



Нова українська школа

8

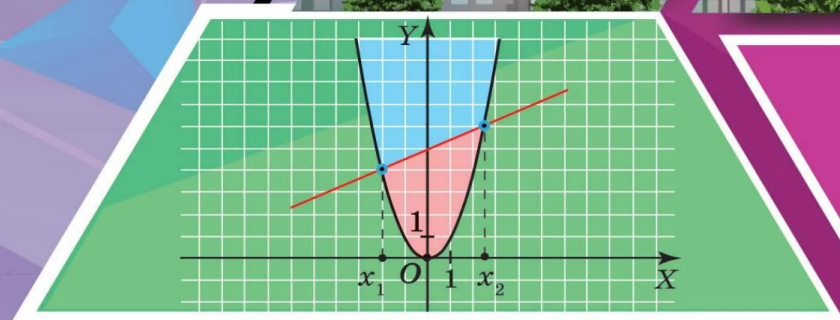
$$\frac{x^3 - 9xy^2}{9y^2 + x^2} \cdot \left(\frac{x+3y}{x^2-3xy} + \frac{x-3y}{3xy+x^2} \right)$$

$$\frac{14a^5b^4c^3}{21abc^2}$$

$$\left(\frac{C/A}{D/B} \right) \cdot \frac{K}{N} = \frac{C}{N} \cdot \frac{A}{D} \cdot \frac{K}{B}$$

$$\left(-\frac{a^5}{6b^4} \right)^3$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$



АЛГЕБРА

НАВЧАЄМОСЯ РАЗОМ З ПІДРУЧНИКОМ

Розглядаємо

**Дивимосся
презентацію**

Вчимо правило

Розділ 2

§ 8. ЩО ТАКЕ

1. Як компанія

Всі

Ситуація

знався,

**Дивимосся
презентацію**

Вчимо правило

Розглядаємо типову задачу

Перевіряємо теорію

Вчимо терміни іншими мовами

Задача 2

Дізнайтеся

**Одержуємо
додаткові відомості**

Застосовуємо на практиці

Розв'язуємо задачі

Тренуємо усний рахунок

**Відповідаємо
на запитання**

Вчимося діяти

Перевіряємо

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Київ
Оріон
2025

УДК 512*кл8(075.3)
А45

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авторський колектив програми:

М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва)

Авторський колектив підручника:

Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, О. А. Данько,
О. М. Коломієць, І. М. Богатирьова, З. О. Сердюк

Е-додаток

<https://faino.school/>

Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Данько О. А.,
Коломієць О. М., Богатирьова І. М., Сердюк З. О.

А45 Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів загальної середньої
освіти / Київ: УОВЦ «Оріон», 2025. 352 с. : іл.

ISBN 978-966-991-413-2

УДК 512*кл8(075.3)

© Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А.,
Данько О. А., Коломієць О. М.,
Богатирьова І. М.,
Сердюк З. О., 2025
© УОВЦ «Оріон», 2025

ISBN 978-966-991-413-2

ДОРОГІ УЧНІ Й УЧЕНИЦІ!

Алгебра — один із розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики та як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються в багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У 7 класі ви навчилися перетворювати числові вирази та вирази зі змінними; доводити тотожності; виконувати дії з одночленами та многочленами; дізналися, що таке функція; навчилися будувати графіки функцій і досліджувати їхні властивості; розв'язувати деякі рівняння та їх системи. Тепер ви продовжите удосконалювати свої вміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити висновки. Для цього потрібно наполегливо й відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома. А підручник вам у цьому допоможе.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Весь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на найважливіші формулювання, які потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, і повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом (*). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх треба навчитися розв'язувати всім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня

складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Номери завдань для домашньої роботи виділено рожевим кольором.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити й розширити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (пiktограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

 — Увага! Не припустися помилки

 — Важливо знати

 — Як записати

 **Словничок** — Словничок

 — Запитуємо

 — Відповідаємо

 — Інтерактивні вправи

 — Вправи з Е-додатка

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового
і задоволення від навчання!

Розділ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВІВЧЕНОГО В 7 КЛАСІ

ВИРАЗИ. ТОТОЖНОСТІ. ОДНОЧЛЕНИ І МНОГОЧЛЕНИ

Вирази і тотожності



qr.orioncentr.com.ua/K9r2S

Одночлени



qr.orioncentr.com.ua/roZIV

Многочлени



qr.orioncentr.com.ua/uiLZz

1. Обчисліть найбільш раціональним способом:

1) $2,71 \cdot 9,2 + 9,2 \cdot 3,29$; 4) $2\frac{5}{7} - 11\frac{2}{5} + 19\frac{2}{7} - 2\frac{3}{5}$;

2) $15,68 \cdot 3,1 - 13,58 \cdot 3,1$; 5) $\left(6\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 24$;

3) $28 \cdot 5,7 \cdot \frac{3}{14}$; 6) $17\frac{5}{13} \cdot 7\frac{1}{3} + 2\frac{8}{13} \cdot 7\frac{1}{3}$.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $-3^2 + 4^3 - 5^4 + 10^2$; 3) $0,4^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + 1,2^4 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^4$;

2) $-2^9 - (-2)^8 + 2^7$; 4) $(-20^4 : ((-4)^2)^2) : 5^2$.

3. Розташуйте числа в порядку збільшення і розшифруйте прізвище автора віршованих рядків: «Я єсть народ, якого Правди сила ніким звойована ще не була. Яка біда мене, яка чума косила! — а сила знову розцвіла». $(-0,7)^3 - A$; $(-6)^{30} - A$; $-7^7 - П$; $(-0,3)^8 - O$; $1,6^4 - И$; $(-1,6)^2 - Ч$; $0,3^6 - Т$; $0^{2024} - Л$; $1^{2023} - И$; $(-0,7)^5 - В$; $5^4 - Н$.

4. Зведіть одночлен до стандартного вигляду:

1) $0,2 \cdot x^{15} \cdot 5 \cdot y^2 \cdot z \cdot 0,8 \cdot y$;
2) $100x^3 \cdot y^3 \cdot x \cdot y^{10} \cdot (-0,12)x^7 \cdot y^7 \cdot 5x \cdot 0,2y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$.

Укажіть степінь даного одночлена.

5. Подайте вираз як многочлен стандартного вигляду:
 1) $6x - (x + 4)(4 - x)$; 3) $0,5(-y - 2)(y + 2)$;
 2) $(x + 5)^2 + 21x$; 4) $(-a - 5)(5 - a) \cdot 0,2a$.
 Укажіть степінь одержаного многочлена.

6. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $3a^2 - 3b^2$; 9) $a^2 - b^2 + a + b$;
 2) $9x^3 - x$; 10) $z^2 - 4z + 4 - 16z^2$;
 3) $y^6 - y^2$; 11) $c^3 + 125$;
 4) $8z^3 - 2z$; 12) $27a^3 - 8$.
 5) $n^2 + 10n + 25$;
 6) $4m^2 - 28m + 49$;
 7) $0,25 + 0,81x^2 - 0,9x$;
 8) $-60xy + 45y + 20x^2y$;



qr.orioncentr.com.ua/IV2B1

7. Доведіть тотожність:

- 1) $10a - (3a - 9b) = 7a + 9b$;
 2) $(0,5c + d) - 2(0,5d - 0,3c) = 1,1c$;
 3) $9m + 1 = 4(m + n) - 5(n - m) + (n + 1)$;
 4) $10a - 2(3a - 2b) = (2a + b) - (-2a - 3b)$.

8. У школі три восьмі класи. Відомо, що у 8-А класі навчається на 10 % учнів більше, ніж у 8-Б, а число учнів у 8-Б класі відноситься до числа учнів у 8-В класі як 3,5 до 4. Складіть вираз для обчислення загальної кількості восьмикласників, якщо: 1) у 8-А класі навчається x учнів; 2) у 8-Б класі навчається a учнів; 3) у 8-В класі навчається b учнів.

9. Одна сторона прямокутника дорівнює a см, а інша — на 3 см менша. Знайдіть сторону і площу квадрата, периметр якого дорівнює периметру даного прямокутника.

10. Одна сторона прямокутника дорівнює a см, а інша — на 3 см менша. Складіть вирази для знаходження периметра і площі прямокутника. Знайдіть значення цих виразів, якщо: 1) $a = 15$ см; 2) $a = 30,1$ см.

11. Сума двох двоцифрових чисел, у яких однакове число десятків, дорівнює 112. Знайдіть ці числа, якщо число одиниць першого на 4 більше за число одиниць другого.

12. Двоцифрове число на 18 більше за суму його цифр. Знайдіть це число, якщо число одиниць на 2 менше від числа його десятків.

ФУНКЦІЇ

qr.orioncentr.com.ua/fupOM

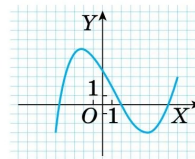
13. Турист проїхав від бази відпочинку 15 км на автобусі, а потім продовжив рух пішки в тому самому напрямку зі швидкістю 5 км/год. На якій відстані (y) від бази відпочинку буде турист через x годин руху пішки?



14. Марійка пішла на курси вивчення англійської мови. Вона знала 10 базових слів. Щоденно вона додавала до свого лексикону 20 нових англійських слів. Скільки слів (y) буде знати Марійка через x уроків англійської мови?



15. На малюнку 1 зображено графік деякої функції. Скориставшись графіком, знайдіть:
 1) значення y , якщо $x = -4$; -1 ; 1 ; 6 ; 7 ;
 2) значення x , за якого $y = -3$;
 3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
 4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне.
 Чи належать графіку цієї функції точки з координатами: $(0; 2)$; $(2; 0)$; $(-3; 5,5)$; $(-5; -3)$?



Мал. 1

16. З'ясуйте, чи належить графіку функції $y = x^2 - 6x + 9$ точка:

- 1) $A(3; 0)$; 2) $B(-3; 18)$; 3) $C(4; 1)$; 4) $D(1,5; 2,25)$.

17. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = -3$; 2) $y = x + 3$; 3) $y = -2x + 4$; 4) $y = 0,5x$.

18. Побудуйте графік функції:



- 1) $y = 2$; 2) $y = \frac{1}{3}x$; 3) $y = -4x + 3$; 4) $y = 5x - 10$.

19. Замініть * таким числом, щоб утворилось правильне твердження:
- 1) пряма $y = -\frac{1}{3}x + 4$ проходить через точку (*; 2);
- 2) пряма $y = 4x - 3$ відтинає на осі ординат відрізок завдовжки * од.;
- 3) пряма $y = 0,5x - 4$ відтинає на осі абсцис відрізок завдовжки * од.;
- 4) пряма $y = 2x + 3$ паралельна прямій $y = *x + 1$.

qr.orioncentr.com.ua/a1Zzb



20. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = \frac{1}{2}x - 4$ з осями координат і побудуйте графік цієї функції. Якої довжини відрізки відтинає на осях координат ця пряма? Якого виду трикутник обмежує ця пряма разом з осями координат?

21. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = -0,5x + 3$ з осями координат і побудуйте графік цієї функції. Якої довжини відрізки відтинає на осях координат ця пряма? Якого виду трикутник обмежує ця пряма разом з осями координат?

22. Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(a; b)$. Знайдіть значення k , якщо:
- 1) $a = -1, b = -2$; 2) $a = -0,2, b = 1$; 3) $a = 3, b = 0,6$.

23. Графік функції $y = ax - 1$ проходить через точку $B(-1; -\frac{2}{5})$. Знайдіть значення a .

24. Графік функції $y = ax + b$ проходить через точки $A(-1; -7)$ і $B(0; -2)$. Знайдіть значення a і b .

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

qr.orioncentr.com.ua/Ux6bE



25. Знайдіть корінь рівняння:
- 1) $7 - 3x - 3 = 10 - 4x$;
 2) $5 + 12y - 7y = 5(y + 1)$;
 3) $-1,2x + 5 = 3(-0,4x + 1)$; 4) $1,5y - 4 = 5 + 0,9y$.

26. Чи є рівносильними рівняння:

- 1) $9x - 1 = 8x + 7$ і $9x - 8x = 1 + 7$;
 2) $5 - 5a = -5a + 5$ і $0a = 0$;
 3) $2(x + 1) = 3(2 - x)$ і $2x + 3x = 4$?

27. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ -x + 0,5y = -2,5; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x - 3y = -7, \\ x + 3y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x + 2y + 4 = 0, \\ 2x - 4y + 3 = 1. \end{cases}$

28. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь із двома змінними:

- 1) $\begin{cases} 5x - y = 9, \\ x + 3y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2 - 5x - y = -6, \\ 4(x + 3y) = x - 18; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 3x + 5y = -7, \\ 7x - 6y = 19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 26 = 2(3y + 1), \\ 2(x - 3) + 5y = 4(1 - y). \end{cases}$

29. Менеджери магазину встановили, що на кожний куплений півкілограмовий пакет родзинок припадає 4 куплені пакети по 250 г. Скільки потрібно взяти пакетів по 250 г і по 500 г для розфасовки 15 кг родзинок?

30. Три фірми виготовили 125 деталей. Кількість деталей, виготовлених першою і другою фірмами, відноситься як 6 : 5, а третя виготовила на 19 деталей менше від другої. Скільки деталей виготовила кожна фірма?

31. Мама наварила 10 л малинового варення. У неї є банки по 0,5 л і 0,75 л. Скільки банок їй потрібно взяти, щоб розфасувати все варення, за умови, що банки заповнені вщерть? Скільки є способів, щоб розкласти в банки все варення?

qr.orioncentr.com.ua/h4tyQ



32. На перший склад завезли товару на 50 тис. грн більше, ніж на другий. 80 % вартості товару на першому складі на 130 тис. грн більше за 60 % вартості товару на другому складі. Яка загальна вартість товару, завезеного на два склади разом?

33. Середній вік двох спортсменів-боксерів — 22,5 року. 30 % різниці їхнього віку становлять 1,5 року. Скільки років кожному спортсменові?

34. Моторний човен риболовецької бригади 2 год плив за течією річки, а потім повернув назад і плив ще 1 год проти течії, загалом подолавши 50 км. Наступного дня маршрут змінився. Спочатку бригада годину рухалась проти течії річки, а потім пів години за течією, і загалом вони подолали 20 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.

35. За 3 год за течією річки і 1 год проти течії моторний човен «Львів» проходить 82 км, а за 1 год за течією і 2 год проти течії — 54 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.

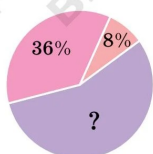
36. Басейн має форму прямокутника. Одна з його сторін на 5 м менша за іншу. Уздовж бортів басейну прокладено доріжку із 94 плиток розмірами 1х1 м. Якими є розміри басейну?

ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

qr.orioncentr.com.ua/60pmq

37. Виконуючи домашнє завдання з алгебри, 8 % учнівства 8 класу не змогли розв'язати задачу, 36 % отримали неправильну відповідь, а решта 14 дітей розв'язали задачу правильно.

1. Скільки дітей навчається у 8 класі?
2. Скільки дітей отримали неправильну відповідь?
3. Яке відсоткове відношення кількості дітей, які не змогли розв'язати задачу, до кількості дітей, які правильно розв'язали її?



38. За перший день турист пройшов 36 % усього маршруту, за другий — 37 %, а за третій — решту 13,5 км.

1. Скільки кілометрів становить довжина маршруту?
2. Скільки кілометрів пройшов турист за другий день?
3. На скільки відсотків менше пройшов турист за третій день, ніж за другий?

39. Скільки літрів чистої води потрібно додати до 0,5 л водного розчину спирту, щоб вміст спирту в розчині зменшився із 40 % до 25 %?

40. Скільки грамів води потрібно додати до 50 г 35% -го розчину соляної кислоти, щоб одержати 10% -й розчин?

41. Для вистави драматичного гуртка потрібно придбати костюми. Щоб правильно визначити довжину костюмів, Людмила Миколаївна — керівниця гуртка — записала зріст акторів: 160 см, 161 см, 163 см, 166 см, 156 см, 164 см, 160 см, 164 см, 164 см, 166 см. Складіть частотну таблицю для цієї вибірки. З'ясуйте, який середній зріст акторів драматичного гуртка.

42. Провели опитування учнів і учениць 8-го класу щодо кількості прочитаних книжок на літніх канікулах. Одержали такі дані: 1; 2; 0; 1; 3; 5; 4; 0; 5; 3; 1; 2; 2; 6; 3; 1; 5; 4; 2; 0.

Упорядкуйте даний набір чисел і знайдіть середнє значення вибірки.

43. Заступник директора складає розклад уроків на понеділок для 8-А класу. Скільки різних варіантів розкладу можна скласти, якщо в понеділок перші два уроки — алгебра, а інші три уроки — українська мова, фізкультура і географія?

44. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 4, 5 і 9, якщо:

- 1) усі цифри числа — різні;
- 2) цифри в числі можуть повторюватися?

45. Олексій, Микита та Олеся купили квитки в кінотеатр на п'яте, шосте і сьоме місця десятого ряду.

qr.orioncentr.com.ua/Jr5uj

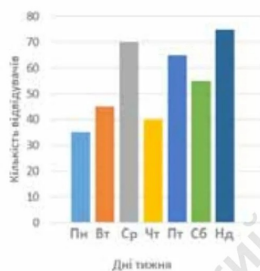
1. Скількома способами вони можуть зайняти свої місця?
2. Яка ймовірність того, що Олексій буде сидіти на п'ятому місці десятого ряду?
3. Яка ймовірність того, що Олеся буде сидіти на шостому місці першого ряду?

46. Для сніданку мама купила Олі й Дмитрові йогурт із трьома різними наповнювачами: вишневим, полуничним та абрикосовим.



1. Скільки існує способів скуштувати один йогурт на сніданок, якщо Оля й Дмитро візьмуть йогурти з різними наповнювачами?
2. Яка ймовірність того, що Олі дістанеться йогурт із полуницею?

47. На стовпчастій діаграмі (мал. 2) показано кількість відвідувачів кав'ярні протягом тижня. У який день тижня кількість відвідувачів була найближчою до середнього значення за ці сім днів?



Мал. 2

48. Канали соцмереж — це вже не просто спосіб спілкування. На платформах користувачі ведуть сторінки, щоб проявити власну позицію. Вони активно коментують публікації, висловлюють думку щодо всього, що відбувається у світі. За даними досліджень 2022 року комунікаційного агентства Plusone, сервісу YouTube віддають перевагу 23 млн українських користувачів, Facebook — 15,6 млн, Instagram — 13,2 млн, TikTok — 12 млн.
1. Побудуйте за цими даними стовпчасту діаграму.
 2. На скільки відсотків більше користувачів Instagram, ніж користувачів TikTok?

49. Проведіть у своєму класі опитування на тему:
- 1) «Чи любите ви йогурт?»;
 - 2) «Чи готують йогурт удома у вашій родині?».
- Проаналізуйте відповіді та за отриманими даними побудуйте кругову і стовпчасту діаграми.

Розділ 2. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

У розділі дізнаєтесь:

- про раціональні вирази та їх види;
- що таке раціональний дріб та яка його основна властивість;
- як виконувати дії з раціональними дробами;
- про способи розв'язування раціональних рівнянь;
- що таке степінь із цілим показником та які його властивості;
- як виконувати дії першого, другого і третього ступенів зі степенями із цілим показником;
- про функцію $y = \frac{k}{x}$ та її властивості;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ВИДИ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1. Що таке раціональний вираз та які його види

Ситуація. Сергій розповідав Марині, як він їздив на екскурсію до Шевченківського національного заповідника, що в Каневі. Швидкість руху його автобуса із Черкас до Канева була на 20 км/год меншою від швидкості руху з Канева до Черкас. Марина поцікавилася, як скласти вираз, щоб знайти середню швидкість їхнього руху.



qr.orioncentr.com.ua/oSJ0I



Як знайти середню швидкість руху автобуса?

Треба весь пройдений шлях поділити на весь витрачений час.



Сергій вказав, що відстань між містами становить 78 км. Потім він міркував так. Нехай x км/год — швидкість руху автобуса із Черкас до Канева, тоді:

$(x + 20)$ км/год — швидкість руху автобуса з Канева до Черкас;

$$\frac{78}{x} \text{ год} — \text{час, затрачений на дорогу з Черкас до Канева};$$

$$\frac{78}{x+20} \text{ год} — \text{час, затрачений на дорогу з Канева до Черкас};$$

$$\frac{156}{\frac{78}{x} + \frac{78}{x+20}} \text{ км/год} — \text{середня швидкість руху автобуса}.$$



Яка особливість виразів, що складав Сергій?

Вони містять дію ділення на вираз зі змінною.



Такі раціональні вирази є *дробовими* (табл. 1).

Таблиця 1

Вид раціонального виразу	Приклад
Цілий раціональний вираз	$(2 - 5x^2) : 4; \frac{1 - 13t}{15 - 10}; 3a^2 - 4b^3 + \frac{2c}{5}$
Дробовий раціональний вираз	$(9 - x^3) : 4x; \frac{1 - 13t}{15 - 10t}; 3a^2 - 4b^3 + \frac{2c}{5a}$



Раціональний вираз є цілим дробовим, якщо він не містить містить ділення на вираз зі змінною.

2. Область допустимих значень змінної



Чи завжди можна обчислити значення раціонального виразу?

Ні.



Наприклад, для виразу $(2 + a) : (b - 4)$ маємо: якщо $a = -1$ і $b = 4$, то $(2 + a) : (b - 4) = (2 - 1) : (4 - 4) = 1 : 0$.



Значення виразу знайти неможливо, якщо **ділитель дорівнює 0**.

Для виразу $(2 + a) : (b - 4)$ число 4 є *недопустимим* значенням змінної b . Усі інші значення змінних a і b є *допустимими* для цього виразу.

Запам'ятайте!

Усі значення змінної, допустимі для даного виразу, утворюють *область допустимих значень (ОДЗ) змінної* цього виразу.



Коротко записують так: ОДЗ змінної: $b \neq 4$.



Щоб знайти ОДЗ змінної раціонального виразу, треба:
1) прирівняти до нуля всі дільники, що входять у вираз;
2) знайти розв'язки одержаних рівнянь;
3) вказати значення змінних, що є допустимими для даного виразу.

Наприклад, щоб знайти ОДЗ змінної виразу $\frac{2}{5-x} + \frac{y-1}{(2-4x)(2y+5)}$, визначимо, за яких значень змінної знаменники дробів дорівнюють нулю. Розв'яжемо рівняння: $5 - x = 0$, $(2 - 4x)(2y + 5) = 0$. Отримані значення $x = 5$, $x = 0,5$, $y = -2,5$ — недопустимі для даного виразу.

Тому ОДЗ змінної виразу: $x \neq 5$, $x \neq 0,5$, $y \neq -2,5$.



1. Якщо раціональний вираз містить більш як одну змінну, то ОДЗ вказують для кожної змінної.
2. У цілому виразі ОДЗ кожної змінної містить усі числа.

3. Знаходження значень дробового виразу

Знаходження значень дробових виразів має свої особливості. Це пов'язано з необхідністю враховувати ОДЗ усіх змінних у цьому виразі.

Задача

Знайдіть значення виразу $\frac{x+y}{x-1}$ для всіх цілих значень змінних від $-0,5$ до $1,5$.

Розв'язання

1. Визначаємо ОДЗ кожної зі змінних:
 $x - 1 \neq 0$, тому $x \neq 1$;
 y — будь-яке число.
2. Надаємо змінним x і y цілих значень від $-0,5$ до $1,5$, допустимих для цих змінних:
 x набуває лише значення 0 ,
 y набуває значень 0 і 1 .

3. Виконуємо обчислення:

$$\text{якщо } x = 0 \text{ і } y = 0, \text{ то } \frac{0+0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$\text{якщо } x = 0 \text{ і } y = 1, \text{ то } \frac{0+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Відповідь: 0 , якщо $x = 0$ і $y = 0$; -1 , якщо $x = 0$ і $y = 1$.

 Щоб обчислити значення раціонального виразу для деяких значень змінних, потрібно:

- 1) визначити ОДЗ кожної змінної виразу;
- 2) підставити у вираз набори з допустимих значень змінних, перебравши всі можливі варіанти їх комбінування;
- 3) обчислити значення кожного з одержаних числових виразів.

4. Тотожно рівні вирази

qr.orioncentr.com.ua/31pqN



Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що в результаті тотожних перетворень цілих виразів (зведення подібних доданків, застосування формул скороченого множення тощо) отримуємо *тотожно рівні* вирази. Це такі вирази, що набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їхніх змінних.

Наприклад, вирази $3a - a$ і $2a$, $6a : 2$ і $3a$ є тотожно рівними.



Чи можна виконувати тотожні перетворення з дробовими виразами?

Так. Але є певні обмеження.



Обмеження виникають тому, що дробові вирази можуть втрачати зміст за деяких значень змінних. Наприклад, дробовий вираз $8a^2 : 4a$ втрачає зміст, якщо $a = 0$. Тому виконувати будь-які перетворення цього виразу можна лише за умови: $a \neq 0$.

Наприклад, вирази $8a^2 : 4a$ і $2a$ є тотожно рівними, якщо $a \neq 0$.



Дробові раціональні вирази можна тотожно перетворювати лише на ОДЗ їхніх змінних.

Надалі вважатимемо, що всі тотожні перетворення дробових раціональних виразів виконуються на ОДЗ їхніх змінних.

Дізнайтеся більше

Україна — держава, розташована у Східній Європі, має площу $603\,628 \text{ км}^2$ і займає сорок шосте місце у списку країн світу за площею. Найбільшою за площею в Україні є Одеська область, її площа дорівнює $33\,310 \text{ км}^2$, що становить приблизно $\frac{37}{671}$ загальної площі України; найменшою — Чернівецька область із площею лише 8097 км^2 , що становить близько $\frac{9}{671}$ загальної площі України. Дізнайтеся з різних джерел площу своєї області та порахуйте, яку частину площі всієї України вона становить.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/cIKDI

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
раціональ- ний вираз	rational function	rationale Funktion (f)	expression rationnelle

Пригадайте головне

- Який вираз називається раціональним? Наведіть приклади.
- Який раціональний вираз є цілим; дробовим?
- Які значення змінних є недопустимими для дробового виразу?
- Що таке область допустимих значень змінної виразу?
- Поясніть, як обчислити значення раціонального виразу для заданих значень змінних.
- Які вирази називають тотожно рівними?
- Що називають тотожним перетворенням виразу?
- Що потрібно враховувати, виконуючи тотожні перетворення дробових виразів?

Усне тренування

$$1) \left(0,8 \cdot \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{5} \right) + 5 \frac{7}{12} \right) \cdot 1 \frac{1}{11}; \quad 2) \left(-0,25 \cdot \left(-\frac{4}{9} \right) + 1 \frac{8}{9} \right) : 2,5.$$

Розв'яжіть задачі

- 50'. Чи правильно, що цілим є вираз:
- $\frac{2}{7}abc^2$;
 - $\frac{3}{8} + 2k^3n$;
 - $\frac{2a}{3b}$;
 - $\frac{5-c}{5+c}$?
- 51'. Чи правильно, що дробовим є вираз:
- $\frac{1}{9}a + b^3c^2$;
 - $\frac{3}{8}cd + \frac{4}{7}$;
 - $\frac{2+a^2}{3-b}$;
 - $\frac{2-c^2}{3+c^2}$?
- 52'. Чи правильно, що раціональним є вираз:
- $\frac{1}{9}ab^4c^4$;
 - $ad - \frac{5}{7}$;
 - $\frac{1+a^2}{1-a^3}$;
 - $\frac{2bc^2}{3ad^2}$?
- 53'. Чи правильно, що вираз $\frac{4}{x-6}$ втрачає зміст, якщо:
- $x = 4$;
 - $x = 0$;
 - $x = -6$;
 - $x = 6$?

- 54'. Чи правильно, що вираз $3: (5+y)$ втрачає зміст, якщо:
- $y = 3$;
 - $y = 5$;
 - $y = -5$;
 - $y = 0$?

- 55'. Дано вираз $\frac{4+x}{4-x^2}$. Чи є допустимим для даного виразу вказане значення змінної x : 1) 4; 2) -2; 3) 0; 4) -4; 5) 2; 6) 1? Назвіть ОДЗ змінної даного виразу.

- 56'. Дано вираз $\frac{4+b}{(1-b)(2+b)}$. Чи правильно вказано ОДЗ змінної b даного виразу:
- $b \neq 1$;
 - $b \neq 2, b \neq 1$;
 - $b \neq -2, b \neq 1$;
 - $b \neq -2$?

- 57'. Чи правильно, що лише для $x \neq 3$ має зміст вираз:

- $\frac{15+x}{3x}$;
- $\frac{3}{x+3}$;
- $\frac{-2x}{3-x}$;
- $\frac{x+1}{2x-6}$;
- $(x-3):(x+3)$;
- $(x^2-3)(x-3)$?

- 58'. Визначте ОДЗ змінної виразу:

- $\frac{2x+1}{x-2}$;
- $\frac{3c-1}{3-c}$;
- $\frac{5b+2}{5b-5}$;
- $\frac{5-y}{5+y}$;
- $(b^2-1):(b^2+1)$;
- $(c+4)(4-c)$.

qr.orioncentr.com.ua/8vj5i


- 59'. Визначте ОДЗ змінної виразу:

- $\frac{2x-3}{x+1}$;
- $\frac{3a+2}{2-a}$;
- $\frac{c+3}{c+1}$;
- $\frac{7-y}{7+y}$;
- $(a-7):(1+a^2)$.

- 60'. Дано вирази:

- $\frac{a-1}{a-*}$;
- $\frac{2a+1}{*-a}$;
- $\frac{a+2}{2a-*}$;
- $\frac{3a}{*+2a}$;
- $(a^2-2):(3a-*)$;
- $(a+5):(5a-*)$.

Запишіть замість * число, якщо ОДЗ змінної a : $a \neq 2$.

- 61'. Дано вирази:

- $\frac{b+1}{b-*}$;
- $\frac{3b+2}{*-b}$;
- $\frac{6b}{3b-*}$;
- $\frac{1+2b}{*-2b}$;
- $b:(5b-*)$.

Запишіть замість * число, якщо ОДЗ змінної b : $b \neq 3$.

62°. Чи правильно, що значення виразу $\frac{c-1}{3c}$ дорівнює 0, якщо: 1) $c = 2$; 2) $c = 1$; 3) $c = 0,5$; 4) $c = 0$?

63°. Чи правильно, що значення виразу $\frac{5-3a}{2a}$ дорівнює 1, якщо: 1) $a = 2$; 2) $a = -1$; 3) $a = 0$; 4) $a = 1$?

64°. Знайдіть значення виразів за таблицею 2.

Таблиця 2

a	1	2	3	5
b	2	0,5	$-\frac{1}{2}$	10
$(a-b):(a+b)$				
$\frac{a+2b}{b-a}$				
$\frac{a-2b}{4+a}$				

65°. Знайдіть значення виразів за таблицею 3.

Таблиця 3

c	-1	9	-3	-3
d	1	2	$2\frac{2}{3}$	0,2
$(c+d):(c-d)$				
$\frac{c-3d}{1+d}$				

66°. Чи є тотожно рівними вирази для будь-яких значень змінної a :

- 1) $\frac{a^3}{a}$ і a ; 2) $\frac{a^2-9}{a-3}$ і $a+3$;
- 3) $\frac{a-3}{a}$ і $\frac{a}{a-3}$;
- 4) $\frac{(a-3)^2}{a}$ і $\frac{(a-3)(a-3)}{a}$?



qr.orioncentr.com.ua/2ly3j

67°. Чи є тотожно рівними вирази для будь-яких значень змінної x :



- 1) $\frac{x^2}{x}$ і x ; 3) $\frac{x^3}{x^3}$ і 1;
- 2) $\frac{x+5}{x^2-25}$ і $\frac{1}{x-5}$; 4) $\frac{x^3-8}{x}$ і $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x}$?

68. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:

- 1) $\frac{2a+c}{2ac}$; 6) $\frac{3ac}{(a+1)^2 c^3}$;
- 2) $\frac{3b-a}{4ab^2}$; 7) $\frac{5bc}{2(b-5)^2(1-c)}$;
- 3) $(3x+y):4xy^3$; 8) $\frac{7ac}{3(2-a)^2(c+2)}$;
- 4) $\frac{2ac}{2(a-1)(c+1)}$; 9) $\frac{5c}{6(4b-1)(1-4c)}$;
- 5) $2x^2y:(3-x)(y-4)$; 10) $2cd:(3d-4)(5-3c)$.

69. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:

- 1) $\frac{2a+1}{4-a^2}$; 4) $\frac{2a}{a^2-2a+1}$;
- 2) $\frac{3b-2}{9-b^2}$; 5) $\frac{3b}{4(b^2-6b+9)}$;
- 3) $3xy:(x^2-16)$; 6) $(5-x^2):(25+10x^2+x^4)$.

70. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:

- 1) $\frac{2b-3c}{7bc}$; 3) $\frac{6xy}{(3x-8)(2x+6)}$;
- 2) $3ab:(2-a)b^2$; 4) $3y:(y^2-8y+16)$.

71. Знайдіть значення виразу $\frac{2m}{|m|+1}$, якщо:

- 1) $m = 0$; 2) $m = \frac{1}{3}$; 3) $m = -0,2$; 4) $m = 1,5$.

72. Знайдіть значення виразу $3x:(4-|x|)$, якщо:

- 1) $x = 0$; 2) $x = 4$; 3) $x = -0,5$; 4) $x = -\frac{2}{3}$; 5) $x = 1,5$.

73. Знайдіть значення виразу $\frac{5x}{4-\frac{4}{x}}$, якщо:

- 1) $x = 1$; 2) $x = 2$; 3) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = -1$.

74. Знайдіть значення виразу $\frac{5y}{2-|y|}$, якщо:



- 1) $y = 0$; 2) $y = 2$; 3) $y = -1,5$; 4) $y = -\frac{4}{5}$.

75. Автомобіль рухається зі швидкістю x км/год і проїжджає відстань $(2x + 40)$ км. Складіть вираз для знаходження часу руху автомобіля (у годинах). Знайдіть його значення, якщо: 1) $x = 50$ км/год; 2) $x = 60$ км/год; 3) $x = 80$ км/год; 4) $x = 100$ км/год.

76. Одна сторона прямокутника дорівнює $4b$ см, а число, що виражає його площу, на 1 більше за число, яке виражає довжину подвоєної цієї сторони. Складіть вираз для знаходження іншої сторони прямокутника (у сантиметрах). Знайдіть його значення, якщо: 1) $b = 1$ см; 2) $b = 3$ см; 3) $b = 2$ дм; 4) $b = 5$ см 5 мм.

77. Експрес-контроль на уроці зайняв 5 хв, а самоперевірка — на x хв більше. Яку частину уроку тривалістю y хв зайняли експрес-контроль та самоперевірка? Складіть вираз і знайдіть його значення, якщо: 1) $x = 3$ хв, $y = 35$ хв; 2) $x = 7$ хв, $y = 40$ хв.

78. Відомо, що за деяких значень x і y значення виразу $x - y$ дорівнює 2,5. Якого значення за тих самих значень x і y набуває вираз:

- 1) $\frac{4}{x-y}$; 2) $5-12:(4y-4x)$; 3) $\frac{3}{5y-5x} + \frac{2}{3}$?

79. Відомо, що за деяких значень c і d значення виразу $c + d$ дорівнює 1,2. Якого значення за тих самих значень c і d набуває вираз:



- 1) $\frac{6}{c+d}$; 2) $12:(-3c-3d)$; 3) $\frac{1}{2d+2c} - \frac{5}{6}$?

80. Який вираз треба записати замість $*$, щоб одержані вирази були тотожно рівними на ОДЗ змінної x :

- 1) $\frac{2x}{x+3}$ і $\frac{2x^2+6x}{*}$; 2) $\frac{x}{x-5}$ і $\frac{x^2-5x}{*}$?

81*. Визначте, за яких значень змінної n має зміст вираз:

- 1) $\frac{5n}{|n|+10}$; 4) $\frac{4+|n|}{|n-1|-1}$;
2) $\frac{3+n}{3-|n|}$; 5) $\frac{2+|n|}{|n+3|-3}$;
3) $4:(2|n|-1)$; 6) $(3-|n+1|):(7-2|n-1|)$.

82*. Відомо, що $a + 3b = 6$ і $c = 4$. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{5c}{6a+18b}$; 2) $(-2a-6b):5c+1$; 3) $\frac{(a-2b)+5(b+c)}{5c}$.

83*. Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

- 1) $\frac{2x}{2-\frac{2}{x}}$; 2) $\frac{3}{3-\frac{x}{3}}$.

Проявіть компетентність

84. Дід Андрій хоче зробити два однакові вулики, що мають форму прямокутного паралелепіпеда. Загалом у діда Андрія є S м² дощок.



1. Якою має бути висота вулика, якщо ширина та довжина його основи дорівнюють a см і b см відповідно?
2. Знайдіть висоту вулика, якщо відомо, що $a = 50$ см, $b = 90$ см, $S = 6$ м². Відповідь запишіть у сантиметрах.
3. Дізнайтеся в інтернеті про розміри дощок для вуликів і їхню ціну та запропонуйте дідові Андрію розрахунок витрат для пасіки з десяти вуликів (розміри вуликів визначені вами в попередньому пункті задачі).
4. Запропонуйте власний мініпроект за сюжетом задачі.

§ 2. РАЦІОНАЛЬНИЙ ДРІБ. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

1. Що таке раціональний дріб

Ситуація. Оксана відвідує заняття ансамблю народного танцю «Черкащанка». Перші t хв заняття займає розминка, потім на 10 хв довше триває розтяжка. Після неї x хв танцюристи відпрацьовують елементи хореографічних постановок. Останні 5 хв заняття підводять підсумки. Сергій знайшов, яку частину заняття відведено для розминки й розтяжки, і подав результат у вигляді виразу.



qr.orioncentr.com.ua/rRgQ4



Як міркував Сергій?

Знайшов відношення сумарного часу розминки і розтяжки до тривалості всього заняття.



Сергій отримав дробовий раціональний вираз:

$$(2t + 10) : (2t + x + 15).$$

Цей вираз є часткою від ділення многочлена на многочлен. Якщо його подати як вираз $\frac{2t+10}{2t+x+15}$, то отримаємо **раціональний дріб**.

Запам'ятайте!

Раціональний дріб — це дріб, чисельник і знаменник якого є многочленами.



Чисельником і знаменником раціонального дробу може бути одночлен, зокрема число.

Наприклад, раціональними дробами є дробі:

$$\frac{5}{6}; \quad \frac{2a+1}{7b}; \quad \frac{x-7}{6}; \quad \frac{9}{n^3+n^2-n}.$$



Чи може раціональний дріб бути цілим виразом?

Так.



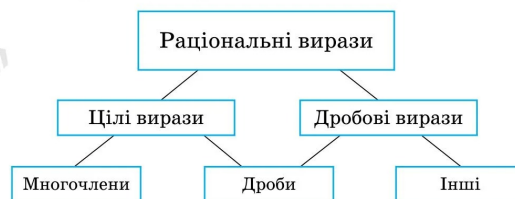
Наприклад, раціональний дріб $\frac{x-7}{6}$ не містить ділення на вираз зі змінною, тому він є **цілим** раціональним виразом.



Дробовий раціональний вираз, який є сумою чи різницею кількох раціональних дробів, **не можна** вважати раціональним дробом.

Наприклад, вираз $\frac{2a+1}{7b} + \frac{c^2-3}{2+9}$ є дробовим раціональним виразом, але не є раціональним дробом.

Зв'язок між цілими і дробовими виразами, а також раціональними дробами зображено на малюнку 3.



Мал. 3

2. Основна властивість раціонального дробу

У 6 класі ви вивчили основну властивість звичайного дробу. Наприклад, $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$ або ж $\frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}$.



Чи можна застосувати основну властивість дробу до раціональних дробів?

Так.



Раціональний дріб можна позначати так: $P = \frac{A}{B}$, де A і B — многочлени.

Запам'ятайте!

Основна властивість раціонального дробу

Значення раціонального дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на той самий многочлен, який тотожно не дорівнює нулю.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \text{ і } \frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C}, \text{ якщо многочлен } C \neq 0.$$



Дріб $\frac{A}{B}$ можна записати ще й так:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}.$$

Задача 1 Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{14m}{7m^3}$ на вираз $7m$, що тотожно не дорівнює нулю. Який дріб при цьому одержимо?

Розв'язання

Знаходимо ОДЗ даного дробу: $m \neq 0$.

Застосовуємо основну властивість дробу: $\frac{14m}{7m^3} = \frac{14m : 7m}{7m^3 : 7m} = \frac{2}{m^2}.$



Усі тотожні перетворення раціональних дробів виконують на ОДЗ їхніх змінних;

- якщо чисельник і знаменник раціонального дробу *помножити* на многочлен, який тотожно не дорівнює нулю, то ОДЗ змінних дробу може «звужитися» (поміркуйте чому, наведіть приклади);
- якщо чисельник і знаменник раціонального дробу *поділити* на многочлен, який тотожно не дорівнює нулю, то ОДЗ змінних дробу може «розширитися» (поміркуйте чому, наведіть приклади).

3. Скорочення раціонального дробу

qr.orioncentr.com.ua/BNhFT

Ви знаєте, що звичайні дробі скорочують, спираючись на основну властивість дробу.



Чи можна скорочувати раціональні дробі?

Так. Порівняємо ці способи дій (табл. 4).



Таблиця 4

	Звичайний дріб	Раціональний дріб
Даний дріб	$\frac{14}{63}$	$\frac{14m}{7m^3}$
Знаходимо спільний множник чисельника і знаменника дробу	$14 = 7 \cdot 2;$ $63 = 7 \cdot 9$	$14m = 2 \cdot 7m;$ $7m^3 = m^2 \cdot 7m$
Ділимо чисельник і знаменник дробу на їхній спільний множник	$\frac{14}{63} = \frac{14 : 7}{63 : 7} = \frac{2}{9}$	$\frac{14m}{7m^3} = \frac{14m : 7m}{7m^3 : 7m} = \frac{2}{m^2}$

Таке перетворення раціонального дробу на ОДЗ його змінних називають *скороченням дробу*.

Спільний множник чисельника і знаменника даного дробу називають *співмножником чисельника і знаменника дробу*. Наприклад, вираз $7m$ є співмножником чисельника і знаменника дробу $\frac{14m}{7m^3}$.



Щоб скоротити раціональний дріб, потрібно:

- 1) знайти **співмножник** чисельника і знаменника дробу;
- 2) поділити на нього чисельник і знаменник дробу згідно з основною властивістю дробу.

Задача 2 Скоротіть дріб: $\frac{2n^3 + 6n^2}{3n^4}.$

Розв'язання

У чисельнику виносимо за дужки спільний множник $2n^2$:

$$2n^3 + 6n^2 = 2n^2(n + 3).$$

Скорочуємо даний дріб на $n^2 \neq 0$:

$$\frac{2n^3 + 6n^2}{3n^4} = \frac{2n^2(n + 3)}{3n^2n^2} = \frac{2(n + 3)}{3n^2}.$$

Задача 3 Скоротіть дріб: $\frac{a^2 + 6a + 9}{3a + 9}$.

Розв'язання

Згортаємо чисельник: $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$.

Розкладаємо знаменник на множники:

$$3a + 9 = 3(a + 3).$$

Скорочуємо даний дріб на співмножник $(a + 3) \neq 0$: $\frac{(a + 3)^2}{3(a + 3)} = \frac{(a + 3)(a + 3)}{3(a + 3)} = \frac{a + 3}{3}$.

Задача 4 Скоротіть дріб: $\frac{a^3 + 2a^2 + 9a + 18}{a + 2}$.

Розв'язання

Розкладаємо чисельник даного дробу на множники способом групування:

$$\begin{aligned} a^3 + 2a^2 + 9a + 18 &= \\ &= a^2(a + 2) + 9(a + 2) = \\ &= (a + 2)(a^2 + 9). \end{aligned}$$

Застосовуємо основну властивість дробу і скорочуємо даний дріб на співмножник $(a + 2) \neq 0$:

$$\frac{(a + 2)(a^2 + 9)}{a + 2} = a^2 + 9.$$



Чи завжди можна скоротити раціональний дріб?

Ні.



Наприклад, якщо в чисельнику і знаменнику дробу не можна виділити однакові множники, то цей дріб скоротити не можна. Такий дріб називають *нескоротним дробом*.



Дріб $\frac{a + 3}{a}$ є нескоротним. Цей дріб **не можна** скорочувати на a .

Дізнайтеся більше

Задача 5 За яких цілих значень n значення дробу $\frac{2n^2 + 3n - 5}{n - 3}$ є цілим числом?

Розв'язання

1. Поділимо чисельник даного раціонального дробу на його знаменник:

$$\begin{array}{r} -2n^2 + 3n - 5 \quad | \quad n - 3 \\ \hline 2n^2 - 6n \\ \hline -9n - 5 \\ \hline 2n - 27 \\ \hline 22 \end{array}$$

2. Одержали: $\frac{2n^2 + 3n - 5}{n - 3} = 2n + 9 + \frac{22}{n - 3}$, де $(2n + 9)$ — ціла частина раціонального дробу, $\frac{22}{n - 3}$ — дробова частина раціонального дробу.

3. Значення многочлена $2n + 9$ є цілим числом за будь-якого цілого значення n .

4. Дріб $\frac{22}{n - 3}$ набуватиме цілих значень лише тоді, коли 22 поділиться на двочлен $(n - 3)$. Це буде, коли n дорівнює: -19 ; -8 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 14 ; 25 .

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/ocjaC

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
раціональний дріб	rational fraction	rationaler Bruch (m)	fraction rationnelle

Пригадайте головне

1. Що таке раціональний дріб?
2. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.
3. Чи завжди можна скоротити раціональний дріб?
4. Який раціональний дріб називають нескоротним?

Усне тренування

1. Скоротіть дробі: $\frac{11}{77}$; $\frac{15}{45}$; $\frac{111}{117}$; $\frac{78}{114}$; $\frac{14 \cdot 25}{45 \cdot 49}$.
2. Обчисліть: $41^2 - 2 \cdot 41 \cdot 11 + 11^2$; $6,4^2 - 3,6^2$.

Розв'яжіть задачі

85*. Наведіть приклад раціонального дробу.

86*. Чи правильно, що раціональним дробом є вираз:

1) $a^2 + 2a + 3$; 2) $\frac{a-4}{3}$; 3) $\frac{1-a^2}{1-b}$; 4) $(2-x^2):4$?

87*. Домножте чисельник і знаменник дробу $\frac{x-1}{2}$ на:

1) x ; 2) 5 ; 3) x^2 ; 4) $2x^3$; 5) 8 ; 6) $x+1$.
Запишіть одержаний дріб.

88*. Домножте чисельник і знаменник дробу $\frac{x+1}{3}$ на:

E 1) 6 ; 2) x ; 3) x^2 ; 4) $3x^3$; 5) $12x$; 6) $x-1$.
Запишіть одержаний дріб.

89*. Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{6x^2y^3}{24xy^4}$ на:

1) 6 ; 2) $2x$; 3) $3y$; 4) $6xy$; 5) $3xy^3$; 6) $2xy^2$.
Запишіть одержаний дріб.

90*. Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{8x^3y^4}{32x^2y^3}$ на:

E 1) 4 ; 2) $4x$; 3) $8y$; 4) $4xy$; 5) $2x^2y$; 6) $8x^2y^3$.
Запишіть одержаний дріб.

91*. Чи правильно виконано скорочення дробу: $\frac{5x^2y^3}{25xy^2} = \frac{x}{5y}$?

Якщо ні, то знайдіть помилку.

92*. Чи можна скоротити дріб:

1) $\frac{3x^2}{6x^3}$; 2) $\frac{12y^3}{4y}$; 3) $\frac{5ac}{3b}$; 4) $\frac{16a^5}{5a^2}$; 5) $\frac{4b^2c}{5ad}$; 6) $\frac{7+a}{a}$?

Якщо так, то скоротіть цей дріб.

93*. Скоротіть дріб:

E 1) $\frac{16x}{8y}$; 3) $\frac{32a}{6b}$; 5) $\frac{7x^2}{3xy}$;
2) $\frac{15ab}{25c}$; 4) $\frac{6ab}{5a}$; 6) $\frac{8c^3}{9ac}$.



qr.orioncentr.com.ua/asC8w

94*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{30x^3y^3}{5xy}$; 3) $\frac{15ab^3}{10bc^2}$; 5) $\frac{48x^2y^3}{16axy}$;
2) $\frac{14a^5b^4c^3}{21abc^2}$; 4) $\frac{6a^2b}{18ab^2}$; 6) $\frac{24a^3b}{32ab^3}$.

95*. Скоротіть дріб:

E 1) $\frac{15x}{5a}$; 2) $\frac{28xy}{14a}$; 3) $\frac{5a^4}{6a^2}$; 4) $\frac{36x^4y^2}{16x^2y^4}$.

96*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x-3y}{6x}$; 4) $\frac{ab+bc}{6b}$; 7) $\frac{4xy+6y^2}{2y}$;
2) $\frac{5x+5y}{10y}$; 5) $\frac{ax+ay}{3ay}$; 8) $\frac{2ax+4ay}{4ay}$;
3) $\frac{4x-8y}{8y}$; 6) $\frac{xz-2yz}{2z}$; 9) $\frac{3bx-3by}{6ab}$.

97*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x-3y}{x-y}$; 3) $\frac{3x-6y}{2x-4y}$; 5) $\frac{3a-9c}{3c-a}$; 7) $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$;
2) $\frac{4x+4y}{a(x+y)}$; 4) $\frac{5a-5b}{b-a}$; 6) $\frac{4x-12y}{3ay-ax}$; 8) $\frac{2ax-2ay}{3by-3bx}$.

98*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{6x-24y}{4x}$; 3) $\frac{bx-by}{2bc}$; 5) $\frac{11x+22y}{2ay+ax}$;
2) $\frac{ac+bc}{3c}$; 4) $\frac{6y-6z}{y-z}$; 6) $\frac{5x-25y}{15y-3x}$.

99*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x^3}{x^3-x^2}$; 3) $\frac{3a^2-6a}{12a^2}$; 5) $\frac{3y^3-3y}{9y^3}$;
2) $\frac{4y^3-4y^4}{2y^5}$; 4) $\frac{5x^3-5x^2}{15x}$; 6) $\frac{3a^3+12a^2}{6a^2}$.

100*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{7x^3-7x^2}{x^2-x}$; 3) $\frac{3a^3+9a^5}{a^2+3a^4}$; 5) $\frac{y^3-5y}{5y^2-y^4}$;
2) $\frac{4y^3-8y^2}{2y^5-y^6}$; 4) $\frac{3x^2-x^3}{9x-3x^2}$; 6) $\frac{9a^6-9a^5}{a^3-a^4}$.

101*. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{4b^3}{b^2-b^4}; \quad 2) \frac{9c^3-6c^2}{12c^2}; \quad 3) \frac{8x^4-8x^2}{2x^3-2x}; \quad 4) \frac{4y^2-12y^3}{3y^3-y^2}.$$

102. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^4-x^2}{x^4+x^3}; \quad 4) \frac{4x^4-x^2}{6x+3}; \quad 2) \frac{y^3-16y}{4y^2+y^3}; \quad 5) \frac{a^3-25ab^2}{ab-5b^2};$$

$$3) \frac{a^2-9b^2}{2a+6b}; \quad 6) \frac{4a^3-9ac^2}{2ac+3c^2}.$$

qr.orioncentr.com.ua/StoVx


103. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2}; \quad 3) \frac{a^3-16ab^2}{a^2b+8ab^2+16b^3};$$

$$2) \frac{y^4-4y^2}{y^3+4y^2+4y}; \quad 4) \frac{c^4-6c^3+9c^2}{9c-c^3}.$$

104. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}; \quad 2) \frac{c^4-36c^2}{12c+2c^2}; \quad 3) \frac{a^2b-10ab+25b}{5b^2-ab^2}.$$

105. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^3-1}{x^3-x^2}; \quad 3) \frac{ab^2+a^3-a^2b}{a^3b+b^4};$$

$$2) \frac{y^4-4}{2y^3+2y^2+2y}; \quad 4) \frac{a^3-2a^2+4a}{a^3+8}.$$

106. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a^2+b^2-c^2-2ab}; \quad 3) \frac{x^2+xy+yz-z^2}{y^2-x^2+2xz-z^2};$$

$$2) \frac{(a-b)(c-d)}{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}; \quad 4) \frac{25-a^2-2ab-b^2}{a^2+ab+5b-25}.$$

107. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}; \quad 2) \frac{a^2-ab+3b-9}{a^2-2ab+b^2+3a-3b}.$$

108. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2-9}{x+3}; \quad 2) y = \frac{7x-5}{5-7x}; \quad 3) y = \frac{12x-36-x^2}{x-6}.$$

109. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2-49}{x+7}; \quad 2) y = \frac{x-4}{4-x}; \quad 3) y = \frac{x^2+10x+25}{x+5}.$$

110. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2-25}{x+5} = 0; \quad 2) \frac{x^2-121}{-121+x^2} = 1; \quad 3) \frac{6x-1}{3-18x} = -\frac{1}{3}.$$

111*. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}; \quad 2) \frac{3x^2+12x+9}{3x^4+15x^2+18}; \quad 3) \frac{x^8+x^4+1}{x^4+x^2+1}.$$

112*. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2}{|x|}; \quad 2) y = \frac{4-x^2}{2+|x|}; \quad 3) y = \frac{x^2-6x+9}{|3-x|}.$$

Проявіть компетентність

113. Тато Сашка має два квадратні листи ДВП зі стороною x см. Для обшивки двох стінок скрині татові потрібно вирізати з них два прямокутники: перший — розмірами $(x-10) \times (x-20)$ см; другий — розмірами $(x-10) \times (x-30)$ см. У скільки разів площа першого прямокутника більша за площу другого? Складіть вираз і знайдіть його значення, якщо: 1) $x = 100$ см; 2) $x = 150$ см; 3) $x = 200$ см.

§ 3. ЗВЕДЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ ДО СПІЛЬНОГО ЗНАМЕННИКА

1. Зведення раціонального дробу до нового знаменника

Назар виконав скорочення дробу, записавши ланцюжок рівностей:

$$\frac{2(x-11)}{x^2-121} = \frac{2(x-11)}{(x-11)(x+11)} = \frac{2}{x+11}.$$

Софія пройшла цим ланцюжком від кінця до початку — перейшла від дробу зі знаменником $(x+11)$ до дробу зі знаменником x^2-121 .


qr.orioncentr.com.ua/SUVa8



Як можна назвати дію, виконану Софією?

Зведенням дробу до нового знаменника.



Дія зведення раціонального дробу до нового знаменника аналогічна до такої самої дії зі звичайними дробами. Порівняємо їх (табл. 5).

Таблиця 5

	Звичайний дріб	Раціональний дріб
Даний дріб	$\frac{3}{8}$	$\frac{2m+1}{m-1}$
Новий знаменник	32	$m^2 - 1$
Визначаємо додатковий множник	$32 = 8 \cdot 4$, додатковий множник — число 4	$m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$, додатковий множник — двочлен $m+1$
Записуємо дію	$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4}$	$\frac{2m+1}{m-1} = \frac{(2m+1) \cdot (m+1)}{(m-1) \cdot (m+1)}$
Виконуємо множення в чисельнику і знаменнику	$\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{12}{32}$	$\frac{(2m+1) \cdot (m+1)}{(m-1) \cdot (m+1)} = \frac{2m^2 + 2m + m + 1}{m^2 - 1} = \frac{2m^2 + 3m + 1}{m^2 - 1}$



Щоб звести даний раціональний дріб до нового знаменника, треба:

- 1) записати знаменник нового дробу у вигляді добутку;
- 2) знайти додатковий множник для даного дробу;
- 3) помножити чисельник даного дробу на додатковий множник і результат записати в чисельнику нового дробу.



Чи до будь-якого знаменника можна звести даний раціональний дріб?

Наприклад, дріб $\frac{7}{10x}$ не можна звести

Ні.

до знаменника $10+x$, оскільки вираз $10+x$ не можна поділити на вираз $10x$ без остачі.

2. Зведення двох дробів до спільного знаменника

qr.orioncentr.com.ua/nrIVt



Чи можна два раціональні дроби звести до спільного знаменника?

Так.



Спочатку треба знайти спільний знаменник даних дробів. Це може бути добуток їхніх знаменників, оскільки він ділиться без остачі на знаменник кожного з даних дробів. Такий вираз називають *спільним кратним виразів*, що є знаменниками даних дробів.

Задача 1 Зведіть дроби $\frac{2y}{x-y}$ і $\frac{5x^2}{x+y}$ до спільного знаменника.

Розв'язання

Знайдемо спільне кратне знаменників даних дробів:

$$(x-y) \cdot (x+y) = x^2 - y^2.$$

Знайдемо додатковий множник для першого дробу $\frac{2y}{x-y}$:

$$(x^2 - y^2) : (x-y) = (x+y).$$

Знайдемо додатковий множник для другого дробу $\frac{5x^2}{x+y}$:

$$(x^2 - y^2) : (x+y) = (x-y).$$

Зведемо перший дріб до нового знаменника $x^2 - y^2$:

$$\frac{2y}{x-y} = \frac{2y(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2y(x+y)}{x^2 - y^2}.$$

Зведемо другий дріб до нового знаменника $x^2 - y^2$:

$$\frac{5x^2}{x+y} = \frac{5x^2(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{5x^2(x-y)}{x^2 - y^2}.$$

Задача 2 До якого спільного знаменника (СЗ) можна звести раціональні дроби $\frac{3}{4xy}$ і $\frac{3}{6x^2y}$? Якими будуть додаткові множники?

Розв'язання

1. Знаходимо коефіцієнт СЗ даних дробів: НСК (4; 6) = 12.
2. Визначаємо буквені множники спільного знаменника. Візьмемо множник, що має більший степінь змінної x , а саме x^2 .

Візьмемо спільний множник зі змінною y , а саме y .

3. Записуємо СЗ даних дробів: $12x^2y$.

4. Знаходимо додатковий множник для першого дробу:

$$12x^2y : 4xy = 3x$$

5. Знаходимо додатковий множник для другого дробу:

$$12x^2y : 6x^2y = 2$$

Отже, спільним знаменником даних дробів є $12x^2y$, тоді вираз $3x$ — додатковий множник до першого дробу, а число 2 — до другого дробу.

 **Щоб звести два дані раціональні дроби до спільного знаменника, треба:**

- 1) знайти спільний знаменник даних дробів;
- 2) знайти додатковий множник для першого дробу;
- 3) звести перший дріб до нового знаменника;
- 4) знайти додатковий множник для другого дробу;
- 5) звести другий дріб до нового знаменника.

Дізнайтеся більше

За допомогою раціональних дробів записують багато залежностей між величинами:

1) $I = \frac{U}{R}$, закон Ома, що описує залежність між напругою U , силою струму I й електричним опором R провідника;

2) $c = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)}$ — питома теплоємність речовини масою m , яка, поглинаючи кількість теплоти Q , нагрівається від температури t_1 до t_2 .

3) $F = g \frac{m_1 m_2}{r^2}$ — закон всесвітнього тяжіння, що описує, з якою силою F тіло масою m_1 діє на тіло масою m_2 , де стала g — гравітаційна стала — однакова для всіх тіл.

Раціональні дроби використовують, щоб описати різноманітні хімічні процеси та явища, від розрахунку концентрації розчину (сплаву) до складних моделей хімічних реакцій. В економічній науці за допомогою раціональних дробів визначають коефіцієнт еластичності попиту на товар або його пропозиції. Він показує, на скільки відсотків зміниться попит (пропозиція) на товар у разі зміни його ціни на 1 %.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/bvw1R

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
спільний знаменник	common denominator	gemein- samer Nenner (m)	dénominateur commun

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке додатковий множник для даного раціонального дробу та як його знайти.
2. Сформулюйте правило зведення дробу до нового знаменника.
3. Сформулюйте правило зведення двох дробів до спільного знаменника.

Усне тренування

1. Зведіть дріб до знаменника 96:

$$\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}; \frac{9}{16}; \frac{11}{32}; \frac{66}{192}.$$

2. Зведіть дроби до найменшого спільного знаменника:

$$\frac{2}{3} \text{ і } \frac{2}{5}; \frac{1}{3} \text{ і } \frac{5}{18}; \frac{9}{14} \text{ і } \frac{6}{35}; \frac{7}{18} \text{ і } \frac{4}{27}; \frac{3}{8} \text{ і } \frac{13}{20}.$$

Розв'яжіть задачі

- 114*. Чи правильно, що спільним знаменником дробів $\frac{1}{5x}$ і $\frac{1}{5x^2}$ є вираз: 1) $5x$; 2) $5x^2$; 3) $25x$; 4) $25x^2$; 5) $25x^3$; 6) $5x^3$?

115°. Зведіть дріб $\frac{1}{x}$ до знаменника:

- 1) $3x$; 2) $5x$; 3) x^2 ; 4) $2x^2$; 5) $5x^3$; 6) $6x^4$.

116°. Зведіть дріб $\frac{1}{2a}$ до знаменника:

- 1) $4a$; 2) $8a$; 3) $2a^2$; 4) $6a^2$; 5) $10a^3$; 6) $14a^4$.



qr.orioncentr.com.ua/1Nwrd

117°. Зведіть дріб $\frac{1}{3b}$ до знаменника:

- 1) $9b$; 2) $18b$; 3) $3b^2$; 4) $6b^2$; 5) $15b^3$; 6) $21b^4$.

118°. Зведіть дріб:

- 1) $\frac{1}{ab}$ до знаменника: $2ab$; a^2b ; ab^2 ; $3a^3b$; $-2a^2b^2$; $3abc$;
2) $\frac{x-y}{2xy}$ до знаменника: $4xy$; $8x^2y$; $6xy^2$; $-12x^3y^2$; $8axy$;
3) $\frac{2m-n}{m^2n}$ до знаменника: m^2n^2 ; $2m^3n$; $9m^3n^2$; $-7m^5n^3$.

119°. Зведіть дріб:

- 1) $\frac{1}{a+b}$ до знаменника $2(a+b)$; $(a+b)^2$; $3a(a+b)$; a^2-b^2 ;
2) $\frac{5x}{x-y}$ до знаменника $2(x-y)$; $(x-y)^2$; $4y(x-y)$; x^2-y^2 ;
3) $\frac{3m-2n}{2(m+n)}$ до знаменника $14(m+n)$; $8(m+n)^2$.

120°. Зведіть дріб $\frac{1}{xy}$ до знаменника:

- 1) $4xy$; 2) x^2y ; 3) xy^2 ; 4) $5x^2y$; 5) $6xyz$; 6) $7x^2y^2$.

121°. Зведіть до спільного знаменника дробі:

- 1) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{1}{6a}$ і $\frac{3}{8a}$; 7) $-\frac{7}{12a}$ і $-\frac{3}{14a}$;
2) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{4a}$; 5) $\frac{2}{3b}$ і $\frac{3}{9b}$; 8) $\frac{5a}{16b}$ і $-\frac{11a}{32b}$;
3) $\frac{1}{2x}$ і $\frac{1}{6x}$; 6) $\frac{5}{8y}$ і $\frac{3}{12y}$; 9) $-\frac{2m}{18n}$ і $\frac{5m}{54n}$.

122°. Зведіть до спільного знаменника дробі:



- 1) $\frac{1}{ab}$ і $\frac{1}{ac}$; 4) $\frac{2}{ab^3}$ і $\frac{3}{a^3b}$;
2) $\frac{1}{ax^2}$ і $\frac{1}{bx^2}$; 5) $\frac{4}{5b^2}$ і $\frac{3}{15b}$;
3) $\frac{1}{x^2y}$ і $\frac{1}{x^3y}$; 6) $\frac{3}{7y^4}$ і $\frac{2}{21y^2}$;
7) $-\frac{5b}{8a^3}$ і $-\frac{6b}{16a}$; 8) $\frac{4c}{15ab^2}$ і $-\frac{1}{20ac}$; 9) $-\frac{x}{2y^3}$ і $\frac{3}{14y}$.



qr.orioncentr.com.ua/sCsOk

123°. Зведіть до спільного знаменника дробі:



- 1) $\frac{1}{b}$ і $\frac{1}{5b}$; 3) $\frac{3}{2ab}$ і $\frac{1}{4ac}$;
2) $\frac{1}{3a}$ і $\frac{1}{9a}$; 4) $\frac{5}{ab^2}$ і $\frac{3}{a^2b}$.

124°. Зведіть до спільного знаменника дробі:

- 1) $\frac{1}{a+1}$ і $\frac{1}{2a+2}$; 5) $\frac{1}{2-5y}$ і $\frac{1}{4-10y}$;
2) $\frac{1}{a-2}$ і $\frac{1}{3a-6}$; 6) $\frac{3m}{21m-14n}$ і $\frac{5n}{3m-2n}$;
3) $\frac{1}{1-x}$ і $\frac{1}{4-4x}$; 7) $\frac{4a}{15a+3b}$ і $-\frac{6b}{5a+b}$;
4) $\frac{1}{2a+1}$ і $\frac{1}{4a+2}$; 8) $\frac{2}{16-4b}$ і $\frac{7b}{4-b}$.

125°. Зведіть до спільного знаменника дробі:

- 1) $\frac{2}{a-1}$ і $\frac{3}{1-a}$; 6) $\frac{2}{1-4x}$ і $\frac{7}{4-16x}$;
2) $\frac{1}{a-2}$ і $\frac{2}{8-4a}$; 7) $\frac{a}{a-b}$ і $\frac{b}{b-a}$;
3) $\frac{1}{1-2x}$ і $\frac{5}{6x-3}$; 8) $\frac{x}{x-2y}$ і $\frac{2y}{6y-3x}$;
4) $\frac{2}{3x-1}$ і $\frac{6}{-6x+2}$; 9) $\frac{2m}{7m-14}$ і $-\frac{1}{10-5m}$;
5) $-\frac{3}{y-3}$ і $\frac{1}{9-3y}$; 10) $\frac{-x}{6x-3y}$ і $\frac{-y}{5y-10x}$.

126°. Зведіть до спільного знаменника дробі:



- 1) $\frac{1}{x-4}$ і $\frac{1}{2x-8}$; 2) $\frac{1}{5a+1}$ і $\frac{1}{4+20a}$; 3) $\frac{2}{1-3y}$ і $\frac{5}{12y-4}$.

127. Зведіть до спільного знаменника дробі:

Е 1) $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a^2-ab}, \frac{1}{a^2-b^2}$; 3) $\frac{1}{2y-3}, \frac{1}{9-4y^2}, \frac{1}{4y+6}$;
 2) $\frac{1}{b^2-4}, \frac{1}{3b+6}, \frac{1}{2-b}$; 4) $\frac{1}{3x-1}, \frac{1}{9x^2-1}, \frac{1}{9x^2-6x+1}$.

128. Зведіть до спільного знаменника дробі:

1) $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x^3-1}, \frac{1}{x^2+x+1}$; 2) $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{x^3+8}, \frac{1}{x^2-4}$.

129. Зведіть до спільного знаменника дробі:

1) $\frac{1}{a^2-9}, \frac{1}{2a+6}, \frac{1}{3-a}$; 2) $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x^3+1}, \frac{1}{x^2-1}$.

130. Скоротіть дробі, а потім зведіть їх до спільного знаменника:

1) $\frac{x^2+4x+4}{-3x-6} \text{ і } \frac{5y-20x}{15xy}$; 2) $\frac{m^2-2m+4}{m^3+8} \text{ і } \frac{m^2n-4n}{mn+2n}$.

131. Скоротіть дробі, а потім зведіть їх до спільного знаменника:

Е 1) $\frac{ax-2a}{2b-bx} \text{ і } \frac{4a^2+8ab+4b^2}{(a+b)^3}$; 2) $\frac{x^2+10x+25}{3x+15} \text{ і } \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

132*. Зведіть до спільного знаменника дробі:

1) $\frac{1}{x^2-1}, \frac{1}{x^3-x^2+x-1}, \frac{1}{x^3+x^2+x+1}, \frac{1}{x^4-1}$;
 2) $\frac{1}{x^2+3x+2}, \frac{1}{x^2+5x+6}, \frac{1}{x^2+7x+10}$.

Проявіть компетентність

133. Мотоцикліст, рухаючись по краю циркової арени діаметром d м, робить 10 кіл за t с. Яка середня швидкість його руху? Знайдіть середню швидкість його руху, якщо час руху виражений числом, у п'ятеро більшим, ніж діаметр арени. Складіть вираз і спростіть його.

134. Під час баскетбольного матчу спортсмен кинув м'яч у кільце. Якою була маса м'яча, якщо на висоті H м м'яч мав швидкість v м/с і його повна енергія складала $E_{\text{пов.}}$. Дж. Складіть вираз та знайдіть його значення, якщо $H = 3$; $v = 2$; $E_{\text{пов.}} = 15,7$.

§ 4. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

1. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ситуація. Марина й Петро допомагали бабусі висадити овочі на городі (мал. 4). Щоб визначити, яку частину городу вони засадили овочами, Марина й Петро склали такі вирази:



qr.orioncentr.com.ua/jXOza



Мал. 4

Марина

$$\frac{ac}{c(a+b)} + \frac{b(c-x)}{c(a+b)}$$

Петро

$$\frac{c(a+b)-bx}{c(a+b)}$$



Як перевірити, чи рівні ці вирази?

Можна додати дробі з однаковими знаменниками у виразі Марини.



Додавання/віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками виконують так само, як додають/віднімають звичайні дробі — знаменник залишають тим самим, а чисельники додають/віднімають (табл. 6).

Таблиця 6

	Раціональні дробі
Сума дробів	$\frac{ac}{c(a+b)} + \frac{b(c-x)}{c(a+b)} = \frac{ac+b(c-x)}{c(a+b)} = \frac{ac+bc-bx}{c(a+b)}$
Різниця дробів	$\frac{ac}{c(a+b)} - \frac{b(c-x)}{c(a+b)} = \frac{ac-b(c-x)}{c(a+b)} = \frac{ac-bc+bx}{c(a+b)}$

✓ Раціональні дробі можна додавати й віднімати лише на ОДЗ їхніх змінних.

✓ Щоб знайти суму/різницю двох раціональних дробів з однаковими знаменниками, треба:

- 1) спільний знаменник записати в знаменнику суми/різниці;
- 2) додати/відняти чисельники і результат записати в чисельнику суми/різниці.

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$$

Правила додавання (віднімання) раціональних дробів зберігається для трьох і більше дробів з однаковими знаменниками.

Наприклад:

$$\frac{3x}{2y} + \frac{5x}{2y} + \frac{5c}{2y} + \frac{7c}{2y} = \frac{3x+5x+5c+7c}{2y} = \frac{8x+12c}{2y}.$$

Скориставшись цим правилом, перевірте самостійно, чи є рівними вирази, які отримали Марина й Петро в ситуації на початку параграфа.

✓ Для додавання раціональних дробів виконуються такі закони:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{B}{C} + \frac{A}{C} \text{ — переставний закон додавання;}$$

$$\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C}\right) + \frac{D}{C} = \frac{A}{C} + \left(\frac{B}{C} + \frac{D}{C}\right) \text{ — сполучний закон додавання.}$$

2. Додавання і віднімання раціональних дробів із різними знаменниками

qr.orioncentr.com.ua/BtO9Y



Як додати два раціональні дробі з різними знаменниками?

Аналогічно до додавання звичайних дробів (табл. 7).



Таблиця 7

Треба знайти суму двох дробів	$\frac{3}{5y^2}$ і $\frac{4}{15y}$
Шукаємо спільний знаменник (СЗ) даних дробів	визначаємо коефіцієнт СЗ: НСК (5; 15) = 15
	визначаємо буквенний множник СЗ: НСК (y^2 ; y) = y^2 , отже, СЗ даних дробів $15y^2$
Шукаємо додаткові множники	для першого дробу: $15y^2 : 5y^2 = 3$
	для другого дробу: $15y^2 : 15y = y$
Виконуємо додавання	$\frac{3}{5y^2} + \frac{4}{15y} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot y}{15y^2} = \frac{9+4y}{15y^2}$

✓ Щоб знайти суму/різницю двох раціональних дробів із різними знаменниками, треба:

- 1) звести дані дробі до спільного знаменника;
- 2) записати спільний знаменник у знаменнику суми/різниці;
- 3) знайти додатковий множник для кожного дробу;
- 4) знайти нові чисельники даних дробів;
- 5) додати/відняти нові чисельники й результат записати в чисельнику суми/різниці.

✓ Якщо у двох дробів знаменники не мають спільних множників, відмінних від числа 1, то додавання/віднімання таких дробів виконують так:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{C \cdot D}.$$

✓ Якщо у двох дробів знаменники мають спільний множник P , відмінний від числа 1, то додавання/віднімання таких дробів виконують так:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{A}{M \cdot P} \pm \frac{B}{N \cdot P} = \frac{A \cdot N \pm B \cdot M}{M \cdot N \cdot P},$$

де $C = M \cdot P$, $D = N \cdot P$.

Дізнайтеся більше

Для молодих математиків (до 40 років) найвищою міжнародною нагородою в галузі математики є премія Філдса. Фонд для присудження премії (та золотої Медалі Філдса) заснував канадський математик Джон Чарлз Філдс. Уперше премію було вручено в 1936 р. двом математикам — Ларе Альфорсу (Фінляндія) та Джессі Дугласу (США); вона становила 15 000 доларів. У 1990 р. Медаль Філдса одержав Володимир Гершенович Дрінфельд (народився 14 лютого 1954 р. в м. Харків) — видатний український та американський математик, член-кореспондент НАН України (1992). У 2022 році за свій розв'язок задачі пакування куль у 8-вимірному просторі цю премію отримала Марина В'язовська, ставши другою (після іранської вченої Мар'ям Мірзахані) жінкою-математикинею, котра отримала цю нагороду. Можливо, і ви свого часу зможете здобути цю премію.



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/wyNPt

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
додавання й віднімання раціональ- них дробів	addition and subtraction of rational fractions	Addition und Subt- raktion von rationalen Brüchen	addition et soustraction de fractions rationnelles

Пригадайте головне

- Сформулюйте правило додавання/віднімання двох раціональних дробів з однаковими знаменниками.
- Сформулюйте правило додавання/віднімання двох раціональних дробів із різними знаменниками.

Усне тренування

1. Обчисліть: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$; $\frac{5}{14} - \frac{3}{14}$; $\frac{2}{15} + \frac{3}{5}$; $\frac{12}{17} - \frac{1}{3}$.

2. Скоротіть дріб: $\frac{x+y}{-x-y}$; $\frac{5a-15b}{5a}$; $\frac{2-n}{4-n^2}$; $\frac{1-x}{x^2-2x+1}$.

3. Укажіть пари дробів, сума яких є цілим числом:
 $\frac{1}{3}$; $\frac{14}{5}$; $\frac{13}{2}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{2}{10}$.

4. Знайдіть ОДЗ змінних виразу:
 $(2x-5)^2 : (x+4)^2$; $(y-2)(y+2) : y(y-5)$.

Розв'яжіть задачі

135*. Потрібно додати дробі $\frac{3y}{2x}$ і $\frac{y}{6x}$.

1. Яким буде знаменник одержаного в сумі дробу:

а) $6x$; б) $12x$; в) $2x$?

2. Яким буде чисельник одержаного в сумі дробу:

а) $4y$; б) $10y$; в) $16y$?

3. Назвіть дріб, який є результатом додавання даних дробів.

136*. Чи правильно, що сумою дробів $\frac{5}{x-1}$ і $\frac{3}{2(x-1)}$ є дріб:

1) $\frac{8}{2(x-1)}$; 2) $\frac{13}{2x-2}$; 3) $\frac{13}{x-1}$?

137*. Потрібно відняти дробі $\frac{5}{3y}$ і $\frac{2}{9y}$.

1. Яким буде знаменник одержаного в сумі дробу:

а) $3y$; б) $27y$; в) $9y$?

2. Яким буде чисельник одержаного в сумі дробу:

а) 17 ; б) 13 ; в) 39 ?

3. Назвіть дріб, який є результатом віднімання даних дробів.

138*. Чи правильно, що різницею дробів $\frac{7}{3(x+1)}$ і $\frac{1}{x+1}$ є дріб: 1) $\frac{4}{x+1}$; 2) $\frac{8}{3(x+1)}$; 3) $\frac{4}{3(x+1)}$?

139*. Виконайте додавання дробів:

1) $\frac{2}{5x} + \frac{7}{5x}$; 3) $\frac{1}{6c} + \frac{7}{6c}$;

2) $\frac{8}{3a} + \frac{2}{3a}$; 4) $\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x-2}$;


qr.orioncentr.com.ua/KNUqR

$$5) \frac{3y}{y+1} + \frac{2y}{y+1}; \quad 7) \frac{3a}{x+2} + \frac{4a}{x+2}; \quad 9) \frac{3x}{c^2+1} + \frac{8x}{c^2+1}.$$

$$6) \frac{4c}{c-1} + \frac{c}{c-1}; \quad 8) \frac{4c}{y-1} + \frac{7c}{y-1};$$

140°. Знайдіть суму дробів:

$$1) \frac{2}{7ab} \text{ і } \frac{3}{7ab}; \quad 3) \frac{3xy}{2a^2b} \text{ і } \frac{2xy}{2a^2b}; \quad 5) \frac{5y}{a-c} \text{ і } \frac{2y}{a-c};$$

$$2) \frac{3y}{9ac} \text{ і } \frac{4y}{9ac}; \quad 4) \frac{3a}{2a+b} \text{ і } \frac{4a}{2a+b}; \quad 6) \frac{3x}{a^2+b} \text{ і } \frac{2x}{a^2+b}.$$

141°. Виконайте додавання дробів:

$$1) \frac{2}{9y} + \frac{5}{9y}; \quad 3) \frac{9b}{a^2+3} + \frac{4b}{a^2+3}; \quad 5) \frac{2c}{2+a} + \frac{8c}{2+a};$$

$$2) \frac{2a}{a-3} + \frac{4}{a-3}; \quad 4) \frac{3ac}{2x^3} + \frac{2ac}{2x^3}; \quad 6) \frac{3c}{2+x^3} + \frac{7c}{2+x^3}.$$

142°. Виконайте віднімання дробів:

$$1) \frac{12}{7x} - \frac{3}{7x}; \quad 5) \frac{4c}{c+2} - \frac{9c}{c+2};$$

$$2) \frac{11}{5a} - \frac{7}{5a}; \quad 6) \frac{3x}{a+2} - \frac{14x}{a+2};$$

$$3) \frac{13}{9c} - \frac{5}{9c}; \quad 7) \frac{4a}{d-1} - \frac{17a}{d-1};$$

$$4) \frac{13y}{y-1} - \frac{9y}{y-1}; \quad 8) \frac{13a}{b^2+1} - \frac{18a}{b^2+1}.$$

143°. Знайдіть різницю дробів:

$$1) \frac{1}{8ab} \text{ і } \frac{11}{8ab}; \quad 3) \frac{12xy}{5ab^2} \text{ і } \frac{3xy}{5ab^2}; \quad 5) \frac{5c}{a+c} \text{ і } \frac{12c}{a+c};$$

$$2) \frac{4y}{5ac} \text{ і } \frac{4y}{5ac}; \quad 4) \frac{9a}{a+b} \text{ і } \frac{4a}{a+b}; \quad 6) \frac{8x}{a^2+3} \text{ і } \frac{x}{a^2+3}.$$

144°. Виконайте віднімання дробів:

$$1) \frac{2}{5y} - \frac{9}{5y}; \quad 3) \frac{9b}{a^2-1} - \frac{8b}{a^2-1}; \quad 5) \frac{6c}{1+a} - \frac{8c}{1+a};$$

$$2) \frac{2a}{a+4} - \frac{3a}{a+4}; \quad 4) \frac{9ac}{4x^5} - \frac{5ac}{4x^5}; \quad 6) \frac{13a}{1+x} - \frac{3a}{1+x}.$$

145°. Знайдіть різницю $\frac{a}{9c} - \frac{b}{9c}$, якщо:

$$1) a = 5c^2, b = 4c^2; \quad 3) a = 15ac^2, b = 6ac^2.$$

$$2) a = 7c, b = -10c;$$

146°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{5}{5+x} + \frac{x}{5+x}; \quad 3) \frac{11}{6+c} + \frac{1+2c}{6+c}; \quad 5) \frac{3y}{y+1} + \frac{1-2y}{y+1};$$

$$2) \frac{10}{5-x} - \frac{2x}{5-x}; \quad 4) \frac{-2x}{x-2} + \frac{x+2}{x-2}; \quad 6) \frac{4c}{c-1} + \frac{1-5c}{c-1}.$$

147°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{9}{3+x} - \frac{x^2}{3+x};$$

$$2) \frac{25}{x-5} - \frac{x^2}{x-5};$$

$$3) \frac{36}{6+c} - \frac{c^2}{6+c};$$

$$4) \frac{7}{x^2-49} - \frac{x}{x^2-49};$$

$$5) \frac{y^2}{y+1} + \frac{1+2y}{y+1};$$

$$6) \frac{4+c^2}{c-2} - \frac{4c}{c-2};$$

$$7) \frac{6}{x-3} + \frac{2x}{3-x};$$

$$8) \frac{y^2}{2-y} + \frac{4}{y-2};$$

$$9) \frac{3+c^2}{c-1} + \frac{4}{1-c};$$

$$10) \frac{5(c^2+1)}{(c-1)^2} + \frac{10c}{(1-c)^2}.$$

148°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a};$$

$$2) \frac{4}{2-y} - \frac{2y}{2-y};$$

$$3) \frac{3b}{b-1} + \frac{1-4b}{b-1};$$

$$4) \frac{16}{4+y} - \frac{y^2}{y+4};$$

$$5) \frac{a}{a^2-64} + \frac{8}{a^2-64};$$

$$6) \frac{-5+c^2}{c-2} - \frac{1}{2-c};$$

$$7) \frac{n^2}{3n-33} + \frac{121}{33-3n};$$

$$8) \frac{y^2-4y}{y^2-4y+4} - \frac{2y}{4y-y^2-4}.$$

149°. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

$$1) \frac{1}{1-a^2} + \frac{a}{1-a^2}, \text{ якщо } a = 0,9;$$

$$2) \frac{2}{y^2-4} - \frac{y}{y^2-4}, \text{ якщо } y = -1,8.$$

150°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{2}{5x} + \frac{3}{10x}; \quad 3) \frac{5}{12c} + \frac{7}{9c};$$

$$2) \frac{5}{3a} + \frac{5}{6a}; \quad 4) \frac{3x}{x+2} + \frac{2x}{3(x+2)};$$



qr.orioncentr.com.ua/V9gLW



qr.orioncentr.com.ua/0WKYH



$$\begin{array}{ll} 5) \frac{y}{5(y+1)} + \frac{2y}{y+1}; & 8) \frac{13}{15c} - \frac{5}{9c}; \\ 6) \frac{3c}{2(c-1)} + \frac{2c}{3(c-1)}; & 9) \frac{2a}{x+2} - \frac{4a}{5(x+2)}; \\ 7) \frac{1}{6x} - \frac{5}{12x}; & 10) \frac{c}{3(y-1)} - \frac{6c}{y-1}. \end{array}$$

151°. Знайдіть суму дробів:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{2}{3ab} + \frac{3}{12ab}; & 4) \frac{3a}{5(a+b)} + \frac{6a}{25(a+b)}; \\ 2) \frac{5y}{36ac} + \frac{4y}{9ac}; & 5) \frac{4y}{3(a-c)} + \frac{7y}{15(a-c)}; \\ 3) \frac{x}{4a^2b} + \frac{3x}{14a^2b}; & 6) \frac{3x}{8(a-2b)} + \frac{5x}{6(a-2b)}. \end{array}$$

152°. Знайдіть різницю дробів:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1}{4ab} + \frac{11}{8ab}; & 3) \frac{13x}{15b^2} + \frac{3x}{25b^2}; & 5) \frac{5c}{6(a+c)} + \frac{12c}{a+c}; \\ 2) \frac{4y}{5ac} + \frac{22y}{35ac}; & 4) \frac{9a}{a-b} + \frac{4a}{5(a-b)}; & 6) \frac{9x}{8(a^2+1)} + \frac{x}{20(a^2+1)}. \end{array}$$

153°. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1}{8y} + \frac{3}{16y}; & 3) \frac{2b}{3(a^2+3)} + \frac{4b}{a^2+3}; & 5) \frac{2c}{3(2-a)} - \frac{5c}{4(2-a)}; \\ 2) \frac{2a}{a-1} + \frac{5a}{4(a-1)}; & 4) \frac{ac}{7x^2} - \frac{2ac}{21x^2}; & 6) \frac{3c}{10(1+x)} - \frac{2c}{15(1+x)}. \end{array}$$

154°. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1}{5x} + \frac{3x^2-1}{10x^3}; & 3) \frac{5}{5+x} + \frac{3x-7}{(5+x)x}; & 5) \frac{4y}{3y+3} + \frac{1-y}{y+1}; \\ 2) \frac{1}{4x^2y^2} - \frac{2}{6x^3y}; & 4) \frac{10x-1}{x(5-x)} - \frac{2}{5-x}; & 6) \frac{4c}{c-1} + \frac{2-5c^3}{c^2(c-1)}. \end{array}$$

155°. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{2}{3+x} - \frac{2x}{x^2-9}; & 4) \frac{5}{x+7} - \frac{10x}{x^2-49}; \\ 2) \frac{4x}{x^2-25} - \frac{4}{x-5}; & \\ 3) \frac{2}{6+c} + \frac{2c}{36-c^2}; & \end{array}$$



qr.orioncentr.com.ua/T2FbF

$$5) \frac{2}{y+1} - \frac{1+2y}{y^2-1}; \quad 6) \frac{4}{c^2-4} - \frac{4-c}{c-2}.$$

156°. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1-a^2}, \text{ якщо } a = \frac{2}{3}; \\ 2) \frac{2y+6}{y^2-4} - \frac{3}{y-2}, \text{ якщо } y = -3. \end{array}$$

157°. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{7}{3+a} + \frac{7a}{9-a^2}, \text{ якщо } a = 2; \\ 2) \frac{y+8}{y^2-16} - \frac{2}{y-4}, \text{ якщо } y = -2. \end{array}$$

158. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x-1}{3} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{3}; & 3) \frac{x-y}{2x-3y} - \frac{2y-x}{2x-3y}; \\ 2) \frac{2a^2-3b^2}{5ab} - \frac{2b^2-3a^2}{5ab}; & 4) \frac{2x^2-3y^2}{3xy} - \frac{3y^2-x^2}{3xy}. \end{array}$$

159. Виконайте дії:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b}; & 6) \frac{a}{a^3+b^3} + \frac{b}{a^3+b^3}; \\ 2) \frac{q^3}{p-q} - \frac{p^3}{p-q}; & 7) \frac{c}{b^3-c^3} - \frac{b}{b^3-c^3}; \\ 3) \frac{2x^3}{x+y} - \frac{x^3-y^3}{x+y}; & 8) \frac{1}{x^3+8} + \frac{1+x}{x^3+8}; \\ 4) \frac{27}{x-3} - \frac{x^3}{x-3}; & 9) \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} - \frac{ab}{a^3+b^3}; \\ 5) \frac{8}{a-2} - \frac{a^3}{a-2}; & 10) \frac{c^2}{b^3-c^3} + \frac{bc+b^2}{b^3-c^3}. \end{array}$$

160. Виконайте дії:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{y-2}{5} + \frac{3+y}{5} + \frac{1-y}{5}; & 4) \frac{x}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3+y^3}; \\ 2) \frac{a^3}{a-c} - \frac{c^3}{a-c}; & 5) \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} - \frac{xy}{x^3+y^3}; \\ 3) \frac{64}{a-4} - \frac{a^3}{a-4}; & 6) \frac{y^2}{x^3-y^3} + \frac{xy+x^2}{x^3-y^3}. \end{array}$$

161. Спростіть вираз:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2}; & 5) \frac{125}{(x-5)^2} - \frac{x^3}{(x-5)^2}; \\
 &2) \frac{q^3}{(p-q)^2} - \frac{p^3}{(p-q)^2}; & 6) \frac{3}{(x+2)^3} + \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^3}; \\
 &3) \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2y^2}{(x+y)^2}; & 7) \frac{32-14x}{(x-3)^2} - \frac{26-12x}{(3-x)^2}; \\
 &4) \frac{4x^2}{(2x-y)^2} - \frac{y^2}{(y-2x)^2}; & 8) \frac{x^2+8y}{(x-4)(y+3)} + \frac{4(x+2y)}{(4-x)(3+y)}.
 \end{aligned}$$

162. Спростіть вираз:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{x^3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}; & 2) \frac{3a^2}{(a+b)^2} - \frac{3b^2}{(a+b)^2}.
 \end{aligned}$$

163. Спростіть вираз:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{3x-1}{2} + \frac{x-2}{6} - \frac{2x-3}{3}; & 3) \frac{x-y}{2xy-3y^2} - \frac{y-x}{3xy-2x^2}; \\
 &2) \frac{2a-3b}{5ab^2} - \frac{2b-3a}{5a^2b}; & 4) \frac{3y-x}{21x^2y^2} - \frac{5x-y}{35x^3y}.
 \end{aligned}$$

164. Спростіть вираз:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{y}{yx-x^2} - \frac{y}{yx+x^2}; & 4) \frac{1-t}{t^2-t} - \frac{t+1}{1-t^2}; \\
 &2) \frac{4x}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{xy-y^2}; & 5) \frac{a^2}{(a-3)^2} + \frac{a}{3-a}; \\
 &3) \frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3} + \frac{12}{a}; & 6) \frac{b+1}{(b-1)^2} + \frac{2}{1-b^2} - \frac{1}{b+1}.
 \end{aligned}$$

165. Виконайте дії:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{4y-2}{15} + \frac{3+3y}{25} + \frac{1-3y}{35}; & 3) \frac{1-t}{t^2-t} - \frac{t+1}{1-t^2}; \\
 &2) \frac{y}{xy-x^2} + \frac{x}{xy-y^2}; & 4) \frac{4}{t^2-9} - \frac{2}{t^2+3t}.
 \end{aligned}$$

166. Подайте у вигляді раціонального дробу:

$$\begin{aligned}
 &1) x + \frac{1}{x}; & 3) \frac{1}{x^2} + 4x; & 5) \frac{4-2a}{a} - 2a; \\
 &2) 3x + \frac{3}{x}; & 4) \frac{7}{y} - y^2; & 6) \frac{b}{7-b} - 9b;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &7) 5a - \frac{10a^2}{2a-1}; & 8) \frac{2c}{c-5} - 2c - 1; & 9) 1 + \frac{-x+x^2}{2x-1} - x.
 \end{aligned}$$

167. Подайте у вигляді раціонального дробу:

$$\begin{aligned}
 &1) 2x + \frac{1}{x}; & 2) \frac{4}{y^2} - y^2; & 3) 1 - \frac{6b}{b^2+9}; & 4) \frac{3x}{3-x} - x.
 \end{aligned}$$

168. Побудуйте графік функції:

$$\begin{aligned}
 &1) y = \frac{x^3-2x^2}{x^2+1} - \frac{2-x}{x^2+1}; & 2) y = \frac{3x+4}{5x-10} - \frac{x+4}{3x-6}.
 \end{aligned}$$

169. Побудуйте графік функції:

$$y = \frac{4x-5}{7x-21} - \frac{x-1}{2x-6}.$$

170. Знайдіть значення виразу:

$$\begin{aligned}
 &1) 1 + \frac{x^3-y}{x^2} - x, \text{ якщо } x = 0,4, y = -0,05; \\
 &2) \frac{1}{8a-b} - \frac{1}{8a+b}, \text{ якщо } a = 0,4, b = 8.
 \end{aligned}$$

171. Знайдіть значення виразу:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{5m+7}{5m} - \frac{m^2-1}{m^2} + 2, \text{ якщо } m = -0,2.
 \end{aligned}$$

172. Виконайте дії:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{x}{x-4} - \frac{x^2-4}{x^2-6x+8}; & 2) \frac{x}{2x+1} + \frac{6}{x-4} - \frac{8x+6}{2x^2-7x-4}.
 \end{aligned}$$

173. Виконайте дії:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{3}{x-4} - \frac{3x}{(x-4)(x+3)}; & 2) \frac{2}{x+1} + \frac{6-x}{x-4} - \frac{7x-x^2}{x^2-3x-4}.
 \end{aligned}$$

174*. Знайдіть такі значення a і b , за яких виконується рівність:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{1}{x^2-16} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{4-x}; & 2) \frac{3}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} - \frac{bx+2}{x^2+x+1}.
 \end{aligned}$$

175*. Доведіть, що значення виразу $\frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x^3+3}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1}$ не залежить від значень змінної x на її ОДЗ.176*. Доведіть, що значення виразу $\frac{3y^2+3y}{2(y-1)^2} - \frac{9y+6}{2(y-1)^2} + \frac{9}{2(y-1)^2}$ не залежить від значень змінної y на її ОДЗ.

177*. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)};$$

$$2) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

178*. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}.$$

Проявіть компетентність

179. Сашко й Наталка на уроці математики одержали індивідуальне завдання — знайти компоненти дій із двома раціональними дробами. Заповніть таблицю 8, якщо відомо, що діти виконали його правильно.

Таблиця 8

Учні	Дріб 1	Дріб 2	Сума	Різниця
Сашко	$\frac{a}{a+1}$		$\frac{2a+1}{a+1}$	
Наталка		$\frac{b-1}{b+1}$	$\frac{3b}{b+1}$	

180. Олена й Сергій на уроці математики одержали індивідуальне завдання — знайти компоненти дій із двома раціональними дробами. Заповніть таблицю 9, якщо відомо, що діти виконали його правильно.

Таблиця 9

Учні	Дріб 1	Дріб 2	Сума	Різниця
Сергій	$\frac{2}{x+3}$			$\frac{4x-1}{x(x+3)}$
Олена		$\frac{-1}{y+1}$		$\frac{y+2}{y^2-1}$

§ 5. МНОЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

1. Множення раціональних дробів

Ситуація. Ірина пояснювала своєму молодшому братові, як помножити звичайні дроби. Для цього потрібно перемножити чисельники і знаменники даних дробів відповідно. Денис замислився, чи діє таке правило для множення раціональних дробів.



qr.orioncentr.com.ua/5BJIX



Чи справді таке правило діє для множення раціональних дробів?

Так. Порівняймо їх (табл. 10).



Таблиця 10

	Звичайні дроби	Раціональні дроби
Записуємо добуток чисельників і знаменників дробів відповідно	$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} =$	$\frac{2x}{3y} \cdot \frac{3y^2}{4x^2} = \frac{2x \cdot 3y^2}{3y \cdot 4x^2} =$
Скорочуємо дріб і виконуємо множення	$= \frac{5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{6} \cdot 4} = \frac{5}{8}$	$= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot y^{\cancel{2}}}{\cancel{3} \cdot y \cdot \cancel{4} \cdot x^2} = \frac{1 \cdot y}{1 \cdot 2x} = \frac{y}{2x}$



Щоб знайти добуток двох раціональних дробів, потрібно:

- 1) знайти добуток знаменників даних дробів і записати його в знаменнику добутку;
- 2) знайти добуток чисельників даних дробів і записати його в чисельнику добутку.



Коротко це записують так: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$

✓ Для множення раціональних дробів справджуються такі закони:

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} = \frac{B}{D} \cdot \frac{A}{C} \text{ — переставний закон множення;}$$

$$\left(\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D}\right) \cdot \frac{K}{N} = \frac{A}{C} \cdot \left(\frac{B}{D} \cdot \frac{K}{N}\right) \text{ — сполучний закон множення;}$$

$$\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{D}\right) \cdot \frac{K}{N} = \frac{A}{C} \cdot \frac{K}{N} + \frac{B}{D} \cdot \frac{K}{N} \text{ — розподільний закон множення відносно додавання.}$$

2. Піднесення раціонального дробу до степеня з натуральним показником

qr.orioncentr.com.ua/9F68w



Як раціональний дріб піднести до степеня з натуральним показником?

Аналогічно до дії зі звичайними дробами.



Зокрема, основу степеня множать саму на себе стільки разів, скільки вказує показник степеня n :

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_n = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^n}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_n} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Запам'ятайте!

Щоб піднести раціональний дріб до степеня з натуральним показником n , можна піднести до цього степеня чисельник і знаменник даного дробу.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$



Якщо показник степеня дорівнює 1, то:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}.$$

Задача Виконайте дії: 1) $\left(\frac{3x}{4y}\right)^3$; 2) $\left(-\frac{2a}{5b}\right)^4$.

Розв'язання

$$1. \left(\frac{3x}{4y}\right)^3 = \frac{(3x)^3}{(4y)^3} = \frac{27x^3}{64y^3}. \quad 2. \left(-\frac{2a}{5b}\right)^4 = (-1)^4 \cdot \frac{(2a)^4}{(5b)^4} = \frac{16a^4}{625b^4}.$$

Дізнайтеся більше

«Двоповерховий» запис звичайного дробу використовувався ще давньогрецькими математиками, хоча знаменник у них записувався над чисельником, а риски дробу не було. Індійські математики перемістили чисельник наверх, а потім уже через арабських математиків такий запис перейняли і в Європі. Дробову риску вперше в Європі ввів Леонардо Пізанський (1202 р.), але в ужиток вона увійшла лише за підтримки Йоганна Відмана (1489 р.).

Сучасний запис показника степеня введений Р. Декартом у його «Геометрії» (1637 р.), правда, лише для степенів з натуральним показником, більшим за 2. Пізніше І. Ньютон поширив цю форму запису на від'ємні та дробові показники (1676 р.), трактування яких до того часу вже пропонували С. Стевін, Дж. Волліс і А. Жирар.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/bMeQL

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
множення раціональ- них дробів	multiplying rational fractions	Multipli- cation rationaler Brüchen	multipli- cation des fractions rationnelles

Пригадайте головне

- Сформулюйте правило множення двох раціональних дробів.
- Як піднести раціональний дріб до степеня з натуральним показником?

Усне тренування

- Обчисліть $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, якщо $a = 5$, $b = -3$.

2. Із формули виразіть змінну a через інші змінні:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; \quad y = \frac{ab^2}{2c}; \quad y = \frac{2(a-b)}{c^2}.$$

3. Оберіть пари дробів, добуток яких дорівнює 1:

$$3\frac{1}{2}; \frac{2x}{y}; \frac{2}{7}; \frac{a-b}{a+b}; \frac{(x-2)(x+2)}{x^2-10x}; \frac{2x(x-10)}{2x^2-8}; \frac{a+b}{a-b}; \frac{y}{2x}.$$

Розв'яжіть задачі

181°. Чи правильно, що добутком дробів $\frac{2x}{3}$ і $\frac{5}{3y}$ є дріб:

1) $\frac{10x}{3y}$; 2) $\frac{10x}{9y}$; 3) $\frac{6xy}{15}$; 4) $\frac{2x+5}{3+3y}$?

182°. Чи правильно, що $\left(\frac{a^3}{5}\right)^3$ дорівнює:

1) $\frac{a^6}{15}$; 2) $\frac{a^9}{15}$; 3) $\frac{a^6}{10}$; 4) $\frac{a^9}{125}$?

183°. Виконайте множення:

1) $\frac{x}{8} \cdot \frac{a}{5}$; 6) $\frac{3x}{4y} \cdot \frac{b}{4c}$; 11) $\frac{3b}{5y} \cdot \frac{10a}{9b}$;
 2) $\frac{3}{y} \cdot \frac{4}{c}$; 7) $\frac{3x}{5y} \cdot \frac{2a}{6c}$; 12) $\frac{3x}{5a} \cdot \frac{2a^2}{3b}$;
 3) $\frac{x}{2y} \cdot \frac{a}{2c}$; 8) $\frac{15a}{16b} \cdot \frac{4x}{5y}$;
 4) $\frac{5a}{b} \cdot \frac{3x}{y}$; 9) $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{4y^2}{5b}$;
 5) $\frac{3x}{7y} \cdot \frac{2a}{5b}$; 10) $\frac{3x}{7y} \cdot \frac{14a}{5x}$;



qr.orioncentr.com.ua/w1wXx

184°. Виконайте множення:

1) $\frac{5}{a} \cdot \frac{y}{3}$; 2) $\frac{5x}{6a} \cdot \frac{y}{3b}$; 3) $\frac{2x}{3b} \cdot \frac{4y}{5x^3}$; 4) $\frac{3x}{5a^4} \cdot \frac{2a^2}{15b}$.

185°. Знайдіть добуток дробів:

1) $\frac{x+1}{3}$ і $\frac{6}{(x+1)^2}$; 3) $\frac{2a+1}{8}$ і $\frac{16}{2+4a}$;
 2) $\frac{5y-5}{7}$ і $\frac{21}{y-1}$; 4) $\frac{1-b}{5}$ і $\frac{20}{(b-1)^2}$;

5) $\frac{3-6y}{14}$ і $\frac{35}{2y-1}$; 6) $\frac{1-3x}{12}$ і $\frac{16}{6x-2}$.

186°. Знайдіть добуток дробів:

1) $\frac{y+3}{4}$ і $\frac{20}{(y+3)^2}$; 2) $\frac{3x+2}{15}$ і $\frac{25}{6+9x}$.

187°. Спростіть вираз:

1) $\frac{x}{8} \cdot x$; 3) $\frac{6a}{b^3} \cdot 2b^2$; 5) $\frac{6x}{15} \cdot 12x^4$;
 2) $\frac{5}{y} \cdot 6$; 4) $\frac{3}{7y} \cdot (-14y^2)$; 6) $-4y^3 \cdot \frac{5}{18y^4}$.

188°. Виконайте множення виразів:

1) $x - 3$ і $\frac{11}{x-3}$; 5) $3a + 1$ і $\frac{5}{2+6a}$;
 2) $3x + 2$ і $-\frac{2}{2+3x}$; 6) $ax - a$ і $\frac{2}{x-1}$;
 3) $2a - 1$ і $\frac{5}{1-2a}$; 7) $ax + 2a$ і $\frac{a}{x+2}$;
 4) $2x - 2$ і $\frac{6}{x-1}$; 8) $3b - ab$ і $\frac{3}{2a-6}$.

189°. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{9a^2} \cdot 18$; 3) $\frac{2}{15x} \cdot (-24x^3)$; 5) $(3b-12) \cdot \frac{4}{4-b}$;
 2) $\frac{2}{7b} \cdot 28b^2$; 4) $(a+2) \cdot \frac{9}{2+a}$; 6) $(a-4a^2) \cdot \left(-\frac{5}{4a-1}\right)$.

190°. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{x^2}{6}\right)^2$; 4) $\left(\frac{5a}{b^2}\right)^3$; 7) $\left(-\frac{x^3}{8y^5}\right)^2$;
 2) $\left(\frac{3}{y}\right)^3$; 5) $\left(\frac{2a^2}{3}\right)^3$; 8) $\left(-\frac{a^5}{6b^4}\right)^3$;
 3) $\left(\frac{x}{2y}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3a^2}{4b^4}\right)^3$;



qr.orioncentr.com.ua/Se8ng

191°. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{a^3}{4}\right)^2$; 2) $\left(\frac{7}{c^2}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{5a}{b^3}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{3a^6}{b^3}\right)^3$.

192*. Запишіть вираз у вигляді раціонального дробу:

$$1) \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2; \quad 3) \left(\frac{-m+3n}{2m-5n}\right)^2; \quad 4) \left(\frac{-x-2}{4-x^2}\right)^2.$$

193*. Запишіть вираз у вигляді раціонального дробу:

E $1) \left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{x+y}{x-3y}\right)^2; \quad 3) \left(\frac{3a-b}{-2a-5b}\right)^2; \quad 4) \left(\frac{5-y}{y^2-25}\right)^2.$

194*. Подайте у вигляді степеня дріб:

$$1) \frac{64a^6}{b^9}; \quad 2) \frac{a^5 y^{10}}{(a-1)^{15}}; \quad 3) \frac{125(a-b)^{21}}{a^6 b^9}; \quad 4) \frac{216(x-3y)^{18}}{512(x+2y)^{15}}.$$

195*. Подайте у вигляді степеня дріб:

E $1) \frac{27a^3}{b^6}; \quad 2) \frac{x^4 y^2}{(x-y)^6}; \quad 3) \frac{32(m+n)^5}{m^5 n^{10}}; \quad 4) \frac{16(a-2b)^{20}}{625(2a-5b)^{16}}.$

196*. Скоротіть дріб і піднесіть до степеня:

$$1) \left(\frac{x-y}{x^2-y^2}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{a+1}{a^2+2a+1}\right)^2; \quad 3) \left(\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}\right)^2.$$

197*. До якого степеня треба піднести дріб А, щоб отримати дріб В, якщо:

$$1) A = \frac{2xy^2}{5}; \quad B = \frac{8x^3 y^6}{125}; \quad 2) A = \frac{0,3a^2}{b^6 c^3}; \quad B = \frac{0,0081a^8}{b^{24} c^{12}}.$$

198*. Сторона квадрата дорівнює $3ab$. Чому дорівнює площа:

$$1) \frac{1}{6} \text{ квадрата}; \quad 2) \frac{2}{9} \text{ квадрата}; \quad 3) \frac{11}{36} \text{ квадрата?}$$

199*. Сторона квадрата дорівнює $5xy$. Чому дорівнює площа:

E $1) \frac{1}{15} \text{ квадрата}; \quad 2) \frac{2}{25} \text{ квадрата}; \quad 3) 0,15 \text{ квадрата?}$

200*. Запишіть замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

$$1) \frac{2a^3}{5} \cdot \frac{*}{8a^2} = \frac{3ab}{20}; \quad 2) \frac{6y^4}{*} \cdot \frac{8}{15y^3} = \frac{4}{5xy}.$$

201*. Запишіть замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

E $1) \frac{4x}{7} \cdot \frac{*}{8a^2} = \frac{3ax}{2}; \quad 2) \frac{5c^3}{*} \cdot \frac{9}{35c^5} = \frac{3}{14c^2 x}.$

202. Спростіть вираз:

$$1) \frac{9cx^3}{16ab} \cdot \frac{2ab^2}{cxy} \cdot \frac{4by^2}{3ax^2}; \quad 4) \frac{x^2+xy}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^3-y^3}{xy(x+y)};$$

$$2) \frac{x^2 y^2 - 4y^2}{4xy} \cdot \frac{x^2 y}{2xy - x^2 y}; \quad 5) \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x-y};$$

$$3) \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2ab + b^2}; \quad 6) \frac{x^2 + y^2 - xy}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{x^3 + y^3}.$$

203. Спростіть вираз:

E $1) \frac{14a^2 b^2}{5xy} \cdot \frac{10x^2 y^3}{21a^2 b^3} \cdot \frac{3b^2}{4y}; \quad 2) \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^3 - y^3}{xy + x^2 + y^2}.$

204. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{2x}{1-3y} + \frac{2x}{3y+1}\right) \cdot \left(\frac{9y^2+1-6y}{4x^2}\right);$$

$$2) \left(\frac{y^2-x^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{m+n}{x-y} - \frac{x}{n-m}\right) \cdot \frac{m-n}{2y}.$$

205. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{2x^2 y^3}{a^3 b^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3a^2 b}{4xy^2}\right)^3 \cdot \frac{16b^2}{9x}; \quad 2) \left(\frac{5abc}{3xyz}\right)^3 \cdot \frac{9xyz^2}{25ac^2}.$$

206. Спростіть вираз:

E $1) \left(\frac{1+a}{a^2-ab} - \frac{1-b}{b^2-ab}\right) \cdot \frac{a^2 b - ab^2}{a+b}; \quad 2) \left(\frac{3(x^2 y)^3}{(3ac^2)^2}\right)^2 \cdot \frac{a^3 c^4}{15x^3 y^4}.$

207*. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{x+5}{5x-1} + \frac{x+5}{x+1}\right) \cdot \frac{1-5x}{x^2+5x} + \frac{x^2+5}{x+1};$$

$$2) \left(\frac{a-3}{7a-4} - \frac{a-3}{a-4}\right) \cdot \frac{7a-4}{9a-3a^2} + \frac{a^2-14}{4-a}.$$

208*. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{y^2-xy}{x+y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{x+y}{xy-y^2}\right) + \frac{x}{x+y};$$

$$2) \frac{x^3-y^3}{2y} \cdot \left(\frac{2y}{4-2y-2x+xy} + \frac{2xy+4y}{(x-y)(x^2-4)}\right).$$

209*. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінної x на її ОДЗ:

$$1) \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{4x^2 - 1} \cdot \frac{2x^2 + x}{x^3 + 8} - \frac{x + 2}{2x^2 - x} \right) \cdot \frac{x^2 + 2x}{4} - \frac{x + 4}{3 - 6x};$$

$$2) \left(\frac{x + 5}{x^2 - 81} + \frac{x + 7}{x^2 - 18x + 81} \right) \cdot \left(\frac{x - 9}{x + 3} \right)^2 + \frac{x + 7}{x + 9}.$$

Проявіть компетентність

210. Учитель на дошці записав розв'язання кількох прикладів. Сергій випадково витер частину записів. Відновіть утрачені записи.

$$1) \frac{x^2 y^2}{c^2 - d^2} \cdot \frac{c - d}{(c - d)(\quad)xy^3} = \frac{x}{y(\quad)};$$

$$2) \frac{3a^2 b^3}{5x^3 y^4} \cdot \left(\frac{5xy}{3ab} \right)^2 = \frac{3a^2 b^3}{5x^3 y^4} \cdot \frac{25}{9} = \frac{3a^2 b^3}{5x^3 y^4} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \dots$$

§ 6. ДІЛЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

1. Раціональний дріб, обернений до даного дробу

Ситуація. Сашко пригадав правило ділення звичайних дробів: щоб поділити звичайні дробы, потрібно ділене помножити на дріб, обернений до дільника.



qr.orioncentr.com.ua/pM2hl



Чи можна таке саме правило застосувати, щоб поділити один раціональний дріб на інший?

Так.



З доведенням можна ознайомитись, перейшовши за посиланням.



qr.orioncentr.com.ua/JKQTK

Запам'ятайте!

Щоб знайти частку двох раціональних дробів, потрібно ділене помножити на дріб, обернений до дільника.



Коротко це записують так:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$



Раціональні дробы $\frac{C}{D}$ і $\frac{D}{C}$ називають *взаємно оберненими*. Їх добуток дорівнює числу 1.

Задача Виконайте ділення:

$$1) \frac{3x^2 y^3}{4ab^4} : \frac{9xy^3}{10ab^2}; \quad 2) (x-1) : \frac{x^2-1}{3x}; \quad 3) \frac{x+2}{5x^2} : (x^2+2x).$$

Розв'язання

1. Застосовуємо правило ділення раціональних дробів:

$$\frac{3x^2 y^3}{4ab^4} : \frac{9xy^3}{10ab^2} = \frac{3x^2 y^3}{4ab^4} \cdot \frac{10ab^2}{9xy^3} = \frac{3x^2 y^3 \cdot 10ab^2}{4ab^4 \cdot 9xy^3}.$$

Скорочуємо одержаний дріб:

$$\frac{\overset{1}{3} \overset{2}{x^2} \overset{3}{y^3} \cdot \overset{5}{10} \overset{4}{a} \overset{2}{b^2}}{\overset{4}{4} \overset{4}{a} \overset{4}{b^4} \cdot \overset{9}{9} \overset{3}{x} \overset{3}{y^3}} = \frac{x \cdot 5}{2b^2 \cdot 3} = \frac{5x}{6b^2}.$$

2. Подаємо ділене $(x-1)$ як дріб: $\frac{x-1}{1}$.

Застосовуємо правило ділення раціональних дробів:

$$(x-1) : \frac{x^2-1}{3x} = \frac{x-1}{1} \cdot \frac{3x}{x^2-1} = \frac{(x-1) \cdot 3x}{x^2-1}.$$

Скорочуємо одержаний дріб:

$$\frac{(x-1) \cdot 3x}{x^2-1} = \frac{3x \cdot \cancel{(x-1)}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{3x}{x+1}.$$

3. Подаємо дільник $x^2 + 2x$ як дріб $\frac{x^2 + 2x}{1}$.

Знаходимо дріб, обернений до нього: $\frac{1}{x^2 + 2x}$.

Виконуємо ділення даних дробів:

$$\frac{x+2}{5x^2} : (x^2 + 2x) = \frac{x+2}{5x^2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{x+2}{5x^2 \cdot (x^2 + 2x)}.$$

Скорочуємо одержаний дріб:

$$\frac{x+2}{5x^2 \cdot (x^2 + 2x)} = \frac{x+2}{5x^2 \cdot x \cdot (x+2)} = \frac{1}{5x^3}.$$

Дізнайтеся більше

Ланцюговий дріб — це математичний вираз виду:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

де a_0 — ціле число, а решта a_i є натуральними числами.

Ланцюгові дроби знаходили своє застосування ще в античні часи, зокрема для розв'язування лінійних рівнянь із двома змінними. Вони фактично були застосовані італійським математиком Бомбеллі в 1572 році для обчислення значень квадратних коренів.

Ланцюгові дроби можуть бути скінченними і нескінченними. Число можна подати як скінченний ланцюговий дріб тоді й тільки тоді, коли воно є раціональним.

За допомогою ланцюгового дроби можна виразити довжину року:

$$1 \text{ рік} = 365,2421988\dots \text{ днів} = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

Звідси одержуємо послідовність дробів: 365 ; $365\frac{1}{4}$; $365\frac{7}{29}$; $365\frac{8}{33}$; $365\frac{31}{128}$, ...

Дріб $365\frac{1}{4}$ показує, що за 4 роки набігає один «зайвий» день.

Календар, складений у такий спосіб, називають юліанським календарем.

Дріб $365\frac{8}{33}$ показує, що за 33 роки набігає 8 «зайвих» днів.

Такий календар був запропонований у 1079 р. персидським математиком і поетом Омаром Хаямом.

Якщо ж довжину року подати дробом $365\frac{31}{128}$, то одержимо досить точний календар, відповідно

до якого середня тривалість року лише на 1 с буде перевищувати справжню.

За григоріанський календарем, який діє з 4 жовтня 1582 р. і донині, середня тривалість року становить 365,2425 днів або 365 днів 5 годин 49 хвилин і 12 секунд. Україна користується цим календарем з 1918 р.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/giG4a

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ділення раціональ- них дробів	dividing rational fractions	Division rationalen Brücher	division des fractions rationnelles

Пригадайте головне

1. Як знайти раціональний дріб, обернений до даного?
2. Сформулюйте правило ділення раціональних дробів.

Усне тренування

1. Обчисліть: $\frac{3}{7} : \frac{6}{7}$; $\frac{2}{5} : \frac{5}{8}$; $\frac{8}{25} : \frac{5}{8}$; $\frac{7}{15} : 5$; $4 : \frac{1}{2}$.

2. Обчисліть: $1 : 5\frac{1}{6}$; $9\frac{3}{5} : \frac{5}{9}$; $1\frac{7}{11} : 3\frac{3}{11}$.

3. Знайдіть дріб, обернений до даного:

$\frac{1}{ab}$; $\frac{2x}{y^2}$; $(x+1)$; $\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)^2$.

Розв'яжіть задачі

211*. Чи правильно, що часткою дробів $\frac{2x}{3}$ і $\frac{3}{2y}$ є дріб:

- 1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{4xy}{9}$; 3) $\frac{9}{4xy}$; 4) $\frac{y}{x}$?

212*. Виконайте ділення:



- 1) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$; 6) $\frac{1}{3xy} : \frac{5}{9x}$;
 2) $\frac{2}{x} : \frac{2}{y}$; 7) $\frac{1}{5x} : \frac{2}{15xy}$;
 3) $\frac{1}{2x} : \frac{1}{2y}$; 8) $\frac{7}{2ab} : \frac{14}{4a}$;
 4) $\frac{1}{2x} : \frac{2}{y}$; 9) $\frac{6x}{5} : \frac{12y}{25}$; 11) $\frac{3x}{8y} : \frac{21}{40xy}$;
 5) $\frac{2x}{3} : \frac{2y}{5}$; 10) $\frac{7}{3a} : \frac{28}{9b}$; 12) $\frac{9}{2ab} : \frac{63}{16b}$.



qr.orioncentr.com.ua/ONNBv

213*. Виконайте ділення:

- 1) $\frac{1}{a^2b} : \frac{1}{ab^2}$; 3) $\frac{4x^3}{5} : \frac{8x^4}{3}$; 5) $\frac{5x^3y}{2} : \frac{15x^2y^2}{8}$;
 2) $\frac{1}{xy} : \frac{2}{y^3}$; 4) $\frac{3}{2a^3b} : \frac{9}{4a^2b^2}$; 6) $\frac{4x^4}{9y} : \frac{16x^2}{3y^2}$.

214*. Виконайте ділення:



- 1) $\frac{6x}{5} : \frac{3y}{2}$; 3) $\frac{1}{5a} : \frac{3}{35ab}$; 5) $\frac{1}{a^3b^3} : \frac{1}{a^2b^2}$;
 2) $\frac{1}{3x} : \frac{5}{12x}$; 4) $\frac{7a}{2b} : \frac{14a}{5}$; 6) $\frac{6x^2y^4}{7} : \frac{18xy^5}{35}$.

215*. Знайдіть частку дробів:



- 1) $\frac{x+1}{3} : \frac{x+1}{15}$; 5) $\frac{3-6y}{14} : \frac{2y-1}{42}$;
 2) $\frac{5y-5}{7} : \frac{y-1}{28}$; 6) $\frac{1-3x}{18} : \frac{9x-3}{42}$;
 3) $\frac{2a+1}{8} : \frac{4a+2}{16}$;
 4) $\frac{1-b}{5} : \frac{(b-1)^2}{25}$;



qr.orioncentr.com.ua/jbZEU

216*. Знайдіть частку дробів:



- 1) $\frac{y+3}{4} : \frac{y+3}{36}$; 2) $\frac{3x+1}{15} : \frac{3+9x}{35}$; 3) $\frac{2-5y}{10} : \frac{15y-6}{50}$.

217*. Виконайте ділення:



- 1) $\frac{x}{5} : x$; 6) $\frac{3}{y} : 3y$;
 2) $\frac{12}{y} : 6$; 7) $\frac{5}{2x^2} : x^2$;
 3) $\frac{3x^2}{4y^3} : x^2$; 8) $\frac{6}{b^2} : 3b^2$;
 4) $\frac{6a^3}{b^2} : 3a^2$; 9) $\frac{3y}{7} : (-y)$; 11) $\frac{6}{7x} : (-12x)$;
 5) $x : \frac{5}{x}$; 10) $\frac{24x^3}{25} : (-4x)$; 12) $-4y^3 : \frac{5y^2}{16}$.



qr.orioncentr.com.ua/Zkkrp

218*. Виконайте ділення:

- 1) $(x-3) : \frac{x-3}{9}$; 3) $(2x-2) : \frac{x-1}{8}$; 5) $(ax+2a) : \frac{x+2}{2a}$;
 2) $(3x-1) : \frac{3x-1}{3}$; 4) $(3a+1) : \frac{3+9a}{2}$; 6) $(3b-ab) : \frac{2a-6}{2b}$.

219*. Виконайте ділення:



- 1) $\frac{9a^2}{2} : 18$; 3) $\frac{36x^2}{5} : (-24x^3)$; 5) $(3b-12) : \frac{4-b}{3}$;
 2) $\frac{14b}{3} : 28b^2$; 4) $(a+2) : \frac{4+2a}{3}$; 6) $(a-4a^2) : \frac{4a-1}{a}$.

220*. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P . Знайдіть сторону трикутника, якщо:

- 1) $P = 9a$; 2) $P = 15a$; 3) $P = 51a$; 4) $P = 66a$.

221*. Периметр квадрата дорівнює P . Знайдіть сторону квадрата, якщо:

- 1) $P = 4a$; 2) $P = 3a$; 3) $P = 32a$; 4) $P = 56a$.

222*. Периметр квадрата дорівнює P . Знайдіть сторону квадрата, якщо:



- 1) $P = 8b$; 2) $P = 9b$; 3) $P = 36b$; 4) $P = 52b$.

223*. Одна група, рухаючись із середньою швидкістю v км/год, пододала 18 км, а інша — проходила за 1 год на 0,5 км більше і пройшла 21 км. У скільки разів час

руху першої групи туристів більший, ніж час руху другої групи? Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.

224°. Ірина купила x пачок морозива, а Микола — на 2 пачки більше, заплативши втричі більше, аніж Ірина. У скільки разів ціна морозива, що купив Микола, більша за ціну морозива, купленого Іриною? Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.

225°. Запишіть замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

$$1) \frac{3a^2}{5b^3} : \frac{*}{10b^2} = \frac{2a}{3b}; \quad 2) \frac{4xy}{5c} : \frac{*}{15c^2} = \frac{3c}{4}.$$

226°. Запишіть замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

$$1) \frac{2a^3}{7b^2} : \frac{8a^2}{*} = \frac{ab}{4}; \quad 2) \frac{5x^2y^2}{8} : \frac{*}{24} = \frac{3xy}{5}.$$

227°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{12x^2y}{a^4} \cdot \frac{a}{xy^2} \cdot \frac{6x^2}{a^2y}; \quad 3) \frac{ab^3}{x} : \frac{25b^2}{a} : \frac{a^3}{35x};$$

$$2) x^3y^2 : \frac{15}{x^4} \cdot \frac{5}{y^3}; \quad 4) \frac{3}{2} \left(\frac{m}{n} \right)^2 \cdot \left(-\frac{10m}{3n} \right) : (-15mn).$$

228°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{4x-y}{2x^2+2xy} : \frac{xy-4x^2}{8x^2-8y^2}; \quad 3) \frac{9(c-d)^2}{cd^2+d^3} : \frac{3d^2-3c^2}{d^4};$$

$$2) \frac{10b^2-10ab}{9a^2+9ad} : \frac{5ab}{3d^2+3ad}; \quad 4) \frac{8(x-2)^2}{9(x-1)} : \frac{(4-2x)^3}{(3-3x)^2}.$$

229°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16a^2b^2}{5xy} : \frac{12ab^3}{25x^2y^3} \cdot \frac{3a^2}{4y}; \quad 2) \frac{x^2+y^2+2xy}{x^3-y^3} : \frac{x^2-y^2}{xy+x^2+y^2}.$$

230°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x^3+y^3}{x-y} : \frac{x+y}{x^3-y^3}; \quad 2) \frac{a^2+ab}{a^2+b^2} : \frac{a^2+2ab+b^2}{a^4-b^4}.$$

231°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2-2xy} : \frac{y+x}{(x-y)^2}; \quad 2) \frac{a^2+b^2-ab}{x^2-y^2} : \frac{a^3+b^3}{x^2+y^2-2xy}.$$

232°. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{b}{a-b} + \frac{a}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \right) : \frac{a^4-b^4}{a^2b^2};$$

$$2) \left(m^2 - n^2 - \frac{4m^2n-4mn^2}{m+n} \right) : \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2} \right).$$

233°. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінної x на її ОДЗ:

$$1) \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 + 3 \right) : \left(\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 3 \right) : \frac{x^3+1}{x^3-1} - \frac{2x}{x-1};$$

$$2) \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} + \frac{4x^2}{x^2-1} \right) : \left(\frac{2-2x}{x^2} + 2 - \frac{2}{x^3+x^2} \right).$$

Проявіть компетентність

234°. Сергійко потрапив під дощ і намочив зошит з алгебри. Частину записів у зошиті неможливо прочитати. Відновіть утрачені записи.

$$\frac{x^4-16}{x^2-4x+4} : \frac{x^3+8}{x-2} = \frac{(x^2-4)(\quad)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{(x+2)(\quad)} =$$

$$= \frac{(x-2)^2(x+2)(x^2+4)}{(x-2)^2(x+2)(\quad)} = \frac{x^2+4}{*}.$$

§ 7. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Що таке раціональне рівняння?

Ситуація. Група велосипедистів на поїздку з міста А до міста В і назад витратила загалом 4 год 15 хв. Відстань між цими містами — 36 км. З якою швидкістю рухалися велосипедисти з міста А до міста В, якщо на зворотному шляху вони їхали зі швидкістю, на 2 км/год меншою?



qr.orioncentr.com.ua/B7OJT



Як математично описати ситуацію?

Скласти рівняння як її математичну модель.



Нехай x км/год — швидкість руху велосипедистів з міста А до міста В. Складемо скорочений запис ситуації (табл. 11).

Таблиця 11

	Відстань (км)	Швидкість (км/год)	Час (год)
З міста А до міста В	36	x	$\frac{36}{x}$
З міста В до міста А	36	$x - 2$	$\frac{36}{x - 2}$

Складемо рівняння:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x - 2} = 4,25.$$



Яка особливість такого рівняння?

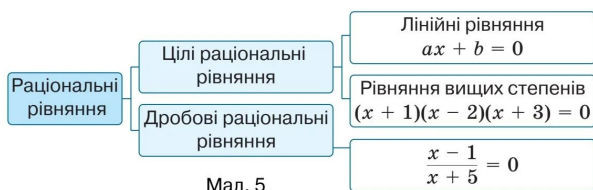
Обидві його частини — раціональні вирази.



Запам'ятайте!

Рівняння називається **раціональним**, якщо обидві його частини — раціональні вирази.

Раціональні рівняння так само, як і раціональні вирази, поділяють на цілі та дробові (мал. 5). Один із видів цілих раціональних рівнянь — це лінійні рівняння.



Мал. 5

2. Цілі раціональні рівняння

Задача 1 Розв'яжіть рівняння: $x(x - 1)(x + 3) = 0$.

Розв'язання Добуток кількох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один із цих множників дорівнює нулю. Тому з даного рівняння одержуємо:

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad \text{або } x - 1 = 0, & \quad \text{або } x + 3 = 0, \\ \text{звідси } x = 0, & \quad \text{або } x = 1, & \quad \text{або } x = -3. \end{aligned}$$

Отже, коренями рівняння є числа: $-3, 0$ і 1 .



Щоб розв'язати ціле раціональне рівняння виду $P(x) \cdot \dots \cdot Q(x) = 0$, де $P(x), \dots, Q(x)$ — деякі многочлени:

1) прирівняйте кожний множник до нуля:

$$P(x) = 0, \dots, Q(x) = 0;$$

2) розв'яжіть отримані рівняння.

3. Дробові раціональні рівняння

Запам'ятайте!

Раціональне рівняння називається **дробовим раціональним рівнянням**, якщо принаймні одна з його частин містить дробовий вираз.

Наприклад, рівняння $\frac{x - 3}{5x} = 0$, $x - 3 = \frac{5}{x}$, $\frac{x - 3}{4} = \frac{1}{5x}$, $\frac{5}{x} - \frac{3}{x - 2} = 1$ є дробовими раціональними рівняннями.

Пригадайте, що рівняння, які мають одні й ті самі корені, називають **рівносильними**. Розглянемо приклади (табл. 12).

Таблиця 12

Рівняння 1	Рівняння 2	Корені рівняння 1	Корені рівняння 2	Чи рівносильні рівняння?
$\frac{5}{x} = 1$	$\frac{5 - x}{x} = 0$	5	5	Рівняння є рівносильними
$\frac{x(x - 5)}{x} = 0$	$x(x - 5) = 0$	5	0 і 5	Рівняння не є рівносильними

У парі рівнянь $\frac{x(x-5)}{x} = 0$ і $x(x-5) = 0$ множина коренів другого рівняння включає в себе множину коренів першого рівняння. Тому говорять, що друге рівняння є *рівнянням-наслідком* для першого рівняння. Корінь 0 рівняння $x(x-5) = 0$ є *стороннім коренем* для рівняння $\frac{x(x-5)}{x} = 0$.

✓ Сторонні корені рівняння можуть з'являтися внаслідок нетотожних перетворень рівнянь, зокрема коли відбувається «розширення» ОДЗ змінних.

Як розв'язати дробове раціональне рівняння?

Діємо за правилом.

✓ Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, треба:

1) визначити ОДЗ змінної рівняння;

2) звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ —

деякі многочлени;

3) розв'язати рівняння-наслідок $P(x) = 0$;

4) перевірити, чи належать знайдені корені до ОДЗ змінної початкового рівняння.

Задача 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+1} = \frac{12}{(x+1)(x-3)}$.

Розв'язання

1. Знаходимо ОДЗ змінної рівняння:

x — будь-яке число, крім -1 і 3 .

2. Переносимо дріб із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком:

$$\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+1} - \frac{12}{(x+1)(x-3)} = 0.$$



qr.orioncentr.com.ua/4QSB5

3. Зводимо дроб до спільного знаменника й виконуємо дії:

$$\frac{x(x+1) - 4(x-3) - 12}{(x+1)(x-3)} = 0.$$

4. Прирівнюємо до нуля чисельник цього дробу й отримуємо рівняння-наслідок:

$$x \cdot (x+1) - 4 \cdot (x-3) - 12 = 0.$$

5. Розв'язуємо рівняння-наслідок:

$$x^2 + x - 4x + 12 - 12 = 0,$$

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x-3) = 0,$$

$$x = 0 \text{ або } x = 3.$$

6. Перевіряємо, чи належать знайдені корені до ОДЗ змінної рівняння:

число 0 належить до ОДЗ змінної рівняння,

число 3 не належить до ОДЗ змінної рівняння;

Відповідь: 0.

✓ Деякі дробові раціональні рівняння можна розв'язувати, застосовуючи основну властивість пропорції, а саме:

$$\text{якщо } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ то } A \cdot D = B \cdot C.$$

Задача 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{1-x} = \frac{5}{3}$.

Розв'язання ОДЗ: x — будь-яке число, крім 1.

Застосовавши основну властивість пропорції, одержимо:

$$3x = 5(1-x), \quad 3x = 5 - 5x,$$

$$3x + 5x = 5, \quad 8x = 5,$$

$$x = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Число 0,625 належить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому є коренем цього рівняння.

Отже, $x = 0,625$.

Дізнайтеся більше

Відомо, що стародавні вчені володіли деякими загальними прийомами розв'язування задач із невідомими величинами. Проте в жодному папірусі давніх єгиптян чи на глиняній табличці з Вавилону, у давніших грецьких артефактах не надано опису цих прийомів. Винятком є «Арифметика» давньогрецького математика Діофанта Александрійського (III ст.), що містить збірку задач на складання рівнянь із систематичним описом їх розв'язування.



Діофант

Проте першим посібником із розв'язування задач, який набув широкої популярності, стала праця багдадського вченого IX ст. Мухаммеда бен Муси аль-Хорезмі — «Книга про відновлення та протиставлення», відома під назвою «Алгебра». Ця праця аль-Хорезмі стала початком становлення науки про розв'язування рівнянь. У його книзі невідомі величини та всі дії, що супроводжували розв'язування, описувалися словесно. Такий стиль викладу, характерний для раннього етапу розвитку алгебри, вчені назвали риторичним.



аль-Хорезмі

І лише в XVI ст. французький математик Франсуа Вієт першим серед вчених увів буквені позначення для коефіцієнтів рівнянь і невідомих величин. А традицією позначати невідомі величини останніми буквами латинського алфавіту (x , y або z) ми завдячуємо співвітчизнику Вієта — відомому французькому математику Рене Декарту.



Франсуа Вієт

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/A6Y9r

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
дробово-раціональне рівняння	fractional-rational equation	bruch-rationale Gleichung	équation rationnelle fractionnaire

Пригадайте головне

1. Які рівняння називаються раціональними?
2. За якої умови добуток дорівнює нулю?
3. Які рівняння називаються дробовими раціональними?
4. Які рівняння називають рівносильними?
5. Що таке рівняння-наслідок?
6. За якої умови дріб дорівнює нулю?
7. Як розв'язати рівняння, застосувавши основну властивість пропорції?

Усне тренування

1. Знайдіть ОДЗ змінної виразу: $\frac{x-2}{2x}$; $\frac{x-2}{2}$; $\frac{x}{x(x-2)}$.
2. За яких значень змінної значення дробу дорівнює 0: $\frac{5x-1}{x-1}$; $\frac{5x-5}{x-1}$; $\frac{x^2-1}{x-1}$; $\frac{4x^2-1}{x}$; $\frac{4x^2-4x}{x}$.
3. Замініть дріб цілим виразом: $\frac{x^2-14x+49}{x-7}$; $\frac{3x^2-18x+27}{15x-45}$; $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$; $\frac{x^3-125}{x-5}$.

Розв'яжіть задачі

235*. Чи є рівняння дробовим раціональним:

- 1) $0,01x - 1 = 5$; 3) $\frac{x-3}{x} - \frac{x}{x-3} = 0$;
- 2) $3x^2 - 4 = 8x + 5$; 4) $\frac{x-1}{3} = 4$?

236*. Чи правильно застосовано основну властивість до пропорції $\frac{3}{x} = \frac{y}{c}$:

- 1) $3y = xc$; 2) $3x = yc$; 3) $3c = xy$; 4) $3 + c = x + y$?

237*. Розв'яжіть рівняння:



- 1) $x(x-4) = 0$;
- 2) $x(1-3x) = 0$;
- 3) $(x+1)(x-4) = 0$;
- 4) $(x+2)(5x-1) = 0$;
- 5) $x^2 - 6x = 0$;
- 6) $x^2 + 5x = 0$;
- 7) $x^2 - 4 = 0$;
- 8) $50 - 2x^2 = 0$.


qr.orioncentr.com.ua/3nz3Q

238°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $x(6-2x)=0$; 2) $x^2+7x=0$; 3) $(5-x)(x-4)=0$; 4) $2x^2-72=0$.

239°. Визначте ОДЗ змінної x рівняння:

1) $(x-2)(x+3)=0$; 2) $\frac{x-1}{7}=0$; 3) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x}=1$;
4) $(x-2)(x-6)=5$; 5) $\frac{3}{x-1}=0$; 6) $\frac{x-2}{3}+\frac{x-5}{4}=x$.

240°. Визначте ОДЗ змінної x рівняння:

E 1) $\frac{x^2-1}{25}=0$; 2) $\frac{1}{x-3}=0$; 3) $\frac{5}{x+5}+\frac{4}{x-4}=2$; 4) $\frac{(x+1)^3}{x+1}=1$.

241°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{2x}{x+1}=0$; 2) $\frac{x^2}{x^2+1}=0$;
3) $\frac{x-3}{2x}=0$; 4) $\frac{x^2-1}{3x}=0$;
5) $\frac{x-2}{x+2}=0$; 6) $\frac{3x^3}{x+3}=0$;
7) $\frac{x+3}{x-3}=0$; 8) $\frac{x-5}{5x}=0$.



qr.orioncentr.com.ua/WYIMZ5

242°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x^2+x}=0$; 2) $\frac{5x^3}{x^3+5x^2}=0$; 3) $\frac{x-4}{4x-x^2}=0$;
4) $\frac{x-3}{x^2-3x}=0$; 5) $\frac{x+5}{x^2+5x}=0$; 6) $\frac{1-3x}{3x^3-x^2}=0$.

243°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{2x}{x+1}=0$; 2) $\frac{x-4}{4x}=0$; 3) $\frac{x}{x^2-x}=0$; 4) $\frac{x+3}{x^2+3x}=0$.

244°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{x-1}{x^2-1}=0$; 2) $\frac{x+2}{x^2-4}=0$; 3) $\frac{2x+2}{x^2-1}=0$; 4) $\frac{3x-6}{x^2-4}=0$;
5) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$; 6) $\frac{x^2-16}{x-4}=0$;
7) $\frac{x^2-16}{3x+12}=0$;
8) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$.



qr.orioncentr.com.ua/jyQiw

245°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{x-3}{x^2-9}=0$; 2) $\frac{x^2-9}{4x+12}=0$.

246°. Чи має розв'язки рівняння:

1) $\frac{x^2+1}{x}=0$; 2) $x^2+\frac{1}{x^2}=0$; 3) $\frac{5}{x-1}=0$;
4) $\frac{x^2-1}{x}=0$; 5) $x+\frac{1}{x}=0$; 6) $\frac{5}{x-1}=1$?

Якщо так, то знайдіть їх.

247°. Застосуйте основну властивість пропорції та розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{x}=\frac{5}{7}$; 2) $\frac{3}{2x}=-\frac{4}{5}$; 3) $\frac{4}{3x}=-\frac{8}{27}$; 4) $-\frac{5}{16x}=\frac{25}{32}$;
5) $\frac{x-1}{x}=\frac{3}{4}$; 6) $\frac{x-2}{2x}=\frac{2}{3}$;
7) $\frac{1+x}{2x}=\frac{5}{6}$; 8) $\frac{4-x}{5x}=\frac{9}{10}$; 9) $\frac{3+x}{3x}=\frac{4}{7}$; 10) $\frac{3-x}{3x}=\frac{8}{9}$;
11) $\frac{x}{3+x}=\frac{3}{5}$; 12) $\frac{-x}{2+x}=\frac{6}{11}$;
13) $\frac{x}{5+x}=\frac{2}{7}$; 14) $\frac{4x}{4-x}=\frac{5}{8}$; 15) $\frac{2x}{4-x}=-\frac{2}{7}$;
16) $-\frac{3x}{2-x}=\frac{4}{9}$; 17) $\frac{x-1}{2+x}=\frac{2}{3}$;
18) $\frac{2-x}{3-2x}=\frac{5}{7}$.

248°. Застосуйте основну властивість пропорції та розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{2}{3x}=\frac{8}{21}$; 2) $\frac{x-2}{4x}=\frac{5}{8}$; 3) $\frac{x}{4+x}=\frac{4}{5}$; 4) $\frac{x-2}{1+x}=\frac{3}{4}$;
5) $\frac{x-2}{5-x}=\frac{3}{5}$; 6) $\frac{2-3x}{3-x}=\frac{7}{8}$.

249°. Чи є рівносильними рівняння:

1) $\frac{x-1}{2}=2,5$ і $x-1=5$; 2) $\frac{2}{x-2}=2$ і $\frac{1}{2-x}=1$;
3) $\frac{4-x}{x-1}=0$ і $4-x=0$; 4) $\frac{x^2-3x}{3}=x$ і $\frac{x-3}{3}=1$;
5) $\frac{|x-1|}{3}=4$ і $|x-1|=12$;
6) $\frac{1}{5}|x|=2,2$ і $|x|=11$?

250. Запишіть рівняння, яке є рівносильним даному рівнянню:



$$1) \frac{x-2}{5} = 2; \quad 3) \frac{2}{3}(x-2) = \frac{4}{5}(x-1);$$

$$2) \frac{x-1}{x+1} = 1; \quad 4) \frac{1}{5}x - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}x.$$

251. Для кожної пари рівнянь визначте, чи є друге рівняння наслідком першого:

$$1) \frac{x}{3} = 1, \frac{x}{3} + 1 = 0; \quad 3) \frac{x-1}{x} = 1, \frac{-1}{x} = 0;$$

$$2) \frac{6}{2x-1} = 3, \frac{6}{2x-1} - 3 = 0; \quad 4) \frac{2x-1}{2x} = 1, \frac{2x-1+2x}{2x} = 0?$$

252. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x-1}{x^3-1} = 0; \quad 3) \frac{x^2-4}{3x+6} = 0; \quad 5) \frac{x^3-9x}{15-5x} = 0;$$

$$2) \frac{x+2}{x^3+8} = 0; \quad 4) \frac{2x+2}{x^3+1} = 0; \quad 6) \frac{3x^3-12x}{4-2x} = 0.$$

253. Розв'яжіть рівняння:



$$1) \frac{x+1}{x^3+1} = 0; \quad 2) \frac{x-4}{64-x^3} = 0; \quad 3) \frac{3x^2-3}{4x+4} = 0; \quad 4) \frac{2x^2-18}{9-3x} = 0.$$

254. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2x + \frac{3x^2+x}{3x^2+2} - 2 = 2x-1;$$

$$2) \frac{x+6}{x^2-6x} = \frac{x-36}{2x^2-72} + \frac{x-6}{2x^2+12x};$$

$$3) \frac{x}{4+x} - \frac{4+x}{x-4} = \frac{64}{16-x^2};$$

$$4) \frac{2}{x+3} - \frac{4}{x+1} = \frac{x-1}{(x+3)(x+1)}.$$

255. Розв'яжіть рівняння:



$$1) 4x + \frac{3x-5x^2}{5x^2+9} + 2 = 4x+1; \quad 3) \frac{x}{3-x} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{15}{x^2-9};$$

$$2) \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x+2} = \frac{2x}{x^2-x-6}; \quad 4) \frac{4}{2-x} + \frac{3}{x+1} = \frac{3x}{(x-2)(x+1)}.$$

256. Відстань між двома містами дорівнює 50 км. Із цих міст одночасно назустріч один одному виїхали велосипедист і мотоцикліст. Вони зустрілися на відстані

10 км від одного з міст. Знайдіть швидкості велосипедиста та мотоцикліста, якщо відомо, що швидкість мотоцикліста на 30 км/год більша за швидкість велосипедиста.

257. Знаменник даного дробу на 2 менший від чисельника. Якщо чисельник помножити на 2, а до знаменника додати 3, то одержимо число $1\frac{2}{3}$. Знайдіть даний дріб.

258. Чисельник даного дробу на 2 менший від знаменника. Якщо чисельник збільшити на 15, а знаменник — на 3, то одержимо число $1\frac{5}{6}$. Знайдіть даний дріб.

259. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

$$1) y = \frac{x^2}{x-1} \text{ і } y = \frac{3x}{1-x}; \quad 2) y = \frac{3x+4}{5x-10} \text{ і } y = \frac{x+4}{3x-6} + \frac{4}{15}.$$

260*. Значення виразу $\frac{7-5x}{x+3a}$ дорівнює -1 , якщо $x = 10$. Знайдіть значення цього виразу, якщо $x = 3$.

261*. Визначте, за яких значень параметра a рівняння $\frac{3x+1}{x+1} = a-2$ має корені.

262*. Визначте, за яких значень параметра a рівняння $\frac{(x+1)(x-2a)}{x+4} = 0$ має один корінь.

263*. *Задача Безу.* Одного разу чоловік купив коня, а через деякий час продав його за 24 пістолі. Під час продажу він втратив таке саме число відсотків, яке дорівнює початковій ціні коня. Скільки пістолів коштував кінь?

Проявіть компетентність

264. На кондитерській фабриці за зміну випікають 180 тортів. Перша бригада випікає за зміну 100 тортів, а друга — 80 тортів. Скільки тортів у середньому за 1 год випікає кожна бригада, якщо відомо, що перша бригада за 1 год випікає на 2 торти більше, ніж друга? Скільки годин триває зміна?

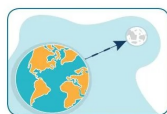
§ 8. ЩО ТАКЕ СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ.

1. Як компактно записати велике число

Ситуація. На уроці фізики Сергій дізнався, що під час дослідження навколишнього світу досить часто оперують величинами, числові значення яких містять велику кількість нулів. Наприклад:

400 000 000 м — це відстань від Землі до Місяця,

25 000 000 000 000 000 шт. — кількість молекул у кубічному сантиметрі повітря.



qr.orioncentr.com.ua/Q5c4t

Чи можна такі числа записати компактніше?

Так.

Для запису чисел з великою кількістю нулів наприкінці його запису зазвичай використовують степені з основою 10, наприклад:

$$400\,000\,000\text{ м} = 4 \cdot 10^8\text{ м};$$

$$25\,000\,000\,000\,000\,000\text{ шт.} = 25 \cdot 10^{18}\text{ шт.}$$

2. Як компактно записати мале число

Чи можна малі числа записати за допомогою степеня з основою 10?

Так.

Для цього використовують числа, обернені до степенів числа 10.

Домовилися, що число, обернене до числа 10, можна записати як степінь, у якого основа 10, а показник дорівнює -1 :

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}.$$

Дане число	Степінь з додатним показником	Обернене число	Степінь з від'ємним показником
10	10^1	$\frac{1}{10}$	10^{-1}
100	10^2	$\frac{1}{10^2}$	10^{-2}
1000	10^3	$\frac{1}{10^3}$	10^{-3}

Відтак довжину діаметра молекули води, що дорівнює 0,000000003 м, можна компактно записати так: $3 \cdot 10^{-10}$ м.



Наведені домовленості справедливі, якщо за основу степеня взяти будь-яке раціональне число, крім нуля.

Запам'ятайте!

Для будь-якого раціонального числа a ($a \neq 0$) і натурального числа n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Наведену рівність використовують як у прямому, так і в зворотному порядку.



Чому в означенні степеня із цілим від'ємним показником є обмеження $a \neq 0$?

Тому що на нуль ділити не можна.



Щоб піднести звичайний дріб до степеня із цілим від'ємним показником, можна скористатися такими формулами:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a, \quad a \neq 0,$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n, \quad a \neq 0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Задача Обчисліть: 1) 2^{-3} ; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$; 4) $0,2^{-3}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} 1) 2^{-3} &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; & 3) \left(\frac{3}{8}\right)^{-2} &= \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}; \\ 2) \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} &= 6^1 = 6; & 4) 0,2^{-3} &= \left(\frac{2}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125. \end{aligned}$$

 Щоб піднести десятковий дріб до степеня із цілим від'ємним показником, спочатку подайте його як звичайний дріб, а потім застосуйте відповідні правила.

3. Степінь із цілим показником

Що ж таке степінь із цілим показником?

Поміркуємо.

qr.orioncentr.com.ua/7Y1pM



Ви знаєте, що цілі числа утворюють **натуральні числа**, **протилежні до них числа** й число 0. Отже, у степенів із цілими показниками показники можуть бути й натуральними числами, і цілими від'ємними числами, і числом 0.

Перші два випадки ви докладно вивчили. Визначимо степінь із показником 0.

Запам'ятайте!

Для будь-якого раціонального числа a ($a \neq 0$):

$$a^0 = 1.$$

Наприклад, $25^0 = 1$, $(-25)^0 = 1$, $\left(\frac{1}{25}\right)^0 = 1$, $\left(-\frac{9}{25}\right)^0 = 1$.

 $0^n = 0$, якщо n — натуральне число.

 Вираз 0^{-n} (n — натуральне число) **не має змісту**.

Дізнайтеся більше

Є числа, які неймовірно великі, і числа, які неймовірно малі. Прикладом великого числа є гугол — це 10^{100} . Це одиниця зі ста нулями. На честь нього назвали пошукову систему «Google», яку в 1998 р. було створено студентами Стенфордського університету (США) Ларі Пейджем і Сергієм Брином. Ще більшим є число гугол-плекс — це $10^{10^{100}}$, тобто одиниця з гуголом нулів.

Прикладом малого числа є число з префіксом *атто* (скорочення «а»). Це число, помножене на 10^{-18} . Наприклад, аттосекунда: $1 \text{ ас} = 10^{-18} \text{ с}$, аттометр: $1 \text{ ам} = 10^{-18} \text{ м}$. Назва префікса походить від данського слова *atten* — вісімнадцять.

Найбільш уживані префікси до чисел подано в таблиці 13.

Таблиця 13

Префікс	У перекладі з грецької чи латини	Позначення	Множник	
тера	чудовисько	Т	1000 000 000 000	10^{12}
гіга	гігантський	Г	1 000 000 000	10^9
мега	великий	М	1 000 000	10^6
кіло	тисяча	к	1000	10^3
гекто	сто	г	100	10^2
дека	десять	да	10	10^1
деци	десята	д	0,1	10^{-1}
санти	сота	с	0,01	10^{-2}
мілі	тисячна	м	0,001	10^{-3}
мікро	малий	мк	0,000001	10^{-6}
нано	карлик	н	0,000000001	10^{-9}

Наприклад, $1000 \text{ м} = 1 \text{ км}$, $0,000000001 \text{ м} = 1 \text{ нм}$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/PKw3u

Українська	Англійська/English	Німецька/Deutsch	Французька/Français
ступінь з від'ємним показником	degree with a negative exponent	Grad mit negativem Exponenten	puissance avec un exposant négatif

Пригадайте головне

- Що означає — піднести до степеня із цілим від'ємним показником число a , що не дорівнює нулю?
- Як визначають степінь з показником 0?

Усне тренування

- Обчисліть:
 - $0,01 \cdot 0,0001 : (-100) \cdot 10\,000\,000$;
 - $0,0001 : 0,01 \cdot 10\,000 : 1\,000\,000$.
- Обчисліть:
 - $(3^2 + 4^2 + 5^2) : 10^2$;
 - $(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot 2^5$.

Розв'яжіть задачі

- Яка з формул є правильною:
 - $b^{-n} = -b^n$;
 - $b^{-n} = b^n$;
 - $b^{-n} = \frac{n}{b}$;
 - $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$?
- Яка з формул є правильною:
 - $x^{-1} = -x$;
 - $x^{-1} = x$;
 - $x^{-1} = -\frac{1}{x}$;
 - $x^{-1} = \frac{1}{x}$?
- Чи є правильною рівність:
 - $2^0 = 2$;
 - $2^0 = 1$;
 - $2^0 = 0$?
- Якими даними потрібно доповнити порожні клітинки таблиці 14?

Таблиця 14

Степінь	2^{-2}	7^0	$(-5)^3$	9^{-4}	
Основа степеня		-5	10	0,8	1
Показник степеня		-4	-3	0	-1

- Запишіть як степінь з від'ємним показником:
 - $\frac{1}{3}$;
 - $\frac{1}{10}$;
 - $\frac{1}{22}$;
 - $\frac{1}{451}$;
 - $\frac{1}{x}$;
 - $\frac{1}{c}$;
 - $\frac{1}{8}$;
 - $\frac{1}{17}$;
 - $\frac{1}{100}$;
 - $\frac{1}{m}$;
 - $\frac{1}{p}$;
 - $\frac{1}{k}$.
- Запишіть як степінь з від'ємним показником:
 - $\frac{1}{4}$;
 - $\frac{1}{25}$;
 - $\frac{1}{345}$;
 - $\frac{1}{1000}$;
 - $\frac{1}{b}$;
 - $\frac{1}{y}$.

- Запишіть як степінь з від'ємним показником:



- $\frac{1}{6^2}$;
- $\frac{1}{4^9}$;
- $\frac{1}{11^7}$;
- $\frac{1}{5^5}$;
- $\frac{1}{20^{10}}$;
- $\frac{1}{21^3}$;
- $\frac{1}{44^{22}}$;
- $\frac{1}{100^{20}}$;
- $\frac{1}{x^4}$;
- $\frac{1}{m^5}$;
- $\frac{1}{p^8}$;
- $\frac{1}{z^{11}}$;
- $\frac{1}{n^{15}}$;
- $\frac{1}{a^{40}}$;
- $\frac{1}{c^{120}}$;
- $\frac{1}{r^{200}}$.


qr.orioncentr.com.ua/2oPWL

- Запишіть як степінь з від'ємним показником:



- $\frac{1}{5^7}$;
- $\frac{1}{18^3}$;
- $\frac{1}{22^7}$;
- $\frac{1}{b^2}$;
- $\frac{1}{y^9}$;
- $\frac{1}{t^{14}}$.

- Запишіть дріб як вираз, що містить степінь з від'ємним показником:

- $\frac{4}{9^2}$;
- $\frac{7}{9^7}$;
- $\frac{4}{9 \cdot 11^7}$;
- $\frac{7}{x^5}$;
- $\frac{3}{y^2}$;
- $\frac{4}{m^{10}}$.

- Запишіть дріб як вираз, що містить степінь з від'ємним показником:

- $\frac{3}{4^{10}}$;
- $\frac{3}{x^3}$;
- $\frac{x}{8^7}$;
- $\frac{5}{b^2}$.

- Запишіть як степінь з основою 2:

- 8;
- 1;
- 2;
- $\frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{4}$;
- $\frac{1}{16}$;
- $\frac{1}{32}$;
- $\frac{1}{64}$.

- Запишіть числа $0,00001$, $\frac{1}{1000}$, $0,01$, $\frac{1}{10}$, 1 , 10 , 100 ,

 1000 , $1\,000\,000\,000$ як степінь з основою: 1) 10 ; 2) $\frac{1}{10}$.

- Запишіть як степінь з основою 3:

- 27;
- 1;
- 3;
- $\frac{1}{3}$;
- $\frac{1}{9}$;
- $\frac{1}{81}$.

- Якому з виразів дорівнює a^{-8} :

- $\frac{1}{a^{-8}}$;
- $\frac{1}{a^8}$;
- $-a^8$;
- $-8a$?

279°. Подайте степінь як дріб:

- 1)
- 4^{-1}
- ; 2)
- 7^{-1}
- ; 3)
- 2^{-1}
- ; 4)
- 21^{-1}
- ; 5)
- 20^{-1}
- ; 6)
- 123^{-1}
- .

280°. Подайте степінь як дріб:

- 1)
- 10^{-1}
- ; 2)
- 3^{-1}
- ; 3)
- 18^{-1}
- ; 4)
- 321^{-1}
- .

281°. Подайте степінь як дріб:

- 1)
- 4^{-4}
- ; 4)
- 5^{-7}
- ; 7)
- 21^{-5}
- ; 10)
- 80^{-13}
- ;
-
- 2)
- 7^{-3}
- ; 5)
- 10^{-9}
- ; 8)
- 45^{-7}
- ; 11)
- 90^{-20}
- ;
-
- 3)
- 2^{-5}
- ; 6)
- 11^{-3}
- ; 9)
- 54^{-9}
- ; 12)
- 100^{-10}
- .

282°. Подайте степінь як дріб:

- 1)
- 10^{-3}
- ; 2)
- 3^{-3}
- ; 3)
- 8^{-9}
- ; 4)
- 12^{-10}
- ; 5)
- 20^{-1}
- ; 6)
- 25^{-7}
- .

283°. Подайте степінь як дріб:

- 1)
- a^{-8}
- ; 3)
- m^{-5}
- ; 5)
- b^{-11}
- ; 7)
- p^{-20}
- ; 9)
- z^{-31}
- ;
-
- 2)
- c^{-3}
- ; 4)
- n^{-8}
- ; 6)
- x^{-15}
- ; 8)
- y^{-21}
- ; 10)
- t^{-55}
- .

284°. Подайте степінь як дріб:

- E**
- 1)
- a^{-4}
- ; 3)
- m^{-12}
- ; 5)
- b^{-80}
- ;
-
- 2)
- c^{-9}
- ; 4)
- n^{-56}
- ; 6)
- x^{-100}
- .

285°. Знайдіть a^{-1} , якщо a дорівнює:

- 1) 2; 3) 10; 5) 25; 7) 100;
-
- 2) -3; 4) 15; 6) -40; 8) -1000.

286°. Знайдіть m^{-1} , якщо m дорівнює:

- 1) 4; 2) 6; 3) -5; 4) 3; 5) 20; 6) 1000.

287°. Знайдіть a^{-2} , якщо a дорівнює:

- 1) 2; 3) 10; 5)
- $\frac{1}{5}$
- ; 7)
- $\frac{1}{10}$
- ; 9)
- $\frac{1}{100}$
- ;
-
- 2) 5; 4)
- $\frac{1}{2}$
- ; 6)
- $\frac{1}{6}$
- ; 8)
- $-\frac{1}{10}$
- ; 10)
- $-\frac{1}{100}$
- .

288°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- 1)
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$
- ; 3)
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$
- ; 5)
- $\left(-\frac{4}{11}\right)^{-9}$
- ; 7)
- $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-10}$
- ;
-
- 2)
- $\left(\frac{1}{7}\right)^{-5}$
- ; 4)
- $\left(\frac{1}{19}\right)^{-2}$
- ; 6)
- $\left(-\frac{1}{21}\right)^{-31}$
- ; 8)
- $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3}$
- .

289°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- E**
- 1)
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$
- ; 2)
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
- ; 3)
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-6}$
- ; 4)
- $\left(\frac{1}{10}\right)^{-8}$
- ; 5)
- $\left(\frac{1}{27}\right)^{-5}$
- .

290°. Обчисліть:

- 1)
- 1^{-2}
- ; 3)
- 1^0
- ; 5)
- 3^0
- ; 7)
- $1,7^0$
- ;
-
- 2)
- 1^{-15}
- ; 4)
- 1^{-100}
- ; 6)
- 1000^0
- ; 8)
- $\left(5\frac{4}{7}\right)^0$
- .

291°. Обчисліть:

- 1)
- $\frac{3}{5^{-2}}$
- ; 5)
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$
- ;

- 2)
- $\frac{5^{-1}}{3}$
- ; 6)
- $-\left(\frac{1}{31}\right)^{-1} + 2^5$
- ;

- 3)
- $4^0 - \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$
- ; 7)
- $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} + 10^{-1} + 10,01^0$
- ;

- 4)
- $\left(7\frac{1}{8}\right)^0 + \left(8\frac{1}{7}\right)^0$
- ; 8)
- $2^3 + 1^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$
- .

292°. Обчисліть:

- 1)
- $6^0 + 12^0$
- ; 3)
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$
- ;

- 2)
- $\left(5\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
- ; 4)
- $-\left(\frac{1}{14}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$
- .

293°. Порівняйте значення виразів:

- 1)
- 4^4
- і
- 4^0
- ; 3)
- 5^{-5}
- і
- $\frac{1}{5^{-5}}$
- ; 5)
- $\frac{1}{8^{-5}}$
- і
- 8^5
- ;
-
- 2)
- $(-4)^3$
- і
- 4^0
- ; 4)
- 3^{-4}
- і
- 10^0
- ; 6)
- 3^{-2}
- і
- 0^9
- .

294°. Порівняйте значення виразів:

- 1)
- 5^5
- і
- 5^0
- ; 3)
- 3^{-5}
- і
- $\frac{1}{3^{-5}}$
- ;

- 2)
- $(-7)^5$
- і
- 7^0
- ; 4)
- 9^{-6}
- і
- 100^0
- .

295°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

- 1)
- $(-8)^0$
- ; 3)
- $\left(\frac{1}{3}\right)^0$
- ; 5)
- $(-11)^{-6}$
- ; 7)
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-6}$
- ;

- 2)
- 10^0
- ; 4)
- $(-3)^5$
- ; 6)
- $(-4)^4$
- ; 8)
- $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$
- ?

296°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

- 1)
- 2^{-5}
- ; 2)
- 8^0
- ; 3)
- $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-6}$
- ; 4)
- $(-3)^3$
- ?

qr.orioncentr.com.ua/nNUCp

297. Знайдіть a^{-2} , якщо a дорівнює:

- 1) $1\frac{2}{3}$; 3) $-2\frac{1}{5}$; 5) 0,2; 7) 1,2;
2) $2\frac{1}{2}$; 4) $-3\frac{1}{8}$; 6) 0,05; 8) -1,2.

298. Обчисліть:

- 1) 2^{-6} ; 4) $0,1^{-2}$; 7) $(-3)^{-3}$; 10) $(-1,5)^{-3}$;
2) $(-1,1)^{-2}$; 5) $0,5^{-3}$; 8) 3^{-3} ; 11) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$;
3) $(-4)^{-2}$; 6) $(-2)^{-5}$; 9) $(-0,2)^{-3}$; 12) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$.

299. Обчисліть:

- E** 1) $0,4^{-3}$; 3) $(-0,1)^{-2}$; 5) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$;
2) $0,1^{-4}$; 4) $(-0,1)^{-5}$; 6) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

300. Запишіть як добуток степенів чисел:

- 1) $\frac{3}{5^2}$; 4) $\frac{6}{9^3 \cdot 11^5}$; 7) $\frac{10^4}{11^5 \cdot 12^8}$;
2) $\frac{7^2}{23^3}$; 5) $\frac{3^2}{14^3 \cdot 16^{31}}$; 8) $\frac{9^7 \cdot 6^{21}}{5^9 \cdot 7^{10}}$;
3) $\frac{4^{21}}{8^3 \cdot 9^{22}}$; 6) $\frac{8^5 \cdot 9^3}{5^{31}}$.

301. Запишіть як добуток степенів чисел:

- 1) $\frac{2}{9^7}$; 2) $\frac{6}{8^8}$; 3) $\frac{13^2 \cdot 15^7}{11^{10}}$; 4) $\frac{1}{3^8 \cdot 5^9 \cdot 8^{16}}$.

302. Запишіть у порядку збільшення числа:

$$0,2^2, 0,2^{-1}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}, 2^4, -5^6.$$

303. Обчисліть:

- 1) $5 \cdot 9^0 + (1,5)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} \cdot 2^{-4}$;
2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; 4) $-(-2,5)^{-2} \cdot \left(3\frac{1}{8}\right)^{-1}$.

304. Обчисліть:

E 1) $3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 1,2^{-1}$; 2) $5^2 \cdot 0,5^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

305*. Обчисліть:

- 1) $1^{-1} + (-1)^2 + 1^{-3} + (-1)^4 + \dots + 1^{-19} + (-1)^{20}$;
2) $(-1)^{-1} + (-1)^{-2} + \dots + (-1)^{-20}$.

306*. За якого цілого значення n виконується нерівність:

- 1) $(-7)^{-2} < 3^n < 0,5^{-3}$; 2) $0,2^{-2} \leq 5^{-2n} \leq 625^2$?

Проявіть компетентність

307. У таблиці 15 показано, як Сашко та Наталка спрощували вирази. Хто з дітей правильно виконав дії?

Таблиця 15

Сашко	Наталка
$\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{9}{125}$	$\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(1\frac{3}{2}\right)^3 = \left(2\frac{1}{2}\right)^3 = 8\frac{1}{8}$

308*. Запишіть за допомогою степеня з від'ємним показником подані величини в кілометрах:

- 1) 100 дм; 2) 10 см; 3) 1 мм; 4) 10 нм.

§ 9. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ ІЗ ЦІЛИМИ ПОКАЗНИКАМИ

1. Властивості степенів з однаковими основами

Ситуація. Катерина дізналася, що для виробництва йогурту використовують болгарську паличку — підвид молочнокислих бактерій. Ці бактерії мають розміри $5 \cdot 10^{-4}$ мм $\times$ $2 \cdot 10^{-3}$ мм (ширина і довжина). Катерина вирішила знайти наближену площу, яку займає ця бактерія, за формулою площі прямокутника:

$$5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}.$$

Але отриманий добуток її дещо спантеличив.



qr.orioncentr.com.ua/Wkjd0



Як знайти добуток степенів із показниками з різними знаками?

Поміркуємо.



Позбудемося від'ємних показників за означенням:

$$10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} = 10 \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{10^3} =$$

Подамо вираз як дріб:

$$= \frac{10}{10^4 \cdot 10^3} =$$

Виконаємо дії:

$$= \frac{10}{10^{4+3}} = \frac{10}{10^7} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}.$$



Чи можна діяти простіше?

$$10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} = 10^{1-4-3} = 10^{-6}.$$

Так.



Отже, бактерія займає площу 0,000001 мм².

Запам'ятайте!

Властивості степенів з однаковими основами

Для будь-якого раціонального числа a ($a \neq 0$) і будь-яких цілих чисел n і m :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^n : a^m = a^{n-m}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Спробуйте довести істинність цих формул самостійно.

Задача 1 Спростіть вираз:

$$1) b^{-12} \cdot b^{-8}; \quad 2) b^{-12} : b^{-8}; \quad 3) \frac{(a^5)^{-3} \cdot a^{-5}}{a^0 \cdot (a^{-2})^8}.$$

Розв'язання

$$1) b^{-12} \cdot b^{-8} = b^{-12+(-8)} = b^{-20}; \quad 2) b^{-12} : b^{-8} = b^{-12-(-8)} = b^{-4};$$

$$3) \frac{(a^5)^{-3} \cdot a^{-5}}{a^0 \cdot (a^{-2})^8} = \frac{a^{-15} \cdot a^{-5}}{1 \cdot a^{-16}} = \frac{a^{-20}}{a^{-16}} = a^{-20-(-16)} = a^{-4}.$$

2. Властивості степенів із різними основами й рівними показниками

qr.orioncentr.com.ua/v/3vK



Як діяти зі степенями з різними основами?

Спираючись на їхні властивості.



Запам'ятайте!

Властивості степенів із різними основами й рівними показниками

Для будь-яких раціональних чисел a і b ($a \neq 0, b \neq 0$) і будь-якого цілого числа n :

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Спробуйте довести істинність цих формул самостійно.

Задача 2 Обчисліть: 1) $24^2 \cdot 3^{-2} \cdot 4^{-2}$; 2) $\frac{36^{-3}}{9^{-3}}$; 3) $\frac{35^4 \cdot 90^{-2}}{63^3 \cdot 18^{-5}}$.

Розв'язання

$$1) 24^2 \cdot 3^{-2} \cdot 4^{-2} = (2 \cdot 12)^2 \cdot (3 \cdot 4)^{-2} = 2^2 \cdot 12^2 \cdot 12^{-2} = 2^2 \cdot 12^{2-2} = 2^2 \cdot 12^0 = 4 \cdot 1 = 4;$$

$$2) \frac{36^{-3}}{9^{-3}} = \left(\frac{36}{9}\right)^{-3} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64};$$

$$3) \frac{35^4 \cdot 90^{-2}}{63^3 \cdot 18^{-5}} = \frac{(7 \cdot 5)^4 \cdot (9 \cdot 5 \cdot 2)^{-2}}{(9 \cdot 7)^3 \cdot (9 \cdot 2)^{-5}} = \frac{7^4 \cdot 5^4 \cdot 9^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot 2^{-2}}{9^3 \cdot 7^3 \cdot 9^{-5} \cdot 2^{-5}} = 7^{4-3} \cdot 5^{4+(-2)} \cdot 9^{-2-3-(-5)} \cdot 2^{-2-(-5)} = 7 \cdot 5^2 \cdot 9^0 \cdot 2^3 = 7 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 8 = 1400.$$

3. Стандартний вигляд числа

Під час вивчення фізики, біології, хімії, астрономії досить часто оперують величинами, числові значення яких досить великі або досить малі.



qr.orioncentr.com.ua/ZME98

Як зазначалося, такі числа зручно записувати за допомогою степенів з основою 10. Однак для уніфікації записів чисел домовилися записувати їх у вигляді, що полегшує аналіз цих чисел, спрощує дії з ними. Число подають як добуток деякого числа, яке більше за число 1 або дорівнює йому, але менше від числа 10, і числа 10 у відповідному степені.

Наприклад:

$$5\,972\,600\,000\,000\,000\,000\,000\,000\text{ кг} = 5,9726 \cdot 10^{24}\text{ кг} —$$

маса земної кулі,

$0,0000000002 \text{ м} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ — діаметр спіралі ДНК.

Запам'ятайте!

**Стандартним виглядом числа називають
такий його запис:**

$a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$, n — ціле число.

Число n называют *порядком* числа.



У **цілій частині** числа, записаного в стандартному вигляді, стоїть **тільки одна цифра**.

Задача 3

Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 125; 2) 0,08; 3) $34,6 \cdot 10^5$.

Розв'язання

- 1) $125 = 1,25 \cdot 10^2$;
- 2) $0,08 = 8 \cdot 10^{-2}$;
- 3) $34,6 \cdot 10^5 = 3,46 \cdot 10^6$.



Виконуючи дії з числами, записаними в стандартному вигляді, використовуйте властивості степенів.

Задача 4

Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

1) $2,5 \cdot 10^{-3}$ і $2 \cdot 10^{-3}$; 2) $4,2 \cdot 10^4$ і $7 \cdot 10^3$.

Розв'язання

1. Дані числа мають однаковий порядок. Тоді:

$$2,5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} = (2,5 + 2) \cdot 10^{-3} = 4,5 \cdot 10^{-3};$$
$$2,5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = (2,5 - 2) \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4};$$
$$2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = (2,5 \cdot 2) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-3}) = 5 \cdot 10^{-6};$$
$$2,5 \cdot 10^{-3} : (2 \cdot 10^{-3}) = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,25 \cdot 10^0.$$

2. Дані числа мають різний порядок. Тоді:

- для знаходження суми/різниці запишемо усі степені з основою 10 так, щоб вони мали **той самий показник**:

Сума

$$\begin{aligned} & 4,2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = \\ & = 4,2 \cdot 10^4 + 0,7 \cdot 10^4 = \\ & = (4,2 + 0,7) \cdot 10^4 = \\ & = 4,9 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

- для знаходження добутку/частки скористаємося властивостями степенів з однаковими основами:

Добуток

$$\begin{aligned} & 4,2 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 10^3 = \\ & = (4,2 \cdot 7) \cdot (10^4 \cdot 10^3) = \\ & = 29,4 \cdot 10^7 = \\ & = 2,94 \cdot 10^8. \end{aligned}$$

Різниця

$$\begin{aligned} & 4,2 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^3 = \\ & = 4,2 \cdot 10^4 - 0,7 \cdot 10^4 = \\ & = (4,2 - 0,7) \cdot 10^4 = \\ & = 3,5 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

- для знаходження добутку/частки скористаємося властивостями степенів з однаковими основами:

Частка

$$\begin{aligned} & 4,2 \cdot 10^4 : (7 \cdot 10^3) = \\ &= \frac{4,2 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^3} = \\ &= 0,6 \cdot 10^1 = 6 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

Дізнайтеся більше

Нині швидкими темпами розвиваються нанотехнології. Звичні для нас властивості матеріалів змінюються при зменшенні їхніх геометричних розмірів до кількох нанометрів або часток нанометра. Один нанометр дорівнює одній мільйонній міліметра. Середня товщина людської волосини дорівнює 50 тис. нанометрів. Особливі надії на нанотехнології покладають фахівці в галузі електроніки та інформаційних технологій. У 1965 р. на одному чіпі можна було вмістити лише 30 транзисторів, у 1971 р. — 2000 транзисторів. Нині один чіп містить близько 40 млн транзисторів завбільшки 130–180 нанометрів. Ці результати зробили складну електроніку та комп'ютерну техніку доступною для більшості споживачів.



Словничок

ar.orioncentr.com.ua/vXIMZ

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
стандартний вигляд числа	the standard form of a number	die standardform einer Zahl	la forme standard d'un nombre

Пригадайте головне

- Сформулюйте властивість добутку степенів із рівними основами.
- Сформулюйте властивість частки степенів із рівними основами.
- Яка властивість піднесення степеня до степеня?
- Яка властивість добутку степенів із різними основами й рівними показниками?
- Сформулюйте властивість частки степенів із різними основами й рівними показниками.
- Як записати число в стандартному вигляді?

Усне тренування

- Подайте як степінь з основою 2:
1) $8 \cdot 16$; 2) $32 \cdot 4 \cdot 16$; 3) $8 \cdot 2 \cdot 64$.
- Подайте як степінь:
1) $x^{15} \cdot x^4 \cdot x^3$; 3) $(x^{10} x^5)^3 : (x^{10})^2$;
2) $(x^{13})^3 : (x x^3)^2$; 4) $(x^5 x^4 x^6)^2 : x^2$.
- Обчисліть:
1) $(0,2)^3 \cdot 5^3$; 2) $(25)^2 : 5^2$; 3) $\frac{27^3}{9^3}$; 4) $\frac{32^5}{8^5 \cdot 2^5}$.

Розв'яжіть задачі

- 309'.** Яка з формул є правильною:
1) $a^n \cdot a^m = a^{n-m}$; 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n \cdot a^m = 2a^{nm}$; 4) $a^n \cdot a^m = a^{nm}$?
- 310'.** Яка з формул є правильною:
1) $a^n + a^m = a^m + a^n$; 3) $a^n + a^m = a^n \cdot a^m$;
2) $a^n + a^m = a^n : a^m$; 4) $a^n + a^m = a^{nm}$?
- 311'.** Яка з формул є правильною:
1) $a^n : a^m = a(n-m)$; 3) $a^n : a^m = a^n : m$;
2) $a^n : a^m = \frac{m}{n}$; 4) $a^n : a^m = a^{n-m}$?
- 312'.** Яка з формул є правильною:
1) $a^{n-m} = a^n - a^m$; 3) $a^{n-m} = a^n : a^m$;
2) $a^{n-m} = a^n \cdot m$;
- 313'.** Яка з формул є правильною:
1) $(a^m)^n = a^{mn}$; 3) $(a^m)^n = a^{m+n}$;
2) $(a^m)^n = a^{m-n}$; 4) $(a^m)^n = a^m a^n$?

314'. Яка з формул є правильною:

- 1) $a^n \cdot b^n = (ab)^{2n}$; 3) $a^n \cdot b^n = a^n + b^n$;
2) $a^n \cdot b^n = ab^n$; 4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$?

315'. Яка з формул є правильною:

- 1) $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}$; 2) $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^n}{b}$; 3) $\frac{a^n}{b^n} = (a-b)^n$; 4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$?

316'. Яке із чисел записане в стандартному вигляді:

- 1) $1 \cdot 10^2$; 3) $1,09 \cdot 11^3$; 5) $3,1 \cdot 10^{-22}$;
2) $2,3 \cdot 10^4$; 4) $2,5 \cdot 10^5$; 6) $51 \cdot 10^8$?

317'. Яка з рівностей є правильною:

- 1) $5^{-3} \cdot 5^2 = 25^{-6}$; 3) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^1$;
2) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{-6}$; 4) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{-1}$?

318'. Обчисліть:

- 1) $2^{-4} \cdot 2^{-2}$; 4) $2^4 \cdot 2^2$; 7) $2^5 \cdot 2^{-11} \cdot 2^0$;
2) $2^4 \cdot 2^{-2}$; 5) $2^8 \cdot 2^{-3}$; 8) $2 \cdot 2^{13} \cdot 2^{-16}$;
3) $2^{-4} \cdot 2^2$; 6) $2^{-7} \cdot 2^3$; 9) $2 \cdot 2^{-5} \cdot 2^6 \cdot 2^0$.

319'. Обчисліть:

- E** 1) $10^{-5} \cdot 10^{-1}$; 3) $10^{-3} \cdot 10^5$; 5) $10^{35} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-25}$;
2) $10^3 \cdot 10^{-5}$; 4) $10^7 \cdot 10^{-6} \cdot 10^0$; 6) $10^0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 \cdot 10^6 \cdot 10$.

320'. Спростіть вираз:

- 1) $a^{-4} \cdot a^{-8}$; 5) $a^{-5} \cdot a^5$; 9) $a^0 \cdot a^3 \cdot a^{-10}$;
2) $a^4 \cdot a^{-8}$; 6) $a^{-12} \cdot a^6 \cdot a^{-1}$; 10) $a^{-8} \cdot a^9 \cdot a^{-3} \cdot a^2$;
3) $a^{-4} \cdot a^8$; 7) $a^5 \cdot a^{-6} \cdot a^{-9}$; 11) $a^{-15} \cdot a^9 \cdot a^{-1} \cdot a^{15}$;
4) $a^4 \cdot a^8$; 8) $a^{-7} \cdot a \cdot a^7$; 12) $a^{-10} \cdot a^0 \cdot a^{-6} \cdot a^{24}$.

321'. Спростіть вираз:

- 1) $x^{-3} \cdot x^{-10}$; 3) $x^{-3} \cdot x^{10}$; 5) $x^0 \cdot x \cdot x^{-1}$;
2) $x^3 \cdot x^{-10}$; 4) $x^3 \cdot x^{10}$; 6) $x^{-32} \cdot x^{-65} \cdot x^{42} \cdot x^{75}$.

322'. Запишіть як добуток степенів:

- 1) 10^{-1+m} ; 3) 8^{-4+m} ; 5) $5^{-p+1+(-n)}$;
2) $9^{-1+(-p)}$; 4) 6^{-m+n} ; 6) 10^{-2+3n} .

323'. Запишіть як добуток степенів:

- E** 1) 6^{-4+x} ; 3) 12^{-8+n} ;
2) $2^{7+(-x)}$; 4) $3^{-p+(-n)}$.

324'. Яка з рівностей є правильною:

- 1) $3^{-8} : 3^2 = 1^{-6}$; 3) $3^{-8} : 3^2 = 3^{-6}$;
2) $3^{-8} : 3^2 = 3^{-4}$; 4) $3^{-8} : 3^2 = 3^{-10}$?

325°. Обчисліть:

$$1) \frac{4^2}{4^{-1}}; \quad 3) \frac{4^{-1}}{4^3}; \quad 5) \frac{4^2}{4^{-2}}; \quad 7) \frac{4^{-2}}{4^{-2}}; \quad 9) \frac{4^{-5}}{4^{-8}};$$

$$2) \frac{4^{-2}}{4^{-3}}; \quad 4) \frac{4^2}{4^3}; \quad 6) \frac{4^{-2}}{4^2}; \quad 8) \frac{4}{4^{-2}}; \quad 10) \frac{4^2}{4^0}.$$

326°. Обчисліть:

$$1) \frac{2^3}{2^{-2}}; \quad 2) \frac{2^{-3}}{2^2}; \quad 3) \frac{2^3}{2^2}; \quad 4) \frac{2^{-3}}{2^{-2}}; \quad 5) \frac{2^{-2}}{2^{-2}}.$$

327°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a}{a^{-11}}; \quad 3) \frac{a^0}{a^{-7}}; \quad 5) \frac{a^6}{a^{-8}}; \quad 7) \frac{a^{-6}}{a^{-8}};$$

$$2) \frac{a^{-3}}{a}; \quad 4) \frac{a}{a^{14}}; \quad 6) \frac{a^{-6}}{a^{-8}}; \quad 8) \frac{a^6}{a^{-6}}.$$

328°. Спростіть вираз:

$$1) \frac{m^{10}}{m^{-2}}; \quad 2) \frac{m^{-10}}{m^{-2}}; \quad 3) \frac{m^{-10}}{m^2}; \quad 4) \frac{m^{-10}}{m^{10}}.$$

329°. Запишіть як частку степенів:

$$1) 3^{5-n}; \quad 4) 2^{-m-n}; \quad 7) 5^{3-n};$$

$$2) 11^{4-p}; \quad 5) 4^{-7-2n}; \quad 8) 9^{-3x-m};$$

$$3) 7^{-1-m}; \quad 6) 8^{-2-x}; \quad 9) 8^{-a-c}.$$

330°. Запишіть як степінь з основою 7:

$$1) \frac{7^{-7} \cdot 7^4}{7^{-9}}; \quad 3) \frac{7^{-1} \cdot 7^{12}}{7^{-4}}; \quad 5) \frac{7^{-8} \cdot 7^5}{7^{-4} \cdot 7^{-8}};$$

$$2) \frac{7^{-8} \cdot 7^{11}}{7^{10}}; \quad 4) \frac{7^{-3} \cdot 7^{12}}{7^{10} \cdot 7^{-8}}; \quad 6) \frac{7^{-16} \cdot 7^{15}}{7^9 \cdot 7^{-8}}.$$

331°. Запишіть як степінь з основою 8:

$$1) \frac{8^{-2} \cdot 8}{8^{-8}}; \quad 3) \frac{8^{-4} \cdot 8^{12}}{8^3}; \quad 5) \frac{8^{-8} \cdot 8^{-2}}{8 \cdot 8^{-5}};$$

$$2) \frac{8^{-5} \cdot 8^{15}}{8^{-10}}; \quad 4) \frac{8^{-10} \cdot 8^4}{8^{15} \cdot 8^{-12}}; \quad 6) \frac{8^{-6} \cdot 8^{13}}{8^7 \cdot 8^{-3}}.$$

332°. Спростіть вираз:

$$1) a^{-25} : a^{-12} \cdot a^{-12};$$

$$2) a^{40} \cdot a^{-30} : a^{10};$$

$$3) a^{-32} : a^2 : a^{-14};$$

$$4) a^0 : a : a^{-9} \cdot a^{11};$$

$$5) a : a^{-7} \cdot a^{-1} : a^5;$$

$$6) a \cdot a^{-5} : a^{-4} : a^8;$$

$$7) m^6 : m^{-13} \cdot m^{-7};$$

$$8) m^{-9} : m^2 \cdot m^{-2} : m^9.$$

qr.orioncentr.com.ua/BB4k5


333°. Яка з рівностей є правильною:

$$1) (4^{-3})^5 = 4^{-8}; \quad 3) (4^{-2})^{-5} = 4^7;$$

$$2) (4^{-3})^5 = 4^{-15}; \quad 4) (4^{-2})^{-5} = 4^{10}?$$

334°. Запишіть як степінь:

$$1) (5^{-5})^{10}; \quad 7) (a^{-6})^0; \quad 13) (a^2)^{-2};$$

$$2) (4^{-11})^{-4}; \quad 8) (a^0)^5; \quad 14) (a^{-10})^9;$$

$$3) (3^6)^{-7}; \quad 9) (a^6)^{-5}; \quad 15) (a^{-7})^{-5};$$

$$4) (7^{-4})^0; \quad 10) (a^{-6})^5; \quad 16) (a^{11})^{-2};$$

$$5) ((-1)^{-5})^{-10}; \quad 11) (a^{-6})^{-5}; \quad 17) (a^{-5})^{-20};$$

$$6) (0,75^9)^{-3}; \quad 12) (a^{-5})^5; \quad 18) (a^5)^{-20}.$$

335°. Запишіть як степінь:

$$1) (2^{-1})^8; \quad 4) (10^{-8})^0; \quad 7) (x^{11})^{-4};$$

$$2) (3^{-15})^{-2}; \quad 5) (x^{-9})^0; \quad 8) (x^{-8})^{-4};$$

$$3) (3^{15})^{-2}; \quad 6) (x^0)^9; \quad 9) (x^{-3})^3.$$

336°. Запишіть як степінь:

$$1) 4^{-3} \cdot 2^{-3}; \quad 8) x^{-5} : y^{-5};$$

$$2) 6^{-1} \cdot 3^{-1}; \quad 9) \frac{m^{-5}}{n^{-5}};$$

$$3) 4^{-3} : 2^{-3}; \quad 10) p^{-6} \cdot m^{-6} \cdot n^{-6};$$

$$4) 6^{-1} : 3^{-1}; \quad 11) a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^{-1};$$

$$5) 5^{-9} \cdot 2^{-9} \cdot 8^{-9}; \quad 12) 3^{-4} \cdot m^{-4} \cdot n^{-4};$$

$$6) 1^{-4} \cdot 4^{-4} \cdot 3^{-4}; \quad 13) \frac{x^{-5} y^{-5}}{z^{-5}}; \quad 15) \frac{x^{-2} y^{-2}}{z^{-2} h^{-2}};$$

$$7) b^{-12} \cdot a^{-12}; \quad 14) \frac{3^{-1}}{a^{-1} b^{-1}}; \quad 16) \frac{d^{-10} b^{-10}}{a^{-10} c^{-10}}.$$

qr.orioncentr.com.ua/TXY10


337°. Запишіть як степінь:

$$1) 7^{-7} \cdot 10^{-7}; \quad 3) 15^{-10} \cdot 3^{-10}; \quad 5) z^{-3} \cdot x^{-3} \cdot y^{-3};$$

$$2) 7^{-7} : 10^{-7}; \quad 4) 15^{-10} : 3^{-10}; \quad 6) \frac{a^{-7} c^{-7}}{x^{-7}}.$$

338°. Запишіть як степінь з основою 30:

$$1) 3^{-5} \cdot 10^{-5}; \quad 4) 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-3}; \quad 7) 15^{-4} \cdot 4^{-4} \cdot 2^{-4};$$

$$2) 6^{-9} \cdot 5^{-9}; \quad 5) 60^{-1} \cdot 2^{-1}; \quad 8) 40^{-11} \cdot 4^{-11} \cdot 3^{-11};$$

$$3) 2^{-6} \cdot 15^{-6}; \quad 6) 900^{-2} \cdot 30^{-2}; \quad 9) 120^{-3} \cdot 4^{-3} \cdot 17^0.$$

339°. Запишіть як степінь з основою 12:

$$1) 2^{-2} \cdot 6^{-2}; \quad 3) 2^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4}; \quad 5) 5^{-15} \cdot 24^{-15} : 10^{-15};$$

$$2) 3^{-10} \cdot 4^{-10}; \quad 4) 36^{-1} : 3^{-1}; \quad 6) 8^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 0,5^{-4}.$$

340°. Знайдіть x :

$$\begin{array}{ll}
 1) (-2 \cdot 9)^{-4} = x \cdot 9^{-4}; & 4) \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}}{x^{-4}}; \\
 2) (7 \cdot 10)^{-3} = 7^{-3} \cdot x; & 5) \left(\frac{1}{7}\right)^{-9} = \frac{1}{x^{-9}}; \\
 3) (5 \cdot 8 \cdot 12)^{-1} = x \cdot 8^{-1} \cdot 12^{-1}; & 6) \left(1\frac{1}{3}\right)^{-7} = \frac{x^{-7}}{3^{-7}}.
 \end{array}$$

341°. Знайдіть x :

E 1) $(4 \cdot 5)^{-3} = x \cdot 5^{-3}$; 3) $(2 \cdot 3 \cdot 4)^{-2} = x \cdot 2^{-2} \cdot 4^{-2}$;
 2) $(2 \cdot 15)^{-6} = 15^{-6} \cdot x$; 4) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-6} = \frac{x^{-6}}{8^{-6}}$.

342°. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 22;	9) 11,04;	17) $2300,02 \cdot 10^{-1}$;
2) 31;	10) 0,333;	18) $118,8 \cdot 10^{10}$;
3) 1008;	11) 20,407;	19) $0,32 \cdot 10^2$;
4) 700;	12) 0,0000012;	20) $0,00051 \cdot 10^3$;
5) 976;	13) $54 \cdot 10^2$;	21) $5072 \cdot 10^6$;
6) 17 000;	14) $54 \cdot 10^{-2}$;	22) $0,0074 \cdot 10^{-2}$;
7) 0,005;	15) $335\,000 \cdot 10^3$;	23) $0,003 \cdot 10^{10}$;
8) 0,45;	16) $87\,500 \cdot 10^{-4}$;	24) $0,00008 \cdot 10^3$.

343°. Запишіть у стандартному вигляді число:

E 1) 37; 6) 13,005; 11) $11\,500 \cdot 10^3$;
 2) 19; 7) 0,065; 12) $43\,000 \cdot 10^{-3}$;
 3) 207; 8) 0,000075; 13) $0,00027 \cdot 10^{-2}$;
 4) 0,02; 9) $91 \cdot 10^3$; 14) $0,00011 \cdot 10^3$;
 5) 0,38; 10) $482 \cdot 10^{-5}$; 15) $0,305 \cdot 10^{-2}$.

344°. Порівняйте числа:

1) $8 \cdot 10^{-5}$ і $1,1 \cdot 10^{-5}$;	3) $3,1 \cdot 10^{-2}$ і $1,2 \cdot 10^{-2}$;
2) $2,5 \cdot 10^8$ і $3 \cdot 10^8$;	4) $4,1 \cdot 10^{10}$ і $2 \cdot 10^{10}$;
5) $1,8 \cdot 10^{-15}$ і $1,5 \cdot 10^{-15}$;	6) $1,25 \cdot 10^9$ і $4 \cdot 10^9$.

Знайдіть суму і добуток чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

345°. Порівняйте числа:

E 1) $5 \cdot 10^{-7}$ і $1,2 \cdot 10^{-7}$; 2) $3,1 \cdot 10^4$ і $3 \cdot 10^4$.
 Знайдіть суму, різницю і добуток чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

346. Запишіть як степінь з основою 0,1:

1) 0,01; 2) 1; 3) 10; 4) 100; 5) 1000; 6) 10 000.

347. Запишіть як степінь з основою $\frac{1}{3}$:

E 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{81}$; 4) 1; 5) 3; 6) 27.

348. Обчисліть:

1) $\left(\left((5^{-1})^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$;	6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$;
2) $\left((9^{-2})^{-1}\right)^0$;	7) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6} : 7^7 \cdot 2^{-1}$;
3) $\left(\left((3^{-1})^2\right)^{-1}\right)^2$;	8) $-(1,2)^4 : \left(\frac{5}{6}\right)^5$;
4) $\left(\left((0,5^{-1})^2\right)^{-1}\right)^{-2}$;	9) $3 \cdot 0,75^{-1} : \left(\frac{1}{2}\right)^4$;
5) $3^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$;	10) $28^0 \cdot 0,5^{-3} + 0,2^3 \cdot 0,001^{-1}$.

349. Обчисліть:

1) $\left(\left((-1)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$;	3) $4^{-4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$;
2) $\left((2^{-1})^{-1}\right)^{-1}$;	4) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$.

350. Запишіть як степінь:

1) $(a^{-8})^n : (a^n)^{-1}$;	5) $(a^{-15}a^{-4})^3 : (a^{10}a^3)^{-2}$;
2) $(a^m)^{-n} \cdot (a^n)^p$;	6) $(a^{15}a^{-4})^3 \cdot (a^{-10}a^3)^2$;
3) $(a^{-15} : a^4)^{-3} \cdot (a^{10} : a^3)^{-2}$;	7) $(a^{-2+n})^{-n} \cdot a^{n(1-n)} : (-a)^{-2n}$;
4) $(a^{-15}a^4)^3 : (a^{10}a^{-3})^{-2}$;	8) $(a^{-n})^n \cdot a^{-(2+n)(2-n)} : a^{-4}$.

351. Знайдіть x , якщо:

1) $a^{-1}b^{24} = a^5b^{-8} \cdot x$;	4) $1,9^{21} = (1,9^{-3})^{-x}$;
2) $a^{-1}b^{-1} = x : ab$;	5) $(4,5)^{-20} = (4,5^{-x})^5$.
3) $a^{-7}b^{26} = x : b^{-16}$;	

352. Знайдіть x , якщо:

1) $a^2b^{-14} = a^{-14}b \cdot x$;	3) $3^{-36} = (3^{-x})^9$;
2) $b^{-50} = a^{-100}b^{100} : x$;	4) $6^{-14} = (6^x)^2$.

353. Подайте вираз 5^{-12} як степінь з основою:

- 1) 5^{-2} ; 2) 5^4 ; 3) 5^3 ; 4) 5^{-4} .

354. Подайте вираз a^{-12} як добуток двох степенів, один з яких дорівнює:

- 1) a^2 ; 2) a^{-6} ; 3) a^4 ; 4) a^{-3} ; 5) a^{-4} ; 6) a^6 .

355. Подайте вираз m^{24} як добуток двох степенів, один з яких дорівнює:

- 1) m^2 ; 2) m^{-6} ; 3) m^{12} ; 4) m^{-4} .

356. Запишіть як степінь з основою 2:

- 1) $8^{-5} \cdot 4^7$; 3) $(2^{-5})^3 \cdot (4^2)^{-3}$; 5) $0,5^{-25} : (4^{-1})^3$;
2) $64^5 \cdot 16^{-2}$; 4) $(16^5)^9 \cdot (8^{-2})^7$; 6) $0,25^{-6} : 32^{30}$.

357. Внесіть за дужки 2^{-5} :

- 1) $2^{-6} + 2^7$; 2) $2 - 2^{-5} + 2^{10}$; 3) $2^{-3} + 2^3 - 2^{-15} + 2^{15}$.

358. Внесіть за дужки 3^{-4} :

- 1) $3^{-12} + 3^{12}$; 2) $3 + 3^{-4} + 3^4$; 3) $3^{-5} + 3^5 - 3^{-1} + 3$.

359. Знайдіть x . Подайте відповідь у вигляді степеня.

- 1) $(0,1^{-8} : 25^4 \cdot 12,5^0)^{-1} = x \cdot 2^5$; 8) $24^{-13} = x \cdot 2^{-26} \cdot 3^{-13}$;
2) $(7 \cdot 9)^{-12} = (21^{-4})^3 \cdot x$; 9) $64^{-4} \cdot 4^{12} \cdot 16^{-2} \cdot x = 4^{-12} \cdot 16^5$;

- 3) $(-2 \cdot 15)^{-2} = 25^{-1} \cdot x$; 10) $x = \frac{27^{-5} \cdot 9^3}{81^{-2}}$;

- 4) $100^{-14} = 5^{-28} \cdot x$; 11) $(0,25x)^{10} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{-10}$;

- 5) $15^{-6} = x \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$; 12) $\left(\frac{7}{x}\right)^{-8} = \left(\frac{25}{49}\right)^8$;

- 6) $(0,6^{-5})^3 = \left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^5 \cdot x$; 13) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5x^3$;

- 7) $(0,4 \cdot 3)^{-8} \cdot 0,05^8 = x \cdot 6^{-8}$; 14) $x = \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3} - 0,75^3$.

360. Знайдіть x . Подайте відповідь у вигляді степеня.

- 1) $(15 \cdot 8 \cdot 40^0)^{-12} = x \cdot 100^{-6}$; 4) $3,6^{-10} = x \cdot 4^{-5} \cdot 9^{-10}$.

- 2) $(5 \cdot 8)^{-8} \cdot (0,2^{-2})^4 = x^{-1} \cdot 4^{-12}$; 5) $\left(1\frac{1}{6}\right)^{-4} = x \cdot 0,49^{-2}$;

- 3) $(0,375x)^6 = \left(2\frac{2}{3}\right)^{-6}$; 6) $x = \frac{25^4 \cdot 0,5^{-4}}{10^{-2} \cdot 8^0}$.

361. Порівняйте числа:

- 1) $3 \cdot 10^{-6}$ і $1,2 \cdot 10^{-4}$; 3) $0,48 \cdot 10^{-7}$ і $1,2 \cdot 10^{-9}$;
2) $0,18 \cdot 10^6$ і $0,2 \cdot 10^5$; 4) $65,5 \cdot 10^7$ і $0,5 \cdot 10^8$.

Знайдіть суму, добуток і частку поданих чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

362. Порівняйте числа:

- 1) $6 \cdot 10^{-8}$ і $1,2 \cdot 10^{-9}$; 3) $0,63 \cdot 10^{-11}$ і $2,1 \cdot 10^{-10}$;
2) $0,16 \cdot 10^4$ і $0,2 \cdot 10^6$; 4) $5,5 \cdot 10^{22}$ і $11 \cdot 10^{20}$.

Знайдіть суму, добуток і частку поданих чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

363*. Обчисліть:

- 1) $\frac{8^{-4} \cdot 6^{10} + 27^3}{10^0 \cdot 81^3 - 18^6 \cdot 6^{-3}} \cdot \left(\frac{7}{19}\right)^{-1}$; 2) $\frac{4^{-8} \cdot 0,0001^{-5} + 125^6 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2}{(0,2^{10})^{-2} + 3^{-2} \cdot 50^{10} \cdot 0,5^{12}}$.

364*. Внесіть за дужки 5^{-2} :

- 1) $5^{-2} + 15^4$; 3) $25^{-3} - 8 \cdot 5^{-2}$;
2) $2 \cdot 5^{-2} - 3 + 10^{-2}$; 4) $5^{-6} + 5^{-2} - 5^{-2+m}$.

365*. Спростіть вираз:

- 1) $\left((a^{-1} \cdot a)^{-1} \cdot a\right)^{-1} \cdot a$; 4) $\left((x^{-9} : x^{-1})^{-1} : x^7\right) : x^{10}$;
2) $\left((a^{-2} \cdot a^2)^{-5} \cdot a^2\right)^{-1}$; 5) $\left(\left((a^{-3})^{-1} \cdot b^3\right)^{-4} a^{12}\right)^2 \cdot b^{20}$;
3) $\left((x^3 \cdot x^{-7})^{-5} \cdot x^{-1}\right)^{10}$; 6) $\left(a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right)^{-1} : \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot b\right)^2$.

366*. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5^3 \cdot x^{-3} \cdot (-x)^3 = 0$; 3) $3^4 x^{-1} = \left(5\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 4^8$;

- 2) $3x^{-7} = 0$; 4) $5x^{-1} = \left(\frac{36^{-2} \cdot 2^3}{8,1^{-1}}\right)^2$;

- 5) $(0,25 - x^{-2}) \cdot \left(\left(\frac{1}{15}\right)^{-2} - 30^2 \cdot 0,5^2\right) = 0$;

- 6) $(10,24 - x^2) \cdot (4^{-3} - 8^{-2}) = 32^3$.

Проявіть компетентність

367. Довжина орбіти супутника, що рухається зі швидкістю $7,91 \cdot 10^3$ м/с навколо Землі, дорівнює 2 414 000 км. Запишіть числом у стандартному вигляді:

- 1) довжину орбіти супутника;
- 2) час, потрібний супутнику, щоб облетіти навколо Землі.

368. Заповніть таблицю 16. Запропонуйте власний мініпроект за відомостями, наведеними в таблиці 16.

Таблиця 16

Маса	Одиниця (т)	Одиниця (кг)	Одиниця (г)	Одиниця (мг)
Земля			$5,9726 \cdot 10^{24}$	
Сонце	$1,9891 \cdot 10^{27}$			
Протон		$1,67 \cdot 10^{-27}$		

§ 10. ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1. Піднесення раціонального виразу до степеня з цілим показником

Ситуація. Діти проводили дослідження індексу маси тіла (ІМТ) дорослих членів своєї родини. Цей показник був розроблений Ламбертом Адольфом Жекутом на початку XIX століття й став одним із способів оцінки здоров'я людини, яким користуються донині. Діти скористалися формулою: $ІМТ = \frac{m}{h^2}$, де m — маса тіла в кілограмах, а h — зріст у метрах.



Чи можна раціональний вираз у правій частині формули подати інакше?

Справді, $\frac{1}{h^2} = h^{-2}$, тому $ІМТ = mh^{-2}$.

Так.



qr.orioncentr.com.ua/6cB6T



Дію піднесення до степеня із цілим показником можна застосовувати не лише до окремої змінної, а й до раціонального виразу.

Запам'ятайте!

1. Якщо A — раціональний вираз ($A \neq 0$) і n — натуральне число, то:

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}.$$

2. Якщо A і B — раціональні вирази ($A \neq 0$, $B \neq 0$) і n — натуральне число, то:

$$\left(\frac{1}{A}\right)^{-1} = A,$$

$$\left(\frac{1}{A}\right)^{-n} = A^n,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A},$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n.$$

3. Якщо A — раціональний вираз ($A \neq 0$), то $(A)^0 = 1$.

Задача 1 Запишіть вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником:

$$1) \left(\frac{1}{2nm}\right)^{-1}; \quad 2) \left(\frac{x}{y+z}\right)^{-3}; \quad 3) \left(\frac{x^{-3} \cdot a^{-5}}{c^4 \cdot y^6}\right)^0.$$

Розв'язання

Застосуємо другу і третю з наведених властивостей піднесення раціонального виразу до степеня з цілим показником.

$$1) \left(\frac{1}{2nm}\right)^{-1} = 2nm.$$

$$2) \left(\frac{x}{y+z}\right)^{-3} = \left(\frac{y+z}{x}\right)^3 = \frac{(y+z)^3}{x^3}.$$

$$3) \left(\frac{x^{-3} \cdot a^{-5}}{c^4 \cdot y^6}\right)^0 = 1.$$



Піднесення раціональних виразів до степеня з цілим показником, як і виконання інших перетворень раціональних виразів, здійснюється на ОДЗ змінних даних виразів.

2. Інші властивості степенів із цілим показником для раціональних виразів

qr.orioncentr.com.ua/stdxU



Як діяти зі степенями раціональних виразів із однаковими основами?

Спираючись на їхні властивості.



Запам'ятайте!

Якщо A — раціональний вираз ($A \neq 0$) і n та m — цілі числа, то:

$$\begin{aligned} A^n \cdot A^m &= A^{n+m}, \\ A^n : A^m &= A^{n-m}, \\ (A^m)^n &= A^{mn}. \end{aligned}$$

Задача 2 Спростіть вираз: $\left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2}$.

Розв'язання

Перший спосіб.

Спростимо вираз у дужках:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2} &= \left(a^{-3-1}b^{2-(-2)}\right)^{-2} = \\ &= \left(a^{-4}b^4\right)^{-2} = a^8b^{-8}. \end{aligned}$$

Піднесемо його до даного степеня:

Другий спосіб.

Вираз у дужках піднесемо до даного степеня:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2} &= \frac{a^6b^{-4}}{b^4a^{-2}} = \\ &= a^{6-(-2)}b^{-4-4} = a^8b^{-8}. \end{aligned}$$

Спростимо одержаний вираз:

Третій спосіб.

Позбудемось від'ємного показника степеня даного виразу:

$$\left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2} = \left(\frac{b^{-2}a}{a^{-3}b^2}\right)^2 =$$

Спростимо одержаний вираз:

$$= \frac{b^{-4}a^2}{a^{-6}b^4} = a^{2-(-6)}b^{-4-4} = a^8b^{-8}.$$



Як діяти зі степенями раціональних виразів із різними основами й рівними показниками?

Спираючись на їхні властивості.



Запам'ятайте!

Якщо A і B — раціональні вирази ($A \neq 0, B \neq 0$) і n — ціле число, то:

$$A^n \cdot B^n = (A \cdot B)^n, \quad \frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n.$$

3. Способи перетворення раціональних виразів

Під час перетворення раціональних виразів, що містять цілі показники, користуються формулами скороченого множення.



qr.orioncentr.com.ua/e4Xyv

Задача 3 Спростіть вираз:

- 1) $(x^{-3} - 2)^2$;
- 2) $(x^{-3} - 2)(x^{-3} + 2)$;
- 3) $(x^{-3} - 2)(x^{-6} + 2x^{-3} + 4)$.

Розв'язання

Формула	Перетворення
Квадрат різниці	$(x^{-3} - 2)^2 = x^{-6} - 4x^{-3} + 4$
Різниця квадратів	$(x^{-3} - 2)(x^{-3} + 2) = x^{-6} - 4$
Різниця кубів	$(x^{-3} - 2)(x^{-6} + 2x^{-3} + 4) = x^{-9} - 8$

Нерідко доводиться виносити за дужки степінь із цілим показником. Для цього потрібно кожний доданок у дужках поділити на вираз, що виноситься за дужки.

Задача 4 Дано вираз $y^{-5} - xy^5 + 5$. Винесіть за дужки:

- 1) y^{-1} ; 2) y^{-5} .

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 1) y^{-5} - xy^5 + 5 &= y^{-1}(y^{-5-(-1)} - xy^{5-(-1)} + 5 : y^{-1}) = \\
 &= y^{-1}(y^{-4} - xy^6 + 5y); \\
 2) y^{-5} - xy^5 + 5 &= y^{-5}(y^{-5-(-5)} - xy^{5-(-5)} + 5 : y^{-5}) = \\
 &= y^{-5}(1 - xy^{10} + 5y^5).
 \end{aligned}$$

Дізнайтеся більше

Конфорович Андрій Григорович (1923–1997) — фахівець у галузі історії математики і популяризації математичних знань в Україні. У його доробку є понад 200 друкованих праць. Вони присвячені математичній підготовці учнів, олімпіадам з математики, аналізу науково-популярної літератури з математики і кібернетики, застосуванням математики, питанням історії математики, математичним іграм і головоломкам. Основні з них: «Дорогами Унікурсалії», «Визначні математичні задачі», «Колумби математики», «Математична мозаїка», «Математичні софізми і парадокси», «Математика служить людині», «Добрий день, Архімеде!» та інші. На сторінках збірника науково-популярних статей «У світі математики» він опублікував багато цікавих і актуальних статей, зокрема про життєвий і творчий шлях видатних математиків. Це статті: «Нільс Генрік Абель», «Леонард Ейлер», «Готфрід Вільгельм Лейбніц», «Ісаак Ньютон» та ін.



<https://fmf.npu.edu.ua/alumni/271-konforovitch>

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/Q9gFM

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
перетворення виразу	expression transformation	einen Ausdruck umwandeln	transformation d'expression

Пригадайте головне

- Сформулюйте властивість піднесення раціональних виразів до степеня з цілим від'ємним показником.
- Сформулюйте властивість піднесення раціональних виразів до степеня з показником 0.
- Сформулюйте властивості піднесення раціональних виразів до степеня з цілим показником.

Усне тренування

1. Знайдіть значення виразу:

- $88326 : (-9) \cdot (-13 \cdot 2 + 26)$;
- $-2346 \cdot (14 - 244 + 230) + 678$;
- $5,5 \cdot 2,5 : 0,25 - 525 : (-5)$.

Розв'яжіть задачі

369'. Чи правильно, що $(x-1)^{-1}$ дорівнює:

- $\frac{1}{x+1}$;
- $-x+1$;
- $\frac{1}{x-1}$;
- $x+1$?

370'. Чи правильно, що $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-1}$ дорівнює:

- $\frac{-1}{x-1}$;
- $x-1$;
- $\frac{1}{x}+1$?

371'. Чи правильно, що $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-1}$ дорівнює:

- $\frac{b}{a^2}$;
- $-\frac{a^2}{b}$;
- $\frac{2b}{a}$?

372'. Чи є правильною рівність:

- $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3} = -\frac{3m}{n}$;
- $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3} = \frac{m^{-3}}{n}$;
- $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3} = \frac{m^{-3}}{n^{-3}}$?

373'. Якому з виразів дорівнює вираз $\frac{n}{m^{-3}}$:

- $-3\frac{n}{m}$;
- nm^3 ;
- $\frac{m^3}{n}$?

374'. Чи є правильною рівність:

- $(b+a)^0 = 1$;
- $\left(\frac{1}{5+y}\right)^1 = 0$;
- $(9-x^2)^0 = 1$;
- $\left(\frac{y^3}{z^2-x^2}\right)^0 = 1$?

375'. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- $(a-6)^{-1}$;
- $(ad-b)^{-1}$;
- $(x^2-y^2)^{-1}$;
- $(n-m)^{-1}$;
- $(x^2-4)^{-1}$;
- $(xyz-1)^{-1}$.

376°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- 1) $\left(\frac{1}{a-2}\right)^{-1}$; 5) $\left(\frac{1}{ac-p}\right)^{-1}$; 9) $\left(\frac{cd}{ab}\right)^{-1}$;
 2) $\left(\frac{1}{xy}\right)^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{pm-n^2}\right)^{-1}$; 10) $\left(\frac{n-m}{m+n}\right)^{-1}$;
 3) $\left(\frac{1}{abc}\right)^{-1}$; 7) $\left(\frac{a}{a+8}\right)^{-1}$; 11) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-1}$;
 4) $\left(\frac{1}{m+n}\right)^{-1}$; 8) $\left(\frac{x}{zy}\right)^{-1}$; 12) $\left(\frac{n^2+m^2}{m^2-n^2}\right)^{-1}$.

377°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- E** 1) $(b+9)^{-1}$; 4) $\left(\frac{1}{x-y}\right)^{-1}$; 7) $\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{-1}$;
 2) $(x-y)^{-1}$; 5) $\left(\frac{1}{2mp}\right)^{-1}$; 8) $\left(\frac{x}{z+y}\right)^{-1}$;
 3) $(a^3-b^3)^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{z^2-x^2}\right)^{-1}$; 9) $\left(\frac{2a-b}{b+3a}\right)^{-1}$.

378°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- E** 1) $(x-y)^{-2}$; 6) $\left(\frac{1}{b}\right)^{-4}$;
 2) $(10+m)^{-4}$; 7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$;
 3) $(x^2-1)^{-6}$; 8) $\left(-\frac{a}{b}\right)^{-2}$;
 4) $(a-c)^{-8}$; 9) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-6}$; 11) $\left(-\frac{p}{n}\right)^{-10}$;
 5) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$; 10) $\left(-\frac{2}{c}\right)^{-3}$; 12) $\left(-\frac{3}{z}\right)^{-3}$.

379°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

- 1) $(2-m)^{-5}$; 3) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-9}$; 5) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$;
 2) $(x^3+y)^{-7}$; 4) $\left(\frac{1}{m}\right)^{-8}$; 6) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{-3}$.

380°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

- 1) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{m^3}$; 7) $\frac{1}{z^{15}}$; 10) $\left(\frac{1}{a}\right)^5$;
 2) $\frac{1}{m}$; 5) $\frac{1}{p^4}$; 8) $\frac{1}{y^{20}}$; 11) $\left(\frac{1}{x}\right)^9$;
 3) $\frac{1}{c^2}$; 6) $\frac{1}{n^{12}}$; 9) $\left(\frac{1}{b}\right)^2$; 12) $\left(\frac{x}{y}\right)^{10}$.

381°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

- E** 1) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{x^3}$; 5) $\frac{1}{x^5}$; 7) $\left(\frac{1}{y}\right)^4$;
 2) $\frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{1}{x^4}$; 6) $\left(\frac{1}{x}\right)^8$; 8) $\left(\frac{1}{c}\right)^6$.

382°. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником:

- 1) b^{-3} ; 4) $b^{-2}a$; 7) $\frac{p^{-2}}{c^{-6}}$; 10) $\frac{1}{n^{-10}m^{-11}}$;
 2) $c^{-1}a^{-5}$; 5) $\frac{1}{m^{-3}}$; 8) $\frac{a^{-1}}{b^7}$; 11) $\frac{h^{-2}}{n^4m^{-5}}$;
 3) $b^{-1}a^{-9}c^{-12}$; 6) $\frac{1}{x^{-9}}$; 9) $\frac{1}{a^2c^{-4}}$; 12) $\frac{x^2z}{y^{-3}c^3}$.

383°. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником:

- E** 1) $x^{-1}y^{-10}$; 3) ba^{-4} ; 5) $\frac{1}{z^{-4}}$; 7) $\frac{1}{x^{-5}y^{-1}}$;
 2) $xy^{-20}z^{-30}$; 4) $\frac{1}{y^{-1}}$; 6) $\frac{a^{-3}}{b^9}$; 8) $\frac{a^9n^{-4}}{m^{-15}c^{-5}}$.

384°. Запишіть як добуток степенів:

- 1) $\frac{n^2}{m^3}$; 3) $\frac{b^2}{a^3c^2}$; 5) $\frac{b^2}{a^3c^2}$; 7) $\frac{4}{mpn}$;
 2) $\frac{y}{x}$; 4) $\frac{b}{na^5}$; 6) $\frac{a^5c^3}{bd}$; 8) $\frac{1}{ac^2b^2}$.

385°. Запишіть як добуток степенів:

- 1) $\frac{2}{a}$; 2) $\frac{x}{y^8}$; 3) $\frac{b^2}{a^{10}}$; 4) $\frac{n^4}{m^5p^3}$; 5) $\frac{1}{abc}$; 6) $\frac{ax^3}{c^2y^4}$.

386°. Спростіть вираз:



- 1) $(1-y)^2 \cdot (1-y)^{-2}$;
- 2) $(a-b)^{-5} \cdot (a-b)^3$;
- 3) $(x-y)^{-4} \cdot (x-y)^{-6}$;
- 4) $\frac{(y+4)^{-2}}{(y+4)^3}$;
- 5) $\frac{(c+1)^{-2}}{(c+1)^{-4}}$;
- 6) $\frac{x^5 \cdot (x+y)^{-3}}{(x+y)^{-5} \cdot x}$;
- 7) $\frac{m^6}{a^{-8}} : \frac{m^{-2}}{a^3}$;
- 8) $\frac{4(a+1)^{-18}}{c^9} : \frac{c^{-2}}{(a+1)^{-22}}$;
- 9) $\frac{(x-y)^{-2}}{y} \cdot \frac{y^{-5}}{(x-y)^7} \cdot \frac{(x-y)^5}{y^{-3}}$.



qr.orioncentr.com.ua/guhhk

387°. Спростіть вираз:



- 1) $(m+n)^3 \cdot (m+n)^{-3}$;
- 2) $(5+a)^{-8} \cdot (5+a)^5$;
- 3) $\frac{(p+m)^{-1}}{(p+m)^2}$;
- 4) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-5}$;
- 5) $(a+b) \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)^3} \cdot (a-b)^{-2}$;
- 6) $\frac{x^{-3}}{(y+1)^0} \cdot \frac{(x+2)^0}{x^{-1}}$;
- 7) $\frac{(y+5)^{-4}}{y^{10}} \cdot \frac{y^{-15}}{(y+5)^{-8}}$;
- 8) $\frac{(n+4m)^{-1}}{p^4} \cdot \frac{p^3}{(n+4m)^0} : \frac{(n+4m)^{-10}}{p}$.

388°. Піднесіть до степеня вираз:

- 1) $(2x^{-3}y)^{-4}$;
- 2) $(x^{-6}y^{-4})^{-5}$;
- 3) $(0,5x^{-12}y^4)^{-1}$;
- 4) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-5}$;
- 5) $\left(\frac{3}{y}\right)^{-3}$;
- 6) $\left(\frac{a}{b^{-2}}\right)^{-3}$;
- 7) $\left(\frac{a^{-2}}{4b^4}\right)^{-3}$;
- 8) $\left(-\frac{x^{-3}}{2y^5}\right)^2$;
- 9) $\left(-\frac{3a^{-5}}{b^4}\right)^{-1}$.

389°. Піднесіть до степеня вираз:



- 1) $(0,4x^8y^{-3})^{-1}$;
- 2) $(m^{-7}n^{-2})^{-3}$;
- 3) $\left(\frac{a^5}{b^{-2}}\right)^{-1}$;
- 4) $\left(\frac{2a^{-6}}{b^5}\right)^{-3}$.

390°. Спростіть вираз:

- 1) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-5}$;
- 2) $\left(\frac{x}{y+2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{y+2}{x}\right)^{-1}$;
- 3) $\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a+b}{b}\right)^{-3}$;
- 4) $(z-6)^{-8} \cdot \left(\frac{z}{z-6}\right)^{-8}$;
- 5) $(n+5)^{-7} \cdot \left(\frac{n}{n+5}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-7}$;
- 6) $\left(\frac{1}{b+c}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{b+c}\right)^{-1}$;
- 7) $\left(\frac{a}{bc}\right)^{-6} : \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{-6}$;
- 8) $\frac{n^{-5}}{m^{-5}} : \left(\frac{m^6}{2n^4}\right)^{-5}$.

391°. Спростіть вираз:



- 1) $(a+b)^{-5} \cdot (a-b)^{-5}$;
- 2) $\left(\frac{2}{z}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{z}{3}\right)^{-2}$;
- 3) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-5}$;
- 4) $\left(\frac{b}{c+a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2a+2c}{b}\right)^{-3}$;
- 5) $p^{-4} \cdot \left(\frac{p+2}{p}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{p+2}\right)^{-4}$;
- 6) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1} : \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{-1}$.

392°. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{2x}{y}\right)^{-1}$;
- 2) $\frac{p}{n} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-2}$;
- 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-2}$;
- 4) $\frac{a^{-1}}{c^3} \cdot \left(\frac{2a}{c}\right)^{-2}$;
- 5) $\left(\frac{8}{b+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{b+1}{2}\right)^{-5}$;
- 6) $\left(\frac{10}{y+x}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{y+x}{2}\right)^{-3}$.

393°. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{1}{x} + x^{-1}$;
- 2) $\frac{2}{a} + a^{-1}$;
- 3) $\frac{3}{m^2} + m^{-2}$;
- 4) $(x+5)^{-1} + \frac{1}{x+5}$;
- 5) $(a+2)^{-1} - \frac{2}{a+2}$;
- 6) $a(a+b)^{-1} + b(a+b)^{-1}$;
- 7) $(1+b)^0 - (1+b)^{-1}$;
- 8) $(a+b)^{-1} + (a+b)^0$;
- 9) $(x-2)^{-1} - x(2-x)^{-1}$;
- 10) $(5+b)^{-1} + (5-b)^{-1}$.

394*. Спростіть вираз:

- E** 1) $\frac{1}{y^2} - y^{-2}$; 4) $\frac{7}{7+n} + n(7+n)^{-1}$;
 2) $(a+10)^{-1} + \frac{9}{a+10}$; 5) $(m+n)^{-1} - (m+n)^0$;
 3) $a(a+4)^{-1} + 4(a+4)^{-1}$; 6) $(4+x)^{-1} - (4-x)^{-1}$.

395*. Запишіть як квадрат двочлена:

- E** 1) $y^2 - 4y^{-1} + 4$;
 2) $x^{-2} - 2(xy)^{-1} + y^{-2}$;
 3) $a^{-4} - 10a^{-2} + 25$;
 4) $4m^{-2} - 12m^{-1}n^{-1} + 9n^{-2}$;
 5) $a^{-2}c^{-4} - 2a^{-1}c^{-2} + 1$;
 6) $9a^{-2}b^{-2} - 6a^{-1}b^{-2}c^{-1} + c^{-2}b^{-2}$.



qr.orioncentr.com.ua/Z6qBv

396*. Розкладіть на множники:

- 1) $y^2 - 4$; 5) $n^{-4} - m^6$;
 2) $x^{-2} - y^2$; 6) $a^{-2} - (4+a)^{-2}$;
 3) $a^2d^{-2} - b^{-2}$; 7) $(x^{-2} + y^{-2})^2 - (x^{-2} - y^{-2})^2$;
 4) $n^{-4} - m^{-4}$; 8) $(2+m^{-2})^2 - (2-m^{-2})^2$.

397*. Розкладіть на множники:

- E** 1) $x^{-2} - 25$; 4) $x^{-8} - (1+x^{-4})^2$;
 2) $a^{-2} - b^2$; 5) $(n^{-2} - m^{-2})^2 - (m^{-2} + n^{-2})^{-2}$;
 3) $n^{-2} - m^{-2}$; 6) $(x^{-2} + 2)^2 - (3x^{-2} - 4)^2$.

398*. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником, та спростіть його:

- 1) $a + a^{-1}$; 3) $x^{-2} - x^{-3}$; 5) $\frac{1}{1-m^{-1}}$;
 2) $x + x^{-2}$; 4) $y^{-3} + 4y^{-5}$; 6) $\frac{1}{a+a^{-1}}$.

399*. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником, та спростіть його:

- E** 1) $a^{-2} + a$; 2) $2x + x^{-1}$; 3) $4a^{-4} - a^{-2}$; 4) $\frac{1}{a+a^{-2}}$.

400. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{1}{9n^{45}m^{-35}} \cdot \frac{m^{-20}}{n^{-30}}$; 3) $\frac{2b^{-8}}{3a^2} \cdot 0,6b^{-1}a^{-9}$;
 2) $5ba^0 \cdot \frac{a^5}{4b^{-3}}$; 4) $5xyz \cdot \frac{2x^{-2}}{5y^6z^{-11}}$;

- 5) $\frac{2x^{-4}}{y^{-2}} \cdot 0,1xy^{-5}$; 8) $\left((a^{-1} \cdot a)^{-1} \cdot a\right)^{-1} \cdot a$;
 6) $\left((a^{-2} \cdot a^2)^{-5} \cdot a^2\right)^{-1}$; 9) $\left((x^{-9} : x^{-1})^{-1} : x^7\right) : x^0$;
 7) $\left((x^0 \cdot x^{-7})^{-5} \cdot x^{-1}\right)^{10}$; 10) $\left(\left((a^{-3})^{-1} \cdot b^3\right)^{-4} a^{12}\right)^2 \cdot b^{20}$.

401. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{16x^{-5}}{y^{-12}} \cdot \left(\frac{y^{16}}{2x^{-4}z^9}\right)^5$; 4) $\left(\frac{2x^{-2}}{5y^6z^{11}}\right)^{-2} : \left(\frac{0,2x^{-2}}{y^{-5}z^0}\right)^{-3}$;
 2) $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-4}z^7}\right)^{-5} : \left(\frac{x}{y^{10}z^{-20}}\right)^3$; 5) $\left(\frac{x^{-15}}{6y^6}\right)^{-2} : \left(\frac{x^{-20}}{3y^9}\right)^{-2}$;
 3) $\left(\frac{2x^3}{y^4z^{-5}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^8}{0,25y^{-9}}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{1\frac{2}{3}a^{-2}}{b^6}\right)^{-1} : \left(\frac{0,6a^{-8}}{b^{-3}}\right)^2$.

402. Спростіть вираз:

- E** 1) $\frac{27a^{-7}}{c^5} \cdot \left(\frac{9a^{-10}}{c^3}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{a^7}{2m^{-1}n^{-2}}\right)^{-6} : \left(\frac{0,5n^5}{m^{-3}p}\right)^{-2}$;
 2) $\left(\frac{a^3}{2c^4b^{-8}}\right)^4 : \left(\frac{a^{-6}}{0,5c^{-15}}\right)^{-2}$; 4) $\left(\frac{4x^{-7}}{7y^{-9}z^2}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{3\frac{1}{16}x}{y^{-1}z}\right)^{-5}$.

403. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{a^2}{a+b} - b^2(a+b)^{-1}$; 7) $(1+b)^{-1} - (1+b)^{-2}$;
 2) $\frac{1}{x+y} - x(x+y)^{-2}$; 8) $(m+n)^{-1} - (m+n)^{-2}$;
 3) $\frac{2m^3}{m+1} - 2m^3(1-m^2)^{-1}$; 9) $mn(m^2-1)^{-1} - \left(\frac{m-1}{n}\right)^{-1}$;
 4) $4(a-2)^{-1} - \frac{a^2}{a-2}$; 10) $1 - (1+x^{-1})^{-1}$;
 5) $(x-5)^{-1} + x(x-5)^{-1} - \frac{6}{x+5}$; 11) $\left(1 + (1+a^{-1})^{-1}\right)^{-1}$;
 6) $(x+y)^{-2} - (x-y)^{-2}$; 12) $(a-a^{-1})^{-2} + (1-a^2)^{-2}$.

404. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a^2}{a+3} - 9(a+3)^{-1}; & 3) \frac{x^3}{x+y} - (x^3-y)(x+y)^{-1}; \\ 2) \frac{p}{m-p} - m(m-p)^{-1}; & 4) \frac{1}{m-p} + p(m-p)^{-2}. \end{array}$$

405. Внесіть за дужки y^{-2} :

E
$$\begin{array}{lll} 1) y^{-8} + y^{-4}; & 4) 2y + 4y^{-1}; & 7) 2y^{-3} + 4x^{-2}; \\ 2) y^{-10} - y^2; & 5) y^2 - y^2 + y^{-3}; & 8) y^2x^{-2} - 5; \\ 3) y^4 + 8y^{-4}; & 6) xy^{-9} + 9y^{-2}; & 9) xy^{-1} - \frac{6}{y^3} + y^6 + 3. \end{array}$$

406. Внесіть за дужки a^{-4} :

$$\begin{array}{lll} 1) a^{-12} + a^{-10}; & 3) a^{-4} - a^4 + a^{-6}; & 5) 3a^{-1} + \frac{5}{a^5}; \\ 2) a^{-7} - a^3; & 4) 7a^{-14} + 6; & 6) 4 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^{-3}}. \end{array}$$

407. Дано вираз: $x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1$. Внесіть за дужки:

$$1) x; \quad 2) x^6; \quad 3) x^{-1}; \quad 4) x^{-4}; \quad 5) x^{-5}; \quad 6) x^{-10}.$$

408. Дано вираз: $a^4 + a^3 + a^{-3} + a^{-4}$. Внесіть за дужки:

$$1) a; \quad 2) a^3; \quad 3) a^{-1}; \quad 4) a^{-5}.$$

409. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \left(\frac{b^{-3}-1}{b+1} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{2b+2}{b^{-2}+b^{-1}+1} \right)^{-2}; & 4) \frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}} - \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}; \\ 2) \left(a \left(\frac{a}{b} \right)^{-2} \right)^{-1} : \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{-1} b \right)^2; & 5) \frac{n^1+n^2+n^3+n^4}{n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}+n^{-4}}; \\ 3) \left(\left(\frac{n}{m} \right)^{-2} - \left(\frac{m}{n} \right)^{-2} \right) \cdot (mn)^2; & 6) \frac{xy^{-9}+x^{-9}y}{x^{-2}y^8+x^8y^{-2}}. \end{array}$$

410. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \left(\frac{m^2}{m^2-1} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{m+1}{m} \right)^{-1}; & 3) \frac{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{x+x^2+x^3}; \\ 2) \left(\frac{n}{m} \right)^{-1} - \left(\frac{m}{n} \right)^{-1}; & 4) \frac{mn^{-6}+m^{-2}}{m^3n^{-8}+n^{-2}}. \end{array}$$

411. Обчисліть $a^2 + a^{-2}$, якщо:

$$1) a + a^{-1} = 5; \quad 2) a - a^{-1} = 1; \quad 3) a + \frac{1}{a} = 2; \quad 4) \frac{1+a^2}{a} = 8.$$

412. Обчисліть $x^2 + x^{-2}$, якщо:

E
$$1) x + x^{-1} = 3; \quad 2) x - \frac{1}{x} = 9.$$

413. Знайдіть $\frac{x}{y}$, якщо: 1) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}} = 2$; 2) $\frac{2x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+2y^{-1}} = 5$.

414. Знайдіть $\frac{m}{n}$, якщо:

$$1) \frac{n^{-1}+m^{-1}}{n^{-1}-m^{-1}} = 3; \quad 2) \frac{m^{-1}-4n^{-1}}{3n^{-1}+m^{-1}} = 5.$$

415*. Знайдіть $\left(\frac{x}{y} \right)^2$, якщо:

$$1) \frac{4x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}+5y^{-2}} = 1; \quad 2) x^{-2}+y^{-2} = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{y^2}.$$

416*. Обчисліть $\frac{ab}{4a^2-3b^2}$, якщо $a^{-1}b = 5$.

417*. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{(1+x)^{-1}}{x+2} + \frac{(2+x)^{-1}}{x+3} + \frac{(3+x)^{-1}}{x+4}; \\ 2) \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} - \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} \right) : \left((a^2+b^2)(a^2-b^2)^{-1} - (a^2-b^2)(a^2+b^2)^{-1} \right); \\ 3) \frac{(ab^{-1}+1)^2}{ab^{-1}-a^{-1}b} \cdot \frac{a^3b^{-3}-1}{a^2b^{-2}+ab^{-1}+1} : \frac{a^2b^{-2}+1}{ab^{-1}+a^{-1}b}. \end{array}$$

Проявіть компетентність

418. У таблиці 17 показано, як Сашко і Наталка спрощували вирази. Хто з них правильно виконав дії?

Таблиця 17

Сашко	Наталка
$(a - a^{-2})^{-1} =$ $\frac{1}{a - a^{-2}} = \frac{1}{a - \frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{a^3 - 1}$	$(a - a^{-2})^{-1} = a^{-1} - a^2 =$ $\frac{1}{a} - a^2 = \frac{1 - a^3}{a}$

§ 11. ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$

1. Особливості задання

функції $y = \frac{k}{x}$

Ситуація. Максим вирішив визначити час, який потрібно, щоб дістатися з Полтави до Черкас залежно від швидкості руху. За складеним маршрутом відстань між містами дорівнювала 260 км. Позначивши

швидкість руху автомобіля через x км/год, він склав формулу: $t = \frac{260}{x}$.



qr.orioncentr.com.ua/iHtMN



Як змінювався час залежно від відстані?

Обернено пропорційно.

Запам'ятайте!

Функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x — аргумент, k — деяке число, відмінне від нуля, називається **оберненою пропорційністю**.



Чому функція $y = \frac{k}{x}$ при $k = 0$ не є оберненою пропорційністю?

Поміркуємо.



Якщо $k = 0$ і $x \neq 0$, то $\frac{k}{x} = \frac{0}{x} = 0$, тоді формула, що задає функцію, набуває вигляду: $y = 0$. Така функція є лінійною.

2. Область визначення та область значень функції $y = \frac{k}{x}$



Чи для всіх значень x обернена пропорційність має зміст?

Ні.



Функцію $y = \frac{k}{x}$ задає вираз $\frac{k}{x}$, який втрачає зміст, якщо $x = 0$. Тому область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ містить усі числа, крім нуля.



Коротко запишемо: $D(y)$: x — будь-яке число, крім нуля, або $x \neq 0$.



Чи може значення функції $y = \frac{k}{x}$ дорівнювати нулю?

Ні, оскільки $k \neq 0$ за означенням.



Формулу $y = \frac{k}{x}$ перепишемо у вигляді $x = \frac{k}{y}$. Вираз $\frac{k}{y}$ втрачає зміст, якщо $y = 0$.

Отже, область значень функції $y = \frac{k}{x}$ містить усі числа, крім нуля.



Коротко запишемо: $E(y)$: y — будь-яке число, крім нуля, або $y \neq 0$.



В оберненої пропорційності:

- область визначення — будь-яке число, крім нуля;
- область значень — будь-яке число, крім нуля.

3. Графік функції $y = \frac{k}{x}$

На малюнку 6 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$, у якій $k > 0$ ($k = 3$). Його побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Одержану лінію називають *гіперболою*. Гіпербола

складається з двох *віток*. Як бачимо на малюнку, кожна вітка цієї гіперболи нескінченно наближається до осей координат.

✓ Графік функції $y = \frac{k}{x}$ — гіпербола.



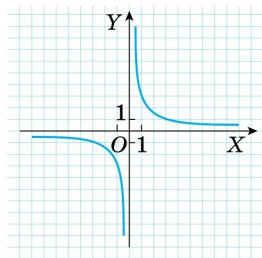
Чи перетинають вітки гіперболи осі координат?

Ні.

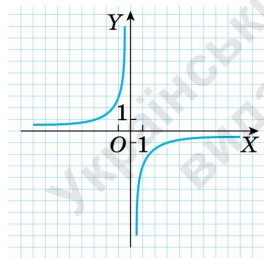


Справді, з попередніх міркувань випливає, що точки з абсцисами $x = 0$ і точки з ординатами $y = 0$ не належать графіку функції $y = \frac{k}{x}$.

Якщо $k > 0$ (мал. 6), то для додатних значень аргументу значення функції також додатні (ця вітка розміщена в I координатній чверті), а для від'ємних значень аргументу значення функції від'ємні (ця вітка розміщена в III координатній чверті).



$k > 0$
Мал. 6



$k < 0$
Мал. 7

На малюнку 7 ви бачите графік функції $y = \frac{k}{x}$, у якої $k < 0$ ($k = -3$). Кожна вітка цієї гіперболи також нескінченно наближається до осей координат, але не перетинає їх. Графік цієї функції розміщений у II і IV координатних чвертях.

✓ Кожна вітка гіперболи не перетинає осі координат.

Задача 1 Чи проходить графік функції $y = -\frac{9}{x}$ через точку:

1) $A(1; 9)$; 2) $B(2; -4,5)$?

Розв'язання

1. Для точки $A(1; 9)$ маємо: $9 \neq -\frac{9}{1}$. Отже, графік функції $y = -\frac{9}{x}$ **не проходить** через точку A .

2. Для точки $B(2; -4,5)$ маємо: $-4,5 = -\frac{9}{2}$, тобто $-4,5 = -4,5$. Отже, графік функції $y = -\frac{9}{x}$ **проходить** через точку B .

✓ Щоб перевірити, чи проходить графік функції $y = \frac{k}{x}$ через задану точку, потрібно перевірити, чи задовольняють координати цієї точки формулу $y = \frac{k}{x}$.

4. Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Виокремимо властивості функції $y = \frac{k}{x}$, спираючись на її графік. Розглянемо два випадки: $k > 0$ і $k < 0$.



qr.orioncentr.com.ua/5sOwN

$k > 0$ (мал. 6)

1. $D(y)$: x — будь-яке число, крім нуля, або $x \neq 0$.
2. $E(y)$: y — будь-яке число, крім нуля, або $y \neq 0$.
3. Точок перетину з осями координат немає.
4. Функція набуває: додатних значень, якщо $x > 0$; від'ємних значень, якщо $x < 0$.
5. Функція спадає як для додатних значень x , так і для від'ємних.

$k < 0$ (мал. 7)

1. $D(y)$: x — будь-яке число, крім нуля, або $x \neq 0$.
2. $E(y)$: y — будь-яке число, крім нуля, або $y \neq 0$.
3. Точок перетину з осями координат немає.
4. Функція набуває: додатних значень, якщо $x < 0$; від'ємних значень, якщо $x > 0$.
5. Функція зростає як для додатних значень x , так і для від'ємних.

5. Побудова графіка функції $y = \frac{k}{x}$



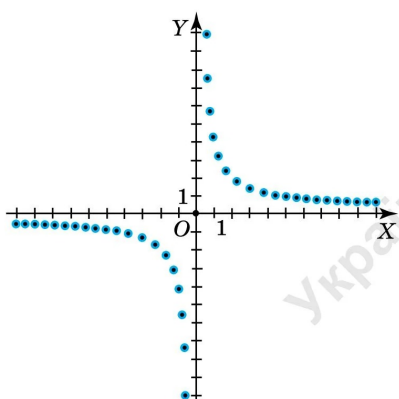
Чи можна побудувати графік функції $y = \frac{k}{x}$ без комп'ютерної підтримки?

Так.



Ви знаєте, щоб побудувати графік лінійної функції — пряму, достатньо знайти координати двох її точок.

На відміну від прямої для побудови графіка функції $y = \frac{k}{x}$ доцільно знайти координати більш ніж двох її точок. Що більше точок гіперболи позначити в системі координат (мал. 8), то точніше зможемо побудувати лінію.



Мал. 8



На практиці знаходимо кілька точок (зазвичай надаючи аргументу цілих значень, які є дільниками числа k) та з'єднуємо їх плавною лінією, спираючись на властивості функції.

Задача 2 Побудуйте графік функції $y = \frac{8}{x}$.

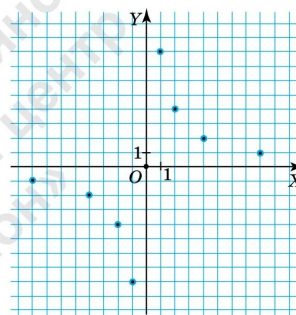
Розв'язання

Спочатку заповнимо таблицю значень даної функції (табл. 18).

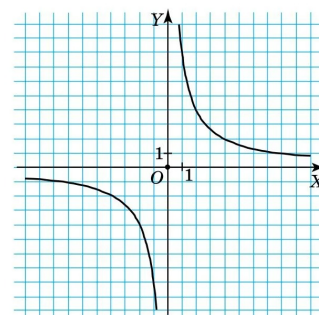
Таблиця 18

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$y(x)$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

На координатній площині позначимо точки з координатами $(-8; -1)$, $(-4; -2)$, $(-2; -4)$, $(-1; -8)$, $(1; 8)$, $(2; 4)$, $(4; 2)$, $(8; 1)$ (мал. 9). З'єднаємо їх плавною лінією. Одержимо графік функції $y = \frac{8}{x}$ (мал. 10).



Мал. 9



Мал. 10

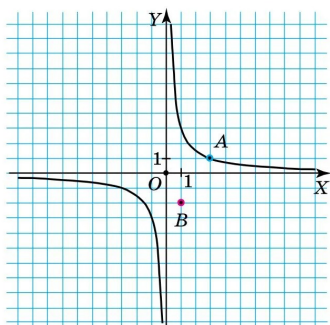


Як можна графічно з'ясувати, що деяка точка належить графіку функції?

Поміркуємо.



Для цього потрібно дану точку позначити в системі координат. Наприклад, на малюнку 11 ви бачите, що точка $A(3; 1)$ належить графіку функції $y = \frac{8}{x}$, а точка $B(1; -2)$ не належить йому.



Мал. 11

Задача 3 Розв'яжіть графічно рівняння $x = \frac{1}{x}$.

Розв'язання Будуємо прямокутну систему координат (мал. 12).

Будуємо графік функції $y = x$:

У тій самій системі координат будуємо графік функції

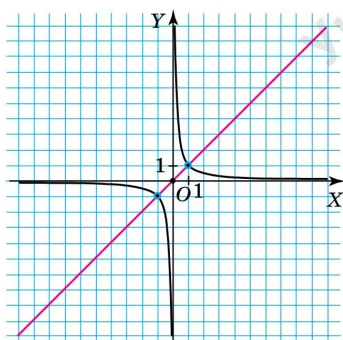
$$y = \frac{1}{x}:$$

Знаходимо **абсциси** точок перетину графіків:

Це пряма, що проходить через точки $(1; 1)$, $(0; 0)$.

Це гіпербола, що проходить через точки $(-1; -1)$, $(-2; -0,5)$, $(2; 0,5)$, $(1; 1)$.

Пряма й гіпербола перетинаються в точках з **абсцисами 1 і -1**.



Мал. 12

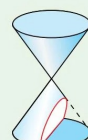
Отже, $x = 1$ і $x = -1$ — корені рівняння.

Дізнайтеся більше

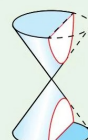
Вченням про гіперболу займалися ще давньогрецькі математики. Найбільш відомою працею про гіперболу була праця Аполлонія (3–2 ст. до н. е.) «Конічні перерізи». Гіперболу, як і еліпс та параболу, він одержував як переріз конічної поверхні площинами (мал. 13). Тому ці лінії називають конічними перерізами.



Еліпс



Парабола



Гіпербола

Мал. 13

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/THJM3

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
гіпербола	hyperbole	Hyperbel (m)	hyperbole

Пригадайте головне

- Чому у функції $y = \frac{k}{x}$ коефіцієнт k не дорівнює нулю?
- Яка область визначення функції $y = \frac{k}{x}$?
- Яка область значень функції $y = \frac{k}{x}$?
- Що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?
- У яких чвертях лежить гіпербола, якщо $k > 0$ ($k < 0$)?
- За яких значень аргументу значення функції $y = \frac{k}{x}$ — додатні; від'ємні?
- За яких значень k функція $y = \frac{k}{x}$ зростає/спадає, якщо $x < 0$?
- За яких значень k функція $y = \frac{k}{x}$ зростає/спадає, якщо $x > 0$?

Усне тренування

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-10)(x+10)=0$;

2) $(x-1)(x+2)=0$;

3) $(x-3)(x+4)(x-5)(x+6)=0$;

4) $x^2-5x=0$;

5) $x^2+6x=0$;

6) $2x^2-6x=0$.

2. Обчисліть:

1) $\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{15}{18}$;

2) $\frac{12}{77} \cdot \frac{55}{45} \cdot \frac{21}{16}$;

3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{10}$;

4) $\frac{12}{35} \cdot \frac{9}{36} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{21}{18} \cdot \frac{25}{3}$.

Розв'яжіть задачі

419°. Яке із тверджень є правильним:

1) область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ — усі числа;2) область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ — усі додатні числа;3) область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ — усі числа, крім нуля;

4) гіпербола не перетинає осей координат;

5) гіпербола перетинає вісь абсцис у двох точках;

6) гіпербола $y = \frac{10}{x}$ розміщена в I і II координатних чвертях?

420°. Яке із тверджень є правильним:

1) функція $y = \frac{6}{x}$ набуває додатних значень, якщо $x > 0$, і від'ємних значень, якщо $x < 0$;2) функція $y = -\frac{4}{x}$ набуває додатних значень, якщо $x > 0$, і від'ємних значень, якщо $x < 0$;3) функція $y = \frac{6}{x}$ спадає для $x > 0$ і зростає для $x < 0$;4) функція $y = -\frac{4}{x}$ зростає і для $x > 0$, і для $x < 0$?

421°. Яка з даних функцій є оберненою пропорційністю:

1) $y = 9 + 2x$; 3) $y = \frac{x}{5}$; 5) $y = x$; 7) $y = 4x$;

2) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{x^2}$; 6) $y = \frac{-3}{x}$; 8) $y = \frac{10}{x}$?

422°. Яка з даних функцій є оберненою пропорційністю:

1) $y = 3x$; 2) $y = \frac{x}{3}$; 3) $y = \frac{3}{x}$?

423°. Назвіть коефіцієнт k функції $y = \frac{k}{x}$, якщо:

1) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{4}{x}$; 5) $y = -\frac{12}{x}$; 7) $y = \frac{28}{x}$;

2) $y = -\frac{4}{x}$; 4) $y = \frac{10}{x}$; 6) $y = \frac{-25}{x}$; 8) $y = \frac{100}{x}$.

424°. Назвіть коефіцієнт k функції $y = \frac{k}{x}$, якщо:

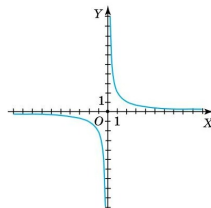
1) $y = \frac{3}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$.

425°. Яка область визначення та область значень функції:

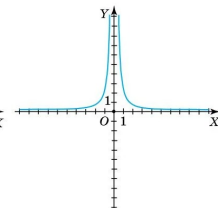
1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{10}{x}$; 3) $y = -\frac{16}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$?

426°. Яка область визначення та область значень функції:

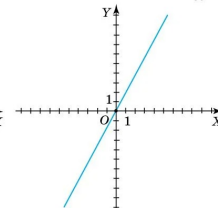
1) $y = \frac{3}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$?

427°. Який із графіків (мал. 14–16) є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?

Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16

428°. Чи правильно, що графік функції $y = \frac{4}{x}$ проходить через точку:

- 1) $A(2; 2)$; 4) $D(0; 4)$; 7) $P(0; 0)$;
 2) $B(-2; -2)$; 5) $M(4; 2)$; 8) $R(-1; 4)$;
 3) $C(4; 4)$; 6) $N(-8; -2)$; 9) $S(8; 0,5)$?

429°. Чи належить графіку функції $y = \frac{10}{x}$ точка:

- 1) $A(1; -10)$; 3) $C(0; 0)$; 5) $M(10; 1)$;
 2) $B(2; 5)$; 4) $D(-1; -10)$; 6) $N(-10; -10)$?

430°. Чи належить графіку функції $y = \frac{12}{x}$ точка:

- E** 1) $K(-1; 12)$; 2) $L(1; 12)$; 3) $M(2; 6)$; 4) $N(-4; -8)$?

431°. Яка з точок $M(-2; 1)$, $N(1; 2)$, $P(2; -1)$, $R(-2; 0)$ належить графіку функції $y = -\frac{2}{x}$?

432°. Назвіть координати будь-яких трьох точок, що належать гіперболі:

- 1) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = \frac{18}{x}$; 5) $y = \frac{25}{x}$; 7) $y = -\frac{10}{x}$;
 2) $y = -\frac{9}{x}$; 4) $y = -\frac{20}{x}$; 6) $y = -\frac{25}{x}$; 8) $y = -\frac{14}{x}$.

433°. Назвіть координати будь-яких трьох точок, що належать гіперболі:

- 1) $y = \frac{15}{x}$; 2) $y = -\frac{30}{x}$.

434°. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

- 1) $A(1; -10)$; 6) $P(5; -10)$;
 2) $B(2; 8)$; 7) $H(-12; -3)$;
 3) $C(-9; -3)$; 8) $R(-6; 3)$.
 4) $M(-2; 1)$;
 5) $N(9; 1)$;



qr.orioncentr.com.ua/lbHlK

435°. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

- 1) $A(-1; 1)$; 3) $C(-4; -5)$;
 2) $B(3; 7)$; 4) $D(7; 2)$.

436°. У яких координатних чвертях лежить графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо:

- 1) $k = 2$; 3) $k = 15$; 5) $k = 0,9$; 7) $k = -42$;
 2) $k = -7$; 4) $k = -11$; 6) $k = 1,6$; 8) $k = -0,25$?

437°. У яких координатних чвертях лежить графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо:

- 1) $k = 1$; 3) $k = 25$; 5) $k = -2,6$;
 2) $k = -9$; 4) $k = -18$; 6) $k = 6,5$?

438°. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 19 і заповніть її.



qr.orioncentr.com.ua/YthMV

Таблиця 19

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y								

439°. Функцію задано формулою $y = \frac{4}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 20 і заповніть її.

Таблиця 20

x	-4	-2	-1	1	2	4
y						

440°. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 21 і заповніть її.

Таблиця 21

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y								

441°. Функцію задано формулою $y = -\frac{4}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 22 і заповніть її.

Таблиця 22

x	-4	-2	-1	1	2	4
y						

442°. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{x}$; 2) $y = -\frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{12}{x}$; 4) $y = -\frac{5}{x}$.

443°. Побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{9}{x}$; 2) $y = \frac{9}{x}$; 3) $y = \frac{10}{x}$.

444. Якщо точка $(x; y)$ належить графіку функції $y = \frac{k}{x}$, то й точка $(-x; -y)$ належить графіку функції $y = \frac{k}{x}$. Доведіть.

445. Який коефіцієнт k функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{1}{5x}$; 3) $y = \frac{4}{9x}$; 5) $y = -\frac{1}{0,2x}$; 7) $2xy = 14$;
2) $y = -\frac{1}{7x}$; 4) $y = \frac{5}{6x}$; 6) $xy = -8$; 8) $4xy = -24$?

446. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

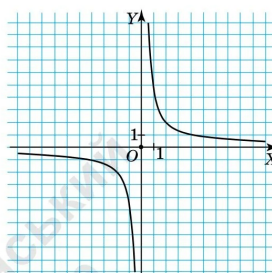
1) $A(0,5; -10)$; 5) $M\left(-\frac{2}{5}; -15\right)$;
2) $B(0,1; 100)$; 6) $N\left(\frac{3}{4}; -1\frac{1}{2}\right)$;
3) $C(-6; 0,05)$; 7) $P\left(2\frac{1}{7}; 35\right)$;
4) $D(1,5; 0,02)$; 8) $H\left(-1\frac{1}{3}; -1,75\right)$.

447. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

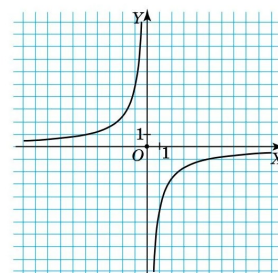
1) $A(2; -0,001)$; 2) $B\left(2\frac{1}{3}; -6\right)$; 3) $C(0,5; 1,8)$.

448. На малюнках 17–20 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$.

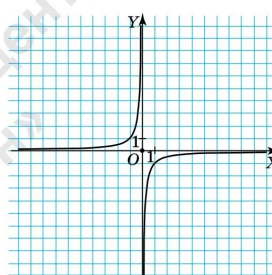
Знайдіть значення k .



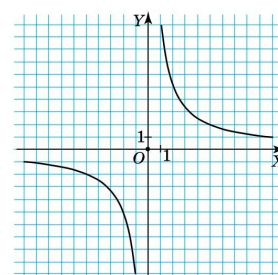
Мал. 17



Мал. 18



Мал. 19

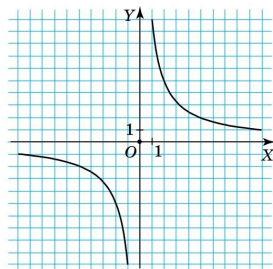


Мал. 20

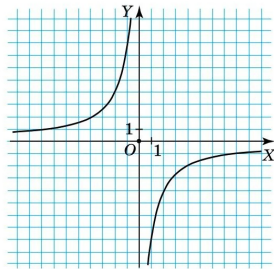
449. На малюнку 21 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$. Ско-

риставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -1$; 2; -5 ; 10;
- 2) значення x , якщо $y = 10$; 5; -2 ;
- 3) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 4) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 5) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 6) значення аргументу, за яких функція спадає;
- 7) коефіцієнт k .



Мал. 21



Мал. 22

450. На малюнку 22 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$. Ско-

риставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -1$; 2; -4 ;
- 2) значення x , якщо $y = 8$; -2 ; 1;
- 3) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 4) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 5) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 6) значення аргументу, за яких функція спадає;
- 7) коефіцієнт k .

451. Дано функцію:

- 1) $y = \frac{1}{x}$;
- 2) $y = -\frac{13}{x}$;
- 3) $y = \frac{0,5}{x}$;
- 4) $y = \frac{5}{4x}$;
- 5) $y = \frac{0,01}{x}$;
- 6) $y = -\frac{1}{9x}$;
- 7) $y = \frac{3}{7x}$;
- 8) $y = \frac{1}{0,1x}$.

Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) коефіцієнт k ;
- 4) значення y , якщо $x = -1$; 1; 10;
- 5) значення x , якщо $y = 1$; -1 ; -2 ;
- 6) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 7) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 8) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 9) значення аргументу, за яких функція спадає.

452. Дано функцію:

E 1) $y = -\frac{1}{x}$; 2) $y = -\frac{25}{x}$; 3) $y = \frac{0,2}{x}$; 4) $y = \frac{8}{3x}$.

Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) коефіцієнт k ;
- 4) значення y , якщо $x = -1$; 1; -10 ;
- 5) значення x , якщо $y = 1$; 10; -2 ;
- 6) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 7) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 8) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 9) значення аргументу, за яких функція спадає.

453. Побудуйте графік функції за допомогою комп'ютерної

програми: 1) $y = \frac{1}{4x}$; 2) $y = -\frac{2}{3x}$; 3) $y = \frac{0,5}{x}$; 4) $xy = -4$.

Скориставшись графіком, знайдіть значення аргументу, за яких значення функції:

а) є додатними; б) є від'ємними.

454. Побудуйте графік функції за допомогою комп'ютерної

програми: 1) $y = \frac{1}{6x}$; 2) $y = \frac{2}{5x}$; 3) $y = -\frac{0,9}{x}$; 4) $xy = -6$.

Скориставшись графіком, знайдіть значення аргументу, за яких значення функції:

а) є додатними; б) є від'ємними.

455. Порівняйте значення функції $y = \frac{2}{x}$ (не обчислюючи

їх) для поданих значень аргументу:

- 1) $x = 3$ і $x = 5$;
- 2) $x = 6$ і $x = 10$;
- 3) $x = 3,5$ і $x = 4$;
- 4) $x = -5$ і $x = -3$;
- 5) $x = -1$ і $x = -10$;
- 6) $x = -2$ і $x = 5$.

456. Порівняйте значення функції $y = -\frac{1}{x}$ (не обчислюючи

E їх) для поданих значень аргументу:

- 1) $x = 9$ і $x = 10$;
- 2) $x = -2$ і $x = -4$;
- 3) $x = -5$ і $x = 5$;
- 4) $x = -12$ і $x = 5$.

457. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = \frac{4}{x}$ і $y = 2$; 2) $y = -\frac{2}{x}$ і $y = -2$; 3) $y = \frac{9}{x}$ і $y = x$.

Чи перетинаються побудовані графіки? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

458. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = \frac{3}{x}$ і $y = 3$; 2) $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$; 3) $y = \frac{12}{x}$ і $y = 2 + 2x$.

Чи перетинаються побудовані графіки? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

459. Задайте формулою функцію, що є оберненою пропорційністю, графік якої проходить через точку $M\left(-\frac{5}{16}; 3\frac{1}{5}\right)$. Побудуйте графік одержаної функції.

460. Задайте формулою функцію, якщо її графік є гіперболою, що проходить через точки, ординати яких дорівнюють частці числа 4 та відповідних абсцис. Побудуйте графік одержаної функції.

461. Задайте формулою функцію, якщо її графік є гіперболою, що проходить через точки, абсциси яких дорівнюють частці числа 9 і відповідних ординат. Побудуйте графік одержаної функції.

462*. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 5 = \frac{6}{x}$; 2) $x - 1 = \frac{2}{x}$; 3) $x - 4 = -\frac{3}{x}$; 4) $x + 8 = \frac{9}{x}$.

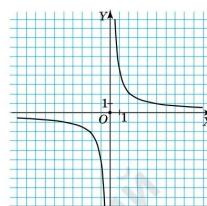
463*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{|x|}$; 2) $y = \frac{6}{|x|}$; 3) $y = \frac{x+1}{x^2+x}$; 4) $y = \frac{x-2}{x^2-2x}$.

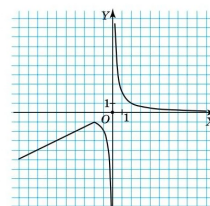
464*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 3x, & \text{якщо } x < 1, \\ \frac{3}{x}, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

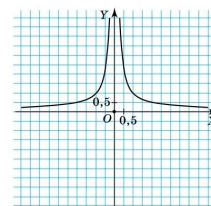
465*. Задайте функцію, графік якої подано на малюнках 23–25.



Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25

Проявіть компетентність

466. Відстань між Миколаєвом і Полтавою становить 400 км.

1. Запишіть функцію, що описує залежність часу, за який автомобіль має подолати відстань між цими містами, від швидкості автомобіля.
2. Визначте час, якщо швидкість автомобіля дорівнює 80 км/год; 100 км/год.
3. Визначте швидкість автомобіля, якщо на дорогу він витратив 5 год; 4 год.
4. Побудуйте графік одержаної функції, узявши за одиничний відрізок на осі абсцис — 20 км/год, а на осі ординат — 1 год.

467. Дачні ділянки мають форму прямокутника із площею 500 м², x — довжина ділянки, y — її ширина.

1. Визначте ширину ділянки, якщо її довжина дорівнює 50 м; 25 м.
2. Визначте довжину ділянки, якщо її ширина дорівнює 10 м; 20 м.
3. Запишіть функцію, що описує залежність ширини ділянки від її довжини.
4. Побудуйте графік залежності ширини ділянки від її довжини, узявши на обох осях координат однаковий одиничний відрізок, що відповідає 50 м.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Який вираз називається раціональним?
2. Що таке область допустимих значень змінної виразу?
3. Що таке раціональний дріб?
4. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.
5. Сформулюйте правило додавання (віднімання) двох раціональних дробів з однаковими знаменниками; із різними знаменниками.
6. Сформулюйте правило множення (ділення) двох раціональних дробів.
7. Як піднести раціональний дріб до степеня з натуральним показником?
8. Які рівняння називають раціональними; дробовими раціональними?
9. За якої умови добуток дорівнює нулю? Дріб дорівнює нулю?
10. Як розв'язати рівняння, застосувавши основну властивість пропорції?
11. Як визначають степінь із цілим від'ємним показником; із показником 0?
12. Сформулюйте властивість добутку степенів з рівними основами; з різними основами й рівними показниками.
13. Сформулюйте властивість частки степенів з рівними основами; з різними основами й рівними показниками.
14. Яка властивість піднесення степеня до степеня?
15. Як записати число в стандартному вигляді?
16. Сформулюйте властивості піднесення раціональних виразів до степеня з цілим від'ємним показником; із показником 0; із цілим показником.
17. Яка область визначення функції $y = \frac{k}{x}$?
18. Яка область значень функції $y = \frac{k}{x}$?
19. Що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?
20. У яких чвертях лежить гіпербола, якщо $k > 0$ ($k < 0$)?
21. За яких значень аргументу значення функції $y = \frac{k}{x}$ є додатними; від'ємними?
22. За яких значень k функція $y = \frac{k}{x}$ зростає; спадає?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тесту потрібно 10–15 хв.

№ 1

- 1°. Визначте ОДЗ змінної x виразу $\frac{2x-1}{x(x-1)}$.
А. $x \neq \frac{1}{2}$. Б. $x \neq 0$ і $x \neq 1$. В. $x \neq 1$. Г. $x \neq \frac{1}{2}$ і $x \neq 1$.
- 2°. Скоротіть дріб $\frac{5x+15y}{3by+bx}$.
А. $\frac{5}{b}$. Б. $\frac{x+3y}{b}$. В. $\frac{5}{3y+x}$. Г. $\frac{5(x+3y)}{b}$.
- 3°. Зведіть дробі $\frac{2}{5x^3}$ і $\frac{2}{25x^2}$ до спільного знаменника.
А. $\frac{10}{25x^2}$ і $\frac{2}{25x^2}$. Б. $\frac{10}{25x^3}$ і $\frac{2x}{25x^3}$.
В. $\frac{10}{25x^3}$ і $\frac{2}{25x^3}$. Г. $\frac{10}{25x^2}$ і $\frac{2x}{25x^2}$.
4. Спростіть вираз $\frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2x-y}{x^2-xy}$.
А. $\frac{y}{x(x-y)}$. Б. $\frac{y^2}{x(x^2-y^2)}$. В. $-\frac{y}{x(x+y)}$. Г. $-\frac{y}{y^2-x^2}$.
- 5°. Спростіть вираз $\frac{1}{a-2} - \frac{1}{a^2-2a+1} - \frac{1}{a-1}$.
А. $\frac{a^2}{(a-2)(a-1)^2}$. Б. $\frac{1}{(a-2)(a-1)^2}$.
В. $\frac{a}{(a-2)(a-1)}$. Г. $\frac{1}{(a-2)(a^2-1)}$.

№ 2

- 1°. Виконайте множення дробів $\frac{4x-8}{55}$ і $\frac{25}{3x-6}$.
А. $\frac{2}{3}$. Б. $\frac{4}{3}$.
В. $\frac{20}{33}$. Г. $\frac{5}{33}$.

2°. Спростіть вираз $\left(\frac{2}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9x^3}{8}$.

- А. x . Б. 1. В. $\frac{1}{2}$. Г. $\frac{x}{2}$.

3°. Виконайте ділення: $\frac{7x^3y^3}{5a} : \frac{28x^2y^4}{45a}$.

- А. $\frac{9x}{20y}$. Б. $\frac{4xy}{9}$. В. $\frac{9x}{4y}$. Г. $\frac{4y}{9x}$.

4. Запишіть замість * такий вираз, щоб одержати правильну рівність: $\frac{2a^2}{9b^3} : \frac{*}{18b^2} = \frac{a}{b}$.

- А. $\frac{a^3}{4}$. Б. $4a^3$. В. $4a$. Г. $\frac{a}{4}$.

5°. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+4}{x^2-4x+16} - \frac{x^2}{x^3+64} = 0$.

- А. $x = 2$. Б. $x = 4$.
В. $x = -4$. Г. $x = -2$.

№ 3

1°. Спростіть вираз $a^{-8} : a^{-2}$.

- А. a^{-10} . Б. a^4 . В. a^{-4} . Г. a^{-6} .

2°. Запишіть число $21,3 \cdot 10^{-4}$ в стандартному вигляді.

- А. $213 \cdot 10^{-5}$. Б. $2,13 \cdot 10^{-3}$.
В. $2,13 \cdot 10^{-5}$. Г. $0,213 \cdot 10^{-6}$.

3°. Яка з точок належить графіку функції $y = \frac{8}{x}$?

- А. $A(1; -8)$. Б. $B(2; 6)$. В. $C(8; 0)$. Г. $D(4; 2)$.

4. Обчисліть: $\frac{2}{3^{-2}} \cdot 0,1^0$.

- А. 18. Б. $-\frac{2}{9}$. В. 12. Г. 1,2.

5°. Спростіть вираз $\frac{x^2}{yz^{-3}} \cdot \left(\frac{3x^{-4}}{y^5}\right)^{-2}$.

- А. $\frac{-6x^{10}}{y^{-9}z^{-3}}$. Б. $\frac{6x^8}{y^{-6}z^{-3}}$. В. $\frac{x^2}{yz^{-3}}$. Г. $\frac{x^{10}}{9y^{-9}z^{-3}}$.



Розділ 3. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

У розділі дізнаєтесь:

- що таке множина та підмножина;
- які є числові множини;
- що таке квадратний корінь із числа та арифметичний квадратний корінь із числа;
- які властивості квадратних коренів;
- що таке ірраціональний вираз та як перетворювати такі вирази;
- які властивості функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 12. ФУНКЦІЯ $y = x^2$

1. Функція $y = x^2$, її область визначення та область значень

Ситуація. У магазині Максим розглядав батут. Усі батути мали форму квадрата, але різні розміри (зі стороною від 1 м до 4 м). Хлопчик вирішив знайти площу кожного батута. Він позначив довжину сторони батута через x і записав формулу для обчислення його площі: $S = x^2$. Максим отримав залежність площі квадрата від його сторони.



qr.orioncentr.com.ua/pD148



Чи можна отриману Максимом залежність розглядати як функцію?

Так.



Справді, $S = x^2$ є функцією, де x — незалежна змінна, а S — залежна змінна, оскільки кожному значенню x відповідає єдине значення S . В умовах розглянутої ситуації x набуває додатних значень від 1 до 4.

Функцію $y = x^2$ задає вираз x^2 , який має зміст за будь-якого значення x . Тому область визначення функції $y = x^2$ містить усі числа.



Коротко це записують так: $D(y): x$ — будь-яке число.

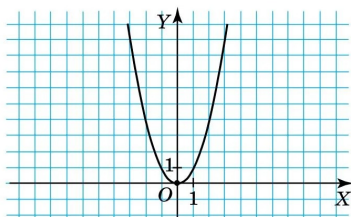
Оскільки для будь-якого x вираз $x^2 \geq 0$, то $y \geq 0$. Тому область значень функції $y = x^2$ містить усі невід'ємні числа.

 Коротко записують: $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.

2. Графік функції $y = x^2$

На малюнку 26 зображено графік функції $y = x^2$. Його побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Одержану лінію називають *параболою*. Парабола має дві *вітки*, що виходять з однієї точки — *вершини параболі*. На малюнку 26 це точка з координатами $(0; 0)$.

Оскільки x — будь-яке число, а значення функції $y = x^2$ є невід'ємними, то парабола розміщена в першій і другій координатних чвертях.



Мал. 26

Задача 1 Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

1) $A(5; 25)$; 2) $B(6; 12)$?

Розв'язання

1. Підставимо координати точки $A(5; 25)$ у формулу $y = x^2$: $25 = 5^2$.
Отже, графік функції $y = x^2$ **проходить** через точку A .

2. Підставимо координати точки $B(6; 12)$ у формулу $y = x^2$: $12 \neq 6^2$.
Отже, графік функції $y = x^2$ **не проходить** через точку B .

Щоб перевірити, чи проходить графік функції $y = x^2$ через задану точку, потрібно перевірити, чи задовольняють координати цієї точки формулу $y = x^2$.

3. Властивості функції $y = x^2$

Виокремимо властивості функції $y = x^2$, спираючись на її графік (мал. 26).

1. $D(y)$: x — будь-яке число.
2. $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.
3. Точка $(0; 0)$ — точка перетину з осями координат. Це вершина параболі.
4. Функція набуває додатних значень для будь-якого x , крім нуля.
5. Функція зростає, якщо $x \geq 0$, і спадає, якщо $x \leq 0$.

4. Побудова графіка функції

$$y = x^2$$

qr.orioncentr.com.ua/0ZYzZ

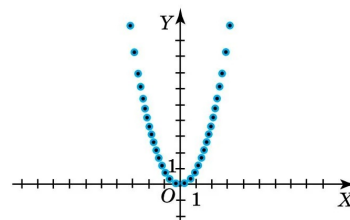


Чи можна побудувати графік функції $y = x^2$ без комп'ютерної підтримки?

Так.



Як і для гіперболи, що більше точок параболі позначити в системі координат, то точніше буде побудовано лінію (мал. 27).



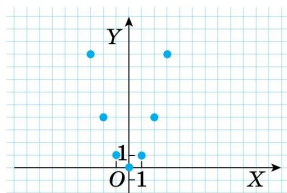
Мал. 27

На практиці знаходимо кілька точок параболі (табл. 23).

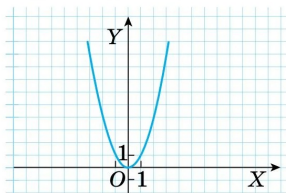
Таблиця 23

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y(x)$	9	4	1	0	1	4	9

На координатній площині позначимо точки з координатами $(-3; 9)$, $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$, $(3; 9)$ (мал. 28). З'єднаємо їх плавною лінією, спираючись на властивості функції. Одержимо графік функції $y = x^2$ (мал. 29).



Мал. 28



Мал. 29

Побудова графіка функції $y = x^2$ допомагає графічно розв'язувати рівняння та їх системи. Розглянемо приклад.

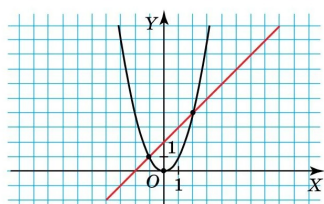
Задача 2 Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x^2. \end{cases}$

Розв'язання

1. Будуємо графік функції $y = x + 2$: будуємо пряму, що проходить через точки $(1; 3)$, $(0; 2)$ (мал. 30).

2. У тій самій системі координат будуємо графік функції $y = x^2$: будуємо параболу (мал. 30).

3. Визначаємо координати точок перетину графіків: пряма й параболу перетинаються у двох точках із координатами $(-1; 1)$ і $(2; 4)$.

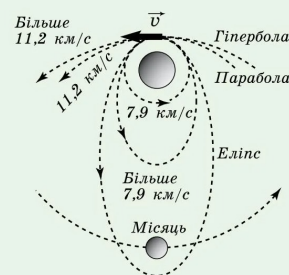


Мал. 30

Отже, пари чисел $(-1; 1)$ і $(2; 4)$ — розв'язки системи рівнянь.

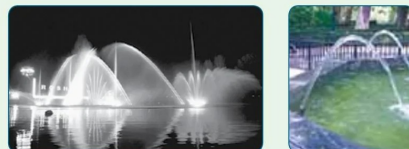
Дізнайтеся більше

1. Властивості параболи широко використовують у техніці, зокрема космічній. Щоб деяке тіло стало штучним супутником Землі, його потрібно вивести на орбіту й надати йому горизонтальну відносно поверхні Землі швидкість (мал. 31). Для запуску супутників використовують ракети. Якщо супутнику надати швидкість $7,9$ км/с, то він буде рухатися круговою орбітою. Якщо швидкість більша за $7,9$ км/с, але менша від $11,2$ км/с, то супутник буде рухатися еліптичною орбітою. Розвиваючи швидкість $11,2$ км/с (друга космічна швидкість), тіло починає рухатися параболою і стає супутником Сонця. Якщо ж швидкість більша за $11,2$ км/с, то тіло рухається гіперболою.



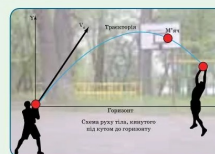
Мал. 31

2. Струміння води фонтану рухається параболою (мал. 32).



Мал. 32

Траєкторія тіла, яке кинули під кутом до горизонту, є параболою (мал. 33).



Мал. 33

Форму параболи мають і багато інших природних і штучних об'єктів (мал. 34).



Мал. 34

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/oMX9y

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
парабола	parabola	Parabel (f)	parabole

Пригадайте головне

1. Яка область визначення функції $y = x^2$?
2. Яка область значень функції $y = x^2$?
3. Що є графіком функції $y = x^2$?
4. У яких координатних чвертях лежить парабола $y = x^2$?
5. За яких значень аргументу функція $y = x^2$ зростає; спадає?

Усне тренування

1. Обчисліть:
1) $(1515 : 15 - 11) : 15 \cdot 21$; 2) $1515 : (105 - 64 : 16) \cdot 15 + 5$.
2. Обчисліть:
1) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot 12$; 2) $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) \cdot 8$; 3) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{30}$; 4) $\left(2\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 100$.

Розв'яжіть задачі

- 468°. Яке із тверджень є правильним:
- 1) область визначення функції $y = x^2$ — усі додатні числа;
 - 2) область визначення функції $y = x^2$ — усі числа, крім нуля;
 - 3) область визначення функції $y = x^2$ — усі числа;
 - 4) область значень функції $y = x^2$ — усі числа;

- 5) область значень функції $y = x^2$ — усі додатні числа;
- 6) область значень функції $y = x^2$ — усі невід'ємні числа;
- 7) вершина графіка функції $y = x^2$ міститься в точці $(0; 1)$;
- 8) вершина графіка функції $y = x^2$ міститься в точці $(0; 0)$?

469°. Графік якої з поданих функцій є параболою:

- 1) $y = 9^2$; 3) $y = x^2$; 5) $y = x$;
- 2) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{x^2}$; 6) $y = x^2x$?

470°. Функцію задано формулою $y = x^2$. Накресліть у зошиті таблицю 24 і заповніть її.

Таблиця 24

x	-10	-6	-5	-1	1	5	6	10
y								

471°. Функцію задано формулою $y = x^2$. Накресліть у зошиті таблицю 25 і заповніть її.

Таблиця 25

x	-20	-8	-6	0	6	8	20
y							

472°. Чи правильно, що графік функції $y = x^2$ проходить через точку:

- 1) $A(4; 2)$; 3) $C(4; 16)$; 5) $M(10; 100)$; 7) $P(0; 0)$;
- 2) $B(-2; 4)$; 4) $D(0; 4)$; 6) $N(-8; 16)$; 8) $R(-1; 1)$?

473°. Чи правильно, що графік функції $y = x^2$ проходить через точку:

- 1) $A(1; 1)$; 3) $C(2; 4)$;
- 2) $B(-2; -4)$; 4) $D(4; 8)$?

474°. Які з точок $A(3; 9)$, $B(-3; -9)$, $C(9; -3)$, $D(9; 3)$, $M(-5; 25)$, $N(5; 10)$, $P(7; 49)$, $R(6; -36)$ належать графіку функції $y = x^2$?

475°. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

- 1) $A(1; -10)$; 3) $C(-8; -64)$; 5) $M(9; 81)$;
- 2) $B(8; 64)$; 4) $D(-2; 6)$; 6) $N(-10; -10)$?

476°. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

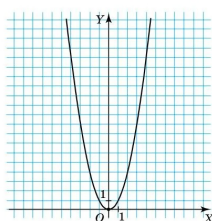
- 1) $K(1; -1)$; 3) $M(-6; 12)$;
- 2) $L(6; 36)$; 4) $N(-7; 49)$?

477. На малюнку 35 зображено графік функції $y = x^2$. Скориставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = 0$; -1 ; 3 ;
- 2) значення x , якщо $y = 1$; 9 ;
- 3) значення аргументу, за яких значення функції невід'ємні;
- 4) значення аргументу, за яких функція зростає.



qr.orioncentr.com.ua/EPC2F



Мал. 35

478. На малюнку 35 зображено графік функції $y = x^2$. Скориставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = 1$; -2 ; -3 ;
- 2) значення x , якщо $y = 0$; 4 ;
- 3) значення аргументу, за яких значення функції додатні;
- 4) значення аргументу, за яких функція спадає.

479. Якщо точка $(x; y)$ належить графіку функції $y = x^2$, то й точка $(-x; y)$ належить графіку функції $y = x^2$. Доведіть.

480. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = x^2$ і $y = 1$;
- 2) $y = x^2$ і $y = -1$;
- 3) $y = x^2$ і $y = -2$;
- 4) $y = x^2$ і $y = 4$;
- 5) $y = x^2$ і $y = -2x$;
- 6) $y = x^2$ і $y = 2x$;
- 7) $y = \frac{1}{x}$ і $y = x^2$.



qr.orioncentr.com.ua/OG7Je

Чи перетинаються графіки функцій? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

481. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = x^2$ і $y = 9$;
- 2) $y = x^2$ і $y = -3$;
- 3) $y = x^2$ і $y = x$;
- 4) $y = x^2$ і $y = 3x$.

Чи перетинаються графіки функцій? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

482. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = 4x, \\ y = x^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = -\frac{8}{x}, \\ y = x^2. \end{cases}$$

483. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = x^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 5x - 6, \\ y = x^2. \end{cases}$$

484. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = 4; \quad 2) x^2 = 16; \quad 3) x^2 = 0; \quad 4) x^2 + 5 = 0.$$

485. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = 1; \quad 2) x^2 = -1; \quad 3) x^2 = 9; \quad 4) 4 + x^2 = 0.$$

486. Знайдіть такі точки графіка функції $y = x^2$, у яких абсциса:

- 1) дорівнює ординаті;
- 2) утричі менша від ординати.

487. Знайдіть такі точки графіка функції $y = x^2$, у яких абсциса удвічі менша від ординати.

488. Порівняйте значення функції $y = x^2$ (не обчислюючи їх) для поданих значень аргументу:

- 1) $x = 3$ і $x = 5$;
- 2) $x = 56$ і $x = 72$;
- 3) $x = 2,7$ і $x = 2$;
- 4) $x = 0,7$ і $x = 1,2$;
- 5) $x = -4$ і $x = -2$;
- 6) $x = -3$ і $x = -6$;
- 7) $x = -2,4$ і $x = -2$;
- 8) $x = -10$ і $x = -8$.

489. Порівняйте значення функції $y = x^2$ (не обчислюючи їх) для поданих значень аргументу:

- 1) $x = 9$ і $x = 15$;
- 2) $x = 32$ і $x = 64$;
- 3) $x = -7$ і $x = -6$;
- 4) $x = -24,5$ і $x = -25$.

490. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = x - 5; \quad 2) x - x^2 = 0; \quad 3) x^2 = x - 2; \quad 4) x - 6 = x^2; \quad 5) 4x - 3 = x^2; \quad 6) x^2 = -\frac{1}{x}.$$

491. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 + x = 0; \quad 2) -2x + 3 = x^2; \quad 3) x^2 = -x - 7; \quad 4) x^2 = \frac{8}{x}.$$

492*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^4}{x^2}$; 2) $y = \frac{x^5}{x^3}$; 3) $y = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$; 4) $y = \frac{2x^3 + 6x^2}{2x + 6}$.

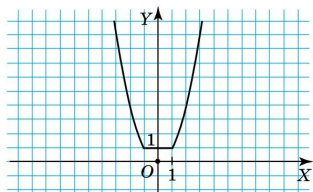
493*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 3, \\ 2x + 3, & \text{якщо } x \geq 3; \end{cases}$

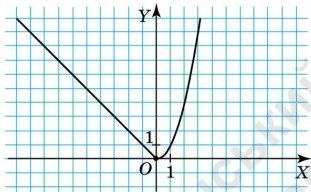
2) $y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x < 1, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < 2, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 2; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

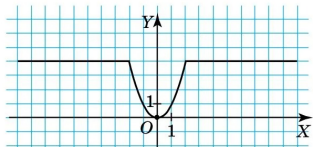
494*. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 36–39.



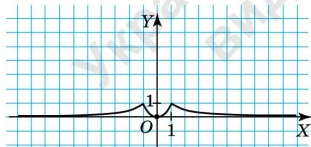
Мал. 36



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39

Проявіть компетентність

495. На міліметровому папері побудуйте параболу $y = x^2$, позначивши точки з абсцисами: $-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.
10. За одиничний відрізок прийміть 1 мм.

496. На міліметровому папері побудуйте параболу $y = x^2$. За одиничний відрізок прийміть 1 см.

Знайдіть наближені значення функції для абсцис: $-4,6; -3,5; -3,1; -1,8; 1,5; 2,3; 3,1; 3,8; 4,2$.

497. Земельні наділи мають форму квадрата зі стороною x .
1. Задайте формулою залежність площі ділянки від довжини її сторони.

2. Побудуйте графік залежності площі ділянки від довжини її сторони.

3. Задайте формулою залежність периметра ділянки від довжини її сторони.

4. Побудуйте графік залежності периметра ділянки від довжини її сторони.

5. Визначте площу ділянки, якщо довжина її сторони дорівнює 15 м; 25 м.

6. Визначте довжину сторони ділянки, якщо її площа дорівнює 100 м²; 400 м².

7. Визначте довжину сторони ділянки, якщо число, що виражає її площу, дорівнює числу, що виражає периметр ділянки.

§ 13. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

1. Квадратний корінь із числа a

Ситуація. Кімната Марини, площа якої 9 м², має форму квадрата. Марина визначала розміри кімнати і міркувала так: «Треба знайти число, квадрат якого дорівнює 9».



Скільки є чисел, квадрат яких дорівнює 9?

Це числа 3 і -3 .



Справді, $3^2 = 9$ і $(-3)^2 = 9$. Але, звісно, в умовах розглянутої ситуації виміри кімнати не можуть бути від'ємними.



qr.orioncentr.com.ua/8Ldft

Число	Квадрат числа	Протилежне число	Квадрат протилежного числа
3	$3^2 = 9$	-3	$(-3)^2 = 9$
$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
0	$0^2 = 0$	0	$0^2 = 0$

 Якщо число є квадратом деякого числа, то воно є квадратом і протилежного йому числа.

 Чи може від'ємне число бути квадратом деякого числа?

Ні.

Справді, добуток двох чисел з однаковими знаками — число додатне.

 $x^2 \geq 0$ для будь-якого x .

Наведені міркування підказують, що рівняння $x^2 = a$ ($a \geq 0$) має два корені, які є протилежними числами. Наприклад, коренями рівняння $x^2 = 9$ є протилежні числа 3 і -3, а коренями рівняння $x^2 = 0$ — число 0, яке протилежне самому собі.

Запам'ятайте!

Квадратним коренем із числа a називається число, квадрат якого дорівнює a .

Наприклад:

числа 3 і -3 є квадратними коренями з числа 9;

числа $\frac{3}{4}$ і $-\frac{3}{4}$ є квадратними коренями з числа $\frac{9}{16}$;

число 0 є квадратним коренем із числа 0.

 Квадратного кореня з від'ємного числа **не існує**.

2. Арифметичний квадратний корінь із числа a

Щоб знайти довжину сторони кімнати, Марина, могла скласти й розв'язати рівняння $a^2 = 9$, де a — довжина сторони кімнати. Його корені: $a = 3$ або $a = -3$.

Однак умову задачі зодовольняє тільки значення $a = 3$, оскільки довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом.

Запам'ятайте!

Невід'ємне значення квадратного кореня з числа a називають **арифметичним квадратним коренем** із числа a .

Наприклад, арифметичним квадратним коренем із числа 9 є число 3, а з числа 0 — число 0.

 Коротко записуємо: $\sqrt{a}$ — і говоримо: арифметичний квадратний корінь з a .

Знак $\sqrt{}$ називають **радикалом**. Він замінює термін «арифметичний квадратний корінь».

У виразі $\sqrt{a}$ число a називають **підкореневим виразом**. Наприклад, у виразах $\sqrt{9}$ і $\sqrt{0}$ підкореневими виразами є відповідно числа 9 і 0.

 Дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа a називають **добуванням квадратного кореня з числа a** .

 Щоб добути арифметичний квадратний корінь із числа a , потрібно знайти таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Наприклад, щоб добути арифметичний квадратний корінь із числа 4, потрібно знайти таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює 4. Це число 2, оскільки $2^2 = 4$.

 Коротко записуємо: $\sqrt{4} = 2$.

 Квадратними коренями з числа 100 є числа -10 і 10. Арифметичним квадратним коренем із числа 100 є число 10.

3. Порівняння арифметичних квадратних коренів

Щоб порівняти арифметичні квадратні корені з двох чисел, достатньо знайти їхні наближені значення, наприклад за допомогою калькулятора. Порівняємо, для прикладу, $\sqrt{19}$ і $\sqrt{17}$. Для цього спочатку знаходимо: $\sqrt{19} \approx 4,3588989\dots$, $\sqrt{17} \approx 4,1231056\dots$. Оскільки $4,3588989\dots > 4,1231056\dots$, то $\sqrt{19} > \sqrt{17}$.



Чи можна порівняти арифметичні квадратні корені з двох чисел, не обчислюючи їхніх наближених значень?

Так.

Для цього можна скористатися такою властивістю арифметичних квадратних коренів:

$$\sqrt{a} > \sqrt{b}, \text{ якщо } a > 0, b \geq 0 \text{ і } a > b.$$

Задача 1 Порівняйте числа: 1) $\sqrt{8}$ і 3; 2) $2,6$ і $\sqrt{6}$.

Розв'язання

- Оскільки $3 = \sqrt{9}$ і $8 < 9$, то $\sqrt{8} < \sqrt{9}$. Отже, $\sqrt{8} < 3$.
- Оскільки $2,6 = \sqrt{2,6^2} = \sqrt{6,76}$ і $6,76 > 6$, то $\sqrt{6,76} > \sqrt{6}$.
Отже, $2,6 > \sqrt{6}$.

4. Властивості арифметичного квадратного кореня

З означення арифметичного квадратного кореня випливають такі властивості:

- $\sqrt{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$.
- $(\sqrt{a})^2 = a$, якщо $a \geq 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$, якщо a — будь-яке число.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a \geq 0$ і $b > 0$.



qr.orioncentr.com.ua/0SMTa

Доведемо властивість 4. Оскільки $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $a \cdot b \geq 0$. Піднесемо до квадрата вирази $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ і $\sqrt{ab}$, спираючись на властивість 2 та властивості степенів:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b; (\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b.$$

Отже, ліву і праву частини рівності ми звели до того самого виразу $a \cdot b \geq 0$. Тому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Властивість 5 спробуйте довести самостійно.

Задача 2

Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{100 \cdot 16}$; 2) $\sqrt{225}$.

Розв'язання

- $\sqrt{100 \cdot 16} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{16} = 10 \cdot 4 = 40$.
- $\sqrt{225} = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$.

Для обчислення $\sqrt{225}$ також можна скористатися таблицею квадратів чисел, яку подано на форзаці.



Квадратний корінь можна добути, якщо підкореновий вираз розкласти на множники, що є квадратами чисел.

Задача 3 Знайдіть значення виразу:

- $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$;
- $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання

- $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$.
- $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$.

Задача 4 Знайдіть значення виразу:

- $\sqrt{3^2}$;
- $\sqrt{(-3)^2}$;
- $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$.

Розв'язання

- $\sqrt{3^2} = |3| = 3$.
- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.
- $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}|$.

Оскільки $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, то $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

5. Внесення множника під знак кореня

qr.orioncentr.com.ua/gqth7



Чи можна вносити множник під знак кореня?

Так.



Задача 5

Внесіть множник під знак кореня у виразі:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2}$.

Розв'язання

1. Оскільки $3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$, то множник, який потрібно внести під знак кореня, — це число 3. Оскільки $3 = \sqrt{3^2}$, то:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}.$$

2. Оскільки $\sqrt{(-3)^2} = |-3| \neq -3$, то під знак кореня не можна вносити число -3 . Подамо даний вираз так: $-3\sqrt{2} = -1 \cdot 3\sqrt{2}$. Звідси множник, який можна внести під знак кореня, — це число 3. Тоді:

$$-3\sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} = -\sqrt{9 \cdot 2} = -\sqrt{18}.$$



Під знак кореня можна вносити лише **невід'ємне** число.

6. Винесення множника з-під знака кореня



Чи можна виносити множник, що не дорівнює 1, з-під знака кореня?

Так.



Задача 6

Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{32}$.

Розв'язання

Розкладемо підкореневий вираз на множники так, щоб хоча б з одного множника можна було добути корінь:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$



Чи завжди можна винести множник з-під знака кореня?

Ні.



Наприклад, у виразі $\sqrt{15}$ не можна винести множник з-під знака кореня, оскільки число 15 не можна подати як добуток чисел, з яких хоча б одне є квадратом деякого числа.

Задача 7 Спростіть вираз: 1) $3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{2}$.

Розв'язання

1. Підкореневі вирази обох доданків є однаковими, тому:

$$3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3}(3 + 5) = \sqrt{3} \cdot 8 = 8\sqrt{3}.$$

2. Підкореневі вирази 50, 8 і 2 мають дільник 2. Маємо: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$. Тоді:

$$\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$



Додавати та віднімати квадратні корені можна лише тоді, коли підкореневі вирази є однаковими.

7. Кубічний корінь із числа a



Чи можна знайти ребро куба a , якщо його об'єм дорівнює 8 см^3 ?

Так.



Для цього потрібно знайти таке число, куб якого дорівнює 8. Це число 2, оскільки $2^3 = 8$. Отже, ребро куба дорівнює 2 см.

Число 2 називають кубічним коренем із числа 8.



Коротко записуємо: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Запам'ятайте!

Кубічним коренем із числа a називається число, куб якого дорівнює a .



Коротко записуємо: $\sqrt[3]{a}$ — і говоримо: кубічний корінь з a .

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

У виразі $\sqrt[3]{a}$ число a називають *підкореневим виразом*. Дію знаходження кубічного кореня з числа a називають *добуванням кубічного кореня з числа a* .



Щоб добути кубічний корінь із числа a , потрібно знайти таке число, куб якого дорівнює a .

Наприклад:

число 3 є кубічним коренем із числа 27, бо $3^3 = 27$;

число -3 є кубічним коренем із числа -27, бо $(-3)^3 = -27$;

число 0 є кубічним коренем із числа 0, бо $0^3 = 0$;

число $\sqrt[3]{5}$ є кубічним коренем із числа 5, бо $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$.



- Кубічний корінь із додатного числа — число додатне.
- Кубічний корінь із від'ємного числа — число від'ємне.
- Кубічний корінь із числа 0 — число 0.

Властивості кубічного кореня

$$1. (\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

$$2. \sqrt[3]{a^3} = a.$$

3. Порівняти кубічні корені з двох чисел можна за допомогою калькулятора. Кубічні корені також можна порівняти, не обчислюючи їхніх наближених значень:

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}, \text{ якщо } a > b.$$

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/il3V2

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
арифметичний квадратний корінь	arithmetic square root	arithme- tische Quadrat- wurzel (f)	racine carrée arithmétique

Пригадайте головне

- Сформулюйте означення квадратного кореня з числа a .
- Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a ?
- Чи існує квадратний корінь з від'ємного числа?
- Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь із числа 0?
- Як порівнюють арифметичні квадратні корені?
- Сформулюйте властивості арифметичного квадратного кореня.
- Як внести множник під знак кореня?
- Як винести множник з-під знака кореня?
- Що називають кубічним коренем із числа a ?

Усне тренування

1. Запишіть як степінь з основою 3:

$$1) 9^{-3} \cdot 3^5; \quad 2) 27^2 \cdot 81^{-4}; \quad 3) (3^{-6})^8 \cdot (9^{-1})^{-2}; \quad 4) (81^{-2})^3 \cdot (27^{-3})^{-4}.$$

$$2. \text{Серед чисел } 6, -11, \frac{2}{6}, 0,8, -10,2, -1\frac{2}{9}, -\frac{32}{8}, 0, 4,6,$$

-5,05 оберіть: 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні.

Розв'яжіть задачі

498'. Чи правильно, що:

- 2 і -2 є квадратними коренями з числа 4;
- 5 і -5 є квадратними коренями з числа 10;
- $\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{2}$ є квадратними коренями з числа $\frac{1}{4}$;
- 0 є квадратним коренем із числа 0?

499'. Чи правильно, що:

- 2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
- 2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
- 5 є арифметичним квадратним коренем із числа 10?

500'. Назвіть підкореневий вираз арифметичного квадратного кореня:

$$1) \sqrt{5}; \quad 2) \sqrt{0}; \quad 3) \sqrt{3,1}; \quad 4) \sqrt{\frac{1}{16}}; \quad 5) \sqrt{m}; \quad 6) \sqrt{x}.$$

501'. Чи правильно добули арифметичний квадратний корінь із числа:

$$1) \sqrt{4} = -2; \quad 2) \sqrt{9} = 3; \quad 3) \sqrt{36} = 6; \quad 4) \sqrt{64} = -8?$$

Відповідь поясніть.

502°. Чи правильно порівняли арифметичні квадратні корені:

- 1) $\sqrt{3} < \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6} < \sqrt{5}$;
2) $\sqrt{7} < \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{10} > \sqrt{11}$?

Відповідь поясніть.

503°. Чи правильно, що для $a > 0$:

- 1) $\sqrt{a} < 0$; 2) $\sqrt{a} = 0$; 3) $\sqrt[3]{a} < 0$; 4) $\sqrt[3]{a} > 0$; 5) $\sqrt{a} \geq 0$?

504°. Чи є правильним твердження:

- 1) значення виразу $\sqrt{a}$ існує, якщо $a \geq 0$;
2) значення виразу $\sqrt[3]{a}$ існує, якщо $a > 0$;
3) значення виразу $\sqrt{a}$ існує, якщо $a < 0$;
4) значення виразу $\sqrt[3]{a}$ існує, якщо $a < 0$?

505°. Чи правильно, що для додатного числа a :

- 1) $(\sqrt{a})^2 < 0$; 2) $(\sqrt{a})^2 = 0$; 3) $(\sqrt{a})^2 = -a$; 4) $(\sqrt{a})^2 = a$?

506°. Яка з формул є правильною для невід'ємного числа a :

- 1) $\sqrt{a} = a$; 2) $\sqrt{a} = 2a$; 3) $(\sqrt{a})^2 = a$; 4) $\sqrt{a} = a^2$?

507°. Яка з рівностей є правильною для додатних чисел x і y :

- 1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$; 3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$;
2) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x-y}$?

508°. Яка з рівностей є правильною для будь-якого a :

- 1) $\sqrt{a} = a$; 3) $\sqrt{a^2} = a$;
2) $\sqrt{a^2} = |a|$; 4) $\sqrt{a} = a^2$?

509°. Чи існує квадратний корінь із числа:

- 1) -1 ; 2) 2 ; 3) -36 ; 4) 40 ?

Відповідь поясніть.

510°. Чи існує квадратний корінь із числа:

- 1) 3 ; 2) -9 ; 3) -16 ?

511°. Знайдіть усі квадратні корені з числа:

- 1) 16 ; 3) 49 ; 5) 169 ; 7) 256 ;
2) 25 ; 4) 121 ; 6) 196 ; 8) 400 ;

- 9) $0,16$; 13) $1,69$; 17) $\frac{1}{16}$; 21) $\frac{1}{169}$;
10) $0,25$; 14) $1,96$; 18) $\frac{1}{25}$; 22) $\frac{1}{196}$;
11) $0,49$; 15) $2,56$; 19) $\frac{1}{49}$; 23) $\frac{1}{256}$;
12) $1,21$; 16) $0,04$; 20) $\frac{1}{121}$; 24) $\frac{1}{400}$.

512°. Знайдіть усі квадратні корені з числа:

- E** 1) 81 ; 4) 225 ; 7) $1,44$; 10) $\frac{1}{100}$;
2) 100 ; 5) $0,81$; 8) $2,25$; 11) $\frac{1}{144}$;
3) 144 ; 6) $0,01$; 9) $\frac{1}{81}$; 12) $\frac{1}{225}$.

513°. Якими даними потрібно доповнити таблицю 26?

Таблиця 26

a	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	225	625
$\sqrt{a}$												

514°. Чи має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{-7}$; 3) $\sqrt{0}$; 5) $\sqrt{5^2}$; 7) $\frac{5}{\sqrt{-4}}$;
2) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{(-8)^2}$; 6) $\sqrt{-3} + \sqrt{3}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{6}}$?

515°. Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $2^2 = 4$, то $\sqrt{4} = 2$;
2) якщо $(-2)^2 = 4$, то $\sqrt{4} = -2$;
3) якщо $(-5)^2 = 25$, то $\sqrt{25} = 5$;
4) якщо $8^2 = 64$, то $\sqrt{64} = 8$?

Відповідь поясніть.

516°. Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $10^2 = 100$, то $\sqrt{100} = 10$;
2) якщо $(-3)^2 = 9$, то $\sqrt{9} = -3$?

Відповідь поясніть.

517°. Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа:

- 1) 0,01; 3) 0,64; 5) 0,49; 7) 0,0001;
2) 0,04; 4) 0,36; 6) 0,0016; 8) 0,0004.

518°. Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа:

- E** 1) 0,09; 3) 0,25; 5) 0,0036;
2) 0,16; 4) 0,0049; 6) 0,0169.

519°. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; 5) $\sqrt{\frac{49}{64}}$; 7) $\sqrt{\frac{9}{16}}$;
2) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt{\frac{9}{100}}$; 6) $\sqrt{\frac{49}{100}}$; 8) $\sqrt{\frac{49}{81}}$.

520°. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{25}}$; 3) $\sqrt{\frac{25}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{36}{100}}$; 5) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 6) $\sqrt{\frac{81}{100}}$.

521°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{25} - \sqrt{81}$; 5) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{9}$;
2) $\sqrt{25} + \sqrt{9}$; 6) $\sqrt{36} : \sqrt{4} + \sqrt{64}$;
3) $\sqrt{49} + \sqrt{0} + \sqrt{9}$; 7) $\sqrt{100} : 2 + 3 \cdot \sqrt{9}$;
4) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$; 8) $\sqrt{100} \cdot 8 - 5 \cdot \sqrt{49}$.

522°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{4} + \sqrt{9}$; 5) $\sqrt{100} \cdot \sqrt{4}$;
2) $\sqrt{4} - \sqrt{64}$; 6) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{81} + 4\sqrt{16}$;
3) $\sqrt{16} : \sqrt{4} + 2$; 7) $\sqrt{4} \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{16}$;
4) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{64}$; 8) $\sqrt{36} \cdot 2 : \sqrt{9}$.

523°. Порівняйте числа:

- 1) $\sqrt{5}$ і 0; 5) $\sqrt{21}$ і $-\sqrt{7}$; 9) $\sqrt{99}$ і 10;
2) 0 і $-\sqrt{15}$; 6) 9 і $-\sqrt{90}$; 10) $\sqrt{62}$ і 8;
3) $\sqrt{100}$ і -10; 7) $\sqrt{17}$ і 4; 11) 6 і $\sqrt{39}$;
4) -4 і $\sqrt{2}$; 8) 3 і $\sqrt{8}$; 12) $\sqrt{12}$ і 4.

524°. Порівняйте числа:

- E** 1) $-\sqrt{6}$ і 0; 4) $\sqrt{35}$ і $-\sqrt{37}$; 7) 6 і $\sqrt{33}$;
2) 0 і $\sqrt{0,01}$; 5) $\sqrt{74}$ і 9; 8) $\sqrt{101}$ і 10;
3) -5 і $\sqrt{26}$; 6) 6 і $\sqrt{38}$; 9) $-\sqrt{101}$ і $\sqrt{99}$.

525°. Чи є правильною рівність:

- 1) $(\sqrt{8})^2 = 16$; 2) $(5)^2 = 5$; 3) $(\sqrt{10})^2 = -10$; 4) $(9)^2 = 3$?

526°. Обчисліть:

- 1) $(\sqrt{4})^2$; 4) $(\sqrt{9})^2$; 7) $(\sqrt{0,99})^2$; 10) $\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2$;
2) $(\sqrt{3})^2$; 5) $(-\sqrt{10})^2$; 8) $(\sqrt{1,1})^2$; 11) $\left(\sqrt{\frac{21}{50}}\right)^2$;
3) $(-\sqrt{3})^2$; 6) $(\sqrt{0,2})^2$; 9) $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$; 12) $\left(\sqrt{\frac{33}{81}}\right)^2$.

527°. Обчисліть:

- E** 1) $(\sqrt{2})^2$; 3) $(\sqrt{0})^2$; 5) $(-\sqrt{5,7})^2$;
2) $(-\sqrt{2})^2$; 4) $(\sqrt{0,7})^2$; 6) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

528°. Обчисліть:

- E** 1) $\sqrt{36 \cdot 1}$; 6) $\sqrt{100 \cdot 16 \cdot 9}$;
2) $\sqrt{9 \cdot 4}$; 7) $\sqrt{4 \cdot 100 \cdot 100}$;
3) $\sqrt{25 \cdot 4}$; 8) $\sqrt{64 \cdot 25 \cdot 4}$;
4) $\sqrt{81 \cdot 4}$; 9) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 25}$;
5) $\sqrt{81 \cdot 9}$; 10) $\sqrt{64 \cdot 16 \cdot 100}$.



qr.orioncentr.com.ua/4Deo2

529°. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{4 \cdot 1}$; 3) $\sqrt{25 \cdot 100}$; 5) $\sqrt{64 \cdot 36 \cdot 4}$;
2) $\sqrt{9 \cdot 64}$; 4) $\sqrt{16 \cdot 4}$; 6) $\sqrt{100 \cdot 1 \cdot 25}$.

530°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; 7) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$;
2) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}$; 5) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$; 8) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{8}$;
3) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,5}$; 6) $\sqrt{0,05} \cdot \sqrt{45}$; 9) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{0,02}$.

531°. Знайдіть значення виразу:

- E** 1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$; 3) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{35} \cdot \sqrt{7}$;
2) $\sqrt{0,03} \cdot \sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; 6) $\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{0,5}$.

532°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}}$;
 2) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$.

533°. Знайдіть значення виразу:

- E** 1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$.

534°. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{4^2}$; 3) $\sqrt{0^2}$; 5) $\sqrt{1,3^2}$; 7) $\sqrt{(-0,3)^2}$;
 2) $\sqrt{(-4)^2}$; 4) $\sqrt{(-90)^2}$; 6) $\sqrt{9,9^2}$; 8) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$.

535°. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{3^2}$; 2) $\sqrt{(-3)^2}$; 3) $\sqrt{11^2}$; 4) $\sqrt{(-5,4)^2}$; 5) $\sqrt{\left(1\frac{3}{4}\right)^2}$.

536°. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $2\sqrt{2}$; 4) $5\sqrt{3}$; 7) $2\sqrt{7}$; 10) $3\sqrt{10}$;
 2) $4\sqrt{2}$; 5) $3\sqrt{5}$; 8) $3\sqrt{7}$; 11) $3\sqrt{11}$;
 3) $2\sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{6}$; 9) $2\sqrt{10}$; 12) $2\sqrt{13}$.

537°. Внесіть множник під знак кореня:

- E** 1) $3\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{5}$; 5) $7\sqrt{10}$;
 2) $4\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{15}$.

538°. Внесіть множник з-під знака кореня:

- E** 1) $\sqrt{8}$; 9) $\sqrt{20}$;
 2) $\sqrt{32}$; 10) $\sqrt{125}$;
 3) $\sqrt{72}$; 11) $\sqrt{250}$;
 4) $\sqrt{162}$; 12) $\sqrt{500}$;
 5) $\sqrt{12}$; 13) $\sqrt{300}$;
 6) $\sqrt{45}$; 14) $\sqrt{80}$;
 7) $\sqrt{75}$; 15) $\sqrt{180}$;
 8) $\sqrt{128}$; 16) $\sqrt{405}$.



qr.orioncentr.com.ua/TcYIK

539°. Внесіть множник з-під знака кореня:

- E** 1) $\sqrt{18}$; 3) $\sqrt{98}$; 5) $\sqrt{200}$; 7) $\sqrt{48}$;
 2) $\sqrt{50}$; 4) $\sqrt{28}$; 6) $\sqrt{27}$; 8) $\sqrt{108}$.

540°. Чи правильно додали арифметичні квадратні корені:

- 1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{10}$;
 2) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{10}$;
 3) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$?



qr.orioncentr.com.ua/lzusC

541°. Спростіть вираз:

- E** 1) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$;
 2) $7\sqrt{3} - \sqrt{3}$;
 3) $6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$;
 4) $9\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$;
 5) $3\sqrt{21} - 4\sqrt{21}$;

542°. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{10} + \sqrt{10}$;
 2) $-\sqrt{7} + \sqrt{7}$;

543°. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{10}(\sqrt{10} - 5)$;
 2) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$;
 3) $(\sqrt{18} + 1)\sqrt{2}$;
 4) $-\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;
 5) $(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 3)$;
 6) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 3)$;
 7) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$;
 8) $(\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 1)$;
 9) $(\sqrt{10} + 3)(\sqrt{10} - 3)$;
 10) $(\sqrt{6} + 4)(\sqrt{6} - 4)$;
 11) $(\sqrt{5} + 6)(\sqrt{5} - 6)$;
 12) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$;
 13) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$;
 14) $(\sqrt{13} + \sqrt{15})(\sqrt{13} - \sqrt{15})$;
 15) $(\sqrt{2} + 1)^2$;
 16) $(5\sqrt{2} - 1)^2$;
 17) $(\sqrt{3} + 1)^2$;
 18) $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$;
 19) $(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2$;
 20) $(2\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$.

544*. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$; 5) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$;
 2) $\sqrt{5}(6+\sqrt{5})$; 6) $(\sqrt{21}+\sqrt{11})(\sqrt{21}-\sqrt{11})$;
 3) $(\sqrt{8}+1)(\sqrt{2}-2)$; 7) $(\sqrt{2}-1)^2$;
 4) $(\sqrt{15}+4)(\sqrt{15}-4)$; 8) $(\sqrt{5}-2)^2$.

545*. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[3]{27}$; 3) $\sqrt[3]{64}$; 5) $\sqrt[3]{1}$; 7) $\sqrt[3]{27000}$;
 2) $\sqrt[3]{-8}$; 4) $\sqrt[3]{1000}$; 6) $\sqrt[3]{0,008}$; 8) $\sqrt[3]{0,064}$.

546*. Спростіть вираз:

- E** 1) $\sqrt[3]{-27}$; 3) $\sqrt[3]{125}$; 5) $\sqrt[3]{-1}$;
 2) $\sqrt[3]{-8}$; 4) $\sqrt[3]{1000000}$; 6) $\sqrt[3]{0,125}$.

547. Обчисліть, скориставшись таблицею квадратів:

- 1) $\sqrt{16900}$; 6) $\sqrt{7840000}$; 11) $\sqrt{0,0441}$;
 2) $\sqrt{409600}$; 7) $\sqrt{152100}$; 12) $\sqrt{0,3721}$;
 3) $\sqrt{202500}$; 8) $\sqrt{56250000}$; 13) $\sqrt{0,009604}$;
 4) $\sqrt{57600}$; 9) $\sqrt{1,44}$; 14) $\sqrt{29,16}$;
 5) $\sqrt{129600}$; 10) $\sqrt{0,0144}$; 15) $\sqrt{0,000625}$.

548. Обчисліть, скориставшись таблицею квадратів:

- 1) $\sqrt{52900}$; 4) $\sqrt{12250000}$; 7) $\sqrt{0,007396}$;
 2) $\sqrt{168100}$; 5) $\sqrt{0,0196}$; 8) $\sqrt{0,00000729}$;
 3) $\sqrt{688900}$; 6) $\sqrt{1,96}$; 9) $\sqrt{0,005625}$.

549. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; 3) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$; 5) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$;
 2) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 4) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; 8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

550. Обчисліть:

- E** 1) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{1\frac{32}{49}}$;
 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 4) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$.

551. Порівняйте числа:

- 1) $4\sqrt{3}$ і 7; 5) $5\sqrt{2}$ і 7; 9) $2\sqrt{0,01}$ і $\sqrt{0,09}$;
 2) $\sqrt{28}$ і $2\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{3}$ і $3\sqrt{2}$; 10) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ і $\sqrt{0,25}$;
 3) $3\sqrt{5}$ і 7; 7) $5\sqrt{6}$ і $6\sqrt{5}$; 11) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ і $\sqrt{2}$;
 4) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{18}$; 8) $14\sqrt{2}$ і $8\sqrt{7}$; 12) $\sqrt{\frac{1}{0,01}}$ і $\sqrt{105}$.

552. Порівняйте числа:

- 1) $5\sqrt{2}$ і 7; 4) $10\sqrt{11}$ і $11\sqrt{10}$; 7) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ і $\sqrt{0,25}$;
 2) $4\sqrt{5}$ і 9; 5) $6\sqrt{7}$ і $7\sqrt{6}$; 8) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ і $\sqrt{5}$;
 3) $4\sqrt{2}$ і $\sqrt{32}$; 6) $4\sqrt{0,25}$ і $\sqrt{0,49}$; 9) $\sqrt{4,5}$ і $2\sqrt{3}$.

553. Між якими двома послідовними цілими числами на координатній прямій розміщується число:

- 1) $\sqrt{2}$; 4) $-\sqrt{10}$; 7) $3\sqrt{3}$; 10) $-2\sqrt{7}$;
 2) $-\sqrt{6}$; 5) $\sqrt{14}$; 8) $5\sqrt{5}$; 11) $2\sqrt{1,1}$;
 3) $\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{21}$; 9) $2\sqrt{6}$; 12) $-3\sqrt{0,3}$?

554. Між якими двома послідовними цілими числами на координатній прямій розміщується число:

- 1) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$; 5) $-3\sqrt{6}$; 7) $2\sqrt{1,2}$;
 2) $-\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{23}$; 6) $5\sqrt{2}$; 8) $5\sqrt{0,1}$?

555. Обчисліть:

- 1) $(3\sqrt{2})^2$; 3) $(-5\sqrt{5})^2$; 5) $(-3\sqrt{5})^2$; 7) $(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2$;
 2) $(2\sqrt{3})^2$; 4) $(2\sqrt{2})^2$; 6) $(2\sqrt{0,4})^2$; 8) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$.

556. Обчисліть:

- 1) $(5\sqrt{3})^2$; 2) $(-10\sqrt{7})^2$; 3) $(2\sqrt{0,5})^2$; 4) $(-\frac{\sqrt{11}}{5})^2$.

557. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} + \sqrt{12,96}$; 4) $\sqrt{2\frac{1}{11}} \cdot \sqrt{23} \cdot \sqrt{1\frac{2}{9}}$;
 2) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{2\frac{7}{9}} - \sqrt{1,44}$; 5) $\sqrt{10} : \sqrt{3\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{0,01}$;
 3) $\sqrt{0} + \sqrt{3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{56}$; 6) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}}{\sqrt{10}}$.

558. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{0,11} \cdot \sqrt{\frac{1}{44}} + \sqrt{1,8} \cdot \sqrt{20}$; 3) $\sqrt{3\frac{4}{15}} \cdot \sqrt{0,75} \cdot \sqrt{1\frac{4}{5}}$;
 2) $\sqrt{0} : \sqrt{5\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3,84}$; 4) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{0,02}} + \frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{1,6}}$.

559. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{10}(\sqrt{28,9} - \sqrt{5,29})$; 5) $\sqrt{37^2 - 12^2}$;
 2) $\sqrt{\frac{1}{8}}(\sqrt{72} + \sqrt{32})$; 6) $(\sqrt{10} + 1)^2 + (\sqrt{10} - 1)^2$;
 3) $(\sqrt{1,3} + \sqrt{0,5})(\sqrt{1,3} - \sqrt{0,5})$; 7) $(\sqrt{6} + 2)^2 - (\sqrt{6} - 2)^2$;
 4) $\sqrt{65^2 - 16^2}$; 8) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.

560. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{0,9}(\sqrt{0,1} + \sqrt{0,4})$; 3) $\sqrt{26^2 - 10^2}$;
 2) $\sqrt{\frac{1}{5}}(\sqrt{20} + \sqrt{0,8})$; 4) $(2 + \sqrt{11})^2 + (2 - \sqrt{11})^2$.

561. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$; 6) $\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^2}$;
 2) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$; 7) $\sqrt{(\sqrt{15} - 2\sqrt{3})^2}$;
 3) $\sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$; 8) $\sqrt{(3\sqrt{3} - 5)^2}$;
 4) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2}$; 9) $\sqrt{(1 - \sqrt{8})^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{8})^2}$;
 5) $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$; 10) $\sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(3 + \sqrt{7})^2}$.

562. Спростіть вираз:

- E** 1) $\sqrt{(5 - \sqrt{23})^2}$; 3) $\sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{12})^2}$;
 2) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$; 4) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}$.

563. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $0,1\sqrt{3}$; 4) $-8\sqrt{0,2}$; 7) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 10) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$;
 2) $-3\sqrt{0,1}$; 5) $-2,4\sqrt{2}$; 8) $-\frac{4}{5}\sqrt{0,2}$; 11) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$;
 3) $1,1\sqrt{5}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$; 9) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$; 12) $\frac{2}{7}\sqrt{1\frac{1}{6}}$.

564. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $0,3\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; 5) $7\sqrt{0,1}$;
 2) $-5\sqrt{0,2}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{15}$; 6) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$.

565. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{0,03}$; 3) $\sqrt{1,69}$; 5) $\sqrt{\frac{8}{15}}$; 7) $\sqrt{2\frac{2}{7}}$;
 2) $\sqrt{0,08}$; 4) $\sqrt{22,5}$; 6) $\sqrt{\frac{45}{49}}$; 8) $\sqrt{1\frac{11}{13}}$.

566. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{0,05}$; 3) $\sqrt{28,9}$; 5) $\sqrt{\frac{7}{36}}$;
 2) $\sqrt{0,121}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{20}}$; 6) $\sqrt{3\frac{4}{15}}$.

567. Розкладіть на множники:

- 1) $\sqrt{12} + \sqrt{72}$; 4) $3\sqrt{11} - 11$; 7) $\sqrt{15} + 3\sqrt{30} + \sqrt{45}$;
 2) $\sqrt{45} - 2\sqrt{27}$; 5) $2\sqrt{7} - 14$; 8) $5\sqrt{10} - \sqrt{50} + \sqrt{200}$;
 3) $\sqrt{2} + 2$; 6) $-36 + \sqrt{6}$; 9) $12 - \sqrt{18} - \sqrt{27}$.

568. Розкладіть на множники:

- 1) $\sqrt{30} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5} + 5$; 5) $\sqrt{3} + 6$;
 2) $\sqrt{17} + 3\sqrt{34}$; 4) $10 - \sqrt{10}$; 6) $\sqrt{12} - \sqrt{15} + 3\sqrt{42}$.

569. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{4,5}}{\sqrt{10}-1}$; 6) $\frac{\sqrt{4,41}-2\sqrt{2,1}+1}{1-\sqrt{2,1}}$;
- 2) $\frac{\sqrt{48}+2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+1}$; 7) $\frac{\sqrt{1,44}+2\sqrt{3,6}+3}{\sqrt{3}+2\sqrt{0,3}}-0,4\sqrt{7,5}$;
- 3) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{27}}{\sqrt{0,12}+\sqrt{3}}$; 8) $\frac{2}{5+2\sqrt{6}}+\frac{2}{5-2\sqrt{6}}$;
- 4) $\frac{\sqrt{225}+2\sqrt{625}}{\sqrt{169}}$; 9) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{15}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- 5) $\frac{\sqrt{0,3}-\sqrt{0,6}}{1-\sqrt{2}}$; 10) $\frac{1}{8+2\sqrt{7}}+\frac{1}{8-2\sqrt{7}}$.

570. Спростіть вираз:

- E** 1) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}$; 2) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+2}$;
- 3) $\frac{\sqrt{0,81}+\sqrt{27}}{\sqrt{0,27}+3}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$.

571. Спростіть вираз:

- 1) $2\sqrt{2}+\sqrt{8}$; 4) $3\sqrt{10}-\sqrt{40}+\sqrt{90}$;
- 2) $5\sqrt{12}-\sqrt{27}$; 5) $\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}$;
- 3) $\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{45}$; 6) $\sqrt{9,8}-0,2\sqrt{45}+\sqrt{2,45}$.

572. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{7}+\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}$.

573*. Доведіть, що:

- 1) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$; 4) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}=1$;
- 2) $\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=1$; 5) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=1$;
- 3) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1$; 6) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}=1$.

574*. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{2\sqrt{2}+3}$; 4) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

575*. Доведіть, що:

- 1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$;
- 2) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=4$.

576*. Порівняйте числа:

- 1) $\sqrt{4\sqrt{3}}$ і $\sqrt{3\sqrt{4}}$; 3) $\sqrt{2\sqrt{5}}$ і $4-\sqrt{3}$;
- 2) $4-\sqrt{5}$ і $3-\sqrt{2}$; 4) $1+\sqrt{2}$ і $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Проявіть компетентність

577. Підлога кімнати має форму квадрата з площею 36 м².

1. Які розміри кімнати?
2. Скільки метрів багета знадобиться, щоб оздобити всі стики стелі зі стінами в кімнаті?

§ 14. МНОЖИНА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

1. Що таке множина

Ситуація. Марина вирішила написати свої оцінки за жовтень, але ніяк не могла придумати, як краще подати ці дані.



Як можна подати ці дані?

Скориставшись поняттям множини та правилом її запису.



Поняття «*множина*» належить до первинних понять математики. Воно не має точного означення. Такими поняттями в математиці є також поняття «число», «точка».

Множину розуміють як сукупність (набір, групу тощо) об'єктів, які об'єднані деякою спільною ознакою. Отже, Марина утворювала множину своїх оцінок за жовтень місяць.

Іншими прикладами множин можуть бути множина літер українського алфавіту, множина учнів 8 класу, множина зірок Всесвіту, множина парних чисел.

Об'єкти, з яких складається множина, називають *елементами множини*. Для позначення множин зазвичай використовують великі латинські літери *A, B, C...*, а для позначення елементів множин — малі латинські літери *a, b, c...*


qr.orioncentr.com.ua/u223J



Якщо множина A складається з елементів a, b і c , то це записують так: $A = \{a; b; c\}$.

Нехай Марина за жовтень отримала всі можливі бали від 8 до 12, тоді множину B її оцінок можна записати так:

$$B = \{8; 9; 10; 11; 12\}.$$

У цій множині п'ять елементів: 8; 9; 10; 11; 12.

2. Як задати множину



Чи можна записати, що a є елементом множини A , а d не є елементом цієї множини?

Так.



Для цього використовують спеціальні знаки: $\in$ — означає «належить»; $\notin$ — означає «не належить».



Коротко записують так: $a \in A, d \notin A$.

Множину можна задати переліком її елементів. У такий спосіб задано, наприклад, множину $A = \{a; b; c\}$.

Множину також можна задати, описавши її характеристичні властивості. Наприклад: C — множина місяців року; $M = \{x \mid x \text{ — цифра десяткової системи числення}\}$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною*. Для її позначення використовують спеціальний знак: $\emptyset$.

3. Підмножина

Розглянемо дві множини: $A = \{a; b; c\}$ і $B = \{b; c\}$. Як бачимо, усі елементи множини B належать множині A . Інакше говорять: множина B міститься в множині A . Тому множину B називають *підмножиною* множини A .



Коротко це записують так: $B \subset A$.

Наприклад, множина дівчаток 8 класу є підмножиною множини всіх учнів цього класу, а множина всіх учнів 8 класу, своєю чергою, є підмножиною множини учнів школи.

4. Раціональні числа. Ірраціональні числа

У 5 класі ви вивчали числа, які використовують для лічби, — натуральні числа. Усі натуральні числа утворюють *множину натуральних чисел*. Отже, кожне натуральне число є елементом множини натуральних чисел.

Множину натуральних чисел позначають буквою N :

$$N = \{1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

У 6 класі ви вивчали й інші числові множини — множину цілих чисел і множину раціональних чисел.

Множину цілих чисел утворюють натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль:

$$Z = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел:

$$N \subset Z.$$

Цілі числа та дробові числа утворюють *множину раціональних чисел*. Будь-яке раціональне число можна подати як нескоротний дріб, у якому чисельник є цілим числом, а знаменник — натуральним числом:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}, \text{ де } m \in Z, n \in N \right\}.$$

Множина цілих чисел є підмножиною раціональних чисел. Можемо записати:

$$N \subset Z \subset Q.$$

Запам'ятайте!

Дріб $\frac{m}{n}$ ($m \in Z, n \in N$) можна подати або як *скінченний десятковий дріб*, або як *нескінченний періодичний десятковий дріб*.

Наприклад:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \text{ — скінченний десятковий дріб;}$$

$$\frac{1}{9} = 0,111111\dots = 0,(1) \text{ — нескінченний періодичний десятковий дріб з періодом 1.}$$

Зауважимо, що скінченний десятковий дріб також можна подати як нескінченний періодичний десятковий дріб з періодом 0:

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,2500000... = 0,25(0).$$

✓ Кожне раціональне число можна подати як нескінченний періодичний десятковий дріб. І навпаки, кожен нескінченний періодичний десятковий дріб є раціональним числом.

Задача 1 Запишіть як нескінченний періодичний десятковий дріб число: 1) 5; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{1}{7}$.

Укажіть період одержаного дробу.

Розв'язання

1. $5 = 5,0000... = 5,(0)$, період дробу — число 0.
2. $\frac{1}{5} = 0,2 = 0,20000... = 0,2(0)$, період дробу — число 0.
3. $\frac{5}{12} = 0,416666... = 0,41(6)$, період дробу — число 6.
4. $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857... = 0,(142857)$, період дробу — число 142857.

Запам'ятайте!

Числа, які не можна подати як нескінченні періодичні десяткові дроби, називаються *ірраціональними числами*.

У десятковому записі ірраціональних чисел не існує періоду. Це — *нескінченні неперіодичні десяткові дроби*. Множина ірраціональних чисел має нескінченно багато елементів. Її позначають буквою I .

Наведемо приклади ірраціональних чисел. Найбільш відомим ірраціональним числом є число π :

$$\pi = 3,1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 502...$$

Прикладами ірраціональних чисел також є числа:

$$\sqrt{2} = 1,4142135...; \sqrt{3} = 1,7320508...; \sqrt{5} = 2,2360679... \text{ тощо.}$$



Чи кожен квадратний корінь з раціонального числа є ірраціональним числом?

Ні. Наприклад, число $\sqrt{100} = 10$ є раціональним числом, більше того, є натуральним числом.



5. Дійсні числа

qr.orioncentr.com.ua/SSIQW

Запам'ятайте!

Множина чисел, яку разом утворюють множина раціональних чисел і множина ірраціональних чисел, називається *множиною дійсних чисел*.



Множину дійсних чисел позначають буквою R .

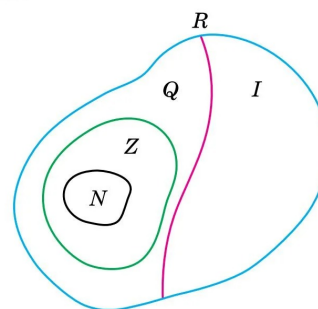
Множина раціональних чисел є підмножиною дійсних чисел: $Q \subset R$.

Множина ірраціональних чисел є підмножиною дійсних чисел: $I \subset R$.



✓ Кожне дійсне число є або раціональним числом, або ірраціональним числом.

Співвідношення між натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними та дійсними числами показано на малюнку 40.



Мал. 40

Задача 2

Серед чисел 0, $-\sqrt{19}$, 0,09, 12, $\sqrt{81}$ укажіть числа:

- 1) натуральні;
- 2) цілі;
- 3) раціональні;
- 4) ірраціональні;
- 5) дійсні.

Розв'язання

1. Натуральними є числа 12 і $\sqrt{81}$, оскільки $\sqrt{81} = 9$.
2. Цілими є числа 12, $\sqrt{81}$ і 0.
3. Раціональними є числа 0, 0,09, 12, $\sqrt{81}$.
4. Ірраціональним є число $-\sqrt{19}$.
5. Дійсними є всі дані числа: 0, $-\sqrt{19}$, 0,09, 12, $\sqrt{81}$.



Кожне натуральне число є і цілим числом, і раціональним числом, і дійсним числом;

- **кожне** ціле число є як раціональним числом, так і дійсним числом;
- **кожне** ірраціональне число є дійсним числом;
- **не кожне** дійсне число є раціональним числом;
- **не кожне** дійсне число є ірраціональним числом.

Для дійсних чисел виконуються ті самі властивості додавання та множення, що й для раціональних чисел.

Задача 3

Порівняйте числа: 1) 2,34 і 2,(3); 2) 1,(41) і $\sqrt{2}$.

Розв'язання

1. Подамо даний періодичний дріб у розгорнутому вигляді:

Порівняємо дроби порозрядно:

Отже,

$$2,(3) = 2,333\dots$$

$$2,34 > 2,333\dots$$

$$2,34 > 2,(3).$$

2. Подамо перший періодичний дріб у розгорнутому вигляді:

Подамо друге число як нескінченний періодичний дріб:

Порівняємо дроби порозрядно:

Отже,

$$1,(41) = 1,4141\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots$$

$$1,4141\dots < 1,4142\dots$$

$$1,(41) < \sqrt{2}.$$



Кожне дійсне число можна позначити на координатній прямій, і навпаки — кожній точці координатної прямої відповідає деяке дійсне число.

Інакше можна сказати, що існує *взаємно однозначна відповідність* між множиною точок координатної прямої та множиною дійсних чисел.



Між будь-якими двома цілими числами міститься нескінченна кількість як раціональних чисел, так і ірраціональних чисел, а отже, дійсних чисел.

Дізнайтеся більше

1. Терміни «раціональне число» та «ірраціональне число» походять від латинського слова *ratio* — розум (буквальний переклад: «раціональне число — розумне число», «ірраціональне число — нерозумне число»).

2. Число π — число, яке дорівнює відношенню довжини кола до довжини його діаметра. Про це число пишуть картини, знімають фільми, його «грають» на музичних інструментах, йому присвячують вірші та свята, його шукають і знаходять у священних текстах, установлюють рекорди щодо його запам'ятовування. Так, китаєць Лю Прат установив рекорд із запам'ятовування послідовності цифр числа π . Протягом 24 год 4 хв Лю Прат назвав 67 890 знаків після коми, не допустивши жодної помилки.

У світі святкують міжнародний день числа «Пі» — 14 березня. Святкування починається рівно о 1 год 59 хв 26 с. Таким чином, дата (згідно із західною традицією, спочатку записують місяць, а потім день: 03.14) і час початку святкування відповідають першим знакам числа π — 3,1415926.

Цікаво, що Альберт Ейнштейн народився в день числа π (3.14.1879).

Вважають, що встановлення найбільш точного значення числа π серед стародавніх учених належить Архімеду. Учений, досліджуючи відношення периметрів вписаного й описаного 96-кутників до діаметра кола, одержав: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Архімед виразив наближене значення числа π у вигляді дробу $\frac{22}{7}$, який на його честь називають

архімедовим числом.

У 2010 р. співробітник компанії Yahoo математик Ніколас Чже зміг обчислити в числі π два квадрильйони (2^{10}) знаків після коми.

Для того щоб просто записати його на папері, знадобиться паперова стрічка, більш як два мільярди кілометрів завдовжки. Якщо розгорнути такий запис, кінець стрічки вийде за межі Сонячної системи.

Позначення π (від початкової літери грецьких слів $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ — коло, периферія та $\tau\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ — периметр) уперше трапляється в книзі «Новий вступ до математики» (1706 р.) британського вченого Уільяма Джонса. Загальноновизнаним це позначення стало після праць Леонарда Ейлера в 1737 р.



Пам'ятник числу π перед будівлею Музею мистецтв у Сіетлі

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/JCVM4

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ірраціональне число	irrational number	irrationale Zahl (f)	nombre irrationnel

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке множина; підмножина. Наведіть приклади.
2. Як позначають множину натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел?
3. Які числа називають ірраціональними?
4. Як позначають множину ірраціональних чисел?
5. Які числа називаються дійсними?
6. Як позначають множину дійсних чисел?
7. Як пов'язані між собою раціональні, ірраціональні та дійсні числа?

Усне тренування

1. Обчисліть:

1) $0,25 \cdot 16 \cdot 0,125 \cdot 8$; 2) $120\,012 : 12 - 110\,110 : 11$.

2. Розставте у виразі знаки дій «+», «-», «:», «·» та дужки так, щоб отримати правильну рівність:

1) $2^4 2^2 2^3 2^2 2^1 = 8$; 2) $2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 = 18$; 3) $2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 = 22$.

Розв'яжіть задачі

578*. Назвіть елементи:

- 1) множини днів тижня;
- 2) множини планет Сонячної системи;
- 3) множини парних натуральних чисел, які менші від числа 10.

579*. Чи правильно, що:

- 1) множина днів тижня є підмножиною множини днів місяця;
- 2) множина, що складається із Землі та Місяця, є підмножиною множини планет Сонячної системи;
- 3) множина одноцифрових натуральних чисел є підмножиною множини парних натуральних чисел?

580*. Чи правильно, що дане число є елементом множини раціональних чисел:

- 1) 5; 3) $\sqrt{2}$; 5) 5,111...; 7) -5,1;
- 2) 0; 4) $\sqrt{9}$; 6) $\frac{4}{7}$; 8) $-\sqrt{3}$?

581*. Чи правильно, що дане число є елементом множини ірраціональних чисел:

- 1) 5; 3) $\sqrt{2}$; 5) 5,111...; 7) -5,1;
- 2) 0; 4) $\sqrt{9}$; 6) $\frac{4}{7}$; 8) $-\sqrt{3}$?

582*. Наведіть приклад множини та її підмножини з довкілля.

583*. Утворіть множину із членів своєї родини. Наведіть приклади її підмножин.

584*. Дано множину $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Яка із заданих множин є підмножиною множини A :

- 1) $B = \{1; 5; 10\}$; 3) $D = \{10; 20\}$; 5) $M = \{6; 7; 8; 9\}$;
- 2) $C = \{2; 4; 6\}$; 4) $E = \{3\}$; 6) $N = \{1\}$?

585°. Дано множину $M = \{3; 6; 9; 12; 15\}$. Яка із заданих

E множин є підмножиною множини M :
 $A = \{3; 9; 27\}$, $B = \{6; 15\}$, $C = \{3; 30\}$?

586°. Запишіть усі підмножини множини:

- 1) $A = \{10; 20; 30\}$; 3) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;
 2) $B = \{100; 1000; 10000\}$; 4) $M = \{\blacksquare; \bullet; \blacklozenge\}$;

587°. Укажіть період числа:

- 1) 4,1111...; 6) -34;
 2) 2,35; 7) 100,1;
 3) 0,3535353...; 8) 99;
 4) 5,7777...; 9) 9,010101...;
 5) 2,123123123...; 10) 0,445566445566....

Запишіть дане число як періодичний дріб.

588°. Укажіть період числа:

- E** 1) 8; 3) 1,554444...;
 2) 2,2222...; 4) 0,4235235235....

Запишіть дане число як періодичний дріб.

589°. Запишіть як нескінченний
 десятиковий дріб число:

- E** 1) 2,(8); 5) 21,88(9);
 2) 19,(3); 6) 4,5(0);
 3) 1,3(25); 7) 21,(0);
 4) 5,9(87); 8) 5,101(12).



qr.orioncentr.com.ua/1KXA5

590°. Запишіть як нескінченний
 десятиковий дріб число:

- 1) 3,(4); 2) 5,5(12); 3) 7,54(0); 4) 6,(0).

591°. Запишіть як десятиковий дріб число:

- 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5}{6}$; 5) $-\frac{5}{11}$;
 2) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{1}{13}$; 6) $-1\frac{2}{7}$.

Укажіть період одержаного дробу.

592°. Запишіть як періодичний десятиковий дріб число:

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{1}{15}$; 5) $-\frac{3}{14}$.

Укажіть період одержаного дробу.

593°. Чи є правильним твердження:

- 1) $\frac{1}{9}$ — дійсне число;
 2) 5 — раціональне число;
 3) -11 — дійсне число;
 4) $-\frac{2}{7}$ — ірраціональне число;
 5) -11 — раціональне число;
 6) 5 — ціле число;
 7) 2,4444... — ірраціональне число;
 8) 1,55555... — дійсне число;
 9) $\sqrt{7}$ — раціональне число;
 10) π — ціле число;
 11) π — дійсне число;
 12) $\sqrt{121}$ — натуральне число?

594°. Чи є правильним твердження:

- E** 1) $\frac{2}{3}$ — дійсне число;
 2) -11 — дійсне число;
 3) $\sqrt{5}$ — раціональне число;
 4) $-\frac{1}{5}$ — ірраціональне число?

595°. Чи є правильним твердження:

- 1) $5 \in N$; 6) $-5 \in N$; 11) $\frac{1}{5} \in N$; 16) $\sqrt{5} \in N$;
 2) $5 \in Z$; 7) $-5 \in Z$; 12) $\frac{1}{5} \in Z$; 17) $\sqrt{5} \in Z$;
 3) $5 \in Q$; 8) $-5 \in Q$; 13) $\frac{1}{5} \in Q$; 18) $\sqrt{5} \in Q$;
 4) $5 \in I$; 9) $-5 \in I$; 14) $\frac{1}{5} \in I$; 19) $\sqrt{5} \in I$;
 5) $5 \in R$; 10) $-5 \in R$; 15) $\frac{1}{5} \in R$; 20) $\sqrt{5} \in R$?

596°. Чи є правильним твердження:

- E** 1) $2 \in N$; 3) $2 \in Q$; 5) $-\sqrt{2} \in R$;
 2) $-2 \in Z$; 4) $\frac{1}{8} \in I$; 6) $-\sqrt{16} \in N$?

597*. Серед чисел $-0,(4)$, 1 , $-\frac{9}{3}$, 0 , $-\frac{1}{2}$, 4 , $-\frac{3}{5}$, $1,0333\dots$, 9 ,



$\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$ оберіть числа:

- 1) натуральні;
- 2) цілі;
- 3) раціональні;
- 4) ірраціональні.



qr.orioncentr.com.ua/OOxFV

598*. Серед чисел $-\frac{12}{6}$, $-3,(9)$, 0 , $\sqrt{25}$, $7,8888\dots$, -5 , $\sqrt{2}$,

$-\frac{1}{3}$, $-\sqrt{8}$, 22 , $\frac{\sqrt{17}}{2}$ оберіть числа: 1) натуральні;

2) цілі; 3) раціональні; 4) ірраціональні; 5) дійсні.

599*. Наведіть приклад числа, яке:

- 1) є дійсним, але не є раціональним;
- 2) є раціональним, але не є цілим;
- 3) є від'ємним ірраціональним.

600*. Наведіть приклад числа, яке:

- 1) є дійсним, але не є ірраціональним;
- 2) є раціональним, але не є натуральним.

601*. Визначте, скільки між числами -7 і -4 міститься чисел:

- 1) натуральних;
- 2) цілих;
- 3) раціональних;
- 4) ірраціональних;
- 5) дійсних.

602*. Порівняйте числа:

- 1) $4,105$ і $5,01$;
- 2) $3,056$ і $3,0(5)$;
- 3) $5,1412$ і $5,(14)$;
- 4) $3,056$ і $3,0(6)$;
- 5) 10 і $9,(9)$;
- 6) $4,3(4)$ і $4,4(3)$;
- 7) $0,0(5)$ і $1,00(5)$;
- 8) $3,056$ і $3,0(5)$.

603*. Порівняйте числа:

- 1) 15 і $15,(1)$;
- 2) $5,342$ і $5,333\dots$;
- 3) $0,165$ і $0,16(5)$;
- 4) $2,999\dots$ і $2,(10)$.

604*. Чи є підмножиною множини Z дана множина:

- 1) $A = \{1; 2; 3\}$; 2) $C = \{0\}$; 3) $D = \{-1; 1\}$; 4) $B = \{x \mid x \text{ — парне натуральне число}\}$

605. Чи є підмножиною множини I дана множина:

- 1) $A = \{1; \sqrt{2}; 3\}$; 3) $C = \{x \mid x \text{ — раціональне число}\}$;
- 2) $B = \{\sqrt{3}\}$; 4) $M = \{x \mid x \text{ — дійсне число}\}$?

606. Чи є правильним твердження:

- 1) $N \subset I$; 2) $I \subset Q$; 3) $Q \subset Z$; 4) $Q \subset R$; 5) $R \subset I$; 6) $Q \subset I$?

607. Дано множини: $A = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $C = \{-4; -2; 2; 4\}$, $D = \{0\}$. Запишіть множину:

- 1) M , для якої $M \subset A$ і $M \subset C$;
- 2) P , для якої $A \subset P$ і $B \subset P$;
- 3) N , для якої $N \subset A$ і $N \subset B$;
- 4) H , для якої $A \subset H$, $B \subset H$ і $D \subset H$.

608. Порівняйте числа:

- 1) $0,(8)$ і $\frac{3}{8}$;
- 2) $0,(5)$ і $\frac{5}{9}$;
- 3) $0,(18)$ і $\frac{1}{11}$;
- 4) $0,(6)$ і $\frac{3}{5}$;
- 5) $0,08(3)$ і $\frac{1}{6}$;
- 6) $0,(2)$ і $\frac{1}{3}$.

609. Порівняйте числа:

- 1) $0,0(6)$ і $\frac{1}{16}$;
- 2) $0,(45)$ і $\frac{5}{11}$;
- 3) $0,1(4)$ і $\frac{1}{7}$;
- 4) $0,(7)$ і $\frac{7}{9}$.

610*. Значення виразу $\sqrt{17-4\sqrt{15}} + \sqrt{2\sqrt{10}+7} - \sqrt{2}$ є ірраціональним числом. Доведіть.

611*. За яких значень x значення виразу $\sqrt{5-x}$ є ірраціональним числом, якщо x — ціле невід'ємне число?

612*. Визначте, як відносяться до діаметра кола периметри вписаного в нього й описаного навколо нього:

- 1) рівностороннього трикутника; 2) квадрата.

Запишіть відповідні оцінки для числа π .

Проявіть компетентність

613. Нехай A — множина учнів вашого класу. Скільки елементів містить множина A ? Утворіть чотири підмножини множини A .

614. На парті лежать щоденник, підручник, зошит і ручка. Назвіть усі підмножини множини предметів на парті.

§ 15. ПЕРЕТВОРЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

qr.orioncentr.com.ua/70qG6



1. Що таке ірраціональний вираз

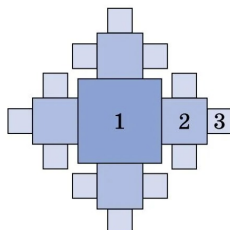
Ситуація. Сергій побудував фрактал (мал. 41) і вивів формулу для обчислення площі цієї фігури:

$$S = a^2 + 4b^2 + 12c^2,$$

де a — сторона квадрата 1,
 b — сторона квадрата 2,
 c — сторона квадрата 3.

З неї Сергій вирішив вивести формулу для обчислення сторони a квадрата 1 й отримав вираз:

$$a = \sqrt{S - 4b^2 - 12c^2}.$$



Мал. 41



Чи є отриманий вираз ірраціональним?

Так.



Вирази, що містять **квадратні корені** з чисел, числових виразів чи виразів зі змінними, є різновидом **ірраціональних виразів**.

Наприклад, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2 \cdot 9}$, $\sqrt{x-2}$, $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ — ірраціональні вирази. З іншими видами ірраціональних виразів ви ознайомитеся в наступних класах.

2. Допустимі й недопустимі значення змінної ірраціонального виразу

Кожний із виразів $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2 \cdot 9}$, $\sqrt{x-2}$, $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ містить дію добування квадратного кореня. Проте у виразах $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2 \cdot 9}$ під коренем міститься додатне число або числовий вираз, який набуває додатного значення, а у виразах $\sqrt{x-2}$, $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ — вираз зі змінною. Перші два вирази завжди мають

зміст. А от про інші два вирази такого однозначно сказати не можна, оскільки значення підкореневого виразу залежить від значення змінної x . Наприклад:

• якщо $x = 3$, то $\frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{3+1}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$ і даний вираз

має зміст;

• якщо $x = -5$, то $\frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{-5+1}} = \frac{4}{\sqrt{-4}}$ і даний вираз **втрачає зміст**, оскільки не можна добути квадратний корінь з від'ємного числа;

• якщо $x = -1$, то $\frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{-1+1}} = \frac{4}{\sqrt{0}} = \frac{4}{0}$ і даний вираз **втрачає зміст**, оскільки на нуль ділити не можна.



Якщо A — вираз зі змінними і $A = 0$, то $\sqrt{A} = 0$.

І навпаки, якщо $\sqrt{A} = 0$, то $A = 0$.

Як бачимо, для виразу $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ числа -5 і -1 є **недопустимими значеннями змінної**. Існує безліч інших значень змінної x , за яких даний вираз втрачає зміст. Отже, для ірраціонального виразу зі змінними необхідно шукати ОДЗ його змінних. Як саме це можна зробити, ви дізнаєтесь у наступних класах.

Запам'ятайте!

Нехай A — вираз зі змінними. Тоді:

- вираз $\sqrt{A}$ **має зміст**, якщо $A \geq 0$;
- вираз $\frac{1}{\sqrt{A}}$ **має зміст**, якщо $A > 0$.



Чому для виразу $\frac{1}{\sqrt{A}}$ приймаємо саме таке обмеження: $A > 0$?

Якщо $A = 0$, то $\sqrt{A} = 0$, а на нуль ділити не можна.



 Надалі перетворення ірраціональних виразів здійснюємо на ОДЗ змінних цих виразів.

3. Перетворення ірраціональних виразів

qr.orioncentr.com.ua/0uyan



Як діяти, щоб перетворювати ірраціональні вирази?

Спираючись на їхні основні властивості.



Запам'ятайте!

Нехай A і B — деякі вирази, тоді:

$$1. \sqrt{A} \geq 0. \quad 2. (\sqrt{A})^2 = A. \quad 3. \sqrt{A^2} = |A|.$$

$$4. \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}. \quad 5. \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Задача 1 Розкладіть на множники вираз:

1) $3\sqrt{a} - b\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{a+ab}$; 3) $x^2 - 3$; 4) $x - 4$, якщо $x > 0$.

Розв'язання

1. Винесемо за дужки $\sqrt{a}$. Тоді: $3\sqrt{a} - b\sqrt{a} = \sqrt{a}(3 - b)$.

2. Скористаємося формулою $(\sqrt{a})^2 = a$. Тоді:

$$\sqrt{a+ab} = \sqrt{a + (\sqrt{a})^2 b} = \sqrt{a(1 + \sqrt{a} \cdot b)} = \sqrt{a}(1 + b\sqrt{a}).$$

3. Скористаємося формулою $(\sqrt{a})^2 = a$ та формулою різниці квадратів. Тоді:

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

4. Скористаємося формулою $(\sqrt{a})^2 = a$ та формулою різниці квадратів. Тоді, оскільки $x > 0$, то:

$$x - 4 = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2).$$

Останні два приклади є особливими. Розв'язуючи їх, ми застосували формулу $(\sqrt{a})^2 = a$, «прочитавши» її справа наліво. Це дало нам змогу подати число 3 та змінну x як квадрати ірраціональних виразів $\sqrt{3}$ та $\sqrt{x}$ відповідно. Узагалі, два вирази виду $a - b$ та $a + b$ називають *взаємно спряженими*. Наприклад, $x - \sqrt{3}$ і $x + \sqrt{3}$ та $\sqrt{x} - 2$ і $\sqrt{x} + 2$ відповідно.

4. Внесення множника під знак кореня. Винесення множника з-під знака кореня



Як діяти, щоб внести множник під знак кореня?

Спираючись на основні властивості.



Задача 2 Внесіть множник під знак кореня:

1) $ab\sqrt{x}$, якщо $a > 0, b < 0$; 2) $x\sqrt{x^2}$.

Розв'язання

1. Якщо $a > 0$, то: $a = \sqrt{a^2}$.

Якщо $b < 0$, то $-b > 0$ і тому: $-b = \sqrt{(-b)^2}$.

$$\begin{aligned} ab\sqrt{x} &= a \cdot (-b) \cdot \sqrt{x} = \\ &= \sqrt{a^2} \cdot (-\sqrt{(-b)^2}) \cdot \sqrt{x} = -\sqrt{a^2(-b)^2} x = -\sqrt{a^2 b^2} x. \end{aligned}$$

Отже: якщо $a > 0, b < 0$, то $ab\sqrt{x} = -\sqrt{a^2 b^2} x$.

2. Якщо $x \geq 0$, то: $x = \sqrt{x^2}$.

Тоді: $x\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 \cdot x^2} = \sqrt{x^4}$.

Якщо $x < 0$, то: $-x > 0$ і $-x = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2}$.

Тоді: $x\sqrt{x^2} = -(-x) \cdot \sqrt{x^2} = -\sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{x^2} = -\sqrt{x^2 \cdot x^2} = -\sqrt{x^4}$.

Отже: $x\sqrt{x^2} = \begin{cases} \sqrt{x^4}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^4}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

 Під час внесення множника під знак кореня необхідно враховувати, яким саме є цей множник: додатним, від'ємним чи таким, що дорівнює нулю.



Як діяти, щоб винести множник з-під знака кореня?

Спираючись на основні властивості.



Задача 3

Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{2y^2}$, якщо $y > 0$; 2) $\sqrt{2y^2}$, якщо $y < 0$; 3) $\sqrt{x^4y^3}$.

Розв'язання

1. Скористаємося властивістю: $\sqrt{y^2} = |y|$. Оскільки $y > 0$, то $|y| = y$, звідси $\sqrt{y^2} = y$. Отже, якщо $y > 0$, то $\sqrt{2y^2} = y\sqrt{2}$.

2. Скористаємося властивістю: $\sqrt{y^2} = |y|$. Оскільки $y < 0$, то $|y| = -y$, звідси $\sqrt{y^2} = -y$. Отже, якщо $y < 0$, то $\sqrt{2y^2} = -y\sqrt{2}$.

3. Оскільки підкореневий вираз $x^4y^3 \geq 0$ і $x^4 \geq 0$, то $y^3 \geq 0$, а значить, $y \geq 0$. Звідси:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4y^3} &= \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{(x^2)^2} \cdot \sqrt{y^2 \cdot y} = \sqrt{(x^2)^2} \cdot \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y} = \\ &= |x^2| \cdot |y| \cdot \sqrt{y} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt{y} = x^2y\sqrt{y}.\end{aligned}$$

 Під час винесення множника з-під знака кореня необхідно враховувати, яким саме є цей множник: додатним, від'ємним чи таким, що дорівнює нулю.

5. Ірраціональність у знаменнику дробу



Що таке ірраціональність у знаменнику дробу?

Наявність одного чи кількох квадратних коренів у знаменнику цього дробу.



 Звільнитися від ірраціональності в знаменнику означає перетворити дріб так, щоб знаменник дробу не містив квадратних коренів.

Задача 4

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання

1. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Знайдемо вираз, спряжений для виразу $\sqrt{x+1}$: $\sqrt{x-1}$.

Помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x \cdot (\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{x \cdot (\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x})^2 - 1} = \frac{x\sqrt{x-1}}{x-1}.$$



Щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу, потрібно помножити його чисельник і знаменник:

- на $\sqrt{A}$, якщо знаменник дробу є добутком, що містить $\sqrt{A}$ і не містить інших ірраціональностей;
- на вираз, спряжений зі знаменником, якщо знаменник дробу містить суму (різницю) двох виразів, принаймні один з яких є ірраціональним.

qr.orioncentr.com.ua/lrx9V

6. Розв'язування рівнянь



Як діяти, щоб розв'язати рівняння виду $A^2 = B$ і $\sqrt{A} = B$?

Розглянемо приклади розв'язування таких рівнянь.



Задача 5 Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x+2)^2 = 9; \quad 3) \sqrt{x+2} = 3; \quad 5) (x+3)\sqrt{x+2} = 0.$$

$$2) (x+2)^2 = 3; \quad 4) \sqrt{x+2} = -3;$$

Розв'язання

1. Рівняння виду $x^2 = a$ ($a \geq 0$) має два корені, які є протилежними числами. Тоді:

$$(x+2)^2 = 9, \\ x+2 = 3 \text{ або } x+2 = -3, \\ x = 1 \text{ або } x = -5.$$

Отже, коренями рівняння є числа 1 і -5.

2. Рівняння виду $x^2 = a$ ($a \geq 0$) має два корені, які є протилежними числами. Тоді:

$$(x+2)^2 = 3, \\ x+2 = \sqrt{3} \text{ або } x+2 = -\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}-2 \text{ або } x = -\sqrt{3}-2.$$

Отже, коренями рівняння є числа $\sqrt{3}-2$ і $-\sqrt{3}-2$. Такі два числа можна подати разом: $\pm\sqrt{3}-2$.

3. За означенням арифметичного квадратного кореня маємо:

$$\sqrt{x+2} = 3, \\ x+2 = 9, \\ x = 7.$$

Справді, $\sqrt{7+2} = 3$. Отже, коренем рівняння є число 7.

4. Квадратний корінь не може набувати від'ємних значень, тому рівняння $\sqrt{x+2} = -3$ не має коренів.

5. Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.

$$(x+3)\sqrt{x+2} = 0, \\ x+3 = 0 \text{ або } \sqrt{x+2} = 0, \\ x = -3 \text{ або } x+2 = 0, \\ x = -2.$$

Якщо $x = -3$, то вираз $\sqrt{x+2}$ **втрачає зміст**, оскільки $-3+2 = -1 < 0$. Тому: число **-3** не належить до ОДЗ змінної даного рівняння, а тому **не може бути його коренем**.

Число **-2** належить до ОДЗ змінної даного рівняння й перетворює рівняння на правильну рівність.

Отже, коренем рівняння є число **-2**.



Розв'язуючи рівняння, що містить ірраціональні вирази зі змінними, потрібно:

- враховувати, що не всі значення змінних є допустимими;
- будь-які перетворення ірраціональних виразів здійснюємо на ОДЗ їхніх змінних;
- знайдені корені необхідно перевірити або на їх належність до ОДЗ змінних даного рівняння, або підстановкою в дане рівняння.

Дізнайтеся більше

Доведемо, що $\sqrt{2}$ — ірраціональне число.

Припустимо, що $\sqrt{2}$ — раціональне число. Тоді $\sqrt{2}$ можна подати як нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, тобто: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Піднесемо до квадрата цю рівність: $2 = \frac{m^2}{n^2}$. Звідси $2n^2 = m^2$.

З одержаної рівності випливає, що m^2 — парне число, а значить, і m — парне число. Тоді його можна подати у вигляді $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Підставимо $m = 2k$ у рівність $2n^2 = m^2$. Тоді одержуємо: $2n^2 = (2k)^2$, $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$. Звідси випливає, що n^2 — парне число, а значить, і n — парне число. Отже, m — парне число і n — парне число.

Одержали, що дріб $\frac{m}{n}$ — скоротний дріб. Це суперечить припущенню, що $\frac{m}{n}$ нескоротний дріб. Отже, $\sqrt{2}$ — ірраціональне число.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/2wBKZ

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
іраціо- нальний вираз	irrational expression	irrationaler Ausdruck (m)	expression irrationnelle

Пригадайте головне

1. Наведіть приклад ірраціонального виразу.
2. Наведіть приклад значення змінної, яке є недопустимим для обраного вами ірраціонального виразу.
3. За якої умови має зміст вираз $\sqrt{A}$; $\frac{1}{\sqrt{A}}$?
4. Які властивості арифметичного квадратного кореня справджуються для ірраціональних виразів?
5. Які вирази називають взаємно спряженими?
6. Поясніть, як внести множник під знак кореня.
7. Поясніть, як винести множник з-під знака кореня.
8. Наведіть приклад дробу, що містить ірраціональність у знаменнику.
9. Поясніть, як звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу.

Усне тренування

1. Розставте у виразі знаки дій «+», «-», «:», «·» та дужки так, щоб отримати правильну рівність:

- 1) $1\ 2\ 3\ 4\ 5 = -11$; 3) $1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 27$;
2) $1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 121$; 4) $1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 70$.

Розв'яжіть задачі

615'. Назвіть підкореневий вираз:

- 1) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{m}$; 5) $\sqrt{xy}$; 7) $\sqrt{x^2+7}$;
2) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{x^2}$; 6) $\sqrt{x+1}$; 8) $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

616'. Чи має зміст вираз $\sqrt{A}$, якщо:

- 1) $A < 0$; 2) $A = 0$; 3) $A > 0$; 4) $A \leq 0$; 5) $A \geq 0$?

617'. Чи має зміст вираз $\frac{1}{\sqrt{A}}$, якщо:

- 1) $A < 0$; 2) $A = 0$; 3) $A > 0$; 4) $A \leq 0$; 5) $A \geq 0$?

618'. Чи є правильним співвідношення:

- 1) $\sqrt{A} < 0$; 2) $\sqrt{A} = 0$; 3) $\sqrt{A} > 0$; 4) $\sqrt{A} \geq 0$?

619'. Чи правильно, що:

- 1) $(\sqrt{A})^2 < 0$; 2) $(\sqrt{A})^2 = 0$; 3) $(\sqrt{A})^2 = -A$; 4) $(\sqrt{A})^2 = A$;

5) $\sqrt{A^2} = |A|$; 6) $\sqrt{(-A)^2} = |A|$; 7) $\sqrt{A^2} = A$; 8) $\sqrt{(-A)^2} = -A$?

620'. Чи правильно, що:

- 1) $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = A \cdot B$; 4) $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{A}{B}$;
2) $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A^2 \cdot B^2}$; 5) $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A^2}{B^2}}$;
3) $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$; 6) $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$?

621'. Чи має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{x-2}$, якщо $x = 0$; 10) $\sqrt{8x-1}$, якщо $x = 0$;
2) $\sqrt{3+x}$, якщо $x = -3$; 11) $\sqrt{7-2x}$, якщо $x = 4$;
3) $\sqrt{x-1}$, якщо $x = 2$; 12) $\sqrt{3-x^2}$, якщо $x = -1$?
4) $\sqrt{4x}$, якщо $x = -5$;
5) $\sqrt{2x}$, якщо $x = 4$;
6) $\sqrt{-x}$, якщо $x = 3$;
7) $\sqrt{-9x}$, якщо $x = -1$;
8) $\sqrt{5x-10}$, якщо $x = 1$;
9) $\sqrt{2x+4}$, якщо $x = -1$;

622'. Чи має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{x+1}$, якщо $x = -1$; 4) $\sqrt{6x}$, якщо $x = 0$;
2) $\sqrt{x-8}$, якщо $x = 7$; 5) $\sqrt{-10x}$, якщо $x = 2$;
3) $\sqrt{20-x}$, якщо $x = -21$; 6) $\sqrt{15-3x}$, якщо $x = 4$?

623'. Чи має зміст вираз $\frac{1}{\sqrt{-x+8}}$, якщо:

- 1) $x = -10$; 5) $x = 1$;
2) $x = -6$; 6) $x = 8$;
3) $x = -1,2$; 7) $x = 10$;
4) $x = 0$; 8) $x = 20$?

624'. Чи має зміст вираз $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$, якщо:

- 1) $x = -5$; 3) $x = 0$; 5) $x = 10$;
2) $x = -3$; 4) $x = 3$; 6) $x = -0,1$?



qr.orioncentr.com.ua/wRvBJ

625°. Який із виразів не має змісту, якщо $x = -10$:

- 1) $\sqrt{x-7}$; 4) $\sqrt{2x-13}$; 7) $\frac{\sqrt{(x+10)^2}}{10x}$;
 2) $\sqrt{-2x}$; 5) $\frac{\sqrt{-5x+90}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+20}}$;
 3) $\sqrt{4x}$; 6) $\frac{10}{\sqrt{-x^2}}$; 9) $\frac{x+10}{\sqrt{x^2-200}}$.

626°. Який із виразів не має змісту, якщо $x = 5$:

- 1) $\sqrt{x-1}$; 3) $\sqrt{2x-17}$; 5) $\frac{x-5}{\sqrt{1-x^2}}$;
 2) $\sqrt{-5x}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{-3x+30}}$; 6) $\frac{x}{\sqrt{x-2x^2}}$?

627°. Спростіть вираз:

- 1) $(\sqrt{x-3})^2$; 3) $(\sqrt{2x-7})^2$; 5) $\left(\sqrt{\frac{5}{x-5}}\right)^2$;
 2) $(\sqrt{x+9})^2$; 4) $(\sqrt{x^2-4})^2$; 6) $\left(\sqrt{\frac{x+4}{x-16}}\right)^2$.

628°. Спростіть вираз:

- E** 1) $(\sqrt{5x})^2$; 2) $(\sqrt{10x+12})^2$; 3) $(\sqrt{x^2+x})^2$; 4) $\left(\sqrt{\frac{x}{x+7}}\right)^2$.

629°. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{p}(\sqrt{p}-15)$; 8) $(\sqrt{a}+a)(\sqrt{a}-a)$;
 2) $\sqrt{n}(2\sqrt{n}+5)$; 9) $(\sqrt{5m}+\sqrt{n})(\sqrt{5m}-\sqrt{n})$;
 3) $\sqrt{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$; 10) $(\sqrt{x}+1)^2$;
 4) $(\sqrt{n}+7)(\sqrt{n}-2)$; 11) $(\sqrt{a}-4)^2$;
 5) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$; 12) $(\sqrt{m}+\sqrt{3})^2$;
 6) $(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)$; 13) $(\sqrt{x}-\sqrt{2y})^2$;
 7) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}-\sqrt{x})$; 14) $(\sqrt{x}+\sqrt{z})^2$.

630°. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

- E** 1) $\sqrt{n}(\sqrt{n}+6)$; 5) $(\sqrt{y}-2)^2$;
 2) $(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-6)$; 6) $(\sqrt{a}-1)^2$;
 3) $(\sqrt{y}+8)(\sqrt{y}-8)$; 7) $(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$;
 4) $(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})(\sqrt{3x}-\sqrt{2y})$; 8) $(\sqrt{y}+\sqrt{10})^2$.

631°. Розкладіть на множники:

- E** 1) $\sqrt{a}-2a\sqrt{a}$;
 2) $25\sqrt{x}+x\sqrt{x}$;
 3) $9\sqrt{m}-n\sqrt{m}$;
 4) $\sqrt{x}+4y\sqrt{x}$;
 5) $6\sqrt{a}-15a\sqrt{a}$;
 6) $12\sqrt{n}-m\sqrt{n}-n\sqrt{n}$;
 7) $\sqrt{p}+2p\sqrt{p}-p^2\sqrt{p}$;
 8) $m\sqrt{n}-mp\sqrt{n}+2mn\sqrt{n}$;
 9) $2\sqrt{x}+x$;
 10) $\sqrt{m}-m$;
 11) $n\sqrt{m}-m\sqrt{n}$;
 12) $2\sqrt{y}-y\sqrt{2x}$;
 13) $x-25$, якщо $x \geq 0$;
 14) $x-100$, якщо $x \geq 0$;
 15) x^2-5 ;
 16) x^2-10 ;
 17) $x-2$, якщо $x \geq 0$;
 18) $x-30$, якщо $x \geq 0$.

632°. Розкладіть на множники:

- 1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$; 6) $x-36$, якщо $x \geq 0$;
 2) $a\sqrt{a}+c\sqrt{a}$; 7) x^2-7 ;
 3) $\sqrt{a}+2a$; 8) x^2-3 ;
 4) $\sqrt{5a}-5a$; 9) $x-26$, якщо $x \geq 0$;
 5) $4p\sqrt{m}-6m\sqrt{p}$; 10) $x-11$, якщо $x \geq 0$.

633°. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sqrt{mn}}{m}$; 2) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$; 3) $\frac{\sqrt{5d}}{\sqrt{45d}}$; 4) $\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{ad}}$.

634°. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sqrt{2ap}}{\sqrt{2a}}$; 2) $\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{am}}$.



qr.orioncentr.com.ua/S6nya

635°. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sqrt{mn}-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 8) $\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{x+y}$; 15) $\frac{a^2-5}{a+\sqrt{5}}$;
- 2) $\frac{\sqrt{xy}-\sqrt{y}}{x-\sqrt{x}}$; 9) $\frac{\sqrt{8x}+\sqrt{8y}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}$; 16) $\frac{m^2-10}{\sqrt{10}-m}$;
- 3) $\frac{\sqrt{5d}+\sqrt{5b}}{\sqrt{45d}+\sqrt{45b}}$; 10) $\frac{\sqrt{3a}-\sqrt{3b}}{\sqrt{27a}-\sqrt{27b}}$; 17) $\frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$;
- 4) $\frac{\sqrt{cd}+\sqrt{cb}}{\sqrt{ad}+\sqrt{ab}}$; 11) $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$; 18) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{6}}{a-6}$;
- 5) $\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; 12) $\frac{y-4}{\sqrt{y}+2}$; 19) $\frac{m-11}{\sqrt{m}+\sqrt{11}}$;
- 6) $\frac{a+5\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$; 13) $\frac{\sqrt{m}-5}{m-25}$; 20) $\frac{m}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}+\frac{n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;
- 7) $\frac{2\sqrt{m}}{m-\sqrt{m}}$; 14) $\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$; 21) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{mn}+n}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{mn}+m}$.

636°. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{2\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}}$; 4) $\frac{\sqrt{mn}+\sqrt{m}}{1+\sqrt{n}}$; 7) $\frac{n^2-7}{n-\sqrt{7}}$;
- 2) $\frac{\sqrt{c}}{3c-\sqrt{c}}$; 5) $\frac{\sqrt{mp}+\sqrt{2p}}{\sqrt{ma}+\sqrt{2a}}$; 8) $\frac{x-19}{\sqrt{x}+\sqrt{19}}$;
- 3) $\frac{\sqrt{12m}-\sqrt{12n}}{\sqrt{3m}-\sqrt{3n}}$; 6) $\frac{y-25}{\sqrt{y}+5}$;

637°. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $2\sqrt{x}$; 9) $m\sqrt{m^5}$;
- 2) $5\sqrt{y}$; 10) $3y^2\sqrt{x}$;
- 3) $6\sqrt{a}$; 11) $2a^4\sqrt{c}$;
- 4) $2x\sqrt{y}$, якщо $x > 0$; 12) $m\sqrt{mn}$, якщо $m > 0$;
- 5) $2x\sqrt{y}$, якщо $x < 0$; 13) $m\sqrt{mn}$, якщо $m < 0$;
- 6) $3a\sqrt{n^3}$, якщо $a < 0$; 14) $2xy^3\sqrt{z}$, якщо $x < 0, y > 0$;
- 7) $3a\sqrt{n^3}$, якщо $a > 0$;

qr.orioncentr.com.ua/3MP4H


638°. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $5\sqrt{c}$; 3) $mn\sqrt{2}$, якщо $m > 0, n > 0$;
- 2) $c\sqrt{a}$, якщо $c < 0$; 4) $mn\sqrt{3}$, якщо $m < 0, n > 0$.

639°. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{2x^2}$, якщо $x > 0$; 7) $\sqrt{5x^2y^2}$, якщо $x < 0, y > 0$;
- 2) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a < 0$; 8) $\sqrt{50x^2y^2}$, якщо $x > 0, y \geq 0$;
- 3) $\sqrt{8m^2}$, якщо $m > 0$; 9) $\sqrt{50x^2y^2}$, якщо $x < 0, y < 0$;
- 4) $\sqrt{a^2b}$, якщо $a < 0$; 10) $\sqrt{18x^4y}$;
- 5) $\sqrt{a^2b}$, якщо $a > 0$; 11) $\sqrt{x^8y^4z}$;
- 6) $\sqrt{5x^2y^2}$, якщо $x > 0, y < 0$; 12) $\sqrt{a^{20}b^{16}c}$.

640°. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{7y^2}$, якщо $y > 0$;
- 2) $\sqrt{7y^2}$, якщо $y < 0$;
- 3) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a < 0, b > 0$;
- 4) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a > 0, b < 0$;
- 5) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a > 0, b > 0$;
- 6) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a < 0, b < 0$;
- 7) $\sqrt{27m^8n}$; 8) $\sqrt{32x^4y^{20}}$.

641°. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{10}{\sqrt{10}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{m}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{mn}}$;
- 2) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; 5) $\frac{14}{\sqrt{7}}$; 8) $\frac{2}{\sqrt{n}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$;
- 3) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 6) $\frac{2}{\sqrt{11}}$; 9) $\frac{y}{\sqrt{y}}$; 12) $\frac{1}{\sqrt{m+5}}$.

642°. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{17}{\sqrt{17}}$; 5) $\frac{a}{\sqrt{2b}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{y-2}}$;
- 2) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 6) $\frac{2z}{\sqrt{z}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{8x+1}}$.

643°. Спростіть вираз:

1) $\frac{3}{\sqrt{c}} - \frac{4}{\sqrt{c}}$;

3) $\frac{2}{\sqrt{x+8}} - \frac{1}{8+\sqrt{x}}$;

2) $\frac{5}{\sqrt{p}} - \frac{2}{\sqrt{p}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{6}{x-1} + \frac{8}{\sqrt{x-1}}$.

644°. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$;

2) $\frac{4}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$.

645°. Розв'яжіть рівняння:



1) $x^2 = 1$;

6) $x^2 = 15$;

11) $x^2 = -1$;

2) $x^2 = 36$;

7) $x^2 - 64 = 0$;

12) $x^2 = -29$;

3) $x^2 = 0$;

8) $2x^2 - 42 = 0$;

13) $x^2 = -62$;

4) $3x^2 = 9$;

9) $x^2 - 81 = 0$;

14) $x^2 = -100$;

5) $x^2 = 11$;

10) $x^2 - 17 = 0$;

15) $x^2 + 13 = 0$;

16) $x^2 + 40 = 0$;

17) $0,1x^2 + 1,6 = 0$;

18) $\frac{x^2}{4} - 16 = 0$.

qr.orioncentr.com.ua/OczLx

646°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$;

3) $4x^2 = 8$;

5) $x^2 - 9 = 0$;

7) $x^2 = -3$;

2) $x^2 = 64$;

4) $x^2 = 7$;

6) $x^2 - 5 = 0$;

8) $x^2 + 12 = 0$.

647°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 2$;

4) $\sqrt{x-2} - 9 = 0$;

7) $\sqrt{x+3} + 4 = 0$;

2) $\sqrt{x} = 10$;

5) $\sqrt{x-12} = 7$;

8) $3\sqrt{x+9} = 0$;

3) $2\sqrt{x} - 6 = 0$;

6) $\sqrt{x+21} = -3$;

9) $-2\sqrt{x+9} + 6 = 0$.

648°. Розв'яжіть рівняння:



1) $\sqrt{x} = 5$;

3) $2\sqrt{x+7} = 8$;

5) $\sqrt{x+30} = -30$;

2) $\sqrt{x} - 4 = 0$;

4) $\sqrt{x-1} - 2 = 0$;

6) $\sqrt{x} = 0$.

649°. Чи за будь-яких значень змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{-x^2}$;

3) $\sqrt{(x-7)^2}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x}}$;

7) $\frac{x}{\sqrt{4x+1}}$;

2) $\sqrt{-(x+5)^2}$;

4) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

6) $\frac{5}{\sqrt{x-12}}$;

8) $\frac{x+3}{\sqrt{x-3}}$?

Якщо так, то вкажіть кілька таких значень змінної та обчисліть відповідні значення виразу.

650. Чи за будь-яких значень змінної має зміст вираз:



1) $\sqrt{x^2}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{x+10}}$;

2) $\sqrt{(x-1)^2}$;

4) $\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$?

Якщо так, то вкажіть кілька таких значень змінної та обчисліть відповідні значення виразу.

651. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{x-3})^2$;

2) $(\sqrt{a+5\sqrt{2}})^2 - (\sqrt{a-5\sqrt{2}})^2$;

3) $(2+\sqrt{y})^2 - (1-2\sqrt{y})^2$;

4) $(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4}) - (-\sqrt{x+4})^2$;

5) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2 - (\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})$;

6) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) - (-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

652. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{a}+2)^2 + (\sqrt{a}-2)^2$;

2) $(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y}+\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{x})$.

653. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{a}}$;

4) $\frac{1}{3\sqrt{m}+3\sqrt{n}} + \frac{2}{2\sqrt{m}+2\sqrt{n}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2+\sqrt{x}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{a}+2\sqrt{2}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

6) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

654. Спростіть вираз:



1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}-\sqrt{5}}$;

3) $\frac{\sqrt{11}}{m-11} - \frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{11}}$;

2) $\frac{\sqrt{m}}{m-25} - \frac{1}{\sqrt{m}-5}$;

4) $\frac{\sqrt{5p}}{p-5} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{5}}$.

655. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}} - \frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}}; \quad 3) \frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}};$$

$$2) \frac{\sqrt{m}+\sqrt{p}}{\sqrt{m}-\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{m}-\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}; \quad 4) \frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}} - \frac{m+4n}{m-4n}.$$

656. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2}} - \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-2}}; \quad 2) \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

657. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{\frac{45a^3}{b}} \cdot \sqrt{\frac{5a}{b^{-1}}}; \quad 4) \sqrt{\frac{12x^5}{y^{-2}}} \cdot \sqrt{\frac{y^6}{3x^{-7}}};$$

$$2) \sqrt{\frac{45a^3}{b}} : \sqrt{\frac{5a}{b^{-1}}}; \quad 5) \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{xy}{z^{-2}}} \cdot \sqrt{\frac{xy^{-5}}{17z^4}};$$

$$3) \sqrt{\frac{12x^5}{y^{-2}}} : \sqrt{\frac{y^6}{3x^{-7}}}; \quad 6) \sqrt{\frac{ab^3}{cd^{-4}}} \cdot \sqrt{\frac{c^{-3}}{a^{-5}}} \cdot \sqrt{\frac{d^{-4}}{c^4 a^6}}.$$

658. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{\frac{32c^{-3}}{a^5}} \cdot \sqrt{\frac{c^3}{2a^{-5}}}; \quad 2) \sqrt{\frac{32c^{-3}}{a^5}} : \sqrt{\frac{c^3}{2a^{-5}}}.$$

659. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) x\sqrt{-x}; \quad 4) m^2 n^2 \sqrt{nm};$$

$$2) -3y^2 \sqrt{x}; \quad 5) n\sqrt{m} + m\sqrt{-n};$$

$$3) ab^3 \sqrt{a^2 b^3}, \text{ якщо } a < 0; \quad 6) 3p\sqrt{m^2} + 4\sqrt{p}.$$

660. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) -a\sqrt{-3a}; \quad 2) pc^4 \sqrt{c^2 p}; \quad 3) ac\sqrt{ac}; \quad 4) x\sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

661. Внесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{8n^2}; \quad 3) \sqrt{0,01a^8 b^3}; \quad 5) \sqrt{-\frac{p^4}{m^6 n^3}};$$

$$2) \sqrt{18x^4 y^8 z^7}; \quad 4) \sqrt{\frac{8x^3}{125y^{10}}}; \quad 6) \sqrt{\frac{(n+3)^4}{m^5}}.$$

662. Внесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{54x^2}; \quad 2) \sqrt{-0,4x^2 y^5}; \quad 3) \sqrt{\frac{12x^5}{49y^{12}}}; \quad 4) \sqrt{\frac{p^{12}}{mn^{10}}}.$$

663. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{1}{1-\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}; \quad 5) \frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}; \quad 7) \frac{1}{x-\sqrt{2}};$$

$$2) \frac{7}{\sqrt{2}+3}; \quad 4) \frac{7}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}; \quad 6) \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}; \quad 8) \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}.$$

664. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$E \quad 1) \frac{1}{1+\sqrt{5}}; \quad 3) \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}; \quad 5) \frac{1}{1+\sqrt{m}};$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{7}-2}; \quad 4) \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}; \quad 6) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}.$$

665. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x+1)^2 = 64; \quad 6) (x-9)^2 - 3 = 0;$$

$$2) (x-3)^2 = 5; \quad 7) (x+5)^2 - 5 = 0;$$

$$3) (x-10)^2 = 0; \quad 8) (x-10)^2 + 320 = 0;$$

$$4) (x+12)^2 - 36 = 0; \quad 9) (x+8)^2 + 8 = 0;$$

$$5) (x+9)^2 - 81 = 0; \quad 10) -(x-10)^2 - 10 = 0.$$

666. Розв'яжіть рівняння:

$$E \quad 1) (x+2)^2 = 4; \quad 4) (x+4)^2 - 3 = 0;$$

$$2) (x-9)^2 = 100; \quad 5) (x-7)^2 - 11 = 0;$$

$$3) (x-25)^2 = 0; \quad 6) (x+7)^2 + 49 = 0.$$

667. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (2x+1)(x+1) - 3x = 4x^2;$$

$$2) (x+1)(x-1) = 2x^2;$$

$$3) (5x+1)(x+2) - 6x^2 - 11x = 0;$$

$$4) (-x+5)(x+4) = x(x+1).$$

668. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (3x+1)(x-3) + 8x = 2x^2;$$

$$2) (x+2)(x-2) - 3x^2 = 0;$$

$$3) (2x+1)(x+3) = x(x+7).$$

669. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 9; \quad 4) \sqrt{25x} - \sqrt{16x} = 0;$$

$$2) 9\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = 4; \quad 5) \sqrt{x+3} - 5\sqrt{x+3} + 4 = 0;$$

$$3) \sqrt{4x} - \sqrt{9x} = 9; \quad 6) \sqrt{x+1} + 3\sqrt{x+1} = 8.$$

670. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 10; \quad 3) \sqrt{16x} - \sqrt{25x} = 0;$$

$$2) \sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 6; \quad 4) \sqrt{x+5} - 7\sqrt{x+5} + 12 = 0.$$

671. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=2-x$;
- 2) $(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})=5-x$;
- 3) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)=(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+5)$;
- 4) $(2\sqrt{x}-7)(2\sqrt{x}+7)=(4\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}+5)$;
- 5) $(\sqrt{x}-5)^2=26+x$;
- 6) $(\sqrt{x}-2\sqrt{2})^2=8+x$.

672. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})=2-x$;
- 2) $(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)=(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+6)$;
- 3) $(\sqrt{x}-\sqrt{15})^2-x=-30$.

673. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x+1)\sqrt{x-2}=0$;
- 2) $(x-1)\sqrt{x-1}=0$;
- 3) $x\sqrt{x-10}=0$;
- 4) $x\sqrt{x+4}=0$;
- 5) $(x+1)(\sqrt{x}-1)=0$;
- 6) $(x-1)(\sqrt{x}-1)=0$;
- 7) $x(\sqrt{x}-10)=0$;
- 8) $2x\sqrt{x}=0$.

674. Розв'яжіть рівняння:

- Е** 1) $(x+3)\sqrt{x-3}=0$;

2) $(x-3)\sqrt{x+3}=0$;

3) $x(\sqrt{x}-2)=0$;

4) $x\sqrt{x-1}=0$.

675*. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(x-1)^2}$, якщо $x > 2$;
- 2) $\sqrt{(x+12)^2}$, якщо $x > 20$;
- 3) $\sqrt{(x-8)^2}$, якщо $x < 0$;
- 4) $\sqrt{(x^2+8)^2}$;
- 5) $\sqrt{x^2-6x+9}$, якщо $x > 9$;
- 6) $\sqrt{x^2-2x+1}$, якщо $x > 5$;
- 7) $\sqrt{x^2-8x+16}$, якщо $x < 0$;
- 8) $\sqrt{x^2+4x+4}$, якщо $x < -4$.

676*. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(x^2-4)(x-2)}$;
- 2) $\sqrt{x^3+10x^2+25x}$.

677*. Спростіть вираз:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right):\left(-\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{y-\sqrt{yx}}\right)$;
- 2) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{y}}{y}$;
- 3) $\left(\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}}-x\right)^2$;
- 4) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot(x-y)^{-1}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}-\frac{3y}{(\sqrt{y}+\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{x})}$.

678*. Обчисліть:

- 1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$;
- 2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;
- 3) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}}$;
- 4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{70}+\sqrt{72}}$.

679*. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;
- 2) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;
- 3) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{10}}$;
- 4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

680*. За яких значень a рівняння не має розв'язків:

- 1) $(x+24)^2=a$;
- 2) $(x-14)^2=a$;
- 3) $(x-9)^2+7=a$;
- 4) $(x+2)^2+9=a$?

681*. За яких значень a рівняння має тільки один розв'язок:

- 1) $(x+17)^2=a$;
- 2) $(x-3)^2=a+1$;
- 3) $(x-9)^2=a-5$;
- 4) $(x+32)^2+4=a^2$?

682*. Для всіх значень a розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x+8)^2=a$;
- 2) $(x-12)^2=a$;
- 3) $(x-25)^2=a+4$;
- 4) $(x+9)^2+1=a$;
- 5) $x^2+4x+4=a$;
- 6) $x^2+6x+9=a$.

683*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+\sqrt{x}}=1$; 2) $\sqrt{1-\sqrt{x}}=1$; 3) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=2$.

Проявіть компетентність

684. У таблиці 27 показано, як Сашко й Наталка спрощували вирази. Хто з дітей правильно виконав дії?

Таблиця 27

Сашко	Наталка
$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} =$ $= \frac{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})}{a-\sqrt{5}} =$ $= \frac{a-\sqrt{5}}{a-\sqrt{5}} =$ $= a-\sqrt{5}$	$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-5)(a+5)}{a-\sqrt{5}} =$ $= \frac{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})(a+5)}{a-\sqrt{5}} =$ $= (a+\sqrt{5})(a+5)$

А. Наталка.

В. Наталка й Сашко.

Б. Сашко.

Г. Ані Наталка, ані Сашко.

§ 16. ФУНКЦІЯ $y = \sqrt{x}$

1. Як задати функцію $y = \sqrt{x}$

Ситуація. Катерина записала формулу для знаходження сторони a квадрата за його площею: $a = \sqrt{S}$. А далі міркувала так. Зі змінюю площі квадрата відповідно змінюється й довжина його сторони, тому площа квадрата S є незалежною змінною, а довжина a сторони квадрата — залежною змінною. Оскільки кожному значенню S відповідає єдине значення a , то формула задає функціональну залежність.



qr.orioncentr.com.ua/2mDPY



Чи має рацію дівчинка?

Так.



Якщо в цій формулі незалежну змінну позначити x , а залежну — y , то одержимо функцію $y = \sqrt{x}$.

2. Область визначення та область значень функції $y = \sqrt{x}$



Якою є область визначення функції $y = \sqrt{x}$?

Поміркуємо.



Функцію $y = \sqrt{x}$ задає вираз $\sqrt{x}$, який втрачає зміст, якщо $x < 0$. Тому областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є **множина невід'ємних чисел**.



Коротко запишемо: $D(y)$: x — будь-яке невід'ємне число, або $x \geq 0$.



Якою є область значень функції $y = \sqrt{x}$?

Поміркуємо.



Оскільки для будь-якого $x \geq 0$ вираз $\sqrt{x}$ набуває невід'ємних значень, то $y \geq 0$. Тому областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є **множина невід'ємних чисел**.



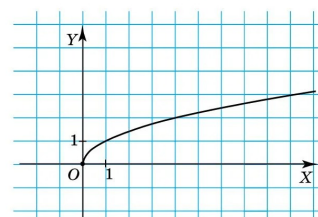
Коротко запишемо: $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.

3. Графік функції $y = \sqrt{x}$



Яким є графік функції $y = \sqrt{x}$?

Його зображено на малюнку 42.



Мал. 42

Цей графік побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Ця лінія є *віткою параболи*, що виходить із початку координат і розташована не вертикально, як у графіка функції $y = x^2$, а горизонтально.

 Графік функції $y = \sqrt{x}$ розміщений у першій координатній чверті.

4. Властивості функції $y = \sqrt{x}$



Які властивості має функція $y = \sqrt{x}$?

Проаналізуємо її графік (мал. 42).



Запам'ятайте!

Властивості функції $y = \sqrt{x}$:

1. $D(y)$: x — будь-яке невід'ємне число, або $x \geq 0$.
2. $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.
3. $(0; 0)$ — точка перетину графіка з осями координат.
4. Функція набуває додатних значень для будь-яких значень x , крім нуля.
5. Функція зростає на всій області визначення.

5. Побудова графіка функції

$$y = \sqrt{x}$$

qr.orioncentr.com.ua/BG1bB



Як побудувати графік функції $y = \sqrt{x}$?

Для цього треба виконати три кроки.



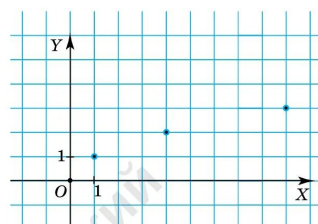
Крок 1. Знаходимо координати кількох точок вітки параболи (табл. 28).

Таблиця 28

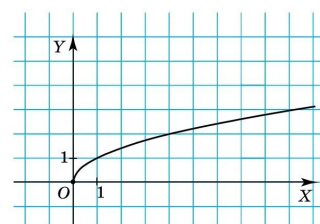
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Крок 2. На координатній площині позначимо точки з координатами $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(9; 3)$ (мал. 43).

Крок 3. Побудовані точки з'єднаємо плавною лінією. Одержимо графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 44).



Мал. 43



Мал. 44

Задача 1 Чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точку:
1) $A(16; 4)$; 2) $B(4; -2)$?

Розв'язання

1. Підставимо координати точки $A(16; 4)$ у формулу $y = \sqrt{x}$. Маємо: $4 = \sqrt{16}$.

Отже, графік функції $y = \sqrt{x}$ **проходить** через точку A .

2. *Спосіб 1.* Підставимо координати точки $B(4; -2)$ у формулу $y = \sqrt{x}$. Маємо: $-2 \neq \sqrt{4} = 2$.

Отже, графік функції $y = \sqrt{x}$ **не проходить** через точку B .

Спосіб 2. Точка $B(4; -2)$ лежить у IV координатній чверті, а графік функції $y = \sqrt{x}$ — у I координатній чверті. Отже, графік функції $y = \sqrt{x}$ **не проходить** через точку B .



Щоб з'ясувати, чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через задану точку, потрібно перевірити, чи задовольняють координати цієї точки формулу $y = \sqrt{x}$.

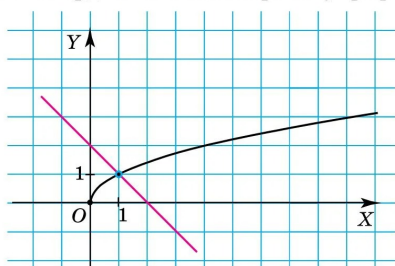
Задача 2 Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2 - x. \end{cases}$

Розв'язання

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 45): графіком функції $y = \sqrt{x}$ є вітка параболи.

У тій самій системі координат побудуємо графік лінійної функції $y = 2 - x$ (мал. 45): графіком функції $y = 2 - x$ є пряма, що проходить через точки $(0; 2)$ і $(2; 0)$.

Визначимо координати точки перетину графіків: (1; 1).



Мал. 45

Отже, пара чисел (1; 1) — шуканий розв'язок системи.



Які рівняння можна розв'язувати за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$?

Рівняння, що містять вираз $\sqrt{x}$.



Наприклад, розв'язок рівняння $\sqrt{x} = 2 - x$ можна отримати, розв'язавши графічно систему рівнянь $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2 - x. \end{cases}$

Проте, на відміну від системи, розв'язок рівняння $\sqrt{x} = 2 - x$ — це абсциса точки перетину графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 2 - x$. Отже, рівняння $\sqrt{x} = 2 - x$ має корінь $x = 1$.

Дізнайтеся більше

Положій Георгій Миколайович (1914–1968) — відомий математик, професор, доктор фізико-математичних наук Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Започаткував створення в Київському університеті окремого факультету з обчислювальної математики і кібернетики. Розроблена ним теорія є важливою й нині для розвитку не лише математики як науки, а й авіабудівництва, будівництва гідротехнічних споруд.



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/RQYO6

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
квадратний корінь	square root	Quadrat- wurzel (f)	racine carrée

Пригадайте головне

1. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$?
2. Яка область значень функції $y = \sqrt{x}$?
3. Що є графіком функції $y = \sqrt{x}$?
4. Як розміщується в системі координат графік функції $y = \sqrt{x}$?
5. Назвіть властивості функції $y = \sqrt{x}$.

Усне тренування

1. Обчисліть:
 - 1) $0,2^2 - 1,2^2$;
 - 2) $4 \cdot 1,5^2 \cdot 16^0$;
 - 3) $(8 + 2^2 \cdot 0,25)^2$;
 - 4) $(3,1^2 - 1,9^2)^3$.
2. Знайдіть середнє арифметичне чисел:
 - 1) 9,6 і 2,4;
 - 2) 22,3, 12,5 і 18,2;
 - 3) 0,2 і $4\frac{1}{5}$;
 - 4) 6,21, $1\frac{5}{7}$, 3,79 і $3\frac{2}{7}$.

Розв'яжіть задачі

- 685'.** Яке із тверджень є правильним для функції $y = \sqrt{x}$:
- 1) область визначення функції — усі додатні числа;
 - 2) область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — усі невід'ємні числа;
 - 3) область значень функції $y = \sqrt{x}$ — усі додатні числа;
 - 4) область значень функції $y = \sqrt{x}$ — усі невід'ємні числа?

686°. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 29 та заповніть її.

Таблиця 29

x	0	1,21	1,96	2,89	3,61	4,84	8,41	9
y								

687°. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 30 і заповніть її.

Таблиця 30

x	1	1,44	2,25	3,24	6,25	9,61	20,25
y							

688°. Чи правильно, що графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:

- 1) $A(4; 2)$; 3) $C(6,25; 5)$; 5) $M(1,44; -1,2)$;
2) $B(0; 0)$; 4) $D(0; 4)$; 6) $N(-9; 3)$?

689°. Чи правильно, що графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:

- 1) $A(16; 4)$; 2) $B(1; 1)$; 3) $C(2,25; -1,5)$; 4) $D(-4; 2)$?

690°. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:

- 1) $A(1; 1)$;
2) $B(81; 9)$;
3) $C(100; 10)$;
4) $D(25; -5)$;
5) $M(0,01; 0,1)$;
6) $N(0,3; 0,09)$?



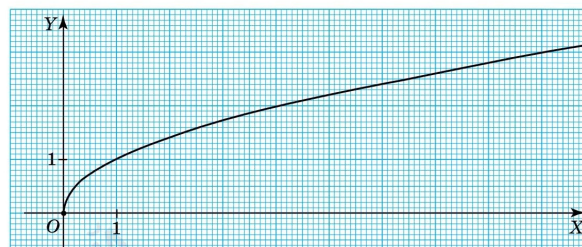
qr.orioncentr.com.ua/dle7y

691°. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:

- 1) $K(0; 0)$; 3) $M(49; 7)$;
2) $L(36; -6)$; 4) $N(0,04; 0,2)$?

692°. На малюнку 46 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. За графіком визначте точку, якщо:

- 1) $x = 1,5$; 2) 5;
2) $y = 1,5$; 2,5; 2,7.



Мал. 46

693°. На малюнку 46 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. За графіком знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = 1,5$; 2) 5;
2) значення x , якщо $y = 1,5$; 2,5; 2,7.

694°. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$ пряма:

- 1) $x = 4$; 2) $x = -9$; 3) $x = 49$; 4) $y = 5$; 5) $y = -4$; 6) $y = 3$?
Якщо так, то вкажіть координати точки перетину.

695°. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$, зображений на малюнку 46, пряма:

- 1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $y = 2$; 4) $y = -1$?

Якщо так, то вкажіть координати точки перетину.

696°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = \sqrt{x}$ і $y = 1$; 2) $y = \sqrt{x}$ і $y = 0$.

Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину, якщо це можливо.

qr.orioncentr.com.ua/lxyGD

697°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

- 1) $y = \sqrt{x}$ і $y = 4$; 2) $y = \sqrt{x}$ і $y = -3$.

Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину, якщо це можливо.

698°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x - 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = -2x + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = -x. \end{cases}$

699*. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

E 1) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = -3x + 4. \end{cases}$

700*. За допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 46) порівняйте:

- 1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{8}$; 5) $\sqrt{30}$ і 5;
2) $\sqrt{0,12}$ і $\sqrt{0,17}$; 4) $\sqrt{0,36}$ і 0,6; 6) 7 і $\sqrt{56}$.

701*. За допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 46) порівняйте:

- 1) $\sqrt{6}$ і $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{4,4}$;
2) $\sqrt{2,5}$ і $\sqrt{2,7}$; 4) 3 і $\sqrt{9}$.

702. Площа круга обчислюється за формулою $S = \frac{\pi d^2}{4}$, де d — діаметр круга. Задайте формулою залежність d від S .

703. Площа круга обчислюється за формулою $S = \pi r^2$, де r — радіус круга. Задайте формулою залежність r від S .

704. Знайдіть такі точки графіка функції $y = \sqrt{x}$, у яких:

- 1) абсциса дорівнює ординаті;
2) сума подвоєної абсциси і потроєної ординати дорівнює 27.

705. Знайдіть такі точки графіка функції $y = \sqrt{x}$, у яких абсциса на 12 більша, ніж ордината.

706. Чи можна знайти найменше та найбільше значення для функції $y = \sqrt{x}$? Відповідь поясніть.

707. Назвіть найменше та найбільше значення функції $y = \sqrt{x}$, яке є натуральним числом, якщо:

- 1) $4 \leq x \leq 25$; 2) $0 \leq x \leq 80$; 3) $6 \leq x \leq 20$; 4) $9 \leq x \leq 22$.

708. Назвіть найменше та найбільше значення функції $y = \sqrt{x}$, яке є натуральним числом, якщо:

- 1) $1 \leq x \leq 36$; 2) $5 \leq x \leq 28$.

709. Розмістіть у порядку збільшення числа:

- 1) $\sqrt{1,3}$, $\sqrt{1,5}$, $\sqrt{0,8}$, 1; 3) $\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3\frac{2}{7}}$, $\sqrt{3\frac{1}{4}}$, $\sqrt{3\frac{2}{5}}$;
2) 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3,2}$, $\sqrt{4,8}$; 4) 10, $\sqrt{100\frac{3}{4}}$, $\sqrt{102}$, $\sqrt{100,5}$.

710. Розмістіть у порядку збільшення числа:

E 1) $\sqrt{4,1}$, 2, $\sqrt{3,8}$, $\sqrt{4,5}$; 2) $\sqrt{2\frac{2}{5}}$, $\sqrt{2\frac{3}{4}}$, $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2\frac{4}{7}}$.

711. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x} = \frac{x}{3}$; 2) $\sqrt{x} = x^2$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$; 4) $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$.

712. Розв'яжіть графічно рівняння:

E 1) $\sqrt{x} = 2x - 6$; 2) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$.

713*. Побудуйте графік функції $y = f(x)$. За графіком схарактеризуйте її властивості:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

714*. Скільки розв'язків має рівняння в залежності від параметра a :

1) $\sqrt{x} = a$; 2) $\sqrt{x} = a + 2$; 3) $\sqrt{x} = 4 - a^2$; 4) $\sqrt{x} = -x + 2a$.

Проявіть компетентність

715. Сергійко проводив експерименти щодо вільного падіння м'ячика. Швидкість вільного падіння тіла задається формулою $v = \sqrt{2gH}$, де v — швидкість; H — висота; g — прискорення вільного падіння ($g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$).

1. М'ячик падає з висоти 1 м. З якою швидкістю він упаде на землю?

2. У скільки разів збільшиться швидкість м'ячика, якщо висоту збільшити у 2 рази; у 4 рази; у 8 разів?

3. Побудуйте графік залежності швидкості падіння м'ячика від висоти.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- Поясніть, що таке множина; підмножина. Наведіть приклади.
- Які числа називають ірраціональними; дійсними?
- Як позначають множину натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел; ірраціональних чисел; дійсних чисел?
- Як пов'язані між собою раціональні, ірраціональні та дійсні числа?
- Сформулюйте означення квадратного кореня з числа a .
- Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a ?
- Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа?
- Які властивості арифметичного квадратного кореня?
- Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$? А область значень?
- Що є графіком функції $y = \sqrt{x}$?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Яким є число $\sqrt{\frac{16}{23}}$?

- А. Дійсним числом. Б. Раціональним числом.
В. Цілим числом. Г. Натуральним числом.

2°. Розв'яжіть рівняння $x^2 = 25$.

- А. 5. Б. 25. В. 25, -25. Г. 5; -5.

3°. Яка з точок належить графіку функції $y = \sqrt{x}$?

- А. А (4; 2). Б. В (2; 4). В. С (1; 0). Г. D (-4; 2).

4. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

- А. $\frac{1}{2}$. Б. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. В. $2 + \sqrt{3}$. Г. $\sqrt{3}$.

5*. Спростіть вираз $\frac{3\sqrt{a} + \sqrt{27}}{a - 3}$.

- А. $\frac{3}{\sqrt{a} - \sqrt{3}}$. Б. 3. В. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a} - 3}$. Г. $3(\sqrt{a} + \sqrt{3})$.

Розділ 4.
КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

У розділі дізнаєтесь:

- які рівняння називаються квадратними;
- як розв'язувати квадратні рівняння;
- про теорему Вієта та її застосування;
- що таке квадратний тричлен;
- як розкласти квадратний тричлен на множники;
- як розв'язувати рівняння, що зводяться до квадратних;
- що таке математична модель прикладної задачі;
- як розв'язувати прикладні задачі методом математичного моделювання;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці

§ 17. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

1. Що таке квадратне рівняння

Ситуація. Поряд із будинком, де мешкає Василь, розташований міський парк прямокутної форми, площа якого — 270 000 м². Довжина парку на 150 м більша за його ширину. За вказівкою тренера, Василь на ранковій пробіжці має пробігати не менш ніж 2 км.



qr.orioncentr.com.ua/Asqb7



Чи виконає Василь завдання тренера, якщо кожного ранку обігнати парк уздовж огорожі?

Обчислимо довжину огорожі парку.

Нехай ширина парку становить x м, тоді його довжина — $(x + 150)$ м. Площа парку дорівнює $x \cdot (x + 150)$ м², що за умовою задачі становить 270 000 м², тому маємо рівняння:

$$x \cdot (x + 150) = 270\,000.$$

Розкриємо дужки та зберемо всі доданки в лівій частині рівняння:

$$x^2 + 150x - 270\,000 = 0.$$

Отже, необхідно розв'язати це рівняння. Таке рівняння є *квадратним*.

Запам'ятайте!

Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.



Чому накладають умову, що $a \neq 0$?

Інакше рівняння не є квадратним.



Справді, якщо $a = 0$, то рівняння $0 \cdot x^2 + bx + c = 0$ набуває вигляду: $bx + c = 0$. А це — лінійне рівняння.

Числа a, b і c називають *коефіцієнтами квадратного рівняння*. Число a — це перший коефіцієнт, b — другий коефіцієнт, c — вільний член.

Наприклад, у рівнянні $x^2 + 150x - 270\,000 = 0$ коефіцієнти такі: $a = 1, b = 150, c = -270\,000$.



Чи можуть коефіцієнти b і c у квадратно-рівнянні дорівнювати нулю?

Так.



Такі рівняння називають *неповними квадратними рівняннями*. Наведемо приклади (табл. 31).

Таблиця 31

Коефіцієнти	$b = 0, c \neq 0$	$b \neq 0, c = 0$	$b = 0, c = 0$
Неповне квадратне рівняння	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$
Приклад	$2x^2 - 8 = 0$	$x^2 + 5x = 0$	$4x^2 = 0$



Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ завжди можна звести до вигляду $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, де перший коефіцієнт дорівнює 1. Таке квадратне рівняння називають *зведеним*.

Зведене квадратне рівняння	Незведене квадратне рівняння
$x^2 + 150x - 270\,000 = 0$, бо $a = 1$	$4x^2 + 3x - 1 = 0$, бо $a \neq 1$

2. Розв'язування квадратних рівнянь способом виділення квадрата двочлена

Пригадайте, щоб розв'язати рівняння $(x - 1)^2 = 4$, необхідно розглянути два випадки:

$$x - 1 = 2 \text{ або } x - 1 = -2.$$

Тобто в лівій частині квадратного рівняння варто *виділити квадрат двочлена*:

$$(x \pm m)^2 = x^2 \pm 2xm + m^2.$$

Тоді зможемо розв'язати рівняння. Розглянемо, як це робити, на прикладі рівняння із ситуації.

Задача 1 Розв'яжіть рівняння $x^2 + 150x - 270\,000 = 0$.

Розв'язання

1. Перенесемо вільний член $-270\,000$ у праву частину рівняння: $x^2 + 150x = 270\,000$.
2. Подамо другий доданок $150x$ як подвоєний добуток двох множників: $x^2 + 2 \cdot 75 \cdot x = 270\,000$. Число 75 — другий член шуканого двочлена.
3. Доповнимо ліву частину рівняння до повного квадрата двочлена. Для цього до обох частин рівняння додамо 75^2 : $x^2 + 150x + 75^2 = 270\,000 + 75^2$
4. Згорнемо ліву частину рівняння у квадрат двочлена, а праву — обчислимо: $(x + 75)^2 = 275\,625$
5. Подамо праву частину рівняння як квадрат числа 525: $(x + 75)^2 = 525^2$.
6. Для одержаного рівняння можливі два випадки: $x + 75 = 525$ або $x + 75 = -525$.
7. Знайдемо корені рівняння: $x = 450$ або $x = -600$.

Повертаємося до умови ситуації й аналізуємо одержані розв'язки. Оскільки ширина парку не може бути від'ємним числом, то шукана ширина дорівнює 450 м. Тоді довжина парку: $450 + 150 = 600$ (м). Периметр парку дорівнює $(450 + 600) \cdot 2 = 2100$ (м), або 2 км 100 м. Отже, Василь виконає завдання тренера під час ранкової пробіжки, якщо оббігатиме парк уздовж огорожі.

 Щоб застосувати спосіб виділення квадрата двочлена, спочатку подайте квадратне рівняння у вигляді: $(x \pm m)^2 = n$, де m і n — деякі числа.

 Спосіб виділення квадрата двочлена легше застосовувати до зведеного квадратного рівняння.

Задача 2 Розв'яжіть рівняння: $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Розв'язання

1. Утворимо зведене квадратне рівняння:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0, | : 2$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

2. Перенесемо вільний член рівняння у праву його частину:

$$x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}.$$

3. Подамо другий доданок як подвоєний добуток двох множників:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x = \frac{3}{2}.$$

4. Доповнимо ліву частину рівняння до повного квадрата двочлена:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}.$$

5. Згорнемо ліву частину рівняння у квадрат двочлена, а праву — обчислимо:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

6. Подамо праву частину рівняння як квадрат числа:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

7. Розглянемо два можливі випадки:

$$x + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{або} \quad x + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -3.$$



Чи завжди рівняння $(x \pm m)^2 = n$ має розв'язки?

Ні.



Якщо n — від'ємне число, то розв'язків немає.



Залежно від значення n квадратне рівняння вигляду $(x \pm m)^2 = n$:

- має розв'язки, якщо $n \geq 0$;
- не має розв'язків, якщо $n < 0$.

Дізнайтеся більше

Уже в другому тисячолітті до нашої ери у Стародавньому Вавилоні знали, як розв'язувати квадратні рівняння. Необхідність їх розв'язування була тісно пов'язана з практичними завданнями, в основному такими, як вимірювання площі земельних ділянок для проведення земельних робіт та для військових потреб. Правила розв'язування квадратних рівнянь багато в чому були аналогічні сучасним, однак у вавилонських текстах не зафіксовано міркувань, шляхом яких ці правила були одержані.

У Стародавній Греції квадратні рівняння розв'язували за допомогою геометричних побудов. Методи, які не пов'язані з геометрією, уперше запропонував Діофант Александрійський у III ст. У своїх книгах «Арифметика» вчений навів приклади розв'язування неповних квадратних рівнянь.

Задачі, які розв'язують за допомогою квадратних рівнянь, трапляються в трактаті з астрономії «Аріабхаттіам», що написав індійський астроном і математик Аріабхата в 499 р. н. е. Правило знаходження коренів рівняння, зведеного до вигляду $ax^2 + bx = c$, уперше сформулював індійський вчений Брахмагупта (близько 598 р.). Це правило за своєю суттю збігається із сучасним.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/prhsB

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
квадратне рівняння	quadratic equation	quadra- tische Gleichung (f)	équation quadratique

Пригадайте головне

1. Що таке квадратне рівняння? Наведіть приклади.
2. Які назви мають коефіцієнти квадратного рівняння?
3. У чому полягає сутність способу виділення квадрата двочлена для розв'язування квадратного рівняння?

Усне тренування

1. Розв'яжіть рівняння:
 $x^2 = 25$; $x^2 = 0,625$; $x^2 = -25$; $(x - 5)^2 = 25$.
2. Подайте вираз у вигляді подвоєного добутку двох множників: $6x$; $12y$; $0,4xy$; $25ab$; $\frac{3}{17}mn$; $\frac{8}{21}xy$.

Розв'яжіть задачі

- 716°.** Чи правильно, що квадратним є рівняння виду:
- 1) $0x^2 + bx + c = 0$; 3) $ax^2 + 0x + c = 0$;
 - 2) $ax^2 + bx + 0 = 0$; 4) $ax^2 + 0x + 0 = 0$?
- 717°.** У рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ назвіть:
- 1) перший коефіцієнт; 3) вільний член.
 - 2) другий коефіцієнт;
- 718°.** Чи має корені рівняння:
- 1) $(x + m)^2 = 3$; 2) $(x + m)^2 = -4$; 3) $(x + m)^2 = 0$?
- 719°.** Яке з даних рівнянь є квадратним:
- 1) $4x^2 + 7x - 3 = 0$; 3) $2x^3 + x + 4 = 0$; 5) $x^2 + 5x = 0$;
 - 2) $x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $4x^2 - 16 = 0$; 6) $8x + 16 = 0$?
- 720°.** Назвіть коефіцієнти квадратного рівняння:
- 1) $6x^2 + 5x - 1 = 0$; 3) $2x^2 - 12 = 0$; 5) $6x^2 = 0$;
 - 2) $x^2 + x - 6 = 0$; 4) $x^2 + 2x = 0$; 6) $5 + x^2 - 6x = 0$.
- Чи є серед цих рівнянь зведені квадратні рівняння?
- 721°.** Запишіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами:
- 1) $a = 3, b = 2, c = 4$;
 - 2) $a = 1, b = -3, c = 2$;
 - 3) $a = 2, b = 0, c = -8$;
 - 4) $a = -1, b = -2, c = 5$;
 - 5) $a = 1, b = -7, c = 0$;
 - 6) $a = 4, b = 8, c = 0$.


qr.orioncentr.com.ua/cQmCm

Чи є серед цих рівнянь зведені квадратні рівняння? Назвіть їх.

- 722°.** Запишіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами:

- E** 1) $a = 1, b = -4, c = -5$;
 2) $a = 9, b = 6, c = -8$.

- 723°.** Петро стверджує, що для того, щоб квадратне рівняння $4x^2 - 5x + 1 = 0$ стало зведеним, необхідно обидві частини цього рівняння поділити на 4. А Сергій заперечує це. Він говорить, що достатньо обидві частини рівняння помножити на 0,25. Хто із хлопчиків має рацію?

- 724°.** Перетворіть квадратне рівняння на зведене:

- 1) $2x^2 + 17x - 9 = 0$; 3) $3x^2 + 10x + 8 = 0$;
- 2) $-8x^2 + 10x - 3 = 0$; 4) $-9x^2 - 24x + 20 = 0$.

- 725°.** Перетворіть квадратне рівняння на зведене:

- E** 1) $4x^2 + 4x - 15 = 0$;
 2) $-5x^2 + 8x - 3 = 0$.

- 726°.** Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

- 1) $(x + 1)(x - 2) = 4$; 4) $4x^2 - 5 = 2x(1 + 3x)$;
- 2) $8x = (x - 4)(x + 4)$; 5) $(x + 3)^2 - 6 = 8 + 10x$;
- 3) $(x + 2)^2 - 13 = 3(x - 1)$; 6) $4(x + 8) = (x - 4)(x + 2)$.

- 727°.** Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

- E** 1) $(x - 4)(x + 1) = x - 7$; 3) $2(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 1$;
 2) $7x^2 - 3 = x(x - 11) + 1$; 4) $4(x - 2)(x + 2) + 5 = 7(x - 2)$.

- 728°.** Яке додатне число потрібно підставити замість n , щоб у лівій частині рівняння одержати квадрат суми або квадрат різниці:

- 1) $x^2 + 2x + n = 0$; 4) $x^2 - 8x + n = 0$;
- 2) $x^2 - 4x + n = 0$; 5) $x^2 + 5x + n = 0$;
- 3) $x^2 + 12x + n = 0$; 6) $x^2 - 9x + n = 0$?

- 729°.** Яке додатне число потрібно підставити замість n , щоб у лівій частині рівняння одержати квадрат суми або квадрат різниці:

- E** 1) $x^2 + 6x + n = 0$; 3) $x^2 + 7x + n = 0$;
 2) $x^2 - 10x + n = 0$; 4) $x^2 - 3x + n = 0$?

730*. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 7)^2 = 49$; 4) $(x + 4)^2 = 1$;
 2) $(x - 3)^2 = 16$; 5) $(x + 2)^2 = 0$;
 3) $(x - 5)^2 = 36$; 6) $(x - 1)^2 = -25$.



731*. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 2)^2 = 64$;
 2) $(x - 6)^2 = 0$; 3) $(x + 3)^2 = -9$.

qr.orioncentr.com.ua/jQ9bA

732. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена зведене квадратне рівняння:

- 1) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 4) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
 2) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 5) $x^2 - 6x - 16 = 0$;
 3) $x^2 + 12x + 35 = 0$; 6) $x^2 - 10x + 25 = 0$.

733. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена зведене квадратне рівняння:

- 1) $x^2 + 10x + 24 = 0$; 2) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 3) $x^2 - 8x + 16 = 0$.

734. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена рівняння:

- 1) $x^2 + 3x - 4 = 0$; 4) $2x^2 - 9x + 10 = 0$;
 2) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 5) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
 3) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $5x^2 + 14x - 3 = 0$.

735. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена рівняння:

- 1) $x^2 + 5x - 14 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 10 = 0$; 3) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

736. Один із коренів рівняння $3x^2 + bx + 6 = 0$ дорівнює -6 . Знайдіть інший корінь і коефіцієнт b .

737. Один із коренів рівняння $4x^2 - 7x + c = 0$ дорівнює 1 . Знайдіть інший корінь і коефіцієнт c .

738. Доведіть, що:

- 1) числа 5 і -7 є коренями рівняння $x^2 + 2x - 35 = 0$;
 2) число 2 не є коренем рівняння $2x^2 - x - 10 = 0$.

739. Доведіть, що:

- 1) числа 1 і -6 є коренями рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$;
 2) число -2 не є коренем рівняння $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

740*. Доведіть, що якщо число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то число 4 є коренем рівняння $cx^2 + bx + a = 0$.

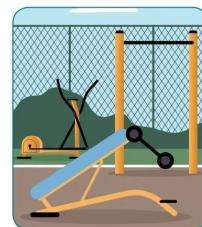
741*. За якого значення параметра p :

- 1) рівняння $x^2 + px - 35 = 0$ має корінь, що дорівнює 5 ;
 2) рівняння $px^2 - 11x + 6 = 0$ має корінь, що дорівнює 3 ?

Проявіть компетентність

742. Поряд з будинком, де мешкає Тетянка, установили спортивний майданчик прямокутної форми, площа якого 112 м^2 .

- Обчисліть розміри майданчика, якщо його довжина на 6 м більша за ширину.
- Навколо майданчика облаштовано доріжку завширшки $0,5 \text{ м}$, яку закладено плиткою розмірами $0,5 \times 0,5 \text{ м}$. Скільки плиток потрібно придбати для облаштування цієї доріжки?
- Спортивний майданчик разом із доріжкою обнесли секційним парканом. Висота секції паркану дорівнює $2,5 \text{ м}$, а ширина — 2 м . Обчисліть вартість матеріалу для паркану, якщо одна секція коштує 250 грн .
- Запропонуйте власний мініпроект за сюжетом задачі.



§ 18. ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

1. Дискримінант квадратного рівняння

Ситуація. Галина розв'язала квадратне рівняння $2x^2 - 11x + 5 = 0$ способом виділення квадрата двочлена. Петро узагальнив її спосіб розв'язування.



qr.orioncentr.com.ua/6y8ZL



Як міркував Петро?

Порівнюємо способи міркування Петра і Галини (табл. 32).



Таблиця 32

Рівняння	Галина	Петро
Перенесемо вільний член у праву частину рівняння	$2x^2 - 11x + 5 = 0$ $2x^2 - 11x = -5$	$ax^2 + bx + c = 0$ $ax^2 + bx = -c$
Поділимо обидві частини рівняння на перший коефіцієнт	$x^2 - \frac{11}{2}x = -2,5$	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Виділимо квадрат двочлена у лівій частині рівняння	$x^2 - 2 \cdot \frac{11}{2} \cdot x + \left(\frac{11}{4}\right)^2 = -2,5 + \left(\frac{11}{4}\right)^2$	$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
Згорнемо повний квадрат у лівій частині рівняння	$\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = -2,5 + \left(\frac{11}{4}\right)^2$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
Спростимо праву частину рівняння	$\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{-16 \cdot 2,5 + 11^2}{4^2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
Одержали рівняння	$\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$



Чи матиме корені одержане рівняння?

Не завжди.



Це залежить від виразу в правій частині рівняння. Поміркуємо.

Права частина рівняння Галини додатна, тому її рівняння матиме два корені. Кількість коренів рівняння Петра залежить від знака дробу $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Оскільки $4a^2 > 0$ за умови $a \neq 0$, то знак дробу визначає значення виразу $b^2 - 4ac$. Цей вираз називають **дискримінантом** квадратного рівняння.

Запам'ятайте!

Вираз $b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом** квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.



Дискримінант позначають буквою D . Отже, $D = b^2 - 4ac$.

2. Формула коренів квадратного рівняння

Розглянемо три випадки: 1) $D > 0$; 2) $D = 0$; 3) $D < 0$.

1. Нехай $D > 0$.

Маємо рівняння:	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ або $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$.
Перетворимо праву частину рівняння:	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$.
Можливі два випадки:	$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ або $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$.
Знайдемо x з отриманих рівностей:	$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$ або $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$.
Висновок:	рівняння має два корені $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ або $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

2. Нехай $D = 0$.

Рівняння набуває вигляду:	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.
Можливий єдиний випадок:	$x + \frac{b}{2a} = 0$.
Висновок:	рівняння має корінь $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Нехай $D < 0$.

Маємо рівняння:	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$, $D < 0$, $4a^2 > 0$
Проаналізуємо одержане рівняння:	ліва частина рівняння набуває невід'ємних значень, а права — лише від'ємних.
Висновок:	рівняння не має коренів

Запам'ятайте!**Формула коренів квадратного рівняння:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Чи справджується формула коренів квадратного рівняння для $D = 0$?

Так.



Якщо $D = 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Одержали, що в даному випадку рівняння має два корені, які дорівнюють один одному. Тому часто говорять, що для $D = 0$ квадратне рівняння має один корінь.

Ліву частину таких рівнянь можна подати як квадрат двочлена. Наприклад, рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$ можна записати так: $(x - 3)^2 = 0$.

Задача 1 Розв'яжіть рівняння: $x^2 - 5x + 6 = 0$.**Розв'язання**

Знайдемо дискримінант: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$, $D > 0$.

Застосуємо формулу коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1};$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Отже, рівняння має 2 корені: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.**Задача 2** Розв'яжіть рівняння: $2x^2 - 6x - 3 = 0$.**Розв'язання**У рівнянні $2x^2 - 6x - 3 = 0$:

$$a = 2, \quad b = -6, \quad c = -3.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 36 + 24 = 60,$$

 $D > 0$ — два різні корені.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{60}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{4} = \frac{2(3 \pm \sqrt{15})}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Отже, } x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}.$$

Задача 3 Розв'яжіть рівняння: $9x^2 + 6x + 1 = 0$.**Розв'язання** У рівнянні $9x^2 + 6x + 1 = 0$:

$$a = 9, \quad b = 6, \quad c = 1.$$

$$D = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0,$$

 $D = 0$ — два рівні корені.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2 \cdot 9} = -\frac{6}{2 \cdot 9} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Отже, } x_{1,2} = -\frac{1}{3}.$$



qr.orioncentr.com.ua/YvS0D

Задача 4 Розв'яжіть рівняння: $3x^2 + 4x + 3 = 0$.

Розв'язання У рівнянні $3x^2 + 4x + 3 = 0$:

$$a = 3, b = 4, c = 3.$$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 16 - 36 = -20,$$

$D < 0$ — коренів немає.

Отже, дане рівняння не має коренів.



Зверніть увагу:

залежно від значення дискримінанта квадратне рівняння:

- має два **різні** корені, якщо $D > 0$;
- має два **рівні** корені, якщо $D = 0$;
- **не має** коренів, якщо $D < 0$.

Дізнайтеся більше

1. Термін дискримінант (від лат. *discrimino* — «розбираю», «розрізняю») увів Сильвестр. Поняття «дискримінант квадратичної форми» використовувалося в роботах Гауса, Дедекінда, Кронекера, Вебера та інших.

2. Для квадратних рівнянь, у яких другий коефіцієнт є парним числом, формулу коренів квадратного рівняння зручніше записувати в іншому вигляді:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Задача 5 Розв'яжіть рівняння: $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Розв'язання Розв'яжемо рівняння: $x^2 - 8x + 7 = 0$.

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (-4)^2 - 1 \cdot 7 = 16 - 7 = 9,$$

$$D_1 > 0.$$

Застосуємо формулу коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{9}}{1} = 4 \pm 3.$$

Отже, $x_1 = 7$, $x_2 = 1$.

3. Для неповних квадратних рівнянь ($ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 = 0$) зручнішими є інші способи розв'язування.

Задача 6 Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 20 = 0$; 2) $3x^2 + 18x = 0$; 3) $7x^2 = 0$.

Розв'язання 1) $5x^2 - 20 = 0$.

Поділимо обидві частини рівняння на 5:	$x^2 - 4 = 0$.
Розкладемо ліву частину рівняння на множники за формулою різниці квадратів:	$(x - 2)(x + 2) = 0$.
Скористаємося властивістю рівності добутку нулю:	$x - 2 = 0$ або $x + 2 = 0$.
Отже,	$x_1 = 2$ і $x_2 = -2$.

2) $3x^2 + 18x = 0$.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники, винісши змінну x за дужки:	$x(3x + 18) = 0$.
Скористаємося властивістю рівності добутку нулю:	$x = 0$ або $3x + 18 = 0$.
Отже,	$x_1 = 0$ і $x_2 = -6$.

3) $7x^2 = 0$.

Утворюємо рівносильне рівняння:	$x^2 = 0$.
Отже,	$x_1 = x_2 = 0$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/RogpF

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
дискримінант квадратного рівняння	discriminant of a quadratic equation	Diskriminante der quadratischen Gleichung	le discriminant d'une équation quadratique

Пригадайте головне

1. Що називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Скільки коренів може мати квадратне рівняння?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.

Усне тренування

- Обчисліть: 15^2 ; 11^2 ; 13^2 ; $0,4^2$; $1,6^2$; $0,12^2$.
- Скільки коренів має рівняння:
 $x^2 = 25$; $x^2 = -0,25$; $x^2 = 5$; $2x^2 = 0$; $x^2 = a^2$?
- Подайте (якщо це можливо) у вигляді квадрата числа:
 121 ; $2,25$; $0,0001$; $1,69$; $-2,56$.

Розв'яжіть задачі

- 743°.** За якою формулою визначають дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:
- $D = b^2 + 4ac$;
 - $D = b^2 - ac$;
 - $D = -b^2 - 4ac$;
 - $D = b^2 - 4ac$?
- 744°.** За якою формулою визначають корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:
- $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
 - $x_{1,2} = \frac{b^2 \pm \sqrt{D}}{2a}$;
 - $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
 - $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$?
- 745°.** Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює: 1) 16; 2) 0; 3) -25?
- 746°.** Які з чисел 0; 1; -1; -0,5; 0,2; 2 є коренями квадратного рівняння:
- $x^2 - x - 2 = 0$;
 - $2x^2 + x = 0$?
- 747°.** Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо:
- $a = 1, b = 4, c = -5$;
 - $a = 1, b = -7, c = 10$;
 - $a = 5, b = 6, c = 1$;
 - $a = 3, b = -5, c = -2$.
- 748°.** Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо:
- $a = 1, b = -6, c = 8$;
 - $a = 2, b = 1, c = -6$.
- 749°.** Як обчислюють дискримінант квадратного рівняння: $x^2 - 10x + 16 = 0$:
- $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)$;
 - $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$;
 - $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)$;
 - $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$?
- Скільки коренів має дане рівняння?

- 750°.** Для якого з даних квадратних рівнянь дискримінант обчислюють так: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$?

- $x^2 - 5x - 6 = 0$;
 - $x^2 + 6x - 5 = 0$;
 - $x^2 + 5x - 6 = 0$;
 - $x^2 - 5x + 6 = 0$.
- Скільки коренів має це рівняння?

- 751°.** Визначте кількість коренів квадратного рівняння за його дискримінантом:

- $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$;
- $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$;
- $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$;
- $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$.

- 752°.** Визначте кількість коренів квадратного рівняння за його дискримінантом:



- $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$;
- $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)$;
- $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6$;
- $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$.

- 753°.** Назвіть коефіцієнти квадратного рівняння та складіть вираз для знаходження дискримінанта:



- $x^2 + 5x + 6 = 0$;
- $x^2 + 5x - 6 = 0$;
- $x^2 - 3x + 4 = 0$;
- $x^2 - 3x - 4 = 0$;
- $2x^2 + 6x - 1 = 0$;
- $2x^2 - 6x + 1 = 0$.



qr.orioncentr.com.ua/3VOQp

Скільки коренів має рівняння?

- 754°.** Назвіть коефіцієнти квадратного рівняння та складіть вираз для знаходження дискримінанта:



- $x^2 + 4x - 5 = 0$;
- $x^2 + 4x + 5 = 0$;
- $4x^2 - 4x + 1 = 0$;
- $4x^2 - 4x - 1 = 0$.

Скільки коренів має рівняння?

- 755°.** Розв'яжіть квадратне рівняння:

- $x^2 + 4x - 5 = 0$;
- $x^2 - 6x - 16 = 0$;
- $x^2 + 2x - 8 = 0$;
- $x^2 - 8x + 16 = 0$;
- $x^2 + 8x + 7 = 0$;
- $x^2 - 4x + 8 = 0$;
- $x^2 + x - 12 = 0$;
- $x^2 - 2x - 15 = 0$;
- $x^2 - 7x - 8 = 0$;
- $x^2 + 6x + 3 = 0$;
- $x^2 + x - 2 = 0$;
- $x^2 + 25x + 100 = 0$;
- $x^2 - 6x - 7 = 0$;
- $x^2 + 15x + 26 = 0$;
- $x^2 - 3x + 2 = 0$;
- $x^2 - 10x + 25 = 0$.

756*. Розв'яжіть квадратне рівняння:

- E** 1) $x^2 + 4x - 12 = 0$; 5) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
 2) $x^2 - 3x - 10 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
 3) $x^2 - 6x + 9 = 0$; 7) $x^2 - x - 6 = 0$;
 4) $x^2 + 5x + 8 = 0$; 8) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

757*. Розв'яжіть квадратне рівняння:

- E** 1) $2x^2 - x - 6 = 0$; 12) $-4x^2 + 7x - 3 = 0$;
 2) $9x^2 - 6x - 8 = 0$; 13) $9x^2 + 48x + 64 = 0$;
 3) $5x^2 + 7x - 6 = 0$; 14) $-3x^2 + 19x - 6 = 0$;
 4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$; 15) $2x^2 - 11x + 5 = 0$;
 5) $-4x^2 - 11x + 3 = 0$; 16) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$;
 6) $5x^2 + 14x - 3 = 0$;
 7) $-6x^2 - x + 1 = 0$;
 8) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
 9) $2x^2 - 9x + 10 = 0$;
 10) $-25x^2 + 10x + 3 = 0$;
 11) $16x^2 + 56x + 45 = 0$;



qr.orioncentr.com.ua/kEcgs

758*. Розв'яжіть квадратне рівняння:

- E** 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 5) $5x^2 + 6x + 1 = 0$;
 2) $9x^2 - 8x - 1 = 0$; 6) $-4x^2 + 28x - 49 = 0$;
 3) $-2x^2 + x + 10 = 0$; 7) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
 4) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; 8) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$.

759*. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $7x = 3x^2 + 4$; 6) $z - 3z^2 = -2$; 11) $13z - 3z^2 = 14$;
 2) $6y - 1 = 5y^2$; 7) $4x^2 = 2 - 7x$; 12) $2x^2 = 9x - 10$;
 3) $z^2 - 90 = z$; 8) $4y^2 = 33 + y$; 13) $81y^2 + 1 = 18y$;
 4) $5x^2 = 8x - 3$; 9) $9x^2 + 25 = 30x$; 14) $6z - 3 = z^2$;
 5) $5 = 6y - y^2$; 10) $y^2 = 11y - 18$; 15) $18 - y^2 = 5y + 18$.

760*. Розв'яжіть рівняння:

- E** 1) $2x^2 = 7x + 30$; 3) $z^2 - 5 = 2z$; 5) $5y = 1 - 14y^2$;
 2) $3y = 2y^2 - 5$; 4) $30 - x = x^2$; 6) $4x^2 + 7 = 7 - 12x$.

761*. Розв'яжіть рівняння:

- E** 1) $x(x - 1) = 72$; 5) $2y(y + 3) = (3 + y)^2$;
 2) $2y(y + 2) - 3 = 9y$; 6) $(z + 4)^2 + (z - 4)^2 = 36$;
 3) $(2z - 3)(2 - 3z) = -4$;
 4) $(x + 5)^2 = 4(x + 10)$;
 7) $(x + 2)(x + 1) = 4(x^2 - 22)$;
 8) $(y + 2)^2 - 10 = 6(y + 3)$.



qr.orioncentr.com.ua/yEhFu

762*. Розв'яжіть рівняння:

- E** 1) $x(x + 1) = 56$; 3) $4(3 - 2z) = (z - 3)^2$;
 2) $(y - 2)(2y - 1) = 5$; 4) $(x + 6)(x - 2) = 2(x - 2)$.

763*. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{7 + x}{4}$; 3) $\frac{y + y^2}{2} - \frac{y^2 - 6}{6} = \frac{1 - 3y}{4}$;
 2) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{5 + x}{6}$; 4) $\frac{y(y - 7)}{3} - y = \frac{4 - y}{3} - 4$.

764*. Розв'яжіть рівняння:

- E** 1) $\frac{x^2 - 4}{5} = \frac{x - 2}{3}$; 2) $\frac{y(y + 1)}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3y + 2y^2}{20}$.

765*. В одноколовому шаховому турнірі було зіграно загалом 105 партій. Скільки було учасників турніру?

766*. У міській агломерації, що охоплює кілька міст, кожне місто має одне шляхове сполучення з усіма іншими містами. Скільки міст налічує ця міська агломерація, якщо загалом у ній налічується 21 дорога?

767*. Населення міста за 2 роки збільшилося із 40 000 до 41 616 осіб. Який щорічний середній відсоток приросту населення цього міста?

768*. За яких значень змінної x :

- 1) значення добутків $(-x - 1)(x - 4)$ і $x(4x - 11)$ рівні;
 2) значення тричлена $x^2 - 4,6x + 2,4$ дорівнює 0;
 3) значення двочленів $x^2 - 2x$ і $28 - 5x$ рівні.

769*. Доберіть таке раціональне число n , для якого рівняння $x^2 - 2x + n = 0$:

- 1) має два різні корені; 2) не має коренів; 3) має два рівні корені.

770*. Доберіть таке раціональне число n , для якого рівняння $nx^2 + 3x + 2 = 0$: 1) має два різні корені; 2) не має коренів; 3) має два рівні корені.

771*. Розв'яжіть рівняння зі змінною x і буквеними коефіцієнтами:

- 1) $x^2 + 2x + n = 0$; 3) $nx^2 - 2x + 1 = 0$;
 2) $x^2 - 4x + 4n = 0$; 4) $x^2 + 3nx + 2n^2 = 0$.

772*. За якого значення параметра p ліва частина рівняння $4x^2 + 8x + p = 0$ є квадратом суми?

773*. Доведіть, що один із коренів рівняння $nx^2 - (n + m)x + m = 0$ дорівнює 1.

Проявіть компетентність

774. Іван Петрович розпочав будівництво будинку на ділянці землі, що має форму прямокутника. Одна сторона ділянки на 16 м менша від іншої, а її площа дорівнює 720 м^2 . Допоможіть Івану Петровичу здійснити необхідні розрахунки.

- Знайдіть сторони і периметр ділянки.
- Для початку будівництва ділянка була огорожена металевими секціями з розмірами $2 \times 2 \text{ м}$. Скільки таких секцій придбав Іван Петрович?
- Для придбання металевих секцій Іван Петрович може звернутися до трьох постачальників, умови яких подано в таблиці 33.

Таблиця 33

Постачальники	Ціна секції (грн/шт.)	Вартість доставки (грн)	Додаткові умови доставки
1	800	1600	—
2	900	1400	При замовленні товару на суму, більшу за 45 000 грн, доставка безкоштовна
3	850	1300	При замовленні товару на суму, більшу за 45 000 грн, доставка безкоштовна

Яка пропозиція покупки з доставкою буде найвигіднішою для Івана Петровича?

§ 19. ТЕОРЕМА ВІЄТА

1. Співвідношення між коренями та коефіцієнтами зведеного квадратного рівняння



qr.orioncentr.com.ua/egzvS

Ситуація. Андрій навчився розв'язувати квадратні рівняння і вирішив виписати корені кожного з рівнянь, суму коренів і добуток коренів. Ці дані він записав у таблицю (табл. 34).

Таблиця 34

Квадратне рівняння	Корені квадратного рівняння	Сума коренів	Добуток коренів
$x^2 - 11x + 28 = 0$	4; 7	11	28
$x^2 - 3x - 28 = 0$	-4; 7	3	-28
$x^2 - x - 12 = 0$	-3; 4	1	-12
$x^2 + 11x + 30 = 0$	-5; -6	-11	30

Андрій дещо замислився і запитав у вчительки:



Чи існують залежності між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами?

Так.



Ці залежності вперше встановив французький математик Франсуа Вієт.

Запам'ятайте!

Теорема Вієта

Нехай x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. Тоді сума коренів дорівнює другому коефіцієнту, взятому із протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доведемо це твердження.

Нехай $x^2 + px + q = 0$ — дане зведене квадратне рівняння,

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \text{ де } D = p^2 - 4q \text{ — дискримінант даного рівняння. Тоді:}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p + \sqrt{D})(-p - \sqrt{D})}{4} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

✓ Якщо в рівнянні $x^2 + px + q = 0$ коефіцієнти p і q — цілі числа і його корені x_1 і x_2 також є цілими числами, то корені x_1 і x_2 є дільниками вільного члена q .

Задача 1 Розв'яжіть рівняння: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Розв'язання

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = 6$.

Знаходимо пари дільників числа 6: -6 і -1 , -3 і -2 , 6 і 1 , 3 і 2 .

Обираємо пару дільників, сума яких дорівнює числу 5: 3 і 2 .

Отже, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Задача 2 Один із коренів рівняння $x^2 + px + 28 = 0$ дорівнює 4. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт p .

Розв'язання

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = 28$.

Знаходимо другий корінь: $x_2 = 28 : x_1 = 28 : 4 = 7$.

Знаходимо коефіцієнт p : $-p = x_1 + x_2 = 4 + 7 = 11$; $p = -11$.

Отже, $x_2 = 7$; $p = -11$.



Чи виконується теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння, у якому $D = 0$?

Так.



У такому рівнянні $x_1 = x_2$, тоді $x_1 + x_2 = 2x_1 = -p$ і $x_1 \cdot x_2 = (x_1)^2 = q$.

✓ Корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, у якому $D = 0$, можна знайти так: $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$ або $x_{1,2} = \sqrt{q}$.

2. Співвідношення між коренями та коефіцієнтами повного квадратного рівняння

qr.orioncentr.com.ua/WJMnd



Чи можна застосувати теорему Вієта до незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?

Так.



Запам'ятайте!

Нехай x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тоді сума коренів дорівнює $-\frac{b}{a}$, а добуток коренів дорівнює $\frac{c}{a}$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Довести це твердження нескладно, якщо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ звести до рівняння виду $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Спробуйте зробити це самостійно.

Справедливим є твердження, обернене до теореми Вієта.

✓ Якщо для деяких чисел k і l виконуються рівності

$$k+l=-p \text{ і } k \cdot l=q,$$

$$k+l=-\frac{b}{a} \text{ і } k \cdot l=\frac{c}{a},$$

то k і l є коренями

зведеного
квадратного
рівняння

$$x^2 + px + q = 0;$$

незведеного
квадратного
рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Задача 3 Запишіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа -4 і 1 .

Розв'язання

Знаходимо суму коренів:

$$x_1 + x_2 = -4 + 1 = -3.$$

Знаходимо добуток коренів:

$$x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot 1 = -4.$$

Записуємо коефіцієнти зведеного

квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

$$p = 3, q = -4.$$

Шукане рівняння:

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Задача 4 Доведіть, що для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ виконується рівність: $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$, де x_1, x_2 — корені квадратного рівняння.

Розв'язання У лівій частині даної рівності виділимо квадрат двочлена:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

За теоремою Вієта, $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1 \cdot x_2 = q$.

$$\text{Тоді } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

Отже, рівність доведено: $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

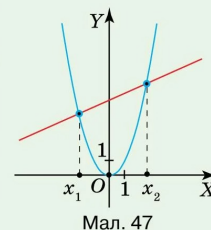
Дізнайтеся більше

1. Франсуа Вієт (1540–1603) — французький математик, який запровадив сучасну систему нотації в алгебрі. Особливо пишався теоремою про залежність між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами, яку було оприлюднено в 1591 р. Її названо ім'ям Вієта.



Франсуа Вієт

2. Існують різні способи розв'язування квадратних рівнянь. Розглянемо один із них — графічний. Його суть полягає в тому, що для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ одержують рівносильне рівняння $x^2 = -px - q$ та будують графіки двох відповідних функцій: $y = x^2$ і $y = -px - q$ в одній системі координат. Графіком функції $y = x^2$ є парабола, вершина якої розміщена в початку координат, графіком функції $y = -px - q$ є пряма. Абсиси точок перетину графіків є коренями рівняння (мал. 47).



Мал. 47

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/10AJT

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
теорема Вієта	Vieta['s] formula	Vietascher Wurzelsatz (m)	théorème de Viète

Пригадайте головне

1. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
2. Яка особливість теореми Вієта для повного квадратного рівняння?
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.

Усне тренування

1. Спростіть вираз:

$$\sqrt{16^2}; \sqrt{(-25)^2}; \sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{7})^2}; \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}.$$

2. Обчисліть:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}); (\sqrt{7}-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+\sqrt{7}); (1+\sqrt{2})^2.$$

Розв'яжіть задачі

775. Яке співвідношення є правильним для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

- 1) $x_1 + x_2 = p$; 2) $x_1 + x_2 = -q$; 3) $x_1 + x_2 = -p$; 4) $x_1 + x_2 = q$?

776°. Яке співвідношення є правильним для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

- 1) $x_1 \cdot x_2 = p$; 3) $x_1 \cdot x_2 = q$;
2) $x_1 \cdot x_2 = -p$; 4) $x_1 \cdot x_2 = -q$?

777°. Яке співвідношення є правильним для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

- 1) $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$; 3) $x_1 + x_2 = -b$;
2) $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$; 4) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$?

778°. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 6x + 8 = 0$, назвіть:

- 1) суму його коренів;
2) добуток його коренів;
3) знаки його коренів.

779°. Не розв'язуючи рівняння $x^2 + 4x - 5 = 0$, назвіть:

- E** 1) суму його коренів; 3) знаки його коренів.
2) добуток його коренів;

780°. Якими можуть бути знаки коренів квадратного рівняння, якщо їхній добуток:

- 1) додатне число; 2) від'ємне число?

781°. Один із коренів рівняння дорівнює 2. Не розв'язуючи рівняння, назвіть інший корінь рівняння:

- 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 2x - 8 = 0$.

782°. Один із коренів рівняння дорівнює 6. Не розв'язуючи рівняння, назвіть інший корінь рівняння:

- E** 1) $x^2 - 8x + 12 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

783°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$:

- 1) 1 і -10 ; 2) -2 і 5 ; 3) -1 і 10 ; 4) 2 і -5 .

784°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $x^2 - 9x + 8 = 0$:

- 1) -1 і -8 ; 2) -2 і -4 ; 3) 1 і 8 ; 4) 2 і 4 .

785°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $5x^2 - 7x + 2 = 0$:

- 1) 7 і 2 ; 2) 1 і $-\frac{2}{5}$; 3) 1 і $-\frac{2}{5}$; 4) 1 і $\frac{2}{5}$.

786°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $2x^2 + x - 6 = 0$:

- 1) -1 і -6 ; 2) -2 і $-\frac{3}{2}$; 3) -2 і $\frac{3}{2}$; 4) 2 і $\frac{3}{2}$.

787°. Скориставшись теоремою Вієта, розв'яжіть квадратне рівняння:



- 1) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 6x - 16 = 0$;
3) $x^2 + 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 - 10x + 16 = 0$;
5) $x^2 - 12x + 11 = 0$;
6) $x^2 - 9x + 8 = 0$;
7) $x^2 + x - 12 = 0$;
8) $x^2 - 15x + 26 = 0$;
9) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
10) $x^2 + 6x + 5 = 0$;



qr.orioncentr.com.ua/A9Bjr

- 11) $x^2 + x - 2 = 0$;
12) $x^2 + 25x + 100 = 0$;
13) $x^2 - 9x - 10 = 0$;
14) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
15) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

788°. Скориставшись теоремою Вієта, розв'яжіть квадратне рівняння:



- 1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 5) $x^2 - 5x - 14 = 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 9x + 20 = 0$; 7) $x^2 - x - 20 = 0$;
4) $x^2 + 9x + 8 = 0$; 8) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

789°. Не обчислюючи коренів рівняння $x^2 + 13x + 22 = 0$, знайдіть: 1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 \cdot x_2$.

790°. Не обчислюючи коренів рівняння $25x^2 + 40x - 4 = 0$, знайдіть: 1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 \cdot x_2$.

791°. Не обчислюючи коренів рівняння $9x^2 - 24x + 14 = 0$, знайдіть: 1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 \cdot x_2$.



792°. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:



- 1) 2 і 5 ; 4) -8 і -2 ; 7) $-\frac{3}{4}$ і 8 ;
2) -6 і 3 ; 5) 6 і $\frac{1}{3}$; 8) -7 і $-\frac{3}{14}$.
3) -1 і 7 ; 6) -3 і $\frac{2}{3}$;



qr.orioncentr.com.ua/4XVWn

793*. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

E 1) 4 і 3 ; 2) -2 і 5 ; 3) -4 і $\frac{3}{4}$; 4) -2 і $-\frac{3}{8}$.

794. Один із коренів рівняння $x^2 + px + 33 = 0$ дорівнює 3 . Знайдіть інший корінь і коефіцієнт p .

795. Один із коренів рівняння $x^2 + px - 28 = 0$ дорівнює 2 . Знайдіть інший корінь і коефіцієнт p .

E **796.** Один із коренів рівняння $x^2 - 10x + q = 0$ дорівнює -3 . Знайдіть інший корінь і коефіцієнт q .

797. Один із коренів рівняння $x^2 + 12x + q = 0$ дорівнює -5 . Знайдіть інший корінь і коефіцієнт q .

E **798.** Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2 - 9x + q = 0$ задовольняють умову $x_1 = 2x_2$. Знайдіть x_1 , x_2 і q .

799. Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2 + px + 18 = 0$ задовольняють умову $2x_1 - x_2 = 0$. Знайдіть x_1 , x_2 і p .

800. Не обчислюючи коренів рівняння $x^2 - 3\sqrt{3}x - 12 = 0$, знайдіть:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

801. Не обчислюючи коренів рівняння $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$, знайдіть:

E 1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

802*. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ з цілими коефіцієнтами p і q має корінь $1 + \sqrt{3}$. Знайдіть інший корінь рівняння.

803*. За яких значень параметра n сума коренів квадратного рівняння $x^2 + (6n^2 + 5n - 1)x + n = 0$ дорівнює нулю?

804*. За яких значень параметра m добуток коренів квадратного рівняння $x^2 - 4mx + (5m^2 + 2m - 3) = 0$ дорівнює нулю?

805*. У рівнянні $x^2 - 3x + p = 0$ сума квадратів коренів дорівнює 5 . Знайдіть p .

Проявіть компетентність

806. На дитячому майданчику установили нову дитячу гірку — споруду з гладким похилим спуском і драбинкою, яка дозволяє підніматися на верхню площадку, щоб потім спускатися вниз. Площадка для спуску розташована на висоті $1,5$ м.



1. Розрахуйте довжину похилого спуску, якщо він на пів метра довший за його проекцію.

2. Скільки метрів пройшов за день Василько, якщо він спустився 18 разів? А кілометрів?

3. Знайдіть площу поверхні спуску, якщо його ширина — 70 см.

4. Розрахуйте довжину драбинки, якщо вона на 90 см довша за її проекцію.

5. Розрахуйте висоту сходинок, якщо встановлено 7 сходинок і перша розміщується на висоті 30 см від поверхні землі.

§ 20. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

1. Квадратний тричлен

Ситуація. Олеся виконувала вправи на визначення IQ (коефіцієнта інтелекту). Їй трапилося завдання: «Визначте, який із многочленів є зайвим у такій послідовності:

$$2x + 3; \frac{x+1}{2}; 8x; 2x^2 + 3x - 2.$$

Олеся вибрала многочлен $2x^2 + 3x - 2$.



qr.orioncentr.com.ua/TTq35



Чи можна погодитися з вибором Олесі?

Так.



Цей многочлен є многочленом другого степеня. Його також називають *квадратним тричленом*. Інші многочлени — многочлени першого степеня.

Запам'ятайте!

Квадратним тричленом називається многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a , b і c називають *коефіцієнтами квадратного тричлена*.



Коренями квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називають такі значення змінної x , за яких значення даного квадратного тричлена дорівнює нулю.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $2x^2 + 3x - 2$, необхідно розв'язати відповідне квадратне рівняння $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Якщо квадратний тричлен має корені, то його можна розкласти на лінійні множники.

2. Розкладання квадратного тричлена на множники

Запам'ятайте!

Теорема (про розкладання квадратного тричлена на лінійні множники)

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то має місце тотожність:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доведення. У даному тричлені винесемо за дужки коефіцієнт a :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

За теоремою Вієта маємо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ і } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Підставимо суму й добуток коренів квадратного тричлена замість другого і третього коефіцієнтів та спростимо одержаний вираз:

$$\begin{aligned} a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) = \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Одержали: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Отже, тотожність доведено.



Який вигляд має розклад на лінійні множники квадратного тричлена, у якого дискримінант дорівнює 0?

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2, \text{ оскільки } x_1 = x_2.$$



Розклад квадратного тричлена на лінійні множники залежить від кількості його коренів.

Кількість коренів квадратного тричлена	Розклад квадратного тричлена на множники
Два корені	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Один корінь (два рівні корені)	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
Немає коренів	Не можна розкласти на множники

Задача 1 Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $2x^2 + 3x - 2$.

Розв'язання

Складаємо відповідне квадратне рівняння:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Розв'язуємо рівняння: $x_1 = -2$ і $x_2 = \frac{1}{2}$.

Застосовуємо формулу: $2x^2 + 3x - 2 = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Вносимо множник 2 у $2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x-1)$.
другі дужки:

Отже, $2x^2 + 3x - 2 = (x+2)(2x-1)$.

3. Застосування розкладання квадратного тричлена на множники

qr.orioncentr.com.ua/D9cyw



Задача 2 Скоротіть дріб: $\frac{x^2 + 4x - 12}{3x^2 + 19x + 6}$.

Розв'язання

Знаходимо корені тричлена в чисельнику:

$x^2 + 4x - 12 = 0$, корені — числа 2 і -6.

Записуємо розклад чисельника: $x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x+6)$.

Знаходимо корені тричлена в знаменнику:

$3x^2 + 19x + 6 = 0$, корені — числа $-\frac{1}{3}$ і -6.

Записуємо розклад знаменника:

$$3x^2 + 19x + 6 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+6) = (3x+1)(x+6).$$

Скорочуємо даний дріб:

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{3x^2 + 19x + 6} = \frac{(x-2)(x+6)}{(3x+1)(x+6)} = \frac{x-2}{3x+1}.$$

Задача 3 Побудуйте графік функції $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1}$.

Розв'язання

1. Знаходимо область визначення даної функції:

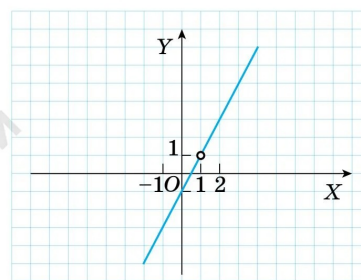
$$D(y): x \neq 1.$$

2. Розкладаємо на множники чисельник і скорочуємо дріб, що задає функцію:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1);$$

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} = 2x-1.$$

3. Графіком є всі точки прямої $y = 2x - 1$, за винятком точки з абсцисою $x = 1$ (мал. 48).



Мал. 48

Дізнайтеся більше

Існують квадратні рівняння з особливими коефіцієнтами, наявність яких дозволяє розв'язувати рівняння набагато легше.

1. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ виконується умова $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$ і $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ виконується умова $a + c = b$, то $x_1 = -1$ і $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Задача 4 Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 9x + 4 = 0$; 2) $3x^2 + 8x + 5 = 0$.

Розв'язання

1) $a = 5$, $b = -9$, $c = 4$. Тоді $a + b + c = 5 + (-9) + 4 = 0$.

Отже, $x_1 = 1$ і $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{4}{5}$.

2) $a = 3$, $b = 8$, $c = 5$. Тоді $a + c = 3 + 5 = 8 = b$.

Отже, $x_1 = -1$ і $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/BwXVH

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
розкла- дання на множники	factorization	Faktor- zerlegung (f)	factorisation

Пригадайте головне

- Який многочлен називають квадратним тричленом?
- Які числа називають коефіцієнтами квадратного тричлена?
- Що таке корені квадратного тричлена?
- Запишіть формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

Усне тренування

Обчисліть зручним способом:

- 1) $36 + 18^2$; 13² - 39; 125 · 7 - 7 · 25; 84 - 12 · 42;
2) $26^2 - 16^2$; 105² - 5²; $26^2 - 2 \cdot 26 \cdot 6 + 6^2$.

Розв'яжіть задачі

- 807°.** Чи є квадратним тричленом даний многочлен:
1) $x^2 - 4x + 3$; 2) $-2x^2 + x - 3$; 3) $2x^3 - 2x^2 + 2$?
- 808°.** Чи правильно записано формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники:
1) $ax^2 + bx + c = a(x + x_1)(x + x_2)$;
2) $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$;
3) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$?
- 809°.** Чи можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники, якщо його дискримінант дорівнює:
1) 25; 2) 0; 3) -16; 4) 20?
- 810°.** Запишіть розклад деякого квадратного тричлена на лінійні множники, якщо:
1) $a = 1, x_1 = 3, x_2 = 5$; 3) $a = 2, x_1 = 3, x_2 = -3$;
2) $a = 1, x_1 = -2, x_2 = 4$; 4) $a = -3, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$.

- 811°.** Запишіть розклад деякого квадратного тричлена на лінійні множники, якщо:



- 1) $a = 1, x_1 = 4, x_2 = 6$; 2) $a = 5, x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = -5$.

- 812°.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:



- 1) $x^2 - 3x - 10$; 6) $x^2 - 6x - 7$;
2) $x^2 - 10x + 24$; 7) $x^2 + 4x + 4$;
3) $-x^2 + 16x - 15$; 8) $-x^2 + 10x - 25$.
4) $x^2 - 2x - 15$;
5) $-x^2 + 4x - 3$;


qr.orioncentr.com.ua/aJCm7

- 813°.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:



- 1) $x^2 + 3x + 2$; 3) $x^2 - 5x - 24$;
2) $-x^2 - 8x + 9$; 4) $x^2 + 6x + 9$.

- 814°.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

- 1) $2x^2 - 5x + 3$; 5) $-9x^2 + 12x - 4$;
2) $5x^2 + 4x - 1$; 6) $3x^2 - 8x + 5$;
3) $-3x^2 - x + 14$; 7) $4x^2 - 4x + 1$;
4) $6x^2 - 5x + 1$; 8) $-2x^2 + 3x + 2$.

- 815°.** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:



- 1) $3x^2 + 5x - 2$; 3) $9x^2 + 6x + 1$;
2) $-2x^2 + x + 15$; 4) $-5x^2 + 6x - 1$.

- 816°.** За яких значень a :

- 1) розклад квадратного тричлена $x^2 + ax - 51$ на множники містить множник $(x - 17)$;
2) розклад квадратного тричлена $2x^2 - 5x + a$ на множники містить множник $(2x + 3)$?

- 817°.** За яких значень b :



- 1) розклад квадратного тричлена $x^2 + bx - 51$ на множники містить множник $(x - 3)$;
2) розклад квадратного тричлена $5x^2 + 3x + b$ на множники містить множник $(5x - 2)$?

- 818°.** Скоротіть дріб:



- 1) $\frac{3x-1}{3x^2+2x-1}$; 3) $\frac{16-x^2}{x^2+x-12}$;
2) $\frac{2x^2-5x-3}{6x-18}$;


qr.orioncentr.com.ua/eUXXr

$$4) \frac{x^2 - x - 56}{x^2 + 7x}; \quad 5) \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 8x + 15}; \quad 6) \frac{x^2 + 9x + 8}{-x^2 + 8x + 9}.$$

819. Скоротіть дріб:

$$E) 1) \frac{4x+4}{x^2-5x-6}; \quad 2) \frac{x^2-3x}{3x^2-10x+3}; \quad 3) \frac{5x^2-4x-12}{x^2-4}.$$

820. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}; \quad 2) y = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}.$$

821. Побудуйте графік функції: $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$

822. Знайдіть значення дробу:

$$1) \frac{x^2 - 36}{x^2 - 8x + 12}, \text{ якщо } x = 12;$$

$$2) \frac{x^2 - 5x + 6}{-2x^2 + 5x - 2}, \text{ якщо } x = -0,5.$$

823. Знайдіть значення дробу:

$$E) 1) \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9}, \text{ якщо } x = -2;$$

$$2) \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}, \text{ якщо } x = 11.$$

824. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x - 3} \right) \cdot \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 25};$$

$$2) \frac{5x+1}{x^2+9x-10} : \frac{5x^2-4x-1}{x^2-2x+1} + \frac{10}{x^2+10x}.$$

825. Спростіть вираз $\left(\frac{7}{5x^2+3x-2} - \frac{5}{5x-2} \right) \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}.$ 826. За яких значень m квадратний тричлен $x^2 + mx + 25$ можна розкласти на два однакові лінійні множники?827. За яких значень n квадратний тричлен $x^2 - 4x + n$ можна розкласти на два однакові лінійні множники?828*. За яких значень m квадратні тричлени $x^2 + mx + 8$ і $x^2 + x + m$ мають у розкладі один і той самий лінійний множник?

829*. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

$$1) nx^2 + (n-2)x - 2; \quad 2) x^2 - mx - mn - n^2.$$

Проявіть компетентність

830. У збірнику «Юний шапкіст» надрукували 190 партій кругового турніру із шашок «Золота шашка», який проводився серед учнів міста. У турнірі кожний учасник зустрічався з кожним по одному разу.



1. Скільки було учасників турніру?

2. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо до складу команди входили три хлопці й одна дівчина?

3. Турнір проходив 5 днів. Скільки партій було зіграно кожного дня?

4. На шапковій дошці є діагоналі, найдовшою з яких є діагональ, що з'єднує два кути дошки і складається з десяти чорних полів. Її називають «великою дорогою». Скільки великих доріг на дошці? Скільки всього діагоналей на дошці?

§ 21. РІВНЯННЯ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

1. Цілі раціональні рівняння, що зводяться до квадратних

Ситуація. Катя й Олег грали в математичне лото. Каті потрібно було вибрати серед запропонованих рівнянь рівняння з найбільшим коренем $x = 1$, а Олегу — рівняння з найменшим коренем $x = 1$.

Катя вибрала рівняння:

$$(x-1)^2 = 2 - 2x = 0$$

$$2x^2 - 4 = x^2 - 2x - 1$$

Олег вибрав рівняння:

$$3x^2 - 4x = x^2 + 3x - 5$$

$$8x^2 - 11x + 15 = (2x+1)^2 + 3$$


qr.orioncentr.com.ua/Oiz1H



Чи правильно діти визначили корені рівнянь?

Так (табл. 35).



Таблиця 35

Рівняння	Корені рівняння	Найбільший корінь	Найменший корінь
$(x-1)^2 = 2 - 2x$	1; -1	1	-1
$2x^2 - 4 = x^2 - 2x - 1$	1; -3	1	-3
$3x^2 - 4x = x^2 + 3x - 5$	1; 2,5	2,5	1
$8x^2 - 11x + 15 = (2x+1)^2 + 3$	1; 2,75	2,75	1



Що об'єднує всі ці рівняння?

Вони належать до цілих раціональних рівнянь, які можна звести до квадратних.



Пригадаймо.

Раціональне рівняння

Ціле раціональне рівняння
(не містить ділення на вираз зі змінною)

Дробове раціональне рівняння
(містить ділення на вираз зі змінною)

Розв'яжемо рівняння $8x^2 - 11x + 15 = (2x+1)^2 + 3$.

1. Розкриємо дужки: $8x^2 - 11x + 15 = 4x^2 + 4x + 1 + 3$.

2. Перенесемо доданки з правої частини рівняння в ліву і зведемо подібні доданки:

$$8x^2 - 11x + 15 - 4x^2 - 4x - 1 - 3 = 0.$$

$$4x^2 - 15x + 11 = 0.$$

3. Знайдемо корені отриманого квадратного рівняння:

$$x_1 = 1 \text{ і } x_2 = 2,75.$$



Щоб розв'язати ціле раціональне рівняння, яке зводиться до квадратного, потрібно:

1) звести рівняння до вигляду $P(x) = 0$, де $P(x)$ — квадратний тричлен;

2) розв'язати одержане квадратне рівняння $P(x) = 0$.

Задача 1 За яких значень змінної значення виразу $(x+1)^2$ на 4 більше за значення виразу $0,5(x+1)^2 - 2$?

Розв'язання

1. Складемо рівняння:

$$(x+1)^2 - 4 = 0,5(x+1)^2 - 2.$$

2. Розкриємо дужки:

$$x^2 + 2x + 1 - 4 = 0,5x^2 + x + 0,5 - 2.$$

3. Перенесемо всі доданки у ліву частину рівняння і зведемо подібні доданки:

$$0,5x^2 + x - 1,5 = 0$$

$$\text{або } x^2 + 2x - 3 = 0.$$

4. Знайдемо корені цього рівняння:

$$x_1 = -3 \text{ і } x_2 = 1.$$

2. Дробові раціональні рівняння, що зводяться до квадратних

Дробові раціональні рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \text{ де } P(x) \text{ і } Q(x) \text{ — многочлени.}$$



За яких умов дріб дорівнює нулю?

Одночасно мають виконуватися дві вимоги:
 $Q(x) \neq 0$ і $P(x) = 0$.



Під час розв'язування дробового раціонального рівняння необхідно визначити ОДЗ його змінної (а саме $Q(x) \neq 0$) та перевірити знайдені корені на належність до неї.

Задача 2 Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{7}{x-1} - \frac{12}{x+1} = \frac{x^2+13}{x^2-1}.$$

Розв'язання

1. Визначаємо ОДЗ змінної: x — будь-яке число, крім ± 1 .

2. Зводимо рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

$$\frac{7}{x-1} - \frac{12}{x+1} - \frac{x^2+13}{x^2-1} = 0.$$

$$\frac{7(x+1) - 12(x-1) - (x^2+13)}{(x-1)(x+1)} = 0.$$

3. Розв'язуємо рівняння $P(x) = 0$.

$$7(x+1) - 12(x-1) - (x^2+13) = 0.$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0;$$

$$x_1 = -6, x_2 = 1.$$

4. Робимо перевірку знайдених коренів щодо їх належності до ОДЗ змінної початкового рівняння.

Число -6 входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому -6 є коренем даного рівняння.

Число 1 не входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому 1 не є коренем даного рівняння.

5. Записуємо відповідь: $x = -6$.

 **Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, що зводиться до квадратного, потрібно:**

1) визначити ОДЗ змінної рівняння;

2) звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, де $P(x)$ — квадратний тричлен;

3) розв'язати квадратне рівняння $P(x) = 0$;

4) зробити перевірку знайдених коренів щодо їх належності до ОДЗ змінної початкового рівняння.

3. Розв'язування рівнянь способом заміни змінної

qr.orioncentr.com.ua/tCjST



Чи можна рівняння $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ звести до квадратного?

Так.



Запишемо рівняння так: $(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$. Тобто воно стане квадратним рівнянням відносно x^2 .

Можна сказати, що дане рівняння — «двічі» квадратне. Такі рівняння називають *бікватратними*.

Запам'ятайте!

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називається *бікватратним*.

Для розв'язування бікватратних рівнянь використовують введення нової змінної, або *спосіб заміни змінної*.

Задача 3 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Розв'язання

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Уведемо нову змінну:

$$\text{заміна } t = x^2 (t \geq 0).$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Знайдемо корені допоміжного квадратного рівняння:

$$t_1 = 1 \quad \text{і} \quad t_2 = 4.$$

Повернемося до змінної x :

$$x^2 = 1 \quad \text{або} \quad x^2 = 4.$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \quad \text{і} \quad x_{3,4} = \pm 2.$$

Отже, $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$.



Чи завжди бікватратне рівняння має чотири різні корені?

Ні.



Якщо допоміжне рівняння $at^2 + bt + c = 0$ має два різні корені, але один із цих коренів від'ємний, то початкове рівняння може мати не більше ніж два корені. Проаналізуйте інші випадки самостійно.

Для розв'язування рівнянь, які містять вираз, що трапляється кілька разів, також використовують спосіб заміни змінної.

Задача 4 Розв'яжіть рівняння: $(x^2 + 2x - 5)(x^2 + 2x - 6) = 6$.

Розв'язання

У рівнянні вираз $x^2 + 2x$ повторюється двічі (він є і в перших дужках, і в других). Тому виконуємо заміну $t = x^2 + 2x$ (t — будь-яке число).

Одержимо допоміжне рівняння зі змінною t :

$$\begin{aligned}(t - 5)(t - 6) &= 6; \\ t^2 - 11t + 24 &= 0; \\ t_1 &= 3 \text{ і } t_2 = 8.\end{aligned}$$

Повернемося до змінної x : $x^2 + 2x = 3$ або $x^2 + 2x = 8$.

Розв'яжемо одержані квадратні рівняння:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= 0 \quad \text{або} \quad x^2 + 2x - 8 = 0. \\ x_1 &= 1, x_2 = -3 \quad x_3 = 2, x_4 = -4.\end{aligned}$$

Отже, $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -4$.

Задача 5 Розв'яжіть рівняння: $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{13}{6}$.

Розв'язання Розв'язати дане рівняння можна двома способами:

Спосіб 1. Звести рівняння до виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

ОДЗ змінної: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{13}{6} &= 0, \\ \frac{6(x+2)(x+2) + 6(x-2)(x-2) - 13(x-2)(x+2)}{6(x-2)(x+2)} &= 0, \\ 6(x+2)^2 + 6(x-2)^2 - 13(x^2 - 4) &= 0, \\ 6(x^2 + 4x + 4) + 6(x^2 - 4x + 4) - 13(x^2 - 4) &= 0, \\ 6x^2 + 24x + 24 + 6x^2 - 24x + 24 - 13x^2 + 52 &= 0, \\ -x^2 + 100 &= 0, \\ x^2 &= 100, x_{1,2} = \pm 10.\end{aligned}$$

Перевірка:

$x = 10$ — входить до ОДЗ змінної,

$x = -10$ — входить до ОДЗ змінної. Отже, $x_{1,2} = \pm 10$.

Спосіб 2. Застосувати спосіб заміни змінної. ОДЗ змінної: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned}\text{Заміна } \frac{x+2}{x-2} = t (t \neq 0), \quad \frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{t}. \\ t + \frac{1}{t} - \frac{13}{6} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{6t^2 + 6 - 13t}{6t} = 0, \quad 6t^2 - 13t + 6 = 0. \\ t_1 = \frac{3}{2}; \quad t_2 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Повертаємося до змінної x :

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2} = \frac{3}{2} \quad \text{або} \quad \frac{x+2}{x-2} = \frac{2}{3}. \\ x = 10; \quad x = -10.\end{aligned}$$

Перевірка: $x = 10$; $x = -10$ — входять до ОДЗ змінної початкового рівня. Отже, $x_{1,2} = \pm 10$.



Для розв'язування рівнянь способом заміни змінної потрібно:

- 1) визначити ОДЗ змінної початкового рівняння;
- 2) для виразу, що повторюється, ввести заміну й одержати допоміжне рівняння;
- 3) розв'язати допоміжне рівняння;
- 4) повернутися до початкової змінної та знайти корені початкового рівняння;
- 5) за потреби зробити перевірку знайдених коренів на належність їх до ОДЗ змінної початкового рівняння.

Дізнайтеся більше

Для розв'язування квадратних рівнянь, що містять «незручні коефіцієнти», використовують також метод «перекидання»:

Розв'яжіть рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$.	Розв'яжіть рівняння: $12x^2 + 5x - 2 = 0$.
Помножимо обидві частини рівняння на коефіцієнт a : $a^2x^2 + abx + ac = 0$.	Помножимо обидві частини рівняння на 12: $144x^2 + 60x - 24 = 0$.
Уведемо нову змінну $t = ax$ та одержимо допоміжне рівняння: $t^2 + bt + ac = 0$.	Уведемо заміну $t = 12x$ і одержимо рівняння: $t^2 + 5t - 24 = 0$.

Розв'яжемо допоміжне рівняння.	За теоремою Вієта: $t_1 = 3$ і $t_2 = -8$.
Повернемося до змінної початкового рівняння.	$12x = 3$ або $12x = -8$; $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/W6QGr

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
метод заміни змінної	method of substitution	Substitution-methode (f)	méthode de changement de variables

Пригадайте головне

- Поясніть, як розв'язують цілі раціональні рівняння, що зводяться до квадратних.
- Поясніть, як розв'язують дробові раціональні рівняння.
- Які рівняння називаються біквадратними?
- Поясніть, як розв'язують біквадратні рівняння.
- Поясніть, як розв'язують рівняння способом заміни змінної.

Усне тренування

- Чи правильно виконано обчислення:

$$15^2 - 5^2 = 100; \quad \sqrt{(-13)^2} = 13; \quad \sqrt{12^2 - 2^2} = 10?$$

- Чи правильно скоротили дробі:

$$\frac{2}{2+x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{5-x}{25-x^2} = \frac{1}{5+x}; \quad \frac{(2x+6)^2}{x+3} = 2?$$

- Чи правильно розв'язали рівняння:

$$x^2 + 1 = 0; \quad x^2 - 4x + 4 = 0; \quad x^2 - 2x + 3 = 0;$$

$$x = 1; x = -1; \quad x = 2; \quad x = 1; x = 3?$$

Розв'яжіть задачі

831'. Яким буде наступний крок у розв'язуванні рівняння:
 $x(x+1) = 10$?

832'. Яким буде наступний крок у розв'язуванні рівняння:
 $x + \frac{4}{x} = 5$?

833'. Яким буде наступний крок у розв'язуванні рівняння:
 $(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0$?

834'. Які з рівнянь є біквадратними рівняннями:
1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; 3) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$;
2) $x^4 - 2x^3 + 2 = 0$; 4) $2x^4 - 2x + 2 = 0$?

835'. Для рівняння $a^4x^4 + a^2x^2 + c = 0$ назвіть:
1) очікувану заміну; 2) допоміжне рівняння.

836'. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x(x-1) = 12$;
- 2) $9x(x+1) = -x-1$;
- 3) $(x+4)^2 + x^2 = x+31$;
- 4) $(x-1)^2 + (x+1)^2 = 5x$;
- 5) $(x+3)^2 + (x-3)^2 = 9(x+1)$;
- 6) $(3x-2)^2 + 11 = 4x(2x-1)$.

837'. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x(x-5) + 5 = x$; 3) $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 3x+7$;
- 2) $(2x-1)^2 + 5x = 3x^2 + 7$; 4) $(2x-3)^2 - 4 = x(x-4)$.

838'. Знайдіть усі значення змінної x , за яких:

- 1) значення виразу $(x-5)(x+5)$ на 4 менше, ніж значення виразу $14(x-5)$;
- 2) значення суми виразів $(x+4)^2$ і $x+6$ дорівнює 22;
- 3) значення виразу $2(3-x)$ на 1 більше, ніж значення виразу $x(3x-4)$;
- 4) значення різниці виразів $3(x+2)^2$ і $(x+3)^2$ дорівнює 11.

839'. Знайдіть усі значення змінної x , за яких:

- 1) значення виразу $8(x+3)$ на 1 менше, ніж значення виразу $(x+2)^2$;


qr.orioncentr.com.ua/QYSLD

2) значення виразів $3(x+1)^2$ і $2(3-x)$ дорівнюють один одному.

840°. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2}{x-3} = \frac{5x-6}{x-3}; & 5) \frac{3x}{x-6} = \frac{x^2-18}{6-x}; \\ 2) \frac{x^2-15}{5-x} = \frac{2x}{5-x}; & 6) \frac{x^2-18}{x-2} = \frac{7x}{2-x}; \\ 3) \frac{8}{x-1} = \frac{6x+x^2}{1-x}; & 7) \frac{x^2}{x-2} = \frac{5x-2}{2x-4}; \\ 4) \frac{x}{5-x} = \frac{x^2-30}{x-5}; & 8) \frac{5x^2+3}{8x+8} = \frac{x}{x+1}. \end{array}$$

841°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{3x}{x-2} = \frac{10-x^2}{x-2};$ 2) $\frac{x^2+20}{x-10} = \frac{-12x}{10-x}.$

842°. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3} = 0; & 3) \frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x} = 0; \\ 2) \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = 0; & 4) \frac{3x^2-5x+2}{1-x^2} = 0. \end{array}$$

843°. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12} = 0; \quad 2) \frac{2x^2+3x-2}{x^2+2x} = 0.$$

844°. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{x^2-4}{x-1} = 4; & 3) \frac{2}{x} + 15 = \frac{8}{x^2}; & 5) \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} = 2; \\ 2) x = \frac{x+10}{x-2}; & 4) \frac{1}{x} + 1 = \frac{20}{x^2}; & 6) \frac{3x^2+x-24}{x^2-9} = 2. \end{array}$$

845°. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+4}{x-2} = x; \quad 2) \frac{32}{x} + \frac{x}{2} = 10; \quad 3) \frac{2x^2+5x+2}{x^2-4} = 1.$$

846°. За якого значення x значення виразу $\frac{x^2-x-6}{x-3}$ дорівнює 2,5?

847°. За якого значення x значення виразу $\frac{x^2+4x+3}{x+1}$ дорівнює 3,5?

848°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$
2) $x^4 - x^2 - 12 = 0;$
3) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0;$
4) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0;$
5) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0;$
6) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0;$
7) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0;$

8) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0.$



qr.orioncentr.com.ua/SoJOB

849°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $x^4 + x^2 - 20 = 0;$ 3) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0;$ 4) $x^4 + 11x^2 + 18 = 0.$

850°. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0; & 3) 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0; \\ 2) 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0; & 4) 16x^4 - 8x^2 + 1 = 0. \end{array}$$

851°. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3x^4 - 5x^2 + 2 = 0; \quad 2) 16x^4 - 25x^2 + 9 = 0.$$

852°. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{l} 1) (x^2 - x)^2 + 5(x^2 - x) = 6; \\ 2) 2\left(\frac{x+6}{x}\right)^2 - 11\left(\frac{x+6}{x}\right) + 15 = 0; \\ 3) \frac{x+10}{x} - 12 \cdot \frac{x}{x+10} + 1 = 0; \\ 4) \frac{x-3}{x+5} + \frac{x+5}{x-3} = -2. \end{array}$$

853°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $(x^2+1)^2 - 12(x^2+1) = -35;$
2) $5\left(\frac{x+12}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{x+12}{x}\right) - 2 = 0.$

854°. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{10}{x-3} - 1 = \frac{8}{x};$ 3) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{8};$
2) $\frac{x+3}{x+2} - \frac{6}{x} = \frac{1}{x+2};$ 4) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3}.$



qr.orioncentr.com.ua/iYxzI

855. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+4}{x-3} + \frac{4}{x} = \frac{7}{x-3}; \quad 2) \frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{5}{2}.$$

856. Знайдіть усі значення змінної x , за яких:

1) значення виразів $\frac{x+1}{5x+1}$ і $\frac{x}{x+2}$ дорівнюють одне одному;

2) значення суми дробів $\frac{2x-2}{x+3}$ і $\frac{x+3}{x-3}$ дорівнює 5.

857. Знайдіть усі значення змінної x , за яких значення

E суми дробів $\frac{3x-9}{x-1}$ і $\frac{x+6}{x+1}$ дорівнює 3.

858. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{3x-2}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x+4}{x^2-2x}; \quad 4) \frac{2}{x+7} + \frac{7-x}{x^2+7x} = 1;$$

$$2) \frac{3}{x+1} - \frac{19}{x-7} = 8; \quad 5) \frac{x+7}{x+4} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{x+3};$$

$$3) \frac{4}{x+3} + \frac{x-5}{x-3} = -\frac{24}{x^2-9}; \quad 6) \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}.$$

859. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $\frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = -\frac{4}{x^2-4}; \quad 2) \frac{3}{x+1} + \frac{x+14}{x^2+x} = 3.$

860. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 4 = 0;$$

$$2) (x^2+x)^2 - 4(x^2+x) + 4 = 0;$$

$$3) (x^2+2x+1)(x^2+2x) = 12;$$

$$4) (x^2+4x+2)(x^2+4x-1) = 10.$$

861. Розв'яжіть рівняння:

E 1) $(x+5)^4 + 8(x+5)^2 - 9 = 0;$
2) $(x^2-4x+4)(x^2-4x) + 3 = 0.$

862*. Знайдіть найбільший корінь рівняння:

$$1) 5(x+1)^2 - 8|x+1| + 3 = 0; \quad 2) \frac{4}{x^2+10|x|} - \frac{2}{5x} = \frac{1}{25}.$$

863*. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^4 - (n^2+9)x^2 + 9n^2 = 0; \quad 2) x + \frac{1}{n} = n + \frac{1}{x}.$$

864*. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{5}{x^2+2x+4} + \frac{4(x-1)}{x^3-8} = \frac{1}{x-2}; \quad 2) x^2 = \frac{6}{1-\frac{1}{x}}.$$

Проявіть компетентність

865. У Наталчиній кімнаті повісили дзеркало прямокутної форми, яке вправлене в раму (мал. 49). Периметр зовнішнього контура дзеркала, враховуючи раму, дорівнює 3,2 м, а площа всієї поверхні — 0,6 м².

1. Знайдіть довжини сторін зовнішнього контура дзеркала.

2. Знайдіть довжини сторін дзеркальної поверхні, якщо рама, у яку вправлене дзеркало, має ширину з усіх чотирьох сторін по 8 см.

3. Знайдіть площу дзеркальної поверхні дзеркала.

4. Знайдіть площу поверхні рами.

5. Рама складається із двох частин — внутрішньої та зовнішньої (мал. 49). Знайдіть відношення площ поверхонь цих частин, якщо вони мають однакову ширину.



Мал. 49

§ 22. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ

1. Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі

Ситуація. У зв'язку зі встановленням сучасного обладнання в кіно-театрі проводили ремонт глядацької зали, у якій кількість рядів мала стати більшою за кількість місць у ряду. До ремонту в залі було 396 місць, а після ремонту стало 300 місць. Під час ремонту прибрали 2 ряди повністю та по 3 крісла в кожному ряду.



qr.orioncentr.com.ua/pRWcf



Чи можна знайти, скільки зараз рядів у глядацькій залі кінотеатру?

Так.



Для цього перекладемо умову й вимогу задачі мовою математики, тобто складемо математичну модель задачі.

Запам'ятайте!

Математична модель — це опис деякої реальної ситуації або процесу засобами математики.

Математичні моделі сюжетної задачі

Аналітична модель: вираз або запис за діями; рівняння або система рівнянь	Графічна модель: малюнок, схема або графік	Мішана модель: візуальне тлумачення виразу, рівняння, системи рівнянь
--	--	---

Складання математичної моделі задачі називають *математичним моделюванням*. Розв'язування задачі методом математичного моделювання містить *чотири етапи* (табл. 36).

Таблиця 36

І етап	Аналіз ситуації та систематизація даних	Було	Стало
		Рядів	?
		Місць у ряду	?
		Загалом місць	396
			300
ІІ етап	Побудова математичної моделі	Нехай у глядацькій залі було x рядів. Тоді в кожному ряду цієї зали було $\frac{396}{x}$ місць. Після ремонту в глядацькій залі стало $(x - 2)$ рядів по $\frac{300}{x - 2}$ місць у кожному ряду.	

Таблиця 36 (продовження)

ІІ етап	Побудова математичної моделі	За умовою, місць у кожному ряду зали стало на 3 менше, отже, складаємо рівняння: $\frac{396}{x} - \frac{300}{x - 2} = 3$. Одержали дробове раціональне рівняння, що є моделлю даної ситуації.
ІІІ етап	Робота з математичною моделлю	Розв'язуємо рівняння: ОДЗ: $x \neq 0, x \neq 2$. $\frac{396}{x} - \frac{300}{x - 2} - 3 = 0$, $\frac{396(x - 2) - 300x - 3x(x - 2)}{x(x - 2)} = 0$, $x^2 - 34x + 264 = 0$. $x_1 = 12; x_2 = 22$.
ІV етап	Складання відповіді до задачі в термінах її сюжету	Якщо $x = 22$, то нині в залі може бути 20 рядів. Кількість місць у кожному ряду після ремонту: $\frac{300}{x - 2} = \frac{300}{20} = 15$. Якщо $x = 12$, то нині в залі може бути 10 рядів. Кількість місць у кожному ряду після ремонту: $\frac{300}{x - 2} = \frac{300}{10} = 30$. Загалом одержуємо, що нині в залі може бути або 20 рядів по 15 місць, або 10 рядів по 30 місць. За умовою, кількість рядів у залі має стати більшою за кількість місць у ряду. Отже, після ремонту в глядацькій залі кінотеатру стало 20 рядів.



В оформленні розв'язання задачі методом математичного моделювання доцільно виділяти чотири етапи:

- аналіз та систематизація даних;
- побудова математичної моделі;
- робота з математичною моделлю;
- складання відповіді до задачі.

2. Задачі на рух

Для складання математичної моделі задач на рух можна використовувати подані формули:



qr.orioncentr.com.ua/MAX9e

$$s = vt$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Основні величини: s — відстань; v — швидкість; t — час.

Задача 1 Відстань від Черкас до Києва, що становить 180 км, автобус має проїхати зі сталою швидкістю за визначений розкладом час. Проте в Борисполі водій автобуса на 5 хв зробив незаплановану зупинку для пасажирів, які їхали до аеропорту. Тому, щоб прибути до Києва вчасно, після незапланованої зупинки водій збільшив швидкість на 10 км/год. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом, якщо Бориспіль розташований на відстані 35 км від Києва?

Розв'язання

1. Аналіз та систематизація даних (табл. 37).

Таблиця 37

	Час	Швидкість		Відстань
		за розкладом	змінена	
Черкаси — Бориспіль	?	?	—	?
Зупинка	5 хв	—	—	—
Бориспіль — Київ	?	?	на 10 км/год >	35 км

2. Побудова математичної моделі.

Нехай x км/год — швидкість автобуса за розкладом, тоді запланований час руху автобуса становить $\frac{180}{x}$ год.

За умовою, автобус проїхав відстань $(180 - 35)$ км до Борисполя зі швидкістю x км/год. Тоді час, витрачений на цю

відстань, дорівнює $\frac{180-35}{x}$ год. Решту відстані, тобто 35 км,

автобус подолав зі швидкістю $(x + 10)$ км/год за $\frac{35}{x+10}$ год.

Час $\frac{180}{x}$ більший за час $\frac{180-35}{x} + \frac{35}{x+10}$ на 5 хв, тобто на $\frac{1}{12}$ год. Отже, складаємо рівняння:

$$\frac{180}{x} = \frac{180-35}{x} + \frac{35}{x+10} + \frac{1}{12}.$$

3. Робота з математичною моделлю.

Розв'язуємо рівняння.

ОДЗ змінної: $x \neq 0$, $x \neq -10$.

$$\frac{180}{x} - \frac{180-35}{x} - \frac{35}{x+10} - \frac{1}{12} = 0,$$

$$2160(x+10) - 1740(x+10) - 420x - x(x+10) = 0,$$

$$2160x + 21\,600 - 1740x - 17\,400 - 420x - x^2 - 10x = 0,$$

$$x^2 + 10x - 4200 = 0.$$

$$x_1 = 60, x_2 = -70.$$

4. Складання відповіді до задачі.

Значення $x = -70$ не задовольняє умову задачі. Отже, шукана швидкість автобуса за розкладом дорівнює 60 км/год.



Для складання рівняння необхідно порівнювати величини одного й того самого найменування — відстань із відстанню, швидкість зі швидкістю, час із часом, вартість із вартістю, кількість із кількістю тощо.

3. Задачі на спільну роботу

qr.orioncentr.com.ua/4SX5w

Для складання математичної моделі задач на роботу можна використовувати формули:

$$A = pt$$

$$p = \frac{A}{t}$$

$$t = \frac{A}{p}$$

Основні величини: A — обсяг роботи; p — продуктивність праці; t — час роботи.

 Якщо в умові задачі не вказано обсяг роботи, то його приймають за число 1.

Задача 2 Через дві труби резервуар можна заповнити за 4 хв. Через першу трубу цей резервуар може заповнитися на 6 хв швидше, ніж через другу. За скільки хвилин заповниться цей резервуар, якщо працює тільки перша труба?

Розв'язання

1. Аналіз та систематизація даних (табл. 38).

Таблиця 38

	Час	Продуктивність	Обсяг роботи
I труба	на 6 хв <	?	1
II труба	? <	?	
Дві труби разом	4 хв	?	

2. Побудова математичної моделі. Нехай час заповнення резервуара через першу трубу — x хв, тоді час заповнення цього резервуара через другу трубу — $(x + 6)$ хв.

Обсяг роботи, що полягає в заповненні резервуара, приймаємо за 1. Отже, продуктивність першої труби становить $\frac{1}{x}$, а другої — $\frac{1}{x+6}$. За умовою, дві труби можуть заповнити резервуар за 4 хв, тому за цей час перша труба виконає $\frac{1}{x} \cdot 4 = \frac{4}{x}$ обсягу роботи, а друга — $\frac{1}{x+6} \cdot 4 = \frac{4}{x+6}$. Отже, складемо рівняння:

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{x+6} = 1.$$

3. Робота з математичною моделлю.

Розв'язуємо рівняння:

ОДЗ змінної: $x \neq 0$, $x \neq -6$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{4}{x+6} - 1 &= 0, \\ \frac{4(x+6) + 4x - x(x+6)}{x(x+6)} &= 0, \end{aligned}$$

$$4(x+6) + 4x - x(x+6) = 0,$$

$$4x + 24 + 4x - x^2 - 6x = 0,$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0.$$

$$x_1 = 6, x_2 = -4.$$

4. Складання відповіді до задачі.

Значення $x = -4$ не задовольняє умову задачі, оскільки час роботи не може бути від'ємним числом. Отже, час заповнення резервуара через першу трубу становить 6 хв.

4. Задачі геометричного змісту

Для розв'язування задач геометричного змісту також застосовують квадратні рівняння або рівняння, що зводяться до квадратних.



qr.orioncentr.com.ua/XZTsI

Задача 3 Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а його діагональ — 13 см. Знайдіть сторони прямокутника.

Розв'язання

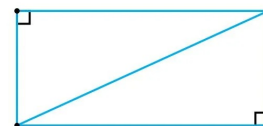
1. Аналіз та систематизація даних (мал. 50).

I сторона — ?

II сторона — ?

Діагональ — 13 см

Периметр — 34 см



Мал. 50

2. Побудова математичної моделі.

Нехай x см — довжина однієї зі сторін прямокутника. Оскільки периметр прямокутника становить 34 см, то інша його сторона дорівнює $(17 - x)$ см.

Діагональ ділить прямокутник на два рівні прямокутні трикутники, катети яких є сторонами прямокутника, а гіпотенуза — його діагоналлю. Застосуємо теорему Піфагора: $x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$.

3. Робота з математичною моделлю.

Розв'яжемо рівняння:

$$x^2 + (17 - x)^2 = 169,$$

$$x^2 + 289 - 34x + x^2 - 169 = 0,$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 34x + 120 &= 0 : 2, \\ x^2 - 17x + 60 &= 0. \\ x_1 &= 12, x_2 = 5. \end{aligned}$$

4. Складання відповіді до задачі.

Якщо $x = 12$, то довжина іншої сторони становить: $17 - x = 17 - 12 = 5$ (см). Якщо $x = 5$, то довжина іншої сторони становить: $17 - x = 17 - 5 = 12$ (см).

Отже, довжини сторін прямокутника дорівнюють 5 см і 12 см.

✓ Якщо в задачі необхідно знайти пару чисел a і b , то таких пар може бути дві: a і b та b і a .
Якщо за умовою задачі неважливо, у якому порядку подавати знайдені числа, то з двох можливих пар чисел у відповідь записують лише одну: або a і b , або b і a .

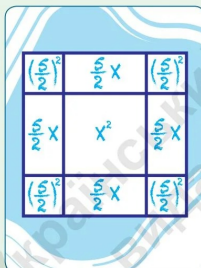
Дізнайтеся більше

У давнину, коли геометрія була розвинена більше, ніж алгебра, одним зі способів розв'язування квадратних рівнянь був геометричний спосіб. Наведемо приклад розв'язування квадратного рівняння $x^2 + 10x = 39$, запропонованого аль-Хорезмі (787 – бл. 850). В оригіналі ця задача формулюється так: «Квадрат і десять коренів дорівнюють 39».

Розв'язання

Побудуємо квадрат зі стороною x . Площа такого квадрата дорівнює x^2 . На сторонах квадрата побудуємо чотири прямокутники зі сторонами x і $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, а

в кутах — чотири квадрати зі стороною $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ (мал. 51). Одержали великий квадрат. Тоді площа кожного з побудованих прямокутників дорівнює $\frac{5}{2}x$, а сума площ усіх чотирьох прямокутників дорівнює $10x$. Площа кожного з побудованих квадратів відповідно дорівнює $\frac{25}{4}$, а сума площ усіх чотирьох квадратів дорівнює 25. Додамо площу початкового квадрата та площі прямокутників. Одержимо вираз



Мал. 51

$x^2 + 10x$, значення якого дорівнює 39. Звідси можна зробити висновок, що площа великого квадрата буде дорівнювати: $39 + 25 = 64$. Отже, сторона великого квадрата дорівнює 8. Сторону квадрата можна подати як вираз $x + 2 \cdot \frac{5}{2}$. Звідси $x = 3$.

Зауважимо, що даним способом можна знаходити лише додатні корені квадратного рівняння.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/KFoHS

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
математична модель	mathematical model	mathematisches Modell (n)	modèle mathématique

Пригадайте головне

1. Що таке математична модель?
2. Що таке математичне моделювання?
3. Назвіть етапи математичного моделювання.

Усне тренування

1. Не розв'язуючи рівнянь, знайдіть ті, які мають корені: $x^2 - 10x - 11 = 0$; $5x^2 - 6x + 1 = 0$; $x^2 = 0$.
2. Розв'яжіть неповні квадратні рівняння: $x^2 - 16 = 0$; $12x^2 - 24 = 0$; $x^2 - x = 0$.
3. За якого значення m рівняння має один корінь: $x^2 + 2x - m = 0$; $x^2 + mx + 9 = 0$; $mx^2 + 4x + 1 = 0$?
4. Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють: 1 і -1 ; 0 і 3 ; 1 і 2 ; -2 і 3 .

Розв'яжіть задачі

- 866*. Чи може бути математичною моделлю:
- 1) число;
 - 2) рівняння;
 - 3) схема;
 - 4) система рівнянь?

867°. Одне із чисел у 5 разів більше за інше. Чи правильно подано цю умову за допомогою змінної x :

- 1) перше число — 5, друге — x ;
- 2) перше число — $5x$, друге — x ;
- 3) перше число — $(x + 5)$, друге — x ;
- 4) перше число — $5x$, друге — 5?

868°. Одне із чисел на 2 більше за інше. Чи правильно подано цю умову за допомогою змінної x :

- 1) перше число — $(x + 2)$, друге — 2;
- 2) перше число — $2x$, друге — x ;
- 3) перше число — $(x + 2)$, друге — x ;
- 4) перше число — 2, друге — x ?

869°. Сума двох чисел дорівнює 15. Чи правильно подано цю умову за допомогою змінної x :

- 1) перше число — x , друге — 15;
- 2) перше число — x , друге — $15x$;
- 3) перше число — x , друге — $(x + 15)$;
- 4) перше число — x , друге — $(15 - x)$?

870°. Добуток двох чисел дорівнює 72. Знайдіть ці числа, якщо: 1) одне із чисел на 1 більше за інше; 2) одне із чисел у 2 рази менше від іншого.



qr.orioncentr.com.ua/ZtGFY

871°. Добуток двох чисел дорівнює 48. Знайдіть ці числа, якщо:

- 1) одне із чисел на 2 менше від іншого;
- 2) одне із чисел у 3 рази більше за інше.

872°. Добуток двох чисел дорівнює 32. Знайдіть ці числа, якщо: 1) їх сума дорівнює 12; 2) їх різниця дорівнює 14.

873°. Добуток двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо:

- 1) їх сума дорівнює 18; 2) їх різниця дорівнює 4.

874°. Складіть рівність для визначення часу руху:

- 1) автобуса, який проїхав 120 км зі швидкістю v км/год;
- 2) велосипедиста, який проїхав відстань s км зі швидкістю 10 км/год.

875°. Швидкість течії річки — 2 км/год. Складіть рівність для визначення часу руху катера, який проплив:



- 1) 40 км за течією річки, якщо власна швидкість катера — v км/год;
- 2) s км проти течії річки, якщо власна швидкість катера — 20 км/год.



qr.orioncentr.com.ua/xCHWI

876°. Складіть рівність для визначення швидкості руху:



- 1) автобуса, який проїхав 120 км за t год;
- 2) велосипедиста, який проїхав відстань s км за 0,5 год.

877°. Складіть рівність для визначення продуктивності праці за такими даними:



- 1) труба заповнює басейн за 3 год;
- 2) бригада будівників виконує завдання за 15 днів;
- 3) трактор оре поле за 2 дні;
- 4) програміст виконує завдання за 5 год.



qr.orioncentr.com.ua/YyvpJ

878°. Знайдіть два послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 240.

879°. Знайдіть два послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 132.



880°. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо чисельник зменшити на 2, а знаменник — на 4, то одержимо дріб, який на $\frac{1}{8}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

881°. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо чисельник збільшити на 1, а знаменник — на 4, то одержимо дріб, який на $\frac{1}{8}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

882°. Із Києва до Харкова одночасно виїхали автобус й автомобіль. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса, тому він прибув до Харкова на 2 год раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 480 км.

883°. Із Львова до Києва одночасно виїхали автобус й автомобіль. Швидкість автомобіля на 30 км/год більша за швидкість автобуса, тому він прибув до Києва на 3 год раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 540 км.

884°. Моторний човен проплив проти течії річки 24 км і повернувся до пункту відправлення, витративши на зворотний шлях на 2 год менше. Знайдіть швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 1 км/год.

885°. Катер проплив 18 км за течією річки та 20 км проти течії, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть швидкість течії, якщо швидкість катера дорівнює 20 км/год.

886°. Замовлення на 110 деталей перший робітник виконує на 1 год швидше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє другий робітник, якщо перший робітник за 1 год виготовляє на 1 деталь більше?

887°. Замовлення на 156 деталей перший робітник виконує на 1 год довше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє перший робітник, якщо другий робітник за 1 год виготовляє на 1 деталь більше?

888°. Петрик та Миколка майструють із паперу кораблики. За 1 год Петрик може виготовити 8 корабликів, а Миколка — 12. Скільки годин знадобиться хлопцям, щоб разом виготовити 100 корабликів?

889°. Тетянка з Наталкою виготовляють новорічні прикраси для шкільної ялинки. За 1 год Тетянка може виготовити 4 прикраси, а Наталка — 5 прикрас. Скільки годин знадобиться дівчатам, щоб виготовити 45 прикрас?

890°. Діагональ прямокутника дорівнює 13 см, а одна зі сторін на 7 см більша за іншу. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо меншу сторону позначити через x ?

- 1) $x^2 + (x + 13)^2 = 49$; 3) $x^2 + (x - 7)^2 = 169$;
2) $x^2 + (x + 7)^2 = 169$; 4) $x^2 + (x + 7)^2 = 13$.

Знайдіть сторони прямокутника, його площу і периметр.

891°. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 23 см, а площа даного трикутника дорівнює 60 см².

892°. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 14 см, а площа даного трикутника — 24 см².

893°. Площа прямокутника, одна зі сторін якого на 7 см більша за іншу, дорівнює 60 см². Знайдіть сторони та периметр прямокутника.

894°. Площа прямокутника, одна зі сторін якого на 3 см більша за іншу, дорівнює 54 см². Знайдіть сторони та периметр прямокутника.

895. Знайдіть два послідовні натуральні числа, сума квадратів яких дорівнює 313.

896. Знайдіть два послідовні натуральні числа, сума квадратів яких дорівнює 365.

897. У міському чемпіонаті з баскетболу було проведено 66 матчів. Скільки команд брало участь у чемпіонаті, якщо кожна команда провела з кожною по одній грі?

898. У турнірі з шахів було зіграно 231 партію. Скільки шахістів брало участь у турнірі, якщо кожний з кожним зіграв по одному разу?

899. Повертаючись від бабусі додому, Василько йшов до автобусної зупинки вздовж річки. Коли до зупинки залишалося 3 км, він вирішив скупатися й витратив на



qr.orioncentr.com.ua/2COZ3

- це 15 хв. Для того щоб не запізнитися на автобус, він збільшив швидкість на 2 км/год. З якою швидкістю рухався Василько на початку?
- 900.** Повертаючись із походу додому, учні 8-А класу зробили привал на 20 хв, коли до їхнього містечка залишилося 4 км. Щоб встигнути прибути в зазначений час, вони збільшили швидкість на 1 км/год. З якою швидкістю рухались учні 8-А класу до привалу?
- 901.** Мотоцикліст виїхав зі сталою швидкістю з Миколаєва до Херсона, відстань між якими дорівнює 70 км. Наступного дня він відправився назад зі швидкістю, на 5 км/год більшою, ніж напередодні. У дорозі він зробив зупинку на 20 хв, тому на зворотний шлях витратив стільки само часу, скільки на шлях із Миколаєва до Херсона. Знайдіть швидкість мотоцикліста на шляху з Миколаєва до Херсона.
- 902.** Із пункту *A* до пункту *B*, відстань між якими 105 км, одночасно виїхали автомобіліст і мотоцикліст. Відомо, що за годину автомобіліст проїжджає на 40 км більше, ніж мотоцикліст. Визначте швидкість мотоцикліста, якщо відомо, що він прибув до пункту *B* на 2 год пізніше від автомобіліста.
- 903.** Товарний поїзд було затримано в дорозі на 18 хв. Щоб надолужити цей час, решту відстані завдовжки 60 км поїзд проїхав, збільшивши швидкість на 10 км/год. Знайдіть початкову швидкість товарного поїзда.
- 904.** Поїзд мав проїхати 840 км за певний час. Але на середині шляху його було затримано на 30 хв через технічну несправність. Щоб прибути вчасно, машиністові довелося збільшити швидкість поїзда на 2 км/год. Скільки часу поїзд перебував у дорозі?
- 905.** На середині шляху між станціями *A* і *B* поїзд було затримано на 10 хв. Щоб прибути до станції *B* за розкладом, машиніст збільшив швидкість поїзда на 12 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда, якщо відстань між станціями *A* і *B* дорівнює 120 км.
- 906.** Під час відпочинку родина Сергійка пропливла на моторному човні 10 км озером і 4 км проти течії річки, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.
- 907.** Катер проплив 15 км за течією річки і 4 км озером, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 4 км/год.
- 908.** Баржа о 10 год виїшла з пункту *A* до пункту *B*, розташованого на відстані 15 км від пункту *A*. Простоявши в пункті *B* 1 год 20 хв, баржа вирушила назад і повернулася до пункту *A* о 16 год. Визначте швидкість течії річки, якщо власна швидкість баржі дорівнює 7 км/год.
- 909.** Круїзний теплохід «Славутич» проходить за течією річки до пункту призначення 200 км і після стоянки повертається до пункту відправлення. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода дорівнює 15 км/год, стоянка триває 10 год, а до пункту відправлення теплохід повертається через 40 год після відплиття з нього.
- 910.** На виготовлення 475 деталей перший робітник витрачає на 6 год менше, ніж другий робітник на виготовлення 550 таких самих деталей. Відомо, що перший робітник за 1 год виготовляє на 3 деталі більше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє перший робітник?
- 911.** На виготовлення 40 деталей перший робітник витрачає на 6 год менше, ніж другий робітник на виготовлення 70 таких самих деталей. Відомо, що перший робітник за 1 год виготовляє на 3 деталі більше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє другий робітник?
- 912.** Перша труба за 1 хв пропускає на 1 л води менше, ніж друга. Скільки літрів води за 1 хв пропускає перша труба, якщо резервуар об'ємом 110 л вона заповнює на 2 хв довше, ніж друга труба заповнює резервуар об'ємом 99 л?

- 913.** Перша труба за 1 хв пропускає на 5 л води менше, ніж друга. Скільки літрів води за 1 хв пропускає друга труба, якщо резервуар об'ємом 375 л вона заповнює на 10 хв швидше, ніж перша труба заповнює резервуар об'ємом 500 л?
- 914.** Плиточник має укласти 175 м^2 плитки. Якщо щодня він буде укладати на 10 м^2 більше, ніж повинен, то закінчить роботу на 2 дні раніше. Скільки квадратних метрів плитки за день має укладати плиточник?
- 915.** Кравчиня має пошити 60 суконь. Якщо щодня вона буде шити на 2 сукні більше, ніж заплановано, то закінчить роботу на 5 днів раніше. Скільки суконь за день має шити кравчиня за планом?
- 916.** Два промислові фільтри, працюючи одночасно, очищують цистерну води за 30 хв. Визначте, за скільки хвилин другий фільтр очистить цистерну води, працюючи окремо, якщо відомо, що він зробить це на 25 хв швидше, ніж перший.
- 917.** Якщо два принтери працюють одночасно, то витрата паперу становить 1 пачку за 12 хв. Визначте, за скільки хвилин буде витрачено пачку паперу на першому принтері, якщо це відбудеться на 10 хв швидше, ніж на другому.
- 918.** Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а площа — 60 см^2 . Знайдіть діагональ прямокутника.
- 919.** Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а площа — 48 см^2 . Знайдіть діагональ прямокутника.
- 920.** Знайдіть довжини сторін земельної ділянки, що має форму прямокутника, якщо площа ділянки дорівнює 12 м^2 , а її ширина становить $\frac{3}{4}$ довжини.
- 921*.** Двоє фермерів на двох ділянках посадили 330 дерев. На кожній ділянці кількість рядів на 1 більша, ніж кількість дерев у ряду. По скільки дерев посаджено в кожному ряду на кожній ділянці, якщо відомо, що на першій ділянці на 150 дерев більше, ніж на другій?
- 922*.** Знайдіть трицифрове число, цифри якого, записані в зворотному порядку, дадуть число, яке на 198 менше від даного числа. Відомо, що сума цифр числа дорівнює 12, а сума їх квадратів — 74.
- 923*.** Знайдіть два числа, якщо їх сума, різниця та добуток відносяться як $5 : 3 : 4$.
- 924*.** Ігор і Богдан зможуть пофарбувати паркан у бабусі в селі за 9 год, Богдан і Василь — за 12 год, а Василь та Ігор — за 18 год. За скільки годин хлопці пофарбують паркан, якщо будуть працювати втроєх?
- 925*.** Петрик і Катруся збирали малину. Коли Катруся наповнила $\frac{2}{3}$ свого дволітрового бідона, трилітровий бідон Петрика був майже повний. Діти помінялися бідонами й через деякий час одночасно закінчили збирання ягід. У скільки разів швидше працював Петрик, ніж Катруся? Скільки літрів ягід набрали діти до того, як помінялися бідонами?
- 926*.** Пасажир метро спускається донизу ескалатором за 24 с. Якщо пасажир крокує нерухомим ескалатором, то він спускається донизу за 42 с. За скільки секунд він спуститься донизу, крокуючи ескалатором, який рухається?

Проявіть компетентність

- 927.** Тетянка й Наталка полюбляють спілкуватися за допомогою смс-повідомлень. Повідомлення із 24 слів Тетянка набирає за 2 хв швидше, ніж Наталка.
1. Скільки слів набирає за 1 хв Наталка, якщо Тетянка за 1 хв набирає на 2 слова більше, ніж Наталка?
 2. Скільки слів набирає за 1 хв Тетянка?
 3. Дівчатка дізналися, що в Сергійка сьогодні день народження, і відразу одночасно почали набирати вітальні смс-повідомлення. Тетянка набрала привітання із 36 слів, а Наталка — із 24. Чиє привітання Сергійко одержить першим?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке квадратне рівняння? Наведіть приклади.
2. Що називають дискримінантом квадратного рівняння?
3. Скільки коренів може мати квадратне рівняння?
4. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.
5. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
6. Який многочлен називають квадратним тричленом?
7. Що таке корені квадратного тричлена?
8. Запишіть формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
9. Поясніть, як розв'язують цілі раціональні рівняння, що зводяться до квадратних.
10. Поясніть, як розв'язують дробові раціональні рівняння.
11. Поясніть, як розв'язують рівняння способом заміни змінної.
12. Які рівняння називаються біквадратними?
13. Поясніть, як розв'язують біквадратні рівняння.
14. Що таке математична модель?
15. Назвіть етапи математичного моделювання.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тесту потрібно 10–15 хв.

№ 1

- 1°. Розв'яжіть рівняння $(x - 9)^2 = 0$.
А. ± 9 . В. 3.
Б. ± 3 . Г. 9.
- 2°. Розв'яжіть рівняння $(x + 5)^2 = 16$.
А. 1; 9. В. 11; 21.
Б. -1; -9. Г. -11; -21.
- 3°. Розв'яжіть квадратне рівняння $3x^2 + x - 4 = 0$.
А. 3; -4. В. -1; $\frac{4}{3}$.
Б. -3; 4. Г. 1; $-\frac{4}{3}$.

4. Розв'яжіть за теоремою Вієта квадратне рівняння $x^2 + 6x - 40 = 0$.
А. 5; -8.
Б. -5; 8.
В. 4; -10.
Г. -4; 10.

- 5*. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння $x^2 + 4x + m = 0$.
А. $\pm\sqrt{m-4}$. В. $-2 \pm \sqrt{m}$.
Б. $2 \pm \sqrt{m-4}$. Г. $-2 \pm \sqrt{4-m}$.

№ 2

- 1°. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $x^2 + 4x - 5$.
А. $(x - 1)(x - 5)$. В. $(x - 1)(x + 5)$.
Б. $(x + 1)(x - 5)$. Г. $(x + 1)(x + 5)$.
- 2°. Розв'яжіть рівняння $x(x + 2) = 8$.
А. -8; 1.
Б. 8; -1.
В. -2; 4.
Г. 2; -4.

- 3°. Скоротіть дріб $\frac{x+5}{x^2+3x-10}$.
А. $\frac{1}{x+5}$. Б. $\frac{1}{x-5}$. В. $\frac{1}{x-2}$. Г. $\frac{1}{x+2}$.

4. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-6}{x-2} = \frac{x}{2-x}$.
А. 2; -3.
Б. -2; 3.
В. 2.
Г. -3.

- 5*. За 4 год туристи подолали 300 км. Відомо, що $\frac{2}{5}$ цієї відстані туристи проїхали на автобусі, а решту — на поїзді. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 30 км/год більша за швидкість автобуса.
А. 60 км/год. В. 80 км/год.
Б. 70 км/год. Г. 90 км/год.



Розділ 5. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

У розділі дізнаєтесь:

- про різновиди відсоткових розрахунків;
- про моду й середнє значення вибірки;
- про частотні таблиці й діаграми для систематизації даних спостережень;
- про різні комбінаторні задачі та способи їх розв'язування;
- що таке ймовірність випадкової події та як її знаходити;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 23. ЗАДАЧІ НА ВІДСОТКИ

1. Знаходження відсотка числа і числа за його відсотком

Ситуація. Із 350 учнів школи 80 % займаються в спортивних секціях, 5 % із них займаються в шаховому гуртку. Який відсоток учнів школи відвідують шаховий гурток?



qr.orioncentr.com.ua/vfScj



Як визначити відсоток учнів школи, що відвідують шаховий гурток?

Існує кілька способів.



Спосіб 1. Оскільки $80\% = 0,8$, то $350 \cdot 0,8 = 280$ (учнів) — займаються в спортивних секціях. Тоді в шаховому гуртку займаються $280 \cdot 0,05 = 14$ учнів, що становить

$$\frac{14}{350} \cdot 100\% = 4\%.$$

Спосіб 2. Оскільки $80\% = 0,8$, а $5\% = 0,05$, то, за правилом знаходження дробу від числа, маємо: $0,8 \cdot 0,05 = 0,04$, тобто 4 %.

Задача 1 У двох бочках було 150 л води. Із першої бочки відлили 25 % води, а з другої — 10 %. Усього відлили 27 л. Скільки літрів води було в кожній бочці?

Розв'язання

За умовою задачі складаємо таблицю 39.

Таблиця 39

	Було, л	Відлили, л
Перша бочка	x	$0,25x$
Друга бочка	$(150 - x)$	$0,1(150 - x)$

$$\begin{aligned} \text{Отримали рівняння } 0,25x + 0,1(150 - x) &= 27. \\ 0,15x &= 12; \\ x &= 80. \end{aligned}$$

Отже, в першій бочці було 80 л води, а в другій — 70 л.

Задача 2 Під час реалізації товару на 2750 грн фермер одержав 10 % прибутку. Яка собівартість товару?

Розв'язання

Спосіб 1. Оскільки собівартість товару становить 100 %, а 2750 грн — 110 %, тоді маємо $2750 : 1,1 = 2500$ (грн) — собівартість товару.

Спосіб 2. Нехай собівартість товару — x грн, тоді прибуток становить $0,1x$ грн.

$$\text{Маємо } x + 0,1x = 2750, \quad x = 2500.$$

Отже, собівартість товару становить 2500 грн.



Щоб знайти відсоток числа, треба подати відсоток у вигляді десяткового дробу і помножити число на цей дріб.



Щоб знайти число за його відсотком, треба подати відсоток у вигляді дробу і поділити це значення на отриманий дріб.

2. Зміна величини у відсотках

Задача 3 Анна поцікавилась, скільки годин щотижня її родина дивиться телевізор. Опитавши членів родини, вона виявила, що минулого тижня вони дивилися телевізор 4 год, а цього тижня — 5,2 год. На який відсоток збільшився час перегляду телепередач родиною Анни?



qr.orioncentr.com.ua/qXqNT

Розв'язання

Спосіб 1 (за допомогою пропорції).

Час перегляду збільшився на $5,2 - 4 = 1,2$ (год).

Складаємо скорочений запис задачі: 4 год — 100 %
1,2 год — x %.

Складаємо пропорцію: $\frac{4}{1,2} = \frac{100}{x}$, звідси $x = 30$ %.

Записуємо відповідь: збільшився на 30 %.

Спосіб 2 (за правилом знаходження відсоткової зміни).

Оскільки цього тижня час перегляду телепередач збільшився на 1,2 год проти 4 год минулого тижня, то маємо вираз $\frac{5,2-4}{4} \cdot 100\% = \frac{1,2}{4} \cdot 100\% = 30\%$.

Отже, час перегляду збільшився на 30 %.

 **Щоб знайти відсоткову зміну, треба різницю нового і старого значення поділити на старе значення і результат помножити на 100 %.**

Задача 4 Книжка дорожча за журнал на 25 %. На скільки відсотків журнал дешевший, ніж книжка?

Розв'язання Якщо ціна журналу — x , то ціна книжки — $1,25x$.

Ціна журналу становить $\frac{x}{1,25x} \cdot 100\% = 80\%$ ціни книжки, тобто журнал на 20 % дешевший, ніж книжка.

Задача 5 Сплав золота зі сріблом містить 120 г срібла. Після того як його сплавляли зі 100 г чистого золота, відсотковий вміст золота у сплаві збільшився на 20 %. Скільки грамів золота містив початковий сплав?

Розв'язання Складаємо таблицю 40.

Таблиця 40

	Маса сплаву (у грамах)	Маса золота (у грамах)	Вміст золота у сплаві (у відсотках)
Було	$x + 120$	x	$\frac{x}{x+120} \cdot 100\%$
Стало	$x + 220$	$x + 100$	$\frac{x+100}{x+220} \cdot 100\%$

За умовою задачі складаємо рівняння:

$$\frac{x+100}{x+220} \cdot 100\% - \frac{x}{x+120} \cdot 100\% = 20\%.$$

Розв'язуємо рівняння:

$$\frac{5(x+100)}{x+220} - \frac{5x}{x+120} = 1;$$

$$\frac{5(x+100)(x+120) - 5x(x+220)}{(x+220)(x+120)} = 1;$$

$$x^2 + 340x - 33600 = 0;$$

$$x_1 = 80; x_2 = -420.$$

Оскільки маса не може виражатись від'ємним числом, то розв'язок рівняння $x_2 = -420$ не задовольняє умову задачі.

Отже, початковий вміст золота становить 80 г.

Запам'ятайте!

Концентрація розчину/відсотковий вміст речовини в розчині (сплаві) обчислюється за формулою:

$$\frac{m}{M} \cdot 100\%,$$

де m — маса речовини, M — маса розчину (сплаву).



Якщо у розчині (сплаві) p % речовини, то в M кг розчину (сплаву) міститься $0,01p$ кг цієї речовини.

Дізнайтеся більше

Існують різні способи вираження кількісного складу розчинів.

Масова частка — відношення маси розчиненої речовини до маси розчину.

Масову частку у відсотках називають **масовим відсотком** (маса речовини в грамах у 100 г розчину, позначають % м/м).

Молярна концентрація — відношення кількості розчиненої речовини до об'єму розчину. Традиційна одиниця вимірювання в хімії — моль/л.

Об'ємна частка — відношення об'єму розчиненої речовини до об'єму розчину. Здебільшого використовується для сумішей рідин або для сумішей газів. Це безрозмірна величина. Її часто виражають у відсотках, рідше в частках одиниці.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/Nqdq5

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
концентрація розчину	the concentration of a solution	die Konzentration der Lösung	la concentration de la solution

Пригадайте головне

1. Як знайти відсоток числа?
2. Як знайти число за його відсотком?
3. Як знайти зміну величини у відсотках?
4. Як знайти відсотковий вміст речовини в розчині?

Усне тренування

1. Обчисліть :
12 % числа 40; 4 % числа 0,5; 75 % числа $\frac{7}{15}$.
2. Знайдіть число, якщо: його 8 % — це число 24; його 21 % — це число 105; його 45 % — це число $\frac{6}{25}$.

Розв'яжіть задачі

- 928'. Знайдіть число a , що становить n відсотків числа b .
- 929'. Знайдіть число b , що становить n відсотків числа a .
- 930'. Скільки відсотків число a становить від числа b ?
- 931'. На скільки відсотків число a більше за число b ?
- 932'. Потрібно відремонтувати дві ділянки траси. Першого тижня відремонтували 75 % першої ділянки і 40 % другої ділянки. Загалом відремонтували 19 км. Знайдіть довжини цих ділянок, якщо всього потрібно відремонтувати 30 км. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо через x позначити довжину першої ділянки?


qr.orioncentr.com.ua/OQxnn

- 1) $75x + 40(30 - x) = 19$;
- 2) $0,4x + 0,75(30 - x) = 19$;
- 3) $0,75x + 0,4(30 - x) = 19$;
- 4) $0,75x + 0,4(19 - x) = 30$.

933'. Під час розпродажу стіл, що коштував 2800 грн, продали його за 2240 грн. За допомогою якого виразу можна знайти, на скільки відсотків знизили ціну стола на розпродажу?

- 1) $\frac{2240}{2800}$;
- 2) $\frac{2800 - 2240}{2800} \cdot 100$;
- 3) $\frac{2240}{2800} \cdot 100$.

934'. До сплаву міді з цинком масою 120 г додали 30 г міді. Як знайти відсотковий вміст міді в новому сплаві, якщо початкова маса міді у сплаві — 15 г?

- 1) $\frac{30}{120} \cdot 100$;
- 2) $\frac{15 + 30}{120} \cdot 100$;
- 3) $\frac{15 + 30}{120 + 30} \cdot 100$;
- 4) $\frac{15}{120 + 30} \cdot 100$.

935'. Підприємець вирішив відкрити в інстаграмі магазин сумок. Оптова ціна сумки становить 1200 грн. Скільки гривень буде коштувати сумка в інтернет-магазині, якщо він буде продавати сумки з націнкою 45 %?

936'. У книжку, що містила 350 сторінок, додали ілюстрації до творів. Скільки сторінок стало у книжці, якщо вона збільшилася на 24 %?

937'. Після зниження ціни на 15 % сукня стала коштувати 2125 грн. Знайдіть ціну сукні до знижки.

938'. Фірма платить рекламному агентству 5 % вартості замовлення. На яку суму агент повинен взяти замовлення, щоб заробити 1000 грн?

939'. На склад привезли 96 мішків цукру, 75 % із них відвантажили в магазин і в кондитерський цех. Скільки мішків цукру потрапило в кондитерський цех, якщо в магазин завезли на 38 мішків більше?

940'. У магазин завезли 800 кг картоплі, 60 % цієї картоплі продали за два дні. Скільки кілограмів картоплі продали за перший день, якщо за другий день продали на 50 кг менше?

941°. Навчальна література становить 60 % видавничої продукції видавництва «Світ», 30 % навчальної літератури — це книжки для дошкільнят. Який відсоток видавничої продукції становлять книжки для дошкільнят?

942°. Перед поїздкою бак автомобіля було заповнено на 80 %. Під час поїздки витратили 40 % бензину. Який відсоток баку заповнено бензином наприкінці поїздки?

943°. Узимку в зоопарку було 112 тварин, а влітку їх стало 140. На скільки відсотків збільшилась кількість тварин у зоопарку?

944°. Пачка білого паперу коштує 220 грн, а кольорового — 297 грн. На скільки відсотків кольоровий папір дорожчий за білий?

945°. Скільки відсотків становить:

1) $-\frac{9}{14} \cdot 2\frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$ від $17,4 + (-8,4) : 1\frac{5}{7}$;

2) $63,45 : 4,7 + 9,35 - (-4,5)^2$ від $\left(1\frac{11}{15} - 3\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right)$?

946°. Скільки відсотків становить:

E 1) $\left(\frac{19}{25} + 0,4 \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot 0,6$ від $(-0,7 + 2,3) : \frac{2}{3}$;

2) $(2,7 - 2,9) \cdot (-4,5)$ від $9,6 \cdot \frac{5}{16} + 9,06 - (-3,4)^2$?

947°. Є два сплави міді й цинку. Відсотковий вміст цинку в першому сплаві дорівнює 20 %, а в другому — 40 %. Переплавили 2 кг першого сплаву і 6 кг другого сплаву. Визначте відсотковий вміст цинку в отриманому сплаві.



qr.orioncentr.com.ua/yFAit

948°. Змішали 300 г 60-відсоткового розчину кислоти з 200 г 80-відсоткового розчину кислоти. Визначте концентрацію отриманого розчину.

949°. 150 г сиропу містить 40 % цукру. Скільки води потрібно додати до цього сиропу, щоб отриманий сироп містив 15 % цукру?

950°. Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води потрібно додати до 40 кг морської, щоб отриманий розчин містив 2 % солі?

951°. Турист подорожує до озера велосипедом. Він проїхав 30 % відстані і зробив зупинку. Потім він проїхав ще 30 % тієї відстані, що залишилась, і зупинився. Скільки відсотків усієї відстані йому залишилось проїхати?

952°. 30 % тиражу нової газети було продано в перший день її випуску. 13 200 екземплярів було продано в газетних кіосках, що становить 55 % усіх газет, проданих першого дня. Який тираж цієї газети?

953°. У двох секціях спортивної школи на початку року займалося 36 учнів. До кінця року кількість дітей у першій секції збільшилась на 30 %, а в другій — на 25 %. Загалом у двох секціях стало займатися 46 учнів. Скільки учнів було в кожній секції спочатку?

954°. У двох танцювальних гуртках на початку року займалося 49 дітей. До кінця року кількість дітей у першому гуртку збільшилась на 150 %, а в другому — зменшилась на 20 %. Загалом у двох гуртках стало займатися 56 дітей. Скільки дітей займалося в кожному гуртку на початку року?

955°. 5 кг грибів містять 80 % води. Скільки кілограмів води потрібно з них випарувати, щоб гриби містили 20 % води?

956°. 6 кг сплаву міді з оловом містять 24 % міді. Скільки кілограмів міді треба додати до нього, щоб отриманий сплав містив 40 % міді?

957°. 30 г розчину містить 15 % солі. Скільки грамів 75-відсоткового розчину солі потрібно додати до цього розчину, щоб отримати 50-відсотковий розчин солі?

958. 50 г розчину містить 60 % солі. Скільки грамів 15-відсоткового розчину солі потрібно додати до цього розчину, щоб отримати 40-відсотковий розчин солі?



959. Стіл дорожчий за стілець на 45 %. На скільки відсотків стілець дешевший, ніж стіл?

960. Ціну книжки збільшили на 10 %. На скільки відсотків потрібно зменшити отриману ціну, щоб вона стала дорівнювати початковій?

961. Ціну товару збільшили на 150 %. На скільки відсотків потрібно зменшити отриману ціну, щоб вона стала дорівнювати початковій ціні?

962. До сплаву золота та срібла, який містив 80 г золота, додали 200 г срібла, після чого відсотковий вміст срібла у сплаві збільшився на 20 %. Скільки грамів срібла містив початковий сплав?

963. До розчину, що містить 18 г солі, додали 600 г води, після чого концентрація розчину зменшилась на 4 %. Чому дорівнює початкова маса розчину?

964. До сплаву олова та свинцю, що містив 360 г свинцю, додали 3 кг олова, після чого відсотковий вміст свинцю зменшився на 50 %. Скільки кілограмів олова в новому сплаві?

965*. У школі 28 % дівчаток і 16 % хлопців займаються в спортивних секціях. Скільки всього відсотків учнів школи займаються у спортивних секціях, якщо дівчат і хлопців у школі однакова кількість?

966*. У спортивній секції займаються 12 % усіх хлопчиків, що навчаються в школі, і 8 % усіх дівчаток. Скільки всього відсотків учнів школи відвідують цю спортивну секцію, якщо кількість хлопчиків становить $\frac{3}{5}$ усіх учнів школи?

967*. Є два сплави золота зі сріблом. У першому сплаві вміст цих металів відноситься як 2 : 3, у другому — як 3 : 7. Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно

взяти, щоб одержати 8 кг нового сплаву, у якому золото й срібло були б у відношенні 5 : 11?

968*. Робочий день зменшився з восьми годин до семи. На скільки відсотків потрібно підвищити продуктивність праці, щоб за тих самих розцінок зарплата зростала на 5 %?

Проявіть компетентність

969*. Відповідно до підрахунків Нацкомісії з питань енергетики та комунальних послуг, у середньому сім'я споживає 168 кВт/год електроенергії на місяць. За тарифом, що діє, за такий обсяг струму потрібно заплатити 725,76 грн.

1. Після заміни лампочок на світлодіодні та за розумного використання побутових приладів сім'я заощадила 15 %. Скільки гривень сім'я буде платити за спожиту електроенергію тепер?

2. На скільки відсотків більше (менше) заплатила ваша родина за спожиту електроенергію минулого місяця?

§ 24. РОБОТА З ДАНИМИ

qr.orioncentr.com.ua/45Zj1

1. Середнє значення і мода вибірки

Ситуація. Богдан виписав свої бали за тему «Квадратні рівняння»:

9, 8, 10, 10, 9, 10, 10, 8, 7, 9.



Як допомогти Богданові визначити підсумкову оцінку за тему?

Пригадаймо.



Набір числових даних, що виписав Богдан, називають *вибіркою*.

Упорядковану вибірку: 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10 — називають *варіаційним рядом*.

Обсяг вибірки: $n = 10$.

Головним орієнтиром для визначення підсумкової оцінки є *середнє значення вибірки*: $\bar{x} = \frac{7+8 \cdot 2+9 \cdot 3+10 \cdot 4}{10} = 9$.

Отже, оцінка за тему становить 9 балів.

 **Середнім значенням (або середнім арифметичним) вибірки називають частку від ділення суми всіх елементів вибірки на їхню кількість.**



Чи характеризує результати Богдана оцінка «10»?

Так.



Оцінка «10» — «найбільш популярна» у вибірці, її називають *модою* вибірки.

Запам'ятайте!

Мода вибірки — це значення вибірки, яке трапляється у варіаційному ряді найчастіше.



Моду вибірки позначають так: M_o .
У розглянутій ситуації $M_o = 10$.



Чи може вибірка мати дві моди?

Так.



Наприклад, ряд 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7 має дві моди — числа 5 і 7: $M_{o_1} = 5$ і $M_{o_2} = 7$.

Мода використовується не тільки для числових даних. Наприклад, якщо опитати учнів про їхній улюблений предмет, то модою буде той предмет, який учні назвуть найчастіше.

Задача 1 Серед учнівства 8 класу провели опитування, щоб дізнатися, скільки приблизно годин за день вони витрачають на виконання домашнього завдання. Отримали такий ряд чисел: 1, 4, 2, 1, 1, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 2, 3, 2, 0. Знайдіть середнє значення і моду отриманих даних. Проаналізуйте отримані дані.

Розв'язання

Утворимо варіаційний ряд: 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4.

Середнє значення вибірки:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{20} = 1,8.$$

Мода вибірки $M_o = 2$.

Незважаючи на те, що середнє значення не дорівнює 2, мода свідчить про наближення середнього значення до 2, адже саме 2 год найчастіше витрачали діти на виконання домашнього завдання.



Середнє значення вибірки і мода вибірки дають змогу точніше розібратися в даних, що вивчаються.

2. Способи подання даних

У попередніх класах ми вже пересвідчилися, що зібрану інформацію зручно подавати в таблицях. Наприклад, дані задачі 1 можна подати у вигляді таблиці 41.



qr.orioncentr.com.ua/XwZgS

Таблиця 41

Кількість годин	0	1	2	3	4
Частота	2	6	7	4	1

Таку таблицю називають *частотною*.

Запам'ятайте!

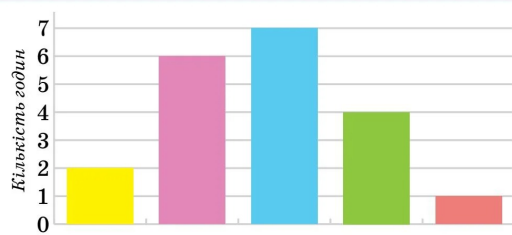
Частотою елемента називають число, яке показує, скільки разів даний елемент трапляється у вибірці.

Також для аналізу даних доцільно застосовувати діаграми.

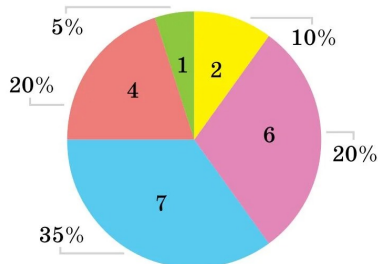
Запам'ятайте!

Діаграма — це графічне зображення, що наочно показує співвідношення будь-яких величин.

Наприклад, *стовпчасту діаграму* до задачі 1 наведено на малюнку 52, а *кругову діаграму* — на малюнку 53.



Мал. 52



Мал. 53

Задача 2 На олімпіаді з математики була запропонована тестова робота з 10 завдань. Кількість правильних відповідей, що дав кожний із 145 учасників та учасниць, наведено в частотній таблиці (табл. 42). Знайдіть пропущене значення частоти.

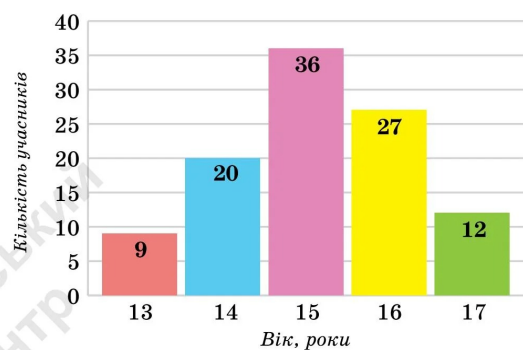
Таблиця 42

Кількість правильних відповідей	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота	3	8	7	12	15		21	18	13	9	6

Розв'язання Частота — це кількість дітей, які дали певну кількість правильних відповідей. Сума всіх частот дорівнює загальній кількості учасників та учасниць олімпіади. Тому 5 правильних відповідей дали:

$$145 - (3 + 8 + 7 + 12 + 15 + 21 + 18 + 13 + 9 + 6) = 28 \text{ (дітей).}$$

Задача 3 На діаграмі (мал. 54) показано розподіл за віком учасників літнього наукового табору «Фотон».



Мал. 54

- Скільки всього учнів відпочивало в літньому науковому таборі?
- Який середній вік учасників табору?
- Яка мода цього ряду даних? На що вона вказує?

Розв'язання

- Загальна кількість учнів дорівнює сумі:

$$9 + 20 + 36 + 27 + 12 = 104.$$

- Середній вік учасників табору дорівнює:

$$\frac{9 \cdot 13 + 20 \cdot 14 + 36 \cdot 15 + 27 \cdot 16 + 12 \cdot 17}{104} = 15,125 \approx 15 \text{ (років).}$$

- $Mo = 15$. Отже, в таборі найбільше було дітей віком 15 років.

Дізнайтеся більше

Мода — показник, який широко використовується в статистиці. Найчастіше моду застосовують під час вивчення попиту, наприклад, коли треба з'ясувати, якого розміру футболка треба пошити більше чи які нові маршрути автобусів потрібно відкривати тощо. Попередньо вивчається попит і виявляється мода — величина, що зустрічається найчастіше.

Під час проведення будь-якої процедури голосування, де певна множина голосів означає перемогу, визначити переможця можна у випадку існування одного значення моди, а якщо результат буде *мультимодальним* (існує більше ніж одна мода), зазвичай проводять другий тур голосування або застосовують якусь додаткову процедуру визначення переможця.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/JHbwp

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
мода вибірки	mode of a sample	Mode- stichprobe (f)	mode d'une série statistique

Пригадайте головне

1. Що називають варіаційним рядом?
2. Як знайти середнє значення вибірки?
3. Як знайти моду вибірки?
4. Які є способи подання даних?

Усне тренування

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x} = 4; \quad \sqrt{x} - 6 = 2; \quad 2\sqrt{x} + 4 = 0; \quad \sqrt{x-4} - 3 = 2.$$

2. Які з тверджень є правильними:

$$1 \in R; \quad -13 \in Z; \quad \sqrt{7} \in Q; \quad 2,3 \in Z; \quad \sqrt{9} \in N; \quad 0 \in Z?$$

Розв'яжіть задачі

- 970***. Наведіть приклад вибірки, мода якої дорівнює 10.
- 971***. Чи правильно, що середнє значення вибірки — це:
- 1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
 - 2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
 - 3) число, яке «ділить» вибірку на дві рівні частини?
- 972***. Чи правильно, що мода вибірки — це:
- 1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
 - 2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
 - 3) число, яке «ділить» вибірку на дві рівні частини?

- 973***. Для кожного ряду чисел знайдіть обсяг, середнє значення та моду:

- 1) 18; 12; 20; 18; 2; 10;
- 2) 2,5; -4,3; 4,3; 6,2; 7,1; 7,1; -7,1;
- 3) $-\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2} + 1$; 2; 5; -7.

qr.orioncentr.com.ua/0cq9i


- 974***. Для кожного ряду чисел знайдіть обсяг, середнє значення та моду:

- 1) 8; 12; 20; 8; 20; 12; 20;
- 2) $-\sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 0; $1 - \sqrt{3}$; 5; 0.

- 975***. Упродовж тижня радіо «Хвиля» фіксувало кількість телефонних дзвінків у студію. Отримали ряд даних: 26; 35; 22; 38; 35; 42; 40. Знайдіть середню кількість дзвінків за день та моду отриманих даних.

- 976***. Доставка японської кухні Sushi фіксувала кількість замовлень упродовж тижня. Отримали ряд даних: 28, 39, 39, 48, 62, 53, 67. Знайдіть середню кількість замовлень за день та моду отриманих даних.

- 977***. У таблиці 43 наведено дані про кількість деталей, виготовлених робітниками за один робочий день.

Таблиця 43

Кількість деталей за день	18	19	20	22	26
Кількість робітників	2	10	8	4	1

За цими даними знайдіть: 1) середнє значення; 2) моду.

- 978***. У таблиці 44 наведено дані про кількість очок, вибитих спортсменом за 5 пострілів по мішені.

Таблиця 44

Номер пострілу	1	2	3	4	5
Кількість очок	9	10	8	6	9

За цими даними знайдіть: 1) середню кількість очок у серії пострілів; 2) моду цих даних.

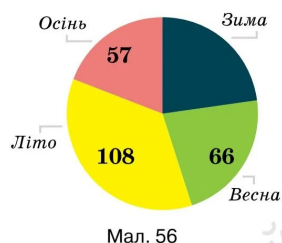
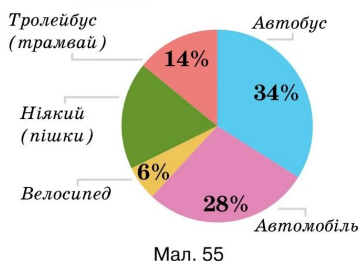
- 979***. За якого значення x середнє арифметичне ряду чисел 11,5; 12,4; 13,8; 14; x дорівнює 12,8?

- 980***. За якого значення x середнє арифметичне ряду чисел 8,5; 2,6; 3,5; 4,8; x дорівнює 5,2?

981*. За якого значення x мода ряду чисел 11,5; 12,4; 13,8; 14; x дорівнює 12,4?

982*. За якого значення x мода ряду чисел 8,5; 2,6; 3,5; 4,8; x дорівнює 3,5?

983*. На круговій діаграмі (мал. 55) показано результати опитування учнів школи на тему «Яким видом транспорту ви добираєтесь до школи?». Скільки учнів взяли участь в опитуванні, якщо 54 учні йдуть до школи пішки?



984*. На круговій діаграмі (мал. 56) показано результати опитування на тему «Яка ваша улюблена пора року?». Скільки відсотків усіх опитаних вважають улюбленою порою року зиму, якщо в опитуванні взяло участь 300 осіб?

985*. На телеканалі «Суспільне Черкаси» провели дослідження щодо розподілу ефірного часу між різними типами програм. Було одержано такі дані: новини — 15 %, кінофільми та серіали — 50 %, спортивні програми — 7 %, науково-пізнавальні програми — 3 %, музичні програми — 15 %, дитячі передачі — 10 %. Складіть варіаційний ряд вибірки. Знайдіть середнє значення та моду ряду. Побудуйте стовпчасту та кругову діаграми.

986*. Режим дня дитини шкільного віку в обов'язковому порядку передбачає на добу: повноцінне харчування — 2 год; навчання — 8 год; фізичні навантаження — 2 год; відпочинок і прогулянки — 3 год; сон — 9 год. Складіть варіаційний ряд вибірки. Знайдіть середнє

значення та моду ряду. Побудуйте стовпчасту та кругову діаграми.

987. Середнє арифметичне вибірки з 16 елементів дорівнює 12,5. До цієї вибірки дописали число 27,8. Знайдіть середнє арифметичне нової вибірки.

988. Середнє арифметичне вибірки з 12 елементів дорівнює 9,4. Із цієї вибірки видалили число 13,8. Знайдіть середнє арифметичне нової вибірки.

989. Результати дослідження записали в частотну таблицю (табл. 45), але пропустили одне число. Чи можна його відновити, якщо середнє арифметичне вибірки дорівнює 20,88? Знайдіть це число.

Таблиця 45

Елемент	5	12	20	24	28	32
Частота	2	5	5		4	3

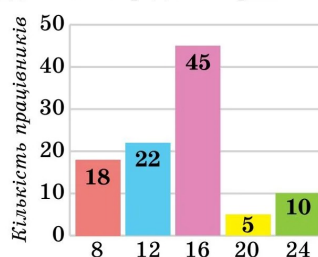
990. Результати дослідження записали в частотну таблицю (табл. 46), але пропустили одне число. Чи можна його відновити, якщо середнє арифметичне вибірки дорівнює 18? Знайдіть це число.

Таблиця 46

Елемент	6	13	25	26	14	20
Частота	2	2	4	3		3

991. На діаграмі (мал. 57) наведено дані опитування працівників підприємства щодо їхньої середньої заробітної плати.

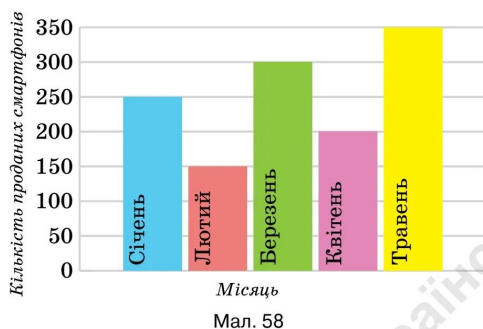
qr.orioncentr.com.ua/F5ii3



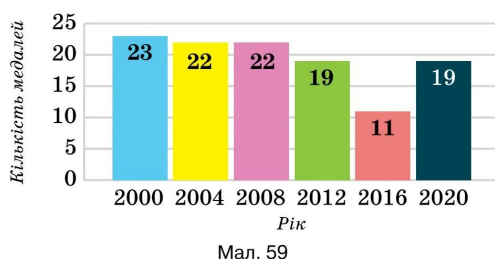
Середня заробітна плата, тис. грн Мал. 57

1. Скільки працівників взяло участь в опитуванні?
2. Скільки гривень у середньому отримує один працівник на цьому підприємстві?
3. Яка заробітна плата найбільш популярна на цьому підприємстві?
4. На скільки відсотків середня заробітна плата робітників менша від найбільш популярної заробітної плати?

992. (НМТ 2024). На діаграмі (мал. 58) наведено інформацію про продаж смартфонів протягом п'яти місяців. На скільки відсотків середня кількість проданих смартфонів перевищує кількість проданих смартфонів у квітні?



993. На діаграмі (мал. 59) подано інформацію про кількість медалей, що вибороли українські спортсмени на літніх Олімпійських іграх.



1. Скільки всього медалей вибороли спортсмени з 2000 по 2020 рік на Олімпійських іграх?
2. Скільки медалей у середньому виборювали спортсмени за Олімпіаду?
3. Знайдіть моду отриманих даних. На що вказує знайдене числове значення?
4. Доповніть діаграму даними за 2024 рік. Як змінилось середнє значення отриманих медалей (у відсотках)?

994*. Упродовж семестру вчитель поставив Ірині тематичні оцінки за 6 тем. Середня оцінка за перші чотири теми дорівнює 7,8. Яку найбільшу оцінку за семестр може отримати Ірина?

995*. Кожне число варіаційного ряду збільшили на 5. Як змінилось його: 1) середнє значення; 2) мода?

996*. Запишіть ряд чисел, що складається з шести елементів, у якому середнє арифметичне дорівнює моді.

Проявіть компетентність

997. За тему з алгебри Микола отримав шість п'ятірок, чотири вісімки і дві десятки. Мама й тато вважають, що він заслуговує на оцінку «5», а Микола вважає, що йому поставлять оцінку «7». Аргументуйте точку зору кожного члена родини. Які статистичні дослідження вони провели? А яку б оцінку ви поставили Миколі?

§ 25. КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ

1. Правила додавання і множення для комбінаторних задач

Ситуація. Учніство 8-А класу визначало чергових на день. Частина класу була за те, щоб обрати одного чергового, а інша — щоб обрати двох. У класі 13 хлопців і 15 дівчат. Скільки варіантів вони мали розглянути в обох випадках?



qr.orioncentr.com.ua/1qKe5



Яке правило комбінаторики можна застосувати для вибору одного чергового?

Правило додавання.



Справді, хлопця можна обрати 13 способами, а дівчину — 15 способами. Тоді, за правилом додавання, **або** дівчину, **або** хлопця можна обрати $13 + 15 = 28$ способами.

Запам'ятайте!

Правило додавання

Якщо деякий елемент A можна вибрати з даної сукупності елементів n способами, а елемент B можна вибрати m способами, то вибрати **або** елемент A , **або** елемент B можна $n + m$ способами.



Яке правило комбінаторики можна застосувати для вибору двох чергових?

Правило множення.



Справді, першого чергового можна вибрати 28 способами, а другого — 27 способами. Тоді, за правилом множення, пару чергових — і першого, і другого, можна вибрати $28 \cdot 27 = 756$ способами.

Запам'ятайте!

Правило множення

Якщо деякий елемент A можна вибрати з даної сукупності об'єктів n способами й після кожного такого вибору елемент B можна вибрати m способами, то вибрати **і** об'єкт A , **і** об'єкт B можна $n \cdot m$ способами.

Задача 1 У команді легкоатлетів України 6 спортсменів. Скількома способами тренер може скласти команду для участі в чемпіонаті Європи з легкої атлетики з естафетного бігу 4×100 ?

Розв'язання

Першого учасника естафети можна обрати шістьма способами.

Другим може бути один із п'яти спортсменів, що залишились.

Третім — один із чотирьох спортсменів, що залишились.

Четвертого вже можна обрати трьома способами.

Отже, всіх можливих варіантів: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.



Під час розв'язування задачі ми використали правило множення.

Задача 2 Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 5, 7, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

Розв'язання

Першою цифрою шуканого числа може бути або цифра 2, або цифра 5, або цифра 7, тобто маємо три варіанти.

Другою цифрою шуканого числа може бути або 0, або 2, або 5, або 7, тобто чотири варіанти.

Третю цифру також можна обрати одним із чотирьох варіантів, оскільки цифри в записі числа можуть повторюватися.

Отже, одержуємо $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ трицифрових чисел, які можна скласти із заданих цифр.



Як зміниться результат цієї задачі, якщо додати умову, що всі цифри числа — різні?

Поміркуємо.



Задача 3 Скількома способами можна скласти трицифрове число із цифр 0, 2, 5, 7 за умови, що цифри в числі є різними?

Розв'язання

Першою цифрою шуканого числа може бути або цифра 2, або цифра 5, або цифра 7, тобто маємо три варіанти.

Другою цифрою шуканого числа може бути або 0, або одна з двох інших цифр, що залишилися, тобто три варіанти.

Третю цифру можна обрати двома способами, оскільки залишилися дві вільні цифри.

Зрештою одержуємо $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ трицифрових чисел, які можна скласти із заданих цифр так, щоб цифри в числі не повторювалися.



Першою цифрою числа не може бути нуль!

2. Розв'язування комбінаторних задач

qr.orioncentr.com.ua/IQCEL



Чи будь-які задачі є комбінаторними?

Ні.



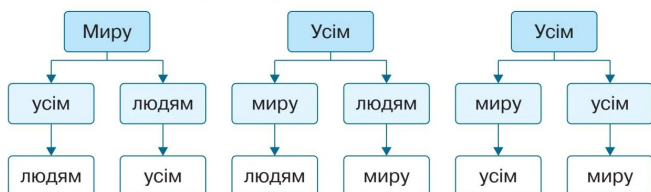
Справді, *комбінаторними* називають задачі, у яких йдеться про підрахунок певної кількості варіантів для комбінуння.

Для розв'язування комбінаторних задач використовують відомі вам *правила додавання та множення*. Якщо кількість шуканих способів комбінуння об'єктів невелика, то їх можна виписати методом перебору. Щоб перебрати всі шукані способи й не загубити якийсь із них, варто записувати проміжні результати в *таблиці* або можна створити *дерево можливих варіантів*.

Задача 4 Скільки існує наборів комбінуння слів *миру*, *усім*, *людям*?

Розв'язання

Спосіб 1. Складемо дерево можливих варіантів (мал. 60).



Мал. 60

Спосіб 2. Застосуємо правило множення.

Першим словом шуканого комбінуння може бути один із трьох варіантів.

Другим словом — два варіанти, що залишилися.

На третє місце залишилось розмістити одне слово.

Отже, отримали $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ можливих варіантів комбінуння слів.

Задача 5 Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити із цифр, що мають однакову парність?

Розв'язання

Загалом існує 10 цифр, серед них п'ять непарних: 1, 3, 5, 7, 9, і п'ять парних: 0, 2, 4, 6, 8. Числа можуть складатися з непарних цифр *або* з парних цифр.

Кількість п'ятицифрових чисел, що складаються з непарних цифр (цифри можуть повторюватись), дорівнює $5 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$, оскільки кожен цифру ми можемо вибрати одним із п'яти способів.

Кількість п'ятицифрових чисел, що складаються з парних цифр (цифри можуть повторюватись), дорівнює $4 \cdot 5 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^4 = 2500$, оскільки першою цифрою не може стати 0, а кожен іншу цифру ми можемо обрати одним із п'яти способів.

Далі застосовуємо правило додавання, оскільки ми обираємо числа *або* з непарними цифрами, *або* з парними.

Отже, можна утворити $3125 + 2500 = 5625$ чисел.

Дізнайтеся більше

Для кодування таємної інформації та її дешифрування потрібні знання комбінаторики, тому для розв'язування цих проблем залучали математиків. Першим дешифрувальником був **Франсуа Вієт** (1540–1603) — творець алгебраїчних формул та алгебраїчної символіки, «батько алгебри». Відомо, наприклад, що він любив розгадувати зашифровані листи. Під час війни Франції з Іспанією всі таємні листи іспанців вільно читали французи. Як не намагалися іспанські шифрувальники заплутати шифр, Вієт щоразу успішно розгадував його. Іспанці думали, що французам допомагає сам диявол, і навіть зверталися до Папи Римського з проханням знищити цю диявольську силу. Використовував математичні методи під час вивчення

нерозшифрованих абеток і харків'янин **Юрій Кнорозов** (1922–1999), відомий світові як дешифрувальник писемності народу мая (мал. 61). Практично не виходячи з кабінету п'ять років, Кнорозов таки зробив те, що до нього не вдавалося нікому. Він розробив власний варіант дешифрування писемності долини Інду. У Бразилії вченого вшановують як національного героя.



Мал. 61

Пригадайте головне

1. Поясніть, які задачі називають комбінаторними.
2. Сформулюйте правило додавання для комбінаторних задач.
3. Сформулюйте правило множення для комбінаторних задач.

Усне тренування

1. Розв'яжіть усно рівняння:
 - 1) $x^2 - 4 = 0$;
 - 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
 - 3) $x^2 + 3x - 4 = 0$.
2. Вкажіть кількість коренів рівняння:
 - 1) $x^2 = -4$;
 - 2) $\sqrt{x} + 4 = 0$;
 - 3) $5x + 1 = 5(x + 0,2)$;
 - 4) $x^2 - 4x + 20 = 0$.

Розв'яжіть задачі

- 998*** Для якого правила комбінаторики справедливе твердження: «Якщо елемент a можна вибрати n способами, а елемент b — m способами, то пару a і b можна обрати $m \cdot n$ способами»?
- 999*** Якщо елемент a можна вибрати n способами, а елемент b — m способами, то скількома способами можна обрати елемент a або b ?
- 1000*** Екскурсоводка запропонувала дітям відвідати або один із восьми музеїв, або один із чотирьох парків. Скількома способами це можна зробити?
- 1001*** Екскурсоводка запропонувала дітям відвідати один із восьми музеїв і один із чотирьох парків. Скількома способами це можна зробити?

1002* На учнівську наукову конференцію вчитель запропонував учням 8 тем з алгебри і 6 тем з геометрії. Скількома способами учень може вибрати для виступу:

- 1) одну тему;
- 2) дві теми (одну з алгебри й одну з геометрії)?

1003* У коробці 12 різних кульок, серед яких 7 синіх і 5 жовтих. Скільки існує способів вибрати:

- 1) одну кульку;
- 2) одну синю й одну жовту кульку?

1004* У кондитерському відділі супермаркету було 8 різних видів тортів та 15 видів цукерок у коробках. Скількома способами покупець може вибрати:

- 1) або торт, або коробку цукерок;
- 2) торт і коробку цукерок?

1005* Самостійна робота з математики містить одне рівняння й одну задачу. Скільки варіантів самостійної роботи з математики можна скласти із семи рівнянь і п'яти задач?

1006* У кав'ярні є 8 різних видів напоїв та 6 видів тістечок. Скількома способами відвідувач може скомбінувати собі один напій із тістечком?

1007* Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 6, 9, якщо:

- 1) усі цифри числа — різні;
- 2) цифри в числі можуть повторюватися?

1008* Скільки двоцифрових чисел можна скласти із цифр 3, 4, 5, якщо:

- 1) усі цифри числа — різні;
- 2) цифри в числі можуть повторюватися?

1009* Скільки існує:

- 1) двоцифрових чисел;
- 2) двоцифрових чисел, цифри яких різні;
- 3) двоцифрових чисел, сума цифр яких більша за число 16;
- 4) двоцифрових чисел, добуток цифр яких менший від числа 3?

qr.orioncentr.com.ua/YEU9i



1010*. Скількома способами можна вибрати точку на координатній площині, абсциса та ордината якої різні й набувають натуральних значень від 1 до 10?

1011*. Скількома способами можна розмістити двох учнів на десяти місцях?



1012*. Скількома способами можуть бути розподілені 1, 2 і 3 місця за умови, що в змаганнях беруть участь 8 команд?

1013*. Скількома способами можуть розміститися четверо спортсменів на лаві перед гімнастичним снарядом?

1014*. Скількома способами можна скласти список із п'яти дітей?

1015*. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей випадання герба та числа можна отримати?

1016*. Монету підкидають чотири рази. Скільки різних послідовностей випадання герба та числа можна отримати?



1017*. Із цифр 2, 4, 5, 6, 8 склали всі можливі п'ятицифрові числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, запис яких:



qr.orioncentr.com.ua/04Tnh



- 1) розпочинається цифрою 6; 2) непарних;
- 3) розпочинається із 46; 4) не розпочинається цифрою 8?

1018*. Із цифр 1, 3, 4, 7 склали всі можливі чотирицифрові числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, запис яких:



- 1) розпочинається цифрою 7;
- 2) парних;
- 3) розпочинається із 13;
- 4) не розпочинається цифрою 1?

1019*. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 4, 0, 5, якщо цифри числа різні й число є:

- 1) парним; 2) кратним числу 5; 3) кратним числу 10?

1020*. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 5 і 6, якщо цифри числа різні й число є:



- 1) парним; 2) непарним; 3) кратним числу 5?

1021*. Скільки існує трицифрових чисел, що діляться на 5?

1022*. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 7, 2, 1 і 0, якщо цифри числа можуть повторюватися й число є: 1) парним; 2) непарним; 3) кратним числу 5?

1023*. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 3, 6 і 0, якщо цифри числа можуть повторюватися й число є: 1) парним; 2) кратним числу 10?



1024*. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з парних цифр, якщо:

- 1) усі цифри числа — різні;
- 2) цифри в числі можуть повторюватися?

1025*. Скільки трицифрових чисел можна утворити з непарних цифр, якщо:



- 1) усі цифри числа — різні;
- 2) цифри в числі можуть повторюватися?

1026*. Щоб набрати чотирицифровий пін-код, потрібно дві секунди. Скільки секунд знадобиться для того, щоб набрати всі можливі коди? Відомо, що всі цифри пін-коду різні.

1027*. Скільки різних трикутників можна утворити з відрізків завдовжки 4 см, 5 см і 6 см? Скільки серед них рівносторонніх, рівнобедрених і різносторонніх трикутників?

1028*. Сума цифр натурального числа є парним числом. Скільки таких двоцифрових чисел існує?

1029*. Скільки чисел, менших від 10^4 , можна скласти із цифр 2, 5, 7?

1030*. Номер квитка складається із чотирьох цифр і може починатися з нуля. Знайдіть кількість щасливих квитків, якщо щасливим вважається квиток, номер якого має вигляд $\overline{abba}$ (числа a і b різні).

- 1031*.** Скільки трицифрових чисел, кратних числу 3, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 5 і 8? Розв'яжіть задачу, якщо:
- 1) усі цифри числа різні;
 - 2) цифри числа можуть повторюватися.
- 1032*.** Скільки натуральних дільників має число:
- 1) $2^2 \cdot 6^5$;
 - 2) $9^5 \cdot 7^3 \cdot 8$?
- 1033*.** Скільки існує трицифрових чисел, у записі яких:
- 1) є цифра 9;
 - 2) немає цифри 9?

Проявіть компетентність

- 1034.** Із Києва до Одеси можна дістатися потягом, автобусом або автомобілем. Скількома способами можна дістатися з Києва до Одеси й повернутися назад, якщо для подорожі:
- 1) можна скористатися тільки різними видами транспорту;
 - 2) види транспорту можуть бути однаковими?
- 1035.** Петро забув код до входних дверей, який складається із чотирьох різних цифр. Він пам'ятає, що остання цифра є парною, а першою є цифра 9. Скільки способів комбінування цифр йому доведеться перебрати, щоб відкрити двері?

§ 26. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

1. Основні поняття теорії ймовірностей

Ситуація. Оксана й Сашко часто грають у гру «Монополія». Їм потрібно кидати шестигранний кубик, щоб визначити кількість кроків на ігровому полі.



qr.orioncentr.com.ua/9ciDC



Чи можливо Сашкові забезпечити собі вигравшне випадання очок на кубик?

Ні.



Кидання кубика — це *випробування*, а його наслідки не можна передбачити.



Такий експеримент (випробування) називають *випадковим* або *стохастичним*.

Будь-яка випадкова подія відбувається (чи не відбувається) внаслідок проведення деякого *експерименту*.

Запам'ятайте!

Подія, що може відбутися чи не відбутися під час здійснення випробування, називається *випадковою подією* або (коротко) *подією*.

Приклади випробувань і випадкових подій наведено в таблиці 47.

Таблиця 47

Випробування	Випадкова подія
Підкидання гравального кубика	Поява на верхній грані кубика кількості очок від 1 до 6
Футбольний матч «Динамо» — «Шахтар»	Переміг «Шахтар» з рахунком 2 : 1
Розв'язування квадратних рівнянь під час підготовки до контрольної роботи	Усі рівняння розв'язані правильно
Учитель виставляє оцінки в журнал	Учитель виставив учневі оцінку «13 балів» за 12-бальною системою оцінювання

Серед наведених прикладів є достовірні й неможливі події. Пригадаємо означення.

Запам'ятайте!

Подію, яка в результаті даного випробування *неодмінно станеться*, називають *достовірною*.

Запам'ятайте!

Подію, яка внаслідок даного випробування **не може відбутися**, називають **неможливою**.

«Поява кількості очок від 1 до 6 на верхній грані кубика» — **достовірна подія**.

«Учитель виставив учневі оцінку «13 балів» за 12-бальною системою оцінювання — **неможлива подія**.

Під час кидання гравального кубика можлива одна із шести різних подій, кожна з яких характеризується певною кількістю очок. Усі ці події **рівноможливі** і **несумісні** (жодні дві не можуть відбутися одночасно, оскільки на кожній грані кубика різна кількість очок).

Запам'ятайте!

Події називаються **рівноможливими**, якщо поява кожної з них є **однаково можливою** порівняно з іншими.

Запам'ятайте!

Події називають **несумісними**, якщо поява однієї з них **виключає** появу іншої.

Задача 1 Розглянемо подію A — «під час підкидання гравального кубика випало непарне число очок». Які елементарні події є сприятливими для настання події A ?

Розв'язання У результаті одного підкидання гравального кубика із шести елементарних подій відбудеться лише одна подія: або поява 1, або поява 2, або поява 3, або поява 4, або поява 5, або поява 6. Усього шість **рівноможливих** подій. A **сприятливими** буде кожна з трьох подій: або поява 1, або поява 3, або поява 5.



Яка ймовірність того, що під час підкидання гравального кубика випаде непарна кількість очок?

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$



Запам'ятайте!

Ймовірністю події A називається відношення числа m сприятливих для A подій до числа n усіх рівноможливих у даному випробуванні подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$



Позначають: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$.

2. Обчислення ймовірності випадкової події

qr.orioncentr.com.ua/3e8Jo



Чи може ймовірність випадкової події дорівнювати 0 або 1?

Так.



Якщо подія A є **достовірною**, то $P(A) = 1$.

Наприклад, ймовірність **достовірної** події «поява від 1 до 6 очок» у результаті одного підкидання гравального кубика дорівнює 1, оскільки $\frac{m}{n} = \frac{6}{6} = 1$.

Якщо подія A є **неможливою**, то $P(A) = 0$.



Ймовірність події може набувати значень лише від 0 до 1.

Задача 2 Із цифр 2, 5, 7 випадковим чином утворили трицифрове число з різними цифрами. Яка ймовірність того, що воно є:

1) парним; 2) непарним?

Розв'язання

1. Подія A — «утворили парне трицифрове число з різними цифрами». Усього із цих цифр можна утворити трицифрових чисел $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, а саме: 257, 275, 527, 572, 725, 752. Тобто $n = 6$. Із них парних чисел — 2, тобто $m = 2$.

$$\text{Ймовірність події } A: P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. Подія B — «утворили непарне трицифрове число з різними цифрами». Усього із цих цифр можна утворити трицифрових чисел $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, тобто $n = 6$.

Із них непарних чисел — 4, тобто $m = 4$.

Ймовірність події B : $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Проаналізуємо результати, отримані в задачі 2:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

 Сума ймовірностей усіх рівноможливих подій випробування дорівнює 1.

Задача 3 У випадковому експерименті монету кидають тричі. Яка ймовірність того, що «герб» випаде всі три рази?

Розв'язання

Подія A — «герб» випаде три рази.

Під час кидання монет можливі такі елементарні події: ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ. Отже, $n = 8$.

«Герб» випаде три рази лише в одному випадку, тому $m = 1$.

$$\text{Отже, } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8}.$$

Задача 4 Самостійна робота з математики містить одне рівняння й одну задачу. Учитель склав варіанти самостійної роботи із запропонованих раніше учням семи рівнянь і п'яти задач. Яка ймовірність написати самостійну на найвищий бал, якщо учень знає, як розв'язувати 5 рівнянь і 3 задачі з цього переліку?

Розв'язання

Подія « A » — «написати самостійну роботу на найвищий бал».

Із семи рівнянь і п'яти задач учитель всього склав $7 \cdot 5 = 35$ варіантів. Тобто $n = 35$.

Учень знає, як розв'язувати 5 рівнянь і 3 задачі, тобто $5 \cdot 3 = 15$ варіантів, $m = 15$.

$$\text{Отже, } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

Дізнайтеся більше

Гра в кубики була найпопулярнішою азартною грою до кінця середньовіччя. Саме слово «азарт» походить від арабського слова «аль-зар», що перекладається як «гральний кубик». Найбільш ранньою книжкою з теорії ймовірностей є «Книга про гру в кубики» **Джероламо Кардано** (1501–1576). Вона була опублікована в 1663 р. У ній розглянуто цікавий парадокс гральних кубиків. Під час кидання двох гральних кубиків суми очок «9» та «10» можна отримати двома способами: $9 = 3 + 6 = 4 + 5$; $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. Якщо ж гральних кубиків три, то таких способів є шість і для «дев'ятки», і для «десятки». Практичні ж спостереження показують, що «дев'ятка» з'являється частіше на двох кубиках, а «десятка» — на трьох. Тривалий проміжок часу цей парадокс вважався занадто складним. Тут проблема полягає в тому, що наведені вище способи не є елементарними, а отже, необхідно враховувати також і порядок випадання чисел.



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/WG0zV

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ймовірність	probability	Wahrscheinlichkeit (f)	probabilité

Пригадайте головне

1. Що таке подія?
2. Яку подію називають достовірною? А неможливою?
3. Які події називають несумісними? А рівноможливими?
4. Що таке ймовірність події? Як її знайти?
5. Яких значень може набувати ймовірність події?

Усне тренування

1. Обчисліть:
 - 1) $3^{-8} : 3^2$; 2) $2^{-4} \cdot 2^2$; 3) $3^{-8} : 3^2 - 3^{-6}$; 4) $2^{-4} \cdot 2^2 + 4^{-1}$.
2. Розв'яжіть рівняння:
 - 1) $(x - 2)(x + 2) = 0$; 2) $(x - 7)^2 = 0$; 3) $x^2 + 10x = 0$.

Розв'яжіть задачі

1036*. Які елементарні події можна отримати внаслідок проведення випробування:

- 1) монету підкидають два рази;
- 2) у слові «родина» навімання вибирають одну букву;
- 3) зі скриньки, у якій лежать білі й чорні кульки, виймають дві кульки?

1037*. Наведіть приклад:

- 1) випадкової події; 2) неможливої події; 3) достовірної події.

1038*. Визначте, якими — випадковими, неможливими чи достовірними — є події:

- E**
- 1) у результаті підкидання грального кубика випаде непарна кількість очок;
 - 2) завтра буде дощ;
 - 3) навімання вибраному учневі восьмого класу 18 років;
 - 4) вибране навімання двоцифрове число є парним;
 - 5) якщо сьогодні понеділок, то мене викличуть до дошки;
 - 6) у результаті збільшення температури повітря вода перетворилась на лід.

1039*. Максим загадав двоцифрове число. Якою є подія:

- 1) це число парне;
- 2) це число менше від десяти;
- 3) це число містить однакові цифри;
- 4) це число має дільником число 1?

1040*. Запишіть слово «стохастика». Якою є подія:

- E**
- 1) у слові є літера «а»;
 - 2) із букв цього слова можна утворити слово «тест»;
 - 3) із букв цього слова можна скласти інші слова;
 - 4) у слові є голосні букви?

1041*. У класі 15 хлопців і 12 дівчат. Яка ймовірність того, що випадково призначений черговий — хлопець?

1042*. Із 15 атлетів, які були на тренувальних зборах, 9 відібрали на чемпіонат світу. Яка ймовірність того, що навімання обраний спортсмен іде на чемпіонат світу?

1043*. У Ярини є 8 листівок з пам'ятками архітектури Києва і 6 листівок із квітами. Яка ймовірність того, що на навімання обраній листівці буде квітка?

1044*. На дошці Оксанка написала число 234 017, а потім навімання витерла одну цифру. Яка ймовірність того, що Оксанка витерла:

- 1) цифру 4; 3) непарну цифру;
- 2) парну цифру; 4) цифру 8?

1045*. У спортивних змаганнях з гімнастики беруть участь 20 спортсменів: 5 — з України, 7 — із Польщі, 4 — з Молдови і решта — з Німеччини. Порядок виступу спортсменів визначається жеребкуванням. Яка ймовірність того, що:

- E**
- 1) першим виступатиме гімнаст із України;
 - 2) останнім виступатиме спортсмен із Німеччини;
 - 3) першим виступатиме спортсмен із Франції?

1046*. У коробці лежить 15 різних кульок, серед яких 7 синіх і 8 жовтих. Яка ймовірність виїняти з коробки:

- 1) одну синю кульку; 2) або синю, або жовту кульку;
- 3) чорну кульку?

1047*. Туристична фірма запропонувала дітям відвідати один із шести музеїв або один із трьох замків. Яка ймовірність того, що діти відвідують:

- 1) один музей; 2) або музей, або замок; 3) парк?

1048*. Гральний кубик кидають один раз. Підрахуйте ймовірність події:

- E**
- 1) «випадає 3 очки»;
 - 2) «випадає 5 очок»;
 - 3) «випадає парне число очок»;
 - 4) «випадає число очок, що менше за 3».

qr.orioncentr.com.ua/YtMbC



1049*. Монету підкидають два рази. Яка ймовірність того, що: 1) «герб» випаде два рази; 2) «цифра» випаде хоча б один раз?

1050*. У скриньку помістили картки, занумеровані двоцифровими числами, причому використали всі двоцифрові числа. Яка ймовірність того, що на навімання обраній картці написано:

- 1) парне число;
- 2) число, менше від десяти;
- 3) число, що ділиться на 10;
- 4) число, що складається з однакових цифр?

1051*. У скриньку помістили кульки, що занумеровані двоцифровими числами, причому використали всі двоцифрові числа. Яка ймовірність того, що на навмання витягнутій кульці написано:

- 1) непарне число; 2) число, більше 20 і менше від 45;
- 3) число, що є квадратом іншого цілого числа?

1052. Із п'яти предметів — історія, фізика, алгебра, географія і фізкультура — навмання склали розклад. Яка ймовірність того, що:

- 1) першим уроком буде фізика;
- 2) останнім уроком буде фізкультура;
- 3) першим уроком буде алгебра, а другим — географія?

1053. Із цифр 4, 6, 5 випадковим чином утворили трицифрове число з різними цифрами. Яка ймовірність того, що воно є:

- 1) непарним;
- 2) числом, у якого перша цифра 4;
- 3) числом, більшим за 600;
- 4) числом, що ділиться на 3?

1054. Із цифр 1, 2, 5 випадковим чином утворили трицифрове число з різними цифрами. Яка ймовірність того, що воно є:

- 1) парним;
- 2) числом, що ділиться на 5;
- 3) числом, меншим за 100;
- 4) числом, у якого друга цифра 2?

1055. Із цифр 4, 7, 0 випадковим чином утворили трицифрове число. Цифри в числі можуть повторюватись. Яка ймовірність того, що воно є:

- 1) непарним;
- 2) числом, що ділиться на 10;
- 3) числом, більшим за 500?

1056. Із цифр 3, 8, 0 випадковим чином утворили трицифрове число. Цифри в числі можуть повторюватись. Яка ймовірність того, що воно є:

- 1) парним;
- 2) числом, що ділиться на 5;
- 3) числом, меншим за 400?

1057. У класі навчається 28 учнів. Ймовірність того, що навмання обраний учень виявиться хлопцем, дорівнює $\frac{3}{4}$. Скільки дівчат у цьому класі?

1058. У коробці 30 цукерок з білого і чорного шоколаду. Ймовірність витягнути навмання цукерку з чорного шоколаду дорівнює 0,6. Скільки цукерок з білого шоколаду в цій коробці?

1059. У випадковому експерименті монету кидають тричі. Знайдіть ймовірність того, що:

- 1) «герб» випаде лише один раз;
- 2) «цифра» випаде хоча б один раз.

1060. У випадковому експерименті гральний кубик підкидають двічі. Знайдіть ймовірність того, що:

- 1) на обох кубиках випаде однакова кількість очок;
- 2) сума очок на кубиках дорівнює 3.

1061. Для участі в конференції випадковим чином вибирають одного учня з 8-А класу і одного учня з 8-Б класу. Яка ймовірність того, що на конференцію підуть старости цих класів, якщо у 8-А класі навчається 25 учнів, а у 8-Б класі — 30 учнів?

1062. До школи мама підготувала Андрійкові 5 різних сорочок і 3 пари штанів. Яка ймовірність того, що, поспішаючи вранці, Андрій одягне свої улюблені сорочку і штани?

1063*. У квадратне рівняння $x^2 + bx + 9 = 0$ випадковим чином підставляють замість коефіцієнта b натуральні числа від 1 до 10. Яка ймовірність того, що отримане квадратне рівняння:

- 1) має один корінь; 3) не має коренів;
- 2) має два корені; 4) має хоча б один від'ємний корінь?

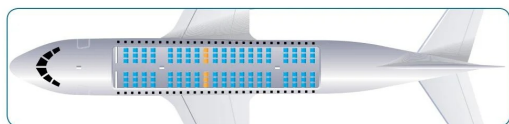
qr.orioncentr.com.ua/0xRq0



- 1064***. На залік з геометрії Максим вивчив 14 із 16 запитань. Яка ймовірність того, що він успішно складе залік, якщо білет складається з двох питань?

Проявіть компетентність

- 1065.** (НМТ — 2024). Місця в літаку розташовані у 20 рядів, у кожному ряду є по 3 місця, розділені проходом, ліворуч і праворуч від проходу (мал. 62). Комп'ютерна програма випадковим чином обирає місце для пасажирів. Визначте ймовірність того, що пасажирів дістанеться місце в першому або останньому ряду.



Мал. 62

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 5

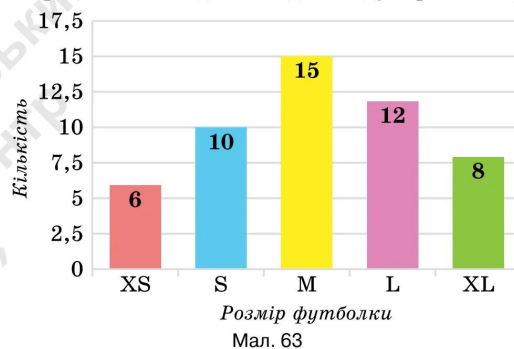
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як знайти відсоток числа?
2. Як знайти число за його відсотком?
3. Як знайти зміну величини у відсотках?
4. Як знайти відсотковий вміст речовини в розчині?
5. Що називають варіаційним рядом?
6. Як знайти середнє значення вибірки?
7. Як знайти моду вибірки?
8. Які є способи подання даних?
9. Поясніть, які задачі називають комбінаторними.
10. Сформулюйте правило додавання для комбінаторних задач.
11. Сформулюйте правило множення для комбінаторних задач.
12. Що таке подія?
13. Яку подію називають достовірною? А неможливою?
14. Які події називають несумісними? А рівноможливими?
15. Що таке ймовірність події? Як її знайти?
16. Яких значень може набувати ймовірність події?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тесту потрібно 10–15 хв.

- 1*. У класі навчається 15 дівчат і 12 хлопців. На скільки відсотків дівчат більше, ніж хлопців?
А. На 10 %. Б. На 15 %. В. На 20 %. Г. На 25 %.
- 2*. На діаграмі (мал. 63) відображено інформацію про кількість придбаних футболок різного розміру для спортивної команди. Знайдіть моду отриманих даних.



- А. 15. Б. 12. В. 10. Г. 8.
- 3*. Трикутник, квадрат і круг зафарбували випадковим чином в один із кольорів веселки, причому різні фігури зафарбували в різні кольори. Яка ймовірність того, що круг буде зеленого кольору?
А. $\frac{1}{3}$. Б. $\frac{1}{7}$. В. $\frac{3}{7}$. Г. $\frac{1}{210}$.
 4. Скільки двоцифрових чисел, більших за 50, можна скласти із цифр 2, 4, 5, 8, якщо всі цифри в записі числа — різні?
А. 8. Б. 6. В. 3. Г. 2.
 - 5*. До сплаву масою 600 г додали 40 г міді, після чого відсотковий вміст міді у сплаві збільшився на 5 %. Скільки грамів міді містив початковий сплав?
А. 60 г. Б. 100 г. В. 120 г. Г. 160 г.



ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Розділ 2. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

qr.orioncentr.com.ua/RXj5s



qr.orioncentr.com.ua/BmYvA



qr.orioncentr.com.ua/IOLxP

1. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:



1) $\frac{2x-1}{2x^2+1}$;

2) $\frac{3y-2}{4y^2+12y}$;

3) $\frac{5a+3}{a^2+3a+2}$;

4) $(3x-2y):4(x+1)(2y-1)^2$; 6) $\frac{5(x+1)yz^2}{2x^3(3-2y)(5z-13)^2}$.

qr.orioncentr.com.ua/a69C4



2. За яких значень змінної x не має змісту вираз:



1) $\frac{2x-1}{2x+1}$;

2) $\frac{3x-1}{3x^2+12x}$;

3) $\frac{x+1}{x^3-1}$?

3. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2}{x^2-2x}$; 2) $\frac{x^4-x^2}{x^4+x^3}$; 3) $\frac{16-a^2}{4a+a^2}$; 4) $\frac{a^3-27b^3}{a^2+3b+9b^2}$.

4. Скоротіть дріб:



1) $\frac{x^2-1}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+4x+4}{2x+4}$; 3) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; 4) $\frac{x^2-3x-4}{1-x^2}$.

5. Зведіть до найменшого спільного знаменника дробі:

1) $\frac{1}{x-3}$, $\frac{1}{3x-9}$, $\frac{1}{18-6x}$; 3) $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x^2-4}$, $\frac{1}{x-2}$;

2) $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+x}$, $\frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{1}{x^2+x+1}$, $\frac{1}{x^3-1}$, $\frac{1}{x^2-2x+1}$.

6. Спростіть вираз:



1) $\frac{x^2+3x}{x^2-9} - \frac{x}{x+3}$;

2) $\frac{x}{x-4} - \frac{4x+x^2}{x^2-16}$.

7. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3}\right) : \frac{24}{9-x^2}$;

2) $\left(\frac{5-x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5}\right) : \frac{20}{25x-x^3}$.

8. Виконайте дії:



1) $\frac{1}{4x-x^2} + \left(\frac{1}{x^2-4x} + \frac{2}{16-x^2} + \frac{1}{16+4x}\right) \cdot \left(\frac{x+4}{x-4}\right)^2$;

2) $\frac{3y^2}{x^4-xy^3} + \frac{y}{x^3+x^2y+xy^2} - \frac{1}{x^2-xy}$.

9. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a}{b}$; 2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \cdot \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

10. Визначте значення x із рівняння:

1) $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2-xy} = 17$, якщо $y = -1$;

2) $\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 2$, якщо $y = \sqrt{14}$.

11. Знайдіть значення виразу $\frac{a^2-b^2}{2ab}$, якщо $\frac{2a^2+b^2}{ab} = -\frac{9}{2}$ і числа a і b мають різні знаки.

12. Вкладник поклав у банк на депозитний рахунок p тис. грн під r % річних із поквартальною капіталізацією відсотків. Складіть вираз, за яким вкладник визначає, скільки коштів буде в нього на рахунку через: 1) 1 рік; 2) 3 роки; 3) n років.

13. Запишіть у вигляді добутку степенів:

000

1) $\frac{2}{xy}$; 2) $\frac{n}{pm^3}$; 3) $\frac{b^3d^3}{a^2c^2}$; 4) $\frac{5b}{a^4c^5}$; 5) $\frac{t}{xyz}$.

14. Обчисліть:

1) $\frac{2^{-4}}{5}$; 2) $0,98^{0,5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 3) $\frac{5^{-2}}{5^{-8} \cdot 5^5}$; 4) $\frac{4^{-10} \cdot 4^{12} \cdot 4^{-1}}{4^0 \cdot 4^{-2}}$.

15. Спростіть вираз:



- 1) $a^{-10} : a^{-6} \cdot a^{-5}$;
- 2) $a^{-10} : a^6 \cdot a^{-5}$;
- 3) $a^{-10} : a^{-6} : a^{-5}$;
- 4) $a^{-10} \cdot a^{-6} \cdot a^{-5}$;
- 5) $a^0 : a^{-8} \cdot a^{-12}$;
- 6) $a^0 : (a^{-8} \cdot a^{-12})$;
- 7) $(a^{-4})^{-3} : (a^3)^4$;
- 8) $(a^{-4})^{-3} \cdot (a^3)^4$;

qr.orioncentr.com.ua/uVmlG

16. Запишіть у вигляді степеня з основою 3:



- 1) $9^{-5} \cdot 3^7$;
- 2) $27^2 \cdot 9^{-7}$;
- 3) $(9^{-2})^3 \cdot (27^4)^{-1}$;
- 4) $(81^2)^{-9} \cdot (9^{-2})^{-3}$;
- 5) $27^{-20} : (9^{-10})^3$;
- 6) $81^{-5} : 3^{20}$;

17. Запишіть як степінь:



- 1) $2^{-3} \cdot 3^{-3}$;
- 2) $10^{-2} \cdot 5^{-2}$;
- 3) $35^{-3} : 7^{-3}$;
- 4) $132^{-1} : 11^{-1}$;

18. Запишіть у стандартному вигляді число:

- 1) 90;
- 2) 112;
- 3) 3003;
- 4) 0,07;
- 5) 0,75;
- 6) 142,01;
- 7) $50 \cdot 10^2$;
- 8) $34 \cdot 10^{-3}$;
- 9) $524 \cdot 10^3$;
- 10) $65,8 \cdot 10^5$;

19. Чи належить графіку функції $y = \frac{4}{x}$ точка:

- 1) A (1; -4);
- 2) B (2; 2);
- 3) C (0; 4);
- 4) M (0,1; 40)?

20. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

- 1) A (-2; 4);
- 2) B (5; 0,2);
- 3) C (-0,1; 6);
- 4) D $(\frac{1}{4}; 2,8)$.

Розділ 3. КВАДРАТНІ КОРЕНІ.
ДІЙСНІ ЧИСЛАqr.orioncentr.com.ua/xQGqj21. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

- 1) A (1; -1);
- 2) B (2; 4);
- 3) C (-0,1; 0,01);
- 4) D (3; 6);
- 5) M (0,5; 0,25);
- 6) N (-1; -1)?

22. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій: 1) $y = x^2$ і $y = 9$; 2) $y = -\frac{1}{x}$ і $y = x^2$.

Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину.

23. Оберіть серед чисел $-\frac{4}{2}$, -1 , (3), 0, $\sqrt{\frac{16}{25}}$, $\sqrt{0,01}$, -100 ,

- 1) натуральні;
- 2) цілі;
- 3) раціональні;
- 4) ірраціональні;
- 5) дійсні.

24. Порівняйте числа:

- 1) $\frac{1}{3}$ і 0,34;
- 2) $1\frac{2}{5}$ і $\sqrt{2}$;
- 3) 8,344 і 8,(34);
- 4) $\sqrt{3}$ і 1,5.

25. Запишіть у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу число:



- 1) $\frac{5}{6}$;
- 2) $\frac{7}{9}$;
- 3) $\frac{3}{10}$;
- 4) $\frac{2}{3}$.

26. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:



- 1) 25 см²;
- 2) 225 см²;
- 3) 1,44 м²;
- 4) 0,09 м²;
- 5) $1\frac{7}{9}$ см².

27. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot (-\sqrt{10})^2$;
- 2) $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{20}}$;
- 3) $(-\sqrt{3})^2 + \sqrt{(-3)^2}$;
- 4) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{2,64}$.

28. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $8\sqrt{2}$;
- 2) $0,1\sqrt{2}$;
- 3) $0,5\sqrt{3}$;
- 4) $4\sqrt{x}$;
- 5) $x\sqrt{x^4}$, якщо x — від'ємне;
- 6) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо x — додатне.

29. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{0,4}$;
- 2) $\sqrt{2,5}$;
- 3) $\sqrt{a^8}$;
- 4) $\sqrt{0,01y^4}$;
- 5) $\sqrt{x^2y^2}$, якщо x — від'ємне, y — додатне;
- 6) $\sqrt{yx^3}$, якщо x — додатне.

30. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 = 81$;
- 2) $4x^2 = 36$;
- 3) $x^2 - 21 = 0$;
- 4) $x^2 + 17 = 0$;
- 5) $(x - 0,5)^2 = 1$;
- 6) $(x - 8,1)^2 + 81 = 0$.

31. Розв'яжіть рівняння:



- 1) $\sqrt{x} = 6$;
- 2) $\sqrt{x} = 12$;
- 3) $\sqrt{x-1} + 11 = 0$;
- 4) $\sqrt{x-5} = 6$.

32. Спростіть вираз:

- 1) $10\sqrt{5} + 20\sqrt{5} - 25\sqrt{5}$;
 2) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$;
 3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$.

33. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{27}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;
 2) $\frac{\sqrt{28} + 2}{\sqrt{7} + 1}$; 4) $\frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 2} - \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2}$.

34. Спростіть вираз:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} - \frac{4\sqrt{a}}{a - 4}\right) : \frac{a + 4}{\sqrt{a} + 2}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot (x - 1)$;
 3) $\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \frac{x - 4}{3\sqrt{x} - 3} - \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$.

35. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $\frac{1}{2 - \sqrt{2}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{6}}$.

Розділ 4.

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

qr.orioncentr.com.ua/ZWpX5

36. Розв'яжіть квадратне рівняння:

- 1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 3) $x^2 - 6x + 9 = 0$;
 2) $x^2 - 6x - 7 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

37. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $10x = 3x^2 + 3$; 3) $9x^2 + 4 = 12x$;
 2) $9y + 2 = 5y^2$; 4) $4y^2 = 20y - 25$.



38. Розв'яжіть квадратне рівняння за теоремою Вієта:

- 1) $x^2 + 14x - 15 = 0$; 3) $x^2 - 6x - 40 = 0$;
 2) $x^2 - 9x - 10 = 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

39. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

- 1) $3i - 2$; 2) $-4i + 1$; 3) $3i + \frac{1}{3}$; 4) $-2i + 0$.

40. Один із коренів рівняння $x^2 + px - 63 = 0$ дорівнює 3. Знайдіть інший його корінь і коефіцієнт p .41. Один із коренів рівняння $6x^2 + x + q = 0$ дорівнює $\frac{1}{2}$.Знайдіть інший його корінь і коефіцієнт q .

42. Розкладіть квадратний тричлен на лінійні множники:

- 1) $x^2 - 7x + 12$; 3) $3x^2 + 5x + 2$;
 2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $-6x^2 + 17x - 5$.

43. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{x + 1}{3x^2 + 5x + 2}$; 3) $\frac{6x^2 - 17x + 5}{3x - 1}$;
 2) $\frac{x^2 - 11x - 26}{x^2 - 4}$; 4) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}$.

44. Знайдіть значення дробу:



- 1) $\frac{7x^2 - 6x - 1}{7x + 1}$, якщо $x = -28$;
 2) $\frac{6x^2 - 11x - 2}{1 + 6x}$, якщо $x = -0,5$.

45. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$; 2) $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1}$.

46. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5x(x - 4) + 1 = x^2 - 16x$; 3) $2x(x - 2) = x^2 + 2(x - 4)$;
 2) $(y - 1)(y + 3) = y + 3$; 4) $(x + 4)(x - 2) + 4 = x$.

47. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3 - \frac{14}{x} = \frac{2}{x - 5}$; 3) $\frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x} = \frac{3}{20}$;
 2) $\frac{10}{x - 3} - 1 = \frac{8}{x}$; 4) $-\frac{1}{x - 3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$.

48. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; 3) $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$;
 2) $x^4 + x^2 - 2 = 0$; 4) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

49. Розв'яжіть рівняння:



- 1) $(x^2 - 9)^2 - 8(x^2 - 9) + 7 = 0$;
 2) $(x^2 - 3)^2 + 5(x^2 - 3) - 6 = 0$.

50. Добуток двох чисел дорівнює 90. Знайдіть ці числа, якщо:
1) одне із них на 9 більше за інше;
2) одне із них у 10 разів менше від іншого.
51. Знайдіть два послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 380.
52. Із Хмельницького до Івано-Франківська одночасно виїхали автобус і автомобіль. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса, тому він прибув до пункту *B* на 1 год раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між Хмельницьким та Івано-Франківськом становить 240 км.
53. Відстань від Кропивницького до Житомира, завдовжки 400 км, пасажирський потяг проїхав за годину швидше, ніж товарний. Знайдіть швидкість руху кожного потяга, якщо пасажирський за годину проїжджає на 20 км більше.
54. Катер проплив 24 км за течією річки й повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 20 хв. Знайдіть швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.
55. Довжина ділянки землі прямокутної форми в 6 разів більша за її ширину, а її площа дорівнює 384 м². Знайдіть розміри земельної ділянки.
56. Довжина ділянки землі прямокутної форми в 5 разів більша за її ширину. Коли ширину ділянки збільшили на 9 м, її площа збільшилась у 4 рази. Знайдіть початкові розміри земельної ділянки.

Розділ 5. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

qr.orioncentr.com.ua/irCF1



57. Спортивний костюм коштує 1200 грн. Скільки гривень буде коштувати костюм після знижки на 12,5 %?
58. 250 г сиропу містить 15 % цукру. Скільки грамів води потрібно додати до цього сиропу, щоб отриманий сироп містив 10 % цукру?

59. Бак було наповнено дощовою водою на 75 %. Витратили 40 % води. Який відсоток баку ще заповнено водою?
60. Сливи під час сушіння втрачають 75 % своєї маси. Сушені сливи містять 16 % води. Скільки відсотків води містять свіжі сливи?
61. На скількох змаганнях зі стрибків у довжину серед хлопців були зафіксовані результати: 178 см, 182 см, 170 см, 168 см, 150 см, 175 см, 185 см, 182 см, 168 см, 158 см. Знайдіть середнє значення та моду отриманих даних.

qr.orioncentr.com.ua/d5gqo



62. Середнє арифметичне вибірки із 6 елементів дорівнює 18,5. Після видалення із цієї вибірки одного числа середнє арифметичне нової вибірки стало дорівнювати 14. Знайдіть видалене число.
63. Після уроку з теми «Стохастика» на дошці залишилась таблиця (табл. 1) і відповідь: «Середнє значення дорівнює 10».

Таблиця 1

Елемент	4	7	
Частота	5	2	3

1. Відновіть запис у таблиці.
2. Знайдіть моду отриманих даних.

64. Результати дослідження зашифрували в частотну таблицю (табл. 2).

Таблиця 2

Елемент	0	1	3	5	6
Частота	8	2x	3x - 1	6	x + 5

Знайдіть x , якщо середнє арифметичне вибірки дорівнює 3.

65. У таблиці 3 наведені дані про середню температуру повітря в Києві за дослідженнями <https://pogoda33.ua/>. За цими даними складіть стовпчасті діаграми. Обчисліть середню температуру повітря в Києві за рік і моди отриманих даних.

Таблиця 3

Середня температура повітря в Києві, °C

	Січ	Лют	Бер	Кві	Тра	Чер	Лип	Сер	Вер	Жов	Лис	Гру
Зима	-1	0	6	14	21	24	26	25	19	13	5	0
Літо	-6	-6	-1	5	11	14	16	15	10	5	0	-5
Золота	-4	-3	2	9	16	19	21	20	14	8	2	-2

66. Із цифр 1, 5, 7, 8 склали всі можливі чотирицифрові числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, які:

- 1) починаються цифрою 1;
- 2) парних;
- 3) починаються з 51;
- 4) не починаються цифрою 7?

67. У новому шестиповерховому офісному центрі потрібно розмістити шість фірм. Кожна фірма займає цілий поверх. Скількома способами можна розмістити офіси цих фірм?

68. Скількома способами шістьох гравців волейбольної команди можна розставити на ігровому майданчику? Скількома способами можна розставити гравців, якщо капітан став на подачу м'яча?

69. Визначте, якими є події: випадковими, неможливими чи достовірними:

- 1) у результаті підкидання грального кубика випаде кількість очок, більша за 6;
- 2) завтра буде сніг;
- 3) з коробки, у якій є 10 білих і чорних кульок, вийняли білу кульку;
- 4) мій найкращий друг народився 31 квітня;
- 5) серед натуральних чисел нарахували дев'ять одноцифрових чисел.

70. Аня, Микола й Тетяна розв'язують рівняння на дошці. Яка ймовірність того, що Микола відповідатиме останнім?



ПРОЄКТ. ГІПЕРБОЛА В АРХІТЕКТУРІ

Ситуація 1. Туристична агенція організовує подорожі до країн світу. Для популяризації нового туристичного об'єкта необхідно створити рекламний туристичний буклет.

Роль. Ви працівник туристичної агенції, і одне з ваших завдань — розробити рекламу для туристів.

Продукт: туристичний буклет (презентація, відео тощо).

Виконання проєкту

Крок 1. Об'єднайтеся в групи. Розшифруйте назви країн, у яких розміщені туристичні об'єкти.

1. Розташуйте результати дій у порядку збільшення:

1) спростіть вираз:

$$\frac{(x-3)(x-7)}{12} - \frac{(x-7)(x-1)}{8} + \frac{(x-1)(x-3)}{24} - K;$$

2) спростіть вираз: $\frac{3y+4}{5y-10} - \frac{y+4}{3y-6} - E;$

3) спростіть вираз: $2\left(\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}\right)^3 : \left(\frac{x-5}{x+5}\right)^3 - C;$

4) обчисліть: $\frac{4^{-6} \cdot (-16)^{-3}}{64^{-5}} - M;$

5) знайдіть значення виразу $\left(\frac{5a^{-2}}{6b^{-1}}\right)^{-2} \cdot a^{-3}b^4$, якщо $a = 0,1$

і $b = 5 - K;$

6) знайдіть, за якого значення a графік функції $y = \frac{ax}{x-5}$ проходить через точку $A(-1; 0,5)$... — **И;**

7) укажіть число, яке не входить до ОДЗ змінної виразу $\frac{20+10a+a^2}{a^3-125} \dots - A.$

2. Розпочніть виконувати завдання з першого номера. Правильна відповідь укаже номер наступного завдання. Розташуйте відповідні літери в порядку виконаних завдань.

- 1) розв'яжіть рівняння: $\frac{5-x}{2x} = \frac{3}{4}$ — **Б**;
- 2) розв'яжіть рівняння: $\frac{7}{x^2} - 3 + 5x = \frac{x-3x^2}{x^2} + 5x$ — **Р**;
- 3) укажіть число, яке не належить області значень функції $y = \frac{4x-11}{x+3}$ — **З**;
- 4) знайдіть значення виразу $\frac{x^2-121}{x+11}$, якщо $x = 17$ — **И**;
- 5) визначте абсцису точки $A(x; 5)$, якщо через цю точку проходить графік функції $y = \frac{3x-1}{13-x}$ — **І**;
- 6) визначте ординату точки перетину графіка функції $y = \frac{2x}{x-4} + 5$ з віссю OY — **Л**;
- 7) розв'яжіть рівняння $\frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1} = \frac{-36}{1-9x^2}$ — **А**;
- 8) визначте, скільки точок перетину мають графіки функцій $xy = 1$ і $y = \frac{-5}{x}$ — **Я**.

Крок 2. Ознайомтеся із зображеною архітектурною спорудою.

Об'єкт 1.

На знімку зображений Кафедральний собор пресвятої Діви Марії Апаресідської (Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida). Це одна з найвідоміших сучасних церков у світі і головний католицький храм столиці Бразилії, міста Бразилія.

Об'єкт 2.

На фото зображено Музей Сумая (Museo Soumaya). Цей музей розташований у місті Мехіко, Мексика.

Крок 3. Виконайте завдання.

За допомогою сервісу Geogebra знайдіть математичну і комп'ютерну модель для абрису (зовнішнього контуру) будівлі.



- 1) відкрийте сервіс Geogebra (графічний калькулятор);
- 2) скопіюйте картинку і вставте її у Geogebra (скористайтесь клавішами Ctrl+C(V));
- 3) використовуючи інструмент Переміщення, рухайте точки A і B так, щоб рисунок розмістився в необхідному положенні і абрис малюнка потрапив у I і III або II і IV координатні чверті;

4) задайте функцію $f(x) = \frac{k}{x} + b$;

5) рухаючи повзунки (слайдери) та змінюючи за потреби малюнок (зменшуючи/збільшуючи або повертаючи), доберіть значення параметрів k і b так, щоб гіпербола максимально наближалася до абриса споруди.

Крок 4. Опишіть властивості отриманої вами функції

$f(x) = \frac{k}{x} + b$ за поданим планом:

- 1) назвіть коефіцієнти k і b ;
- 2) назвіть область визначення і область значень функції;
- 3) знайдіть значення аргументу, за яких значення функції додатні; від'ємні;
- 4) знайдіть значення аргументу, за яких функція зростає; спадає;
- 5) скориставшись графіком, знайдіть: а) значення y , якщо $x = -1; 2; -5; 10$; б) значення x , якщо $y = 10; 5; -2$.

Крок 5. Підготовка туристичного буклету.

Математична складова. Зробіть фото зображення екрана сервісу Geogebra із побудованою гіперболою.

Історична складова. Знайдіть відомості про: початок і кінець будівництва, символіку будівлі, місце її розташування, історичні відомості про місце розташування, цікаві факти з історії будівництва.

Архітектурна складова. Знайдіть відомості про: стиль архітектурної споруди, матеріали, використані у будівлі, труднощі у будівництві, архітектурні особливості споруди.

Крок 6. Оформіть туристичний буклет у вигляді презентації, постера або відео. Презентуйте свій продукт.



ВІДПОВІДІ

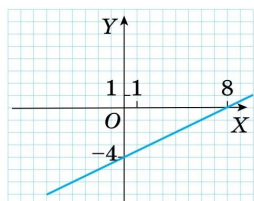
РОЗДІЛ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВІВЧЕНОГО В 7 КЛАСІ

Вирази. Тотожності. Одночлени і многочлени

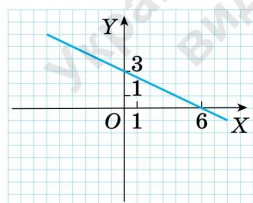
1. 1) 55,2; 2) 6,51; 3) 34,2; 4) 8; 5) 154; 6) $146\frac{2}{3}$. 2. 1) -470; 2) -640; 3) 18,5; 4) -25. 3. Павло Тичина. 4. 1) $0,8x^{15}y^3z$; 2) $-12x^{12}y^{29}$. 5. 1) $x^2 + 6x - 16$; 2) $x^2 + 31x + 25$; 3) $-0,5y^2 - 2y - 2$; 4) $0,2a^3 - 0,5a$. 6. 1) $3(a - b)(a + b)$; 2) $x(3x - 1)(3x + 1)$; 3) $y^2(y^2 - 1)(y^2 + 1)$; 4) $2z(2z - 1)(2z + 1)$; 5) $(n + 5)^2$; 6) $(2m - 7)^2$; 7) $(0,9x - 0,5)^2$; 8) $5y(2x - 3)^2$; 9) $(a + b)(a - b + 1)$; 10) $(-3z - 2)(5z - 2)$; 11) $(c + 5) \times (c^2 - 5c + 25)$; 12) $(3a - 2)(9a^2 + 6a + 4)$. 8. 1) $2\frac{73}{77}x$; 2) $3\frac{17}{70}a$; 3) $2,8375b$. 9. $a - 1,5$; $(a - 1,5)^2$. 10. $P = 4a - 6$; $S = a^2 - 3a$. 11. 58 і 54. 12. 20.

Функції

13. $y = 15 + 5x$. 14. $y = 10 + 20x$. 16. 1) так; 2) ні; 3) так; 4) так. 19. 1) 6; 2) 3; 3) 8; 4) 2. 20. (0; -4); (8; 0), прямокутний трикутник. Графік зображено на малюнку 1. 21. (0; 3); (6; 0), прямокутний трикутник. Графік зображено на малюнку 2.



Мал. 1



Мал. 2

22. 1) 2; 2) -5; 3) 0,2. 23. $a = -0,6$. 24. $b = -2$; $a = 5$.

Лінійні рівняння та їх системи

25. 1) 6; 2) будь-яке число; 3) коренів немає; 4) 15. 26. 1) так; 2) так; 3) так. 27. 1) (1; 1); 2) (-1; 2); 3) безліч розв'язків; 4) розв'язків немає. 28. 1) (2; 1); 2) (1; -2); 3) (2; -2); 4) (-4; 2).

Відповіді

29. 10 пакетів по 500 г і 40 пакетів по 250 г. 30. 54 дрони, 45 дронів і 26 дронів. 32. 500 тис. грн і 450 тис. грн. 33. 20 років і 25 років. 34. 15 км/год, 5 км/год. 35. 19 км/год і 3 км/год. 36. 25 м і 20 м.

Елементи стохастички

37. 1) 25 учнів; 2) 9 учнів; 3) 700 %. 38. 1) 50 км; 2) 18,5 км; 3) $\approx 27\%$. 39. 0,3 л. 40. 125 г. 41. 162,4 см. 42. 2,5. 43. 6. 44. 1) 6; 2) 27. 45. 1) 6; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0. 46. 1) 6; 2) $\frac{1}{3}$. 48. 2) на 10 %.

РОЗДІЛ 2. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Раціональні вирази. Види раціональних виразів

55. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) ні. 56. 3) Так. 57. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) ні; 6) так. 58. 1) $x \neq 2$; 2) $c \neq 3$; 3) $b \neq 1$; 4) $y \neq -5$; 5) b — будь-яке число. 59. 1) $x \neq -1$; 2) $a \neq 2$; 3) $c \neq -1$; 4) $y \neq -7$; 5) a — будь-яке число. 60. 1) 2; 3) 4; 4) -4; 5) 6; 6) 10. 61. 1) 3; 2) 3; 3) 9; 4) 6; 5) 15. 63. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 66. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 67. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 68. 1) $a \neq 0$, $c \neq 0$; 3) $x \neq 0$, $y \neq 0$; 4) $a \neq 1$, $c \neq -1$; 5) $x \neq 3$, $y \neq 4$; 6) $a \neq -1$, $c \neq 0$; 9) $b \neq 0,25$, $c \neq 0,25$; 10) $d \neq 1\frac{1}{3}$; $c \neq 1\frac{2}{3}$. 69. 1) $a \neq -2$ і $a \neq 2$; 2) $b \neq -3$ і $b \neq 3$; 3) $x \neq -4$ і $x \neq 4$; 4) $a \neq 1$; 5) $b \neq 3$; 6) x — будь-яке число. 70. 1) $b \neq 0$, $c \neq 0$; 2) $a \neq 2$, $b \neq 0$; 3) $x \neq 2\frac{2}{3}$; $x \neq -3$; y — будь-яке число; 4) $y \neq 4$. 71. 1) 0; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1,2. 72. 1) 0; 2) не можна визначити; 3) $-\frac{3}{7}$; 4) -0,6; 5) 1,8. 73. 1) Не можна визначити; 2) 5; 3) $-\frac{5}{48}$; 4) -0,625. 74. 1) 0; 2) не можна визначити; 3) -15; 4) $-3\frac{1}{3}$. 75. 1) 2,8 год; 2) 2 год 40 хв; 3) 2 год 30 хв. 76. 1) 2,25 см; 2) $2\frac{1}{12}$ см; 3) $2\frac{1}{80}$ см. 77. $(10 + x) : y$; 1) $\frac{13}{35}$; 2) $\frac{17}{40}$. 78. 1) 1,6; 2) 6,2; 3) $\frac{32}{75}$. 79. 1) 5; 2) $-3\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{5}{12}$. 81. 2) $n \neq 3$ і $n \neq -3$; 3) $n \neq -0,5$ і $n \neq 0,5$; 5) $n \neq -6$ і $n \neq 0$. 82. 1) $\frac{5}{9}$; 2) 0,4; 3) 1,3. 83. 1) $x \neq 2$ і $x \neq 4$; 2) $x \neq 9$ і $x \neq 12$.

§ 2. Раціональний дріб.

Основна властивість раціонального дробу

89. 1) $\frac{x^2 y^3}{4xy^4}$; 3) $\frac{2x^2 y^2}{8xy^3}$; 5) $\frac{2x}{8y}$. 90. 1) $\frac{2x^3 y^4}{8x^2 y^3}$; 3) $\frac{x^3 y^3}{4x^2 y^2}$.
91. Ні. $\frac{xy}{5}$. 92. 1) Так, $\frac{1}{2x}$; 2) так, $3y^2$; 3) ні; 4) так, $\frac{16a^3}{5}$; 5) ні.
93. 1) $\frac{2x}{y}$; 3) $\frac{16a}{3b}$; 5) $\frac{7x}{3y}$. 94. 1) $6x^2 y^2$; 3) $\frac{3ab^2}{2c^2}$; 5) $\frac{3xy^2}{a}$. 95. 1) $\frac{3x}{a}$;
- 3) $\frac{5a^2}{6}$. 96. 1) $\frac{x-y}{2x}$; 3) $\frac{x-2y}{2y}$; 5) $\frac{x+y}{3y}$; 7) $2x+3y$; 9) $\frac{x-y}{2a}$. 97. 1) 3;
- 3) 1,5; 5) -3; 7) $-\frac{a}{b}$; 8) $-\frac{2a}{3b}$. 98. 1) $\frac{3x-12y}{2x}$; 3) $\frac{x-y}{2c}$; 5) $\frac{11}{a}$.
99. 1) $\frac{3x}{x-1}$; 3) $\frac{a-2}{4a}$; 5) $\frac{y^2-1}{3y^2}$. 100. 1) $7x$; 3) $3a$; 5) $-\frac{1}{y}$. 101. 1) $\frac{4b}{1-b^2}$;
- 3) $4x$. 102. 1) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{a-3b}{2}$; 5) $\frac{a(a+5b)}{b}$. 103. 1) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{a(a-4b)}{b(a+4b)}$.
104. 1) $\frac{x-y}{xy}$; 3) $\frac{5-a}{b}$. 105. 1) $\frac{x^2+x+1}{x^2}$; 3) $\frac{a}{b(a+b)}$. 106. 1) $\frac{a+b+c}{a-b+c}$;
- 3) $\frac{x+z}{y-x+z}$. 107. 1) $\frac{x-y}{x}$; 2) $\frac{a-3}{a-b}$. 110. 1) 5; 2) x — будь-яке число,
- крім -11 і 11; 3) x — будь-яке число, крім $\frac{1}{6}$. 111. 1) $\frac{x-1}{x-3}$;
- 3) $x^4 - x^2 + 1$. 112. 1) $y = \begin{cases} x, x > 0, \\ -x, x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2-x, x \geq 0, \\ 2+x, x < 0; \end{cases}$
- 3) $y = \begin{cases} 3-x, x < 3, \\ x-3, x > 3. \end{cases}$ 113. $\frac{x-20}{x-30}$; 1) в $1\frac{1}{7}$ разів.

§ 3. Зведення раціональних дробів до спільного знаменника

115. 1) $\frac{3}{3x}$; 3) $\frac{x}{x^2}$; 5) $\frac{5x^2}{5x^3}$. 116. 1) $\frac{2}{4a}$; 3) $\frac{a}{2a^2}$; 5) $\frac{5a^2}{10a^3}$.
117. 1) $\frac{3}{9b}$; 3) $\frac{b}{3b^2}$; 5) $\frac{5b^2}{15b^3}$. 118. 1) $\frac{2}{2ab}$; $\frac{a}{a^2b}$; $\frac{b}{ab^2}$; $\frac{3a^2}{3a^3b}$; $\frac{-2ab}{-2a^2b^2}$;
- $\frac{3c}{3abc}$. 119. 1) $\frac{2}{2(a+b)}$; $\frac{a+b}{(a+b)^2}$; $\frac{3a}{3a(a+b)}$; $\frac{a-b}{a^2-b^2}$. 120. 1) $\frac{4}{4xy}$;
- 3) $\frac{y}{xy^2}$; 5) $\frac{6z}{6xyz}$. 121. 1) $\frac{7}{56}$ і $\frac{8}{56}$; 3) $\frac{3}{6x}$ і $\frac{1}{6x}$. 122. 1) $\frac{c}{abc}$ і $\frac{b}{abc}$;

- 3) $\frac{x}{x^3 y}$ і $\frac{1}{x^3 y}$; 5) $\frac{12}{15b^2}$ і $\frac{3b}{15b^2}$. 123. 1) $\frac{5}{5b}$ і $\frac{1}{5b}$; 2) $\frac{3}{9a}$ і $\frac{1}{9a}$; 3) $\frac{6c}{4abc}$
- і $\frac{b}{4abc}$. 124. 1) $\frac{2}{2a+2}$ і $\frac{1}{2a+2}$; 3) $\frac{4}{4-4x}$ і $\frac{1}{4-4x}$. 125. 1) $\frac{2}{a-1}$ і
- $\frac{-3}{a-1}$; 5) $\frac{9}{9-3y}$ і $\frac{1}{9-3y}$. 126. 2) $\frac{4}{20a+4}$ і $\frac{1}{20a+4}$. 127. 1) $\frac{a(a-b)}{a(a^2-b^2)}$,
- $\frac{a+b}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{a}{a(a^2-b^2)}$. 129. 1) $\frac{2}{2(a^2-9)}$, $\frac{a-3}{2(a^2-9)}$, $\frac{-2(a+3)}{2(a^2-9)}$.
131. 1) $\frac{-a(a+b)}{b(a+b)}$ і $\frac{4b}{b(a+b)}$; 2) $\frac{x^2+8x+15}{3(x+3)}$ і $\frac{3x-9}{3(x+3)}$. 132. 1) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$,
- $\frac{x+1}{x^4-1}$, $\frac{x-1}{x^4-1}$, $\frac{1}{x^4-1}$; 2) $\frac{x^2+8x+15}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$,
- $\frac{x^2+6x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$, $\frac{x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$. 133. $\frac{10\pi d}{t}$; 2π .
134. $m = \frac{E_{\text{пов}}}{gH + 0,5V^2}$; 0,5 кг.

§ 4. Додавання і віднімання раціональних дробів

139. 1) $\frac{9}{5x}$; 3) $\frac{4}{3c}$; 5) $\frac{5y}{y+1}$; 7) $\frac{7a}{x+2}$. 140. 1) $\frac{5}{7ab}$; 3) $\frac{5xy}{2a^2b}$;
- 5) $\frac{7y}{a-c}$. 141. 1) $\frac{7}{9y}$; 3) $\frac{13b}{a^2+3}$; 5) $\frac{10c}{a+2}$. 142. 1) $\frac{9}{7x}$; 3) $\frac{8}{9c}$; 5) $-\frac{5c}{c+2}$;
- 7) $-\frac{13a}{d-1}$. 143. 1) $-\frac{5}{4ab}$; 3) $\frac{9xy}{5ab^2}$; 5) $-\frac{7c}{a+c}$. 144. 1) $\frac{7}{5y}$; 3) $\frac{b}{a^2-1}$;
- 5) $-\frac{2c}{1+a}$. 145. 1) $\frac{c}{9}$; 3) ac . 146. 1) 1; 3) 2; 5) 1. 147. 1) $3-x$; 3) $6-c$;
- 5) $y+1$; 7) -2; 9) $c+1$. 148. 1) 1; 3) -1; 5) $\frac{1}{a-8}$. 149. 1) $\frac{1}{1-a}$, 10;
- 2) $-\frac{1}{y+2}$, -5. 150. 1) $\frac{7}{10x}$; 3) $\frac{43}{36c}$; 5) $\frac{11y}{5(y+1)}$; 7) $-\frac{1}{4x}$; 8) $\frac{14}{45c}$;
- 9) $\frac{6a}{5(x+2)}$. 151. 1) $\frac{11}{12ab}$; 3) $\frac{13x}{28a^2b}$; 5) $\frac{9y}{5(a-c)}$. 152. 1) $-\frac{9}{8ab}$;
- 3) $\frac{56x}{75b^2}$. 153. 1) $\frac{5}{16y}$; 3) $\frac{14b}{3(a^2+3)}$; 5) $\frac{7c}{12(a-2)}$. 154. 1) $\frac{5x^2-1}{10x^3}$;
- 3) $\frac{8x-7}{x(x+5)}$; 5) $\frac{y+3}{3(y+1)}$. 155. 1) $\frac{6}{9-x^2}$; 3) $\frac{12}{36-c^2}$. 156. 1) $\frac{1}{1-a^2}$, 1,8;

- 2) $\frac{-y}{y^2-4}$; 0,6. 157. 1) $\frac{21}{9-a^2}$; 4,2. 158. 1) $x-2$; 3) 1. 159. 1) a^2-ab+b^2 ;
 3) x^2-xy+y^2 ; 6) $\frac{1}{a^2-ab+b^2}$; 8) $\frac{1}{x^2-2x+4}$. 160. 1) $\frac{y+2}{5}$;
 3) $-(a^2+4a+16)$; 5) $\frac{1}{x+y}$. 161. 1) 1; 3) $\frac{2(x-y)}{x+y}$; 5) $\frac{x^2+5x+25}{5-x}$.
 162. 1) $\frac{x^2+x+1}{x-1}$. 163. 1) $\frac{6x+1}{6}$. 164. 1) $\frac{2y}{y^2-x^2}$; 3) $\frac{108}{a(9-a^2)}$.
 165. 3) $\frac{1}{t(t-1)}$. 166. 1) $\frac{x^2+1}{x}$; 2) $\frac{3x^2+3}{x}$; 3) $\frac{1+4x^3}{x^2}$; 4) $\frac{7-y^3}{y}$;
 5) $\frac{4-2a-2a^2}{a}$; 6) $\frac{9b^2-62b}{7-b}$; 7) $\frac{-5a}{2a-1}$. 167. 1) $\frac{2x^2+1}{x}$; 2) $\frac{4-y^4}{y^2}$;
 3) $\frac{(b-3)^2}{b^2+9}$; 4) $\frac{x^2}{3-x}$. 170. 1) $\frac{x^2-y}{x^2}$; 1,3125; 2) $\frac{2b}{64a^2-b^2}$; $-\frac{25}{84}$.
 171. $\frac{10m^2+7m+5}{5m^2}$; 20. 172. 1) $-\frac{2}{x-4}$; 2) $\frac{x^2}{(x-4)(2x+1)}$.
 173. 1) $\frac{9}{(x-4)(x+3)}$; 2) $-\frac{2}{(x-4)(x+1)}$. 174. 1) $a = -0,125$,
 $b = -0,125$; 2) $a = 1$; $b = 1$. 175. Вказівка: спростіть даний вираз і
 покажіть, що він тотожно дорівнює числу 1 на ОДЗ змінної x .
 176. Вказівка: спростіть даний вираз і покажіть, що він тотожно
 дорівнює числу 1,5 на ОДЗ змінної y . 177. 1) 0; 2) $\frac{3}{x(x+3)}$.
 178. $\frac{100}{x(x+100)}$.

§ 5. Множення раціональних дробів.

Піднесення раціонального дробу до степеня з цілим показником

183. 1) $\frac{ax}{40}$; 3) $\frac{ax}{4cy}$; 5) $\frac{6ax}{35by}$; 7) $\frac{ax}{5cy}$; 9) $\frac{8xy}{15b}$; 11) $\frac{2a}{3y}$.
 184. 1) $\frac{5y}{3a}$; 3) $\frac{8y}{15bx^2}$. 185. 1) $\frac{2}{x+1}$; 2) 15; 3) 1; 4) $\frac{4}{1-b}$; 5) $-7,5$;
 6) $-\frac{2}{3}$. 186. 1) $\frac{5}{y+3}$; 2) $\frac{5}{9}$. 187. 1) $\frac{x^2}{8}$; 2) $\frac{30}{y}$; 3) $\frac{12a}{b}$; 4) $-6y$.
 188. 1) 11; 2) -2 ; 3) -5 ; 4) 12; 5) 2,5; 6) $2a$; 8) $-1,5b$. 189. 1) $\frac{4}{a^2}$;

- 3) $-\frac{16x^2}{5}$. 190. 1) $\frac{x^4}{36}$; 3) $\frac{x^2}{4y^2}$; 5) $\frac{8a^6}{27}$; 7) $\frac{x^6}{64y^{10}}$. 191. 1) $\frac{a^6}{16}$; 3) $\frac{25a^2}{b^6}$.
 192. 1) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}$; 4) $\frac{1}{x^2-4x+4}$. 193. 1) $\frac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}$;
 2) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-6xy+9y^2}$; 3) $\frac{9a^2-6ab+b^2}{4a^2+20ab+25b^2}$; 4) $\frac{1}{y^2+10y+25}$.
 195. 1) $\left(\frac{3a}{b^2}\right)^3$; 2) $\left(\frac{x^2y}{(x-y)^3}\right)^2$; 3) $\left(\frac{5(m+n)}{mn^2}\right)^5$; 4) $\left(\frac{2(a-2b)^5}{5(2a-5b)^4}\right)^4$.
 198. 1) $1,5a^2b^2$; 3) $2,75a^2b^2$. 199. 1) $\frac{5}{3}x^2y^2$; 2) $2x^2y^2$; 3) $3,75x^2y^2$.
 200. 1) $3b$; 2) $4xy^2$. 201. 1) $21a^3$; 2) $6x$. 202. 1) $\frac{3b^2y}{2a}$; 3) $(a+b)^2$;
 5) x^2-y^2 ; 6) $\frac{a-b}{(a+b)(x+y)}$. 203. 1) bxy ; 2) $x+y$. 204. 1) $\frac{1-3y}{x(3y+1)}$;
 2) $-0,5$. 205. 1) $\frac{3}{b^5}$; 2) $\frac{25a^4b^6c^2}{9x^4y^4z^2}$. 206. 1) 1; 2) $\frac{x^9y^2}{135ac^4}$. 207. 1) $x-1$;
 2) $\frac{y}{y-4}$. 208. 1) 1; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$. 209. 1) $-\frac{1}{3}$.

§ 6. Ділення раціональних дробів

212. 1) $\frac{b}{a}$; 3) $\frac{y}{x}$; 5) $\frac{5x}{3y}$; 7) $\frac{3y}{2}$; 9) $\frac{5x}{2y}$; 11) $\frac{5x^2}{7}$. 213. 1) $\frac{b}{a}$;
 2) $\frac{y^2}{2x}$; 3) $\frac{3}{10x}$; 4) $\frac{2b}{3a}$; 5) $\frac{4x}{3y}$. 214. 1) $\frac{4x}{5y}$; 3) $\frac{7b}{3}$; 5) $\frac{1}{ab}$. 215. 1) 5;
 3) 1; 5) -9 . 216. 1) 9; 2) $\frac{7}{9}$; 3) $-\frac{2}{3}$. 217. 1) 0,2; 3) $\frac{3}{4y^3}$; 5) $\frac{x^2}{5}$; 7) $\frac{5}{2x^4}$;
 9) $-\frac{3}{7}$; 11) $\frac{1}{14x^2}$. 218. 1) 9; 2) 3; 3) 16; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $2a^2$. 219. 1) $\frac{a^2}{4}$;
 3) $-\frac{3}{10x}$; 5) -9 . 220. 1) $3a$; 3) $17a$. 221. 1) a ; 3) $8a$. 222. 1) $2b$; 3) $9b$.
 223. $\frac{6v+3}{7v}$. 224. $\frac{3x}{x+2}$. 225. 1) $9a$; 2) $16xy$. 226. 1) $7b^3$; 2) $25xy$.
 227. 1) $\frac{2}{ax}$; 2) $\frac{x^7}{3y}$; 3) $\frac{7b}{5a}$. 228. 1) $\frac{4(y-x)}{x^2}$; 3) $\frac{3d^2(d-c)}{(c+d)^2}$.
 229. 1) $\frac{5a^3xy}{b}$; 2) $\frac{x+y}{(x-y)^2}$. 230. 1) $x^4+x^2y^2+y^4$; 2) $a(a-b)$.
 231. 1) $(x^2+y^2)(x-y)$; 2) $\frac{x-y}{(x+y)(a+b)}$. 232. 1) 1; 2) $(m-n)^2$.

§ 7. Раціональні рівняння

237. 1) 0 або 4; 3) -1 або 4; 5) 0 або 6; 7) -2 або 2. 238. 1) 0 або 3; 3) 4 або 5. 239. 1) x — будь-яке число; 2) x — будь-яке число; 3) x — будь-яке число; 5) x — будь-яке число, крім 0 і 2; 6) x — будь-яке число. 240. 1) x — будь-яке число; 3) x — будь-яке число, крім -5 і 4. 241. 1) 0; 2) 3; 3) 2; 4) -3; 5) 0; 6) -1 або 1; 7) 0; 8) 5. 242. 1) коренів немає; 3) коренів немає; 5) коренів немає; 6) коренів немає. 243. 1) 0; 2) 4; 3) коренів немає; 4) коренів немає. 244. 1) коренів немає; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) коренів немає; 5) -1; 6) -2; 7) -4; 8) 4. 245. 1) коренів немає; 2) 3. 246. 1) Ні; 3) ні; 5) ні. 247. 1) 2,8; 3) -4,5; 5) 4; 7) 1,5; 9) 4,2; 11) 4,5; 13) 2; 15) $-\frac{2}{3}$; 17) 7. 248. 1) 1,75; 3) 16; 5) 11. 249. 1) Так; 3) так; 4) ні; 5) ні. 251. 1) Ні; 3) так. 252. 1) коренів немає; 3) 2; 4) коренів немає; 5) 0; -3. 253. 1) коренів немає; 2) коренів немає; 3) 1; 4) -3. 254. 1) 2; 2) -0,5; 3) 4; 4) -3. 255. 1) -3; 2) 2,75; 3) -3,6; 4) -2,5. 256. 10 км/год, 40 км/год. 257. $\frac{5}{3}$. 258. $\frac{7}{9}$. 259. 1) (0; 0), (-3; -2,25). 260. $-\frac{2}{9}$. 261. $a \neq 5$. 262. $a = -0,5$ і $a = -2$. 263. 40 пістолів або 60 пістолів.

§ 8. Що таке степінь із цілим показником

269. 1) 3^{-1} ; 3) 10^{-1} ; 4) 17^{-1} ; 11) c^{-1} . 270. 1) 4^{-1} ; 3) 345^{-1} ; 6) y^{-1} . 271. 1) 6^{-2} ; 3) 11^{-7} ; 4) 5^{-5} ; 7) 44^{-22} ; 9) x^{-4} ; 13) n^{-15} ; 15) c^{-120} . 272. 1) 5^{-7} ; 2) 18^{-3} ; 3) 22^{-7} ; 4) b^{-2} ; 5) y^{-9} ; 6) t^{-14} . 275. 1) 2^3 ; 2) 2^0 ; 5) 2^{-2} ; 8) 2^{-6} . 277. 1) 3^3 ; 2) 3^0 ; 5) 3^{-2} ; 6) 3^{-4} . 281. 3) $\frac{1}{2^5}$; 5) $\frac{1}{10^9}$; 7) $\frac{1}{21^5}$; 12) $\frac{1}{100^{10}}$. 282. 1) $\frac{1}{10^8}$; 5) $\frac{1}{20}$; 6) $\frac{1}{25^7}$. 284. 1) $\frac{1}{a^4}$; 2) $\frac{1}{c^9}$; 3) $\frac{1}{m^{12}}$; 4) $\frac{1}{n^{56}}$; 5) $\frac{1}{b^{80}}$; 6) $\frac{1}{x^{100}}$. 286. 1) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{20}$; 6) $\frac{1}{1000}$. 287. 1) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{100}$; 5) 25; 8) 100. 288. 1) 3^4 ; 3) $\left(\frac{3}{2}\right)^6$. 289. 1) 5; 2) 2^3 ; 3) 9^6 ; 4) 10^8 ; 5) 27^5 . 290. 1) 1; 3) 1; 5) 1; 8) 1. 291. 1) 75; 2) $\frac{1}{15}$; 3) -7; 4) 2; 5) 9; 6) 1; 7) 11,1; 8) 14. 292. 1) 2; 2) 5; 3) 7; 4) -30. 293. 1) $4^4 > 4^0$; 4) $3^{-4} < 10^0$. 294. 1) $5^5 > 5^0$; 2) $(-7)^5 < 7^0$; 3) $3^{-5} < \frac{1}{3^{-5}}$; 4) $9^{-6} < 100^0$. 296. 1) Додатним; 4) від'ємним. 297. 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{4}{25}$; 5) 25; 7) $\frac{25}{36}$; 8) $\frac{25}{36}$.

298. 1) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{16}$; 4) 100; 10) $-\frac{8}{27}$; 11) $\frac{16}{25}$. 299. 1) 15,625; 2) 10 000; 3) 100; 4) -100 000; 5) $\frac{9}{16}$; 6) 81. 301. 1) $2 \cdot 9^{-7}$; 2) $6 \cdot 8^{-8}$; 4) $3^{-8} \cdot 5^{-9} \cdot 8^{-16}$. 303. 1) $5\frac{2}{3}$; 2) 50,75. 304. 1) $1\frac{1}{9}$; 2) 114. 305. 1) 20; 2) 0.

§ 9. Властивості степеня із цілим показником

318. 1) $\frac{1}{64}$; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$. 319. 2) 0,01; 3) 100; 4) 10; 5) 10. 320. 1) a^{-12} ; 2) a^{-4} ; 3) a^4 ; 4) a^{12} ; 5) 1; 11) a^8 . 321. 1) x^{-13} ; 2) x^{-7} ; 3) x^7 ; 4) x^{13} ; 5) 1; 6) x^{20} . 322. 1) $10^{-1} \cdot 10^m$; 3) $8^{-4} \cdot 8^m$. 323. 1) $6^{-4} \cdot 6^x$; 2) $2^7 \cdot 2^{-x}$; 3) $12^{-8} \cdot 12^n$; 4) $3^{-p} \cdot 3^{-n}$. 325. 5) 256; 7) 1; 9) 64; 10) 16. 326. 1) 32; 3) 2; 5) 1. 327. 1) a^{12} ; 2) a^{-4} ; 3) a^7 ; 4) a^{-13} ; 6) a^2 ; 8) a^{12} . 328. 1) m^{12} ; 2) m^{-8} ; 4) m^{-20} . 330. 1) 7^6 ; 2) 7^{-7} ; 3) 7^{15} ; 6) 7^{-2} . 331. 1) 8^7 ; 2) 8^{20} ; 3) 8^5 ; 4) 8^{-9} ; 5) 8^{-6} ; 6) 8^3 . 332. 1) a^{-25} ; 2) 1; 3) a^{-20} ; 4) a^{21} ; 5) a^2 ; 6) a^{-8} ; 7) m^{12} ; 8) m^{-22} . 334. 1) 5^{-80} ; 2) 4^{44} ; 4) 7^0 ; 9) a^{-30} ; 12) a^{-25} ; 16) a^{-22} . 335. 1) 2^{-8} ; 2) 3^{30} ; 3) 3^{-30} ; 4) 10^0 ; 5) x^0 ; 6) x^0 ; 7) x^{-44} ; 8) x^{32} . 336. 1) 8^{-3} ; 2) 18^{-1} ; 3) 2^{-3} ; 4) 2^{-1} ; 5) 80^{-9} ; 6) 12^{-4} ; 7) $(ba)^{-12}$; 8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}$; 9) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-5}$; 10) $(pmn)^{-6}$; 11) $(abc)^{-1}$; 12) $(3mn)^{-4}$; 13) $\left(\frac{xy}{z}\right)^{-5}$; 14) $\left(\frac{3}{ab}\right)^{-1}$; 15) $\left(\frac{xy}{zh}\right)^{-2}$; 16) $\left(\frac{db}{ac}\right)^{-10}$. 337. 1) 70^{-7} ; 2) $0,7^{-7}$; 3) 45^{-10} ; 4) 5^{-10} ; 5) $(zxy)^{-3}$; 6) $\left(\frac{ac}{x}\right)^{-7}$. 339. 1) 12^{-2} ; 2) 12^{-10} ; 3) 12^{-4} ; 4) 12^{-1} ; 5) 12^{-15} ; 6) 12^{-4} . 341. 1) $\frac{1}{64}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) 3. 342. 1) $2,2 \cdot 10$; 5) $9,76 \cdot 10^2$; 7) $5 \cdot 10^{-3}$; 10) $3,33 \cdot 10^{-1}$; 15) $3,35 \cdot 10^8$; 17) $2,30002 \cdot 10^2$; 22) $7,4 \cdot 10^{-5}$. 343. 1) $3,7 \cdot 10^1$; 2) $1,9 \cdot 10^1$; 3) $2,07 \cdot 10^2$; 4) $2 \cdot 10^{-2}$; 5) $3,8 \cdot 10^{-1}$; 6) $1,3005 \cdot 10$; 7) $6,5 \cdot 10^{-2}$; 8) $7,5 \cdot 10^{-5}$; 9) $9,1 \cdot 10^4$; 10) $4,82 \cdot 10^{-3}$; 11) $1,15 \cdot 10^7$; 12) $4,3 \cdot 10^1$; 13) $2,7 \cdot 10^{-6}$; 14) $1,1 \cdot 10^{-1}$. 345. 1) $5 \cdot 10^{-7} > 1,2 \cdot 10^{-7}$; $6,2 \cdot 10^{-7}$; $3,8 \cdot 10^{-7}$; $6 \cdot 10^{-14}$; 2) $3,1 \cdot 10^4 > 3 \cdot 10^4$; $6,1 \cdot 10^4$; $1 \cdot 10^3$; $9,3 \cdot 10^8$. 347. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^1$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$. 350. 1) a^{-7n} ; 5) a^{-31} .

351. 1) $x = a^{-6}b^{32}$; 4) 7. 352. 1) $a^{16}b^{-15}$; 3) 4. 353. 1) $(5^{-2})^6$. 355. 1) $m^2 \cdot m^{22}$.
 356. 1) 2^{-1} ; 3) 2^{-27} . 357. 1) $2^{-5}(2^{-1} + 2^{12})$; 3) $2^{-5}(2^2 + 2^8 - 2^{-10} + 2^{20})$.
 358. 1) $3^{-4}(3^{-8} + 3^{16})$; 2) $3^{-4}(3^5 + 1 + 3^8)$; 3) $3^{-4}(3^{-1} + 3^9 - 3^3 + 3^5)$.
 360. 1) 12^{-12} ; 2) 1; 4) 5^{10} ; 5) $0,6^4$; 6) 25000^2 . 362. 1) $6 \cdot 10^{-8} > 1,2 \cdot 10^{-9}$,
 $6,12 \cdot 10^{-8}$, $7,2 \cdot 10^{-17}$, $5 \cdot 10^1$; 2) $0,2 \cdot 10^6 > 0,16 \cdot 10^4$, $2,016 \cdot 10^5$,
 $3,2 \cdot 10^8$, $8 \cdot 10^{-3}$; 3) $2,1 \cdot 10^{-10} > 0,63 \cdot 10^{-11}$, $2,163 \cdot 10^{-10}$, $1,323 \cdot 10^{-21}$,
 $3 \cdot 10^{-2}$; 4) $5,5 \cdot 10^{22} > 11 \cdot 10^{20}$, $5,61 \cdot 10^{22}$, $6,05 \cdot 10^{43}$, $5 \cdot 10^1$.
 363. 1) 0,25.

§ 10. Перетворення раціональних виразів

376. 1) $a - 2$. 377. 1) $\frac{1}{b+9}$; 3) $\frac{1}{a^3-b^3}$; 4) $x - y$; 7) $\frac{x+3}{x-1}$.
 378. 1) $\left(\frac{1}{x-y}\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{10+m}\right)^4$; 5) x^5 ; 8) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$; 12) $\left(-\frac{z}{3}\right)^3$. 381. 1) x^{-1} ;
 2) x^{-2} ; 5) x^{-5} . 382. 1) $\frac{1}{b^3}$; 2) $\frac{1}{ca^5}$; 4) $\frac{a}{b^2}$. 383. 1) $\frac{1}{xy^{10}}$; 4) y ; 6) $\frac{1}{a^3b^9}$;
 8) $\frac{a^9m^{15}c^5}{n^4}$. 386. 1) 1; 2) $(a-b)^{-2}$; 3) $(x-y)^{-10}$; 4) $(y+4)^{-5}$;
 6) $x^4 \cdot (x+y)^2$; 9) $\frac{y^{-3}}{(x-y)^4}$. 387. 1) 1; 2) $(5+a)^{-3}$; 3) $(p+m)^{-3}$; 6) x^{-2} ;
 8) $(n+4m)^9$. 389. 1) $2,5x^8y^3$; 2) $m^{21}n^6$; 4) $\frac{1}{8}b^{15}a^{18}$. 391. 1) $(a^2-b^2)^{-5}$;
 2) 2,25; 3) 1; 4) $\frac{1}{8}$; 5) 1; 6) x . 394. 1) 0; 2) $\frac{10}{a+10}$; 3) 1; 4) 1; 6) $\frac{-2x}{16-x^2}$.
 395. 1) $(y^{-1}-2)^2$; 3) $(a^2-5)^2$; 4) $(2m^{-1}-3n^{-1})^2$. 397. 1) $(x^{-1}-5)(x^{-1}+5)$;
 2) $(a^{-1}-b)(a^{-1}+b)$. 399. 1) $\frac{a^3+1}{a^2}$; 2) $\frac{2x^2+1}{x}$. 402. 1) $3a^3c^{-2}$; 2) $0,25b^{32}c^{14}$.
 403. 1) $a - b$; 4) $-a - 2$; 10) $\frac{1}{x+1}$. 404. 1) $a - 3$. 405. 1) $y^{-2}(y^{-6} + y^{-2})$;
 4) $y^{-2}(2y^3 + 4y)$; 6) $y^{-2}(xy^{-7} + 9)$. 406. 1) $a^{-4}(a^{-8} + a^{-6})$; 2) $a^{-4}(a^{-3} - a^7)$;
 4) $a^{-4}(7a^{-10} + 6a^4)$. 408. 1) $a(a^3 + a^2 + a^{-4} + a^{-5})$; 2) $a^3(a+1+a^{-6}+a^{-7})$;
 4) $a^{-5}(a^9 + a^8 + a^2 + a)$. 410. 2) $\frac{m^2-n^2}{mn}$; 3) x^{-4} ; 4) $\left(\frac{n}{m}\right)^2$. 411. 1) 23;
 2) 3; 3) 2. 412. 1) 7; 2) 83. 414. 2) $\frac{-4}{19}$. 415. 2) 0,25. 417. 1) $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$;
 2) $-\frac{a^2+b^2}{ab}$.

§ 11. Функція $y = \frac{k}{x}$

419. 3), 4). 423. 1) 1; 2) -4; 3) 4; 4) 10; 5) -12; 6) -25; 7) 28;
 8) 100. 424. 1) 3; 2) -3. 426. 1) x — будь-яке число, крім нуля;
 y — будь-яке число, крім нуля. 430. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні.
 431. М, Р. 434. 1) -10; 2) 16; 3) 27; 4) -2; 5) 9; 6) -50; 7) 36; 8) -18.
 435. 1) -1; 2) 21; 3) 20; 4) 14. 445. 1) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{4}{9}$; 5) -5; 6) -8; 7) 7.
 447. 1) -0,002; 2) -14; 3) 0,9. 452. 1. Для функції $y = -\frac{1}{x}$:
 1) x — будь-яке число, крім нуля; 2) y — будь-яке число, крім нуля;
 3) -1; 4) 1, -1, 0, 1; 6) $x < 0$; 7) $x > 0$; 8) $x < 0$ і $x > 0$; 9) не існує таких
 значень аргументу. 3. Для функції $y = \frac{0,2}{x}$: 1) x — будь-яке число,
 крім нуля; 2) y — будь-яке число, крім нуля; 3) 0,2; 4) -0,2, 0,2,
 -0,02; 5) 0,2, 0,02, -0,1; 6) $x > 0$; 7) $x < 0$; 8) не існує таких значень
 аргументу; 9) $x < 0$ і $x > 0$. 457. 1) (2; 2); 2) (1; -2). 458. 2) (-2; -2),
 (2; 2); 3) (2; 6) і (-3; -4). 460. $y = \frac{4}{x}$. 462. 1) -6, 1; 2) -1, 2; 3) 1, 3;
 4) 1, -9. 465. $y = \frac{5}{x}$ (мал. 23); $y = \begin{cases} 0,5x, & \text{якщо } x < -2, \\ 2, & \text{якщо } x \geq -2 \end{cases}$ (мал. 24).

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ КОРЕНІ, ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 12. Функція $y = x^2$

471.

x	-20	-8	-6	0	6	8	20
y	400	64	36	0	36	64	400

473. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. 476. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так.
 477. 1) 0; 1; 9; 2) 1, -1; 3, -3; 3) x — будь-яке число; 4) $x \geq 0$.
 478. 1) 1; 4; 9; 2) 0; 2, -2; 3) $x < 0$ і $x > 0$; 4) $x \leq 0$. 481. 1) (-3; 9)
 і (3; 9); 2) графіки не перетинаються; 3) (0; 0) і (1; 1). 483. 1) Не має
 розв'язків; 2) (2; 4) і (3; 9). 484. 1) -2 і 2; 2) -4 і 4; 3) 0; 4) не має
 розв'язків. 485. 1) -1 і 1; 2) не має розв'язків; 3) -3 і 3. 486. 1) (0; 0),
 (1; 1). 491. 1) -1 і 0; 2) 1 і -3; 3) не має розв'язків.
 494. $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 1, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$ (мал. 36), $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$ (мал. 37),

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x < 1, \text{ (мал. 39).} \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$$

§ 13. Арифметичний квадратний корінь

510. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 512. 1) -9; 9; 8) -1,5; 1,5. 518. 1) 0,3; 2) 0,4; 3) 0,5; 4) 0,07; 5) 0,06; 6) 0,13. 520. 1) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{9}{10}$. 523. 1) $\sqrt{5} > 0$; 3) $\sqrt{100} > -10$; 4) $-4 < \sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21} > -\sqrt{7}$; 12) $\sqrt{12} < 4$. 524. 1) $-\sqrt{6} < 0$; 2) $0 < \sqrt{0,01}$; 3) $-5 < \sqrt{26}$; 4) $\sqrt{35} > -\sqrt{37}$; 5) $\sqrt{74} < 9$; 6) $6 < \sqrt{38}$; 7) $6 > \sqrt{33}$; 8) $\sqrt{101} > 10$. 526. 1) 4; 2) 3; 4) 9; 5) 10; 6) 0,2; 7) 0,99; 9) $\frac{2}{5}$; 10) $\frac{1}{8}$. 527. 1) 2; 2) 2; 3) 0; 4) 0,7; 5) 5,7; 6) $\frac{1}{7}$. 528. 1) 6; 2) 6; 3) 10; 4) 18; 6) 120; 8) 80; 9) 140; 10) 320. 531. 1) 7; 2) 0,3; 3) 8; 4) 6; 5) 35; 6) 1,5. 533. 1) 3; 2) 3; 3) 3; 4) 3; 5) 3. 534. 1) 4; 2) 4; 3) 0; 4) 90. 535. 1) 3; 2) 3; 3) 11; 4) 5,4. 536. 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{75}$; 8) $\sqrt{63}$; 9) $\sqrt{40}$; 10) $\sqrt{90}$; 11) $\sqrt{99}$. 537. 1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{48}$; 3) $\sqrt{20}$; 4) $\sqrt{54}$. 538. 1) $2\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{2}$; 4) $9\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{5}$. 539. 1) $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $7\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{7}$; 5) $10\sqrt{2}$; 6) $3\sqrt{3}$. 541. 1) $2\sqrt{2}$; 2) $6\sqrt{3}$; 3) $5\sqrt{5}$; 5) $-\sqrt{21}$; 6) 0; 7) $2\sqrt{7}$; 8) $13\sqrt{10}$. 542. 1) $2\sqrt{10}$; 2) 0; 3) $-40\sqrt{23}$; 4) $8\sqrt{2}$. 543. 1) $10-5\sqrt{10}$; 2) $2+\sqrt{2}$; 6) $-1-\sqrt{5}$; 7) 2; 9) 1; 10) -10; 11) -31; 14) -2; 20) $19+4\sqrt{21}$. 544. 1) $3+\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{5}+5$; 4) -1; 5) 4; 6) 10. 546. 1) -3; 2) -2; 3) 5; 4) 100. 549. 1) $1\frac{2}{3}$; 5) $1\frac{1}{2}$; 8) $1\frac{3}{4}$. 550. 1) 3,5; 2) $2\frac{1}{3}$; 3) $1\frac{2}{7}$; 4) $2\frac{2}{3}$. 551. 1) $4\sqrt{3} < 7$; 2) $\sqrt{28} > 2\sqrt{6}$; 4) $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$; 11) $\sqrt{1\frac{9}{16}} < \sqrt{2}$. 552. 1) $5\sqrt{2} > 7$; 2) $4\sqrt{5} < 9$; 3) $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$; 7) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,25}$. 553. 1) $1i$; 2) $-3i-2$; 3) $2i$. 554. 1) $1i$; 2) $-3i-2$; 3) $3i$; 4) $4i$. 556. 1) 75; 2) 700; 3) 2; 4) $\frac{11}{25}$. 560. 1) 0,9; 2) 2,4; 3) 24; 4) 30. 562. 1) $5-\sqrt{23}$; 2) $2-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{12}-\sqrt{8}$; 4) $2\sqrt{2}$. 564. 1) $\sqrt{0,18}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{1,5}$. 566. 1) $0,1\sqrt{5}$; 3) $17\sqrt{0,1}$. 568. 1) $\sqrt{3}(\sqrt{10}-1)$; 3) $\sqrt{5}(1+\sqrt{5})$;

- 5) $\sqrt{3}(1+2\sqrt{3})$. 570. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$. 572. 1) $3\sqrt{7}$; 2) $6\sqrt{6}$. 574. 1) $3-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{7}-1$; 3) $\sqrt{2}+1$; 4) $2-\sqrt{3}$.

§ 14. Множина та її елементи. Числові множини

587. 1) 4, (1); 2) 2,35(0); 3) 0,(35); 5) 2,(123). 588. 1) 8,(0); 3) 2,(2); 3) 1,55(4); 4) 0,4(235). 589. 1) 2,888...; 2) 19,333...; 3) 1,3252525...; 4) 5,9878787...; 5) 21,88999...; 6) 4,5000...; 7) 21,000...; 8) 5,101121212... 590. 1) 3,444...; 2) 5,5121212...; 3) 7,54000... 593. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) так; 7) ні; 8) так; 12) так. 594. 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. 596. 1) Так; 2) так; 4) ні; 6) ні. 597. 1) 1, 4, 9; 2) 1, $-\frac{9}{3}$, 0, 4, 9; 3) -0,(4), 1, $-\frac{9}{3}$, 0, $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{5}$, 1,0333..., 9; 4) $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$. 598. 3) $-\frac{12}{6}$, -3,(9), 0, $\sqrt{25}$, 7,8888..., -5, $-\frac{1}{3}$, 22. 606. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 609. 1) 0,0(6) $> \frac{1}{16}$; 2) 0,(45) $= \frac{5}{11}$; 3) 0,1(4) $> \frac{1}{7}$; 4) 0,(7) $= \frac{7}{9}$.

§ 15. Перетворення ірраціональних виразів

621. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні; 7) так; 8) ні; 9) так. 622. 1) Так; 2) ні; 3) так. 627. 1) $x-3$. 628. 1) $5x$; 2) $10x+12$. 629. 1) $p-15\sqrt{p}$; 5) $2x-3\sqrt{xy}-2y$; 6) $a-1$. 630. 1) $n+6\sqrt{n}$; 2) $a-3\sqrt{a}-18$; 3) $y-64$; 5) $y-4\sqrt{y}+4$; 8) $y+2\sqrt{10y}+10$. 631. 1) $\sqrt{a}(1-2a)$; 3) $\sqrt{m}(9-n)$; 5) $3\sqrt{a}(2-5a)$; 9) $\sqrt{x}(2+\sqrt{x})$; 13) $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)$; 16) $(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})$; 17) $(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$. 633. 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$. 634. 1) $\sqrt{p}$; 2) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a}}$. 636. 1) $\frac{2}{\sqrt{y}+1}$; 3) 2; 7) $n+\sqrt{7}$. 637. 1) $\sqrt{4x}$; 3) $\sqrt{36a}$; 4) $\sqrt{4x^2y}$; 5) $-\sqrt{4x^2y}$; 8) $-\sqrt{m^4}$; 9) $\sqrt{m^7}$. 638. 1) $\sqrt{25c}$; 2) $-\sqrt{ac^2}$; 3) $\sqrt{2n^2m^2}$; 4) $-\sqrt{3n^2m^2}$. 640. 1) $y\sqrt{7}$; 2) $-y\sqrt{7}$; 3) $-2ab\sqrt{3}$; 4) $-2ab\sqrt{3}$; 5) $2ab\sqrt{3}$; 6) $2ab\sqrt{3}$. 642. 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{x}$; 5) $\frac{a\sqrt{2b}}{2b}$; 6) $2\sqrt{z}$; 7) $\frac{\sqrt{y-2}}{y-2}$; 8) $\frac{\sqrt{8x+1}}{8x+1}$. 645. 1) $x=\pm 1$; 2) $x=\pm 6$; 3) $x=0$; 4) $x=\pm\sqrt{3}$; 7) $x=\pm 8$; 9) $x=\pm 9$; 10) $x=\pm\sqrt{17}$; 11) не має розв'язків; 12) не має розв'язків; 13) не має розв'язків; 15) не має розв'язків; 16) не має

розв'язків; 17) не має розв'язків. **646.** 1) $x = \pm 7$; 2) $x = \pm 8$; 4) $x = \pm \sqrt{7}$; 5) $x = \pm 3$; 7) не має розв'язків; 8) не має розв'язків. **648.** 1) $x = 25$; 2) $x = 16$; 3) $x = 9$; 4) $x = 5$; 5) не має розв'язків; 6) $x = 0$. **650.** 1) x — будь-яке число; 2) x — будь-яке число; 3) $x > -10$; 4) $x > -1$. **651.** 1) $2x + 18$; 2) $20\sqrt{2a}$. **652.** 1) $2a + 8$; 2) $2x - 2\sqrt{xy}$. **653.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}-a}$; 3) $\frac{-2\sqrt{y}}{x-y}$. **654.** 1) $\frac{-10}{a-5}$. **656.** 1) $\frac{-8\sqrt{n}}{n-4}$. **658.** 1) 4. **659.** 1) $-\sqrt{-x^3}$; 2) $-\sqrt{9y^4x}$; 3) $-\sqrt{a^4b^9}$; 5) $-\sqrt{n^2m} + \sqrt{-m^2n}$. **660.** 1) $\sqrt{-3a^3}$; 3) $\sqrt{(ac)^3}$. **661.** 1) $2\sqrt{2}|n|$; 3) $0,1a^4b\sqrt{b}$; 6) $\frac{(n+3)^2}{m^2}\sqrt{\frac{1}{m}}$. **662.** 1) $3\sqrt{6}|x|$; 3) $\frac{2x^2\sqrt{3x}}{7y^6}$. **663.** 1) $-1 - \sqrt{2}$; 3) $2(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; 6) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 7) $\frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$. **664.** 1) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; 2) $\sqrt{7} + 2$; 6) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a-c}$. **665.** 1) -9, 7; 3) 10; 4) -18, 0; 8) не має розв'язків. **666.** 1) -4, 0; 3) 25; 4) $\pm\sqrt{3} - 4$; 6) не має розв'язків. **667.** 1) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; 2) не має розв'язків; 3) $\pm\sqrt{2}$. **668.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) не має розв'язків. **669.** 1) 9; 2) 1; 3) не має розв'язків; 4) 0; 5) -2; 6) 3. **670.** 1) 4; 3) 0; 4) -1. **671.** 1) 1,5; 2) 4; 3) 256; 6) 0. **672.** 1) 2. **673.** 1) 2; 2) 1; 3) 10; 4) -4; 0; 7) 0; 100. **674.** 1) 3; 2) -3; 3) 3; 0; 4) 1. **677.** 1) $\sqrt{y}$; 4) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **678.** 1) 4; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **680.** 1) $a < 0$; 3) $a < 7$. **681.** 1) $a = 0$; 2) $a = -1$; 4) $a = \pm 2$. **683.** 1) 0; 2) 0; 3) 1.

§ 16. Функція $y = \sqrt{x}$

687.

x	1	1,44	2,25	3,24	6,25	9,61	20,25
y	1	1,2	1,5	1,8	2,5	3,1	4,5

689. 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **691.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так. **695.** 1) (1; 1); 2) ні; 3) (4; 2); 4) ні. **696.** 1) (1; 1); 2) (0; 0). **697.** 1) (16; 4); 2) графіки не перетинаються. **699.** 1) (4; 2); 2) (1; 1). **701.** 1) $\sqrt{6} > \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2,5} < \sqrt{2,7}$; 3) $\sqrt{5} > \sqrt{4,4}$; 4) $3 = \sqrt{9}$. **710.** 1) $\sqrt{3,8}$; 2) $\sqrt{4,1}$; $\sqrt{4,5}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{5}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{4}{7}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$. **712.** 1) 4; 2) 4.

РОЗДІЛ 4. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 17. Квадратні рівняння

726. 1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 - 8x - 16 = 0$; 3) $x^2 + x - 6 = 0$; 4) $2x^2 + 2x + 5 = 0$; 5) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 6) $x^2 - 6x - 40 = 0$. **727.** 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $6x^2 + 11x - 4 = 0$; 3) $9x^2 - 12x + 2 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 3 = 0$. **728.** 1) 1; 2) 4; 3) 36; 4) 16; 5) 6,25; 6) 20,25. **729.** 1) 9; 2) 25; 3) 12,25; 4) 2,25. **730.** 1) $0i - 14$; 2) $7i - 1$; 3) $11i - 1$; 4) $-3i - 5$; 5) $-2i - 2$; 6) коренів немає. **731.** 1) $6i - 10$; 2) $6i - 6$; 3) коренів немає. **732.** 1) $2i - 4$; 2) $1i - 3$; 3) $-5i - 7$; 4) $3i - 5$; 5) $-2i - 8$; 6) $5i - 5$. **733.** 1) $-6i - 4$; 2) $2i - 4$; 3) $4i - 4$. **734.** 1) $1i - 4$; 2) $1i - 4$; 3) $2i - 3$; 4) $2i - 2,5$; 5) $2i - \frac{1}{3}$; 6) $-3i - \frac{1}{5}$. **735.** 1) $2i - 7$; 2) $5i - 2$; 3) $1i - \frac{1}{2}$. **736.** $b = 19$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. **737.** $c = 3$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **740.** Вказівка: знайдіть корені кожного з рівнянь та порівняйте їх. **741.** 1) 2; 2) 3. **742.** 1) 8 м, 14 м; 2) 92 плитки; 3) 6000 грн.

§ 18. Формула коренів квадратного рівняння

747. 1) 36; 2) 9; 3) 16; 4) 49. **748.** 1) 4; 2) 49. **752.** 1) два різні корені; 2) два різні корені; 3) немає коренів; 4) два рівні корені. **755.** 1) $-5i - 1$; 2) $-2i - 8$; 3) $2i - 4$; 4) $4i - 4$; 5) $-1i - 7$; 6) коренів немає; 7) $3i - 4$; 8) $-3i - 5$; 9) $-1i - 8$; 10) $-3 \pm \sqrt{6}$; 11) $1i - 2$; 12) $-5i - 20$; 13) $-1i - 7$; 14) $-2i - 13$; 15) $1i - 2$; 16) $5i - 5$. **756.** 1) $2i - 6$; 2) $-2i - 5$; 3) $3i - 3$; 4) коренів немає; 5) $1i - 4$; 6) $-2i - 4$; 7) $-2i - 3$; 8) $2i - 5$. **757.** 1) $2i - 1,5$; 2) $1\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}$; 3) $-2i - 0,6$; 4) $1,5i - 0,5$; 5) $-3i - \frac{1}{4}$; 6) $-3i - \frac{1}{5}$; 7) $\frac{1}{3}i - \frac{1}{2}$; 8) $1,5i - 1$; 9) $2i - 2,5$; 10) $0,6i - 0,2$; 11) $-1\frac{1}{4}i - 2\frac{1}{4}$; 12) $1i - \frac{3}{4}$; 13) $-2\frac{2}{3}i - 2\frac{2}{3}$; 14) $6i - \frac{1}{3}$; 15) $5i - 0,5$; 16) $0,5i - 0,5$. **758.** 1) $1i - 2,5$; 2) $1i - \frac{1}{9}$; 3) $2,5i - 2$; 4) $\frac{1}{3}i - 2$; 5) $-1i - \frac{1}{5}$; 6) $3,5i - 3,5$; 7) $3i - 0,5$; 8) $1i - 0,5$. **759.** 1) $1\frac{1}{3}i - 1$; 2) $1i - \frac{1}{5}$; 3) $10i - 9$; 4) $1i - 0,6$; 5) $5i - 1$; 6) $1i - \frac{2}{3}$; 7) $-2i - \frac{1}{4}$; 8) $3i - 2\frac{3}{4}$; 9) $1\frac{2}{3}i - 1\frac{2}{3}$; 10) $9i - 2$; 11) $2i - 2\frac{1}{3}$; 12) $2,5i - 2$; 13) $\frac{1}{9}i - \frac{1}{9}$; 14) $3 \pm \sqrt{6}$; 15) $0i - 5$. **760.** 1) $6i$

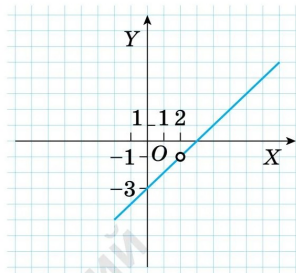
-2,5; 2) -1 i 2,5; 3) $1 \pm \sqrt{6}$; 4) $5i - 6$; 5) $\frac{1}{7}i - \frac{1}{2}$; 6) $0i - 3$. **761.** 1) $9i - 8$; 2) $3i - 0,5$; 3) $2i \frac{1}{6}$; 4) $-3 \pm 2\sqrt{6}$; 5) $3i - 3$; 6) $\pm \sqrt{2}$; 7) $-5i 6$; 8) $6i - 4$.
762. 1) $7i - 8$; 2) $-0,5i 3$; 3) $1i - 3$; 4) $2i - 4$. **763.** 1) $1i - 3,5$; 2) $5i \frac{5}{6}$; 3) $-\frac{3}{4}i - 3$; 4) $8i 1$. **764.** 1) $2i \frac{1}{3}$; 2) $-2i 1 \frac{1}{3}$. **765.** 15 учасників.
766. 7 міст. **768.** 2 % **769.** 1) $\frac{7 \pm \sqrt{69}}{5}$; 2) $4i 0,6$; 3) $-7i 4$.
770. 1) $n < 1$; 2) $n > 1$; 3) $n = 1$. **772.** 4. **773.** Вказівка: розв'яжіть рівняння з буквеними коефіцієнтами. **774.** 1) сторони ділянки 36 м і 20 м; периметр ділянки 112 м; 2) 56 секцій.

§ 19. Теорема Вієта

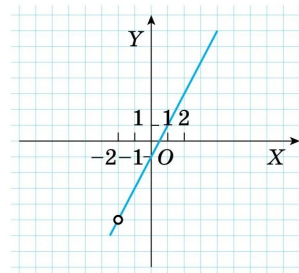
787. 1) -4 i 1; 2) -2 i 8; 3) $3i - 10$; 4) $2i 8$; 5) $1i 11$; 6) $1i 8$; 7) $3i - 4$; 8) $13i 2$; 9) $-1i - 4$; 10) $-1i - 5$; 11) $1i - 2$; 12) $-5i - 20$; 13) $-1i 10$; 14) $-1i - 7$; 15) $1i 2$. **788.** 1) -9 i 1; 2) -2 i 5; 3) $4i 5$; 4) $-1i - 8$; 5) -2 i 7; 6) $-2i - 4$; 7) $5i - 4$; 8) $2i 5$. **789.** 1) -13; 2) 22. **790.** 1) $-1\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{4}{25}$.
791. 1) $2\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{5}{9}$. **794.** $11i - 14$. **795.** $-14i 12$. **796.** $13i - 39$.
797. -7 i 35. **798.** 6, 3 i 18. **799.** 3, 6, -9 або -3, -6, 9. **800.** 1) 51; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $-4\frac{1}{4}$; 4) $189\sqrt{3}$. **801.** 1) 10; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) -2,5; 4) $14\sqrt{2}$.
802. $1 - \sqrt{3}$. **803.** -1 i 0,6. **805.** 2.

§ 20. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

812. 1) $(x - 5)(x + 2)$; 2) $(x - 6)(x - 4)$; 3) $-(x - 1)(x - 15)$; 4) $(x + 3) \times (x - 5)$; 5) $-(x - 1)(x - 3)$; 6) $(x + 1)(x - 7)$; 7) $(x + 2)^2$; 8) $-(x - 5)^2$.
813. 1) $(x + 1)(x + 2)$; 2) $-(x + 9)(x - 1)$; 3) $(x + 3)(x - 8)$; 4) $(x + 3)^2$.
814. 1) $(2x - 3)(x - 1)$; 2) $(5x - 1)(x + 1)$; 3) $-(3x + 7)(x - 2)$; 4) $(2x - 1) \times (3x - 1)$; 5) $-(3x - 2)^2$; 6) $(3x - 5)(x - 1)$; 7) $(2x - 1)^2$; 8) $-(2x + 1) \times (x - 2)$. **815.** 1) $(3x - 1)(x + 2)$; 2) $-(2x + 5)(x - 3)$; 3) $(3x + 1)^2$; 4) $-(5x - 1)(x - 1)$. **816.** 1) $a = -14$; 2) $a = -12$. **817.** 1) $b = 14$; 2) $b = -2$.
818. 1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{2x+1}{6}$; 3) $\frac{4-x}{x-3}$; 4) $\frac{x-8}{x}$; 5) $\frac{x+2}{x-3}$; 6) $\frac{x+8}{9-x}$.
819. 1) $\frac{4}{x-6}$; 2) $\frac{x}{3x-1}$; 3) $\frac{5x+6}{x+2}$. **820.** 1) мал. 3; 2) мал. 4.

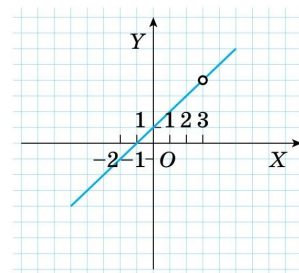


Мал. 3



Мал. 4

821. 1) мал. 5.



Мал. 5

822. 1) 1,8; 2) -1,75. **823.** 1) 1,4; 2) 3,4. **824.** 1) $\frac{1}{x-5}$; 2) $\frac{1}{x}$.
825. $-\frac{1}{x+2}$. **826.** ± 10 . **827.** 4. **828.** -6. **829.** 1) $(nx - 2)(x + 1)$; 2) $(x - m - n)(x + n)$. **830.** 1) 20; 2) 5; 3) 38.

§ 21. Рівняння, які зводяться до квадратних

836. 1) $-3i 4$; 2) $-1i \frac{1}{9}$; 3) $1,5i - 5$; 4) $2i 0,5$; 5) $3i 1,5$; 6) $5i 3$.
837. 1) $5i 0,5$; 2) $2i - 3$; 3) $0,5i 1$; 4) $1i 1 \frac{2}{3}$. **838.** 1) 7; 2) $0i - 9$; 3) $-1i 1 \frac{2}{3}$; 4) $-4i 1$. **839.** 1) $-7i 3$; 2) $-3i \frac{1}{3}$. **840.** 1) 2; 2) -3; 3) -2 i -4; 4) -6; 5) $3i - 6$; 6) -9; 7) 0,5; 8) $1i 0,6$. **841.** 1) -5; 2) 2.

842. 1) -6; 2) 2; 3) 0,5; 4) $\frac{2}{3}$. 843. 1) -5; 2) 0,5. 844. 1) 0 і 4; 2) -2 і 5;
 3) $\frac{2}{3}$ і $-\frac{4}{5}$; 4) 4 і -5; 5) -1 і 2,5; 6) 2. 845. 1) -1 і 4; 2) 16 і 4; 3) -3.
 846. 0,5. 847. 0,5. 848. 1) ± 1 і ± 3 ; 2) ± 2 ; 3) ± 2 ; 4) ± 3 ; 5) $\pm \sqrt{2}$ і $\pm \sqrt{3}$;
 6) $\pm \sqrt{2}$; 7) ± 2 і ± 4 . 849. 1) ± 2 ; 2) ± 2 і $\pm \sqrt{5}$; 3) ± 1 і ± 2 ; 4) коренів не-
 має. 850. 1) ± 3 і $\pm \frac{1}{2}$; 2) ± 2 ; 3) $\pm \sqrt{2}$ і $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\pm \frac{1}{2}$. 851. 1) ± 1 і $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$;
 2) ± 1 і $\pm \frac{3}{4}$. 852. 1) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) 3 і 4; 3) 5 і -2; 4) -1. 853. 1) ± 2 і $\pm \sqrt{6}$;
 2) -20 і -6. 854. 1) 8 і -3; 2) 6; 3) $-1\frac{4}{5}$; 4) коренів немає. 855. 1) 4;
 2) ± 6 . 856. 1) 1 і -0,5; 2) 6 і -5. 857. 4 і -3. 858. 1) 0 і 4; 2) $2 \pm \sqrt{6}$;
 3) 1; 4) 1; 5) -6; 6) -1. 859. 1) 0; 2) $2\frac{1}{3}$ і -2. 860. 1) -1; 0; 2 і 3;
 2) -2 і 1; 3) -3 і 1; 4) -4 і $-2 \pm \sqrt{7}$. 861. 1) -4 і -6; 2) 1; 3 і $2 \pm \sqrt{3}$.
 862. 1) 0; 2) 20. 863. 1) ± 3 і $\pm n$; 2) n і $-\frac{1}{n}$. 864. 1) 5; 2) 3 і -2.
 865. 1) 0,6 м і 1 м; 2) 0,44 м і 0,84 м; 3) $\approx 0,4$ м².

§ 22. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь

870. 1) 8 і 9 або -9 і -8; 2) 6 і 12 або -6 і -12. 871. 1) 8 і 6 або -6 і -8; 2) 4 і 12 або -4 і -12. 872. 1) 8 і 4; 2) 2 і 16 або -2 і -16.
 873. 1) 3 і 15; 2) 5 і 9 або -5 і -9. 878. 15 і 16. 879. 11 і 12. 880. $\frac{3}{4}$ або
 $\frac{5}{8}$. 881. $\frac{1}{4}$. 882. 60 км/год і 80 км/год. 883. 60 км/год і 90 км/год.
 884. 5 км/год. 885. 4 км/год. 886. 10 дет. 887. 12 дет. 888. 5 год.
 889. 5 год. 891. 8 см і 15 см. 892. 6 см і 8 см. 893. 5 см, 12 см і 34 см.
 894. 6 см, 9 см і 30 см. 895. 12 і 13. 896. 13 і 14. 897. 12. 898. 22.
 899. 4 км/год. 900. 4 км/год. 901. 30 км/год. 902. 30 км/год.
 903. 40 км/год. 904. 21 год 30 хв. 905. 60 км/год. 906. 15 км/год.
 907. 16 км/год. 908. 2 км/год. 909. 5 км/год. 910. 25 дет. 911. 7 дет.
 912. 10 л. 913. 25 л. 914. 25 м². 915. 4. 916. 75 хв. 917. 30 хв.
 918. 13 см. 919. 10 см. 920. 3 м і 4 м. 921. 15 і 9. 922. 381 і 705.
 923. 4 і 1. 924. 8 год. 925. У 2 рази; 4 л. 926. 56 с. 927. 1) 4; 2) 6;
 3) одночасно.

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

§ 23. Задачі на відсотки

935. 1740 грн. 936. 434 ст. 937. 2500 грн. 938. 20000 грн.
 939. 17 м. 940. 265 кг. 941. 18 %. 942. 48 %. 943. На 25 %.
 944. На 35 %. 945. 1) 12 %; 2) 130 %. 946. 1) 25 %; 2) 180 %. 947. 35%.
 948. 68%. 949. 250 г. 950. 60 кг. 951. 49 %. 952. 80 000 екз.
 953. 20 і 16. 954. 24 і 25. 955. 3,75 кг. 956. 1,6 кг. 957. 42 г. 958. 40 г.
 959. На $68\frac{28}{29}\%$. 960. На $9\frac{1}{11}\%$. 961. На 60 %. 962. 120 г. 963. 300 г.
 964. 3,24 кг. 965. 22 %. 966. 10,4 % 967. 1 кг і 7 кг. 968. На 20 %.

§ 24. Робота з даними

975. 34; 35. 976. 48; 39. 977. 20; 19. 978. 8,4; 9. 979. 12,3.
 980. 6,6. 983. 300 учнів. 984. 23 %. 987. 13,4. 988. 9. 989. 6. 990. 6.
 991. 1) 100; 2) 14 680 грн; 3) 16 000 грн; 4) на 8,25 %. 992. На 25 %.
 993. 1) 116; 2) 19 мед., 3) 19 і 22. 994. 9.

§ 25. Комбінаторні задачі

1000. 12. 1001. 32. 1002. 1) 14; 2) 48. 1003. 1) 12; 2) 35.
 1004. 1) 23; 2) 120. 1005. 35. 1006. 48. 1007. 1) 24; 2) 64.
 1008. 1) 6; 2) 9. 1009. 1) 90; 2) 81; 3) 3; 4) 12. 1010. 90. 1011. 90.
 1012. 336. 1013. 24. 1014. 120. 1015. 8. 1016. 16. 1017. 1) 24; 2) 24;
 3) 6; 4) 96. 1018. 1) 6; 2) 6; 3) 2; 4) 18. 1019. 1) 3; 2) 3; 3) 2. 1020. 1) 4;
 2) 2; 3) 2. 1021. 180. 1022. 1) 24; 2) 24; 3) 12. 1023. 1) 36; 2) 12.
 1024. 1) 96; 2) 500. 1025. 1) 60; 2) 125. 1026. 10 080 с. 1027. 27; 3;
 18; 6. 1028. 45. 1029. 120. Вказівка: порахуйте кількість одноциф-
 рових, двоцифрових, трицифрових і чотирицифрових. 1030. 90.
 1031. 1) 24; 2) 47. 1032. 1) 18; 2) 48. 1033. 1) 252; 2) 648. 1034. 1) 6;
 2) 9. 1035. 280.

§ 26. Ймовірність випадкової події

1041. $\frac{5}{9}$. 1042. $\frac{3}{5}$. 1043. $\frac{3}{7}$. 1044. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0.
 1045. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 0. 1046. 1) $\frac{7}{15}$; 2) 1; 3) 0. 1047. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1; 3) 0.
 1048. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$. 1049. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$. 1050. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0;
 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{1}{10}$. 1051. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{1}{15}$. 1052. 1) 0,2; 2) 0,2; 3) 0,05.
 1053. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 1. 1054. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$. 1055. 1) $\frac{1}{3}$;

- 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$. 1056. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$. 1057. 7. 1058 12. 1059. 1) $\frac{3}{8}$;
2) $\frac{7}{8}$. 1060. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{18}$. 1061. $\frac{1}{750}$. 1062. $\frac{1}{15}$. 1063. 1) 0,1; 2) 0,4;
3) 0,5; 4) 0,5. 1064. $\frac{21}{120}$. 1065. $\frac{1}{10}$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Розділ 2. Раціональні вирази

1. 1) x — будь-яке число; 2) y — будь-яке число, крім -3 і 0 ;
3) a — будь-яке число, крім -2 і -1 ; 4) x — будь-яке число, крім -1 ,
 y — будь-яке число, крім $0,5$. 5) a — будь-яке число, крім $-\frac{1}{3}$,
 b — будь-яке число, крім $0,25$, c — будь-яке число, крім 0 ;
6) x — будь-яке число, крім 0 , y — будь-яке число, крім $1,5$,
 z — будь-яке число, крім $2,6$. 2. 1) $-0,5$; 2) -4 або 0 ; 3) 1.
3. 1) $\frac{x}{x-2}$; 2) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{4-a}{a}$; 4) $a-3$. 4. 1) $x+1$; 2) $\frac{x+2}{2}$; 3) $\frac{x-2}{x+1}$;
4) $\frac{x-4}{1-x}$. 5. 1) $\frac{6}{6(x-3)}$; $\frac{2}{6(x-3)}$; $-\frac{1}{6(x-3)}$; 2) $\frac{x+1}{x(x+1)}$; $\frac{1}{x(x+1)}$;
 $\frac{x}{x(x+1)}$; 3) $\frac{x-2}{x^2-4}$; $\frac{1}{x^2-4}$; $\frac{x+2}{x^2-4}$; 4) $\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$;
 $\frac{x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$; $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$. 6. 1) $\frac{6x}{x^2-9}$; 2) 0. 7. 1) $\frac{x}{2}$;
2) $-x^2$. 8. 1) $\frac{1}{4(x-4)}$; 2) $-\frac{(x+y)}{x(x^2+xy+y^2)}$. 9. 1) -1 ; 2) $\frac{(b+c+a)^2}{2bc}$.
10. 1) 18; 2) ± 4 . 11. $-\frac{3}{4}$. 12. 1) $p\left(1+\frac{r}{4}\right)^4$; 2) $p\left(1+\frac{r}{4}\right)^{12}$; 3) $p\left(1+\frac{r}{4}\right)^4$.
13. 1) $2x^{-1}y^{-1}$; 2) $np^{-1}m^{-3}$; 3) $b^3d^3a^{-2}c^{-2}$. 14. 1) $\frac{1}{80}$; 2) 1,5; 3) 5;
4) 64. 15. 1) a^{-9} ; 2) a^{-21} ; 3) a ; 4) a^{-21} ; 10) 1. 16. 1) 3^{-3} ; 2) 3^{-8} ; 3) 3^{-24} .
18. 1) $9 \cdot 10^4$; 2) $1,12 \cdot 10^2$; 4) $7 \cdot 10^{-2}$. 19. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 20. 1) -8 ;
2) 1; 3) $-0,6$; 4) 0,625.

Розділ 3. Квадратні корені. Дійсні числа

21. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. 25. 1) 0,8(3); 2) 0,(7);
4) 0,(6). 26. 1) 5 см; 2) 15 см; 3) 1,2 м; 5) $1\frac{1}{3}$ см. 27. 1) 5; 2) 1,5; 3) 6;
4) 0. 28. 1) $\sqrt{128}$; 2) $\sqrt{0,02}$; 3) $\sqrt{0,75}$; 4) $\sqrt{16x}$. 29. 1) $2\sqrt{0,1}$;
2) $5\sqrt{0,1}$; 3) a^4 . 30. 1) $x = \pm 9$; 2) $x = \pm 3$; 3) $x = \pm\sqrt{21}$; 5) $x = 1,5$,
 $x = -0,5$. 31. 1) 36; 2) 144; 4) 41. 32. 1) $5\sqrt{5}$. 33. 2) 2; 3) $1-2\sqrt{6}$.
35. 1) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; 2) $\frac{\sqrt{x}}{x}$; 3) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt{11}+\sqrt{6}$.

Розділ 4. Квадратні рівняння

36. 1) $1i-9$; 2) $7i-1$; 3) $3i3$; 4) $-1i-5$. 37. 1) $3i\frac{1}{3}$; 2) $2i-0,2$;
3) $\frac{2}{3}$; 4) 2,5. 38. 1) $-15i1$; 2) $10i-1$; 3) $10i-4$; 4) $1i-3$. 40. -21 ; 18.
41. $-\frac{2}{3}i-2$. 42. 1) $(x-4)(x-3)$; 2) $(x-5)(x+7)$; 3) $(3x+2)(x+1)$;
4) $-(3x-1)(2x-5)$. 44. 1) -29 ; 2) 2,5. 46. 1) 0,5 і 0,5; 2) $2i-3$;
3) $4i2$; 4) $-1i-4$. 47. 1) $7i3\frac{1}{3}$; 2) $8i-3$; 3) $12i-1\frac{2}{3}$; 4) $-1i2,4$.
48. 1) $\pm 5i \pm 1$; 2) ± 1 ; 3) $\pm 6i \pm 2$; 4) $\pm \frac{1}{3}$. 49. 1) $\pm 4i \pm \sqrt{10}$; 2) ± 2 .
50. 1) 6 і 15 або -6 і -15 ; 2) 3 і 30 або -3 і -30 . 51. 19 і 20.
52. 60 км/год і 80 км/год. 53. 80 км/год і 100 км/год. 54. 15 км/год.
55. 8 м і 48 м. 56. 3 м і 15 м.

Розділ 5. Елементи стохастички

57. 1050 грн. 58. 125 г. 59. 45 %. 60. 79 %. 61. 171,6 см; 182.
62. 41. 63. 1) 22; 2) 4. 64. 3. 66. 1) 6; 2) 6; 3) 2; 4) 18. 67. 720. 68. 720;
120. 70. $\frac{1}{3}$.

ВІДПОВІДІ ДО ПРОЄКТУ

Крок 1. 1. МЕКСИКА; 2) БРАЗИЛІЯ.

Крок 3. Гіпербола.



ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Вираз ірраціональний 178

- підкореневий 147
- дробовий 14
- цілий 14

вирази взаємно спряжені 181

- тотожно рівні 16
- – на спільній ОДЗ їхніх змінних 17

виразу значення 14

- перетворення тотожне 17

властивість раціонального дробу основна 26

властивості арифметичного квадратного кореня 148

- степенів з однаковими основами 88
- – із різними основами й рівними показниками 89

Гіпербола 115

гіперболи вітки 116

Дріб десятковий нескінченний неперіодичний 168

- – періодичний 167
- скінченний 167
- нескоротний 28
- раціональний 24
- дробу скорочення 27
- співмножник 27

Змінної значення допустиме 15

- недопустиме 15

знаменник спільний 35

Кореня квадратного добування 147

корінь квадратний 146

- арифметичний 147
- сторонній 70

корінь кубічний 151

Множина 165

- порожня 166

- чисел дійсних 169

- ірраціональних 168

- натуральних 167

- раціональних 167

множини елементи 165

модель математична 258

модельовання математичне 258

- математичного етапи 259

Область допустимих значень змінної 15

означення степеня з цілим від'ємним показником 79

- – показником 0 80

Парабола 135

параболи вершина 136

- вітка 200

- вітки 136

підмножина 166

правило ділення раціональних дробів 61

Предметний показчик

– додавання/віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками 42

– додавання/віднімання раціональних дробів із різними знаменниками 43

– зведення раціонального дробу до нового знаменника 34

– двох раціональних дробів до спільного знаменника 36

– множення раціональних дробів 53

– піднесення раціонального дробу до степеня з натуральним показником n 54

Радикал 147

рівняння біквадратне 249

– дробове раціональне 69

– квадратне 210

– – зведене 210

– – неповне 210

– – повне 210

– квадратного дискримінант 219

– коефіцієнти 210

– корінь сторонній 70

– раціональне 68

– рівносильні 69

рівняння-наслідок 70

Спосіб виділення квадрата двочлена 211

- заміни змінної 249

Теорема Вієта 229

- – для повного квадратного рівняння 231

- про розкладання квадратного тричлена на лінійні множники 238

твердження, обернене до теореми Вієта для

зведеного квадратного рівняння 232

- – – – – повного квадратного рівняння 232

тричлен квадратний 238

тричлена квадратного коефіцієнти 238

- – корені 238

Формула коренів квадратного рівняння 220

- розкладання квадратного тричлена на лінійні множники 238

функція $y = \frac{k}{x}$ 114

- $y = \sqrt{x}$ 198

- $y = x^2$ 135

Числа порядок 50

- стандартний вигляд 90

число ірраціональне 168



ЗМІСТ

Дорогі учні й учениці 3

| |
|--|
| РОЗДІЛ 1. Узагальнення і систематизація вивченого в 7 класі 5 |
| Вирази. Тотожності. Одночлени і многочлени 5 |
| Функції 7 |
| Лінійні рівняння та їх системи 8 |
| Елементи стохастички 10 |

| |
|--|
| РОЗДІЛ 2. Раціональні вирази 13 |
| § 1. Раціональні вирази. Види раціональних виразів 13 |
| § 2. Раціональний дріб. Основна властивість раціонального дробу 24 |
| § 3. Зведення раціональних дробів до спільного знаменника 33 |
| § 4. Додавання і віднімання раціональних дробів 41 |
| § 5. Множення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня з натуральним показником 53 |
| § 6. Ділення раціональних дробів 60 |
| § 7. Раціональні рівняння 67 |
| § 8. Що таке степінь із цілим показником 78 |
| § 9. Властивості степенів із цілими показниками 87 |
| § 10. Перетворення раціональних виразів 100 |
| § 11. Функція $y = \frac{k}{x}$ 114 |

Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 2 132

| |
|---|
| РОЗДІЛ 3. Квадратні корені. Дійсні числа 135 |
| § 12. Функція $y = x^2$ 135 |
| § 13. Арифметичний квадратний корінь 145 |
| § 14. Множина та її елементи. Числові множини 165 |
| § 15. Перетворення ірраціональних виразів 178 |
| § 16. Функція $y = \sqrt{x}$ 198 |
| Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 3 209 |

Зміст

| |
|--|
| РОЗДІЛ 4. Квадратні рівняння 209 |
| § 17. Квадратні рівняння 209 |
| § 18. Формула коренів квадратного рівняння 217 |
| § 19. Теорема Вієта 229 |
| § 20. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники 237 |
| § 21. Рівняння, які зводяться до квадратних 245 |
| § 22. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь 257 |
| Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 4 274 |

| |
|---|
| РОЗДІЛ 5. Елементи стохастички 276 |
| § 23. Задачі на відсотки 276 |
| § 24. Робота з даними 285 |
| § 25. Комбінаторні задачі 295 |
| § 26. Ймовірність випадкової події 304 |
| Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 5 314 |

| |
|---|
| Задачі і вправи для повторення 316 |
| Проект «Гіпербола в архітектурі» 327 |
| Відповіді 330 |
| Предметний покажчик 350 |

Навчальне видання

**ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна
АКУЛЕНКО Ірина Анатоліївна
ДАНЬКО Олена Анатоліївна
КОЛОМІЄЦЬ Оксана Миколаївна
БОГАТИРЬОВА Ірина Миколаївна
СЕРДЮК Зоя Олексіївна**

АЛГЕБРА

**Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Головна редакторка *І. В. Красуцька*

Редакторка *І. В. Луценко*

Головна художниця *І. П. Медведовська*

Технічний редактор *Е. А. Авраменко*

Художня редакторка *К. В. Берсенєва*

Коректорка *Ю. О. Твердохліб*

Комп'ютерна графіка *О. І. Дядика*

Презентації та інтерактивні вправи *І. А. Акуленко*

В оформленні підручника використано фото з вільних джерел мережі «Інтернет»,
фотобанку *Shutterstock*

Бренди та ресурси зображуються лише з освітньою метою
та не є закликом до їх купівлі/відвідування

Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Ум. друк. арк. 22 + 0,25 форзац.

Обл.-вид. арк. 19,8 + 0,35 форзац.

ТОВ «Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»

Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.

Адреса видавництва: 03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелєва, 2

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

ОСНОВНА ВЛАСТИВИСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \quad \frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

ДІЇ З РАЦІОНАЛЬНИМИ ДРОБАМИ

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} &= \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{C \cdot D} & \frac{A}{B} : \frac{C}{D} &= \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C} \\ \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} &= \frac{A \cdot C}{B \cdot D} & \left(\frac{A}{B}\right)^n &= \frac{A^n}{B^n} \end{aligned}$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} & a^n \cdot b^n &= (ab)^n \\ a^n : a^m &= a^{n-m} & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ (a^m)^n &= a^{mn} \end{aligned}$$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНИХ КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &\geq 0, \text{ якщо } a \geq 0 \\ (\sqrt{a})^2 &= a, \text{ якщо } a \geq 0 \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{a \cdot b}, \text{ якщо } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ якщо } a \geq 0 \text{ і } b > 0 \\ \sqrt{a^2} &= |a|, \text{ якщо } a \text{ — будь-яке число} \end{aligned}$$

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

ТЕОРЕМА ВІСТА

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 & x_1 + x_2 &= -p, \\ & & x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ
НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

| Де-сят-ки | Одиниці | | | | | | | | | |
|-----------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

| a^n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-----|------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 | 262144 | |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 | | |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | | | |
| 7 | 49 | 242 | 2401 | 16807 | 117649 | | | | |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | | | | | |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | | | | | |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | | | | | | |