **540.** Не можна. *Вказівка*. Обґрунтуйте: щоб зібрати всі фішки в одній вершині потрібна непарна кількість ходів. **550.** 2) 2; 3) $10\sqrt{21}$; 4) $-26$; 5) 9; 6) 0; 7) $3 + \sqrt{5}$; 8) 9. **551.** 1) $\sqrt{15}$; 2) 2; 3) 15; 4) 10; 5) $4\sqrt{3} - 2$; 6) 5. **556.** 1) $-67$; 2) 0; 3) 9; 4) $4\sqrt{6}$; 5) 8; 6) $-2$. **557.** 1) 6; 2) 4; 3) 23; 4) $5 + 2\sqrt{3}$. **558.** 1) $a$; 2) $2k$; 3) $4\sqrt{x} + 8$; 4) $a^2$. **559.** 1) $m$; 2) $ab + a + b + 1$. **560.** 1) $a\sqrt{5}$; 2) $-x\sqrt{k}$; 3) $m\sqrt{m}$; 4) $5c^3\sqrt{c}$; 5) $2n^2\sqrt{2}$; 6) $-a^2b\sqrt{2}$. **561.** 1) $x\sqrt{2}$; 2) $-b\sqrt{7}$; 3) $8a\sqrt{a}$; 4) $-3m^2n^3\sqrt{3}$. **562.** 2) $\sqrt{27c^2}$; 3) $\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{2a^4}$; 5) $-\sqrt{6x^2}$; 6) $-\sqrt{2m^7n}$. **563.** 2) $\sqrt{4x^2y}$; 3) $\sqrt{2n^3}$; 4) $\sqrt{ab^5}$; 5) $-\sqrt{3a^2}$; 6) $-\sqrt{9bc}$. **564.** 1) $\sqrt{3} + 1$; 2) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

3) $14(3+2\sqrt{2})$; 4) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; 5) $\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; 6) $\frac{4\sqrt{b}-6}{4b-9}$. **565.** 1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$; 3) $4\left(3\sqrt{2}-4\right)$; 4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; 5) $\frac{c(1+\sqrt{c})}{1-c}$; 6) $\frac{\sqrt{a}+a}{a-a^2}$. **568.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{8}-1}{2}$; 3) $x+\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **569.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $1-\sqrt{5}$; 3) $\frac{1}{a-\sqrt{7}}$; 4) $\sqrt{m}-\sqrt{5}$. **572.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) $\frac{4}{23}$. **573.** 1) 4; 2) 2. **574.** 1) $-\sqrt{-x^3}$; 2) $-\sqrt{-9ab}$. **575.** 1) $-\sqrt{-4k^3}$; 2) $-\sqrt{-a^3b^7}$. **576.** 1) 36; 2) 4; 3) 1. **577.** 1) 10; 2) 20. **578.** 1) 1; 2) 0. **579.** 0. **580.** 2,6. **582.** $-1$; 3. **583.** Ні. **584.** 400 м. **602.** 10 значень. **603.** 1) 4; 2) 0; 1. **604.** 0; 4. **605.** 1) 9; 2) коренів немає; 3) 9; 4) $-0{,}5$. **606.** 1) Коренів немає; 2) 36; 3) $-3$; 4) 10. **610.** 1) 2; 2) $-1$. **611.** 1) $-2$; 2; 2) $-5$; 5. **612.** 1) $(a-1)^2$; 2) $-\frac{1}{b+2}$. **613.** 1) 0; 5; 2) $-6$; 6. **614.** 76 с. **615.** 6 га. **616.** *Вказівка.* Розгляньте два випадки: 1) усі особи групи є друзями; 2) існують особи, які не є друзями. У другому випадку розгляньте двоє осіб $A$ і $B$, які не є друзями. Урахуйте: оскільки серед будь-яких трьох осіб є двоє друзів, то решту 27 осіб дружать або з особою $A$, або з особою $B$. **621.** 2) 5; 3) 7,5; 4) 76. **623.** 2) 120; 3) 100; 4) 12; 5) $\frac{7}{18}$; 6) 6; 7) 96; 8) 16; 9) 5. **624.** 2) 6; 3) 7; 4) 4; 5) $x$; 6) $-6\sqrt{ab}$. **625.** 4) $3x^2\sqrt{3}$; 5) $-2b\sqrt{2a}$; 6) $1{,}5k^2\sqrt{k}$. **626.** 2) $\sqrt{7m^2}$; 3) $-\sqrt{4n^2k}$. **629.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{c+\sqrt{10}}{2}$. **630.** 1) $\frac{\sqrt{10}}{4}$; 2) $\sqrt{6}+2$; 3) $\frac{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}{m-4n}$. **632.** 1) $-2$; 2) $\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$. **633.** 2) $-2$; 4; 3) коренів немає. **634.** $a=-\sqrt{5}$; $a=\sqrt{5}$. **635.** 1) 144; 2) коренів немає; 3) $-4$. **636.** $b=-2$; $b=2$. **639.** 1) $-2$; $-1$; 2) 1.

**Завдання для самоперевірки № 5.** **1.** Г. **2.** В. **3.** Г. **4.** Б. **5.** В. **6.** Г. **7.** 1–Д; 2–В; 3–Г. **8.** А. **9.** Г. **10.** Б. **11.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $a$. **12.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{a}-\sqrt{3}$. **13.** 1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$. **14.** $-1{,}5$; 1. **15.** 1) 5; 2) 6. **17.** 1) $-6$; 2) $2\sqrt{b}$. **18.** $-0{,}5$; 1.

**§ 3.** **653.** 1) $-4{,}5$; 0; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 3) $-2$; 2; 4) 0; 1,5; 5) $-0{,}6$; 0,6; 6) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **654.** 1) $-0{,}8$; 0; 2) коренів немає; 3) 0; $\frac{2}{3}$; 4) $-4$; 4; 5) $-0{,}4$; 0,4. **655.** $-6$. **656.** 8. **657.** $-9$; 0. **658.** $-0{,}5$; 0. **659.** $b=-7$. **660.** $c=10$. **661.** $a=-1$; $a=1$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**662.** $a = 2$; $b = -4$. **663.** $a = 1$; $c = 2$. **664.** $a = -0{,}5$; $a = 0$. **666.** 1) $x - 5$; 4,5; 2) $\frac{2}{\sqrt{y}+3}$; 0,2. **667.** 120 дерев. **668.** 364 грн. **669.** *Вказівка*. Розгляньте два випадки: сума записаних чисел є: 1) парною; 2) непарною. **674.** 1) 1; 5; 2) $-6$; 2; 3) $-5$; $-2$; 4) коренів немає; 5) 5; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. **675.** 1) $-5$; 1; 2) $-4$; $-1$; 3) 2; 3; 4) коренів немає; 5) 4; 6) $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. **676.** 1) 1; 1,5; 2) $-1$; 0,5; 3) $-2$; $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) коренів немає; 6) $-\frac{1}{7}$; 1. **677.** 1) $-1$; $-0{,}5$; 2) $\frac{1}{3}$; 1; 3) $-1{,}5$; 1; 4) 0,5. **678.** 1) 1; 4; 2) $-1$; 2; 3) $-4$; 0,5; 4) $-1$; 0,25. **679.** 1) $-1$; 3; 2) 0,5; 2. **680.** 1) $-8$; $-2$; 2) $-3$; 5; 3) $-1{,}5$; $-1$. **681.** 1) 4; 5; 2) $-1$; 2,5. **682.** 1) $1 \pm \sqrt{2}$; 2) $-1$; 3; 3) $-1$; $-0{,}2$; 4) $-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}$. **683.** 1) $3 \pm \sqrt{3}$; 2) $-4$; 1; 3) $-1{,}5$; 1; 4) $-\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$. **684.** 1) $(-2; 4)$; $(6; 36)$; 2) графіки не перетинаються. **685.** $(-4; 16)$; $(2; 4)$. **686.** $-5$; 2. **687.** 1) 1; 4; 2) $-0{,}5$; 3; 3) $-0{,}6$; 1; 4) $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{3}$; 5) $-1$; 2. **688.** 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) $-3$; 8; 3) $\frac{-10 \pm 5\sqrt{2}}{2}$; 4) $-2$; 0,4. **689.** $-7$; $-6$ або 6; 7. **690.** 6; 7. **691.** 1) 1; 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3. **692.** 1) $-3{,}5$; 1; 2) $-1{,}5$; 3. **693.** 1) $-\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; 2) 4; 5; 3) $-2$; 2; 4) $-2$; 1; 2; 5. **694.** 1) $-2$; $-1$; 1; 2; 2) $-1$; 5; 3) 1; 3. **695.** $b = -15$; $b = 12$. **696.** 1) $a = 1{,}5$; 2) $a = 1$. **697.** $b = -8$; $b = 8$. **702.** $-1{,}5$. **703.** 77 км/год. **704.** $-4$; 3. *Вказівка*. Оскільки дане рівняння рівносильне рівнянню $x = 12 - \lfloor x^2 \rfloor$, то значення $x$ має бути цілим числом (як різниця двох цілих чисел). У такому випадку $\lfloor x^2 \rfloor = x^2$. **723.** $-1$ — другий корінь рівняння; $q = 9$. **724.** 3 — другий корінь рівняння; $p = -1$. **725.** 1) 28; 2) $-58$. **726.** 1. **727.** 1) $m = 2$; 2) таких значень $m$ не існує. **728.** $b = -2$; $b = 2$. **729.** $\sqrt{2}$ і $4\sqrt{2}$ — корені рівняння; $p = -5\sqrt{2}$. **730.** 0,5 і 4,5 — корені рівняння; $q = 2{,}25$. **731.** 8 і 2 — корені рівняння; $b = 16$. **732.** 1) $-0{,}4$; 2) 3; 3) 14; 4) 24. **733.** 1) $-200$; 2) 10,8. **734.** $x^2 + x - 8 = 0$. **735.** 1) $(x - a)(x + a - 2)$; 2) $(x - 4)(x + b)$. **736.** 1) $4m$; 2) $\frac{1}{a-5}$. **737.** 1) $(4; -1)$; 2) $(0; -1)$. **738.** 0,5 га; 0,8 га. **739.** 8 задач.

**Завдання для самоперевірки № 6.** **1.** В. **2.** Г. **3.** В. **4.** В. **5.** Б. **6.** Г. **7.** 1–В; 2–Г; 3–А. **8.** Б. **9.** Г. **10.** В. **11.** 1) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; 2) $-4$; 1. **12.** (2; 4); $(-0{,}5; 0{,}25)$. **13.** 4. **14.** 3 — другий корінь рівняння; $q = -15$. **15.** $a = -4$; $a = 4$. **16.** 1) $-5$; 5; 2) 0,5; 2. **17.** 27. **18.** $c = -8$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**744.** 1) $-4$; 1; 2) 4; 3) $-\frac{1}{3}$; 3. **746.** 5) $(2x-1)(x-2)$; 6) $(3z+2)(z-1)$; 7) $3(x-1)^2$; 8) $-(y+4)(y-2)$; 9) $-(2x-1)(x-1)$. **747.** 1) $(x-1)(x-3)$; 2) $(y+4)(y-3)$; 3) $(2x+5)(x-1)$; 4) $4(k+1)^2$; 5) $-(x+5)(x-1)$; 6) $-(2z-3)(z+1)$. **748.** 1) $a-1$; 2) $\frac{1}{x-1}$; 3) $m-3$. **749.** 1) $\frac{1}{b+4}$; 2) $y+1$. **750.** 1) $(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$; 2) $0{,}5(x-2)(x-4)$; 3) $-(y+1)(0{,}2y-0{,}7)$; 4) $\frac{1}{3}(x+1)(x+2)$. **751.** 1) $(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$; 2) $0{,}5(x-2)^2$; 3) $\frac{1}{8}(x-2)(x-4)$. **752.** 1) $\frac{2a-3}{4}$; 2) $\frac{3x-1}{2x+1}$; 3) $\frac{b-2}{b-5}$; 4) $\frac{2x+3}{2x-3}$. **753.** 1) $\frac{3}{a+4}$; 2) $\frac{k-1}{2k-1}$. **754.** $\frac{2x-1}{2x+1}$; $-9$. **755.** $\frac{b+4}{2b-1}$; 23. **756.** 1) 1; 2) $\frac{c-2}{c+1}$. **757.** 1) 2; 2) $y$. **758.** 1) $\frac{1}{b+6}$; 2) 1. **759.** $\frac{1}{a^2-1}$. **762.** 1) $(x+a)(x-2a)$; 2) $(2x+a)(x+2a)$. **763.** $(x+b)(x+3b)$. **764.** $\frac{2a}{a-2b}$. **765.** 2) $(y+2)(y-1)(y+1)$. **766.** 2) 0. **767.** 162 000 грн. **768.** 29,7 км/год. **769.** Ні. *Вказівка.* Якби дівчата були знайомі з різною кількістю хлопців (з 0, 1, 2, 3, 4 хлопцями), то кількість усіх знайомств дорівнювала б 10, а 10 на 4 націло не ділиться. **771.** 1) $-2$; $-1$; 1; 2; 2) $-3$; 3; 3) $-2$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2; 4) коренів немає; 5) $-2$; 2; 6) $-1$; $-0{,}5$; 0,5; 1. **772.** 1) $-2$; 2; 2) $-3$; $-1$; 1; 3; 3) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 4) $-1$; 1. **773.** 1) $-2$; 2; 2) 0; 3) 1; 4; 4) $-3$. **774.** 1) 1; 7; 2) $-3$. **775.** 1) $-10$; 10; 2) 1; 3) 0; 4) 4. **776.** 1) $-2$; 2) $-3$; $-2$. **777.** 1) 1; 6; 2) $-1$; 2; 3) 1; 3; 4) $-3$; 4; 5) $-6$; 1; 6) 4; 5. **778.** 1) $-2$; 7; 2) 3; 5; 3) $-7$; 1; 4) $-4$; $-2$. **779.** 1) 3; 2) 2; 3) 0,5; 4) коренів немає. **780.** 1) 5; 2) 0,5. **781.** 1) 5; 2) $-1$; 2,5; 3) $-1$; 5; 4) 1; 2. **782.** 1) $-4$; 1; 2) 1; 10. **783.** $-\frac{1}{3}$; 1. **784.** $-1\frac{2}{3}$; 2. **785.** 1) $-2$; 1; 2) 0; 4; 3) $-4$; 3; 4) 2; 7; 5) $-1$; $-0{,}5$; 6) $-4$; 1,5. **786.** 1) $-1$; 4; 2) $-5$; $-1$; 3) $-4$; 4) $-5$; 3. **787.** 1) $-\sqrt{5}$; 0; $\sqrt{5}$; 2) $-0{,}25$; 0; 1. **788.** 1) $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$; 2) 0; 5; 6. **789.** 1) $-2$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2; 2) $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; 3) 2; 6; 4) $-3$; $-2$; $-1$; 0; 5) $-1$; 2; 6) $-1$; 3. **790.** 1) $-2$; $-0{,}5$; 0,5; 2; 2) $-1$; 0; 1; 3) $-4$; 0; 4) $-3$; $-2$; 2; 3; 5) $-2$; 1. **791.** $-5-\sqrt{3}$. **792.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **793.** 1) $-15$; 1; 2) 1; $5\frac{2}{3}$; 3) $3\pm\sqrt{14}$. **794.** 1) 1,5; 2; 2) $\frac{5}{7}$; 4. **795.** $a=-3$; $a=1$. **796.** $b=-7$; $b=3$. **797.** 1) $-1$; 0,5; 2) 2; 3; 3) 4; 7; 4) $-2$; 3. **798.** 1) $-6$; $-4$; $-1$; 1; 2) $-1$; 4; 3) 0,4; 4. **799.** $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)$.



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

**800.** 1) $-1$; 4; 2) 1; 25. **801.** 1) $-5$; 1; 2) 4. **802.** 1) $5\sqrt{2}$; 2) 2. **804.** 35 г; 280 г. **805.** 250 м/хв. **806.** 3 або $-6$. *Вказівка.* Нехай найменший корінь рівняння дорівнює $x$. Тоді $x(x+1)(x+2)(x+3)=360$. Перемноживши в лівій частині два крайні та два середні множники, уведіть заміну $x^2+3x=t$. **807.** 15; 9. **808.** 9; 12. **809.** $-5$; 3 або $-3$; 5. **810.** 12 дм; 8 дм. **811.** 28 м. **812.** 40 см. **813.** 18 рядків. **814.** 3; 1. **815.** 2; 1. **816.** 36 м; 24 м. **817.** 4 см. **818.** 16 м; 8 м. **819.** 4 м; 4 м. **820.** 40 см. **821.** 90 км/год; 60 км/год. **822.** 20 км/год. **823.** 90 км/год. **824.** 90 км/год. **825.** 6 писанок. **826.** 4 сторінки. **827.** 16 комп'ютерів. **828.** 10 га; 15 га. **829.** 40 кг; 35 кг. **830.** 3 км/год. **831.** 34 км/год. **832.** 24 км/год. **833.** 24 хв; 12 хв. **834.** 30 год; 45 год. **835.** 9 днів. **836.** $\frac{5}{6}$. **837.** $\frac{7}{12}$. **838.** 15 дівчат. **839.** 11 учасників. **840.** 9 вершин. **841.** 12 команд. **842.** 80 км/год. **843.** 16 км/год. **844.** 1) 30,4; 2) 2. **845.** $\frac{b-1}{b+1}$; 3; 0,2. **847.** 6 слив. **848.** Не можна. *Вказівка.* Врахуйте, що за вказаних кроків добуток усіх чисел у вершинах квадрата не змінюється і дорівнює $-30$. **850.** 1) $-2$; 7; 2) $-10$; 6; 3) $-1{,}5$; $-1$; 4) 0,2; 4. **852.** 1) $-2$; 10; 2) 0,5; 1; 3) $-4$; 7; 4) 2; 4. **854.** $p=-3$; $q=-10$. **857.** 1) 43; 2) $-10$. **858.** $-4$ — другий корінь; $p=-1$. **859.** $a=-2$; $a=1$. **860.** 2) $(2x+5)(x-1)$. **861.** 1) $x+6$; 2) $\frac{4a-1}{a+5}$. **862.** 1) 3; 2) $\frac{x}{x+1}$. **864.** 1) $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; 2) $-0{,}8$; 0; 0,8. **865.** 1) $-4$; $-1$; 1; 4; 2) $-0{,}5$; 0,5; 3) $-9$; $-5$; 4) $-1$; 2; 5) $-3$; 1; 6) 1. **866.** 9. **867.** 7. **868.** 1) $-8$; 2) $-2$; 5; 3) $-1\frac{2}{3}$; $-1$; 4) 2; 5) $-1$; 11. **869.** $b=-3$; $b=6$. **870.** 46 см. **871.** 12 м$^2$. **872.** 3; 4. **873.** 20 сторінок. **874.** 30 км/год. **875.** 30 км/год. **876.** 6 днів; 12 днів.

**Завдання для самоперевірки № 7.** **1.** В. **2.** А. **3.** А. **4.** В. **5.** Г. **6.** В. **7.** 1–А; 2–В; 3–Г. **8.** Б. **9.** Г. **10.** Б. **11.** $\frac{2a+3}{a+3}$. **12.** $-11$; 2. **13.** 0. **14.** 80 км/год. **15.** 1. **16.** 1) $-1$; 1; 3; 2) 0,5; 0,75. **17.** $a=-4$; $a=0{,}5$. **18.** 12 год.

**Повторення за курс алгебри 8 класу.** **880.** 2) $\left(S-b\cdot\frac{S}{a}\right)$ км. **881.** 1) $\frac{7y^2}{6x^2}$; 2) $\frac{6b}{a-b}$; 3) $\frac{m-3}{m-1}$. **882.** 1) 3; 2) 1; 3) $\frac{a+b^2}{a^2b^3}$; 4) $\frac{6x-5y}{45x^4y^4}$; 5) $\frac{8b}{b+2}$; 6) $\frac{5}{3(z-3)}$;



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

7) $\frac{ab}{(a-2b)^2}$; 8) $\frac{1}{x+2}$. **883.** 8; 0,02. **884.** 1) $\frac{20a(a+1)}{3b}$; 2) $\frac{3(x-y)}{4y^2}$; 3) $\frac{a(a-7)}{3(a+7)}$; 4) $\frac{1}{6}$. **886.** 1) $\frac{4z}{3xy^2}$; 2) $\frac{3b}{a-b}$. **887.** 1) $\frac{4b}{y}$; 2) $\frac{3b}{a}$; 3) $\frac{c-2}{2(c-1)}$; 4) $\frac{1}{x}$; 5) $3(a-b)$. **890.** 1) 4; 2) 0; 3) коренів немає; 4) $-2,5$. **891.** 1) 61,75; 2) 30; 3) 0,32; 4) 0,2. **892.** 3) $25x^4y^3$; 4) $-2$. **895.** 1) $-1$; 4; 2) 1; 2. **896.** Так. **898.** 1) 65; 2) 4; 3) 32; 4) 13; 5) 0; 6) 22. **900.** 1) 0; 2) 18; 3) 3; 4) 17; 5) $8\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{10}$. **901.** 1) $-7$; 2) $4x+y$; 3) $a$. **905.** 1) 2; 2) $\sqrt{c}-\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{x+\sqrt{3}}$. **907.** 1) $-6$; 2) $2\frac{8}{9}$; 3) 10; 4) $\frac{a}{\sqrt{ab}+b}$. **908.** 3) 3. **910.** 1) (0; 0); $(-2; 4)$; 2) (4; 2). **911.** 1) $-0,5$; 2; 2) 4. **913.** 1) $-3$; 5; 2) $-1$; 3,5; 3) $-4$; $-1$; 4) $\frac{2\pm2\sqrt{7}}{3}$. **914.** 1) $-6$; 3; 2) 1; 5. **915.** 1) $-4$; 9; 2) 1; 8; 3) $-2$; 1,5; 4) 3; 5. **919.** 1) 118; 2) 56. **920.** 4 — другий корінь; $p=4,5$. **921.** 1,5 та 1 — корені, $c=-3$. **922.** 1) $(x+4)(x+8)$; 2) $(2y+1)(y-5)$. **923.** 1) $a-2$; 2) $\frac{k-2}{3k+1}$. **924.** 1) $z$; 2) $\frac{b}{b-3}$. **926.** 1) 0; 2; 3; 2) $-3$; 0; 2. **927.** 1) $-3$; 3; 2) $-0,5$; 0,5; 3) $-8$; 0; 4) $-1$; 4; 5) $-2$; 1; 4; 6) 9; 25. **928.** 3. **929.** $-24$. **930.** 1) $-5$; 2) $-4,5$; 1; 3) 3; 4) $-4$; 1; 5) 6; 6) $-2$; 1; 7) $-7$; $-5$. **931.** $a=0$; $a=1$; $a=4$. **932.** 16 м; 6 м. **933.** 32 м$^2$. **934.** 24 см. **935.** 6; 7. **936.** 8 команд. **937.** $\frac{1}{5}$. **938.** 24 сторінки. **939.** 28 км/год. **940.** 80 км/год. **941.** 10 год; 15 год. **942.** 6 год; 4 год. **943.** 90 км/год.

**Завдання для самоперевірки № 8.** **1.** Г. **2.** Б. **3.** Г. **4.** В. **5.** Г. **6.** Б. **7.** 1–В; 2–Г; 3–Б. **8.** В. **9.** Б. **10.** Б. **11.** 1) $-\frac{12}{b+3}$; 2) 4. **12.** 1) 1,5; 4; 2) $-3$; 2. **13.** $-9$. **14.** 25 км/год. **16.** 1) $-3$; $\frac{2}{3}$; 2) $-1$; $-1\pm\sqrt{5}$. **17.** 8. **18.** 30 год.

**Задачі підвищеної складності.** **945.** $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$. *Вказівка.* Чисельник дробу можна розкласти на множники, записавши його у вигляді $(x^2+a^2)^2-(xa)^2$. **947.** $m=2$; $m=3$. **948.** $\frac{32}{1-x^{32}}$. **951.** 2,5. **953.** $a=-1$; $a=3$. **954.** 1) 1; 2) 2,2; 7. **958.** *Вказівка.* Врахуйте, що запис квадрата натурального числа не може закінчуватися цифрою 8. **959.** $\sqrt{a+1}+1$. **961.** $-2$; 2. **962.** 1) *Вказівка.* Ско-



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

ристайтеся рівністю $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\left(4-\sqrt{3}\right)^2$. **963.** $-1$. **964.** 1) Коренів немає; 2) 10; 3) 4; 4) $-2$; 14. **965.** $a<0$ або $a=4$. **966.** $x=4$; $y=4$. **967.** 2) $\frac{9}{16}$. **971.** $c=0$; $c=-4$. **972.** 80. **973.** $a=1$. **974.** $\sqrt{2\sqrt{q}-p}$. **976.** 1) $-3$, 1; 2) 0,5; 3) $-7$; 2. **977.** $-4$. **978.** 1. **979.** $a^2+a-2$. **980.** 1) 1; 2) 1; 3) $-4$; 2; $-1\pm\sqrt{2}$. **981.** 5; 6; 7; 8. **982.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **983.** 72 м. *Вказівка.* Нехай камінь падав на дно порожнини $t$ с. Тоді глибина порожнини дорівнює $5t^2$ м. Звук від падіння каменя дійшов до спелеолога за $(4-t)$ с. Якщо швидкість звуку помножимо на цей час, то одержимо глибину порожнини: $340(4-t)=5t^2$. **984.** 9 год; 18 год.

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# *Предметний покажчик*


Вираз
— дробовий ..... 6
— раціональний ..... 6
Властивості
— арифметичного квадратного кореня ..... 125
— рівнянь ..... 57
— степеня із цілим показником ..... 73
Гіпербола ..... 86
Ділення дробів ..... 45
Дискримінант ..... 158
Додавання і віднімання дробів
— з однаковими знаменниками ..... 23
— з різними знаменниками . 29
Допустимі значення змінних ..... 7
Дріб ..... 6
— раціональний ..... 7
Квадратний корінь ..... 107
— арифметичний ..... 108
Квадратний тричлен ..... 177
Множення дробів ..... 39
Множина ..... 114
— дійсних чисел ..... 117
— порожня ..... 115
Обернена пропорційність ..... 85
Основна властивість дробу ... 13
Парабола ..... 102
Підмножина ..... 115
Піднесення дробу до степеня ..... 40
Порядок числа ..... 79
Рівняння
— біквадратні ..... 183
— дробові раціональні ..... 55
— зведені квадратні ..... 152
— квадратні ..... 152
— неповні квадратні ..... 153
— раціональні ..... 55
— рівносильні ..... 56
— які зводяться до квадратних ..... 183
— $x^2 = a$ ..... 109
— $\sqrt{x} = a$ ..... 142
Розкладання квадратного тричлена на множники ... 178
Скорочення дробів ..... 14
Степінь із цілим показником ..... 67
Стандартний вигляд числа .. 79
Теорема
— Вієта ..... 166
— обернена до теореми Вієта ..... 168
Тотожність ..... 8
Тотожні перетворення виразів
— раціональних ..... 49
— які містять квадратні корені ..... 132
Тотожно рівні вирази ..... 8
Формула коренів квадратного рівняння ... 159
Функція
— $y = \frac{k}{x}$ ..... 85
— $y = x^2$ ..... 102
— $y = \sqrt{x}$ ..... 140
Числа
— дійсні ..... 117
— ірраціональні ..... 116
— раціональні ..... 115



© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## *URL-адреси QR-кодів інтерактивних завдань*

https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd01
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd02
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd03
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd04
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd05
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd06
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd07
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd08
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd09
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd10
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd11
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd12
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd13
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd14
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd15
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd16
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd17
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd18
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd19
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd20
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd21
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_zavd22

## *Інтерактивні завдання для самоперевірки*

https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp01
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp02
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp03
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp04
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp05
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp06
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp07
https://pp-books.com/Kravchuk_Algb_8kl_smp08

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

# ЗМІСТ

**Передмова** ..... 3

## § 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

1. Раціональні вирази. Раціональні дроби ..... 6
2. Основна властивість дробу ..... 13
3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменникам ..... 23
4. Додавання і віднімання дробів з різними знаменникам ..... 29
5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня ..... 39
6. Ділення дробів ..... 45
7. Тотожні перетворення раціональних виразів ..... 49
8. Раціональні рівняння ..... 55
9. Степінь із цілим показником ..... 67
10. Властивості степеня із цілим показником ..... 73
11. Стандартний вигляд числа ..... 78
12. Функція $y = \frac{k}{x}$ ..... 85

## § 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

13. Функція $y = x^2$ ..... 102
14. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь ..... 107
15. Числові множини. Ірраціональні та дійсні числа ..... 114
16. Властивості арифметичного квадратного кореня ..... 125
17. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені ..... 132
18. Функція $y = \sqrt{x}$ ..... 140

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

## § 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

19. Квадратні рівняння.
Неповні квадратні рівняння ..... 152
20. Формула коренів квадратного рівняння ..... 158
21. Теорема Вієта ..... 165
22. Квадратний тричлен ..... 177
23. Рівняння, які зводяться до квадратних ..... 183
24. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних.... 190

**Завдання для повторення за курс алгебри 8 класу .....203**

**Задачі підвищеної складності .....213**

**Відомості з курсу алгебри 7 класу .....217**

**Відповіді та вказівки.....224**

**Предметний покажчик.....236**

**URL-адреси QR-кодів інтерактивних завдань.....237**

© Кравчук В. Р. та ін.
© Видавництво «Підручники і посібники»

Навчальне видання

**Кравчук** Василь Ростиславович
**Підручна** Марія Василівна
**Янченко** Галина Михайлівна

# Алгебра

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

*Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»*

Редагування і верстання: *Оксана Гудь, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування: *Маргарита Більчук*
Художнє оформлення: *Олена Сажко*
Дизайн обкладинки: *Олена Сажко*

Видавець, виготовлювач і розповсюджувач видавничої продукції
Редакція газети «Підручники і посібники»
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-31
Збут: pip.ternopil@ukr.net  Редакція: editoria@i.ua
Інтернет-магазин: www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5143 від 05.07.2016 р.

## ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

| Десятки | Одиниці | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

## ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 2 ДО 9

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| $3^n$ | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | | |
| $4^n$ | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | | | | |
| $5^n$ | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | | | | | |
| $6^n$ | 6 | 36 | 216 | 1296 | | | | | | |
| $7^n$ | 7 | 49 | 343 | 2401 | | | | | | |
| $8^n$ | 8 | 64 | 512 | 4096 | | | | | | |
| $9^n$ | 9 | 81 | 729 | 6561 | | | | | | |

## ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$(a \neq 0;\ b \neq 0;\ m$ і $n$ — цілі числа$)$

## ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0;\ b \geq 0) \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0;\ b > 0)$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n \quad (a \geq 0;\ n \in N) \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

## ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \qquad D = b^2 - 4ac$$

## ТЕОРЕМА ВІЄТА

**Якщо $x_1$, $x_2$ — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то**

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

## РОЗКЛАД КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

**Якщо $x_1$, $x_2$ — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$