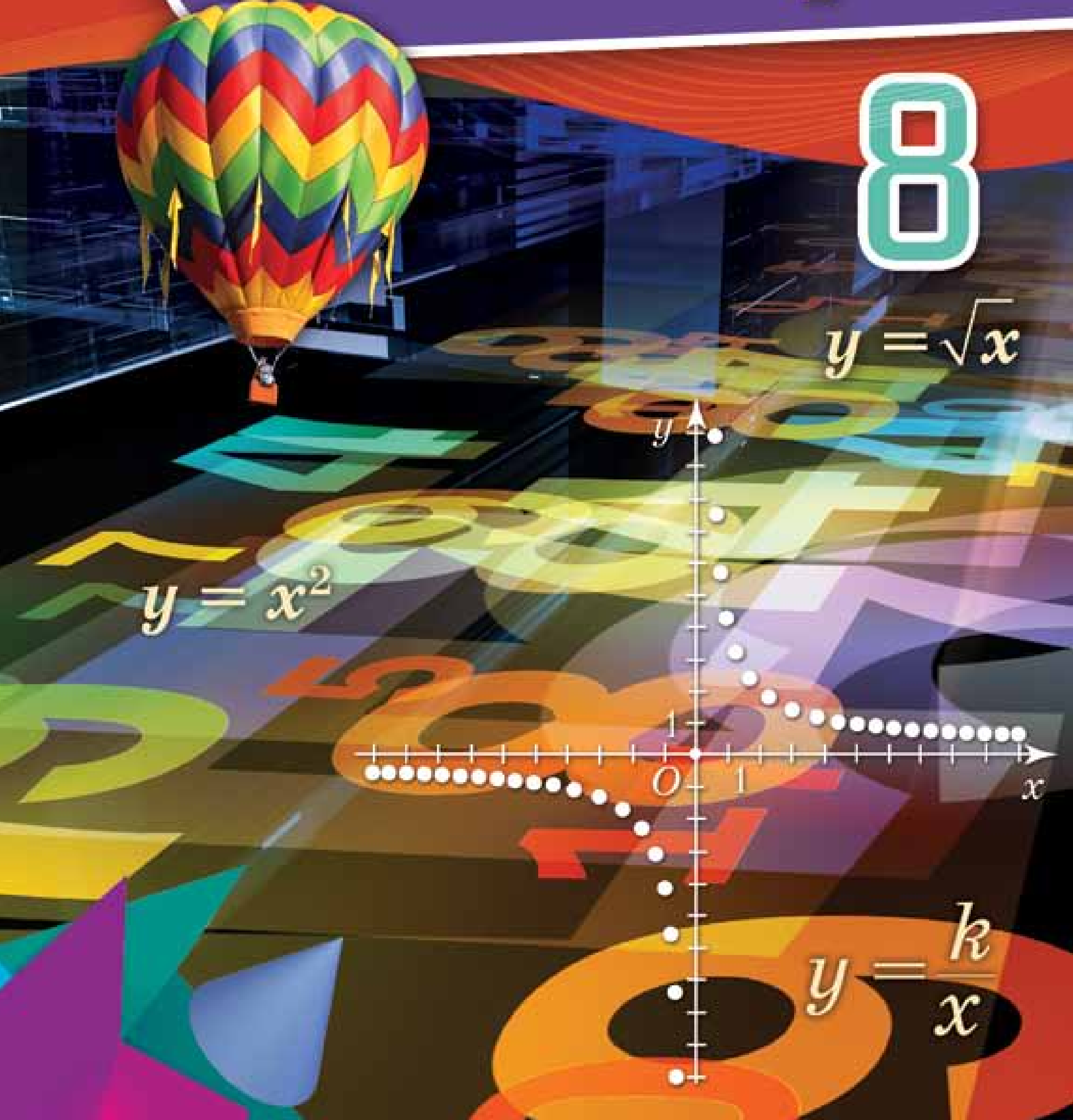
Ніна Тарасенкова
Ірина Богатирьова
Оксана Коломієць
Зоя Сердюк

Оріон

Алгебра

8



Ніна Тарасенкова, Ірина Богатирьова,
Оксана Коломієць, Зоя Сердюк

Алгебра

**Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
Оріон
2021

ДОРОГІ УЧНІ!

Алгебра — один з розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики та як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються в багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У 7-му класі ви навчилися перетворювати числові вирази та вирази зі змінними; доводити тотожності; виконувати дії з одночленами та многочленами; дізналися, що таке функція та які властивості має лінійна функція та її різновид — пряма пропорційність; навчилися будувати графіки цих функцій і досліджувати їх; розв'язувати деякі рівняння та їх системи. Тепер ви продовжите удосконалювати свої вміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити обґрунтовані висновки. Для цього потрібно наполегливо й відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома. А підручник вам у цьому допоможе.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Увесь матеріал поділено на три розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші формулювання виділено **жирним шрифтом** й відокремлено пунктирними лініями. На допомогу вам наведено поради з позначкою «Зверніть увагу». *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять. У рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано цікавий і корисний додатковий матеріал.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, та повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», а матеріал усієї теми — контрольні запитання й тестові завдання наприкінці розділу.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх потрібно навчитись розв'язувати всім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

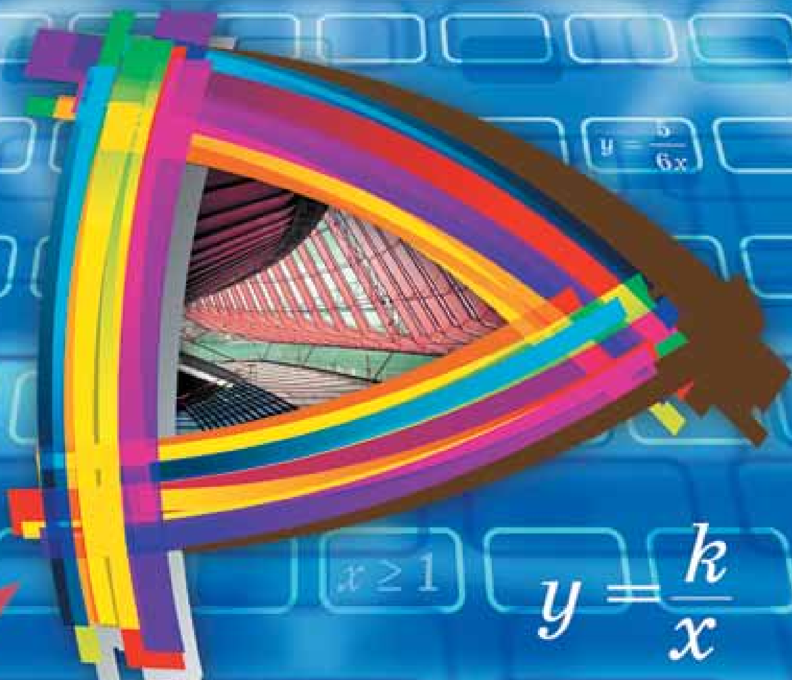
Бажаємо вам успіхів
у пізнанні нового та задоволення від навчання!

Розділ 1

Раціональні вирази

У розділі дізнаєтеся:

- про раціональні вирази та їх види;
- що таке раціональний дріб та яка його основна властивість;
- як виконувати дії з раціональними дробами;
- про способи розв'язування раціональних рівнянь;
- що таке степінь із цілим показником та які його властивості;
- як виконувати дії першого, другого і третього ступенів зі степенями із цілим показником;
- про функцію $y = \frac{k}{x}$ та її властивості;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці



§1 Раціональні вирази. Види раціональних виразів

1. ВИДИ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ. ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМИХ ЗНАЧЕНЬ ЗМІННОЇ

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте, що таке *вираз зі змінними* та які з них відносять до *раціональних виразів*. Пригадайте відповідне означення та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Вираз зі змінними **називається** ***раціональним*****, якщо він містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з цілим показником.**

Наприклад, раціональними є вирази:

$$\frac{2}{7}x, \quad (2+a):(10-4), \quad \frac{c-3}{24+c}, \quad 2(x+y)^4:12y.$$

? Чи всі вирази зі змінними є раціональними? Ні. Існують ще й *ірраціональні вирази*. Вони, крім відомих вам дій, містять деякі інші дії. Про них ви дізнаєтеся пізніше.

Кожний із наведених раціональних виразів містить дію ділення. Проте у виразах $\frac{2}{7}x$ і $(2+a):(10-4)$ ділення здійснюється лише на число або на числовий вираз, а у виразах $\frac{c-3}{2c+4}$ і $2(x+y)^4:12y$ — на вираз зі змінною. Перші два вирази вважають *цілими*, а інші два — *дробовими*.

Раціональний вираз **є** ***цілим*****, якщо він не містить ділення на вираз зі змінною.**

Раціональний вираз **є** ***дробовим*****, якщо він містить ділення на вираз зі змінною.**

Ви вже знаєте, що змінні в раціональному виразі можна замінити числами (*значеннями змінних*). Тоді раціональний вираз перетвориться на числовий. Значення цього числового виразу називають *значенням* раціонального *виразу* для заданих значень змінних. Наприклад:

якщо $a = 4$, то $(2 + a) : (10 - 4) = (2 + 4) : 6 = 1$;

якщо $a = -8$, то $(2 + a) : (10 - 4) = (2 + (-8)) : 6 = -1$.

Отже, для $a = 4$ даний вираз набуває значення 1, а для $a = -8$ — значення -1.

Чи завжди можна знайти значення раціонального виразу? Ні. Поміркуємо.

Наприклад, підставимо у вираз $2(x + y)^4 : 12y$ значення $y = 0$. Одержимо, що $12y = 0$, тобто дільник виразу дорівнює нулю. Це означає, що за такого значення змінної даний *вираз втрачає зміст*, бо на нуль ділити не можна. Отже, для даного виразу число 0 є *недопустимим значенням змінної*. Будь-яке інше число не перетворює на нуль дільник цього виразу і тому є *допустимим значенням змінної* для нього. Отже, даний вираз має зміст лише тоді, коли $y \neq 0$.

Аналогічно, для виразу $\frac{c-3}{2c+4}$ значення $c = -2$ є недопустимим, бо за такого значення змінної його знаменник дорівнює нулю і вираз $\frac{c-3}{2c+4}$ втрачає зміст. Отже, даний вираз має зміст для будь-якого значення c, крім -2.

Усі значення змінної, допустимі для даного виразу, утворюють *область допустимих значень змінної* цього виразу.

Коротко це записують так.

ОДЗ: c — будь-яке число, крім -2, або $c \neq -2$.

Зверніть увагу:
- якщо раціональний вираз містить більш як одну змінну, то ОДЗ вказують для кожної змінної;
- для цілого виразу ОДЗ кожної змінної містить усі числа;
- для дробового виразу ОДЗ кожної змінної може містити не всі числа.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДРОБОВОГО ВИРАЗУ

Ви вже знаєте, що значення раціонального виразу залежить від значень його змінних. У 7-му класі ви навчились обчислювати значення цілих виразів. Знаходження значень дробових виразів має свої особливості.

Задача. Знайдіть значення виразу $\frac{x+y}{x-1}$ для всіх цілих значень змінних від –0,5 до 1,5.

Розв'язання. Даний вираз є дробовим виразом, отже, треба визначати ОДЗ кожної із двох його змінних: x і y. Щоб знайти недопустимі значення змінних, прирівняємо знаменник даного виразу до нуля: $x - 1 = 0$, звідси $x = 1$. Отже, число 1 — недопустиме значення змінної x. Змінна y не входить до знаменника даного виразу, тому вона може набувати будь-яких значень. Одержали:
ОДЗ: x — будь-яке число, крім 1; y — будь-яке число.
За умовою, кожна зі змінних x і y може набувати цілих значень від –0,5 до 1,5, тобто дорівнювати або числу 0, або числу 1. Але для змінної x значення 1 є недопустимим, тому його не можна використовувати в обчисленнях.
Щоб знайти значення даного виразу, треба утворити різні пари значень змінних x і y, де для x використати лише число 0, а для y — два числа: 0 і 1.
Для впорядкування обчислень можна скласти таблицю 1.

Таблиця 1

Вираз	Допустимі значення змінних		Підстановка значень змінних та обчислення	Значення виразу
	x	y		
$\frac{x+y}{x-1}$	0	0	$\frac{0+0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$	0
	0	1	$\frac{0+1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$	–1

Коротко розв'язання задачі можна записати так:
ОДЗ: x — будь-яке число, крім 1; y — будь-яке число.
Якщо $x = 0$ і $y = 0$, то $\frac{0+0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$.
Якщо $x = 0$ і $y = 1$, то $\frac{0+1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$.
Відповідь: 0, якщо $x = 0$ і $y = 0$; –1, якщо $x = 0$ і $y = 1$.

Зверніть увагу:
щоб обчислити значення раціонального виразу для деяких значень змінних, потрібно:

1) визначити ОДЗ кожної змінної виразу;

2) підставити у вираз набори з допустимих значень змінних, перебравши всі можливі варіанти їх комбінування;

3) обчислити значення кожного з одержаних числових виразів.

3. ТОТОЖНО РІВНІ ВИРАЗИ

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте, що два цілі вирази можуть бути *тотожно рівними*. Наприклад, вирази $3a - a$ і $2a$, $6a : 2$ і $3a$ є тотожно рівними, оскільки вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їхніх змінних. Заміна виразу тотожно рівним йому виразом — це *тотожне перетворення виразу*. Наприклад, $3a - a = 2a$, $6a : 2 = 3a$.

До дробових раціональних виразів також можна застосовувати тотожні перетворення. Але тут є свої обмеження, оскільки дробові вирази можуть втрачати зміст за деяких значень їхніх змінних. Наприклад, дробовий вираз $8a^2 : 4a$ втрачає зміст, якщо $a = 0$. Тому виконувати будь-які перетворення цього виразу можна лише за умови: $a \neq 0$.

? Чи є тотожно рівними вирази $8a^2 : 4a$ і $2a$? Поміркуємо.

ОДЗ змінної виразу $8a^2 : 4a$ — будь-яке число, крім нуля. ОДЗ змінної виразу $2a$ містить усі числа, тому цей вираз має зміст і на ОДЗ змінної першого виразу. Загалом, обидва вирази одночасно мають зміст лише тоді, коли $a \neq 0$. Це означає, що вираз $8a^2 : 4a$ можна замінити виразом $2a$, якщо $a \neq 0$, тобто на спільній ОДЗ їхніх змінних. Отже, вирази $8a^2 : 4a$ і $2a$ є *тотожно рівними на спільній ОДЗ їхніх змінних*.

Звідси випливає, що заміна виразу $8a^2 : 4a$ виразом $2a$, якщо $a \neq 0$, є тотожним перетворенням даного дробового виразу.

Зверніть увагу:
дробові раціональні вирази можна тотожно перетворювати лише на ОДЗ їхніх змінних.

Оскільки знаходження ОДЗ змінних дробових виразів є окремою задачею й не завжди простою, то надалі будемо опускати цей крок і вважатимемо, що **всі тотожні перетворення дробових раціональних виразів виконуються на ОДЗ їхніх змінних.**

Дізнайтеся більше

Україна — держава, розташована у Східній Європі, має площу 603 628 км^2 і займає сорок шосте місце у списку країн світу за площею. Найбільшою за площею в Україні є Одеська область, її площа дорівнює 33 310 км^2, що становить приблизно $\frac{37}{671}$ загальної площі України; найменшою — Чернівецька область із площею всього 8097 км^2, що становить близько $\frac{9}{671}$ загальної площі України. Наприклад, Черкаська область міститься в центральній частині України й має площу 20 900 км^2 $\left(\frac{23}{671}\right.$ загальної площі України$\left.\right)$; Сумська область розташована в північно-східній Україні й займає площу 23 834 км^2 $\left(\frac{26}{671}\right.$ загальної площі України$\left.\right)$. А от Івано-Франківська область, що розташована на південному заході нашої держави й має площу 13 928 км^2 $\left(\frac{15}{671}\right.$ загальної площі України$\left.\right)$, є найбільш густозаселеним регіоном України.

Пригадайте головне

1. Який вираз називається раціональним? Наведіть приклади.
2. Який раціональний вираз є цілим; дробовим?
3. Які значення змінних є недопустимими для дробового виразу?
4. Що таке область допустимих значень змінної виразу?
5. Поясніть, як обчислити значення раціонального виразу для заданих значень змінних.
6. Які вирази називають тотожно рівними?
7. Що називають тотожним перетворенням виразу?

Розв'яжіть задачі

1'. Укажіть правильне твердження:

1) раціональний вираз є цілим, якщо він містить ділення на вираз зі зміною;

2) раціональний вираз є дробовим, якщо він містить ділення на вираз зі зміною;

3) раціональний вираз є цілим, якщо він не містить ділення на вираз зі зміною;

4) раціональний вираз є дробовим, якщо він не містить ділення на вираз зі зміною.

2'. Чи правильно, що цілим є вираз:

1) $\frac{2}{7}abc^2$; 2) $\frac{3}{8}+2k^3n$; 3) $\frac{2a}{3b}$; 4) $\frac{5-c}{5+c}$?

3'. Чи правильно, що дробовим є вираз:

1) $\frac{1}{9}a+b^3c^2$; 2) $\frac{3}{8}cd+\frac{4}{7}$; 3) $\frac{2+a^2}{3-b}$; 4) $\frac{2-c^2}{3+c^2}$?

4'. Чи правильно, що раціональним є вираз:

1) $\frac{1}{9}ab^4c^4$; 2) $ad-\frac{5}{7}$; 3) $\frac{1+a^2}{1-a^3}$; 4) $\frac{2bc^2}{3ad^2}$?

5'. Чи правильно, що вираз $\frac{4}{x-6}$ втрачає зміст, якщо:

1) $x=4$; 2) $x=0$; 3) $x=-6$; 4) $x=6$?

6'. Чи правильно, що вираз $3:(5+y)$ втрачає зміст, якщо:

1) $y=3$; 2) $y=5$; 3) $y=-5$; 4) $y=0$?

7°. Чи правильно, що знаменник виразу $\frac{4-x}{(x-1)(x+3)}$ перетворюється на нуль, якщо:
1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3$; 4) $x = 0$; 5) $x = -3$?

8°. Чи правильно, що дільник виразу $(3+y^2):(4-y^2)$ перетворюється на нуль, якщо:
1) $y = 0$; 2) $y = 2$; 3) $y = -3$; 4) $y = -2$; 5) $y = 4$?

9°. Дано вираз $\frac{4+x}{4-x^2}$. Чи є допустимим для даного виразу таке значення змінної x:
1) 4; 2) −2; 3) 0; 4) −4; 5) 2; 6) 1?
Назвіть ОДЗ змінної даного виразу.

10°. Дано вираз $\frac{4+b}{(1-b)(2+b)}$. Чи правильно вказано ОДЗ змінної b даного виразу:
1) $b \neq 1$; 2) $b \neq 2$, $b \neq 1$; 3) $b \neq -2$, $b \neq 1$; 4) $b \neq -2$?

11°. Чи правильно, що лише для $x \neq 3$ має зміст вираз:
1) $\frac{15+x}{3x}$; 2) $\frac{3}{x+3}$; 3) $\frac{-2x}{3-x}$; 4) $\frac{x+1}{2x-6}$;
5) $(x-3):(x+3)$; 6) $(x^2-3)(x-3)$?

12°. Визначте ОДЗ змінної виразу:
1) $\frac{2x+1}{x-2}$; 2) $\frac{3c-1}{3-c}$; 3) $\frac{5b+2}{5b-5}$; 4) $\frac{5-y}{5+y}$;
5) $(b^2-1):(b^2+1)$; 6) $(c+4)(4-c)$.

13°. Визначте ОДЗ змінної виразу:
1) $\frac{2x-3}{x+1}$; 2) $\frac{3a+2}{2-a}$; 3) $\frac{5z+1}{3z+3}$; 4) $\frac{7-y}{7+y}$;
5) $(a-7):(1+a^2)$.

14°. Дано вирази:
1) $\frac{a-1}{a-*}$; 5) $\frac{3-5a}{4a-*}$;
2) $\frac{2a+1}{*-a}$; 6) $\frac{3a}{*+2a}$;
3) $\frac{a+2}{2a-*}$; 7) $\frac{2a-1}{*+a}$;
4) $\frac{5+a}{*-3a}$; 8) $\frac{5a}{*+3a}$;

9) $\left(a^2-2\right):(3a-*)$; 10) $(a+5):(5a-*)$.

Вставте замість * число, якщо ОДЗ змінної a така: $a \neq 2$.

15°. Дано вирази:

1) $\dfrac{b+1}{b-*}$; 2) $\dfrac{3b+2}{*-b}$; 3) $\dfrac{6b}{3b-*}$; 4) $\dfrac{1+2b}{*-2b}$; 5) $b:(5b-*)$.

Вставте замість * число, якщо ОДЗ змінної b така: $b \neq 3$.

16°. Чи правильно, що значення виразу $\dfrac{2z-1}{3z}$ дорівнює 0, якщо:

1) $z=2$; 2) $z=1$; 3) $z=0{,}5$; 4) $z=0$?

17°. Чи правильно, що значення виразу $\dfrac{5-3a}{2a}$ дорівнює 1, якщо:

1) $a=2$; 2) $a=-1$; 3) $a=0$; 4) $a=1$?

18°. Чи є тотожно рівними вирази для будь-яких значень змінної a:

1) $\dfrac{a^3}{a}$ і a; 3) $\dfrac{a-3}{a}$ і $\dfrac{a}{a-3}$;

2) $\dfrac{a^2-9}{a-3}$ і $a+3$; 4) $\dfrac{(a-3)^2}{a}$ і $\dfrac{(a-3)(a-3)}{a}$?

19°. Обчисліть значення виразів за таблицею 2.

Таблиця 2

a	1	2	3	5
b	2	0,5	$-\dfrac{1}{2}$	10
$(a-b):(a+b)$				
$\dfrac{a+2b}{b-a}$				
$\dfrac{a-2b}{4+a}$				

20°. Обчисліть значення виразів за таблицею 3.

Таблиця 3

c	-1	9	-3	-3
d	1	2	$2\dfrac{2}{3}$	0,2
$(c+d):(c-d)$				
$\dfrac{c-3d}{1+d}$				

21. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:

1) $\frac{2a+c}{2ac}$;
2) $\frac{3b-a}{4ab^2}$;
3) $\frac{5c+b}{5b^2c}$;
4) $(3x+y):4xy^3$;
5) $\frac{2ac}{2(a-1)(c+1)}$;
6) $\frac{3ab}{4(a-2)(b+3)}$;
7) $\frac{5bc}{5(4-b)(3-c)}$;
8) $2x^2y:((3-x)(y-4))$;
9) $\frac{3ac}{(a+1)^2c^3}$;
10) $\frac{5bc}{2(b-5)^2(1-c)}$;
11) $\frac{7ac}{3(2-a)^2(c+2)}$;
12) $(3y-x):((x+2)^2(3-y)^2)$;
13) $\frac{3xy}{(2x-5)(3x+4)}$;
14) $\frac{4ax}{5(3-4a)(3x+2)}$;
15) $\frac{5c}{6(4b-1)(1-4c)}$;
16) $2cd:((3d-4)(5-3c))$.

22. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:

1) $\frac{2a+1}{4-a^2}$;
2) $\frac{3b-2}{9-b^2}$;
3) $\frac{5cb}{b^2-25}$;
4) $3xy:(x^2-16)$;
5) $2y:(3y^2-75)$;
6) $\frac{2a}{a^2-2a+1}$;
7) $\frac{3b}{4(b^2-6b+9)}$;
8) $5c:(25+10b+b^2)$;
9) $5x^2:(12+12x+3x^2)$.

23. Визначте ОДЗ кожної змінної виразу:

1) $\frac{2b-3c}{7bc}$;
2) $\frac{x^2y}{2(x-1)(y+2)}$;
3) $3ab:((2-a)b)^2$;
4) $\frac{6xy}{(3x-8)(2x+6)}$;
5) $\frac{2a}{27a^2-3}$;
6) $3y:(y^2-8y+16)$.

24. У записі $\frac{3+a^2}{*}$ замість * підставте такий вираз, щоб в одержаному виразі ОДЗ змінної a набувала вигляду:

1) $a \ne 2$; 2) $a \ne -3$; 3) $a \ne 0,5$; 4) $a \ne 0,4$; 5) $a \ne -\frac{2}{3}$.

25. У записі $\frac{1+2b^2}{*}$ замість * підставте такий вираз, щоб в одержаному виразі ОДЗ змінної b набувала вигляду:

1) $b \neq 1$ і $b \neq -1$; 3) $b \neq 3$ і $b \neq -3$; 5) $b \neq -1$ і $b \neq -\frac{3}{5}$;

2) $b \neq -2$ і $b \neq 2$; 4) $b \neq 2$ і $b \neq \frac{3}{4}$; 6) $b \neq 5$ і $b \neq -\frac{1}{3}$.

26. У записі $\frac{2+c^4}{*}$ замість * підставте такий вираз, щоб в одержаному виразі ОДЗ змінної c набувала вигляду:

1) $c \neq 3$; 2) $c \neq -\frac{2}{5}$; 3) $c \neq -1$ і $c \neq 5$; 4) $c \neq \frac{1}{3}$ і $c \neq \frac{1}{4}$.

27. Знайдіть значення виразу $\frac{2z}{|z|+1}$, якщо:

1) $z = 0$; 2) $z = \frac{1}{3}$; 3) $z = -0,2$; 4) $z = -\frac{5}{6}$; 5) $z = 1,5$.

28. Знайдіть значення виразу $3x : (4 - |x|)$, якщо:

1) $x = 0$; 2) $x = 4$; 3) $x = -0,5$; 4) $x = -\frac{2}{3}$; 5) $x = 1,5$.

29. Знайдіть значення виразу $\frac{5x}{4 - \frac{4}{x}}$, якщо:

1) $x = 1$; 2) $x = 2$; 3) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = -1$.

30. Знайдіть значення виразу $\frac{5y}{2 - |y|}$, якщо:

1) $y = 0$; 2) $y = 2$; 3) $y = -1,5$; 4) $y = -\frac{4}{5}$.

31. Автомобіль рухається зі швидкістю x км/год і проїжджає відстань $2x + 40$ км. Складіть вираз для знаходження часу (у годинах). Знайдіть його значення, якщо: 1) $x = 50$ км/год; 2) $x = 60$ км/год; 3) $x = 80$ км/год; 4) $x = 100$ км/год.

32. Одна сторона прямокутника дорівнює $3a$ см, а число, що виражає його площу, на 4 більше за число, яке виражає довжину подвоєної сторони. Складіть вираз для знаходження іншої сторони прямокутника (у сантиметрах). Знайдіть його значення, якщо: 1) $a = 2$ см; 2) $a = 5$ см; 3) $a = 3$ дм; 4) $a = 6$ см 4 мм.

33. Одна сторона прямокутника дорівнює $4b$ см, а число, що виражає його площу, на 1 більше за число, яке виражає довжину подвоєної сторони. Складіть вираз для знаходження іншої сторони прямокутника (у сантиметрах). Знайдіть його значення, якщо: 1) $b = 1$ см; 2) $b = 3$ см; 3) $b = 2$ дм; 4) $b = 5$ см 5 мм.

34. Складіть вираз для знаходження сторони прямокутника, якщо число, що виражає його площу, на 2 менше від числа, яке виражає довжину потроєної іншої сторони (у сантиметрах). Знайдіть його значення, якщо довжина однієї сторони прямокутника дорівнює: 1) 3 см; 2) 4 см 5 мм.

35. Відомо, що за деяких значень x і y значення виразу $x - y$ дорівнює 2,5. Якого значення за тих самих значень x і y набуває вираз:

1) $\dfrac{4}{x-y}$; 3) $5 - 12 : (4y - 4x)$; 5) $\dfrac{3}{5y-5x} + \dfrac{2}{3}$;

2) $\dfrac{3}{2y-2x}$; 4) $\dfrac{3}{4(x-y)^2}$; 6) $(6 : (10x - 10y)) \cdot 5$?

36. Відомо, що за деяких значень c і d значення виразу $c + d$ дорівнює 1,2. Якого значення за тих самих значень c і d набуває вираз:

1) $\dfrac{6}{c+d}$; 2) $12 : (-3c - 3d)$; 3) $\dfrac{1}{2d+2c} - \dfrac{5}{6}$?

37. Який вираз треба вставити замість *, щоб одержані вирази були тотожно рівними на ОДЗ змінної x:

1) $\dfrac{2x}{x+3}$ і $\dfrac{2x^2+6x}{*}$; 2) $\dfrac{x}{x-5}$ і $\dfrac{x^2-5x}{*}$?

38*. Визначте, за яких значень змінної z має зміст вираз:

1) $\dfrac{2z}{|z|+1}$; 3) $4 : (2|z| - 1)$; 5) $\dfrac{2+|z|}{|z+3|-3}$;

2) $\dfrac{3+z}{3-|z|}$; 4) $\dfrac{4+|z|}{|z-1|-1}$; 6) $(3 - |z+1|) : (3 - |3-z|)$.

39*. Відомо, що $a + 3b = 6$ і $c = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{5c}{6a+18b}$; 2) $(-2a - 6b) : 5c + 1$; 3) $\dfrac{(a-2b)+5(b+c)}{5c}$.

40*. Знайдіть область допустимих значень змінних виразу:

1) $\dfrac{2x}{2 - \dfrac{2}{2 - \dfrac{x}{2}}}$; 2) $\dfrac{3}{3 - \dfrac{3}{\dfrac{x}{3} - 3}}$.

Проявіть компетентність

41. Дід Андрій хоче зробити два однакові вулики, що мають форму прямокутного паралелепіпеда. Загалом у діда Андрія є S м^2 дощок.

1. Якою має бути висота вулика, якщо ширина та довжина його основи дорівнюють a см і b см відповідно?
2. Знайдіть висоту вулика, якщо відомо, що $a = 50$ см, $b = 90$ см, $S = 6$ м^2. Відповідь запишіть у сантиметрах.
3. Дізнайтеся в Інтернеті про розміри дощок для вуликів і їхню ціну та запропонуйте дідові Андрію розрахунок витрат для пасіки з десяти вуликів (розміри вуликів визначені вами в попередньому пункті задачі).

Задачі на повторення

42. Обчисліть:

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$;

2) $\frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{4}{15}$;

3) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{11}{16}$.

43. Обчисліть:

1) 1 год 25 хв + 3 год 40 хв + 5 год 18 хв;

2) 3 км 255 м – 1 км 14 м – 1 км 162 м.

§ 2 Раціональний дріб. Основна властивість раціонального дробу

1. ЩО ТАКЕ РАЦІОНАЛЬНИЙ ДРІБ

Ви вже знаєте, що дробовий раціональний вираз містить ділення на вираз зі змінними. Проте не кожний такий вираз називають дробом. Наприклад, вираз $(x + 5) : 2xy$ є дробовим раціональним виразом, але він не є дробом. Однак цей вираз можна подати як дріб, замінивши знак ділення рискою дробу: $\frac{x+5}{2xy}$. *Дріб* — це особлива *форма запису результату дії ділення*. Ви знаєте, що за допомогою *звичайного дробу* можна подати частку від ділення двох натуральних чисел, наприклад: $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{2}$. Відповідно, за допомогою *раціонального дробу* можна подати частку від ділення: двох раціональних виразів; раціонального виразу й числового виразу; числового виразу й раціонального виразу. Наприклад, раціональними дробами є вирази:

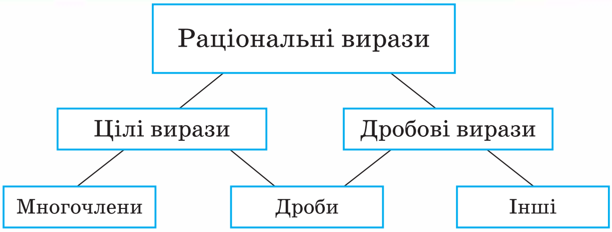
$$\frac{2a+1}{7b},\ \frac{x-7}{6},\ \frac{5+1}{m^3+m+1}.$$

? Чи може раціональний дріб бути цілим виразом? Так. Наприклад, дріб $\frac{x-7}{6}$ не містить ділення на вираз зі змінною, тому він є цілим раціональним виразом.

Надалі розглядатимемо дроби, які містять ділення на вираз зі змінною.

Дробовий раціональний вираз, який є сумою чи різницею кількох дробів, не можна вважати раціональним дробом. Наприклад, вираз $\frac{2a+1}{7b}+\frac{c^2-3}{2\ \ +9}$ є дробовим раціональним виразом, але не є дробом.

Зв'язок між цілими і дробовими виразами, а також раціональними дробами зображено на малюнку 1.



Мал. 1

2. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

У 6-му класі ви вивчили основну властивість звичайного дробу. Наприклад, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{6}{15}$ або ж $\frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3}$.

? Чи можна застосувати основну властивість дробу до раціональних дробів? Так. Розглянемо приклад.

Нехай дано дріб $\frac{5x}{3y}$. Позначимо його як P, а його чисельник і знаменник — як A і B відповідно, тобто $P=\frac{A}{B}$. Звідси $P\cdot B=A$. Домножимо обидві частини даної рівності на $C=4y^2$, де $y\neq 0$, а значить, і $C\neq 0$. Одержали рівність, тотожну даній на ОДЗ змінних початкового виразу: $P\cdot B\cdot C=A\cdot C$. Звідси $P=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$, тобто $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ або, що те саме: $\frac{5x}{3y}=\frac{5x\cdot 4y^2}{3y\cdot 4y^2}=\frac{20xy^2}{12y^3}$.

Отже, ми одержали новий дріб $\frac{20xy^2}{12y^3}$, який дорівнює початковому дробу $\frac{5x}{3y}$ на ОДЗ його змінних.

«Прочитаємо» рівність $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ справа наліво. Виходить, що другий дріб можна перетворити на перший, якщо чисельник і знаменник другого дробу поділити на однаковий множник C ($C\neq 0$):

$$\frac{(A\cdot C):C}{(B\cdot C):C}=\frac{A\cdot(C:C)}{B\cdot(C:C)}=\frac{A\cdot 1}{B\cdot 1}=\frac{A}{B}.$$

Або, що те саме:

$$\frac{20xy^2}{12y^3}=\frac{(5x\cdot 4y^2):4y^2}{(3y\cdot 4y^2):4y^2}=\frac{5x\cdot(4y^2:4y^2)}{3y\cdot(4y^2:4y^2)}=\frac{5x\cdot 1}{3y\cdot 1}=\frac{5x}{3y}.$$

Спробуйте сформулювати основну властивість раціонального дробу та порівняйте власне формулювання з наведеним у підручнику.

Основна властивість раціонального дробу

Значення раціонального дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий многочлен, який тотожно не дорівнює нулю.

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\text{ якщо } C\neq 0,\quad \frac{A}{B}=\frac{A:C}{B:C},\text{ якщо } C\neq 0$$

Зверніть увагу:

дріб $\frac{A}{B}$ можна записати ще й так: $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$.

Задача 1. Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{14m}{7m^3}$ на вираз $7m$, що тотожно не дорівнює нулю. Який дріб при цьому одержимо?

Розв'язання. $\frac{14m}{7m^3}=\frac{14m:7m}{7m^3:7m}=\frac{2}{m^2}$. Згідно з основною властивістю дробу, одержали дріб $\frac{2}{m^2}$, що дорівнює даному дробу на ОДЗ його змінної.

Зверніть увагу:

усі тотожні перетворення раціональних дробів виконують на ОДЗ їхніх змінних.

3. СКОРОЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

Ви знаєте, що звичайні дроби скорочують, спираючись на основну властивість дробу. Наприклад:

$$\frac{15}{25}=\frac{15:5}{25:5}=\frac{3}{5}.$$

Чи можна скорочувати раціональні дроби? Так. Наприклад, у задачі 1 чисельник і знаменник дробу $\frac{14m}{7m^3}$ ми поділили на той самий вираз $7m$, що тотожно не дорівнює нулю, й одержали дріб $\frac{2}{m^2}$.

Таке перетворення раціонального дробу на ОДЗ його змінних називають *скороченням дробу*. Вираз, на який скорочують дріб, називають співмножником чисельника і знаменника даного дробу, або коротко — *співмножником дробу*. Так, вираз $7m$ є співмножником дробу $\frac{14m}{7m^3}$.

Зверніть увагу:
щоб скоротити раціональний дріб, потрібно знайти його співмножник та поділити на нього чисельник і знаменник даного дробу згідно з основною властивістю дробу.

Оскільки раціональний дріб скорочують на співмножник, то виникає потреба розкладання на множники многочленів у чисельнику і знаменнику дробу.

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте, що розкласти многочлен на множники можна:

1) способом винесення спільного множника за дужки;
2) за допомогою формул скороченого множення;
3) способом групування.

Розглянемо застосування кожного із цих способів для скорочення дробів.

Задача 2. Скоротіть дріб: $\frac{2n^3+6n^2}{3n^4}$.

Розв'язання. Знаменник даного дробу є добутком, а чисельник — сумою. Щоб скоротити дріб, потрібно розкласти на множники чисельник. Для цього в чисельнику винесемо за дужки спільний множник $2n^2$:

$$2n^3 + 6n^2 = 2n^2(n + 3).$$

Бачимо, що даний дріб можна скоротити на n^2.

Застосуємо основну властивість дробу і скоротимо даний дріб:

$$\frac{2n^3+6n^2}{3n^4}=\frac{2\cancel{n^2}(n+3)}{3\cancel{n^4}^{\,2}}=\frac{2(n+3)}{3n^2}.$$

Задача 3. Скоротіть дріб: $\frac{a^2+6a+9}{3a+9}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник даного дробу, перетворивши повний квадрат $a^2 + 6a + 3$ у квадрат двочлена $(a + 3)^2$, який є добутком. У знаменнику даного дробу винесемо за дужки спільний множник 3, тоді в дужках одержимо вираз $a + 3$. Отже, даний дріб можна скоротити на вираз $a + 3$.

Застосуємо основну властивість дробу і скоротимо даний дріб:

$$\frac{a^2+6a+9}{3a+9}=\frac{(a+3)^{\cancel{2}}}{3\left(\cancel{a+3}\right)}=\frac{a+3}{3}.$$

Задача 4. Скоротіть дріб: $\dfrac{a^3+2a^2+9a+18}{a+2}$.

Розв'язання. Чисельник даного дробу розкладемо на множники способом групування, а потім скоротимо даний дріб на вираз $a + 2$, застосувавши основну властивість дробу:

$$\frac{a^3+2a^2+9a+18}{a+2}=\frac{a^2(a+2)+9(a+2)}{a+2}=\frac{\cancel{(a+2)}(a^2+9)}{\cancel{a+2}}=a^2+9.$$

Чи завжди можна скоротити раціональний дріб? Ні. Наприклад, якщо дріб не має співмножника, тобто в його чисельнику і знаменнику не можна виділити однакові множники, то цей дріб скоротити не можна. Такий дріб називають *нескоротним дробом*.

Зверніть увагу:

дріб $\dfrac{a+3}{a}$ є нескоротним. Цей дріб не можна скорочувати на a.

Дізнайтеся більше

Задача. За яких цілих n значення дробу $\dfrac{2n^2+3n-5}{n-3}$ є цілим числом?

Розв'язання. Пригадайте, як виділити цілу частину з неправильного дробу, наприклад, $\dfrac{17}{3}$. Для цього потрібно чисельник 17 поділити на знаменник 3. У результаті одержимо, що неповна частка дорівнює 5, а остача — 2, тому $\dfrac{17}{3}=5\dfrac{2}{3}$.

Аналогічно можна діяти і з раціональними дробами. Поділимо чисельник даного раціонального дробу на його знаменник:

$$\begin{array}{r|l}
2n^2+3n-5 & n-3 \\ \cline{2-2}
2n^2-6n & 2n+9 \\ \cline{1-1}
9n-5 & \\
9n-27 & \\ \cline{1-1}
22 &
\end{array}$$

Одержали: $$\frac{2n^2+3n-5}{n-3}=2n+9+\frac{22}{n-3}.$$

Отже, заданий раціональний дріб ми подали у вигляді суми многочлена $2n + 9$ і дробу $\frac{22}{n-3}$. Значення многочлена $2n + 9$ за будь-якого цілого значення n є цілим числом. Тому з'ясуємо, за яких значень n дріб $\frac{22}{n-3}$ набуватиме цілих значень. Це можливо лише тоді, коли значення виразу $n - 3$ є дільником числа 22. Перебравши всі дільники числа 22 (з урахуванням знаків), а саме: –22, –11, –2, –1, 1, 2, 11, 22, знайдемо шукані значення n (табл. 4).

Таблиця 4

$n - 3$	–22	–11	–2	–1	1	2	11	22
n	–19	–8	1	2	4	5	14	25

Отже, даний раціональний дріб набуватиме цілих значень, якщо n дорівнює: –19; –8; 1; 2; 4; 5; 14; 25.

Пригадайте головне

1. Що таке раціональний дріб?
2. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.
3. Чи завжди можна скоротити раціональний дріб?
4. Який раціональний дріб називають нескоротним?

Розв'яжіть задачі

44'. Наведіть приклад раціонального дробу.

45'. Чи правильно, що раціональним дробом є вираз:

1) a^2+2a+3; 2) $\frac{a-4}{3}$; 3) $\frac{1-a^2}{1-b}$; 4) $(2-x^2):4$?

46°. Домножте чисельник і знаменник дробу $\frac{x-1}{2}$ на:

1) x; 3) x^2; 5) 8;
2) 5; 4) $2x^3$; 6) $x+1$.

Запишіть одержаний дріб.

47°. Домножте чисельник і знаменник дробу $\frac{x+1}{3}$ на:

1) 6; 2) x; 3) x^2; 4) $3x^3$; 5) $12x$; 6) $x-1$.
Запишіть одержаний дріб.

48°. Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{6x^2y^3}{24xy^4}$ на:

1) 6; 2) $2x$; 3) $3y$; 4) $6xy$; 5) $3xy^3$; 6) $2xy^2$.
Запишіть одержаний дріб.

49°. Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{8x^3y^4}{32x^2y^3}$ на:

1) 4; 2) $4x$; 3) $8y$; 4) $4xy$; 5) $2x^2y$; 6) $8x^2y^3$.
Запишіть одержаний дріб.

50°. Чи правильно виконано скорочення дробу: $\frac{5x^2y^3}{25xy^2} = \frac{x}{5y}$?

Якщо ні, то знайдіть помилку.

51°. Чи можна скоротити дріб:

1) $\frac{3x^2}{6x^3}$; 3) $\frac{5ac}{3b}$; 5) $\frac{4b^2c}{5ad}$;

2) $\frac{12y^3}{4y}$; 4) $\frac{16a^5}{5a^2}$; 6) $\frac{3+a}{a}$?

Якщо так, то скоротіть цей дріб.

52°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16x}{8y}$; 3) $\frac{32a}{6b}$; 5) $\frac{7x^2}{3xy}$;

2) $\frac{15ab}{25c}$; 4) $\frac{6ab}{5a}$; 6) $\frac{8c^3}{9ac}$.

53°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{30x^3y^3}{5xy}$; 3) $\frac{15ab^3}{10bc^2}$; 5) $\frac{48x^2y^3}{16axy}$;

2) $\frac{14a^5b^4c^3}{21abc^2}$; 4) $\frac{6a^2b}{18ab^2}$; 6) $\frac{24a^3b}{32ab^3}$.

54°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15x}{5a}$; 3) $\frac{5a^4}{6a^2}$;

2) $\frac{28xy}{14a}$; 4) $\frac{36x^4y^2}{16x^2y^4}$.

55°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x-3y}{6x}$; 4) $\frac{ab+bc}{6b}$; 7) $\frac{4xy+6y^2}{2y}$;

2) $\frac{5x+5y}{10y}$; 5) $\frac{ax+ay}{3ay}$; 8) $\frac{2ax+4ay}{4ay}$;

3) $\frac{4x-8y}{8y}$; 6) $\frac{xz-2yz}{2z}$; 9) $\frac{3bx-3by}{6ab}$.

56°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x-3y}{x-y}$; 4) $\frac{5a-5b}{b-a}$; 7) $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$;

2) $\frac{4x+4y}{a(x+y)}$; 5) $\frac{3a-9c}{3c-a}$; 8) $\frac{2ab-2ac}{c-b}$;

3) $\frac{3x-6y}{2x-4y}$; 6) $\frac{4x-12y}{3ay-ax}$; 9) $\frac{2ax-2ay}{3by-3bx}$.

57°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{6x-24y}{4x}$; 3) $\frac{bx-by}{2bc}$; 5) $\frac{11x+22y}{2ay+ax}$;

2) $\frac{ac+bc}{3c}$; 4) $\frac{6y-6z}{y-z}$; 6) $\frac{5x-25y}{15y-3x}$.

58°. Вставте пропущені вирази:

1) $\frac{b}{c}=\frac{-b}{\quad}=-\frac{\quad}{c}=-\frac{\quad}{-c}$;

2) $\frac{x}{x-y}=\frac{-x}{\quad}=\frac{\quad}{y-x}=-\frac{\quad}{y-x}$;

3) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{b-a}{\quad}=\frac{\quad}{c-b}=-\frac{a-b}{\quad}=-\frac{\quad}{b-c}$.

59°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x^3}{x^3-x^2}$; 3) $\frac{3a^2-6a}{12a^2}$; 5) $\frac{3y^3-3y}{9y^3}$;

2) $\frac{4y^3-4y^4}{2y^5}$; 4) $\frac{5x^3-5x^2}{15x}$; 6) $\frac{3a^3+12a^2}{6a^2}$.

60°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{7x^3-7x^2}{x^2-x}$; 3) $\frac{3a^2+9a^5}{a^2+3a^4}$; 5) $\frac{y^3-5y}{5y^2-y^4}$;

2) $\frac{4y^3-8y^2}{2y^5-y^6}$; 4) $\frac{3x^2-x^3}{9x-3x^2}$; 6) $\frac{9a^6-9a^5}{a^3-a^4}$.

61°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{4b^3}{b^2-b^4}$; 3) $\frac{8x^4-8x^2}{2x^3-2x}$;

2) $\frac{9c^3-6c^2}{12c^2}$; 4) $\frac{4y^2-12y^3}{3y^3-y^2}$.

62. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^4-x^2}{x^4+x^3}$; 3) $\frac{a^2-9b^2}{2a+6b}$; 5) $\frac{a^3-25ab^2}{ab-5b^2}$;

2) $\frac{y^3-16y}{4y^2+y^3}$; 4) $\frac{4x^4-x^2}{6x+3}$; 6) $\frac{4a^3-9ac^2}{2ac+3c^2}$.

63. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2}$; 3) $\frac{a^3-16ab^2}{a^2b+8ab^2+16b^3}$;

2) $\frac{y^4-4y^2}{y^3+4y^2+4y}$; 4) $\frac{c^4-6c^3+9c^2}{9c-c^3}$.

64. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}$; 2) $\frac{c^4-36c^2}{12c+2c^2}$; 3) $\frac{a^2b-10ab+25b}{5b^2-ab^2}$.

65. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^3-1}{x^3-x^2}$; 3) $\frac{ab^2+a^3-a^2b}{a^3b+b^4}$;

2) $\frac{y^4-y}{2y^3+2y^2+2y}$; 4) $\frac{a^5-a^3+4a}{a^6+8}$.

66. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a^2+b^2-c^2-2ab}$; 3) $\frac{x^2+xy+yz-z^2}{y^2-x^2+2xz-z^2}$;

2) $\frac{(a-b)(c-d)}{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}$; 4) $\frac{25-a^2-2ab-b^2}{a^2+ab+5b-25}$.

67. Скоротіть дріб:

1) $\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}$; 2) $\frac{a^2-ab+3b-9}{a^2-2ab+b^2+3a-3b}$.

68*. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$; 2) $\frac{3x^2+12x+9}{3x^4+15x^2+18}$; 3) $\frac{x^8+x^4+1}{x^4+x^2+1}$.

69*. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2}{|x|}$; 2) $y=\frac{4-x^2}{2+|x|}$; 3) $y=\frac{x^2-6x+9}{|3-x|}$.

Проявіть компетентність

70. Тато Сашка має два квадратні листи ДВП зі стороною x см. Для обшивки двох стінок скрині татові потрібно вирізати з них два прямокутники: перший — розмірами $(x-10)\times(x-20)$ см; другий — розмірами $(x-10)\times\times(x-30)$ см. У скільки разів площа першого прямокутника більша за площу другого? Складіть вираз і знайдіть його значення, якщо: 1) $x=100$ см; 2) $x=150$ см; 3) $x=200$ см.

Задачі на повторення

71. У числі 1234* замість зірочки вставте таку цифру, щоб одержане число:

1) ділилося на 5;
2) ділилося на 10;
3) ділилося на 3;
4) ділилося на 9.

72. Скільки чистої води потрібно додати до 0,5 л водного розчину спирту, щоб вміст спирту в розчині зменшився із 40 % до 25 % ?

§ 3 Зведення раціональних дробів до спільного знаменника

Пригадайте, щоб звести звичайний дріб до нового знаменника, треба знайти додатковий множник та помножити на нього чисельник і знаменник даного дробу. Наприклад, потрібно звести дріб $\frac{3}{8}$ до знаменника 32. Додатковим множником є число $32:8=4$. Відтак одержимо:

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 4}{8\cdot 4}=\frac{12}{32}.$$

Аналогічно діють і з раціональними дробами.

Задача 1. Зведіть дріб $\dfrac{2m+1}{m-1}$ до знаменника m^2-1.

Розв'язання. Знайдемо додатковий множник для даного дробу. Оскільки $m^2-1=(m-1)(m+1)$, то додатковим множником є двочлен $m+1$.

Тоді:

$$\frac{2m+1}{m-1}=\frac{(2m+1)\cdot(m+1)}{(m-1)\cdot(m+1)}=$$

$$=\frac{2m^2+2m+m+1}{m^2-1}=\frac{2m^2+3m+1}{m^2-1}.$$

Не треба забувати, що всі дії з раціональними дробами виконують на ОДЗ їхніх змінних.

Зверніть увагу:

- щоб відшукати додатковий множник, потрібно новий знаменник поділити на знаменник даного раціонального дробу, якщо це можливо;
- зведення раціонального дробу до нового знаменника — це застосування основної властивості дробу.

Сформулюємо правило зведення раціонального дробу до нового знаменника.

Правило зведення раціонального дробу до нового знаменника

Щоб звести даний раціональний дріб до нового знаменника, потрібно:

1) записати новий знаменник у знаменнику нового дробу;

2) знайти додатковий множник;

3) помножити чисельник даного дробу на додатковий множник і результат записати в чисельнику нового дробу.

Чи до будь-якого знаменника можна звести даний раціональний дріб? Ні. Наприклад, дріб $\dfrac{7}{10x}$ не можна звести до знаменника $3y$ або $10+x$, оскільки ані вираз $3y$, ані вираз $10+x$ не можна поділити на $10x$ так, щоб у частці одержати одночлен чи многочлен (будемо коротко казати: «не можна поділити націло»).

Будь-які два раціональні дроби можна звести до *спільного знаменника*.

Якщо задано спільний знаменник, до якого потрібно звести раціональні дроби, то кожний дріб окремо зводять до цього знаменника за відомим правилом.

Частіше новий знаменник наперед не задано. Тоді треба спочатку знайти, до якого спільного знаменника можна звести два дані раціональні дроби.

Задача 2. До якого спільного знаменника можна звести раціональні дроби $\frac{3}{4xy}$ і $\frac{3}{6x^2y}$?

Розв'язання. Спільний знаменник даних дробів має ділитися націло на кожний із даних знаменників: $4xy$ і $6x^2y$. Тому він міститиме числовий множник (коефіцієнт), відмінний від 1, і буквений множник.

Визначимо коефіцієнт спільного знаменника даних дробів. Для цього знайдемо НСК коефіцієнтів даних знаменників:

НСК (4; 6) = 12.

Визначимо буквений множник спільного знаменника. Серед множників x і x^2 виразів у знаменниках обираємо для спільного знаменника той множник, що має більший степінь, тобто x^2. Множник зі змінною y в обох знаменниках є однаковим: y і y, тому до спільного знаменника вносимо множник y. Для xy і x^2y маємо: x^2y.

Отже, спільним знаменником даних раціональних дробів є одночлен $12x^2y$.

Справді: $12x^2y : 4xy = 3x$, $12x^2y : 6x^2y = 2$.

Сформулюємо правило зведення двох раціональних дробів до спільного знаменника.

Правило зведення двох раціональних дробів до спільного знаменника

Щоб звести два дані раціональні дроби до спільного знаменника, потрібно:

1) знайти спільний знаменник даних дробів;

2) знайти додатковий множник для першого дробу;

3) звести перший дріб до нового знаменника;

4) знайти додатковий множник для другого дробу;

5) звести другий дріб до нового знаменника.

Дізнайтеся більше

Сергій Трохимович Завало (1919–1989) — український математик-алгебраїст, педагог, професор, доктор фізико-математичних наук. Народився в с. Ганнівка (тепер Олександрівського району) Кіровоградської області. Закінчив Московський університет у 1941 р. Під час другої світової війни був командиром мінометної роти 1235 стрілецького полку 373 Миргородської орденів Червоного прапора, Суворова, Кутузова стрілецької дивізії. У мирний період працював на освітянський ниві: 1946–1957 рр. — викладачем, а згодом деканом фізико-математичного факультету Черкаського державного педагогічного інституту; 1959–1980 — викладачем, завідувачем кафедри алгебри і математичної логіки, а згодом деканом механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Багато зусиль Сергій Трохимович докладав для розвитку системи освіти України, в тому числі математичної, перебуваючи на посаді заступника Міністра освіти Української РСР (1957–1970). Автор 10-ти праць із теорії груп, ряду статей із методики навчання математики, 11-ти підручників і посібників. Науковій та освітянській громадськості добре відомі його підручники: Елементи аналізу. Алгебра многочленів (1972), Алгебра і теорія чисел, практикум з розв'язування задач (у співавт. з В. М. Костарчуком, Б. І. Хацетом, 1975), Елементи аналізу. Рівняння і нерівності (1975), Алгебра і теорія чисел (у співавт. з В. М. Костарчуком, Б. І. Хацетом, 2-ге вид.; ч.1, 1977, ч. 2, 1980), Курс алгебри (1985).

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке додатковий множник для даного раціонального дробу та як його знайти.
2. Сформулюйте правило зведення дробу до нового знаменника.
3. Сформулюйте правило зведення двох дробів до спільного знаменника.

Розв'яжіть задачі

73'. На який додатковий множник потрібно домножити чисельник і знаменник дробу $\frac{5}{4a}$, щоб одержати дріб $\frac{30}{24a}$:
1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) 5; 6) 6?

74'. Чи правильно, що спільним знаменником дробів $\frac{1}{3y}$ і $\frac{1}{12y}$ є вираз:
1) $3y$; 2) $3y^2$; 3) $12y$; 4) $12y^2$; 5) $36y$; 6) $36y^2$?

75'. Чи правильно, що спільним знаменником дробів $\frac{1}{5x}$ і $\frac{1}{5x^2}$ є вираз:
1) $5x$; 2) $5x^2$; 3) $25x$; 4) $25x^2$; 5) $25x^3$; 6) $5x^3$?

76°. Зведіть дріб $\frac{1}{x}$ до знаменника:
1) $3x$; 2) $5x$; 3) x^2; 4) $2x^2$; 5) $5x^3$; 6) $6x^4$.

77°. Зведіть дріб $\frac{1}{2a}$ до знаменника:
1) $4a$; 2) $8a$; 3) $2a^2$; 4) $6a^2$; 5) $10a^3$; 6) $14a^4$.

78°. Зведіть дріб $\frac{1}{3b}$ до знаменника:
1) $9b$; 2) $18b$; 3) $3b^2$; 4) $6b^2$; 5) $15b^3$; 6) $21b^4$.

79°. Зведіть дріб $\frac{1}{ab}$ до знаменника:
1) $2ab$; 2) a^2b; 3) ab^2; 4) $3a^3b$; 5) $3abc$; 6) $2a^2b^2$.

80°. Зведіть дріб $\frac{1}{a+b}$ до знаменника:
1) $2(a+b)$;
2) $5(a+b)$;
3) $(a+b)^2$;
4) a^2-b^2.

81°. Зведіть дріб $\frac{1}{xy}$ до знаменника:
1) $4xy$;
2) x^2y;
3) xy^2;
4) $5x^2y$;
5) $6xyz$;
6) $7x^2y^2$.

82°. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{7}$;
2) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{4a}$;
3) $\frac{1}{2x}$ і $\frac{1}{6x}$;
4) $\frac{1}{6a}$ і $\frac{3}{8a}$;
5) $\frac{2}{3b}$ і $\frac{3}{9b}$;
6) $\frac{5}{8y}$ і $\frac{3}{12y}$.

83°. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{ab}$ і $\frac{1}{ac}$;
2) $\frac{1}{ax^2}$ і $\frac{1}{bx^2}$;
3) $\frac{1}{x^2y}$ і $\frac{1}{x^3y}$;
4) $\frac{2}{ab^3}$ і $\frac{3}{a^3b}$;
5) $\frac{4}{5b^2}$ і $\frac{3}{15b}$;
6) $\frac{3}{7y^4}$ і $\frac{2}{21y^2}$.

84°. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{b}$ і $\frac{1}{5b}$;
2) $\frac{1}{3a}$ і $\frac{1}{9a}$;
3) $\frac{3}{2ab}$ і $\frac{1}{4ac}$;
4) $\frac{5}{ab^2}$ і $\frac{3}{a^2b}$.

85°. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{a+1}$ і $\frac{1}{2a+2}$;
2) $\frac{1}{a-2}$ і $\frac{1}{3a-6}$;
3) $\frac{1}{1-x}$ і $\frac{1}{4-4x}$;
4) $\frac{1}{2a+1}$ і $\frac{1}{4a+2}$;
5) $\frac{1}{3-2b}$ і $\frac{1}{9-6b}$;
6) $\frac{1}{2-5y}$ і $\frac{1}{4-10y}$.

86°. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2}{a-1}$ і $\frac{3}{1-a}$;
2) $\frac{1}{a-2}$ і $\frac{2}{8-4a}$;
3) $\frac{1}{1-2x}$ і $\frac{5}{6x-3}$;
4) $\frac{2}{3x-1}$ і $\frac{6}{-6x+2}$;
5) $-\frac{3}{y-3}$ і $\frac{1}{9-3y}$;
6) $\frac{2}{1-4x}$ і $\frac{7}{4-16x}$.

87°. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\dfrac{1}{x-4}$ і $\dfrac{1}{2x-8}$;

2) $\dfrac{1}{5a+1}$ і $\dfrac{1}{4+20a}$;

3) $\dfrac{2}{1-3y}$ і $\dfrac{5}{12y-4}$.

88°. Чи правильно будуть зведені до спільного знаменника дроби $\dfrac{3}{2x-3}$ і $\dfrac{2}{12-8x}$, якщо діяти так: «Оскільки $\dfrac{2}{12-8x}=\dfrac{2}{4(3-2x)}$, то спільним знаменником даних дробів є вираз $4(2x-3)$, тому чисельник і знаменник першого дробу потрібно домножити на 4: $\dfrac{3}{2x-3}=\dfrac{3\cdot 4}{4\cdot(2x-3)}=\dfrac{12}{12-8x}$»? Якщо такими діями одержали неправильний результат, то вкажіть помилку.

89. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a^2-ab}$, $\dfrac{1}{a^2-b^2}$;

2) $\dfrac{1}{b^2-4}$, $\dfrac{1}{3b+6}$, $\dfrac{1}{2-b}$;

3) $\dfrac{1}{2y-3}$, $\dfrac{1}{9-4y^2}$, $\dfrac{1}{4y+6}$;

4) $\dfrac{1}{3x-1}$, $\dfrac{1}{9x^2-1}$, $\dfrac{1}{9x^2-6x+1}$.

90. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\dfrac{1}{x-1}$, $\dfrac{1}{x^3-1}$, $\dfrac{1}{x^2-1}$;

2) $\dfrac{1}{x+2}$, $\dfrac{1}{x^3+8}$, $\dfrac{1}{x^2-4}$;

3) $\dfrac{1}{x-1}$, $\dfrac{1}{x^3-1}$, $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

91. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\dfrac{1}{a^2-9}$, $\dfrac{1}{2a+6}$, $\dfrac{1}{3-a}$;

2) $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x^3+1}$, $\dfrac{1}{x^2-1}$.

92*. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\dfrac{1}{x^2-1}$, $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}$, $\dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}$, $\dfrac{1}{x^4-1}$;

2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $\dfrac{1}{x^2+5x+6}$, $\dfrac{1}{x^2+7x+10}$;

3) $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$, $\dfrac{1}{x^2-x-2}$, $\dfrac{1}{x^2+x-6}$.

Проявіть компетентність

93. На останньому етапі шкільного математичного квесту восьмикласникам було запропоновано завдання: спочатку звести дроби $\dfrac{-3a}{27a^3-1}$ і $\dfrac{1}{1-9a^2}$ до спільного знаменника, а потім порівняти їх значення, якщо $a = 0{,}05$.

1. До якого спільного знаменника можна звести дані дроби?
2. Зведіть дані дроби до спільного знаменника.
3. Обчисліть значення одержаних дробів, якщо $a = 0{,}05$.
4. Порівняйте одержані значення дробів та зробіть відповідний запис.
5. Хто із хлопців — Ігор чи Микола — переміг на останньому етапі квесту, якщо вони одержали такі результати:

Ігор: якщо $a = 0{,}05$, то $\dfrac{-3a}{27a^3-1} > \dfrac{1}{1-9a^2}$;

Микола: якщо $a = 0{,}05$, то $\dfrac{-3a}{27a^3-1} < \dfrac{1}{1-9a^2}$?

Задачі на повторення

94. Графік функції $y = ax + b$ проходить через точки $A(-1; -7)$ і $B(0; -2)$. Знайдіть значення a і b.

95. Якою найменшою може бути кількість учнів у класі, якщо відмінників у ньому рівно 12 %?

§ 4 Додавання і віднімання раціональних дробів

Ви вже знаєте, як додавати й віднімати звичайні дроби (5–6 класи) та цілі вирази (7 клас). Раціональні дроби також можна додавати й віднімати. Але тут є свої обмеження, оскільки раціональні дроби за деяких значень їхніх змінних можуть втрачати зміст, і тоді дії з ними виконувати не можна.

Ви знаєте, що раціональний дріб має зміст лише тоді, коли многочлен у його знаменнику тотожно не дорівнює нулю. Дотримання цієї вимоги забезпечують лише ті значення змінних, які входять до ОДЗ змінних даного виразу. Отже, раціональні дроби можна додавати й віднімати лише на ОДЗ їхніх змінних.

У попередніх параграфах ви навчилися знаходити ОДЗ змінних дробових виразів. Надалі будемо опускати цей крок і вважатимемо, що **всі дії з раціональними дробами виконуються на ОДЗ їхніх змінних**.

1. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Пригадайте, щоб додати (відняти) звичайні дроби з однаковими знаменниками, знаменник залишали тим самим, а чисельники додавали (віднімали):

$$\frac{5}{17}+\frac{3}{17}=\frac{5+3}{17}=\frac{8}{17},$$

$$\frac{12}{19}-\frac{9}{19}=\frac{12-9}{19}=\frac{3}{19}.$$

Аналогічно виконують додавання й віднімання раціональних дробів — знаменник залишають тим самим, а чисельники додають (віднімають).

Задача 1. Знайдіть суму й різницю дробів $\frac{3x+y}{5b}$ і $\frac{2y-x}{5b}$.

Розв'язання.

$$\frac{3x+y}{5b}+\frac{2y-x}{5b}=\frac{3x+y+2y-x}{5b}=\frac{2x+3y}{5b},$$

$$\frac{3x+y}{5b}-\frac{2y-x}{5b}=\frac{3x+y-(2y-x)}{5b}=$$
$$=\frac{3x+y-2y+x}{5b}=\frac{4x-y}{5b}.$$

Правило додавання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Щоб знайти суму (різницю) двох раціональних дробів з однаковими знаменниками, потрібно:

1) спільний знаменник записати в знаменнику суми;

2) додати (відняти) чисельники і результат записати в чисельнику суми.

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}$$

Чи зберігається правило додавання (віднімання) для трьох і більше раціональних дробів з однаковими знаменниками? Так. Наприклад:

$$\frac{3x}{2y}+\frac{5x}{2y}+\frac{5c}{2y}+\frac{7c}{2y}=\frac{3x+5x+5c+7c}{2y}=\frac{8x+12c}{2y}.$$

Зверніть увагу:
для додавання раціональних дробів виконуються такі закони:

$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{B}{C}+\frac{A}{C}$ — **переставний закон додавання;**

$\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}\right)+\frac{D}{C}=\frac{A}{C}+\left(\frac{B}{C}+\frac{D}{C}\right)$ — **сполучний закон додавання.**

2. ДОДАВАННЯ Й ВІДНІМАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ ІЗ РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Пригадайте, щоб додати (відняти) звичайні дроби з різними знаменниками, потрібно звести дроби до спільного знаменника, а потім додати (відняти) нові чисельники:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30},$$
$$\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{4-3}{18}=\frac{1}{18}.$$

Аналогічно виконують додавання й віднімання раціональних дробів — зводять дроби до спільного знаменника, а нові чисельники додають (віднімають).

Задача 2. Додайте дроби $\frac{3}{5y^2}$ і $\frac{4}{15y}$.

Розв'язання.

1. Шукаємо спільний знаменник даних дробів:

   а) визначаємо його коефіцієнт:

   $$\text{НСК}\ (5;\ 15) = 15;$$

   б) визначаємо його буквений множник:

   $$y^2 \text{ і } y$$
   $$y^2$$

Таким чином, спільним знаменником даних дробів є вираз: $15y^2$.

2. Шукаємо додаткові множники:

— перший дріб потрібно домножити на 3, оскільки $15y^2 : 5y^2 = 3$;
— другий дріб потрібно домножити на y, оскільки $15y^2 : 15y = y$.

Маємо: $\frac{3}{5y^2} + \frac{4}{15y} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot y}{15y^2} = \frac{9+4y}{15y^2}$.

Сформулюємо правило додавання раціональних дробів із різними знаменниками.

Правило додавання (віднімання) раціональних дробів із різними знаменниками

Щоб знайти суму (різницю) двох раціональних дробів із різними знаменниками, потрібно:

1) звести дані дроби до спільного знаменника;

2) спільний знаменник записати в знаменнику суми (різниці);

3) додати (відняти) нові чисельники й результат записати в чисельнику суми.

Задача 3. Спростіть вираз:

$$1)\ \frac{2b}{5b-y} + \frac{7y}{5b+y};\quad 2)\ \frac{3x}{x^2-4y^2} - \frac{3}{2(x+2y)}.$$

Розв'язання.

1. Спільним знаменником дробів $\frac{2b}{5b-y}$ і $\frac{7y}{5b+y}$ є вираз $(5b)^2 - y^2$. Отже:

$$\frac{2b}{5b-y}+\frac{7y}{5b+y}=\frac{2b(5b+y)+7y(5b-y)}{(5b)^2-y^2}=$$

$$=\frac{10b^2+2by+35by-7y^2}{25b^2-y^2}=$$

$$=\frac{10b^2+37by-7y^2}{25b^2-y^2}.$$

2. Щоб знайти спільний знаменник дробів $\frac{3x}{x^2-4y^2}$ і $\frac{3}{2(x+2y)}$, потрібно розкласти на множники знаменник першого дробу:

$$x^2-4y^2=x^2-(2y)^2=(x-2y)(x+2y).$$

Знаменник другого дробу містить два множники: число 2 і двочлен $x + 2y$. Тому спільним знаменником дробів є вираз: $2(x-2y)(x+2y)$. Для першого дробу додатковим множником є число 2, а для другого — двочлен $x - 2y$.

Отже:

$$\frac{3x}{x^2-4y^2}-\frac{3}{2(x+2y)}=$$

$$=\frac{3x}{(x-2y)(x+2y)}-\frac{3}{2(x+2y)}=$$

$$=\frac{6x-3(x-2y)}{2(x-2y)(x+2y)}=$$

$$=\frac{6x-3x+6y}{2(x-2y)(x+2y)}=$$

$$=\frac{3x+6y}{2(x-2y)(x+2y)}=$$

$$=\frac{3\cancel{(x+2y)}}{2(x-2y)\cancel{(x+2y)}}=$$

$$=\frac{3}{2(x-2y)}.$$

Зверніть увагу:

- якщо у двох дробів знаменники не мають спільних множників, відмінних від числа 1, то додавання (віднімання) таких дробів виконують так:

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\frac{A\cdot D\pm B\cdot C}{C\cdot D};$$

- якщо у двох дробів знаменники мають спільний множник, відмінний від числа 1, то додавання (віднімання) таких дробів виконують так:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{A}{M \cdot P} \pm \frac{B}{N \cdot P} = \frac{A \cdot N \pm B \cdot M}{M \cdot N \cdot P},$$

де $C = M \cdot P$, $D = N \cdot P$.

Дізнайтеся більше

Для молодих математиків (до 40 років) найвищою міжнародною нагородою в галузі математики є премія Філдса. Фонд для присудження премії (та золотої Медалі Філдса) заснував канадський математик Джон Чарлз Філдс. Премію присуджують двом–чотирьом ученим один раз на чотири роки на Міжнародному математичному конгресі. Уперше премію було вручено в 1936 р. двом математикам — Ларе Альфорсу (Фінляндія) та Джессі Дугласу (США); вона становила 15 000 доларів. На золотій медалі Філдсівського лауреата зображено портрет Архімеда і є напис: «Побороти свою людську обмеженість і завоювати Всесвіт», на зворотному боці — «Математики, які зібралися з усього світу, вшановують чудовий вклад у пізнання». У 1990 р. Медаль Філдса одержав Володимир Гершонович Дрінфельд (народ. 14 лютого 1954 р. в м. Харкові) — видатний український та американський математик, член-кореспондент НАН України (1992). Він поки що — єдиний вчений з України, удостоєний такого визнання.

Можливо, і Ви свого часу зможете здобути цю премію?

Пригадайте головне

1. Сформулюйте правило додавання (віднімання) двох раціональних дробів з однаковими знаменниками.
2. Сформулюйте правило додавання (віднімання) двох раціональних дробів із різними знаменниками.

Розв'яжіть задачі

96'. Потрібно додати дроби $\frac{3y}{2x}$ і $\frac{5y}{2x}$.

1) Яким буде знаменник одержаного в сумі дробу:

а) $4x$; б) $4x^2$; в) $2x$?

2) Яким буде чисельник одержаного в сумі дробу:
а) $15y^2$; б) $8y$; в) $2x$?
3) Назвіть дріб, який є результатом додавання даних дробів.

97'. Чи правильно, що сумою дробів $\frac{5}{x-1}$ і $\frac{2}{x-1}$ є дріб:
1) $\frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{7}{2x-2}$; 3) $\frac{7}{x-1}$?

98'. Потрібно відняти дроби $\frac{5y}{3x}$ і $\frac{4y}{3x}$.
1) Яким буде знаменник одержаного в сумі дробу:
а) $6x$; б) $9x^2$; в) $3x$?
2) Яким буде чисельник одержаного в сумі дробу:
а) $20y^2$; б) y; в) $9y$?
3) Назвіть дріб, який є результатом віднімання даних дробів.

99'. Чи правильно, що різницею дробів $\frac{5}{x-1}$ і $\frac{2}{x-1}$ є дріб:
1) $\frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{3}{2x-2}$; 3) $\frac{7}{x-1}$?

100'. Потрібно додати дроби $\frac{3y}{2x}$ і $\frac{y}{6x}$.
1) Яким буде знаменник одержаного в сумі дробу:
а) $6x$; б) $12x$; в) $2x$?
2) Яким буде чисельник одержаного в сумі дробу:
а) $4y$; б) $10y$; в) $16y$?
3) Назвіть дріб, який є результатом додавання даних дробів.

101'. Чи правильно, що сумою дробів $\frac{5}{x-1}$ і $\frac{3}{2(x-1)}$ є дріб:
1) $\frac{8}{2(x-1)}$; 2) $\frac{13}{2x-2}$; 3) $\frac{13}{x-1}$?

102'. Потрібно відняти дроби $\frac{5}{3y}$ і $\frac{2}{9y}$.
1) Яким буде знаменник одержаного в сумі дробу:
а) $3y$; б) $27y$; в) $9y$?
2) Яким буде чисельник одержаного в сумі дробу:
а) 17; б) 13; в) 39?
3) Назвіть дріб, який є результатом віднімання даних дробів.

103'. Чи правильно, що різницею дробів $\frac{7}{3(x+1)}$ і $\frac{1}{x+1}$ є дріб:

1) $\frac{4}{x+1}$; 2) $\frac{8}{3(x+1)}$; 3) $\frac{4}{3(x+1)}$?

104°. Виконайте додавання дробів:

1) $\frac{2}{5x}+\frac{7}{5x}$;
2) $\frac{8}{3a}+\frac{2}{3a}$;
3) $\frac{1}{6c}+\frac{7}{6c}$;
4) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x-2}$;
5) $\frac{3y}{y+1}+\frac{2y}{y+1}$;
6) $\frac{4c}{c-1}+\frac{c}{c-1}$;
7) $\frac{3a}{x+2}+\frac{4a}{x+2}$;
8) $\frac{4c}{y-1}+\frac{7c}{y-1}$;
9) $\frac{3x}{c^2+1}+\frac{8x}{c^2+1}$.

105°. Знайдіть суму дробів:

1) $\frac{2}{7ab}$ і $\frac{3}{7ab}$;
2) $\frac{3y}{9ac}$ і $\frac{4y}{9ac}$;
3) $\frac{3xy}{2a^2b}$ і $\frac{2xy}{2a^2b}$;
4) $\frac{3a}{2a+b}$ і $\frac{4a}{2a+b}$;
5) $\frac{5y}{a-c}$ і $\frac{2y}{a-c}$;
6) $\frac{3x}{a^2+b}$ і $\frac{2x}{a^2+b}$.

106°. Виконайте додавання дробів:

1) $\frac{2}{9y}+\frac{5}{9y}$;
2) $\frac{2a}{a-3}+\frac{4a}{a-3}$;
3) $\frac{9b}{a^2+3}+\frac{4b}{a^2+3}$;
4) $\frac{3ac}{2x^3}+\frac{2ac}{2x^3}$;
5) $\frac{2c}{2+a}+\frac{8c}{2+a}$;
6) $\frac{3c}{2+x^3}+\frac{7c}{2+x^3}$.

107°. Виконайте віднімання дробів:

1) $\frac{12}{7x}-\frac{3}{7x}$;
2) $\frac{11}{5a}-\frac{7}{5a}$;
3) $\frac{13}{9c}-\frac{5}{9c}$;
4) $\frac{13y}{y-1}-\frac{9y}{y-1}$;
5) $\frac{4c}{c+2}-\frac{9c}{c+2}$;
6) $\frac{3x}{a+2}-\frac{14x}{a+2}$;
7) $\frac{4a}{d-1}-\frac{17a}{d-1}$;
8) $\frac{13a}{b^2+1}-\frac{18a}{b^2+1}$.

108°. Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{1}{8ab}$ і $\frac{11}{8ab}$;

2) $\frac{4y}{5ac}$ і $\frac{4y}{5ac}$;

3) $\frac{12xy}{5ab^2}$ і $\frac{3xy}{5ab^2}$;

4) $\frac{9a}{a+b}$ і $\frac{4a}{a+b}$;

5) $\frac{5c}{a+c}$ і $\frac{12c}{a+c}$;

6) $\frac{8x}{a^2+3}$ і $\frac{x}{a^2+3}$.

109°. Виконайте віднімання дробів:

1) $\frac{2}{5y}-\frac{9}{5y}$;

2) $\frac{2a}{a+4}-\frac{3a}{a+4}$;

3) $\frac{9b}{a^2-1}-\frac{8b}{a^2-1}$;

4) $\frac{9ac}{4x^5}-\frac{5ac}{4x^5}$;

5) $\frac{6c}{1+a}-\frac{8c}{1+a}$;

6) $\frac{13a}{1+x}-\frac{3a}{1+x}$.

110°. Знайдіть різницю $\frac{a}{9c}-\frac{b}{9c}$, якщо:

1) $a=5c^2,\ b=4c^2$;

2) $a=7c,\ b=-10c$;

3) $a=15ac^2,\ b=6ac^2$.

111°. Спростіть вираз:

1) $\frac{5}{5+x}+\frac{x}{5+x}$;

2) $\frac{10}{5-x}-\frac{2x}{5-x}$;

3) $\frac{11}{6+c}+\frac{1+2c}{6+c}$;

4) $\frac{-2x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}$;

5) $\frac{3y}{y+1}+\frac{1-2y}{y+1}$;

6) $\frac{4c}{c-1}+\frac{1-5c}{c-1}$.

112°. Спростіть вираз:

1) $\frac{9}{3+x}-\frac{x^2}{3+x}$;

2) $\frac{25}{x-5}-\frac{x^2}{x-5}$;

3) $\frac{36}{6+c}-\frac{c^2}{6+c}$;

4) $\frac{7}{x^2-49}-\frac{x}{x^2-49}$;

5) $\frac{y^2}{y+1}+\frac{1+2y}{y+1}$;

6) $\frac{4+c^2}{c-2}-\frac{4c}{c-2}$;

7) $\frac{6}{x-3}+\frac{2x}{3-x}$;

8) $\frac{y^2}{2-y}+\frac{4}{y-2}$;

9) $\frac{3+c^2}{c-1}+\frac{4}{1-c}$.

113°. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{1+a}+\frac{a}{1+a}$;

2) $\frac{4}{2-y}-\frac{2y}{2-y}$;

3) $\frac{3b}{b-1}+\frac{1-4b}{b-1}$;

4) $\frac{16}{4+y}-\frac{y^2}{y+4}$;

5) $\frac{a}{a^2-64}+\frac{8}{a^2-64}$;

6) $\frac{-5+c^2}{c-2}-\frac{1}{2-c}$.

114°. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{1-a^2}$, якщо $a=0,9$;

2) $\frac{2}{y^2-4}-\frac{y}{y^2-4}$, якщо $y=-1,8$;

3) $\frac{3b}{b^2-1}-\frac{3}{b^2-1}$, якщо $a=-0,7$.

115°. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{5x}+\frac{3}{10x}$;

2) $\frac{5}{3a}+\frac{5}{6a}$;

3) $\frac{5}{12c}+\frac{7}{9c}$;

4) $\frac{3x}{x+2}+\frac{2x}{3(x+2)}$;

5) $\frac{y}{5(y+1)}+\frac{2y}{y+1}$;

6) $\frac{3c}{2(c-1)}+\frac{2c}{3(c-1)}$;

7) $\frac{1}{6x}-\frac{5}{12x}$;

8) $\frac{11}{5a}-\frac{7}{10a}$;

9) $\frac{13}{15c}-\frac{5}{9c}$;

10) $\frac{2a}{x+2}-\frac{4a}{5(x+2)}$;

11) $\frac{c}{3(y-1)}-\frac{6c}{y-1}$;

12) $\frac{7x}{6(c^2+1)}-\frac{5x}{4(c^2+1)}$.

116°. Знайдіть суму дробів:

1) $\frac{2}{3ab}$ і $\frac{3}{12ab}$;

2) $\frac{5y}{36ac}$ і $\frac{4y}{9ac}$;

3) $\frac{x}{4a^2b}$ і $\frac{3x}{14a^2b}$;

4) $\frac{3a}{5(a+b)}$ і $\frac{6a}{25(a+b)}$;

5) $\frac{4y}{3(a-c)}$ і $\frac{7y}{15(a-c)}$;

6) $\frac{3x}{8(a-2b)}$ і $\frac{5x}{6(a-2b)}$.

117°. Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{1}{4ab}$ і $\frac{11}{8ab}$;

2) $\frac{4y}{5ac}$ і $\frac{22y}{35ac}$;

3) $\frac{13x}{15b^2}$ і $\frac{3x}{25b^2}$;

4) $\frac{9a}{a-b}$ і $\frac{4a}{5(a-b)}$;

5) $\frac{5c}{6(a+c)}$ і $\frac{12c}{a+c}$;

6) $\frac{9x}{8(a^2+1)}$ і $\frac{x}{20(a^2+1)}$.

118°. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{8y}+\frac{3}{16y}$;

2) $\frac{2a}{a-1}+\frac{5a}{4(a-1)}$;

3) $\frac{2b}{3(a^2+3)}+\frac{4b}{a^2+3}$;

4) $\frac{ac}{7x^2}-\frac{2ac}{21x^2}$;

5) $\frac{2c}{3(2-a)}-\frac{5c}{4(2-a)}$;

6) $\frac{3c}{10(1+x)}-\frac{2c}{15(1+x)}$.

119°. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{5x}+\frac{3x^2-1}{10x^3}$;

2) $\frac{1}{4x^2y^2}-\frac{2}{6x^3y}$;

3) $\frac{5}{5+x}+\frac{3x-7}{(5+x)x}$;

4) $\frac{10x-1}{x(5-x)}-\frac{2}{5-x}$;

5) $\frac{4y}{3y+3}+\frac{1-y}{y+1}$;

6) $\frac{4c}{c-1}+\frac{2-5c^3}{c^2(c-1)}$.

120°. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3+x}-\frac{2x}{x^2-9}$;

2) $\frac{4x}{x^2-25}-\frac{4}{x-5}$;

3) $\frac{2}{6+c}+\frac{2c}{36-c^2}$;

4) $\frac{5}{x+7}-\frac{10x}{x^2-49}$;

5) $\frac{2}{y+1}-\frac{1+2y}{y^2-1}$;

6) $\frac{4}{c^2-4}-\frac{4-c}{c-2}$.

121°. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $\frac{1}{1+a}+\frac{a}{1-a^2}$, якщо $a=\frac{2}{3}$;

2) $\frac{2y+6}{y^2-4}-\frac{3}{y-2}$, якщо $y=-3$;

3) $\frac{4b-1}{b^2-1}-\frac{4}{b-1}$, якщо $b=-4$.

122°. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $\frac{7}{3+a}+\frac{7a}{9-a^2}$, якщо $a=2$;

2) $\frac{y+8}{y^2-16}-\frac{2}{y-4}$, якщо $y=-2$.

123. Спростіть вираз:

1) $\frac{x-1}{3}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{3}$;

2) $\frac{2a^2-3b^2}{5ab}-\frac{2b^2-3a^2}{5ab}$;

3) $\frac{x-y}{2x-3y}-\frac{2y-x}{2x-3y}$;

4) $\frac{2x^2-3y^2}{3xy}-\frac{3y^2-x^2}{3xy}$.

124. Виконайте дії:

1) $\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{a+b}$;

2) $\frac{q^3}{p-q}-\frac{p^3}{p-q}$;

3) $\frac{2x^3}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x+y}$;

4) $\frac{27}{x-3}-\frac{x^3}{x-3}$;

5) $\frac{8}{a-2}-\frac{a^3}{a-2}$;

6) $\frac{5b}{c^3-b^3}+\frac{5c}{b^3-c^3}$;

7) $\frac{a}{a^3+b^3}+\frac{b}{a^3+b^3}$;

8) $\frac{c}{b^3-c^3}-\frac{b}{b^3-c^3}$;

9) $\frac{1}{x^3+8}+\frac{1+x}{x^3+8}$;

10) $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}+\frac{ab}{a^3+b^3}$;

11) $\frac{c^2}{b^3-c^3}+\frac{bc+b^2}{b^3-c^3}$;

12) $\frac{4-x}{x^3+8}+\frac{x^2-x}{x^3+8}$.

125. Виконайте дії:

1) $\frac{y-2}{5}+\frac{3+y}{5}+\frac{1-y}{5}$;

2) $\frac{a^3}{a-c}-\frac{c^3}{a-c}$;

3) $\frac{64}{a-4}-\frac{a^3}{a-4}$;

4) $\frac{x}{x^3+y^3}+\frac{y}{x^3+y^3}$;

5) $\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}-\frac{xy}{x^3+y^3}$;

6) $\frac{y^2}{x^3-y^3}+\frac{xy+x^2}{x^3-y^3}$.

126. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{2ab}{(a+b)^2}$;

2) $\frac{q^3}{(p-q)^2}-\frac{p^3}{(p-q)^2}$;

3) $\frac{2x^2}{(x+y)^2}-\frac{2y^2}{(x+y)^2}$;

4) $\frac{4x^2}{(2x-y)^2}-\frac{y^2}{(y-2x)^2}$;

5) $\frac{125}{(x-5)^2}-\frac{x^3}{(x-5)^2}$;

6) $\frac{3}{(x+2)^3}+\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^3}$.

127. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^3}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$;

2) $\frac{3a^2}{(a+b)^2}-\frac{3b^2}{(a+b)^2}$.

128. Спростіть вираз:

1) $\frac{3x-1}{2}+\frac{x-2}{6}-\frac{2x-3}{3}$;

2) $\frac{2a-3b}{5ab^2}-\frac{2b-3a}{5a^2b}$;

3) $\frac{x-y}{2xy-3y^2}-\frac{y-x}{3xy-2x^2}$;

4) $\frac{3y-x}{21x^2y^2}-\frac{5x-y}{35x^3y}$.

129. Спростіть вираз:

1) $\frac{y}{yx-x^2}-\frac{y}{yx+x^2}$;

2) $\frac{4x}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{xy-y^2}$;

3) $\frac{a-3}{a+3}-\frac{a+3}{a-3}+\frac{12}{a}$;

4) $\frac{1-t}{t^2-t}-\frac{t+1}{1-t^2}$;

5) $\frac{a^2}{(a-3)^2}+\frac{a}{3-a}$;

6) $\frac{b+1}{(b-1)^2}+\frac{2}{1-b^2}-\frac{1}{b+1}$.

130. Виконайте дії:

1) $\frac{4y-2}{15}+\frac{3+3y}{25}+\frac{1-3y}{35}$;

2) $\frac{y}{xy-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}$;

3) $\frac{1-t}{t^2-t}-\frac{t+1}{1-t^2}$;

4) $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y-x}-\frac{2y}{x^2-y^2}$.

131*. Знайдіть значення a, b, за яких виконується рівність:

1) $\frac{12}{4(x-2)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b-1}{4}$;

2) $\frac{12}{3(x-3)}=\frac{b}{x-3}-\frac{a+1}{3}$;

3) $\frac{1}{x^2-16}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{4-x}$;

4) $\frac{3}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}-\frac{bx+2}{x^2+x+1}$.

132*. Доведіть, що значення виразу $\frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{x^2-3}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1}$ не залежить від значень змінної x на її ОДЗ.

133*. Доведіть, що значення виразу $\frac{3y^2+3y}{2(y-1)^2}-\frac{9y+6}{2(y-1)^2}+\frac{9}{2(y-1)^2}$ не залежить від значень змінної y на її ОДЗ.

134*. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}$;

2) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

135*. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots\frac{1}{(x+99)(x+100)}.$$

Проявіть компетентність

136. 1. Сашко й Наталка на уроці математики одержали індивідуальне завдання. Заповніть таблицю 5, якщо відомо, що обидва учні виконали його правильно.

Таблиця 5

Учні	*Дріб*	*Дріб*	*Сума*	*Різниця*
Сашко	$\frac{a}{a+1}$		$\frac{2a+1}{a+1}$	
Наталка		$\frac{b-1}{b+1}$	$\frac{3b}{b+1}$	

2. Оленка й Сергійко на уроці математики одержали індивідуальне завдання. Заповніть таблицю 6, якщо відомо, що обидва учні виконали його правильно.

Таблиця 6

Учні	*Дріб*	*Дріб*	*Сума*	*Різниця*
Сергійко	$\frac{2}{x+3}$			$\frac{4x-1}{x(x+3)}$
Оленка		$\frac{-1}{y+1}$		$\frac{y+2}{y^2-1}$

Задачі на повторення

137. Знайдіть число, якщо:
1) його 25 % дорівнюють 24;
2) його 10 % дорівнюють 24;
3) його 5 % дорівнюють 24.

138. Розв’яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2x+3y=8,\\3x-y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-3y=1,\\5x-6y=4.\end{cases}$

§ 5 Множення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня з натуральним показником

Ви вже знаєте, як додавати й віднімати раціональні дроби. Так само, як і дії першого ступеня, **множення раціональних дробів можна виконувати лише на ОДЗ їхніх змінних.**

1. МНОЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Пригадайте, щоб помножити звичайні дроби, потрібно перемножити чисельники і знаменники даних дробів відповідно:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot3}{7\cdot4}=\frac{15}{28},\qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}=\frac{2\cdot9}{3\cdot10}=\frac{1\cdot3}{1\cdot5}=\frac{3}{5}.$$

Аналогічно виконують і множення раціональних дробів. Для цього чисельники і знаменники даних дробів перемножують відповідно. Одержаний у добутку дріб скорочують, якщо це можливо. Наприклад:

$$\frac{3x}{5b}\cdot\frac{3y}{4a}=\frac{3x\cdot3y}{5b\cdot4a}=\frac{9xy}{20ab},$$

$$\frac{2x}{3y}\cdot\frac{3y^2}{4x^2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{x}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}\,y^{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\,\cancel{y}\cdot\underset{2}{\cancel{4}}\,x^{\cancel{2}}}=\frac{1\cdot y}{1\cdot2x}=\frac{y}{2x}.$$

Правило множення раціональних дробів

Щоб знайти добуток двох раціональних дробів, потрібно:

1) знайти добуток знаменників даних дробів і записати його в знаменнику добутку;

2) знайти добуток чисельників даних дробів і записати його в чисельнику добутку.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

Зверніть увагу:
для множення раціональних дробів справджуються такі закони:

$\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} = \frac{B}{D} \cdot \frac{A}{C}$ — **переставний закон множення;**

$\left(\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D}\right) \cdot \frac{K}{N} = \frac{A}{C} \cdot \left(\frac{B}{D} \cdot \frac{K}{N}\right)$ — **сполучний закон множення;**

$\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{D}\right) \cdot \frac{K}{N} = \frac{A}{C} \cdot \frac{K}{N} + \frac{B}{D} \cdot \frac{K}{N}$ — **розподільний закон множення відносно додавання.**

Задача 1. Виконайте множення $\left(\frac{2x}{5y} \cdot \frac{3a}{4b}\right) \cdot \frac{y}{10x}$.

Розв'язання. Застосуємо переставний закон множення до виразу в дужках:

$$\left(\frac{2x}{5y} \cdot \frac{3a}{4b}\right) \cdot \frac{y}{10x} = \left(\frac{3a}{4b} \cdot \frac{2x}{5y}\right) \cdot \frac{y}{10x}.$$

Застосуємо сполучний закон множення:

$$\left(\frac{3a}{4b} \cdot \frac{2x}{5y}\right) \cdot \frac{y}{10x} = \frac{3a}{4b} \cdot \left(\frac{2x}{5y} \cdot \frac{y}{10x}\right).$$

Перемножимо дроби в дужках:

$$\frac{2x}{5y} \cdot \frac{y}{10x} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{x} \cdot \cancel{y}}{5\,\cancel{y} \cdot \underset{5}{\cancel{10}}\,\cancel{x}} = \frac{1}{25}.$$

Дріб $\frac{3a}{4b}$ помножимо на $\frac{1}{25}$. У результаті одержимо:

$$\frac{3a}{4b} \cdot \frac{1}{25} = \frac{3a \cdot 1}{4b \cdot 25} = \frac{3a}{100b}.$$

2. ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Пригадайте, як підносять звичайний дріб до степеня з натуральним показником n. Для цього, за означенням, основу степеня множать саму на себе стільки разів, скільки вказує показник степеня n. Наприклад:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Аналогічно виконують піднесення раціональних дробів до степеня з натуральним показником n:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B} = \frac{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Правило піднесення раціонального дробу до степеня з натуральним показником n

Щоб піднести раціональний дріб до степеня з натуральним показником n, можна піднести до цього степеня чисельник і знаменник даного дробу.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

Зверніть увагу:
якщо показник степеня дорівнює 1, то:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}.$$

Задача 2. Виконайте дії: 1) $\left(\frac{3x}{4y}\right)^3$; 2) $\left(\frac{5x^2y}{4ab}\right)^1$.

Розв'язання.

1. $\left(\frac{3x}{4y}\right)^3 = \frac{(3x)^3}{(4y)^3} = \frac{27x^3}{64y^3}.$

2. $\left(\frac{5x^2y}{4ab}\right)^1 = \frac{5x^2y}{4ab}.$

Дізнайтеся більше

«Двоповерховий» запис звичайного дробу використовувався ще давньогрецькими математиками, хоча знаменник у них записувався над чисельником, а риски дробу не було. Індійські математики перемістили чисельник наверх, а потім уже через арабських математиків такий запис перейняли і в Європі. Дробову риску вперше в Європі ввів Леонардо Пізанський (1202 р.), але в ужиток вона увійшла лише за підтримки Йоганна Відмана (1489 р.).

У VII ст. н. е. індійський математик Брахмагупта позначав піднесення до квадрата знаком व (від санскр. वर्ग — квадратне число). Сучасний запис показника степеня введений Р. Декартом у його «Геометрії» (1637 р.), правда, лише для степенів з натуральним показником, більшим за 2. Пізніше І. Ньютон поширив цю форму запису на від'ємні та дробові показники (1676 р.), трактування яких до того часу вже пропонували С. Стевін, Дж. Волліс і А. Жирар.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте правило множення двох раціональних дробів.
2. Як піднести раціональний дріб до степеня з натуральним показником?

Розв'яжіть задачі

139'. Потрібно помножити два раціональні дроби: $\frac{a}{5b}$ і $\frac{3}{4c}$.

1) Яким буде знаменник одержаного в добутку дробу:
а) $15b$; б) $3a$; в) $20bc$; г) $4ac$?
2) Яким буде чисельник одержаного в добутку дробу:
а) $20bc$; б) $3a$; в) $15b$; г) $4ac$?
3) Назвіть дріб, який є результатом множення даних дробів.

140'. Чи правильно, що добутком дробів $\frac{2x}{3}$ і $\frac{5}{3y}$ є дріб:

1) $\frac{10x}{3y}$; 2) $\frac{10x}{9y}$; 3) $\frac{6xy}{15}$; 4) $\frac{2x+5}{3+3y}$?

141'. Чи правильно, що $\left(\frac{a^3}{5}\right)^3$ дорівнює:

1) $\frac{a^{32}}{52}$; 2) $\frac{a^5}{7}$; 3) $\frac{a^6}{10}$; 4) $\frac{a^9}{125}$?

142°. Виконайте множення:

1) $\frac{x}{8}\cdot\frac{a}{5}$; 4) $\frac{5a}{b}\cdot\frac{3x}{y}$; 7) $\frac{3x}{5y}\cdot\frac{2a}{6c}$; 10) $\frac{3x}{7y}\cdot\frac{14a}{5x}$;
2) $\frac{3}{y}\cdot\frac{4}{c}$; 5) $\frac{3x}{7y}\cdot\frac{2a}{5b}$; 8) $\frac{15a}{16b}\cdot\frac{4x}{5y}$; 11) $\frac{3b}{5y}\cdot\frac{10a}{9b}$;
3) $\frac{x}{2y}\cdot\frac{a}{2c}$; 6) $\frac{3x}{4y}\cdot\frac{b}{4c}$; 9) $\frac{2x}{3y}\cdot\frac{4y^2}{5b}$; 12) $\frac{3x}{5a}\cdot\frac{2a^2}{3b}$.

143°. Виконайте множення:

1) $\frac{5}{a}\cdot\frac{y}{3}$; 2) $\frac{5x}{6a}\cdot\frac{y}{3b}$; 3) $\frac{2x}{3b}\cdot\frac{4y}{5x^3}$; 4) $\frac{3x}{5a^4}\cdot\frac{2a^2}{15b}$.

144°. Знайдіть добуток дробів:

1) $\frac{x+1}{3}$ і $\frac{6}{(x+1)^2}$; 2) $\frac{5y-5}{7}$ і $\frac{21}{y-1}$;

3) $\frac{2a+1}{8}$ і $\frac{16}{2+4a}$; 5) $\frac{3-6y}{14}$ і $\frac{35}{2y-1}$;

4) $\frac{1-b}{5}$ і $\frac{20}{(b-1)^2}$; 6) $\frac{1-3x}{12}$ і $\frac{16}{6x-2}$.

145°. Знайдіть добуток дробів:

1) $\frac{y+3}{4}$ і $\frac{20}{(y+3)^2}$; 2) $\frac{3x+2}{15}$ і $\frac{25}{6+9x}$; 3) $\frac{2-5y}{10}$ і $\frac{15}{10y-4}$.

146°. Спростіть вираз:

1) $\frac{x}{8}\cdot x$; 4) $\frac{6a}{b^3}\cdot 2b^2$; 7) $\frac{6x}{15}\cdot 12x^4$;

2) $\frac{5}{y}\cdot 6$; 5) $\frac{3}{7y}\cdot\left(-14y^2\right)$; 8) $-4y^3\cdot\frac{5}{18y^4}$.

3) $\frac{x^2}{2y^3}\cdot y^2$; 6) $\frac{5x^3}{24}\cdot(-16x)$;

147°. Виконайте множення виразів:

1) $x-3$ і $\frac{11}{x-3}$; 6) $3a+1$ і $\frac{5}{2+6a}$;

2) $3x+2$ і $-\frac{2}{2+3x}$; 7) $ax-a$ і $\frac{2}{x-1}$;

3) $2a-1$ і $\frac{5}{1-2a}$; 8) $ax+2a$ і $\frac{a}{x+2}$;

4) $2x-2$ і $\frac{6}{x-1}$; 9) $3b-ab$ і $\frac{3}{2a-6}$.

5) $3x+6$ і $\frac{7}{x+2}$;

148°. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{9a^2}\cdot 18$; 4) $(a+2)\cdot\frac{9}{2+a}$;

2) $\frac{2}{7b}\cdot 28b^2$; 5) $(3b-12)\cdot\frac{4}{4-b}$;

3) $\frac{2}{15x}\cdot\left(-24x^3\right)$; 6) $\left(a-4a^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{4a-1}\right)$.

149°. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{x^2}{6}\right)^2$; 3) $\left(\frac{x}{2y}\right)^2$; 5) $\left(\frac{2a^2}{3}\right)^3$; 7) $\left(-\frac{x^3}{8y^5}\right)^2$;

2) $\left(\frac{3}{y}\right)^3$; 4) $\left(\frac{5a}{b^2}\right)^3$; 6) $\left(\frac{3a^2}{4b^4}\right)^3$; 8) $\left(-\frac{a^5}{6b^4}\right)^3$.

150°. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{a^3}{4}\right)^2$; 2) $\left(\frac{7}{c^2}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{5a}{b^3}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{3a^6}{b^3}\right)^3$.

151°. Сторона квадрата дорівнює $3ab$. Чому дорівнює площа:

1) $\frac{1}{6}$ квадрата; 2) $\frac{2}{9}$ квадрата; 3) $\frac{11}{36}$ квадрата?

152°. Сторона квадрата дорівнює $5xy$. Чому дорівнює площа:

1) $\frac{1}{15}$ квадрата; 2) $\frac{2}{25}$ квадрата; 3) $0,15$ квадрата?

153°. Знайдіть помилку в обчисленнях:

$$\frac{5x^2}{18y^3}\cdot\frac{6y}{25x}=\frac{5x^2\cdot 6y}{18y^3\cdot 25x}=\frac{x\cdot y}{2y^2\cdot 5}=\frac{x}{10y}.$$

154°. Замість * поставте такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

1) $\frac{2a^3}{5}\cdot\frac{*}{8a^2}=\frac{3ab}{20}$; 2) $\frac{6y^4}{*}\cdot\frac{8}{15y^3}=\frac{4}{5xy}$.

155°. Замість * поставте такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

1) $\frac{4x}{7}\cdot\frac{*}{8a^2}=\frac{3ax}{2}$; 2) $\frac{5c^3}{*}\cdot\frac{9}{35c^5}=\frac{3}{14c^2x}$.

156. Спростіть вираз:

1) $\frac{9cx^3}{16ab}\cdot\frac{2ab^2}{cxy}\cdot\frac{4by^2}{3ax^2}$;

2) $\frac{x^2y^2-4y^2}{4xy}\cdot\frac{x^2y}{2xy^2-x^2y}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}$;

4) $\frac{ab-ad}{bc+cd}\cdot\frac{ab+ad}{cd-bc}$;

5) $\frac{2a^3-2b^3}{3a+3b}\cdot\frac{5a^2-5b^2}{a^2+ab+b^2}$;

6) $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{xy(x+y)}$;

7) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\cdot\frac{x^3+y^3}{x-y}$;

8) $\frac{x^2+y^2-xy}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2+b^2-2ab}{x^3+y^3}$;

9) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab}\cdot\frac{a-b}{ab+a^2}$;

10) $\frac{a^3+b^3}{a-b}\cdot\frac{a^3-b^3}{a+b}$.

157. Спростіть вираз:

1) $\frac{14a^2b^2}{5xy}\cdot\frac{10x^2y^3}{21a^2b^3}\cdot\frac{3b^2}{4y}$;

2) $\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{xy+x^2+y^2}$.

158. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{2x}{1-3y}+\frac{2x}{3y+1}\right)\cdot\left(\frac{9y^2+1-6y}{4x^2}\right)$;

2) $\left(\frac{y^2-x^2}{m^2-n^2}\cdot\frac{m+n}{x-y}-\frac{x}{n-m}\right)\cdot\frac{m-n}{2y}$;

3) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{ab}$.

159. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{2x^2y^3}{a^3b^5}\right)^2\cdot\left(\frac{3a^2b}{4xy^2}\right)^3\cdot\frac{16b^2}{9x}$;

2) $\left(\frac{(2xy)^3}{2(a^2b)^2}\right)^2\cdot\frac{a^3b^3}{48x^2y^2}$;

3) $\left(\left(\frac{5abc}{3xyz}\right)^3\cdot\frac{9xyz^2}{25ac^2}\right)^2$.

160. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1+a}{a^2-ab}-\frac{1-b}{b^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b-ab^2}{a+b}$;

2) $\frac{x^3-9xy^2}{9y^2+x^2}\cdot\left(\frac{x+3y}{x^2-3xy}+\frac{x-3y}{3xy+x^2}\right)$;

3) $\left(\frac{3(x^2y)^3}{(3ac^2)^2}\right)^2\cdot\frac{a^3c^4}{15x^3y^4}$.

161*. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x+5}{5x-1}+\frac{x+5}{x+1}\right)\cdot\frac{1-5x}{x^2+5x}+\frac{x^2+5}{x+1}$;

2) $\left(\frac{a-3}{7a-4}-\frac{a-3}{a-4}\right)\cdot\frac{7a-4}{9a-3a^2}+\frac{a^2-14}{4-a}$;

3) $\frac{y-4}{y-2}:\left(\frac{2y}{y^2+2y+4}+\frac{80y}{y^3-8}-\frac{y-16}{2-y}\right)-\frac{6y+4}{(4-y)^2}$.

162*. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\cdot\left(\frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{x+y}{xy-y^2}\right)+\frac{x}{x+y}$;

2) $\dfrac{x+7}{x+9}+\left(\dfrac{x+7}{x^2+81-18x}+\dfrac{x+5}{x^2-81}\right)\cdot\left(\dfrac{x-9}{x+3}\right)^2;$

3) $\left(\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{a+b}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-2\right)\cdot\dfrac{a^2b^2}{a^4-b^4};$

4) $\dfrac{x^3-y^3}{2y}\cdot\left(\dfrac{2y}{4-2y-2x+xy}+\dfrac{2xy+4y}{(x-y)\left(x^2-4\right)}\right).$

163*. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінної x на її ОДЗ:

1) $\left(\dfrac{x^2-2x+4}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2+x}{x^3+8}-\dfrac{x+2}{2x^2-x}\right)\cdot\dfrac{x^2+2x}{4}-\dfrac{x+4}{3-6x};$

2) $\left(\dfrac{x+5}{x^2-81}+\dfrac{x+7}{x^2-8x+81}\right)\cdot\left(\dfrac{x-9}{x+3}\right)^2+\dfrac{x+7}{x+9}.$

Проявіть компетентність

164. Учитель на дошці записав розв'язання кількох прикладів. Хтось із учнів випадково витер частину записів. Відновіть утрачені записи.

1) $\dfrac{x^2y^2}{c^2-d^2}\cdot\dfrac{c-d}{\quad}=\dfrac{x^2y^2(c-d)}{(c-d)(\quad)xy^3}=\dfrac{x}{y(\quad)};$

2) $\dfrac{3a^2b^3}{5x^3y^4}\cdot\left(\dfrac{5xy}{3ab}\right)^2=\dfrac{3a^2b^3}{5x^3y^4}\cdot\dfrac{25\quad}{9\quad}=\dfrac{3a^2b^3\cdot\quad x^2}{5x^3y^4\cdot\quad a^2}=\dfrac{\quad}{\quad}.$

Задачі на повторення

165. Скільки грамів води потрібно додати до 50 г 35 %-го розчину соляної кислоти, щоб одержати 10 %-й її розчин?

166. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2y-z^2x+xy^2-yz^2;$

2) $3x^2y-3xy^2+6x^2-6y^2;$

3) $c^6+d^6.$

§ 6 Ділення раціональних дробів

Ви вже знаєте, як додавати, віднімати, множити, підносити до степеня з натуральним показником раціональні дроби. У цьому параграфі ви з'ясуєте, як виконувати ділення раціональних дробів. Зверніть увагу: **ділити раціональні дроби можна лише на ОДЗ їхніх змінних.**

Пригадайте, щоб поділити два звичайні дроби, потрібно ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21},$$

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

? Як знайти раціональний дріб, обернений до даного? У 6-му класі ви дізналися, що число, обернене до даного числа, знаходять за допомогою ділення числа 1 на дане число. Аналогічно діють і з раціональними дробами.

Щоб одержати раціональний дріб, обернений до даного, потрібно число 1 поділити на даний дріб.

Наприклад, для дробу $\frac{2y}{5x}$ оберненим є дріб $\frac{5x}{2y}$, оскільки:

$$1 : \frac{2y}{5x} = 1 \cdot \frac{5x}{2y} = \frac{5x}{2y}.$$

У загальному випадку маємо:

$$1 : \frac{A}{B} = 1 \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A}.$$

Отже, дробом, оберненим до раціонального дробу $\frac{A}{B}$, є дріб $\frac{B}{A}$.

Ділення раціональних дробів виконують аналогічно до ділення звичайних дробів — ділене множать на раціональний дріб, обернений до дільника. Одержану частку скорочують, якщо це можливо. Наприклад:

$$\frac{3x}{4y} : \frac{3x^2}{2y^2} = \frac{3x}{4y} \cdot \frac{2y^2}{3x^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\, \cancel{x} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}\, y^{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\, \cancel{y} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}\, x^{\cancel{2}}} = \frac{y}{2x}.$$

Правило ділення раціональних дробів

Щоб знайти частку двох раціональних дробів, потрібно ділене помножити на дріб, обернений до дільника.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$$

Задача 1. Виконайте ділення:

1) $\frac{3x^2y^3}{4ab^4}:\frac{9xy^3}{10ab^2}$; 2) $(x-1):\frac{x^2-1}{3x}$; 3) $\frac{x+2}{5x^2}:(x^2+2x)$.

Розв'язання.

1. Знайдемо дріб, обернений до дільника:

$1:\frac{9xy^3}{10ab^2}=1\cdot\frac{10ab^2}{9xy^3}=\frac{10ab^2}{9xy^3}$. Застосуємо правило ділення раціональних дробів, помноживши ділене на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{3x^2y^3}{4ab^4}:\frac{9xy^3}{10ab^2}=\frac{3x^2y^3}{4ab^4}\cdot\frac{10ab^2}{9xy^3}=\frac{3x^2y^3\cdot 10ab^2}{4ab^4\cdot 9xy^3}.$$

Скоротимо одержаний дріб: $\frac{3x^2y^3\cdot 10ab^2}{4ab^4\cdot 9xy^3}=\frac{x\cdot 5}{2b^2\cdot 3}=\frac{5x}{6b^2}$.

Отже, $\frac{3x^2y^3}{4ab^4}:\frac{9xy^3}{10ab^2}=\frac{5x}{6b^2}$.

2. Спочатку подамо ділене $x-1$ як дріб $\frac{x-1}{1}$ та знайдемо дріб, обернений до дільника: $\frac{3x}{x^2-1}$. Виконаємо ділення заданих дробів:

$$(x-1):\frac{x^2-1}{3x}=\frac{x-1}{1}\cdot\frac{3x}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot 3x}{x^2-1}.$$

Скоротимо одержаний дріб: $\frac{(x-1)\cdot 3x}{x^2-1}=\frac{3x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{3x}{x+1}$.

Отже, $(x-1):\frac{x^2-1}{3x}=\frac{3x}{x+1}$.

3. Подамо дільник x^2+2x як дріб $\frac{x^2+2x}{1}$ і знайдемо дріб, обернений до нього: $\frac{1}{x^2+2x}$. Виконаємо ділення заданих дробів:

$$\frac{x+2}{5x^2}:\left(x^2+2x\right)=\frac{x+2}{5x^2}\cdot\frac{1}{x^2+2x}=\frac{x+2}{5x^2\cdot\left(x^2+2x\right)}.$$

Скоротимо одержаний дріб:

$$\frac{x+2}{5x^2\cdot\left(x^2+2x\right)}=\frac{\cancel{x+2}}{5x^2\cdot x\cdot\cancel{(x+2)}}=\frac{1}{5x^3}.$$

Отже, $\frac{x+2}{5x^2}:\left(x^2+2x\right)=\frac{1}{5x^3}$.

Дізнайтеся більше

Ланцюговий дріб — це математичний вираз виду:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ldots}}}}$$

де a_0 — ціле число, а решта a_n є натуральними числами. Будь-яке число може бути подане як ланцюговий дріб. Ланцюгові дроби можуть бути скінченними і нескінченними. Число можна подати як скінченний ланцюговий дріб тоді й тільки тоді, коли воно є раціональним.

За допомогою ланцюгового дробу можна виразити довжину року:

$$1\ \text{рік} = 365{,}2421988\ldots=365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}.$$

Звідси одержуємо послідовність дробів: 365; $365\frac{1}{4}$; $365\frac{7}{29}$; $365\frac{8}{33}$; $365\frac{31}{128}$, ...

Дріб $365\frac{1}{4}$ показує, що за 4 роки набігає один «зайвий» день. Календар, складений таким чином, називають юліанським календарем. Дріб $365\frac{8}{33}$ показує, що за 33 роки набігає 8 «зайвих» днів. Такий календар був запропонований у 1079 р. перським математиком і поетом Омаром Хайямом. Якщо ж довжину року подати дробом $365\frac{31}{128}$, то одержимо досить точний календар, відповідно до якого середня тривалість року лише на 1 с буде перевищувати справжню.

На заміну юліанського було розроблено григоріанський календар. Він запроваджений 4 жовтня 1582 р. Папою Римським Григорієм XIII і нині ухвалений у світі як міжнародний стандарт. Середня тривалість року за григоріанським календарем становить 365,2425 днів або 365 днів 5 годин 49 хвилин і 12 секунд. Україна користується цим календарем з 1918 р.

Пригадайте головне

1. Як знайти раціональний дріб, обернений до даного?
2. Сформулюйте правило ділення раціональних дробів.

Розв'яжіть задачі

167'. Потрібно поділити дріб $\frac{1}{2b}$ на дріб $\frac{2}{3c}$.

1) Яким буде дріб, обернений до дільника:

а) $2b$; в) $\frac{2}{3c}$;

б) $\frac{1}{2b}$; г) $\frac{3c}{2}$?

2) Яким буде знаменник одержаного в частці дробу:

а) $6bc$; в) $3c$;

б) $4b$; г) 2?

3) Яким буде чисельник одержаного в частці дробу:

а) $6bc$; в) $3c$;

б) $4b$; г) 2?

4) Назвіть дріб, який є результатом ділення даних дробів.

168'. Чи правильно, що часткою дробів $\frac{2x}{3}$ і $\frac{3}{2y}$ є дріб:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{4xy}{9}$; 3) $\frac{9}{4xy}$; 4) $\frac{y}{x}$?

169°. Виконайте ділення:

1) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$;

2) $\frac{2}{x} : \frac{2}{y}$;

3) $\frac{1}{2x} : \frac{1}{2y}$;

4) $\frac{1}{2x} : \frac{2}{y}$;

5) $\frac{2x}{3} : \frac{2y}{5}$;

6) $\frac{1}{3xy} : \frac{5}{9x}$;

7) $\frac{1}{5x} : \frac{2}{15xy}$;

8) $\frac{7}{2ab} : \frac{14}{4a}$;

9) $\frac{6x}{5} : \frac{12y}{25}$;

10) $\frac{7}{3a} : \frac{28}{9b}$;

11) $\frac{3x}{8y} : \frac{21}{40xy}$;

12) $\frac{9}{2ab} : \frac{63}{16b}$.

170°. Виконайте ділення:

1) $\frac{1}{a^2b} : \frac{1}{ab^2}$;

2) $\frac{1}{xy} : \frac{2}{y^3}$;

3) $\frac{x^2y}{2} : \frac{xy^3}{3}$;

4) $\frac{4x^3}{5} : \frac{8x^4}{3}$;

5) $\frac{3}{2a^3b} : \frac{9}{4a^2b^2}$;

6) $\frac{8x^2}{y} : \frac{2x^3}{y^3}$;

7) $\frac{5x^3y}{2} : \frac{15x^2y^2}{8}$;

8) $\frac{4x^4}{9y} : \frac{16x^2}{3y^2}$.

171°. Виконайте ділення:

1) $\frac{6x}{5} : \frac{3y}{2}$;

2) $\frac{1}{3x} : \frac{5}{12x}$;

3) $\frac{1}{5a} : \frac{3}{35ab}$;

4) $\frac{7a}{2b} : \frac{14a}{5}$;

5) $\frac{1}{a^3b^3} : \frac{1}{a^2b^2}$;

6) $\frac{6x^2y^4}{7} : \frac{18xy^5}{35}$.

172°. Знайдіть частку дробів:

1) $\frac{x+1}{3}$ і $\frac{x+1}{15}$;

2) $\frac{5y-5}{7}$ і $\frac{y-1}{28}$;

3) $\frac{2a+1}{8}$ і $\frac{4a+2}{16}$;

4) $\frac{1-b}{5}$ і $\frac{(b-1)^2}{25}$;

5) $\frac{3-6y}{14}$ і $\frac{2y-1}{42}$;

6) $\frac{1-3x}{18}$ і $\frac{9x-3}{42}$.

173°. Знайдіть частку дробів:

1) $\frac{y+3}{4}$ і $\frac{y+3}{36}$; 2) $\frac{3x+1}{15}$ і $\frac{3+9x}{35}$; 3) $\frac{2-5y}{10}$ і $\frac{15y-6}{50}$.

174°. Виконайте ділення:

1) $\frac{x}{5} : x$;
2) $\frac{12}{y} : 6$;
3) $\frac{3x^2}{4y^3} : x^2$;
4) $\frac{6a^3}{b^2} : 3a^2$;
5) $x : \frac{5}{x}$;
6) $\frac{3}{y} : 3y$;
7) $\frac{5}{2x^2} : x^2$;
8) $\frac{6}{b^2} : 3b^2$;
9) $\frac{3y}{7} : (-y)$;
10) $\frac{24x^3}{25} : (-4x)$;
11) $-\frac{6}{7x} : (-12x)$;
12) $-4y^3 : \frac{5y^2}{16}$.

175°. Виконайте ділення:

1) $(x-3) : \frac{x-3}{9}$;
2) $(3x-1) : \frac{3x-1}{3}$;
3) $(2a-1) : \frac{1-2a}{2}$;
4) $(2x-2) : \frac{x-1}{8}$;
5) $(3x+6) : \frac{x+2}{3}$;
6) $(3a+1) : \frac{3+9a}{2}$;
7) $(ax-a) : \frac{x-1}{a}$;
8) $(ax+2a) : \frac{x+2}{2a}$;
9) $(3b-ab) : \frac{2a-6}{2b}$.

176°. Виконайте ділення:

1) $\frac{9a^2}{2} : 18$;
2) $\frac{14b}{3} : 28b^2$;
3) $\frac{36x^2}{5} : (-24x^3)$;
4) $(a+2) : \frac{4+2a}{3}$;
5) $(3b-12) : \frac{4-b}{3}$;
6) $(a-4a^2) : \frac{4a-1}{a}$.

177°. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P. Знайдіть сторону трикутника, якщо:

1) $P = 9a$;
2) $P = 15a$;
3) $P = 51a$;
4) $P = 66a$.

178°. Периметр квадрата дорівнює P. Знайдіть сторону квадрата, якщо:

1) $P = 4a$;
2) $P = 3a$;
3) $P = 32a$;
4) $P = 56a$.

179°. Периметр квадрата дорівнює P. Знайдіть сторону квадрата, якщо:

1) $P = 8b$;
2) $P = 9b$;
3) $P = 36b$;
4) $P = 52b$.

180°. Знайдіть помилки в обчисленнях та виправте їх:

1) $\dfrac{5x^2}{9y^3} : \dfrac{25x}{27y^2} = \dfrac{5x^2}{9y^3} \cdot \dfrac{25x}{27y^2} = \dfrac{5x^2 \cdot 25x}{9y^3 \cdot 27y^2} = \dfrac{125x^2}{243y^2}$;

2) $\dfrac{3a^2}{4b} : \left(-\dfrac{9a}{16b^2}\right) = -\dfrac{3a^2}{4b} \cdot \dfrac{16b^2}{9a} = \dfrac{3a^2 \cdot 16b^2}{4b \cdot 9a} = \dfrac{a \cdot 4}{b \cdot 3} = \dfrac{4a}{3b}$.

181°. Поставте замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

1) $\dfrac{3a^2}{5b^3} : \dfrac{*}{10b^2} = \dfrac{2a}{3b}$;

2) $\dfrac{4xy}{5c} : \dfrac{*}{15c^2} = \dfrac{3c}{4}$.

182°. Поставте замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність:

1) $\dfrac{2a^3}{7b^2} : \dfrac{8a^2}{*} = \dfrac{ab}{4}$;

2) $\dfrac{5x^2y^2}{8} : \dfrac{*}{24} = \dfrac{3xy}{5}$.

183. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{12x^2y}{a^4} \cdot \dfrac{a}{xy^2} : \dfrac{6x^2}{a^2y}$;

2) $x^3y^2 : \dfrac{15}{x^4} \cdot \dfrac{5}{y^3}$;

3) $12x^3y \cdot \dfrac{x}{y} : \dfrac{6x^3}{y^2}$;

4) $\dfrac{ab^3}{x} : \dfrac{25b^2}{a} : \dfrac{a^3}{35x}$;

5) $\dfrac{2ab^5}{3c} \cdot 24ac : \left(-32b^3c\right)$;

6) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{10m}{3n}\right) : (-15mn)$.

184. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{4x-y}{2x^2+2xy}:\dfrac{xy-4x^2}{8x^2-8y^2}$;

2) $\dfrac{10b^2-10ab}{9a^2+9ad}:\dfrac{5ab}{3d^2+3ad}$;

3) $\dfrac{9(c-d)^2}{cd^2+d^3}:\dfrac{3d^2-3c^2}{d^4}$;

4) $\dfrac{8}{9}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2:\dfrac{(4-2x)^3}{(3-3x)^2}$.

185. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{16a^2b^2}{5xy}:\dfrac{12ab^3}{25x^2y^3}\cdot\dfrac{3a^2}{4y}$;

2) $\dfrac{x^2+y^2+2xy}{x^3-y^3}:\dfrac{x^2-y^2}{xy+x^2+y^2}$.

186. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^3+y^3}{x-y}:\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$;

2) $\dfrac{a^2-10cx+10ax-ac}{x^2-ax}:\dfrac{a^2-100x^2}{a^2-ax}$;

3) $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}:\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^4-b^4}$;

4) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\dfrac{a-b}{a^3+b^3}$.

187. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2-2xy}:\dfrac{y+x}{(x-y)^2}$;

2) $\dfrac{a^2+b^2-ab}{x^2-y^2}:\dfrac{a^3+b^3}{x^2+y^2-2xy}$.

188*. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{1+n}{n^2-mn}-\dfrac{1-m}{m^2-mn}\right):\dfrac{m+n}{m^2n-mn^2}$;

2) $\left(\dfrac{y^2-x^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a+b}{x-y}-\dfrac{x}{b-a}\right):\dfrac{2y}{a-b}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab}$.

189*. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{a+b}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-2\right):\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}$;

2) $\left(\frac{x-y}{y}+\frac{2y}{x+y}\right)\cdot\left(1+\frac{y+1}{x}+\frac{y}{x^2}\right):\frac{x^2+y^2}{2x^2y}$;

3) $\left(m^2-n^2-\frac{4m^2n-4mn^2}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$.

190*. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінної x на її ОДЗ:

1) $\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+3\right):\frac{x^3+1}{x^3-1}-\frac{2x}{x-1}$;

2) $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x^2}{x^2-1}\right):\left(\frac{2-2x}{x^2}+2-\frac{2}{x^3+x^2}\right)$.

Проявіть компетентність

191. Сергійко потрапив під дощ і намочив зошит з алгебри. Частину записів у зошиті неможливо прочитати. Відновіть утрачені записи.

$$\frac{x^4-16}{x^2-4x+4}:\frac{x^3+8}{x-2}=\frac{(x^2-4)(\quad)}{(x-2)^2}\cdot\frac{x-2}{(x+2)(\quad)}=$$

$$=\frac{(x-2)^2(x+2)(x^2+4)}{(x-2)^2(x+2)(\quad)}=\frac{x^2+4}{\quad}.$$

Задачі на повторення

192. Є два сплави із цинку, міді й олова. Перший містить 25 % цинку, другий — 50 % міді. Відсотковий вміст олова в першому сплаві вдвічі більший, ніж у другому. Взявши 200 кг першого сплаву і 300 кг другого, одержали сплав, який містить 28 % олова. Скільки кілограмів міді в новому сплаві?

193. Графік функції $y = kx$ проходить через точку A $(a;\ b)$. Знайдіть значення k, якщо:

1) $a = -1$, $b = -1$;
2) $a = -2$, $b = -1$;
3) $a = -0{,}2$, $b = 1$;
4) $a = 3$, $b = 0{,}6$.

§ 7 Раціональні рівняння

Ви вже знаєте, що таке рівняння та його корені, вмієте розв'язувати лінійні рівняння. У цьому параграфі ви дізнаєтеся про інші види рівнянь та способи їх розв'язування.

Рівняння називається *раціональним*, якщо обидві його частини — раціональні вирази.

Ви знаєте, що раціональні вирази поділяють на цілі та дробові. Раціональні рівняння теж поділяють на цілі та дробові. З одним із видів цілих раціональних рівнянь ви вже знайомі — це лінійні рівняння. Розглянемо ще один приклад цілих раціональних рівнянь.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння: $x(x-1)(x+3)=0$.

Розв'язання. Добуток кількох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один із цих множників дорівнює нулю. Тому з даного рівняння одержуємо:

$x = 0$, або $x - 1 = 0$, або $x + 3 = 0$,

звідси $x = 0$, або $x = 1$, або $x = -3$.

Отже, коренями рівняння є числа: –3, 0 і 1.

Зверніть увагу:
щоб розв'язати ціле раціональне рівняння виду $P(x) \cdot \ldots \cdot Q(x) = 0$, де $P(x), \ldots, Q(x)$ — деякі многочлени, можна скористатися умовою рівності добутку нулю: скласти рівняння $P(x) = 0, \ldots, Q(x) = 0$ та розв'язати їх.

Існують й інші види цілих раціональних рівнянь. Їх ви вивчатимете пізніше.

Раціональне рівняння називається *дробовим раціональним рівнянням*, якщо принаймні одна з його частин містить дробовий вираз.

Наприклад, рівняння $\frac{x-3}{5x}=0$, $x-3=\frac{5}{x}$, $\frac{x-3}{4}=\frac{1}{5x}$, $\frac{5}{x}-\frac{3}{x-2}=1$ є дробовими раціональними рівняннями.

Пригадайте, що рівняння, які мають одні й ті самі корені, називають *рівносильними*. Наприклад, рівняння $\frac{5}{x}=1$ і рівняння $\frac{5-x}{x}=0$ є рівносильними.

Розглянемо ще два рівняння:

$$\frac{x-5}{x}=0 \text{ (корінь 5)} \quad \text{і} \quad x(x-5)=0 \text{ (корені 0 і 5)}.$$

Корінь 5 першого рівняння задовольняє й друге рівняння. Проте в другого рівняння, крім кореня 5, є ще корінь 0, який не задовольняє перше рівняння. Отже, дані *рівняння не є рівносильними*. Для рівняння $\frac{x-5}{x}=0$ рівняння $x(x-5)=0$ є *рівнянням-наслідком*. Його корінь 0 є *стороннім коренем* для рівняння $\frac{x-5}{x}=0$.

Зверніть увагу:
нетотожні перетворення рівняння можуть призвести до появи сторонніх коренів, які не задовольняють вихідне рівняння.

Ви знаєте, що дробові раціональні вирази містять ділення на вираз зі змінною. Тому такі рівняння можна звести до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — деякі многочлени. З умови рівності дробу нулю випливає, що одночасно мають виконуватися дві вимоги: $Q(x)\neq 0$ і $P(x)=0$. Тому на ОДЗ змінної даного рівняння (а саме: $Q(x)\neq 0$), можна перейти до розв'язування цілого раціонального рівняння $P(x)=0$, що є рівнянням-наслідком даного дробового рівняння.

Розглянемо приклади.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння: $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{(x+1)(x-2)}$.

Розв'язання. ОДЗ: x — будь-яке число, крім -1 і 2.

Перенесемо дріб $\frac{3}{(x+1)(x-2)}$ із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{(x+1)(x-2)}=0.$$

У лівій частині рівняння зведемо дроби до спільного знаменника $(x + 1)(x - 2)$. Додатковим множником для першого дробу є двочлен $x - 2$, для другого — двочлен $x + 1$, а для третього — число 1. Одержуємо:

$$\frac{1\cdot(x-2)+2\cdot(x+1)-3}{(x+1)(x-2)}=0.$$

Оскільки на ОДЗ змінної знаменник одержаного дробу не дорівнює нулю, то, згідно з умовою рівності дробу нулю, можемо прирівняти до нуля чисельник цього дробу:

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(x+1)-3=0.$$

Одержали ціле раціональне рівняння, яке є рівнянням-наслідком даного. Розв'яжемо його:

$$x - 2 + 2x + 2 - 3 = 0,$$
$$3x - 3 = 0,$$
$$3x = 3,$$
$$x = 1.$$

Перевіримо, чи є число 1 коренем початкового рівняння.
Число 1 входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому 1 є коренем цього рівняння.
Отже, $x = 1$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x}{x-3}-\frac{4}{x+1}=\frac{12}{(x+1)(x-3)}$.

Розв'язання. ОДЗ: x — будь-яке число, крім –1 і 3.
Розв'яжемо дане рівняння:

$$\frac{x}{x-3}-\frac{4}{x+1}-\frac{12}{(x+1)(x-3)}=0,$$

$$\frac{x\cdot(x+1)-4\cdot(x-3)-12}{(x+1)(x-3)}=0.$$

Прирівняємо до нуля чисельник дробу та розв'яжемо одержане рівняння-наслідок:

$$x\cdot(x+1)-4\cdot(x-3)-12=0,$$
$$x^2 + x - 4x + 12 - 12 = 0,$$
$$x^2 - 3x = 0,$$
$$x(x - 3) = 0,$$
$$x = 0 \text{ або } x = 3.$$

Число 0 входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому 0 є коренем цього рівняння.

Число 3 не входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому 3 не є коренем цього рівняння.
Отже, $x = 0$.

Зверніть увагу:
щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, потрібно:
1) визначити ОДЗ змінної рівняння;
2) звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — деякі многочлени;
3) розв'язати рівняння-наслідок $P(x) = 0$;
4) зробити перевірку знайдених коренів щодо їх належності до ОДЗ змінної початкового рівняння.

Із 6-го класу ви пам'ятаєте, що рівність виду $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ називають пропорцією. Деякі дробові раціональні рівняння можна розв'язувати, застосовуючи основну властивість пропорції, а саме: якщо $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, то $A \cdot D = B \cdot C$.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x}{1-x} = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. ОДЗ: x — будь-яке число, крім 1.
Застосувавши основну властивість пропорції, одержимо:

$$3x = 5(1-x),\ 3x = 5-5x,$$

$$3x + 5x = 5,\ 8x = 5,$$

$$x = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Число 0,625 входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому є коренем цього рівняння.
Отже, $x = 0{,}625$.

Дізнайтеся більше

Відомо, що стародавні вчені володіли деякими загальними прийомами розв'язування задач із невідомими величинами. Проте в жодному папірусі давніх єгиптян чи на глиняній табличці з Вавилону, у давніших грецьких артефактах не надано опису цих прийомів. Винятком є «Арифметика» давньогрецького математика Діофанта Александрійського (III ст.), що містить збірку задач на складання рівнянь із систематичним описом їх розв'язування.

Проте першим посібником із розв'язування задач, який набув широкої популярності, стала праця багдадського вченого IX ст. Мухаммеда бен Муси аль-Хорезмі — «Книга про відновлення та протиставлення», відома під назвою «Алгебра». Ця праця аль-Хорезмі стала початком становлення науки про розв'язування рівнянь. У його книзі невідомі величини та всі дії, що супроводжували розв'язування, описувалися словесно. Такий стиль викладу, характерний для раннього етапу розвитку алгебри, вчені назвали риторичним.

І лише в XVI ст. французький математик Франсуа Вієт першим серед вчених увів буквені позначення для коефіцієнтів рівнянь і невідомих величин. А традицією позначати невідомі величини останніми буквами латинського алфавіту (x, y або z) ми завдячуємо співвітчизнику Вієта — відомому французькому математику Рене Декарту.


Діофант


Франсуа Вієт

Пригадайте головне

1. Які рівняння називаються раціональними?
2. За якої умови добуток дорівнює нулю?
3. Які рівняння називаються дробовими раціональними?
4. Які рівняння називають рівносильними?
5. Що таке рівняння-наслідок?
6. За якої умови дріб дорівнює нулю?
7. Як розв'язати рівняння, застосувавши основну властивість пропорції?

Розв'яжіть задачі

194'. Чи є рівняння цілим раціональним:

1) $0,7x - 1 = 5x - 2$;
2) $3x^2 - 4x = 8$;
3) $\frac{3}{5} + \frac{x}{3} = 2$;
4) $\frac{x-4}{4x} = 4$?

195'. Чи є рівняння дробовим раціональним:

1) $0,01x - 1 = 5$;
2) $3x^2 - 4 = 8x + 5$;
3) $\frac{x-3}{x} - \frac{x}{x-3} = 0$;
4) $\frac{x-1}{3} = 4$?

196'. Чи правильно, що:

1) число 0 є коренем рівняння $2x^2 - 3x + 3 = 0$;
2) число 5 є коренем рівняння $\frac{x-3}{x-5} = 2$;
3) число 1 є коренем рівняння $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} = 0$;
4) число −1 є коренем рівняння $\frac{5x+2}{3} + \frac{4}{x-3} = -2$?

197'. Чи правильно застосовано основну властивість до пропорції $\frac{3}{x} = \frac{y}{z}$:

1) $3y = xz$;
2) $3x = yz$;
3) $3z = xy$;
4) $3 + z = x + y$?

198°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(x-4) = 0$;
2) $x(1-3x) = 0$;
3) $(x+1)(x-4) = 0$;
4) $(x+2)(5x-1) = 0$;
5) $x^2 - 6x = 0$;
6) $x^2 + 5x = 0$;
7) $x^2 - 4 = 0$;
8) $50 - 2x^2 = 0$.

199°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(6-2x) = 0$;
2) $x^2 + 7x = 0$;
3) $(5-x)(x-4) = 0$;
4) $2x^2 - 72 = 0$.

200°. Визначте ОДЗ змінної x рівняння:

1) $(x-2)(x+3)=0;$
2) $(x-2)(x-6)=5;$
3) $\frac{x-1}{7}=0;$
4) $\frac{3}{x-1}=0;$
5) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x}=1;$
6) $\frac{x-2}{3}+\frac{x-5}{4}=x;$
7) $\frac{3}{7}(x-3)+\frac{5}{9}=\frac{1}{5};$
8) $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x}=\frac{1}{x+1};$
9) $\frac{5}{(x-1)(x+2)}=2,4;$
10) $\frac{2(x-2)^2}{x-2}=0.$

201°. Визначте ОДЗ змінної x рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{25}=0;$
2) $\frac{1}{x-3}=0;$
3) $\frac{5}{x+5}+\frac{4}{x-4}=2;$
4) $\frac{(x+1)^3}{x+1}=1.$

202°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x}{x+1}=0;$
2) $\frac{x-3}{2x}=0;$
3) $\frac{x-2}{x+2}=0;$
4) $\frac{x+3}{x-3}=0;$
5) $\frac{x^2}{x^2+1}=0;$
6) $\frac{x^2-1}{3x}=0;$
7) $\frac{3x^3}{x+3}=0;$
8) $\frac{x-5}{5x}=0.$

203°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x^2+x}=0;$
2) $\frac{x-3}{x^2-3x}=0;$
3) $\frac{x^2}{x^2-2x}=0;$
4) $\frac{5x^3}{x^3+5x^2}=0;$
5) $\frac{x+5}{x^2+5x}=0;$
6) $\frac{2x-1}{2x^3-x^2}=0;$
7) $\frac{x-4}{4x-x^2}=0;$
8) $\frac{1-3x}{3x^3-x^2}=0.$

204°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x}{x+1}=0;$ 2) $\frac{x-4}{4x}=0;$ 3) $\frac{x}{x^2-x}=0;$ 4) $\frac{x+3}{x^2+3x}=0.$

205°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x^2-1}=0$;
2) $\frac{x+2}{x^2-4}=0$;
3) $\frac{2x+2}{x^2-1}=0$;
4) $\frac{3x-6}{x^2-4}=0$;
5) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$;
6) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$;
7) $\frac{x^2-16}{x-4}=0$;
8) $\frac{x^2-16}{3x+12}=0$.

206°. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{x-3}{x^2-9}=0$; 2) $\frac{x^2-9}{4x+12}=0$.

207°. Чи має розв'язки рівняння:

1) $\frac{x^2+1}{x}=0$;
2) $\frac{x^2-1}{x}=0$;
3) $x^2+\frac{1}{x^2}=0$;
4) $x+\frac{1}{x}=0$;
5) $\frac{5}{x-1}=0$;
6) $\frac{5}{x-1}=1$?

Якщо так, то знайдіть їх.

208°. Застосуйте основну властивість пропорції та розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{x}=\frac{5}{7}$;
2) $\frac{3}{2x}=-\frac{4}{5}$;
3) $\frac{4}{3x}=-\frac{8}{27}$;
4) $-\frac{5}{16x}=\frac{25}{32}$;
5) $\frac{x-1}{x}=\frac{3}{4}$;
6) $\frac{x-2}{2x}=\frac{2}{3}$;
7) $\frac{1+x}{2x}=\frac{5}{6}$;
8) $\frac{4-x}{5x}=\frac{9}{10}$;
9) $\frac{3+x}{3x}=\frac{4}{7}$;
10) $\frac{3-x}{3x}=\frac{8}{9}$;
11) $\frac{x}{3+x}=\frac{3}{5}$;
12) $\frac{-x}{2+x}=\frac{6}{11}$;
13) $\frac{x}{5+x}=\frac{2}{7}$;
14) $\frac{4x}{4-x}=\frac{5}{8}$;
15) $\frac{2x}{4-x}=-\frac{2}{7}$;
16) $-\frac{3x}{2-x}=\frac{4}{9}$;
17) $\frac{x-1}{2+x}=\frac{2}{3}$;
18) $\frac{1-x}{4+x}=\frac{5}{6}$;
19) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}$;
20) $\frac{2-x}{3-2x}=\frac{5}{7}$.

209°. Застосуйте основну властивість пропорції та розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{3x}=\frac{8}{21}$; 3) $\frac{x}{4+x}=\frac{4}{5}$; 5) $\frac{x-2}{1+x}=\frac{3}{4}$;

2) $\frac{x-2}{4x}=\frac{5}{8}$; 4) $\frac{3x}{5-x}=\frac{3}{5}$; 6) $\frac{2-3x}{3-x}=\frac{7}{8}$.

210. Чи є рівносильними рівняння:

1) $\frac{2}{3}x=1$ і $2x=3$;

2) $-\frac{4}{7}(x-1)=2$ і $4x-4=14$;

3) $\frac{x-1}{2}=2,5$ і $x-1=5$;

4) $\frac{2}{x-2}=2$ і $\frac{1}{2-x}=1$;

5) $\frac{4-x}{x-1}=0$ і $4-x=0$;

6) $\frac{x^2-3x}{3}=x$ і $\frac{x-3}{3}=1$;

7) $\frac{|x-1|}{3}=4$ і $x-1=12$;

8) $\frac{1}{5}|x|=2,2$ і $|x|=11$?

211. Запишіть рівняння, яке є рівносильним даному рівнянню:

1) $\frac{x-2}{5}=2$;

2) $\frac{x-1}{x+1}=1$;

3) $\frac{2}{3}(x-2)=\frac{4}{5}(x-1)$;

4) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}=\frac{7}{15}x$.

212. Чи є друге з даних рівнянь рівнянням-наслідком першого:

1) $\frac{x}{3}=1$, $\frac{x}{3}+1=0$;

2) $\frac{6}{2x-1}=3$, $\frac{6}{2x-1}-3=0$;

3) $\frac{x-1}{x}=1$, $\frac{-1}{x}=0$;

4) $\frac{2x-1}{2x}=1$, $\frac{2x-1+2x}{2x}=0$?

213. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x^3-1}=0$;

2) $\frac{x+2}{x^3+8}=0$;

3) $\frac{x^2-1}{3x-3}=0$;

4) $\frac{x^2-4}{3x+6}=0$;

5) $\frac{2x+2}{x^3+1}=0$;

6) $\frac{4x-8}{x^3-8}=0$;

7) $\frac{x^3-9x}{15-5x}=0$;

8) $\frac{3x^3-12x}{4-2x}=0$.

214. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{x^3+1}=0$;

2) $\frac{x-4}{64-x^3}=0$;

3) $\frac{3x^2-3}{4x+4}=0$;

4) $\frac{2x^2-18}{9-3x}=0$.

215. Розв’яжіть рівняння:

1) $2x + \dfrac{3x^2 + x}{3x^2 + 2} - 2 = 2x - 1$;

2) $\dfrac{2}{x^2} - 3 + 5x = \dfrac{x - 3x^2}{x^2} + 5x$;

3) $\dfrac{x + 6}{x^2 - 6x} = \dfrac{x - 36}{2x^2 - 72} + \dfrac{x - 6}{2x^2 + 12x}$;

4) $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{3x}{x^2 + x - 2}$;

5) $\dfrac{1 - 3x}{1 + 3x} + \dfrac{1 + 3x}{3x - 1} = \dfrac{12}{1 - 9x^2}$;

6) $\dfrac{3x + 11}{10x - 5} = \dfrac{2x - 21}{30x - 15} - + \dfrac{5x}{3 - 6x}$;

7) $\dfrac{x}{4 + x} - \dfrac{4 + x}{x - 4} = \dfrac{64}{16 - x^2}$;

8) $\dfrac{x}{x + 5} + \dfrac{x + 5}{5 - x} = \dfrac{x - 45}{25 - x^2}$;

9) $\dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{28}{x - 2} = \dfrac{14x - 5}{(x + 1)(x - 2)}$;

10) $\dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{4}{x + 1} = \dfrac{x - 1}{(x + 3)(x + 1)}$.

216. Розв’яжіть рівняння:

1) $4x + \dfrac{3x - 5x^2}{5x^2 + 9} + 2 = 4x + 1$;

2) $\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{2x}{x^2 - x - 6}$;

3) $\dfrac{x}{3 - x} + \dfrac{x + 1}{x + 3} = \dfrac{15}{x^2 - 9}$;

4) $\dfrac{4}{2 - x} + \dfrac{3}{x + 1} = \dfrac{3x}{(x - 2)(x + 1)}$.

217. Відстань між двома містами дорівнює 60 км. Із цих міст назустріч один одному виїхали велосипедист і мотоцикліст. Вони зустрілися на відстані 10 км від одного з міст. Знайдіть швидкості велосипедиста та мотоцикліста, якщо відомо, що швидкість мотоцикліста на 30 км / год більша за швидкість велосипедиста.

218. Знаменник даного дробу на 2 менший від чисельника. Якщо чисельник помножити на 2, а до знаменника додати 3, то одержимо число $1\dfrac{2}{3}$. Знайдіть даний дріб.

219. Чисельник даного дробу на 2 менший від знаменника. Якщо чисельник збільшити на 15, а знаменник — на 3, то одержимо число $1\frac{5}{6}$. Знайдіть даний дріб.

220*. Значення виразу $\frac{7-5x}{x+3a}$ дорівнює -1, якщо $x = 10$. Знайдіть значення цього виразу, якщо $x = 3$.

221*. Визначте, за яких значень параметра a рівняння $\frac{3x+1}{x+1} = a - 2$ має від'ємні корені.

222*. Визначте, за яких значень параметра a рівняння $\frac{(x+1)(x-2a)}{x+4} = 0$ має один корінь.

223*. *Задача Безу.* Якийсь чоловік купив коня, а через деякий час продав його за 24 пістолі. Під час продажу він втратив таке саме число відсотків, яке дорівнює початковій ціні коня. Скільки коштував кінь?

Проявіть компетентність

224. На кондитерській фабриці за зміну випікають 180 тортів. Перша бригада випікає за зміну 100 тортів, друга — 80 тортів. Скільки тортів у середньому за 1 год випікає кожна бригада, якщо відомо, що перша бригада за 1 год випікає на 2 торти більше, ніж друга? Скільки годин триває зміна?

Задачі на повторення

225. Через термінал оплати на мобільний телефон можна перевести деяку суму грошей, при цьому стягується комісія — ціле додатне число відсотків. Сашко поклав n гривень (n — натуральне число) на мобільний телефон, і його рахунок поповнився на 847 грн. Скільки гривень поклав на рахунок Сашко, якщо відомо, що комісійний відсоток менший, ніж 30 %?

226. Ребро одного куба на 2 см більше за ребро іншого куба, а різниця їхніх об'ємів дорівнює 218 см^3. Знайдіть довжини ребер обох кубів.

§ 8 Що таке степінь із цілим показником

Ви вже знаєте, що за допомогою степеня з натуральним показником можна компактно подати добуток будь-якої кількості однакових множників:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}.$$

За допомогою степенів із цілими від'ємними показниками можна компактно записувати вирази, що містять дроби, та виконувати різні перетворення цих виразів у більш зручному вигляді. Для цього домовилися про таке.

1. Щоб записати число, обернене до натурального числа, використовують степінь, у якого основа — дане число, а показник дорівнює -1. Наприклад, для числа 5 оберненим є дріб $\frac{1}{5}$ і, за домовленістю, його подають так: 5^{-1}. Тобто:

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}.$$

2. Щоб записати числовий вираз, обернений до даного степеня з натуральною основою і натуральним показником n, використовують степінь, у якого основа та сама, але показник є протилежним до числа n, тобто дорівнює $-n$. Наприклад, для степеня 5^2 оберненим є вираз $\frac{1}{5^2}$ і, за домовленістю, його подають так: 5^{-2}. Тобто:

$$\frac{1}{5^2} = 5^{-2}.$$

3. Застосовувати обидві домовленості можна як у прямому, так і в оберненому порядку. Наприклад, рівності $\frac{1}{5} = 5^{-1}$ і $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$ можна «прочитати» як зліва направо (для «згортання» запису дробу чи дробового виразу), так і справа наліво (для «розгортання» в дріб чи дробовий вираз його компактного запису).

Ви знаєте, що в основі степеня з натуральним показником може бути будь-яке раціональне число, а не лише натуральне число. Тому наведені домовленості узагальнюють — за основу степеня з цілим від'ємним показником беруть будь-яке раціональне число, крім нуля. Спробуйте сформулювати означення степеня з цілим від'ємним показником та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Для будь-якого раціонального числа a ($a \neq 0$) і натурального числа n:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Чому в означенні степеня з цілим від'ємним показником є обмеження $a \neq 0$? Тому що $0^{-n} = \frac{1}{0^n}$, а на нуль ділити не можна.

Щоб піднести дріб до степеня з цілим від'ємним показником, можна скористатися такими формулами:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a,\ a \neq 0, \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n,\ a \neq 0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},\ a \neq 0,\ b \neq 0, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n},\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$

Задача 1. Обчисліть: 1) 2^{-3}; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$; 4) $0{,}2^{-4}$.

Розв'язання.

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 6^1 = 6$.

3. $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{2} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$.

4. $0{,}2^{-3} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$.

Зверніть увагу:
щоб піднести десятковий дріб до степеня з цілим від'ємним показником, спочатку подайте його як звичайний дріб, а потім застосуйте відповідні правила.

Що ж таке степінь із цілим показником? Поміркуємо.

Ви знаєте, що цілі числа утворюють натуральні числа, протилежні до них числа й число 0. Отже, у степенів із цілими показниками показники можуть бути й натуральними числами, і цілими від'ємними числами, і числом 0. Перші два випадки ви докладно вивчили. Визначимо степінь із показником 0.

Для будь-якого раціонального числа a ($a \neq 0$):
$a^0 = 1$.

Наприклад, $25^0 = 1$, $(-25)^0 = 1$, $\left(\frac{1}{25}\right)^0 = 1$, $\left(-\frac{9}{25}\right)^0 = 1$.

Зверніть увагу:
- $0^n = 0$, якщо n — натуральне число;
- вирази 0^0 і 0^{-n} (n — натуральне число) не мають змісту.

Дізнайтеся більше

Є числа, які неймовірно великі, і числа, які неймовірно малі. Прикладом великого числа є гугол — це 10^{100}. Це одиниця зі ста нулями. На честь нього назвали пошукову систему «Google», яку в 1998 р. було створено студентами Стендфордського університету (США) Ларі Пейджем і Сергієм Брином. Ще більшим є число гуголплекс — це $10^{10^{100}}$, тобто одиниця з гуголом нулів. Це число настільки велике, що для запису нулів гуголплекса просто не вистачить місця на Землі.

Прикладом малого числа є число з префіксом *атто* (скорочення «*а*»). Це число, помножене на 10^{-18}. Наприклад, аттосекунда: 1 ас = 10^{-18} с, аттометр: 1 ам = 10^{-18} м. Назва префікса походить від датського слова *atten* — вісімнадцять.

Найбільш уживані префікси до чисел подано в таблиці 7.

Таблиця 7

Префікс	У перекладі з грецької чи латини	Позначення	Множник	
тера	чудовисько	Т	1000 000 000 000	10^{12}
гіга	гігантський	Г	1 000 000 000	10^9
мега	великий	М	1 000 000	10^6
кіло	тисяча	к	1000	10^3
гекто	сто	г	100	10^2
дека	десять	да	10	10^1
деци	десята	д	0,1	10^{-1}
санти	сота	с	0,01	10^{-2}
мілі	тисячна	м	0,001	10^{-3}
мікро	малий	мк	0,000001	10^{-6}
нано	карлик	н	0,000000001	10^{-9}

Наприклад, 1000 м = 1 км, 0,000000001 м = 1 нм.

Пригадайте головне

1. Що означає — піднести до степеня із цілим від'ємним показником число a, що не дорівнює нулю?
2. Як визначають степінь з показником 0?

Розв'яжіть задачі

227'. Яка з формул є правильною:

1) $b^{-n} = -b^n$; 2) $b^{-n} = b^n$; 3) $b^{-n} = \dfrac{n}{b}$; 4) $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$?

228'. Яка з формул є правильною:

1) $x^{-1} = -x$; 2) $x^{-1} = x$; 3) $x^{-1} = -\dfrac{1}{x}$; 4) $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$?

229'. Якому з виразів дорівнює вираз $\dfrac{1}{b}$:

1) b^1; 2) $-b^0$; 3) $-b$; 4) b^{-1}?

230'. Чи є правильною рівність: 1) $2^0 = 2$; 2) $2^0 = 1$; 3) $2^0 = 0$?

231'. Якими даними потрібно доповнити порожні клітинки таблиці 8?

Таблиця 8

Степінь	2^{-2}		7^0		$(-5)^3$		9^{-4}	
Основа степеня		-5		10		0,8		1
Показник степеня		-4		-3		0		-1

232°. Якому з виразів дорівнює вираз $\dfrac{2}{x}$:

1) x^2; 2) $-2x$; 3) $2x^{-1}$; 4) x^{-2}?

233°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

1) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{10}$; 5) $\dfrac{1}{22}$; 7) $\dfrac{1}{c}$; 9) $\dfrac{1}{x}$; 11) $\dfrac{1}{z}$;

2) $\dfrac{1}{8}$; 4) $\dfrac{1}{17}$; 6) $\dfrac{1}{100}$; 8) $\dfrac{1}{m}$; 10) $\dfrac{1}{p}$; 12) $\dfrac{1}{k}$.

234°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $\dfrac{1}{25}$; 3) $\dfrac{1}{345}$; 4) $\dfrac{1}{1000}$; 5) $\dfrac{1}{b}$; 6) $\dfrac{1}{y}$.

235°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

1) $\frac{1}{6^2}$; 5) $\frac{1}{20^{10}}$; 9) $\frac{1}{x^4}$; 13) $\frac{1}{n^{15}}$;
2) $\frac{1}{4^9}$; 6) $\frac{1}{21^3}$; 10) $\frac{1}{m^5}$; 14) $\frac{1}{a^{40}}$;
3) $\frac{1}{11^7}$; 7) $\frac{1}{44^{22}}$; 11) $\frac{1}{p^8}$; 15) $\frac{1}{c^{120}}$;
4) $\frac{1}{5^5}$; 8) $\frac{1}{100^{20}}$; 12) $\frac{1}{z^{11}}$; 16) $\frac{1}{r^{200}}$.

236°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

1) $\frac{1}{5^7}$; 2) $\frac{1}{18^3}$; 3) $\frac{1}{22^7}$; 4) $\frac{1}{b^2}$; 5) $\frac{1}{y^9}$; 6) $\frac{1}{t^{14}}$.

237°. Запишіть як степінь з основою 2:

1) 8; 2) 1; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{16}$; 7) $\frac{1}{32}$; 8) $\frac{1}{64}$.

238°. Запишіть числа 0,00001, $\frac{1}{1000}$, 0,01, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000, 1 000 000 000 як степінь з основою: 1) 10; 2) $\frac{1}{10}$.

239°. Запишіть як степінь з основою 3:

1) 27; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{81}$.

240°. Якому з виразів дорівнює a^{-8}:

1) $\frac{1}{a^{-8}}$; 2) $\frac{1}{a^8}$; 3) $-a^8$; 4) $-8a$?

241°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) 4^{-1}; 4) 5^{-7}; 7) 21^{-5}; 10) 80^{-13};
2) 7^{-3}; 5) 10^{-9}; 8) 45^{-7}; 11) 90^{-20};
3) 2^{-5}; 6) 11^{-3}; 9) 54^{-9}; 12) 100^{-10}.

242°. Подайте степінь як дріб:

1) 10^{-1}; 3) 8^{-9}; 5) 20^{-1};
2) 3^{-3}; 4) 12^{-10}; 6) 25^{-7}.

243°. Знайдіть a^{-1}, якщо a дорівнює:

1) 2; 3) 10; 5) 25; 7) 100;
2) −3; 4) 15; 6) −40; 8) −1000.

244°. Знайдіть m^{-1}, якщо m дорівнює:

1) 4; 3) −5; 5) 20;
2) 6; 4) 3; 6) 1000.

245°. Знайдіть a^{-2}, якщо a дорівнює:

1) 2; 3) 10; 5) $\frac{1}{5}$; 7) $\frac{1}{10}$; 9) $\frac{1}{100}$;

2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{6}$; 8) $-\frac{1}{10}$; 10) $-\frac{1}{100}$.

246°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$; 5) $\left(-\frac{4}{11}\right)^{-9}$; 7) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-10}$;

2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-5}$; 4) $\left(\frac{1}{19}\right)^{-2}$; 6) $\left(-\frac{1}{21}\right)^{-31}$; 8) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3}$.

247°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-6}$; 5) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-5}$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-8}$; 6) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-9}$.

248°. Обчисліть:

1) 1^{-2}; 3) 1^{0}; 5) 3^{0}; 7) $1{,}7^{0}$;

2) 1^{-15}; 4) 1^{-100}; 6) 1000^{0}; 8) $\left(5\frac{4}{7}\right)^{0}$.

249°. Обчисліть:

1) $\frac{3}{5^{-2}}$;

2) $\frac{5^{-1}}{3}$;

3) $4^{0}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$;

4) $\left(7\frac{1}{8}\right)^{0}+\left(8\frac{1}{7}\right)^{0}$;

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$;

6) $-\left(\frac{1}{31}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$;

7) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}+10^{-1}+10{,}01^{0}$;

8) $2^{-1}+1^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

250°. Обчисліть:

1) $6^{0}+12^{0}$;

2) $\left(5\frac{3}{4}\right)^{0}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

4) $-\left(\frac{1}{14}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$;

5) $\left(7\frac{2}{3}\right)^{0}+4^{-1}+5{,}75^{0}$;

6) $5^{-1}-1^{-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

251°. Порівняйте значення виразів:

1) 4^4 і 4^0; 3) 5^{-5} і $\frac{1}{5^{-5}}$; 5) $\frac{1}{8^{-5}}$ і 8^5;

2) $(-4)^3$ і 4^0; 4) 3^{-4} і 10^0; 6) 3^{-2} і 0^9.

252°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

1) $(-8)^{-3}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; 5) $(-11)^{-6}$; 7) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-6}$;

2) 10^{-7}; 4) $(-3)^{-5}$; 6) $(-4)^{-4}$; 8) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$?

253°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

1) 2^{-5}; 2) 8^{-3}; 3) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-6}$; 4) $(-3)^{-3}$?

254°. Подайте степінь як дріб:

1) a^{-8}; 3) m^{-5}; 5) b^{-11}; 7) p^{-20}; 9) z^{-31};
2) c^{-3}; 4) n^{-8}; 6) x^{-15}; 8) y^{-21}; 10) t^{-55}.

255°. Подайте степінь як дріб:

1) a^{-4}; 3) m^{-12}; 5) b^{-80};
2) c^{-9}; 4) n^{-56}; 6) x^{-100}.

256. Обчисліть:

1) 2^{-6}; 4) $0{,}1^{-4}$; 7) $(-3)^{-3}$; 10) $(-1{,}5)^{-3}$;

2) $(-1{,}1)^{-2}$; 5) $0{,}5^{-3}$; 8) 3^{-3}; 11) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

3) $(-4)^{-2}$; 6) $(-2)^{-5}$; 9) $(-0{,}2)^{-3}$; 12) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$.

257. Обчисліть:

1) $0{,}4^{-3}$; 3) $(-0{,}1)^0$; 5) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

2) $(-0{,}1)^{-4}$; 4) $(-0{,}1)^{-5}$; 6) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

258. Знайдіть a^{-2}, якщо a дорівнює:

1) $1\frac{2}{3}$; 5) $0{,}2$;

2) $2\frac{1}{2}$; 6) $0{,}05$;

3) $-2\frac{1}{5}$; 7) $1{,}2$;

4) $-3\frac{1}{8}$; 8) $-1{,}2$.

259. Знайдіть m^{-2}, якщо m дорівнює:

1) $1\frac{1}{3}$; 2) $1\frac{3}{4}$; 3) 0,3; 4) −1,1.

260. Запишіть як добуток степенів чисел:

1) $\frac{3}{5^2}$; 5) $\frac{3^2}{14^3 \cdot 16^{31}}$;

2) $\frac{7^2}{23^3}$; 6) $\frac{8^5 \cdot 9^3}{5^{31}}$;

3) $\frac{4^{21}}{8^3 \cdot 9^{22}}$; 7) $\frac{10^4}{11^5 \cdot 12^8}$;

4) $\frac{6}{9^3 \cdot 11^5}$; 8) $\frac{9^7 \cdot 6^{21}}{5^9 \cdot 7^{10}}$.

261. Запишіть як добуток степенів чисел:

1) $\frac{2}{9^7}$; 2) $\frac{6}{8^8}$; 3) $\frac{13^2 \cdot 15^7}{11^{10}}$; 4) $\frac{1}{3^8 \cdot 5^9 \cdot 8^{16}}$.

262. Запишіть у порядку зростання числа: $0{,}2^2$, $0{,}2^{-1}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$, 2^4, -5^6.

263. Обчисліть:

1) $5 \cdot 9^0 + (1{,}5)^{-1}$;

2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} \cdot 2^{-4}$;

4) $-(-2{,}5)^{-2} \cdot \left(3\frac{1}{8}\right)^{-1}$;

5) $3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 1{,}2^{-1}$;

6) $5^2 \cdot 0{,}5^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

264*. Обчисліть:

1) $1^{-1} + (-1)^2 + 1^{-3} + (-1)^4 + \ldots + 1^{-19} + (-1)^{20}$;

2) $(-1)^{-1} + (-1)^{-2} + \ldots + (-1)^{-20}$.

265*. За якого цілого значення n виконується нерівність:

1) $(-7)^{-2} < 3^n < 0{,}5^{-3}$;

2) $0{,}2^{-2} \le 5^{-2n} \le 625^2$?

Проявіть компетентність

266. У таблицях 9 і 10 показано, як Сашко та Наталка спрощували вирази.

1. Хто правильно виконав дії (табл. 9)?

Таблиця 9

Сашко	Наталка
$0{,}4^2 \cdot 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^0 = 1{,}6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}8$	$0{,}4^2 \cdot 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^0 = 1{,}6 \cdot (-2) \cdot 1 = -3{,}2$

А. Наталка.
Б. Сашко.
В. Наталка й Сашко.
Г. Ані Наталка, ані Сашко.

2. Хто правильно виконав дії (табл. 10)?

Таблиця 10

Сашко	Наталка
$\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$	$\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(1\frac{3}{2}\right)^3 = \left(2\frac{1}{2}\right)^3 = 8\frac{1}{8}$

А. Наталка.
Б. Сашко.
В. Наталка й Сашко.
Г. Ані Наталка, ані Сашко.

Задачі на повторення

267. Запишіть як степінь з основою 2:
1) $8 \cdot 16$;
2) $32 \cdot 4 \cdot 16$;
3) $8 \cdot 2 \cdot 64$.

268. Запишіть як степінь:
1) $x^{15} : x^4 \cdot x^3$;
2) $(x^{15})^3 : (xx^3)^2$;
3) $(x^{10}x^5)^3 : (x^{10})^2$;
4) $(x^5\, x^4\, x^6)^2 : x^2$.

269. Обчисліть:
1) $(0{,}2)^3 \cdot 5^3$;
2) $(25)^2 : 5^2$;
3) $\frac{27^3}{9^3}$;
4) $\frac{32^5}{8^5 \cdot 2^5}$.

§ 9 Властивості степенів із цілими показниками

1. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ З ОДНАКОВИМИ ОСНОВАМИ

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте, як виконувати дії зі степенями з однаковими основами та натуральними показниками n і m:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$
$$a^n : a^m = a^{n-m},$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

? Чи справджуються ці формули, якщо показники степенів — цілі числа? Так.

Щоб переконатися в цьому, потрібно довести кожну формулу для трьох випадків: 1) обидва показники степенів — цілі від'ємні числа; 2) один із показників — натуральне число, а другий — ціле від'ємне число; 3) хоча б один із показників — 0. Доведемо одну із формул.

1. Нехай n і m — натуральні числа, тоді $-n$ і $-m$ — цілі від'ємні числа.

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n \cdot a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n+(-m)}, \text{ тобто:}$$

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{-n+(-m)}.$$

2. Нехай m і n — натуральні числа, тоді $-m$ — ціле від'ємне число.

$$a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{n+(-m)}, \text{ тобто:}$$

$$a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)}.$$

Ця властивість виконується й тоді, коли хоча б один із показників степенів (n чи m) дорівнює нулю.

Спробуйте самостійно довести, що для натуральних чисел n і m справджуються формули:

$$a^{-n} : a^{-m} = a^{-n-(-m)}, \qquad (a^{-n})^{-m} = a^{-n \cdot (-m)},$$
$$a^n : a^{-m} = a^{n-(-m)}, \qquad (a^n)^{-m} = a^{n \cdot (-m)}.$$

Наведені властивості виконуються й тоді, коли хоча б один із показників степенів (n чи m) дорівнює нулю.

Властивості степенів з однаковими основами

Для будь-якого раціонального числа a ($a \neq 0$) і будь-яких цілих чисел n і m:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$
$$a^n : a^m = a^{n-m},$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Задача 1. Спростіть вираз:

1) $b^{-12} \cdot b^{-8}$; 2) $b^{-12} : b^{-8}$; 3) $\dfrac{\left(a^5\right)^{-3} \cdot a^{-5}}{a^0 \cdot \left(a^{-2}\right)^8}$.

Розв'язання.

1. $b^{-12} \cdot b^{-8} = b^{-12+(-8)} = b^{-20}$.

2. $b^{-12} : b^{-8} = b^{-12-(-8)} = b^{-4}$.

3. $\dfrac{\left(a^5\right)^{-3} \cdot a^{-5}}{a^0 \cdot \left(a^{-2}\right)^8} = \dfrac{a^{-15} \cdot a^{-5}}{1 \cdot a^{-16}} = \dfrac{a^{-20}}{a^{-16}} = a^{-20-(-16)} = a^{-4}$.

2. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ ІЗ РІЗНИМИ ОСНОВАМИ

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте властивості степенів із різними основами та натуральним показником n:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

? Чи справджуються ці формули, якщо показник степенів — ціле число? Так. Дослідіть це самостійно.

Властивості степенів із різними основами

Для будь-яких раціональних чисел a і b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) і будь-якого цілого числа n:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Задача 2. Обчисліть: 1) $24^2 \cdot 3^{-2} \cdot 4^{-2}$; 2) $\dfrac{36^{-3}}{9^{-3}}$; 3) $\dfrac{35^4 \cdot 90^{-2}}{63^3 \cdot 18^{-5}}$.

Розв'язання.

1. $24^2 \cdot 3^{-2} \cdot 4^{-2} = 24^2 \cdot (3 \cdot 4)^{-2} = 24^2 \cdot 12^{-2} = \dfrac{24^2}{12^2} = \left(\dfrac{24}{12}\right)^2 = 2^2 = 4$.

2. $\dfrac{36^{-3}}{9^{-3}}=\left(\dfrac{36}{9}\right)^{-3}=4^{-3}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{64}.$

3. $\dfrac{35^4\cdot 90^{-2}}{63^3\cdot 18^{-5}}=\dfrac{(7\cdot 5)^4\cdot(9\cdot 5\cdot 2)^{-2}}{(9\cdot 7)^3\cdot(9\cdot 2)^{-5}}=\dfrac{7^4\cdot 5^4\cdot 9^{-2}\cdot 5^{-2}\cdot 2^{-2}}{9^3\cdot 7^3\cdot 9^{-5}\cdot 2^{-5}}=$

$=7^{4-3}\cdot 5^{4+(-2)}\cdot 9^{-2-3-(-5)}\cdot 2^{-2-(-5)}=7\cdot 5^2\cdot 9^0\cdot 2^3=7\cdot 25\cdot 1\cdot 8=1400.$

3. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

Під час вивчення та дослідження навколишнього світу досить часто оперують величинами, числові значення яких містять велику кількість нулів, а тому є громіздкими і складними у використанні. Наприклад: 5 972 600 000 000 000 000 000 000 кг — маса земної кулі, 25 000 000 000 000 000 000 — кількість молекул у кубічному сантиметрі повітря; 0,0000000000003 км — діаметр молекули води, 0,000000002 м — діаметр спіралі ДНК. Тому домовилися записувати такі числа як добуток деякого числа, яке більше за число 1, але менше від числа 10, на число 10 у відповідному степені. Число 5 972 600 000 000 000 000 000 000 кг можна записати так: $5{,}9726\cdot 10^{24}$ кг. $25\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 2{,}5\times\times 10^{19}$, $0{,}0000000000003$ км $=3\cdot 10^{-13}$ км, $0{,}000000002$ м $=2\cdot 10^{-9}$ м. Такий запис числа називають стандартним виглядом числа.

Стандартним виглядом числа **називають такий його запис:**

$a\cdot 10^n$, де $1\le a<10$, n — ціле число.

Число n називають *порядком числа*.

Зверніть увагу:
у цілій частині числа, записаного в стандартному вигляді, стоїть тільки одна цифра.

Задача 3. Запишіть у стандартному вигляді число:
1) 125; 2) 0,08; 3) $34{,}6\cdot 10^5$.

Розв'язання.
1. $125=1{,}25\cdot 10^2$. **2.** $0{,}08=8\cdot 10^{-2}$. **3.** $34{,}6\cdot 10^5=3{,}46\cdot 10^6$.

Зверніть увагу:
виконуючи дії з числами, записаними в стандартному вигляді, використовуйте властивості степенів.

Задача 4. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:
1) $2{,}5\cdot 10^{-3}$ і $2\cdot 10^{-3}$; 2) $4{,}2\cdot 10^4$ і $7\cdot 10^3$.

Розв'язання.

1. $2{,}5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} = (2{,}5 + 2) \cdot 10^{-3} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$;

$2{,}5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = (2{,}5 - 2) \cdot 10^{-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4}$;

$2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = (2{,}5 \cdot 2) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-3}) = 5 \cdot 10^{-6}$;

$$2{,}5 \cdot 10^{-3} : (2 \cdot 10^{-3}) = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}25.$$

2. Щоб додати чи відняти числа, записані в стандартному вигляді, необхідно спочатку записати ці числа так, щоб усі степені з основою 10 мали той самий показник.

$$4{,}2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = 42 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 = (42 + 7) \cdot 10^3 = 49 \cdot 10^3 = 4{,}9 \cdot 10^4,$$

$$4{,}2 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^3 = 42 \cdot 10^3 - 7 \cdot 10^3 = (42 - 7) \cdot 10^3 = 35 \cdot 10^3 = 3{,}5 \cdot 10^4.$$

Щоб помножити чи поділити числа, записані в стандартному вигляді, необхідно скористатися властивостями степенів з однаковими основами.

$$4{,}2 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 10^3 = (4{,}2 \cdot 7) \cdot (10^4 \cdot 10^3) = 29{,}4 \cdot 10^7 = 2{,}94 \cdot 10^8.$$

$$4{,}2 \cdot 10^4 : (7 \cdot 10^3) = \frac{4{,}2 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^3} = 0{,}6 \cdot 10^1 = 6 \cdot 10^0.$$

Дізнайтеся більше

Нині швидкими темпами розвиваються нанотехнології, які ґрунтуються на маніпуляціях окремими атомами й молекулами для побудови структур із наперед заданими властивостями. Звичні для нас властивості матеріалів змінюються при зменшенні їх геометричних розмірів до кількох нанометрів або часток нанометра. Один нанометр дорівнює одній мільйонній міліметра. Середня товщина людської волосини дорівнює 50 тис. нанометрів. Особливі надії на нанотехнології покладають фахівці в галузі електроніки та інформаційних технологій. У 1965 р. на одному чіпі можна було вмістити лише 30 транзисторів, у 1971 р. — 2000 транзисторів. Нині один чіп містить близько 40 млн транзисторів завбільшки 130–180 нанометрів. Ці результати зробили складну електронну та комп'ютерну техніку доступною для більшості споживачів.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте властивість добутку степенів із рівними основами.
2. Сформулюйте властивість частки степенів із рівними основами.

3. Яка властивість піднесення степеня до степеня?
4. Яка властивість добутку степенів із різними основами й рівними показниками?
5. Сформулюйте властивість частки степенів із різними основами й рівними показниками.
6. Як записати число в стандартному вигляді?

Розв'яжіть задачі

270'. Яка з формул є правильною:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n-m}$; 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n \cdot a^m = 2a^{nm}$; 4) $a^n \cdot a^m = a^{nm}$?

271'. Яка з формул є правильною:

1) $a^{n+m} = a^n + a^m$; 3) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$;
2) $a^{n+m} = a^n : a^m$; 4) $a^{n+m} = a^{nm}$?

272'. Яка з формул є правильною:

1) $a^n : a^m = a(n - m)$; 3) $a^n : a^m = a^{n:m}$;
2) $a^n : a^m = \frac{m}{n}$; 4) $a^n : a^m = a^{n-m}$?

273'. Яка з формул є правильною:

1) $a^{n-m} = a^n - a^m$; 2) $a^{n-m} = a^{n:m}$; 3) $a^{n-m} = a^n : a^m$?

274'. Яка з формул є правильною:

1) $(a^m)^n = a^{mn}$; 3) $(a^m)^n = a^{m+n}$;
2) $(a^m)^n = amn$; 4) $(a^m)^n = a^m a^n$?

275'. Яка з формул є правильною:

1) $a^n \cdot b^n = (ab)^{2n}$; 3) $a^n \cdot b^n = a^n + b^n$;
2) $a^n \cdot b^n = ab^n$; 4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$?

276'. Яка з формул є правильною:

1) $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}$; 3) $\frac{a^n}{b^n} = (a - b)^n$;
2) $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^n}{b}$; 4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$?

277'. Яке з чисел записано в стандартному вигляді:

1) $1 \cdot 10^2$; 5) $3{,}1 \cdot 10^{-22}$;
2) $2{,}3 \cdot 10^4$; 6) $51 \cdot 10^8$;
3) $1{,}09 \cdot 11^3$; 7) $0{,}9 \cdot 10^2$;
4) $2{,}5 \cdot 10^5$; 8) $40 \cdot 10^{-1}$?

278°. Яка з рівностей є правильною:
1) $5^{-3} \cdot 5^2 = 25^{-6}$;
2) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{-6}$;
3) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^1$;
4) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{-1}$?

279°. Обчисліть:
1) $2^{-4} \cdot 2^{-2}$;
2) $2^4 \cdot 2^{-2}$;
3) $2^{-4} \cdot 2^2$;
4) $2^4 \cdot 2^2$;
5) $2^8 \cdot 2^{-3}$;
6) $2^5 \cdot 2^{-11} \cdot 2^0$;
7) $2 \cdot 2^{13} \cdot 2^{-16}$;
8) $2 \cdot 2^{-5} \cdot 2^6 \cdot 2^0 \cdot 2^0$.

280°. Обчисліть:
1) $10^{-5} \cdot 10^{-1}$;
2) $10^3 \cdot 10^{-5}$;
3) $10^{-3} \cdot 10^5$;
4) $10^7 \cdot 10^{-6} \cdot 10^0$;
5) $10^{35} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-25}$;
6) $10^0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 \cdot 10^6 \cdot 10$.

281°. Спростіть вираз:
1) $a^{-4} \cdot a^{-8}$;
2) $a^4 \cdot a^{-8}$;
3) $a^{-4} \cdot a^8$;
4) $a^4 \cdot a^8$;
5) $a^{-5} \cdot a^5$;
6) $a^{-12} \cdot a^6 \cdot a^{-1}$;
7) $a^5 \cdot a^{-6} \cdot a^{-9}$;
8) $a^{-7} \cdot a \cdot a^7$;
9) $a^0 \cdot a^3 \cdot a^{-10}$;
10) $a^{-8} \cdot a^9 \cdot a^{-3} \cdot a^2$;
11) $a^{-15} \cdot a^9 \cdot a^{-1} \cdot a^{15}$;
12) $a^{-10} \cdot a^0 \cdot a^{-6} \cdot a^{24}$.

282°. Спростіть вираз:
1) $x^{-3} \cdot x^{-10}$;
2) $x^3 \cdot x^{-10}$;
3) $x^{-3} \cdot x^{10}$;
4) $x^3 \cdot x^{10}$;
5) $x^0 \cdot x \cdot x^{-1}$;
6) $x^{-32} \cdot x^{-65} \cdot x^{42} \cdot x^{75}$.

283°. Запишіть як добуток степенів:
1) 10^{-1+m};
2) $9^{-1+(-p)}$;
3) 8^{-4+m};
4) 6^{-m+n};
5) $5^{-p+1+(-n)}$;
6) 10^{-2+3n}.

284°. Запишіть як добуток степенів:
1) 6^{-4+x};
2) $2^{7+(-x)}$;
3) 12^{-8+n};
4) $3^{-p+(-n)}$.

285°. Яка з рівностей є правильною:
1) $3^{-8} : 3^2 = 1^{-6}$;
2) $3^{-8} : 3^2 = 3^{-4}$;
3) $3^{-8} : 3^2 = 3^{-6}$;
4) $3^{-8} : 3^2 = 3^{-10}$?

286°. Обчисліть:
1) $\frac{4^2}{4^{-1}}$;
2) $\frac{4^{-2}}{4^{-3}}$;
3) $\frac{4^{-1}}{4^3}$;
4) $\frac{4^2}{4^3}$;
5) $\frac{4^2}{4^{-2}}$;
6) $\frac{4^{-2}}{4^2}$;
7) $\frac{4^{-2}}{4^{-2}}$;
8) $\frac{4}{4^{-2}}$;
9) $\frac{4^{-5}}{4^{-8}}$;
10) $\frac{4^2}{4^0}$.

287°. Обчисліть:

1) $\dfrac{2^3}{2^{-2}}$; 2) $\dfrac{2^{-3}}{2^2}$; 3) $\dfrac{2^3}{2^2}$; 4) $\dfrac{2^{-3}}{2^{-2}}$; 5) $\dfrac{2^{-2}}{2^{-2}}$.

288°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a}{a^{-11}}$; 3) $\dfrac{a^0}{a^{-7}}$; 5) $\dfrac{a^6}{a^{-8}}$; 7) $\dfrac{a^{-6}}{a^8}$;

2) $\dfrac{a^{-3}}{a}$; 4) $\dfrac{a}{a^{14}}$; 6) $\dfrac{a^{-6}}{a^{-8}}$; 8) $\dfrac{a^6}{a^{-6}}$.

289°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{m^{10}}{m^{-2}}$; 2) $\dfrac{m^{-10}}{m^{-2}}$; 3) $\dfrac{m^{-10}}{m^2}$; 4) $\dfrac{m^{-10}}{m^{10}}$.

290°. Запишіть як частку степенів:

1) 3^{5-n};
2) 11^{4-p};
3) 7^{-1-m};
4) 2^{-m-n};
5) 100^{-n-1-m};
6) 4^{-7-2n};
7) 8^{-2-x};
8) 5^{3-n};
9) 9^{-1+n-m};
10) 8^{-a-c}.

291°. Запишіть як степінь з основою 7:

1) $\dfrac{7^{-7}\cdot 7^4}{7^{-9}}$; 3) $\dfrac{7^{-1}\cdot 7^{12}}{7^{-4}}$; 5) $\dfrac{7^{-8}\cdot 7^5}{7^{-4}\cdot 7^{-8}}$;

2) $\dfrac{7^{-8}\cdot 7^{11}}{7^{10}}$; 4) $\dfrac{7^{-3}\cdot 7^{12}}{7^{10}\cdot 7^{-8}}$; 6) $\dfrac{7^{-16}\cdot 7^{15}}{7^9\cdot 7^{-8}}$.

292°. Запишіть як степінь з основою 8:

1) $\dfrac{8^{-2}\cdot 8}{8^{-8}}$;
2) $\dfrac{8^{-5}\cdot 8^{15}}{8^{-10}}$;
3) $\dfrac{8^{-4}\cdot 8^{12}}{8^3}$;
4) $\dfrac{8^{-10}\cdot 8^4}{8^{15}\cdot 8^{-12}}$;
5) $\dfrac{8^{-8}\cdot 8^{-2}}{8\cdot 8^{-5}}$;
6) $\dfrac{8^{-6}\cdot 8^{13}}{8^7\cdot 8^{-3}}$.

293°. Спростіть вираз:

1) $a^{-25} : a^{-12}\cdot a^{-12}$;
2) $a^{40}\cdot a^{-30} : a^{10}$;
3) $a^{-32} : a^2 : a^{-14}$;
4) $a^0\cdot a : a^{-9}\cdot a^{11}$;
5) $a : a^{-7}\cdot a^{-1} : a^5$;
6) $a\cdot a^{-5}: a^{-4} : a^8$;
7) $m^6 : m^{-13}\cdot m^{-7}$;
8) $m^{22}\cdot m^{-44} : m^{55}$;
9) $m^{-9} : m^2\cdot m^{-2} : m^9$.

294°. Яка з рівностей є правильною:

1) $(4^{-3})^5 = 4^{-8}$;
2) $(4^{-3})^5 = 4^{-15}$;
3) $(4^{-2})^{-5} = 4^7$;
4) $(4^{-2})^{-5} = 4^{10}$;
5) $(4^{-2})^{-5} = 4^{-10}$?

295°. Запишіть як степінь:

1) $(5^{-5})^{10}$;
2) $(4^{-11})^{-4}$;
3) $(3^{6})^{-7}$;
4) $(7^{-4})^{0}$;
5) $((-1)^{-5})^{-10}$;
6) $(0{,}75^{9})^{-3}$;
7) $(a^{-6})^{0}$;
8) $(a^{0})^{5}$;
9) $(a^{6})^{-5}$;
10) $(a^{-6})^{5}$;
11) $(a^{-6})^{-5}$;
12) $(a^{-5})^{5}$;
13) $(a^{2})^{-2}$;
14) $(a^{-10})^{9}$;
15) $(a^{-7})^{-5}$;
16) $(a^{11})^{-2}$;
17) $(a^{-5})^{-20}$;
18) $(a^{5})^{-20}$.

296°. Запишіть як степінь:

1) $(2^{-1})^{8}$;
2) $(3^{-15})^{-2}$;
3) $(3^{15})^{-2}$;
4) $(10^{-8})^{0}$;
5) $(x^{-9})^{0}$;
6) $(x^{0})^{9}$;
7) $(x^{11})^{-4}$;
8) $(x^{-8})^{-4}$.

297°. Запишіть як степінь:

1) $4^{-3} \cdot 2^{-3}$;
2) $6^{-1} \cdot 3^{-1}$;
3) $4^{-3} : 2^{-3}$;
4) $6^{-1} : 3^{-1}$;
5) $5^{-9} \cdot 2^{-9} \cdot 8^{-9}$;
6) $1^{-4} \cdot 4^{-4} \cdot 3^{-4}$;
7) $b^{-12} \cdot a^{-12}$;
8) $x^{-5} : y^{-5}$;
9) $\dfrac{m^{-5}}{n^{-5}}$;
10) $p^{-6} \cdot m^{-6} \cdot n^{-6}$;
11) $a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}$;
12) $3^{-4} \cdot m^{-4} \cdot n^{-4}$;
13) $\dfrac{x^{-5}y^{-5}}{z^{-5}}$;
14) $\dfrac{3^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$;
15) $\dfrac{x^{-2}y^{-2}}{z^{-2}h^{-2}}$;
16) $\dfrac{d^{-10}b^{-10}}{a^{-10}c^{-10}}$.

298°. Запишіть як степінь:

1) $7^{-7} \cdot 10^{-7}$;
2) $7^{-7} : 10^{-7}$;
3) $15^{-10} \cdot 3^{-10}$;
4) $15^{-10} : 3^{-10}$;
5) $z^{-3} \cdot x^{-3} \cdot y^{-3}$;
6) $\dfrac{a^{-7}c^{-7}}{x^{-7}}$.

299°. Запишіть як степінь з основою 30:

1) $3^{-5} \cdot 10^{-5}$;
2) $6^{-9} \cdot 5^{-9}$;
3) $2^{-6} \cdot 15^{-6}$;
4) $2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-3}$;
5) $60^{-1} : 2^{-1}$;
6) $900^{-2} : 30^{-2}$;
7) $15^{-4} \cdot 4^{-4} : 2^{-4}$;
8) $40^{-11} : 4^{-11} \cdot 3^{-11}$.

300°. Запишіть як степінь з основою 12:

1) $2^{-2} \cdot 6^{-2}$;
2) $3^{-10} \cdot 4^{-10}$;
3) $2^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4}$;
4) $36^{-1} : 3^{-1}$;
5) $5^{-15} \cdot 24^{-15} : 10^{-15}$;
6) $8^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 0{,}5^{-4}$.

301°. Знайдіть x:

1) $(-2 \cdot 9)^{-4} = x \cdot 9^{-4}$;

2) $(7 \cdot 10)^{-3} = 7^{-3} \cdot x$;

3) $(5 \cdot 8 \cdot 12)^{-1} = x \cdot 8^{-1} \cdot 12^{-1}$;

4) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4} = \dfrac{2^{-4}}{x^{-4}}$;

5) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-9} = \dfrac{1}{x^{-9}}$;

6) $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-7} = \dfrac{x^{-7}}{3^{-7}}$.

302°. Знайдіть x:

1) $(4 \cdot 5)^{-3} = x \cdot 5^{-3}$;

2) $(2 \cdot 15)^{-6} = 15^{-6} \cdot x$;

3) $(2 \cdot 3 \cdot 4)^{-2} = x \cdot 2^{-2} \cdot 4^{-2}$;

4) $\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-6} = \dfrac{x^{-6}}{8^{-6}}$.

303°. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 22;
2) 31;
3) 1008;
4) 700;
5) 976;
6) 17 000;
7) 0,005;
8) 0,45;
9) 11,04;
10) 0,333;
11) 2,407;
12) 0,0000012;
13) $54 \cdot 10^{2}$;
14) $54 \cdot 10^{-2}$;
15) $335\,000 \cdot 10^{3}$;
16) $87\,500 \cdot 10^{-4}$;
17) $2300{,}02 \cdot 10^{-1}$;
18) $118{,}8 \cdot 10^{10}$;
19) $0{,}32 \cdot 10^{2}$;
20) $0{,}00051 \cdot 10^{3}$;
21) $5{,}072 \cdot 10^{6}$;
22) $0{,}0074 \cdot 10^{-2}$;
23) $4{,}003 \cdot 10^{10}$;
24) $0{,}00008 \cdot 10^{3}$.

304°. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 37;
2) 19;
3) 207;
4) 0,02;
5) 0,38;
6) 13,005;
7) 0,065;
8) 0,000075;
9) $91 \cdot 10^{3}$;
10) $482 \cdot 10^{-5}$;
11) $11\,500 \cdot 10^{3}$;
12) $43\,000 \cdot 10^{-3}$;
13) $0{,}00027 \cdot 10^{-2}$;
14) $0{,}00011 \cdot 10^{3}$.

305°. Порівняйте числа:

1) $8 \cdot 10^{-5}$ і $1{,}1 \cdot 10^{-5}$;
2) $2{,}5 \cdot 10^{8}$ і $3 \cdot 10^{8}$;
3) $3{,}1 \cdot 10^{-2}$ і $1{,}2 \cdot 10^{-2}$;
4) $4{,}1 \cdot 10^{10}$ і $2 \cdot 10^{10}$;
5) $1{,}8 \cdot 10^{-15}$ і $1{,}5 \cdot 10^{-15}$;
6) $1{,}25 \cdot 10^{9}$ і $4 \cdot 10^{9}$.

Знайдіть суму і добуток чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

306°. Порівняйте числа:

1) $5 \cdot 10^{-7}$ і $1{,}2 \cdot 10^{-7}$;
2) $3{,}1 \cdot 10^{4}$ і $3 \cdot 10^{4}$.

Знайдіть суму, різницю і добуток чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

307. Запишіть як степінь з основою 0,1:
1) 0,01; 2) 1; 3) 10; 4) 100; 5) 1000; 6) 10 000.

308. Запишіть як степінь з основою $\frac{1}{3}$:
1) 27; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{81}$.

309. Обчисліть:
1) $(((5^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$;
2) $((9^{-2})^{-1})^{0}$;
3) $(((3^{-1})^{2})^{-1})^{2}$;
4) $(((0,5^{-1})^{2})^{-1})^{-2}$;
5) $3^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$;
6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$;
7) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6}:7^{7}\cdot 2^{-1}$;
8) $-(1,2)^{-4}:\left(\frac{5}{6}\right)^{5}$;
9) $3\cdot 0,75^{-1}:\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$;
10) $28^{0}\cdot 0,5^{-3}+0,2^{3}\cdot 0,001^{-1}$.

310. Обчисліть:
1) $(((-1)^{-1})^{-1})^{-1}$;
2) $((2^{-1})^{-1})^{-1}$;
3) $4^{-4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$;
4) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$.

311. Запишіть як степінь:
1) $(a^{-8})^{n}:(a^{n})^{-1}$;
2) $(a^{m})^{-n}\cdot(a^{n})^{p}$;
3) $(a^{-15}:a^{4})^{-3}\cdot(a^{10}:a^{3})^{-2}$;
4) $(a^{-15}a^{4})^{3}:(a^{10}a^{-3})^{-2}$;
5) $(a^{-15}a^{-4})^{3}:(a^{10}a^{3})^{-2}$;
6) $(a^{15}a^{-4})^{3}\cdot(a^{-10}a^{3})^{2}$;
7) $(a^{-2+n})^{-n}\cdot a^{n(1-n)}:(-a)^{-2n}$;
8) $(a^{-n})^{n}\cdot a^{-(2+n)(2-n)}:a^{-4}$.

312. Знайдіть x, якщо:
1) $a^{-1}b^{24}=a^{5}b^{-8}\cdot x$;
2) $a^{-1}b^{-1}=x:ab$;
3) $a^{-7}b^{26}=x:b^{-16}$;
4) $1,9^{21}=(1,9^{-3})^{-x}$;
5) $(4,5)^{-20}=(4,5^{-x})^{5}$.

313. Знайдіть x, якщо:
1) $a^{2}b^{-14}=a^{-14}b\cdot x$;
2) $b^{-50}=a^{-100}b^{100}:x$;
3) $3^{-36}=(3^{-x})^{9}$;
4) $6^{-14}=(6^{x})^{2}$.

314. Подайте вираз 5^{-12} як степінь з основою:
1) 5^{-2}; 2) 5^{4}; 3) 5^{3}; 4) 5^{-4}.

315. Подайте вираз a^{-12} як добуток двох степенів, один з яких:
1) a^2; 2) a^{-6}; 3) a^4; 4) a^{-3}; 5) a^{-4}; 6) a^6.

316. Подайте вираз m^{24} як добуток двох степенів, один з яких:
1) m^2; 2) m^{-6}; 3) m^{12}; 4) m^{-4}.

317. Запишіть як степінь з основою 2:
1) $8^{-5} \cdot 4^7$; 3) $(2^{-5})^3 \cdot (4^2)^{-3}$; 5) $0{,}5^{-25} : (4^{-1})^3$;
2) $64^5 \cdot 16^{-2}$; 4) $(16^5)^9 \cdot (8^{-2})^7$; 6) $0{,}25^{-6} : 32^{30}$.

318. Винесіть за дужки 2^{-5}:
1) $2^{-6} + 2^7$; 3) $2^{-2} - 2^3$;
2) $2 - 2^{-5} + 2^{10}$; 4) $2^{-3} + 2^3 - 2^{-15} + 2^{15}$.

319. Винесіть за дужки 3^{-4}:
1) $3^{-12} + 3^{12}$; 3) $3^{-2} - 3^6$;
2) $3 + 3^{-4} + 3^4$; 4) $3^{-5} + 3^5 - 3^{-1} + 3$.

320. Знайдіть x:
1) $(2^2 \cdot 5 \cdot 12{,}5^0)^{-5} = x \cdot 2^5$; 9) $24^{-13} = x \cdot 2^{-26} \cdot 3^{-10}$;
2) $(7 \cdot 9)^{-12} = (21^{-4})^3 \cdot x$; 10) $64^{-4} \cdot 4^{12} \cdot 16^{-2} \cdot x = 4^{-12} \cdot 16^5$;
3) $(-2 \cdot 15)^{-2} = 25^{-1} \cdot x$; 11) $x = \dfrac{27^{-5} \cdot 9^3}{81^{-2}}$;
4) $100^{-14} = 5^{-28} \cdot x$; 12) $(0{,}25x)^{10} = \left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-10}$;
5) $15^{-6} = x \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^3$; 13) $\left(\dfrac{7}{x}\right)^{-8} = \left(\dfrac{25}{49}\right)^8$;
6) $(0{,}6^{-5})^3 = \left(\dfrac{1}{5^{-3}}\right)^5 \cdot x$; 14) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-4} = 5x^5$;
7) $(1{,}2)^{-3} = x^3 \cdot 5^{-3}$; 15) $\left(\dfrac{x}{11}\right)^8 = \left(1\dfrac{2}{9}\right)^{-8}$;
8) $(0{,}4 \cdot 3)^{-8} \cdot 0{,}05^8 = x \cdot 6^{-8}$; 16) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2} = \left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3} - 0{,}75^3$.

321. Знайдіть x:
1) $(15 \cdot 8 \cdot 40^0)^{-12} = x \cdot 25^{-6}$; 5) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$;
2) $(5 \cdot 8)^{-8} \cdot (0{,}2^{-2})^4 = x^{-1} \cdot 4^{-12}$; 6) $(0{,}5)^{-3} = x^3$;
3) $(0{,}375x)^6 = \left(2\dfrac{2}{3}\right)^{-6}$; 7) $\left(1\dfrac{1}{6}\right)^{-4} = x \cdot 0{,}49^{-2}$;
4) $3{,}6^{-10} = x \cdot 4^{-5} \cdot 9^{-10}$; 8) $x = \dfrac{25^4 \cdot 0{,}2^{-8}}{10^{-2} \cdot 8^0}$.

322. Порівняйте числа:

1) $3 \cdot 10^{-6}$ і $1{,}2 \cdot 10^{-4}$;
2) $0{,}18 \cdot 10^{6}$ і $0{,}2 \cdot 10^{5}$;
3) $0{,}48 \cdot 10^{-7}$ і $1{,}2 \cdot 10^{-9}$;
4) $65{,}5 \cdot 10^{7}$ і $0{,}5 \cdot 10^{8}$.

Знайдіть суму, добуток і частку чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

323. Порівняйте числа:

1) $6 \cdot 10^{-8}$ і $1{,}2 \cdot 10^{-9}$;
2) $0{,}16 \cdot 10^{4}$ і $0{,}2 \cdot 10^{6}$;
3) $0{,}63 \cdot 10^{-11}$ і $2{,}1 \cdot 10^{-10}$;
4) $5{,}5 \cdot 10^{22}$ і $11 \cdot 10^{20}$.

Знайдіть суму, добуток і частку чисел. Результат дії подайте в стандартному вигляді.

324*. Обчисліть:

1) $\dfrac{8^{-4} \cdot 6^{10} + 27^{3}}{10^{0} \cdot 81^{3} - 18^{6} \cdot 6^{-3}} \cdot \left(\dfrac{7}{19}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{4^{-8} \cdot 0{,}0001^{-5} + 125^{6} \cdot \left(3\dfrac{1}{3}\right)^{2}}{\left(0{,}2^{10}\right)^{-2} + 3^{-2} \cdot 50^{10} \cdot 0{,}5^{12}}$.

325*. Винесіть за дужки 5^{-2}:

1) $5^{-2} + 15^{4}$;
2) $2 \cdot 5^{6} - 3 + 10^{-4}$;
3) $25^{-3} - 8 \cdot 5^{3}$;
4) $5^{-3m} + 30^{m} - 5^{-1+m}$.

326*. Спростіть вираз:

1) $((a^{-1} \cdot a)^{-1} \cdot a)^{-1} \cdot a$;
2) $((a^{-2} \cdot a^{2})^{-5} \cdot a^{2})^{-1}$;
3) $((x^{3} \cdot x^{-7})^{-5} \cdot x^{-1})^{10}$;
4) $((x^{-9} : x^{-1})^{-1} : x^{7}) : x^{10}$;
5) $(((a^{-3})^{-1} \cdot b^{3})^{-4} a^{12})^{2} \cdot b^{20}$;
6) $\left(a \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right)^{-1} : \left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} \cdot b\right)^{2}$.

327*. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{3} \cdot x^{-3} \cdot (-x)^{3} = 0$;
2) $3x^{-7} = 0$;
3) $3^{4}x^{-1} = \left(5\dfrac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 4^{8}$;
4) $5x^{-1} = \left(\dfrac{36^{-2} \cdot 2^{3}}{8{,}1^{-1}}\right)^{2}$;
5) $(0{,}25 - x^{-2}) \cdot \left(\left(\dfrac{1}{15}\right)^{-2} - 30^{2} \cdot 0{,}5^{2}\right) = 0$;
6) $(10{,}24 - x^{2}) \cdot (4^{-3} - 8^{-2}) = 32^{3}$.

Проявіть компетентність

328. Довжина орбіти супутника, що рухається зі швидкістю $7{,}91 \cdot 10^3$ м/с навколо Землі, дорівнює 2 414 000 км.

1. Запишіть довжину орбіти супутника в стандартному вигляді.
2. Який час потрібний супутнику, щоб облетіти навколо Землі? Відповідь подайте числом у стандартному вигляді.

329. Заповніть таблицю 11.

Таблиця 11

Маса	Одиниця (т)	Одиниця (кг)	Одиниця (г)	Одиниця (мг)
Земля			$5{,}9726 \cdot 10^{24}$	
Сонце	$1{,}9891 \cdot 10^{27}$			
Протон		$1{,}67 \cdot 10^{-27}$		
Молекула азоту (N_2)		$4{,}65 \cdot 10^{-26}$		

330. За допомогою калькулятора знайдіть добуток чисел 276 000 000 000 000 000 і 0,000000003025.

Задачі на повторення

331. Спростіть вираз:

1) $\frac{m}{m-2} - \frac{2}{m-2}$;
3) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$;
2) $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+5}$;
4) $\frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2}$.

332. Спростіть вираз:

1) $\frac{m}{m-3} \cdot \frac{m^2-9}{m+2}$;
3) $\frac{cb+ab}{c-2a} \cdot \frac{2c-4a}{c+a}$;
2) $\frac{1}{8xy^5} : \frac{3}{2x^2y^{10}}$;
4) $\frac{1}{5p+5} : \frac{1}{p^2+2p+1}$.

333. Спростіть вираз:

1) $(2x+y)^2 + (x-2y)^2 - x^2$;
3) $(5m+n)(5m-n) + (m-n)^2$;
2) $\frac{x^3-8}{x^2-4} - \frac{x^2}{x+2}$;
4) $\frac{a}{a-b} + \frac{a^2}{a^2+ab+b^2} - \frac{2a^3+b^3}{a^3-b^3}$.

§ 10 Перетворення раціональних виразів

Ви вже знаєте, як підносити до степеня з цілим показником числові вирази. Для раціональних виразів дія піднесення їх до степеня з цілим показником є аналогічною. Сформулюємо властивості цієї дії для раціональних виразів.

1. Якщо A — раціональний вираз ($A \neq 0$) і n — натуральне число, то:

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}.$$

2. Якщо A і B — раціональні вирази ($A \neq 0$, $B \neq 0$) і n — натуральне число, то:

$$\left(\frac{1}{A}\right)^{-1} = A, \qquad \left(\frac{1}{A}\right)^{-n} = A^n,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}, \qquad \left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n.$$

3. Якщо A — раціональний вираз ($A \neq 0$), то $(A)^0 = 1$.

4. Якщо A — раціональний вираз ($A \neq 0$) і n та m — цілі числа, то:

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m},$$
$$A^n : A^m = A^{n-m},$$
$$(A^m)^n = A^{mn}.$$

5. Якщо A і B — раціональні вирази ($A \neq 0$, $B \neq 0$) і n — ціле число, то:

$$A^n \cdot B^n = (AB)^n,$$
$$\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n.$$

Зверніть увагу:
піднесення раціональних виразів до степеня з цілим показником, як і виконання інших перетворень раціональних виразів, здійснюється на ОДЗ змінних даних виразів.

Задача 1. Спростіть вираз:

$$1)\ \left(\frac{1}{2nm}\right)^{-1};\quad 2)\ \left(\frac{x}{y+z}\right)^{-3};\quad 3)\ \left(\frac{x^{-3}\cdot a^{-5}}{c^4\cdot y^6}\right)^0.$$

Розв'язання. Застосуємо другу і третю з наведених властивостей піднесення раціонального виразу до степеня з цілим показником.

1. $\left(\frac{1}{2nm}\right)^{-1} = 2nm.$

2. $\left(\frac{x}{y+z}\right)^{-3} = \left(\frac{y+z}{x}\right)^3 = \frac{(y+z)^3}{x^3}.$

3. $\left(\frac{x^{-3}\cdot a^{-5}}{c^4\cdot y^6}\right)^0 = 1.$

Спрощувати раціональні вирази зі степенями із цілим показником можна не одним способом. Розглянемо приклад.

Задача 2. Спростіть вираз: $\left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2}$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Спочатку спростимо вираз у дужках, а потім піднесемо його до даного степеня:

$$\left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2} = \left(a^{-3-1}b^{2-(-2)}\right)^{-2} = \left(a^{-4}b^4\right)^{-2} = a^8b^{-8}.$$

Другий спосіб. Спочатку вираз у дужках піднесемо до даного степеня, а потім спростимо одержаний вираз:

$$\left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2} = \frac{a^6b^{-4}}{b^4a^{-2}} = a^{6-(-2)}b^{-4-4} = a^8b^{-8}.$$

Третій спосіб. Спочатку позбудемось від'ємного показника степеня даного виразу, а потім спростимо одержаний вираз:

$$\left(\frac{a^{-3}b^2}{b^{-2}a}\right)^{-2} = \left(\frac{b^{-2}a}{a^{-3}b^2}\right)^2 = \frac{b^{-4}a^2}{a^{-6}b^4} = a^{2-(-6)}b^{-4-4} = a^8b^{-8}.$$

Під час перетворення раціональних виразів нерідко доводиться не лише розкривати дужки, а й виносити за дужки степінь із цілим показником. Для цього потрібно кожний доданок у дужках поділити на вираз, що виноситься за дужки. Розглянемо приклад.

Задача 3. Дано вираз $y^{-5} - xy^5 + 5$. Винесіть за дужки: 1) y^{-1}; 2) y^{-5}.

Розв'язання.

1. $y^{-5} - xy^5 + 5 = y^{-1}(y^{-5-(-1)} - xy^{5-(-1)} + 5 : y^{-1}) = y^{-1}(y^{-4} - xy^6 + 5y)$.

2. $y^{-5} - xy^5 + 5 = y^{-5}(y^{-5-(-5)} - xy^{5-(-5)} + 5 : y^{-5}) = y^{-5}(1 - xy^{10} + 5y^5)$.

Дізнайтеся більше

Дії зі звичайними дробами та дробовими виразами здавна цікавили людство. Історія математики сповнена численними прикладами цього. У своїй книзі «Визначні математичні задачі» (1981) відомий український вчений А. Г. Конфорович наводить такі дані про досягнення математиків Стародавнього Вавилону (I–II тисячоліття до н. е.). Джерелами вивчення шумеро-вавилонської математики є клинописні таблички. З-понад 500 000 табличок, які вдалося знайти, 150 містять тексти та розв'язання задач, 200 — числові таблиці. На кожній табличці — від 18 до 100 задач, на одній з них записано умови 148 задач. Більша частина математичних текстів — це посібники для учнів шкіл писців або вправи, які виконували писці та придворні чиновники. Вони написані приблизно в 1800–1600 рр. до н. е., коли у Вавилоні правила династія Хаммурапі, інші таблички написані протягом трьох останніх століть до нашої ери (епохи Селевкідів). У Стародавньому Вавилоні дії додавання й віднімання записували словами. Для множення використовувався термін «з'їсти». Можливо, це зумовлено тим, що в результаті множення довжини на ширину площа ніби з'їдала, розчиняла в собі множники. Складною для вавилонян була дія ділення. Дію $a : b$ вони звели до множення $a \cdot \frac{1}{b}$. Коли потрібно було обчислити $a : b = c$, говорили: «Ти візьмеш обернену до b, побачиш $\frac{1}{b}$, помножиш a на $\frac{1}{b}$, побачиш c».

Пригадайте головне

1. Сформулюйте властивість піднесення раціональних виразів до степеня з цілим від'ємним показником.
2. Сформулюйте властивість піднесення раціональних виразів до степеня з показником 0.
3. Сформулюйте властивості піднесення раціональних виразів до степеня з цілим показником.

Розв'яжіть задачі

334'. Чи правильно, що $(x-1)^{-1}$ дорівнює:

1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $-x+1$; 3) $\frac{1}{x-1}$; 4) $x+1$?

335'. Чи правильно, що $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-1}$ дорівнює:

1) $\frac{-1}{x-1}$; 2) $x-1$; 3) $\frac{1}{x}+1$?

336'. Чи правильно, що $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-1}$ дорівнює:

1) $\frac{b}{a^2}$; 2) $-\frac{a^2}{b}$; 3) $\frac{2b}{a}$?

337'. Чи є правильною рівність:

1) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3}=-\frac{3m}{n}$; 2) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3}=\frac{m}{n}^{-3}$; 3) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-3}=\frac{m^{-3}}{n^{-3}}$?

338'. Якому з виразів дорівнює вираз $\frac{n}{m^{-3}}$:

1) $-3\frac{n}{m}$; 2) nm^3; 3) $\frac{m^3}{n}$?

339'. Чи є правильною рівність:

1) $(b+a)^0=1$;
2) $(9-x^2)^1=1$;
3) $\left(\frac{1}{5+y}\right)^1=0$;
4) $\left(\frac{y^3}{z^2-x^2}\right)^0=1$;
5) $\left(\frac{2-m}{4+3m}\right)^0=1$?

340°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $(a-6)^{-1}$;
2) $(n-m)^{-1}$;
3) $(ad-b)^{-1}$;
4) $(x^2-4)^{-1}$;
5) $(x^2-y^2)^{-1}$;
6) $(xyz-1)^{-1}$.

341°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $\left(\frac{1}{a-2}\right)^{-1}$;
2) $\left(\frac{1}{xy}\right)^{-1}$;
3) $\left(\frac{1}{abc}\right)^{-1}$;
4) $\left(\frac{1}{m+n}\right)^{-1}$;

5) $\left(\dfrac{1}{ac-p}\right)^{-1}$;

6) $\left(\dfrac{1}{pm-n^2}\right)^{-1}$;

7) $\left(\dfrac{a}{a+8}\right)^{-1}$;

8) $\left(\dfrac{x}{zy}\right)^{-1}$;

9) $\left(\dfrac{cd}{ab}\right)^{-1}$;

10) $\left(\dfrac{n-m}{m+n}\right)^{-1}$;

11) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-1}$;

12) $\left(\dfrac{n^2+m^2}{m^2-n^2}\right)^{-1}$.

342°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $(b+9)^{-1}$;

2) $(x-y)^{-1}$;

3) $(a^3-b^3)^{-1}$;

4) $\left(\dfrac{1}{x-y}\right)^{-1}$;

5) $\left(\dfrac{1}{2mp}\right)^{-1}$;

6) $\left(\dfrac{1}{z^2-x^2}\right)^{-1}$;

7) $\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{-1}$;

8) $\left(\dfrac{x}{z+y}\right)^{-1}$;

9) $\left(\dfrac{2a-b}{b+3a}\right)^{-1}$;

10) $\left(\dfrac{y^2+4}{y^2-4}\right)^{-1}$.

343°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $(x-y)^{-2}$;

2) $(10+m)^{-4}$;

3) $(x^2-1)^{-6}$;

4) $(a-c)^{-8}$;

5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-5}$;

6) $\left(\dfrac{1}{b}\right)^{-4}$;

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}$;

8) $\left(-\dfrac{a}{b}\right)^{-2}$;

9) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{-6}$;

10) $\left(-\dfrac{2}{c}\right)^{-3}$;

11) $\left(-\dfrac{p}{n}\right)^{-10}$;

12) $\left(-\dfrac{3}{z}\right)^{-3}$.

344°. Запишіть як степінь з натуральним показником:

1) $(2-m)^{-5}$;

2) $(x^3+y)^{-7}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-9}$;

4) $\left(\dfrac{1}{m}\right)^{-8}$;

5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-3}$;

6) $\left(-\dfrac{x}{y}\right)^{-3}$.

345°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{c^2}$; 4) $\frac{1}{m^3}$; 5) $\frac{1}{p^4}$; 6) $\frac{1}{n^{12}}$; 7) $\frac{1}{z^{15}}$; 8) $\frac{1}{y^{20}}$; 9) $\left(\frac{1}{b}\right)^2$; 10) $\left(\frac{1}{a}\right)^5$; 11) $\left(\frac{1}{x}\right)^9$; 12) $\left(\frac{1}{b}\right)^4$; 13) $\left(\frac{c}{n}\right)^3$; 14) $\left(\frac{x}{y}\right)^{10}$.

346°. Запишіть як степінь з від'ємним показником:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{1}{x^2}$; 3) $\frac{1}{x^3}$; 4) $\frac{1}{x^4}$; 5) $\frac{1}{x^5}$; 6) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; 7) $\left(\frac{1}{y}\right)^4$; 8) $\left(\frac{1}{c}\right)^6$; 9) $\left(\frac{c}{a}\right)^{12}$.

347°. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником:

1) b^{-3}; 2) $c^{-1}a^{-5}$; 3) $b^{-1}a^{-9}c^{-12}$; 4) $b^{-2}a$; 5) $b^8a^{-24}c^4$; 6) $\frac{1}{m^{-3}}$; 7) $\frac{1}{x^{-9}}$; 8) $\frac{p^{-2}}{c^{-6}}$; 9) $\frac{a^{-1}}{b^7}$; 10) $\frac{x^{10}}{z^{-3}}$; 11) $\frac{1}{a^2c^{-4}}$; 12) $\frac{1}{n^{-10}m^{-11}}$; 13) $\frac{h^{-2}}{n^4m^{-5}}$; 14) $\frac{x^{-2}z}{y^{-3}c^3}$; 15) $\frac{x^{-1}}{yz}$.

348°. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником:

1) $x^{-1}y^{-10}$; 2) $xy^{-20}z^{-30}$; 3) ba^{-4}; 4) $\frac{1}{y^{-1}}$; 5) $\frac{1}{z^{-4}}$; 6) $\frac{a^{-3}}{b^9}$; 7) $\frac{c^{32}}{p^{-23}}$; 8) $\frac{1}{x^{-5}y^{-1}}$; 9) $\frac{a^9n^{-4}}{m^{-15}c^{-5}}$.

349°. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником, та спростіть його:

1) $a + a^{-1}$;
2) $x + x^{-2}$;
3) $x^{-2} - x^{-3}$;
4) $y^{-3} + 4y^{-5}$;
5) $\dfrac{1}{1 - m^{-1}}$;
6) $\dfrac{1}{a + a^{-1}}$.

350°. Запишіть даний вираз так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником, та спростіть його:

1) $a^{-2} + a$;
2) $2x + x^{-1}$;
3) $4a^{-4} - a^{-2}$;
4) $\dfrac{1}{a + a^{-2}}$.

351°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{x} + x^{-1}$;
2) $\dfrac{2}{a} + a^{-1}$;
3) $\dfrac{3}{m^2} + m^{-2}$;
4) $(x + 5)^{-1} + \dfrac{1}{x + 5}$;
5) $(a + 2)^{-1} - \dfrac{2}{a + 2}$;
6) $a(a + b)^{-1} + b(a + b)^{-1}$;
7) $(1 + b)^0 - (1 + b)^{-1}$;
8) $(a + b)^{-1} + (a + b)^0$;
9) $(x - 2)^{-1} - x(2 - x)^{-1}$;
10) $(5 + b)^{-1} + (5 - b)^{-1}$.

352°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{y^2} - y^{-2}$;
2) $(a + 10)^{-1} + \dfrac{9}{a + 10}$;
3) $a(a + 4)^{-1} + 4(a + 4)^{-1}$;
4) $\dfrac{7}{7 + n} + n(7 + n)^{-1}$;
5) $(m + n)^{-1} - (m + n)^0$;
6) $(4 + x)^{-1} - (4 - x)^{-1}$.

353°. Запишіть як добуток степенів:

1) $\dfrac{n^2}{m^3}$;
2) $\dfrac{y}{x}$;
3) $\dfrac{b^2}{a^3c^2}$;
4) $\dfrac{b}{na^5}$;
5) $\dfrac{b^2}{a^3c^2}$;
6) $\dfrac{a^5c^3}{bd}$;
7) $\dfrac{4}{mpn}$;
8) $\dfrac{1}{ac^2b^2}$.

354°. Запишіть як добуток степенів:

1) $\frac{2}{a}$;
2) $\frac{x}{y^8}$;
3) $\frac{b^2}{a^{10}}$;
4) $\frac{n^4}{m^5p^3}$;
5) $\frac{1}{abc}$.

355°. Спростіть вираз:

1) $(1-y)^2\cdot(1-y)^{-2}$;
2) $(a-b)^{-5}\cdot(a-b)^3$;
3) $(x-y)^{-4}\cdot(x-y)^{-6}$;
4) $\frac{(y+4)^{-2}}{(y+4)^3}$;
5) $\frac{(c+1)^{-2}}{(c+1)^{-4}}$;
6) $\frac{x^5\cdot(x+y)^{-3}}{(x+y)^{-5}\cdot x}$;
7) $\frac{m^6}{a^{-8}}:\frac{m^{-2}}{a^3}$;
8) $\frac{4(a+1)^{-18}}{c^9}:\frac{c^{-2}}{(a+1)^{-22}}$;
9) $\frac{(x-y)^{-2}}{y}\cdot\frac{y^{-5}}{(x-y)^7}\cdot\frac{(x-y)^5}{y^{-3}}$;
10) $\frac{4(a-b)^5}{(a+b)^{-8}}\cdot\frac{(a+b)^{-1}}{(a-b)^{-4}}:\frac{2(a-b)^{-3}}{(a+b)^{10}}$.

356°. Спростіть вираз:

1) $(m+n)^3\cdot(m+n)^{-3}$;
2) $(5+a)^{-8}\cdot(5+a)^5$;
3) $\frac{(p+m)^{-1}}{(p+m)^2}$;
4) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{-5}$;
5) $(a+b)\cdot\frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}\cdot(a-b)^{-2}$;
6) $\frac{x^{-3}}{(y+1)^0}\cdot\frac{(x+2)^0}{x^{-1}}$;
7) $\frac{(y+5)^{-4}}{y^{10}}\cdot\frac{y^{-15}}{(y+5)^{-8}}$;
8) $\frac{(n+4m)^{-1}}{p^4}\cdot\frac{p^3}{(n+4m)^0}:\frac{(n+4m)^{-10}}{p}$.

357°. Піднесіть до степеня:

1) $(2x^{-3}y)^{-4}$;
2) $(x^{-6}y^{-4})^{-5}$;
3) $(0{,}5x^{-12}y^4)^{-1}$;
4) $(x^{-1}y^{-10})^{10}$;
5) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-5}$;
6) $\left(\frac{3}{y}\right)^{-3}$;
7) $\left(\frac{a}{b^{-2}}\right)^{-3}$;
8) $\left(\frac{a^{-2}}{4b^4}\right)^{-3}$;
9) $\left(-\frac{x^{-3}}{2y^{-5}}\right)^2$;
10) $\left(-\frac{3a^{-5}}{b^4}\right)^{-1}$.

358°. Піднесіть до степеня:

1) $(0{,}4x^8y^{-3})^{-1}$;

2) $(m^{-7}n^{-2})^{-3}$;

3) $\left(\dfrac{a^5}{b^{-2}}\right)^{-1}$;

4) $\left(\dfrac{2a^{-6}}{b^5}\right)^{-3}$.

359°. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-5}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-5}$;

2) $\left(\dfrac{x}{y+2}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{y+2}{x}\right)^{-1}$;

3) $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{a+b}{b}\right)^{-3}$;

4) $(z-6)^{-8}\cdot\left(\dfrac{z}{z-6}\right)^{-8}$;

5) $(n+5)^{-7}\cdot\left(\dfrac{n}{n+5}\right)^{-7}\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^{-7}$;

6) $\left(\dfrac{1}{b+c}\right)^{-1}:\left(\dfrac{2}{b+c}\right)^{-1}$;

7) $\left(\dfrac{a}{bc}\right)^{-6}:\left(\dfrac{a^2}{bc}\right)^{-6}$;

8) $\dfrac{n^{-5}}{m^{-5}}:\left(\dfrac{m^6}{2n^{-4}}\right)^{-5}$;

9) $\left(\dfrac{1}{xyz}\right)^{-2}:\left(\dfrac{x}{yz}\right)^{-2}$.

360°. Спростіть вираз:

1) $(a+b)^{-5}\cdot(a-b)^{-5}$;

2) $\left(\dfrac{2}{z}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{z}{3}\right)^{-2}$;

3) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-5}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-5}$;

4) $\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{2a+2c}{b}\right)^{-3}$;

5) $p^{-4}\cdot\left(\dfrac{p+2}{p}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{1}{p+2}\right)^{-4}$;

6) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-1}:\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)^{-1}$.

361°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x}{y}\cdot\left(\dfrac{2x}{y}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{p}{n}\cdot\left(\dfrac{m}{n}\right)^{-2}$;

3) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}$;

4) $\left(\dfrac{8}{b+1}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{b+1}{2}\right)^{-5}$;

5) $\dfrac{a^{-1}}{c^3}\cdot\left(\dfrac{2a}{c}\right)^{-2}$;

6) $\left(\dfrac{10}{y+x}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{y+x}{2}\right)^{-3}$.

362. Запишіть як квадрат двочлена:

1) $y^{-2}-4y^{-1}+4$;

2) $x^{-2}-2(xy)^{-1}+y^{-2}$;

3) $a^{-4}-10a^{-2}+25$;

4) $4m^{-2}-12m^{-1}n^{-1}+9n^{-2}$;

5) $a^{-2}c^{-4}-2a^{-1}c^{-2}+1$;

6) $9a^{-2}b^{-2}-6a^{-1}b^{-2}c^{-1}+c^{-2}b^{-2}$.

363. Розкладіть на множники:

1) $y^{-2} - 4$;
2) $x^{-2} - y^2$;
3) $a^2d^{-2} - b^{-2}$;
4) $n^{-4} - m^{-4}$;
5) $n^{-4} - m^6$;
6) $a^{-2} - (4 + a)^{-2}$;
7) $(x^{-2} + y^{-2})^2 - (x^{-2} - y^{-2})^2$;
8) $(2 + m^{-2})^4 - (2 - m^{-2})^4$.

364. Розкладіть на множники:

1) $x^{-2} - 25$;
2) $a^{-2} - b^2$;
3) $n^{-2} - m^{-2}$;
4) $x^{-8} - (1 + x^{-4})^2$;
5) $(n^{-2} - m^{-2})^2 - (m^{-2} + n^{-2})^{-2}$;
6) $(x^{-2} + 2)^2 - (3x^{-2} - 4)^2$.

365. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a^2}{a+b} - b^2(a+b)^{-1}$;
2) $\dfrac{1}{x+y} - x(x+y)^{-2}$;
3) $\dfrac{2m^3}{m+1} - 2m^3(1-m^2)^{-1}$;
4) $4(a-2)^{-1} - \dfrac{a^2}{a-2}$;
5) $(x-5)^{-1} + x(x-5)^{-1} - \dfrac{6}{x-5}$;
6) $(x + y)^{-1} - (x - y)^{-1}$;
7) $(1+b)^{-1} - (1+b)^{-2}$;
8) $(m+n)^{-1} - (m+n)^{-2}$;
9) $mn(m^2-1)^{-1} - \left(\dfrac{m-1}{n}\right)^{-1}$;
10) $1 - (1 + x^{-1})^{-1}$;
11) $(1 + (1 + a^{-1})^{-1})^{-1}$;
12) $(a - a^{-1})^{-2} + (1 - a^2)^{-2}$.

366. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a^2}{a+3} - 9(a+3)^{-1}$;
2) $2(a+b)^{-1} + (a+b)^{-2} + 1$;
3) $\dfrac{1}{m-p} + p(m-p)^{-2}$;
4) $\dfrac{x^3}{x+y} - (x^3-y)(x+y)^{-1}$;
5) $(m + m^{-2})^{-1}$;
6) $a^{-2}(a - a^{-2})^{-1}$.

367. Винесіть за дужки y^{-2}:

1) $y^{-8} + y^{-4}$;
2) $y^{-10} - y^2$;
3) $y^4 + 8y^{-4}$;
4) $2y + 4y^{-1}$;
5) $y^{-2} - y^2 + y^{-3}$;
6) $xy^{-9} + 9y^{-2}$;
7) $2y^{-3} + 4x^{-2}$;
8) $y^2x^{-2} - 5$;
9) $xy^{-1} - \dfrac{6}{y^3} + y^6 + 3$.

368. Винесіть за дужки a^{-4}:

1) $a^{-12} + a^{-10}$;
2) $a^{-7} - a^3$;
3) $a^{-4} - a^4 + a^{-6}$;
4) $7a^{-14} + 6$;
5) $3a^{-1} + \dfrac{5}{a^5}$;
6) $4 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^{-3}}$.

369. Дано вираз: $x^{-4}+x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}+1$. Винесіть за дужки:
1) x; 2) x^6; 3) x^{-1}; 4) x^{-4}; 5) x^{-5}; 6) x^{-10}.

370. Дано вираз: $a^4+a^3+a^{-3}+a^{-4}$. Винесіть за дужки:
1) a; 2) a^3; 3) a^{-1}; 4) a^{-5}.

371. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{9n^{45}m^{-35}}\cdot\frac{m}{n^{-30}}^{-20}$;

2) $5ba^0\cdot\frac{a^5}{4b^{-3}}$;

3) $\frac{2b^{-8}}{3a^2}\cdot 0{,}6b^{-1}a^{-9}$;

4) $5xyz\cdot\frac{2x^{-2}}{5y^6z^{-11}}$;

5) $\frac{2x^{-4}}{y^{-2}}\cdot 0{,}1xy^{-5}$;

6) $((a^{-2}\cdot a^2)^{-5}\cdot a^2)^{-1}$;

7) $((x^0\cdot x^{-7})^{-5}\cdot x^{-1})^{10}$;

8) $((a^{-1}\cdot a)^{-1}\cdot a)^{-1}\cdot a$;

9) $((x^{-9}:x^{-1})^{-1}:x^7):x^0$;

10) $(((a^{-3})^{-1}\cdot b^3)^{-4}a^{12})^2\cdot b^{20}$.

372. Спростіть вираз:

1) $\frac{16x^{-5}}{y^{-12}}\cdot\left(\frac{y^{16}}{2x^{-4}z^9}\right)^5$;

2) $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-4}z^7}\right)^{-5}:\left(\frac{x}{y^{10}z^{-20}}\right)^3$;

3) $\left(\frac{2x^3}{y^4z^{-5}}\right)^2\cdot\left(\frac{x^8}{0,25y^{-9}}\right)^{-2}$;

4) $\left(\frac{2x^{-2}}{5y^6z^{-11}}\right)^{-2}:\left(\frac{0,2x^{-2}}{y^{-5}z^0}\right)^{-3}$;

5) $\left(\frac{x^{-15}}{6y^6}\right)^{-2}:\left(\frac{x^{-20}}{3y^9}\right)^{-2}$;

6) $\left(\frac{8h^6}{9m^{-5}n^{-1}}\right)^{-10}\cdot\left(\frac{0{,}75m^{-3}}{h^4n}\right)^{-15}:3^4m^{-5}$;

7) $\left(\frac{4x^{-7}}{7y^{-9}z^2}\right)^{-10}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{16}x}{y^{-1}z}\right)^{-5}$;

8) $\left(\frac{1\frac{2}{3}a^{-2}}{b^6}\right)^{-1}:\left(\frac{0,6a^{-8}}{b^{-3}}\right)^2$.

373. Спростіть вираз:

1) $\frac{27a^{-7}}{c^5}\cdot\left(\frac{9a^{-10}}{c^3}\right)^{-1}$;

2) $\left(\frac{a^3}{2c^4b^{-8}}\right)^4:\left(\frac{0,5a^{-6}}{c^{-15}}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{a^7}{2m^{-1}n^{-2}}\right)^{-6}:\left(\frac{0{,}5n^5}{m^{-3}p}\right)^{-2}$.

374. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{b^{-3}-1}{b+1}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2b+2}{b^{-2}+b^{-1}+1}\right)^{-2}$;

2) $\left(a\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right)^{-1}:\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}b\right)^{2}$;

3) $\left(\frac{n}{m}\right)^{-2}-\left(\frac{m}{n}\right)^{-2}$;

4) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}-\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$;

5) $\frac{n^{1}+n^{2}+n^{3}+n^{4}}{n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}+n^{-4}}$;

6) $\frac{xy^{-9}+x^{-9}y}{x^{-2}y^{12}+x^{12}y^{-2}}$;

7) $\left(1-\frac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-3}-y^{-3}}\right)^{-2}$.

375. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m^{2}}{m^{2}-1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{m+1}{m}\right)^{-1}$;

2) $\left(\frac{n}{m}\right)^{-1}-\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}$;

3) $\frac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-2}-y^{-2}}-\frac{x^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}-y^{-1}$;

4) $\frac{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{x+x^{2}+x^{3}}$;

5) $\frac{mn^{-6}+m^{-2}}{m^{3}n^{-8}+n^{-2}}$;

6) $\left(1-\frac{n^{-2}+m^{-2}}{n^{-2}-m^{-2}}\right)^{-1}$.

376. Обчисліть a^2+a^{-2}, якщо:

1) $a+a^{-1}=5$;

2) $a-a^{-1}=1$;

3) $a+\frac{1}{a}=2$;

4) $\frac{1+a^{2}}{a}=8$.

377. Обчисліть x^2+x^{-2}, якщо: 1) $x+x^{-1}=3$; 2) $x-\frac{1}{x}=9$.

378. Знайдіть $\frac{x}{y}$, якщо: 1) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}=2$; 2) $\frac{2x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+2y^{-1}}=5$.

379. Знайдіть $\frac{m}{n}$, якщо:

1) $\frac{n^{-1}+m^{-1}}{n^{-1}-m^{-1}}=3$;

2) $\frac{m^{-1}-4n^{-1}}{3n^{-1}+m^{-1}}=5$.

380*. Знайдіть $\left(\frac{x}{y}\right)^{2}$, якщо:

1) $\frac{4x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}+5y^{-2}}=1$;

2) $x^{-2}+y^{-2}=\frac{2}{x^{2}}-\frac{3}{y^{2}}$.

381*. Обчисліть $\frac{ab}{4a^{2}-3b^{2}}$, якщо $a^{-1}b=5$.

382*. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{(x-1)^{-1}}{x-2}+\dfrac{(2-x)^{-1}}{x-1}-(1-x)^{-1}$;

2) $\dfrac{(1+x)^{-1}}{x+2}+\dfrac{(2+x)^{-1}}{x+3}+\dfrac{(3+x)^{-1}}{x+4}$;

3) $\left(\dfrac{y^2-x^2}{m^2-n^2}\cdot\left(\dfrac{x-y}{m+n}\right)^{-1}-\dfrac{x}{n-m}\right)\cdot\left(\dfrac{2y}{m-n}\right)^{-1}$;

4) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right):((a^2+b^2)(a^2-b^2)^{-1}-(a^2-b^2)(a^2+b^2)^{-1})$;

5) $\dfrac{a^{-1}b}{a^{-1}b+3\left(\dfrac{1}{b}\right)^{-2}}:\dfrac{a^{-2}}{a^{-2}+6ba^{-1}+9b^2}$;

6) $\dfrac{(ab^{-1}+1)^2}{ab^{-1}-a^{-1}b}\cdot\dfrac{a^3b^{-3}-1}{a^2b^{-2}+ab^{-1}+1}:\dfrac{a^2b^{-2}+1}{ab^{-1}+a^{-1}b}$.

Проявіть компетентність

383. У таблиці 12 показано, як Сашко й Наталка спрощували вирази.
Хто правильно виконав дії (табл. 12)?

Таблиця 12

Сашко	Наталка
$(a-a^{-2})^{-1}=$ $=\dfrac{1}{a-a^{-2}}=\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{a^2}{a^3-1}$	$(a-a^{-2})^{-1}=a^{-1}-a^2=$ $=\dfrac{1}{a}-a^2=\dfrac{1-a^3}{a}$

А. Наталка. **В.** Наталка й Сашко.
Б. Сашко. **Г.** Ані Наталка, ані Сашко.

Задачі на повторення

384. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої проходить через точки:
1) $A\,(2;\,2)$ і $B\,(6;\,6)$; 2) $A\,(0;\,0)$ і $B\,(2;\,-6)$.

385. Побудуйте графік функції:
1) $y=x$; 3) $y=2x-4$;
2) $y=x+3$; 4) $3y+5x-15=0$.

§ 11 Функція $y = \frac{k}{x}$

1. ОСОБЛИВОСТІ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$

У 7-му класі ви ознайомилися з поняттям функції, вивчили особливості лінійної функції $y = ax + b$ та її окремого випадку — функції $y = kx$, що має назву «пряма пропорційність». Надалі в курсі алгебри ви буде вивчати й інші функції, які відіграють особливу роль у дослідженні реальних процесів та явищ.

Однією з них є функція $y = \frac{k}{x}$, де x — аргумент функції, k — будь-яке число, відмінне від нуля.

? Чому для функції $y = \frac{k}{x}$ є обмеження на число k? Поміркуємо.

Якщо $k = 0$ і $x \neq 0$, то $\frac{k}{x} = \frac{0}{x} = 0$, а функція $y = 0$ є лінійною.

2. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$

Функцію $y = \frac{k}{x}$ задає вираз $\frac{k}{x}$, який втрачає зміст, якщо $x = 0$. Справді, за такого значення x знаменник дробу $\frac{k}{x}$ дорівнює нулю. Тому область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ містить усі числа, крім нуля.

Коротко це записують так. $D(y)$: x — будь-яке число, крім нуля, або $x \neq 0$.

? Чи може значення функції $y = \frac{k}{x}$ дорівнювати нулю? Ні, оскільки $k \neq 0$ за означенням.

Отже, область значень функції $y = \frac{k}{x}$ містить усі числа, крім нуля.

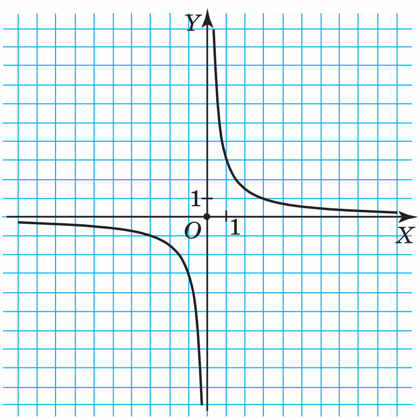
Коротко це записують так. $E(y)$: y — будь-яке число, крім нуля, або $y \neq 0$.

3. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = \dfrac{k}{x}$

На малюнку 2 зображено графік функції $y = \dfrac{k}{x}$, у якої $k > 0$ ($k = 3$). Його побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Одержану лінію називають *гіперболою*. Гіпербола складається з двох *віток*. Як бачимо на малюнку, кожна вітка цієї гіперболи нескінченно наближається до осей координат.

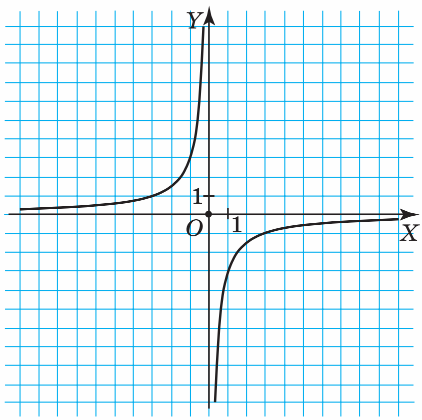
Чи перетинають вітки гіперболи осі координат? Ні, оскільки з попередніх міркувань випливає, що точки з абсцисами $x = 0$ і точки з ординатами $y = 0$ не належать графіку функції $y = \dfrac{k}{x}$.

Оскільки $k > 0$, то для додатних значень аргументу значення функції також додатні (ця вітка розміщена в I координатній чверті), а для від'ємних значень аргументу значення функції від'ємні (ця вітка розміщена в III координатній чверті).



$k > 0$

Мал. 2



$k < 0$

Мал. 3

На малюнку 3 ви бачите графік функції $y = \dfrac{k}{x}$, у якої $k < 0$ ($k = -3$). Кожна вітка цієї гіперболи також нескінченно наближається до осей координат і не перетинає їх. Але графік цієї функції розміщений у II і IV координатних чвертях.

4. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$

Виокремимо властивості функції $y = \frac{k}{x}$, спираючись на її графік. Розглянемо два випадки: $k > 0$ і $k < 0$.

$k > 0$ (мал. 2)

1. $D(y)$: x — будь-яке число, крім нуля, або $x \neq 0$.
2. $E(y)$: y — будь-яке число, крім нуля, або $y \neq 0$.
3. Точок перетину з осями координат немає.
4. Функція набуває: додатних значень, якщо $x > 0$; від'ємних значень, якщо $x < 0$.
5. Функція є спадною на всій області визначення.

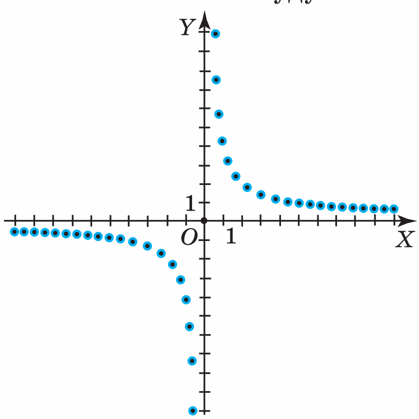
$k < 0$ (мал. 3)

1. $D(y)$: x — будь-яке число, крім нуля, або $x \neq 0$.
2. $E(y)$: y — будь-яке число, крім нуля, або $y \neq 0$.
3. Точок перетину з осями координат немає.
4. Функція набуває: додатних значень, якщо $x < 0$; від'ємних значень, якщо $x > 0$.
5. Функція є зростаючою на всій області визначення.

5. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$

? Як побудувати графік функції $y = \frac{k}{x}$ без комп'ютерної підтримки?

Ви знаєте, щоб побудувати графік лінійної функції — пряму, достатньо знайти координати двох її точок. Для побудови графіка функції $y = \frac{k}{x}$ недостатньо знайти координати двох її точок. Не можна встановити й мінімальну кількість таких точок. Що більше точок гіперболи позначити в системі координат (мал. 4), то точніше зможемо побудувати лінію.



Мал. 4

На практиці знаходимо кілька точок (зазвичай надаючи аргументу цілих значень, які є дільниками числа k) та з'єднуємо їх плавною лінією, спираючись на властивості функції.

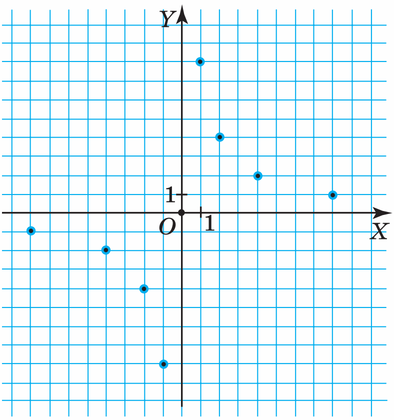
Задача 1. Побудуйте графік функції $y = \frac{8}{x}$.

Розв'язання. Щоб побудувати графік функції $y = \frac{8}{x}$, потрібно побудувати точки, координати яких задовольняють формулу $y = \frac{8}{x}$. Для цього заповнимо таблицю значень даної функції (таблиця 13).

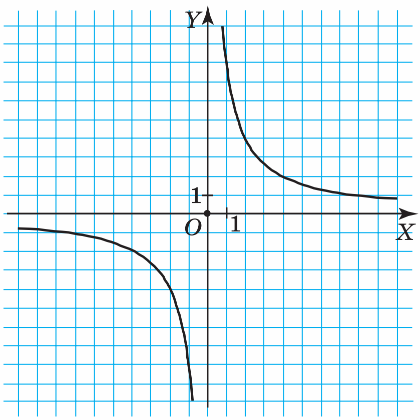
Таблиця 13

x	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
$y(x)$	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1

На координатній площині позначимо точки з координатами (–8; –1), (–4; –2), (–2; –4), (–1; –8), (1; 8), (2; 4), (4; 2), (8; 1) (мал. 5). З'єднаємо їх плавною лінією. Одержимо графік функції $y = \frac{8}{x}$ (мал. 6).



Мал. 5



Мал. 6

Задача 2. Чи проходить графік функції $y = -\frac{9}{x}$ через точку: 1) A (1; 9); 2) B (2; –4,5)?

Розв'язання. **1.** Підставимо координати точки A (1; 9) у формулу $y = -\frac{9}{x}$. Одержали: $9 \neq -\frac{9}{1}$. Отже, графік функції $y = -\frac{9}{x}$ не проходить через точку A.

2. Підставимо координати точки B (2; –4,5) у формулу $y = -\frac{9}{x}$.

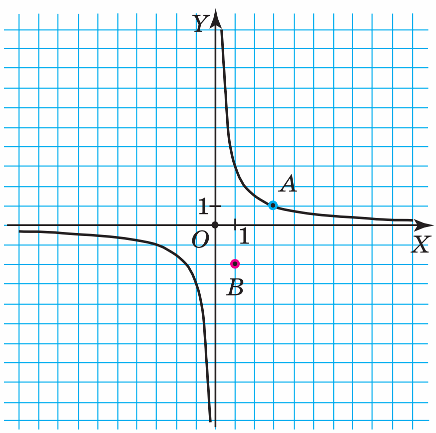
Одержали: $-4{,}5 = -\frac{9}{2}$, тобто –4,5 = –4,5. Отже, графік функції $y = -\frac{9}{x}$ проходить через точку B.

Зверніть увагу:

щоб перевірити, чи проходить графік функції $y = \frac{k}{x}$ через задану точку, потрібно перевірити, чи задовольняють координати цієї точки формулу $y = \frac{k}{x}$.

Як графічно з'ясувати, чи належить графіку функції деяка точка? Для цього потрібно дану точку позначити в системі координат.

Наприклад, на малюнку 7 ви бачите, що точка A (3; 1) належить графіку функції $y = \frac{3}{x}$, а точка B (1; –2) не належить йому.



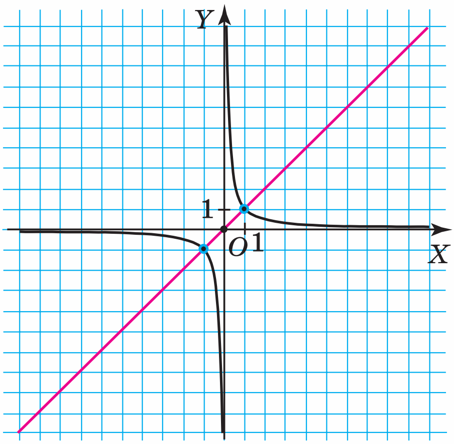
Мал. 7

Побудова графіка функції $y = \frac{k}{x}$ допомагає розв'язувати рівняння, системи рівнянь. Розглянемо приклад.

Задача 3. Розв'яжіть графічно рівняння $x = \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Щоб розв'язати дане рівняння графічно, потрібно: 1) побудувати графік функції $y = x$;
2) у тій самій системі координат побудувати графік функції $y = \frac{1}{x}$;
3) знайти абсциси точок перетину графіків.
Графік функції $y = x$ — це пряма, що проходить через точки (1; 1), (0; 0) (мал. 8).

Графік функції $y = \frac{1}{x}$ — це гіпербола, що проходить через точки (–1; –1), (–2; –0,5), (2; 0,5), (1; 1) (мал. 8).



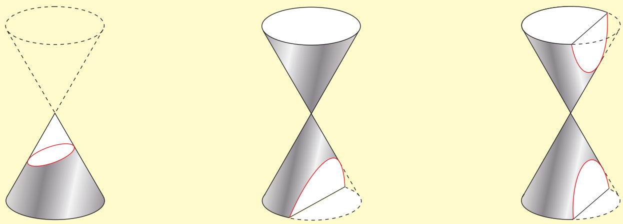
Мал. 8

Пряма й гіпербола перетинаються в точках з абсцисами 1 і –1.
Отже, x = 1 і x = –1 — корені рівняння.

Дізнайтеся більше

1. Формула $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ задає обернено пропорційну залежність змінної y від змінної x. Справді, зі збільшенням (зменшенням) у кілька разів значення x значення y зменшується (збільшується) у стільки ж разів. Переконайтесь у цьому самостійно.
2. Вченням про гіперболу займалися ще давньогрецькі математики. Найбільш відомою працею про гіперболу була праця

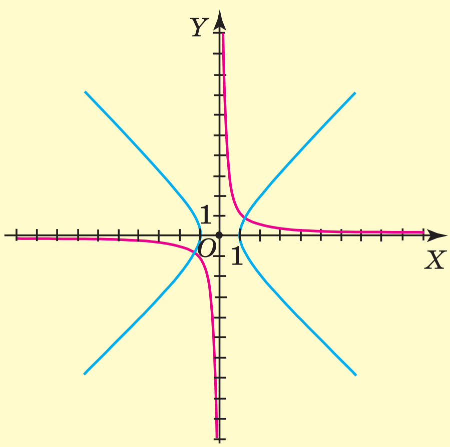
Аполлонія (3–2 ст. до н.е.) «Конічні перерізи». Гіперболу, як і еліпс та параболу, він одержував як переріз прямого кругового конуса площинами (мал. 9). Тому ці лінії називають конічними перерізами.



Еліпс Парабола Гіпербола

Мал. 9

3. Рівняння гіперболи $y=\dfrac{k}{x}$ часто записують у вигляді $xy = k$. Якщо таку гіперболу повернути на 45° навколо початку координат (мал. 10), то її рівняння набуде вигляду $x^2 - y^2 = k^2$.



Мал. 10

Пригадайте головне

1. Чому у функції $y=\dfrac{k}{x}$ коефіцієнт $k \neq 0$?

2. Яка область визначення функції $y=\dfrac{k}{x}$?

3. Яка область значень функції $y = \dfrac{k}{x}$?

4. Що є графіком функції $y = \dfrac{k}{x}$?

5. У яких чвертях лежить гіпербола, якщо $k > 0$ ($k < 0$)?

6. За яких значень аргументу значення функції $y = \dfrac{k}{x}$ — додатні; від'ємні?

7. За яких значень k функція $y = \dfrac{k}{x}$ є зростаючою; спадною?

Розв'яжіть задачі

386'. Яке із тверджень є правильним:

1) область визначення функції $y = \dfrac{k}{x}$ — усі числа;

2) область визначення функції $y = \dfrac{k}{x}$ — усі додатні числа;

3) область визначення функції $y = \dfrac{k}{x}$ — усі числа, крім нуля;

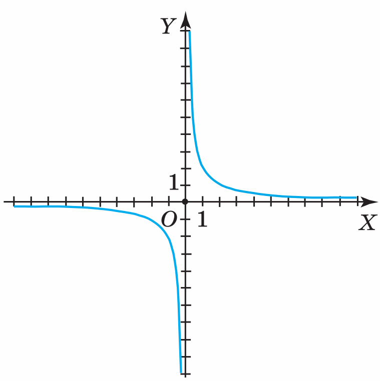
4) гіпербола не перетинає осей координат;

5) гіпербола перетинає вісь абсцис у двох точках;

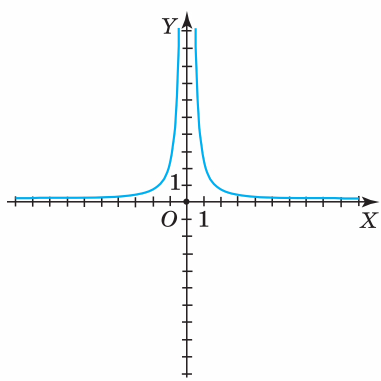
6) гіпербола $y = \dfrac{10}{x}$ розміщена в I і II координатних чвертях;

7) функція $y = \dfrac{6}{x}$ є спадною для $x > 0$ і зростаючою для $x < 0$;

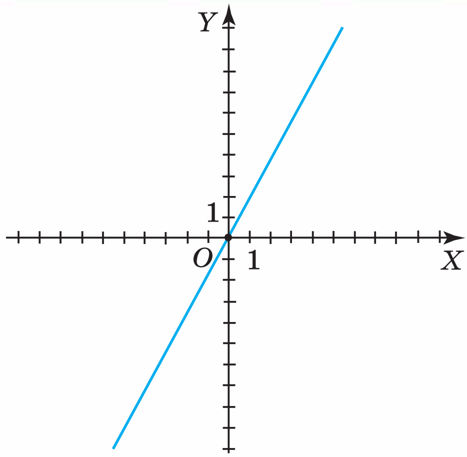
8) функція $y = -\dfrac{4}{x}$ є зростаючою і для $x > 0$, і для $x < 0$?



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

387°. На якому з малюнків 11–13 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$?

388°. Графік якої з даних функцій є гіперболою:

1) $y = 9 + 2x$;
2) $y = \frac{1}{x}$;
3) $y = x + \frac{x}{3}$;
4) $y = \frac{1}{x^2}$;
5) $y = x$;
6) $y = \frac{-3}{x}$;
7) $y = 4x$;
8) $y = \frac{10}{x}$;
9) $y = \frac{x}{3}$;
10) $y = \frac{37}{x^2}$;
11) $y = -\frac{1}{x}$;
12) $y = -x$?

389°. Яким є коефіцієнт k у функції $y = \frac{k}{x}$, якщо:

1) $y = \frac{1}{x}$;
2) $y = -\frac{4}{x}$;
3) $y = \frac{4}{x}$;
4) $y = \frac{10}{x}$;
5) $y = -\frac{12}{x}$;
6) $y = \frac{-25}{x}$;
7) $y = \frac{28}{x}$;
8) $y = \frac{100}{x}$?

390°. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 14 і заповніть її.

Таблиця 14

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y								

391°. Функцію задано формулою $y = \frac{4}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 15 і заповніть її.

Таблиця 15

x	-4	-2	-1	1	2	4
y						

392°. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 16 і заповніть її.

Таблиця 16

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y								

393°. Функцію задано формулою $y = -\frac{4}{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 17 і заповніть її.

Таблиця 17

x	-4	-2	-1	1	2	4
y						

394°. Чи правильно, що графік функції $y = \frac{4}{x}$ проходить через точку:

1) A (2; 2);
2) B (−2; −2);
3) C (4; 4);
4) D (0; 4);
5) M (4; 2);
6) N (−8; −2);
7) P (0; 0);
8) R (−1; 4)?

395°. Яка з точок M (−2; 1), N (1; 2), P (2; −1), R (−2; 0) належить графіку функції $y = -\frac{2}{x}$?

396°. Чи належить графіку функції $y = \frac{10}{x}$ точка:

1) A (1; −10);
2) B (2; 5);
3) C (0; 0);
4) D (−1; −10);
5) M (10; 1);
6) N (−10; −10)?

397°. Чи належить графіку функції $y = \frac{12}{x}$ точка:

1) K (−1; 12);
2) L (1; 12);
3) M (2; 6);
4) N (−4; −8)?

398°. Назвіть координати будь-яких трьох точок, що належать гіперболі:

1) $y = \dfrac{5}{x}$;
2) $y = -\dfrac{9}{x}$;
3) $y = \dfrac{18}{x}$;
4) $y = -\dfrac{20}{x}$;
5) $y = \dfrac{25}{x}$;
6) $y = -\dfrac{25}{x}$;
7) $y = -\dfrac{10}{x}$;
8) $y = -\dfrac{14}{x}$.

399°. Знайдіть значення k, якщо графік функції $y = \dfrac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A\ (1; -10)$;
2) $B\ (2; 8)$;
3) $C\ (-9; -3)$;
4) $M\ (-2; 1)$;
5) $N\ (9; 1)$;
6) $P\ (5; -10)$;
7) $H\ (-12; -3)$;
8) $R\ (-6; 3)$.

400°. Знайдіть значення k, якщо графік функції $y = \dfrac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A\ (-1; 1)$;
2) $B\ (3; 7)$;
3) $C\ (-4; -5)$;
4) $D\ (7; 2)$.

401°. Чи правильно, що функція $y = \dfrac{k}{x}$ зростає, якщо:

1) $k = 2$;
2) $k = -7$;
3) $k = 15$;
4) $k = -11$;
5) $k = 0{,}9$;
6) $k = 1{,}6$;
7) $k = -42$;
8) $k = -0{,}25$?

402°. Чи правильно, що функція $y = \dfrac{k}{x}$ спадає, якщо:

1) $k = 1$;
2) $k = -9$;
3) $k = 25$;
4) $k = -18$;
5) $k = -2{,}6$;
6) $k = 6{,}5$?

403°. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{2}{x}$;
2) $y = -\dfrac{2}{x}$;
3) $y = \dfrac{12}{x}$;
4) $y = -\dfrac{5}{x}$.

404°. Побудуйте графік функції:

1) $y = -\dfrac{9}{x}$;   2) $y = \dfrac{9}{x}$;   3) $y = \dfrac{10}{x}$.

405°. **Якщо точка $(x; y)$ належить графіку функції $y = \dfrac{k}{x}$, то й точка $(-x; -y)$ належить графіку функції $y = \dfrac{k}{x}$. Доведіть.**

406. Який коефіцієнт k функції $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{1}{5x}$;   5) $y = -\dfrac{1}{0,2x}$;

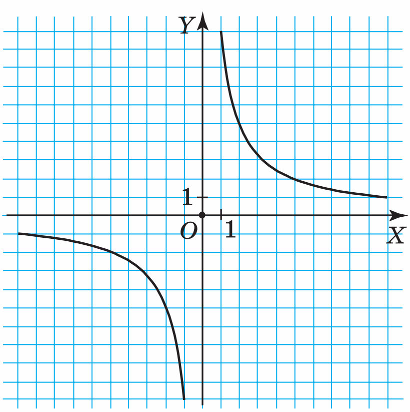
2) $y = -\dfrac{1}{7x}$;   6) $xy = -8$;

3) $y = \dfrac{4}{9x}$;   7) $2xy = 14$;

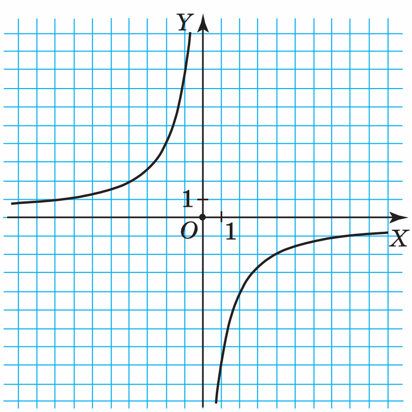
4) $y = \dfrac{5}{6x}$;   8) $4xy = -24$?

407. На малюнку 14 зображено графік функції $y = \dfrac{k}{x}$. Скориставшись графіком, знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -1; 2; -5; 10$;
2) значення x, якщо $y = 10; 5; -2$;
3) за яких значень аргументу значення функції додатні;
4) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
5) значення аргументу, за яких функція зростає;
6) значення аргументу, за яких функція спадає;
7) коефіцієнт k.



Мал. 14



Мал. 15

408. На малюнку 15 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$.

Скориставшись графіком, знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -1; 2; -4$;
2) значення x, якщо $y = 8; -2; 1$;
3) за яких значень аргументу значення функції додатні;
4) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
5) значення аргументу, за яких функція зростає;
6) значення аргументу, за яких функція спадає;
7) коефіцієнт k.

409. Дано функцію:

1) $y = \frac{1}{x}$;
2) $y = -\frac{13}{x}$;
3) $y = \frac{0,5}{x}$;
4) $y = \frac{5}{4x}$;
5) $y = \frac{0,01}{x}$;
6) $y = -\frac{1}{9x}$;
7) $y = \frac{3}{7x}$;
8) $y = \frac{1}{0,1x}$.

Знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) коефіцієнт k;
4) значення y, якщо $x = -1; 1; 10$;
5) значення x, якщо $y = 1; -1; -2$;
6) за яких значень аргументу значення функції додатні;
7) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
8) значення аргументу, за яких функція зростає;
9) значення аргументу, за яких функція спадає.

410. Дано функцію:

1) $y = -\frac{1}{x}$;
2) $y = -\frac{25}{x}$;
3) $y = \frac{0,2}{x}$;
4) $y = \frac{8}{3x}$.

Знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) коефіцієнт k;
4) значення y, якщо $x = -1; 1; -10$;
5) значення x, якщо $y = 1; 10; -2$;

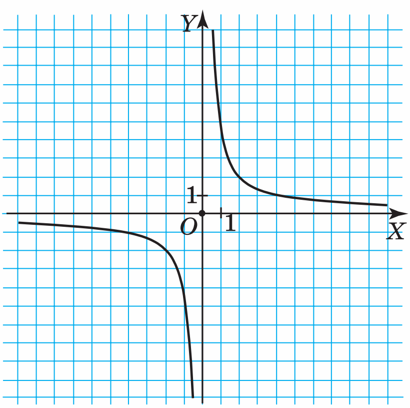
6) за яких значень аргументу значення функції додатні;
7) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
8) значення аргументу, за яких функція зростає;
9) значення аргументу, за яких функція спадає.

411. Знайдіть значення k, якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

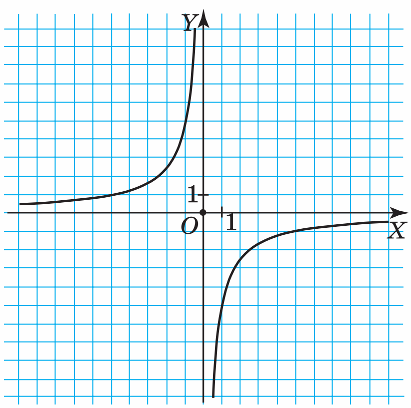
1) $A\ (0,5;\ -10)$;
2) $B\ (0,1;\ 100)$;
3) $C\ (-6;\ 0,05)$;
4) $D\ (1,5;\ 0,02)$;
5) $M\left(-\frac{2}{5};\ -15\right)$;
6) $N\left(\frac{3}{4};\ -1\frac{1}{2}\right)$;
7) $P\left(2\frac{1}{7};\ 35\right)$;
8) $H\left(-1\frac{1}{3};\ -1,75\right)$;

412. Знайдіть значення k, якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:
1) $A\ (2;\ -0,001)$;
2) $B\left(2\frac{1}{3};\ -6\right)$;
3) $C\ (-0,9;\ 1,8)$.

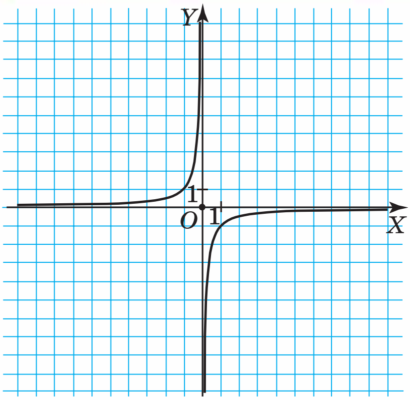
413. На малюнках 16–19 зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$. Знайдіть значення k.



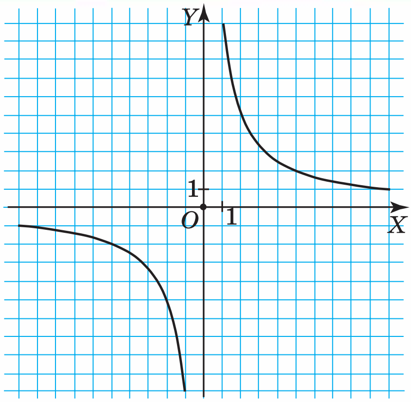
Мал. 16



Мал. 17



Мал. 18



Мал. 19

414. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{4x}$;
3) $y = \frac{0,5}{x}$;
2) $y = -\frac{2}{3x}$;
4) $xy = -4$.

Скориставшись графіком, знайдіть значення аргументу, за яких значення функції: а) є додатними; б) є від'ємними.

415. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{5x}$;
2) $y = -\frac{0,9}{x}$;
3) $xy = -6$.

Скориставшись графіком, знайдіть значення аргументу, за яких значення функції: а) є додатними; б) є від'ємними.

416. Порівняйте значення функції $y = \frac{2}{x}$ (не обчислюючи їх) для таких значень аргументу:

1) $x = 3$ і $x = 5$;
5) $x = -5$ і $x = -3$;
2) $x = 6$ і $x = 10$;
6) $x = -1$ і $x = -10$;
3) $x = 3,5$ і $x = 4$;
7) $x = -2$ і $x = 5$;
4) $x = 0,9$ і $x = 1,9$;
8) $x = -8$ і $x = 8$.

417. Порівняйте значення функції $y = -\frac{1}{x}$ (не обчислюючи їх) для таких значень аргументу:

1) $x = 9$ і $x = 10$;
2) $x = -2$ і $x = -4$;
3) $x = -5$ і $x = 5$;
4) $x = -12$ і $x = 5$.

418. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = \frac{4}{x}$ і $y = 2$;
2) $y = -\frac{2}{x}$ і $y = -2$;
3) $y = \frac{6}{x}$ і $x = -2$;
4) $y = -\frac{1}{x}$ і $x = 1$;
5) $y = -\frac{4}{x}$ і $y = -x$;
6) $y = \frac{9}{x}$ і $y = x$;
7) $y = \frac{-6}{x}$ і $y = -x + 1$;
8) $y = -\frac{9}{x}$ і $y = \frac{9}{x}$;
9) $y = -\frac{12}{x}$ і $xy = -6$;
10) $y = \frac{4}{x}$ і $y = \frac{10}{x}$.

Чи перетинаються побудовані графіки? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

419. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = \frac{3}{x}$ і $y = 3$;
2) $y = -\frac{1}{x}$ і $x = -1$;
3) $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$;
4) $y = \frac{12}{x}$ і $y = 2 + 2x$;
5) $y = -\frac{6}{x}$ і $y = \frac{6}{x}$;
6) $xy = -1$ і $y = -\frac{3}{x}$.

Чи перетинаються побудовані графіки? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

420. Задайте формулою функцію, якщо її графік є гіперболою, яка проходить через точку $M\left(-\frac{5}{16}; 3\frac{1}{5}\right)$. Побудуйте графік одержаної функції.

421*. Задайте формулою функцію, якщо її графік є гіперболою, що проходить через точку, ордината якої дорівнює частці числа 4 та відповідної абсциси. Побудуйте графік одержаної функції.

422*. Задайте формулою функцію, якщо її графік є гіперболою, що проходить через точку, абсциса якої дорівнює частці числа 9 і відповідної ординати. Побудуйте графік одержаної функції.

423*. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 5 = \frac{6}{x}$;
2) $x - 1 = \frac{2}{x}$;
3) $x - 4 = -\frac{3}{x}$;
4) $x + 8 = \frac{9}{x}$.

424*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{2}{|x|}$;

2) $y = \dfrac{6}{|x|}$;

3) $y = \dfrac{x+1}{x^2+x}$;

4) $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x}$;

5) $y = \dfrac{2x-18}{x^2-9x}$.

425*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x < 1, \\ \dfrac{2}{x}, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$

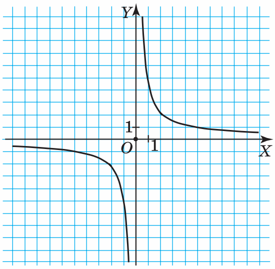
3) $y = \begin{cases} 3x, \text{ якщо } x < 1, \\ \dfrac{3}{x}, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \text{ якщо } x < 0, \\ \dfrac{2}{x}, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$

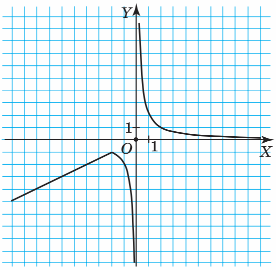
5) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x < 0, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \le -1, \\ x, \text{ якщо } -1 < x < 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \ge 1. \end{cases}$

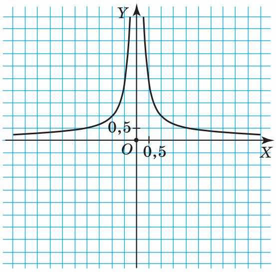
426*. Задайте функцію, графік якої подано на малюнках 20–22.



Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22

Проявіть компетентність

427. Відстань між Миколаєвом і Полтавою становить близько 400 км.

1. Запишіть функцію, що описує залежність часу, за який автомобіль має подолати відстань між цими містами, від швидкості автомобіля.
2. Визначте час, якщо швидкість автомобіля дорівнює 80 км/год; 100 км/год.
3. Визначте швидкість автомобіля, якщо на дорогу він витратив 5 год; 4 год.
4. Побудуйте графік одержаної функції, узявши за одиничний відрізок на осі абсцис — 20 км/год, а на осі ординат — 1 год.

428. Дачні ділянки мають форму прямокутника, із площею 500 м^2; x — довжина ділянки, y — її ширина.

1. Визначте ширину ділянки, якщо довжина ділянки дорівнює 50 м; 25 м.
2. Визначте довжину ділянки, якщо ширина ділянки дорівнює 10 м; 20 м.
3. Запишіть функцію, що описує залежність ширини ділянки від її довжини.
4. Побудуйте графік залежності ширини ділянки від її довжини, узявши на обох осях координат однаковий одиничний відрізок, що відповідає 50 м.

Задачі на повторення

429. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2$;
2) $y = 2x$;
3) $y = -4x - 6$;
4) $y = 5x - 10$.

430. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 100 = 0$;
2) $x^2 - 64 = 0$;
3) $4x^2 - 9 = 0$;
4) $(x - 1)^2 - 4 = 0$;
5) $x^2 - 6x = 0$;
6) $25x^2 - 5x = 0$;
7) $x^2 + 6 = 0$;
8) $25x^2 + 1 = 0$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Який вираз називається раціональним?
2. Що таке область допустимих значень змінної виразу?
3. Що таке раціональний дріб?
4. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.
5. Сформулюйте правило додавання (віднімання) двох раціональних дробів з однаковими знаменниками; із різними знаменниками.
6. Сформулюйте правило множення (ділення) двох раціональних дробів.
7. Як піднести раціональний дріб до степеня з натуральним показником?
8. Які рівняння називають раціональними; дробовими раціональними?
9. За якої умови добуток дорівнює нулю? Дріб дорівнює нулю?
10. Як розв'язати рівняння, застосувавши основну властивість пропорції?
11. Як визначають степінь із цілим від'ємним показником; із показником 0?
12. Сформулюйте властивість добутку степенів з рівними основами; з різними основами й рівними показниками.
13. Сформулюйте властивість частки степенів з рівними основами; з різними основами й рівними показниками.
14. Яка властивість піднесення степеня до степеня?
15. Як записати число в стандартному вигляді?
16. Сформулюйте властивості піднесення раціональних виразів до степеня з цілим від'ємним показником; із показником 0; із цілим показником.
17. Яка область визначення функції $y = \frac{k}{x}$?
18. Яка область значень функції $y = \frac{k}{x}$?
19. Що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?
20. У яких чвертях лежить гіпербола, якщо $k > 0$ ($k < 0$)?
21. За яких значень аргументу значення функції $y = \frac{k}{x}$ є додатними; від'ємними?
22. За яких значень k функція $y = \frac{k}{x}$ є зростаючою; спадною?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° Визначте ОДЗ змінної x виразу $\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$.

А. $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Б. $x \neq 0$ і $x \neq 1$.

В. $x \neq 1$.

Г. $x \neq \dfrac{1}{2}$ і $x \neq 1$.

2° Скоротіть дріб $\dfrac{5x+15y}{3by+bx}$.

А. $\dfrac{5}{b}$.

Б. $\dfrac{x+3y}{b}$.

В. $\dfrac{5}{3y+x}$.

Г. $\dfrac{5(x+3y)}{b}$.

3° Зведіть дроби $\dfrac{2}{5x^3}$ і $\dfrac{2}{25x^2}$ до спільного знаменника.

А. $\dfrac{10}{25x^2}$ і $\dfrac{2}{25x^2}$.

Б. $\dfrac{10}{25x^3}$ і $\dfrac{2}{25x^3}$.

В. $\dfrac{10}{25x^3}$ і $\dfrac{2x}{25x^3}$.

Г. $\dfrac{10}{25x^2}$ і $\dfrac{2x}{25x^2}$.

4 Спростіть вираз $\dfrac{2x}{x^2-y^2} - \dfrac{2x-y}{x^2-xy}$.

А. $\dfrac{y}{x(x-y)}$. **Б.** $\dfrac{y^2}{x(x^2-y^2)}$. **В.** $-\dfrac{y}{x(x+y)}$. **Г.** $\dfrac{y}{y^2-x^2}$.

5* Спростіть вираз $\dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{a^2-2a+1} - \dfrac{1}{a-1}$.

А. $\dfrac{a^2}{(a-2)(a-1)^2}$.

Б. $\dfrac{a}{(a-2)(a-1)}$.

В. $\dfrac{1}{(a-2)(a-1)^2}$.

Г. $\dfrac{1}{(a-2)(a^2-1)}$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

№ 2

1° Виконайте множення дробів $\frac{4x-8}{55}$ і $\frac{25}{3x-6}$.

А. $\frac{2}{3}$.
В. $\frac{20}{33}$.
Б. $\frac{4}{3}$.
Г. $\frac{5}{33}$.

2° Спростіть вираз $\left(\frac{2}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9x^3}{8}$.

А. x.
В. $\frac{1}{2}$.
Б. 1.
Г. $\frac{x}{2}$.

3° Виконайте ділення: $\frac{7x^3y^3}{5a} : \frac{28x^2y^4}{45a}$.

А. $\frac{9x}{20y}$.
В. $\frac{9x}{4y}$.
Б. $\frac{4xy}{9}$.
Г. $\frac{4y}{9x}$.

4 Поставте замість * такий одночлен, щоб одержати правильну рівність: $\frac{2a^2}{9b^3} : \frac{*}{18b^2} = \frac{a}{b}$.

А. $\frac{a^3}{4}$.
Б. $4a^3$.
В. $4a$.
Г. $\frac{a}{4}$.

5* Розв’яжіть рівняння $\frac{x+4}{x^2-4x+16} - \frac{x^2}{x^3+64} = 0$.

А. $x = 2$.
Б. $x = 4$.
В. $x = -4$.
Г. $x = -2$.

№ 3

1° Спростіть вираз $a^{-8} : a^{-2}$.

А. a^{-10}.
Б. a^{4}.
В. a^{-4}.
Г. a^{-6}.

2° Запишіть число $21{,}3 \cdot 10^{-4}$ в стандартному вигляді.

А. $213 \cdot 10^{-5}$.
Б. $2{,}13 \cdot 10^{-5}$.
В. $2{,}13 \cdot 10^{-3}$.
Г. $0{,}213 \cdot 10^{-6}$.

3° Яка з точок належить графіку функції $y = \dfrac{8}{x}$?

А. $A\,(1; -8)$.
Б. $B\,(2; 6)$.
В. $C\,(8; 0)$.
Г. $D\,(4; 2)$.

4 Обчисліть: $\dfrac{2}{3^{-2}} \cdot 0{,}1^{0}$.

А. 18.
Б. $-\dfrac{2}{9}$.
В. 12.
Г. 1,2.

5* Спростіть вираз $\dfrac{x^2}{yz^{-3}} \cdot \left(\dfrac{3x^{-4}}{y^5}\right)^{-2}$.

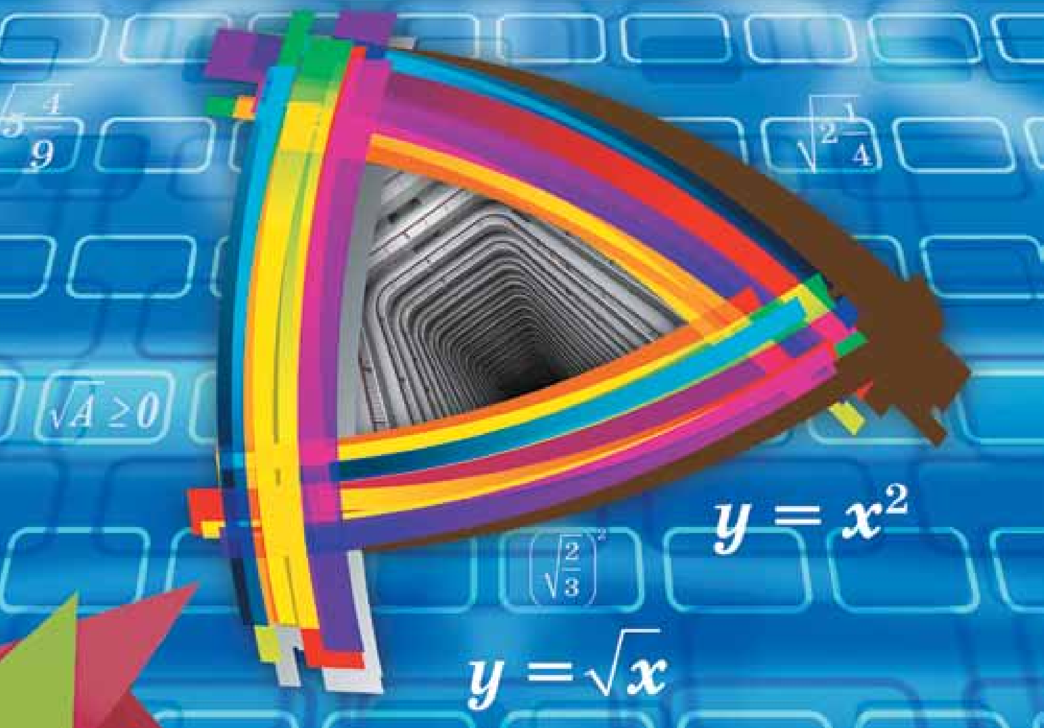
А. $\dfrac{-6x^{10}}{y^{-9}z^{-3}}$.
Б. $\dfrac{6x^{8}}{y^{-6}z^{-3}}$.
В. $\dfrac{x^{2}}{yz^{-3}}$.
Г. $\dfrac{x^{10}}{9y^{-9}z^{-3}}$.

Розділ 2

Квадратні корені. Дійсні числа

У розділі дізнаєтеся:

- що таке множина та підмножина;
- які є числові множини;
- що таке квадратний корінь із числа та арифметичний квадратний корінь із числа;
- які властивості квадратних коренів;
- що таке ірраціональний вираз та як перетворювати такі вирази;
- які властивості функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці



§ 12 Функція $y = x^2$

У цьому параграфі ознайомимося ще з однією важливою функцією $y = x^2$. З'ясуємо її основні властивості.

1. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $y = x^2$

Функцію $y = x^2$ задає вираз x^2, який має зміст за будь-якого значення x. Тому область визначення функції $y = x^2$ містить усі числа.

Коротко це записують так. $D(y)$: x — будь-яке число.

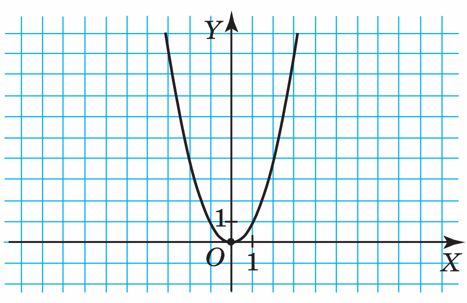
Оскільки для будь-якого x вираз $x^2 \geq 0$, то $y \geq 0$. Тому область значень функції $y = x^2$ містить усі невід'ємні числа.

Коротко це записують так. $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.

2. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = x^2$

На малюнку 23 зображено графік функції $y = x^2$. Його побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Одержану лінію називають *параболою*. Парабола має дві *вітки*, що виходять з однієї точки, — *вершини параболи*. На малюнку 23 — це точка з координатами (0; 0).

Оскільки x — будь-яке число, а значення функції $y = x^2$ є невід'ємними, то парабола розміщена в першій і другій координатних чвертях.



Мал. 23

3. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = x^2$

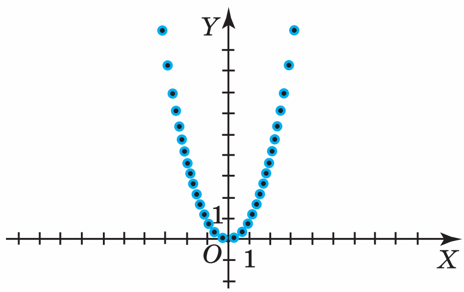
Виокремимо властивості функції $y = x^2$, спираючись на її графік (мал. 23).

1. $D(y)$: x — будь-яке число.
2. $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.
3. Точка (0; 0) — точка перетину з осями координат. Це вершина параболи.
4. Функція набуває додатних значень для будь-якого x, крім нуля.
5. Функція є зростаючою, якщо $x > 0$, і спадною, якщо $x < 0$.

4. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = x^2$

? Як побудувати графік функції $y = x^2$ без комп'ютерної підтримки?

Як і для гіперболи, що більше точок параболи позначити в системі координат, то точніше буде побудовано лінію (мал. 24).



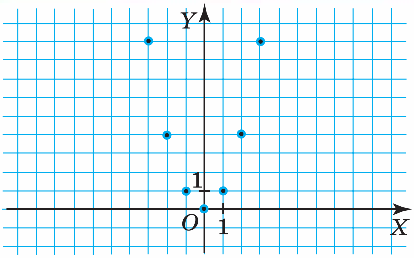
Мал. 24

На практиці знаходимо кілька точок параболи (таблиця 18).

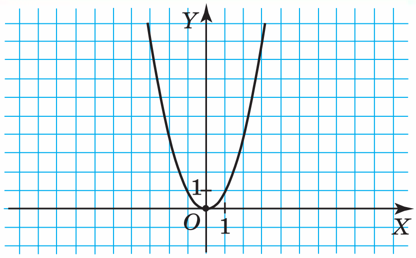
Таблиця 18

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y(x)$	9	4	1	0	1	4	9

На координатній площині позначимо точки з координатами (–3; 9), (–2; 4), (–1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9) (мал. 25). З'єднаємо їх плавною лінією, спираючись на властивості функції. Одержимо графік функції $y = x^2$ (мал. 26).



Мал. 25



Мал. 26

Задача 1. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку: 1) A (5; 25); 2) B (6; 12)?

Розв'язання.

1. Підставимо координати точки A (5; 25) у формулу $y = x^2$. Маємо: $25 = 5^2$. Отже, графік функції $y = x^2$ проходить через точку A.

2. Підставимо координати точки B (6; 12) у формулу $y = x^2$. Маємо: $12 \neq 6^2$. Отже, графік функції $y = x^2$ не проходить через точку B.

Зверніть увагу:
щоб перевірити, чи проходить графік функції $y = x^2$ через задану точку, потрібно перевірити, чи задовольняють координати цієї точки формулу $y = x^2$.

Побудова графіка функції $y = x^2$ допомагає графічно розв'язувати рівняння та системи рівнянь. Розглянемо приклад.

Задача 2. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x^2. \end{cases}$

Розв'язання. Щоб розв'язати дану систему рівнянь, потрібно:

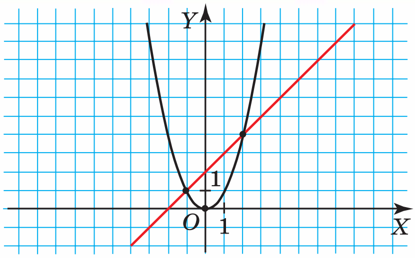
1) побудувати графік функції $y = x + 2$;

2) у тій самій системі координат побудувати графік функції $y = x^2$;

3) визначити координати точок перетину графіків.

Графік функції $y = x + 2$ — пряма, що проходить через точки (1; 3), (0; 2) (мал. 27).

Графік функції $y = x^2$ — парабола (мал. 27).

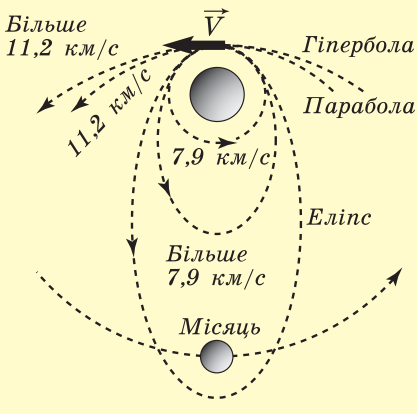


Мал. 27

Пряма й парабола перетинаються у двох точках із координатами $(-1; 1)$ і $(2; 4)$. Отже, пари чисел $(-1; 1)$ і $(2; 4)$ — розв'язки системи рівнянь.

Дізнайтеся більше

1. Властивості параболи широко використовують у техніці, зокрема космічній. Щоб деяке тіло стало штучним супутником Землі, його потрібно вивести на орбіту й надати йому горизонтальну відносно поверхні Землі швидкість (мал. 28). Для запуску супутників використовують ракети. Якщо супутнику надати швидкість 7,9 км/с, то він буде рухатися круговою орбітою. Якщо швидкість більша за 7,9 км/с, але менша від 11,2 км/с, то супутник буде рухатись еліптичною орбітою. Розвиваючи швидкість 11,2 км/с (друга космічна швидкість), тіло починає рухатися параболою і стає супутником Сонця. Якщо ж швидкість більша за 11,2 км/с, то тіло рухається гіперболою.

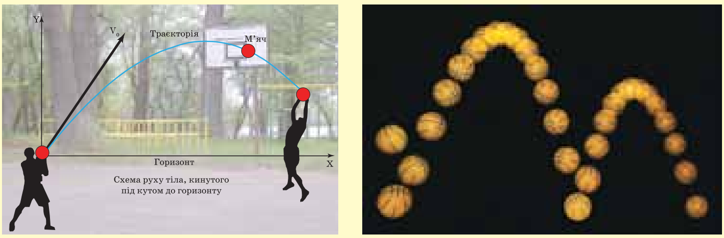


Мал. 28

2. Доведено, що струмінь води фонтану рухається параболою (мал. 29).

Мал. 29

Траєкторія тіла, яке кинули під кутом до горизонту, є параболою (мал. 30).



Мал. 30

Крім того, на параболу можна натрапити й у повсякденному житті (мал. 31).

Мал. 31

Пригадайте головне

1. Яка область визначення функції $y = x^2$?
2. Яка область значень функції $y = x^2$?
3. Що є графіком функції $y = x^2$?
4. У яких координатних чвертях лежить парабола $y = x^2$?
5. За яких значень аргументу функція $y = x^2$ є зростаючою; спадною?

Розв'яжіть задачі

431'. Яке із тверджень є правильним:
1) область визначення функції $y = x^2$ — усі додатні числа;
2) область визначення функції $y = x^2$ — усі числа, крім нуля;
3) область визначення функції $y = x^2$ — усі числа;
4) область значень функції $y = x^2$ — усі числа;
5) область значень функції $y = x^2$ — усі додатні числа;
6) область значень функції $y = x^2$ — усі невід'ємні числа;
7) вершина графіка функції $y = x^2$ міститься в точці $(0; 1)$;
8) вершина графіка функції $y = x^2$ міститься в точці $(0; 0)$;
9) функція $y = x^2$ є спадною для $x > 0$ і зростаючою для $x < 0$;
10) функція $y = x^2$ є спадною для $x < 0$ і зростаючою для $x > 0$?

432°. Графік якої з даних функцій є параболою:
1) $y = 9^2$;
2) $y = \frac{1}{x}$;
3) $y = x^2$;
4) $y = \frac{1}{x^2}$;
5) $y = x$;
6) $y = x^2x$?

433°. Функцію задано формулою $y = x^2$. Накресліть у зошиті таблицю 19 і заповніть її.

Таблиця 19

x	−10	−6	−5	−1	1	5	6	10
y								

434°. Функцію задано формулою $y = x^2$. Накресліть у зошиті таблицю 20 і заповніть її.

Таблиця 20

x	−20	−8	−6	0	6	8	20
y							

435°. Чи правильно, що графік функції $y = x^2$ проходить через точку:

1) A (4; 2);
2) B (−2; 4);
3) C (4; 16);
4) D (0; 4);
5) M (10; 100);
6) N (−8; 16);
7) P (0; 0);
8) R (−1; 1)?

436°. Чи правильно, що графік функції $y = x^2$ проходить через точку:

1) A (1; 1);
2) B (−2; −4);
3) C (2; 4);
4) D (4; 8)?

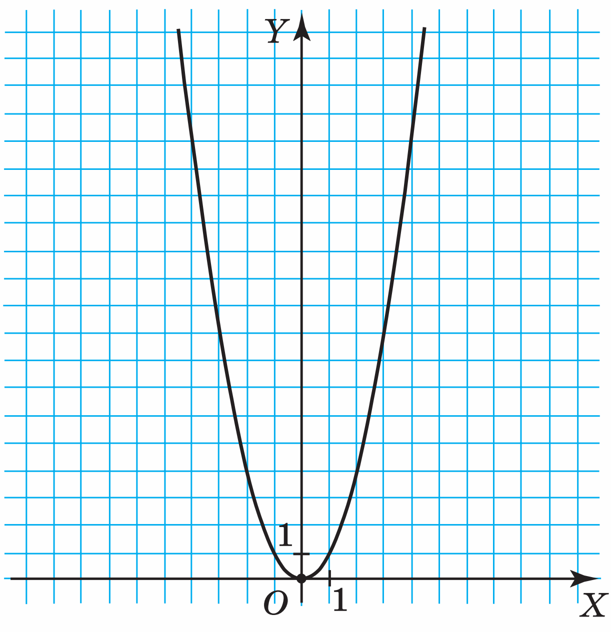
437°. Які з точок A (3; 9), B (−3; −9), C (9; −3), D (9; 3), M (−5; 25), N (5; 10), P (7; 49), R (6; −36) належать графіку функції $y = x^2$?

438°. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) A (1; −10);
2) B (8; 64);
3) C (−8; −64);
4) D (−2; 6);
5) M (9; 81);
6) N (−10; −10)?

439°. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) K (1; −1);
2) L (6; 36);
3) M (−6; 12);
4) N (−7; 49)?



Мал. 32

440°. На малюнку 32 зображено графік функції $y = x^2$. Скориставшись графіком, знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 0; -1; 3; -4$;
2) значення x, якщо $y = 1; 4; 9$;
3) значення аргументу, за яких значення функції невід'ємні;
4) значення аргументу, за яких функція зростає.

441°. На малюнку 32 зображено графік функції $y = x^2$. Скориставшись графіком, знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 1; -2; -3; 4$;
2) значення x, якщо $y = 0; 16$;
3) значення аргументу, за яких значення функції додатні;
4) значення аргументу, за яких функція спадає.

442°. **Якщо точка $(x; y)$ належить графіку функції $y = x^2$, то й точка $(-x; y)$ належить графіку функції $y = x^2$.** Доведіть.

443°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = x^2$ і $y = 1$;
2) $y = x^2$ і $y = -2$;
3) $y = x^2$ і $x = -2$;
4) $y = x^2$ і $x = 1$;
5) $y = x^2$ і $y = -2x$;
6) $y = x^2$ і $y = 2x$;
7) $y = x^2$ і $y = -3x + 18$;
8) $y = x^2$ і $y = 3x$;
9) $y = \dfrac{1}{x}$ і $y = x^2$.

Чи перетинаються графіки функцій? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

444°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = x^2$ і $y = 9$;
2) $y = x^2$ і $x = -1$;
3) $y = x^2$ і $y = x$;
4) $y = x^2$ і $y = 2 + x$;
5) $y = x^2$ і $y = -\dfrac{1}{x}$.

Чи перетинаються графіки функцій? Якщо так, то знайдіть координати точок їх перетину.

445°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 4x, \\ y = x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 5x - 6, \\ y = x^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = -\dfrac{8}{x}, \\ y = x^2. \end{cases}$

446°. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $x^2 = 4$;
2) $x^2 = 16$;
3) $x^2 = 0$;
4) $x^2 = -3$;
5) $x^2 + 5 = 0$.

447°. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $x^2 = 1$;
2) $x^2 = -1$;
3) $x^2 = 9$;
4) $4x^2 = 0$.

448. Знайдіть такі точки графіка функції $y = x^2$, у яких абсциса дорівнює ординаті.

449. Знайдіть такі точки графіка функції $y = x^2$, у яких абсциса утричі менша від ординати.

450. Знайдіть такі точки графіка функції $y = x^2$, у яких абсциса удвічі менша від ординати.

451. Порівняйте значення функції $y = x^2$ (не обчислюючи їх) для таких значень аргументу:
1) $x = 3$ і $x = 5$;
2) $x = 56$ і $x = 72$;
3) $x = 2{,}7$ і $x = 2$;
4) $x = 0{,}7$ і $x = 1{,}2$;
5) $x = -4$ і $x = -2$;
6) $x = -3$ і $x = -6$;
7) $x = -2{,}4$ і $x = -2$;
8) $x = -10$ і $x = -8$.

452. Порівняйте значення функції $y = x^2$ (не обчислюючи їх) для таких значень аргументу:
1) $x = 9$ і $x = 15$;
2) $x = 32$ і $x = 64$;
3) $x = -7$ і $x = -6$;
4) $x = -24{,}5$ і $x = -25$.

453. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $6x^2 = 24$;
2) $x = x^2$;
3) $x^2 = x + 2$;
4) $x - 6 = x^2$;
5) $-x - 3 = x^2$;
6) $4x - 3 = x^2$;
7) $x^2 = \frac{8}{x}$;
8) $x^2 = -\frac{1}{x}$.

454. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -x$;

2) $-2x + 3 = x^2$;

3) $x^2 = -x - 7$;

4) $x^2 = \dfrac{1}{x}$.

455*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^4}{x^2}$;

2) $y = \dfrac{x^5}{x^3}$;

3) $y = \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$;

4) $y = \dfrac{2x^3 + 6x^2}{2x + 6}$.

456*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ x^2, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x < 1, \\ x^2, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x < 2, \\ x^2, \text{ якщо } x \ge 2; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x < 2, \\ 4x, \text{ якщо } x \ge 2; \end{cases}$

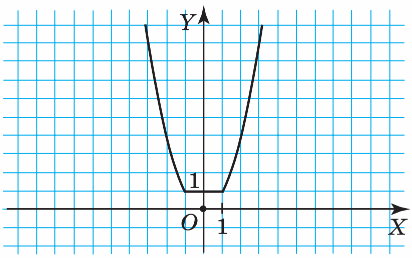
5) $y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x < 3, \\ 2x + 3, \text{ якщо } x \ge 3; \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x < 0, \\ x^2, \text{ якщо } x \ge 0; \end{cases}$

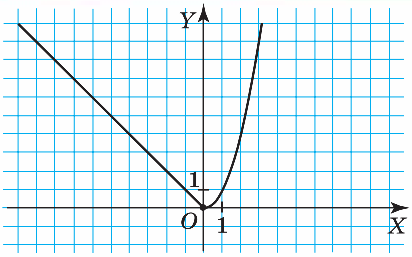
7) $y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \le -1, \\ x^2, \text{ якщо } -1 < x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \ge 1. \end{cases}$

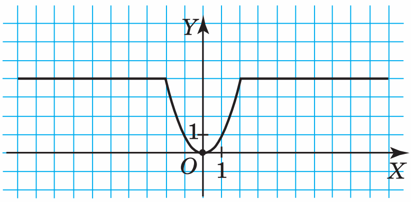
457*. Задайте функцію, графік якої подано на малюнках 33–37.



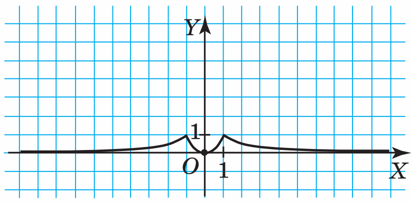
Мал. 33



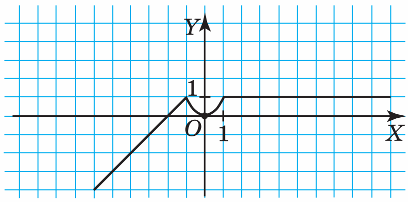
Мал. 34



Мал. 35



Мал. 36



Мал. 37

Проявіть компетентність

458. На міліметровому папері побудуйте параболу $y = x^2$, позначивши точки з абсцисами: −10; −9; −8; −7; −6; −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. За одиницю масштабу прийміть 1 мм.

459. На міліметровому папері побудуйте параболу $y = x^2$. За одиницю масштабу прийміть 1 см. Знайдіть наближені значення функції для абсцис: −4,6; −3,5; −3,1; −1,8; 1,5; 2,3; 3,1; 3,8; 4,2.

460. Земельні наділи мають форму квадрата зі стороною x.
1. Задайте формулою залежність площі ділянки від довжини її сторони.
2. Побудуйте графік залежності площі ділянки від довжини її сторони.
3. Задайте формулою залежність периметра ділянки від довжини її сторони.
4. Побудуйте графік залежності периметра ділянки від довжини її сторони.
5. Визначте площу ділянки, якщо довжина її сторони дорівнює 15 м; 25 м.
6. Визначте довжину сторони ділянки, якщо її площа дорівнює 100 м^2; 400 м^2.
7. Визначте довжину сторони ділянки, якщо число, що виражає її площу, дорівнює числу, що виражає периметр ділянки.

Задачі на повторення

461. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a+3}{a-3} - \dfrac{6a}{a^2-9}$;

2) $\dfrac{m-5}{m+5} + \dfrac{10m}{m^2-25}$;

3) $\dfrac{3}{2x-2y} - \dfrac{x}{x^2-y^2}$;

4) $\dfrac{5}{x+y} + \dfrac{3x-3y}{x^2-y^2}$.

462. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a+3}{8a} \cdot \dfrac{2a^3}{a^2-9}$;

2) $\dfrac{a}{5a-5b} : \dfrac{2a^6}{a^2-b^2}$;

3) $\dfrac{a^2-100}{3a+30} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-20a+100}$;

4) $\dfrac{5b-5d}{b+d} \cdot \dfrac{2b+2d}{8d-8b}$.

§ 13 Арифметичний квадратний корінь

1. КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ ІЗ ЧИСЛА a

Ви вже знаєте, як знайти квадрат будь-якого числа. Наприклад: $3^2 = 9$; $(-3)^2 = 9$; $0^2 = 0$. Числа 3 і -3 є протилежними, а їх квадрати дорівнюють один одному. Таку властивість мають й інші протилежні числа. Так, квадрат кожного з протилежних чисел $\frac{3}{4}$ і $-\frac{3}{4}$ дорівнює числу $\frac{9}{16}$, а чисел 1 і -1 — числу 1. Особливим є число нуль — воно протилежне самому собі. Отже, **якщо число є квадратом деякого числа, то воно є квадратом і протилежного йому числа.**

? Чи може від'ємне число бути квадратом деякого числа? Ні, оскільки добуток двох чисел з однаковими знаками — число додатне.

Наведені міркування підказують, що рівняння $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ має два корені, які є протилежними числами. Наприклад, коренями рівняння $x^2 = 9$ є протилежні числа 3 і -3, а коренями рівняння $x^2 = 0$ — число 0, яке протилежне самому собі.

Квадратним коренем із числа a **називається число, квадрат якого дорівнює** a**.**

Наприклад:
числа 3 і -3 є квадратними коренями з числа 9;
числа $\frac{3}{4}$ і $-\frac{3}{4}$ є квадратними коренями з числа $\frac{9}{16}$;
числа 1 і -1 є квадратними коренями з числа 1;
число 0 є квадратним коренем із числа 0.

Зверніть увагу:
- $x^2 \geq 0$ для будь-якого x;
- квадратного кореня з від'ємного числа не існує.

2. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ ІЗ ЧИСЛА a

Ви вже знаєте, як знайти площу квадрата за його стороною. Розглянемо обернену задачу.

Задача 1. Площа квадрата дорівнює 9 см^2. Яка довжина його сторони?

Розв'язання. Нехай довжина сторони квадрата дорівнює a см. Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$a^2 = 9,$$
$$a = 3 \text{ або } a = -3.$$

Значення $a = -3$ не задовольняє умову задачі, оскільки довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом. Значення $a = 3$ задовольняє умову задачі. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 3 см.

Невід'ємне значення квадратного кореня з числа a називають *арифметичним квадратним коренем* із числа a.

Наприклад, арифметичним квадратним коренем із числа 9 є число 3, а з числа 0 — число 0.

Коротко записуємо: $\sqrt{a}$ — і говоримо: арифметичний квадратний корінь з a.

Знак $\sqrt{\ }$ називають *радикалом*. Він замінює термін «арифметичний квадратний корінь». Іноді слово «арифметичний» у цій назві опускають і говорять коротше: «квадратний корінь» або «корінь квадратний», але розуміють, що йдеться саме про арифметичний квадратний корінь.

У виразі $\sqrt{a}$ число a називають *підкореневим виразом*. Наприклад, у виразах $\sqrt{9}$ і $\sqrt{0}$ підкореневими виразами є відповідно числа 9 і 0.

Дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа a називають *добуванням квадратного кореня з числа a*.

Це *шоста арифметична дія*.

Отже, у задачі 1 достатньо було добути арифметичний квадратний корінь із числа 9.

Зверніть увагу:
щоб добути арифметичний квадратний корінь із числа a, потрібно знайти таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, щоб добути арифметичний квадратний корінь із числа 4, потрібно знайти таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює 4. Це число 2, оскільки $2^2 = 4$.

Коротко записуємо: $\sqrt{4} = 2$.

3. ПОРІВНЯННЯ АРИФМЕТИЧНИХ КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

Щоб порівняти арифметичні квадратні корені з двох чисел, достатньо знайти їх наближені значення, наприклад, за допомогою калькулятора. Порівняємо, для прикладу, $\sqrt{19}$ і $\sqrt{17}$. Для цього спочатку знаходимо: $\sqrt{19} \approx 4,3588989...$, $\sqrt{17} \approx 4,1231056...$. Оскільки $4,3588989... > 4,1231056...$, то $\sqrt{19} > \sqrt{17}$.

Чи можна порівняти арифметичні квадратні корені з двох чисел, не обчислюючи їх наближених значень? Так. Для цього можна скористатися такою властивістю арифметичних квадратних коренів:

$$\sqrt{a} > \sqrt{b}, \text{ якщо } a > 0,\ b \ge 0 \text{ і } a > b.$$

Задача 2. Порівняйте числа: 1) $\sqrt{8}$ і 3; 2) 2,6 і $\sqrt{6}$.

Розв'язання.

1. Оскільки $3 = \sqrt{9}$ і $8 < 9$, то $\sqrt{8} < \sqrt{9}$. Отже, $\sqrt{8} < 3$.

2. Оскільки $2,6 = \sqrt{2,6^2} = \sqrt{6,76}$ і $6,76 > 6$, то $\sqrt{6,76} > \sqrt{6}$.
Отже, $2,6 > \sqrt{6}$.

4. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

З означення арифметичного квадратного кореня випливають такі властивості:

1. $\sqrt{a} \ge 0$, якщо $a \ge 0$.
2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, якщо $a \ge 0$.
3. $\sqrt{a^2} = |a|$, якщо a — будь-яке число.
4. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, якщо $a \ge 0$ і $b \ge 0$.
5. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, якщо $a \ge 0$ і $b > 0$.

Доведемо властивість 4. Оскільки $a \ge 0$ і $b \ge 0$, то $a \cdot b \ge 0$. Піднесемо до квадрата вирази $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ і $\sqrt{ab}$, спираючись на властивість 2 та властивості степенів:

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b;\ \left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2=a\cdot b.$$

Отже, ліву і праву частини рівності ми звели до того самого виразу $a\cdot b\geq 0$. Тому $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

Властивість 5 можна довести аналогічно. Спробуйте зробити це самостійно.

Задача 3. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{100\cdot 16}$; 2) $\sqrt{225}$.

Розв'язання.

1. $\sqrt{100\cdot 16}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{16}=10\cdot 4=40.$

2. $\sqrt{225}=\sqrt{25\cdot 9}=5\cdot 3=15$.

Для обчислення $\sqrt{225}$ також можна скористатися таблицею квадратів чисел, яку подано на форзаці.

Зверніть увагу:
квадратний корінь можна добути, якщо підкореневий вираз розкласти на множники, що є квадратами чисел.

Задача 4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання.

1. $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8\cdot 2}=\sqrt{16}=4$. **2.** $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{72}{2}}=\sqrt{36}=6$.

Задача 5. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3^2}$; 2) $\sqrt{(-3)^2}$; 3) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$.

Розв'язання.

1. $\sqrt{3^2}=|3|=3.$

2. $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3.$

3. $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|$.

Оскільки $\sqrt{3}<\sqrt{5}$, то $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|=-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Отже, $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

5. ВНЕСЕННЯ МНОЖНИКА ПІД ЗНАК КОРЕНЯ

Під час розв'язування задач часто доводиться вносити множник під знак кореня. Розглянемо приклад.

Задача 6. Внесіть множник під знак кореня у виразі: 1) $3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2}$.

Розв'язання.

1. Оскільки $3\sqrt{2} = 3\cdot\sqrt{2}$, то множник, який потрібно внести під знак кореня, — це число 3. Оскільки $3 = \sqrt{3^2}$, то:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{3^2\cdot 2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18}.$$

2. Оскільки $\sqrt{(-3)^2} = |-3| \neq -3$, то під знак кореня не можна вносити число -3. Подамо даний вираз так: $-3\sqrt{2} = -1\cdot 3\cdot\sqrt{2}$. Звідси множник, який можна внести під знак кореня, — це число 3. Тоді:

$$-3\sqrt{2} = -1\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2} = -\sqrt{3^2\cdot 2} = -\sqrt{9\cdot 2} = -\sqrt{18}.$$

Зверніть увагу:
під знак кореня можна вносити лише невід'ємне число.

6. ВИНЕСЕННЯ МНОЖНИКА З-ПІД ЗНАКА КОРЕНЯ

Під час розв'язування задач часто доводиться виносити множник з-під знака кореня. Розглянемо приклад.

Задача 7.
Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{32}$.

Розв'язання.
Щоб винести множник з-під знака кореня, потрібно розкласти підкореневий вираз на множники так, щоб хоча б з одного множника можна було добути корінь:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

? Чи завжди можна винести множник з-під знака кореня? Ні. Наприклад, у виразі $\sqrt{15}$ не можна винести множник з-під знака кореня, оскільки число 15 не можна подати як добуток чисел, з яких хоча б одне є квадратом деякого числа.

Задача 8. Спростіть вираз:
1) $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{2}$.

Розв'язання.
1. У даній сумі підкореневі вирази обох доданків є однаковими, тому:

$$3\sqrt{3}+5\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(3+5) = \sqrt{3}\cdot 8 = 8\sqrt{3}.$$

2. Члени даного виразу мають різні підкореневі вирази 50, 8 і 2, але всі вони мають дільник 2. Перетворимо перші два члени виразу: $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$. Тоді одержуємо:

$$\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

Зверніть увагу:
додавати та віднімати квадратні корені можна лише тоді, коли підкореневі вирази є однаковими.

Дізнайтеся більше

Наближене значення квадратного кореня з числа можна знайти за допомогою ділення у стовпчик. Для цього потрібно виконати кілька кроків. Розглянемо їх на прикладі добування квадратного кореня з числа 310.

1. Розіб'ємо запис підкореневого виразу на пари цифр, починаючи з правого краю запису числа: 3′10. Одержали дві «пари»: у першій з них — число 3, а в другій — число 10.
2. Для числа першої «пари» знайдемо найбільше ціле число n, квадрат якого менший або дорівнює числу цієї пари. У верхньому правому куті записуємо n. Для числа 3 в першій «парі» $n = 1$, бо $1^2 = 1 < 3$.

$\sqrt{310}\approx$	1
-1	$1^2 = 1 < 3$

3. Від числа 3 віднімаємо 1 і до різниці 2 зносимо наступну пару цифр: 10. Число $n = 1$ подвоюємо й одержуємо число $m = 1\cdot 2 = 2$. Утворюємо добуток $m^*\cdot{}^*$=, де * — така найбільша цифра, що добуток $m^*\cdot{}^* < 210$. Виходить, що * = 7, оскільки $27\cdot 7 = 189 < 210$. Отже, у правому верхньому куті можна дописати другу цифру — це цифра 7.

$\sqrt{3\ 10} \approx$	17______
– 1	$1^2 = 1 < 3$
210 – 189	$2^* \cdot * =$ $\quad 2 = 1 \cdot 2$ $27 \cdot 7 = 189$

4. Від 210 віднімаємо 189. До різниці 21 треба знести наступну пару цифр, але в цілій частині числа 310 таких пар немає, тому в числі n після 17 ставимо кому, а до 21 дописуємо два нулі, оскільки 310 = 310,00. Далі число n = 17 подвоюємо й одержуємо число $k = 17 \cdot 2 = 34$. Утворюємо добуток $k^* \cdot * =$, де * — така найбільша цифра, що добуток $k^* \cdot * < 2100$. Виходить, що * = 6, тоді $346 \cdot 6 = 2076 < 2100$. Отже, у правому верхньому куті можна дописати третю цифру — це цифра 6.

$\sqrt{3\ 10} \approx$	17,6______
– 1	$1^2 = 1 < 3$
– 210 189	$2^* \cdot * =$ $\quad 2 = 1 \cdot 2$ $27 \cdot 7 = 189$
– 2100 2076	$34^* \cdot * =$ $\quad 34 = 17 \cdot 2$ $346 \cdot 6 = 2076$

Процедуру можна продовжувати до бажаного знака наближеного значення шуканого квадратного кореня.

З точністю до четвертого знака після коми $\sqrt{310} \approx 17{,}6068...$

Переконайтеся самостійно, що $\sqrt{2} \approx 1{,}4142...$, а $\sqrt{3} \approx 1{,}7320...$

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення квадратного кореня з числа a.
2. Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a?
3. Назвіть підкореневий вираз у записі $\sqrt{a}$.
4. Чи існує квадратний корінь з від'ємного числа?
5. Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь із числа 0?
6. Як порівнюють арифметичні квадратні корені?
7. Сформулюйте властивості арифметичного квадратного кореня.
8. Як внести множник під знак кореня?
9. Як винести множник з-під знака кореня?

Розв'яжіть задачі

463'. Чи правильно, що:
1) числа 2 і −2 є квадратними коренями з числа 4;
2) числа 5 і −5 є квадратними коренями з числа 10;
3) числа $\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{2}$ є квадратними коренями з числа $\frac{1}{4}$;
4) число 0 є квадратним коренем із числа 0?

464'. Чи правильно, що:
1) число −2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
2) число 2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
3) число 5 є арифметичним квадратним коренем із числа 10;
4) число $\frac{1}{2}$ є арифметичним квадратним коренем із числа $\frac{1}{4}$;
5) число $-\frac{1}{2}$ є арифметичним квадратним коренем із числа $\frac{1}{4}$;
6) число 0 є арифметичним квадратним коренем із числа 0?

465'. Назвіть підкореневий вираз арифметичного квадратного кореня:
1) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{3,1}$; 5) $\sqrt{m}$;
2) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; 6) $\sqrt{x}$.

466'. Чи правильно добули арифметичний квадратний корінь із числа:
1) $\sqrt{4}=-2$; 3) $\sqrt{36}=6$;
2) $\sqrt{9}=3$; 4) $\sqrt{64}=-8$?
Відповідь поясніть.

467'. Чи правильно порівняли арифметичні квадратні корені:
1) $\sqrt{3}<\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}<\sqrt{5}$;
2) $\sqrt{7}<\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{10}>\sqrt{11}$?
Відповідь поясніть.

468'. $\sqrt{a}$ — арифметичний квадратний корінь із числа $a (a>0)$. Чи правильно, що:
1) $\sqrt{a}<0$; 4) $\sqrt{a}\le 0$;
2) $\sqrt{a}=0$; 5) $\sqrt{a}\ge 0$?
3) $\sqrt{a}>0$;

469'. Чи є правильним твердження:
1) значення виразу $\sqrt{a}$ існує, якщо $a \geq 0$;
2) значення виразу $\sqrt{a}$ існує, якщо $a > 0$;
3) значення виразу $\sqrt{a}$ існує, якщо $a = 0$;
4) значення виразу $\sqrt{a}$ існує, якщо $a < 0$?

470'. Чи правильно, що для додатного числа a:
1) $\left(\sqrt{a}\right)^2 < 0$; 2) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$; 3) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = -a$; 4) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$?

471'. Яка з формул є правильною для невід'ємного числа a:
1) $\sqrt{a} = a$; 2) $\sqrt{a} = 2a$; 3) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; 4) $\sqrt{a} = a^2$?

472'. Яка з рівностей є правильною для додатних чисел x і y:
1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$;
2) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$;
3) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$;
4) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x - y}$?

473'. Яка з рівностей є правильною для будь-якого a:
1) $\sqrt{a} = a$;
2) $\sqrt{a^2} = |a|$;
3) $\sqrt{a^2} = a$;
4) $\sqrt{a} = a^2$?

474°. Чи існує квадратний корінь із числа:
1) -1; 2) 2; 3) -36; 4) 40?
Відповідь поясніть.

475°. Чи існує квадратний корінь із числа:
1) 3; 2) -9; 3) -16?
Відповідь поясніть.

476°. Знайдіть усі квадратні корені з числа:

1) 16; 2) 25; 3) 49; 4) 121; 5) 169; 6) 196;
7) 256; 8) 400; 9) 0,16; 10) 0,25; 11) 0,49; 12) 1,21;
13) 1,69; 14) 1,96; 15) 2,56; 16) 0,04; 17) $\dfrac{1}{16}$; 18) $\dfrac{1}{25}$;
19) $\dfrac{1}{49}$; 20) $\dfrac{1}{121}$; 21) $\dfrac{1}{169}$; 22) $\dfrac{1}{196}$; 23) $\dfrac{1}{256}$; 24) $\dfrac{1}{400}$.

477°. Знайдіть усі квадратні корені з числа:

1) 81; 5) 0,81; 9) $\frac{1}{81}$;

2) 100; 6) 0,01; 10) $\frac{1}{100}$;

3) 144; 7) 1,44; 11) $\frac{1}{144}$;

4) 225; 8) 2,25; 12) $\frac{1}{225}$.

478°. $\sqrt{a}$ — арифметичний квадратний корінь із числа a. Якими даними потрібно доповнити таблицю 21?

Таблиця 21

a	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	225	625
$\sqrt{a}$												

479°. Чи існує значення виразу:

1) $\sqrt{-7}$; 3) $\sqrt{0}$; 5) $\sqrt{5^2}$; 7) $\frac{5}{\sqrt{-4}}$;

2) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{(-8)^2}$; 6) $\sqrt{-3}+\sqrt{3}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{6}}$?

480°. Чи є правильним твердження:

1) якщо $2^2 = 4$, то $\sqrt{4} = 2$;
2) якщо $(-2)^2 = 4$, то $\sqrt{4} = -2$;
3) якщо $(-5)^2 = 25$, то $\sqrt{25} = 5$;
4) якщо $8^2 = 64$, то $\sqrt{64} = 8$?

Відповідь поясніть.

481°. Чи є правильним твердження:

1) якщо $10^2 = 100$, то $\sqrt{100} = 10$;
2) якщо $(-3)^2 = 9$, то $\sqrt{9} = -3$?

Відповідь поясніть.

482°. Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа:

1) 0,01; 3) 0,64; 5) 0,49; 7) 0,0001;
2) 0,04; 4) 0,36; 6) 0,0016; 8) 0,0004.

483°. Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа:

1) 0,09; 3) 0,25; 5) 0,0036;
2) 0,16; 4) 0,0049; 6) 0,0169.

484°. Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; 5) $\sqrt{\frac{49}{64}}$; 7) $\sqrt{\frac{9}{16}}$;

2) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt{\frac{9}{100}}$; 6) $\sqrt{\frac{49}{100}}$; 8) $\sqrt{\frac{49}{81}}$.

485°. Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt{\frac{25}{49}}$; 5) $\sqrt{\frac{25}{64}}$;

2) $\sqrt{\frac{1}{25}}$; 4) $\sqrt{\frac{36}{100}}$; 6) $\sqrt{\frac{81}{100}}$.

486°. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{5}$ і 0; 5) $\sqrt{21}$ і $-\sqrt{7}$; 9) $\sqrt{99}$ і 10;

2) 0 і $-\sqrt{15}$; 6) 9 і $-\sqrt{90}$; 10) $\sqrt{62}$ і 8;

3) $\sqrt{100}$ і -10; 7) $\sqrt{17}$ і 4; 11) 6 і $\sqrt{39}$;

4) -4 і $\sqrt{2}$; 8) 3 і $\sqrt{8}$; 12) $\sqrt{12}$ і 4.

487°. Порівняйте числа:

1) $-\sqrt{6}$ і 0; 5) $\sqrt{74}$ і 9;

2) 0 і $\sqrt{0,01}$; 6) 6 і $\sqrt{38}$;

3) -5 і $\sqrt{26}$; 7) 6 і $\sqrt{33}$;

4) $\sqrt{35}$ і $-\sqrt{37}$; 8) $\sqrt{101}$ і 10.

488°. Чи є правильною рівність:

1) $\left(\sqrt{8}\right)^2 = 16$; 3) $\left(\sqrt{10}\right)^2 = -10$;

2) $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$; 4) $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 3$?

489°. Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{4}\right)^2$; 5) $\left(-\sqrt{10}\right)^2$; 9) $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{0,2}\right)^2$; 10) $\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2$;

3) $\left(-\sqrt{3}\right)^2$; 7) $\left(\sqrt{0,99}\right)^2$; 11) $\left(\sqrt{\frac{21}{50}}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{9}\right)^2$; 8) $\left(\sqrt{1,1}\right)^2$; 12) $\left(\sqrt{\frac{33}{34}}\right)^2$.

490°. Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{0}\right)^2$; 5) $\left(-\sqrt{5,7}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{2}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{0,7}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

491°. Обчисліть:

1) $\sqrt{36\cdot 1}$; 6) $\sqrt{100\cdot 16\cdot 9}$;
2) $\sqrt{9\cdot 4}$; 7) $\sqrt{4\cdot 100\cdot 100}$;
3) $\sqrt{25\cdot 4}$; 8) $\sqrt{64\cdot 25\cdot 4}$;
4) $\sqrt{81\cdot 4}$; 9) $\sqrt{16\cdot 49\cdot 25}$;
5) $\sqrt{81\cdot 9}$; 10) $\sqrt{64\cdot 16\cdot 100}$.

492°. Обчисліть:

1) $\sqrt{4\cdot 1}$; 3) $\sqrt{25\cdot 100}$; 5) $\sqrt{64\cdot 36\cdot 4}$;
2) $\sqrt{9\cdot 64}$; 4) $\sqrt{16\cdot 4}$; 6) $\sqrt{100\cdot 1\cdot 25}$.

493°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{0,05}\cdot\sqrt{45}$;
2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}$; 7) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{0,5}\cdot\sqrt{0,5}$; 8) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$;
4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; 9) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{8}$;
5) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; 10) $\sqrt{80}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{0,02}$.

494°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}\cdot\sqrt{7}$;
2) $\sqrt{0,03}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 6) $\sqrt{0,3}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{0,5}$.

495°. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; 7) $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}}$;

2) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$;

3) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$; 6) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$; 9) $\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{10}}$.

496°. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$;

2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$.

497°. Обчисліть:

1) $\sqrt{4^2}$; 3) $\sqrt{0^2}$; 5) $\sqrt{1,3^2}$; 7) $\sqrt{(-0,3)^2}$;

2) $\sqrt{(-4)^2}$; 4) $\sqrt{(-90)^2}$; 6) $\sqrt{9,9^2}$; 8) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$.

498°. Обчисліть:

1) $\sqrt{3^2}$; 3) $\sqrt{11^2}$; 5) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$;

2) $\sqrt{(-3)^2}$; 4) $\sqrt{(-5,4)^2}$; 6) $\left(\sqrt{1\frac{3}{4}}\right)^2$.

499°. Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{2}$; 4) $5\sqrt{3}$; 7) $2\sqrt{7}$; 10) $3\sqrt{10}$;

2) $4\sqrt{2}$; 5) $3\sqrt{5}$; 8) $3\sqrt{7}$; 11) $3\sqrt{11}$;

3) $2\sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{6}$; 9) $2\sqrt{10}$; 12) $2\sqrt{13}$.

500°. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{5}$; 5) $7\sqrt{10}$;

2) $4\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{15}$.

501°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 5) $\sqrt{12}$; 9) $\sqrt{20}$; 13) $\sqrt{300}$;

2) $\sqrt{32}$; 6) $\sqrt{45}$; 10) $\sqrt{125}$; 14) $\sqrt{80}$;

3) $\sqrt{72}$; 7) $\sqrt{75}$; 11) $\sqrt{250}$; 15) $\sqrt{180}$;

4) $\sqrt{162}$; 8) $\sqrt{128}$; 12) $\sqrt{500}$; 16) $\sqrt{405}$.

502°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18}$; 3) $\sqrt{98}$; 5) $\sqrt{200}$; 7) $\sqrt{48}$;

2) $\sqrt{50}$; 4) $\sqrt{28}$; 6) $\sqrt{27}$; 8) $\sqrt{108}$.

503°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{25}-\sqrt{81}$; 5) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}$;

2) $\sqrt{25}+\sqrt{9}$; 6) $\sqrt{36}:\sqrt{4}+\sqrt{64}$;

3) $\sqrt{49}+\sqrt{0}+\sqrt{9}$; 7) $\sqrt{100}:2+3\cdot\sqrt{9}$;

4) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$; 8) $\sqrt{100}\cdot 8-5\cdot\sqrt{49}$.

504°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{4}+\sqrt{9}$; 5) $\sqrt{100}\cdot\sqrt{4}$;

2) $\sqrt{4}-\sqrt{64}$; 6) $\sqrt{0}\cdot\sqrt{81}+4\sqrt{16}$;

3) $\sqrt{16}:\sqrt{4}+2$; 7) $\sqrt{4}\cdot 2+3\cdot\sqrt{16}$;

4) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{64}$; 8) $\sqrt{36}\cdot 2:\sqrt{9}$.

505°. Чи правильно додали арифметичні квадратні корені:

1) $\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{10}$;
2) $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{10}$;
3) $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$?

506°. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$;
2) $7\sqrt{3}-\sqrt{3}$;
3) $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}$;
4) $9\sqrt{11}-2\sqrt{11}$;
5) $3\sqrt{21}-4\sqrt{21}$;
6) $8\sqrt{15}+2\sqrt{15}-10\sqrt{15}$;
7) $4\sqrt{7}-3\sqrt{7}+\sqrt{7}$;
8) $10\sqrt{10}+5\sqrt{10}-2\sqrt{10}$.

507°. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{10}+\sqrt{10}$;
2) $-\sqrt{7}+\sqrt{7}$;
3) $10\sqrt{23}-20\sqrt{23}-30\sqrt{23}$;
4) $8\sqrt{2}-\sqrt{2}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$.

508°. Виконайте множення:

1) $\sqrt{10}(\sqrt{10}-5)$;
2) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$;
3) $(\sqrt{18}+1)\sqrt{2}$;
4) $-\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;
5) $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-3)$;
6) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-3)$;
7) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$;
8) $(\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-1)$;
9) $(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)$;
10) $(\sqrt{6}+4)(\sqrt{6}-4)$;
11) $(\sqrt{5}+6)(\sqrt{5}-6)$;
12) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$;
13) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$;
14) $(\sqrt{13}+\sqrt{15})(\sqrt{13}-\sqrt{15})$;
15) $(\sqrt{2}+1)^2$;
16) $(5\sqrt{2}-1)^2$;
17) $(\sqrt{3}+1)^2$;
18) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$;
19) $(\sqrt{10}-\sqrt{5})^2$;
20) $(2\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$.

509°. Виконайте множення:

1) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$;
2) $\sqrt{5}(6+\sqrt{5})$;
3) $(\sqrt{8}+1)(\sqrt{2}-2)$;
4) $(\sqrt{15}+4)(\sqrt{15}-4)$;
5) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$;
6) $(\sqrt{21}+\sqrt{11})(\sqrt{21}-\sqrt{11})$;
7) $(\sqrt{2}-1)^2$;
8) $(\sqrt{5}-2)^2$.

510°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
2) $\dfrac{8}{\sqrt{5}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}}$;
3) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}-\dfrac{2}{\sqrt{6}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}}$;
4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$;
5) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$;
6) $\dfrac{1}{1-\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-1}$.

511°. Спростіть вираз:

1) $\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}-\frac{3}{\sqrt{5}-1}$.

512. Скориставшись таблицею квадратів, обчисліть:

1) $\sqrt{16900}$; 9) $\sqrt{1,44}$;
2) $\sqrt{409600}$; 10) $\sqrt{0,0144}$;
3) $\sqrt{202500}$; 11) $\sqrt{0,0441}$;
4) $\sqrt{57600}$; 12) $\sqrt{0,3721}$;
5) $\sqrt{129600}$; 13) $\sqrt{0,009604}$;
6) $\sqrt{7840000}$; 14) $\sqrt{29,16}$;
7) $\sqrt{152100}$; 15) $\sqrt{0,000625}$;
8) $\sqrt{56250000}$; 16) $\sqrt{0,00005184}$.

513. Скориставшись таблицею квадратів, обчисліть:

1) $\sqrt{52900}$; 5) $\sqrt{0,0196}$;
2) $\sqrt{168100}$; 6) $\sqrt{1,96}$;
3) $\sqrt{688900}$; 7) $\sqrt{0,007396}$;
4) $\sqrt{12250000}$; 8) $\sqrt{0,00000729}$.

514. Обчисліть:

1) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; 3) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$; 5) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$;
2) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 4) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; 8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

515. Обчисліть:

1) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt{1\frac{32}{49}}$; 4) $\sqrt{2\frac{2}{49}}$; 5) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$.

516. Порівняйте числа:

1) $4\sqrt{3}$ і 7; 5) $5\sqrt{2}$ і 7; 9) $2\sqrt{0,01}$ і $\sqrt{0,09}$;
2) $\sqrt{28}$ і $2\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{3}$ і $3\sqrt{2}$; 10) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ і $\sqrt{0,25}$;
3) $3\sqrt{5}$ і 7; 7) $5\sqrt{6}$ і $6\sqrt{5}$; 11) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ і $\sqrt{2}$;
4) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{18}$; 8) $14\sqrt{2}$ і $8\sqrt{7}$; 12) $\sqrt{\frac{1}{0,01}}$ і $\sqrt{105}$.

517. Порівняйте числа:

1) $5\sqrt{2}$ і 7;
2) $4\sqrt{5}$ і 9;
3) $4\sqrt{2}$ і $\sqrt{32}$;
4) $10\sqrt{11}$ і $11\sqrt{10}$;
5) $6\sqrt{7}$ і $7\sqrt{6}$;
6) $4\sqrt{0,25}$ і $\sqrt{0,49}$;
7) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ і $\sqrt{0,25}$;
8) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ і $\sqrt{2}$.

518. Між якими двома послідовними цілими числами на координатній прямій розміщується число:

1) $\sqrt{2}$;
2) $-\sqrt{6}$;
3) $\sqrt{5}$;
4) $-\sqrt{10}$;
5) $\sqrt{14}$;
6) $\sqrt{21}$;
7) $3\sqrt{3}$;
8) $5\sqrt{5}$;
9) $2\sqrt{6}$;
10) $-2\sqrt{7}$;
11) $2\sqrt{1,1}$;
12) $-3\sqrt{0,3}$?

519. Між якими двома послідовними цілими числами на координатній прямій розміщується число:

1) $\sqrt{3}$;
2) $-\sqrt{7}$;
3) $\sqrt{15}$;
4) $\sqrt{23}$;
5) $-3\sqrt{6}$;
6) $5\sqrt{2}$;
7) $2\sqrt{1,2}$;
8) $5\sqrt{0,1}$?

520. Обчисліть:

1) $(3\sqrt{2})^2$;
2) $(2\sqrt{3})^2$;
3) $(-5\sqrt{5})^2$;
4) $(2\sqrt{2})^2$;
5) $(-3\sqrt{5})^2$;
6) $(2\sqrt{0,4})^2$;
7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
8) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$;
9) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^2$.

521. Обчисліть:

1) $(5\sqrt{3})^2$;
2) $(-10\sqrt{7})^2$;
3) $(2\sqrt{0,5})^2$;
4) $\left(-\frac{\sqrt{11}}{5}\right)^2$.

522. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}+\sqrt{12,96}$;
2) $\sqrt{0}\cdot\sqrt{2\frac{7}{9}}-\sqrt{1,44}$;
3) $\sqrt{0}+\sqrt{3\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{56}$;
4) $\sqrt{2\frac{1}{11}}\cdot\sqrt{23}\cdot\sqrt{1\frac{2}{9}}$;
5) $\sqrt{10}:\sqrt{3\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{0,01}$;
6) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$.

523. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{1,21}\cdot\sqrt{\frac{1}{44}}+\sqrt{1,8}\cdot\sqrt{20}$;

2) $\sqrt{0}:\sqrt{5\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3,84}$;

3) $\sqrt{3\frac{4}{15}}\cdot\sqrt{0,75}\cdot\sqrt{1\frac{4}{5}}$;

4) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{0,02}}+\frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{1,6}}$.

524. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{10}\left(\sqrt{28,9}-\sqrt{5,29}\right)$;

2) $\sqrt{\frac{1}{8}}\left(\sqrt{72}+\sqrt{32}\right)$;

3) $(\sqrt{1,3}+3\sqrt{0,5})(\sqrt{1,3}-3\sqrt{0,5})$;

4) $\sqrt{65^2-16^2}$;

5) $\sqrt{37^2-12^2}$;

6) $(\sqrt{10}+1)^2+(\sqrt{10}-1)^2$;

7) $(\sqrt{6}+2)^2-(\sqrt{6}-2)^2$;

8) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$;

9) $(\sqrt{8}+2)^2+(\sqrt{8}-2)^2$.

525. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,9}(\sqrt{0,1}+\sqrt{0,4})$;

2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{20}+\sqrt{0,4}\right)$;

3) $\sqrt{26^2-10^2}$;

4) $\sqrt{58^2-42^2}$;

5) $(\sqrt{5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2$;

6) $(2+\sqrt{11})^2+(2-\sqrt{11})^2$.

526. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;

3) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$;

4) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$;

5) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$;

6) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}$;

7) $\sqrt{(\sqrt{15}-2\sqrt{3})^2}$;

8) $\sqrt{(3\sqrt{3}-5)^2}$;

9) $\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}$;

10) $\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}-\sqrt{(3+\sqrt{7})^2}$.

527. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(5-\sqrt{23})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{12})^2}$;

4) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}$;

5) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$.

528. Внесіть множник під знак кореня:

1) $0,1\sqrt{3}$; 4) $-8\sqrt{0,2}$; 7) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 10) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$;

2) $-3\sqrt{0,1}$; 5) $-2,4\sqrt{2}$; 8) $-\frac{4}{5}\sqrt{0,2}$; 11) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$;

3) $1,1\sqrt{5}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$; 9) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$; 12) $\frac{2}{7}\sqrt{1\frac{1}{6}}$.

529. Внесіть множник під знак кореня:

1) $0,3\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; 5) $7\sqrt{0,1}$;

2) $-5\sqrt{0,2}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{15}$; 6) $3\sqrt{\frac{1}{2}}$.

530. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{0,03}$; 3) $\sqrt{1,69}$; 5) $\sqrt{\frac{8}{15}}$; 7) $\sqrt{2\frac{2}{7}}$;

2) $\sqrt{0,08}$; 4) $\sqrt{22,5}$; 6) $\sqrt{\frac{45}{49}}$; 8) $\sqrt{1\frac{11}{13}}$.

531. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{0,05}$; 3) $\sqrt{28,9}$; 5) $\sqrt{\frac{7}{36}}$;

2) $\sqrt{0,121}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{20}}$; 6) $\sqrt{3\frac{4}{15}}$.

532. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{12}+\sqrt{72}$;
2) $\sqrt{45}-2\sqrt{27}$;
3) $\sqrt{2}+2$;
4) $3\sqrt{11}-11$;
5) $2\sqrt{7}-14$;
6) $-36+\sqrt{6}$;
7) $\sqrt{15}+3\sqrt{30}+\sqrt{45}$;
8) $5\sqrt{10}-\sqrt{50}+\sqrt{200}$.

533. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{30}-\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{17}+3\sqrt{34}$;
3) $\sqrt{5}+5$;
4) $10-\sqrt{10}$;
5) $\sqrt{3}+6$;
6) $\sqrt{12}-\sqrt{15}+3\sqrt{42}$.

534. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{4,5}}{\sqrt{10}-1}$;
2) $\frac{\sqrt{48}+2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+1}$;
3) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{0,12}+3}$;
4) $\frac{\sqrt{225}+2\sqrt{625}}{\sqrt{169}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{0,3}-\sqrt{0,6}}{1-\sqrt{2}}$;

6) $\dfrac{\sqrt{0,0441}+42\sqrt{0,001}+100}{\sqrt{0,0121}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{1,44}+2\sqrt{3,6}+9}{3+2\sqrt{0,3}}-0,4\sqrt{7,5}$;

8) $\dfrac{2}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{2}{5-2\sqrt{6}}$;

9) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{15}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

10) $\dfrac{1}{8+2\sqrt{7}}+\dfrac{1}{8-2\sqrt{7}}$.

535. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}$;

2) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+2}$;

3) $\dfrac{\sqrt{3,24}+\sqrt{27}}{\sqrt{0,12}+3}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2,25}+2\sqrt{3,3}+\sqrt{4,84}}{\sqrt{13,69}}$;

5) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}+\dfrac{5}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$;

6) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{0,12}+3}$;

7) $\dfrac{\sqrt{14,4}+2\sqrt{3,6}}{\sqrt{0,25}}$.

536. Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{2}+\sqrt{8}$;

2) $5\sqrt{12}-\sqrt{27}$;

3) $\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{45}$;

4) $3\sqrt{10}-\sqrt{40}+\sqrt{90}$;

5) $\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}$;

6) $2\sqrt{13,5}-2\sqrt{24}+\sqrt{7,26}$;

7) $\sqrt{9,8}-0,2\sqrt{45}+\sqrt{2,45}$.

537. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7}+\sqrt{28}$;

2) $10\sqrt{0,2}-\sqrt{3,2}$;

3) $\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}$;

4) $\sqrt{2,42}+\sqrt{72}-3\sqrt{3,38}$.

538*. Доведіть, що:

1) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$;

2) $\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=1$;

3) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1$;

4) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}=1$;

5) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=1$;

6) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}=1$.

539*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{2\sqrt{2}+3}$;

4) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

540*. Доведіть, що:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}=2$;

3) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=4$;

4) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}=2\sqrt{2}$.

541*. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{4\sqrt{3}}$ і $\sqrt{3\sqrt{4}}$;

2) $4-\sqrt{5}$ і $3-\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{2\sqrt{5}}$ і $4-\sqrt{3}$;

4) $1+\sqrt{2}$ і $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Проявіть компетентність

542. Підлога кімнати має форму квадрата з площею 36 м^2.
1. Які розміри кімнати?
2. Скільки метрів багету знадобиться, щоб оздобити всі стики стелі зі стінами в кімнаті?

Задачі на повторення

543. Запишіть як степінь з основою 3:
1) $9^{-3}\cdot 3^{5}$;
2) $27^{2}\cdot 81^{-4}$;
3) $(3^{-6})^{8}\cdot(9^{-1})^{-2}$;
4) $(81^{-2})^{3}\cdot(27^{-3})^{-4}$.

544. Розташуйте числа -19, 41, $-6{,}7$, $-2\frac{3}{5}$, $0{,}25$, 0, $-1\frac{1}{2}$ в порядку їх зростання.

545. Серед чисел $6, -11, \frac{2}{6}, 0{,}8, -10{,}2, -1\frac{2}{9}, -\frac{32}{8}, 0, 4{,}6, -5{,}05$ оберіть:
1) натуральні;
2) цілі;
3) раціональні.

§ 14 Множина та її елементи. Числові множини

1. ЩО ТАКЕ МНОЖИНА

Поняття «*множина*» належить до первинних понять математики. Воно не має точного визначення. Такими поняттями в математиці є також поняття «число», «точка». Прикладами множин можуть бути множина літер українського алфавіту, множина учнів 8-го класу, множина зірок Всесвіту, множина парних чисел. Множину розуміють як сукупність (набір, групу тощо) об'єктів, які об'єднані деякою спільною ознакою. Об'єкти, з яких складається множина, називають *елементами множини*. Для позначення множин зазвичай використовують великі латинські літери A, B, C..., а для позначення елементів множин — малі латинські літери a, b, c...

Якщо множина A складається з елементів a, b і c, то це записують так:

$$A = \{a; b; c\}.$$

Як записати, що a є елементом множини A, а d не є елементом цієї множини? Для цього використовують спеціальні знаки:

$\in$ — означає «належить»; $\notin$ — означає «не належить».

Коротко це записують так: $a \in A$, $d \notin A$.

Множину можна задати переліком її елементів. У такий спосіб задано, наприклад, множину A.

Множину також можна задати, описавши її характеристичні властивості. Наприклад: C — множина місяців року; $M = \{x \mid x$ — цифра десяткової системи числення$\}$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною*. Для її позначення використовують спеціальний знак: $\varnothing$.

Розглянемо дві множини: $A = \{a; b; c\}$ і $B = \{b; c\}$. Як бачимо, усі елементи множини B належать множині A. Інакше говорять: множина B міститься в множині A. Тому множину B називають *підмножиною* множини A.

Коротко це записують так: $B \subset A$.

Наприклад, множина дівчаток 8-го класу є підмножиною множини всіх учнів цього класу, а множина всіх учнів 8-го класу, своєю чергою, є підмножиною множини учнів школи і т. д.

2. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

У 5-му класі ви вивчали числа, які використовують для лічби, — натуральні числа. Усі натуральні числа утворюють *множину натуральних чисел*. Отже, кожне натуральне число є елементом множини натуральних чисел.

Множину натуральних чисел позначають буквою N:

$$N = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

У 6-му класі ви вивчали й інші числові множини — множину цілих чисел і множину раціональних чисел.

Множину цілих чисел утворюють натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль:

$$Z = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

Множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел:

$$N \subset Z.$$

Цілі числа та дробові числа утворюють *множину раціональних чисел*. Будь-яке раціональне число можна подати як нескоротний дріб, у якому чисельник є цілим числом, а знаменник — натуральним числом:

$$Q = \left\{\frac{m}{n}, \text{ де } m \in Z, n \in N\right\}.$$

Множина цілих чисел є підмножиною раціональних чисел.

Можемо записати: $N \subset Z \subset Q$.

Дріб $\frac{m}{n}$ можна подати або як *скінченний десятковий дріб*, або як *нескінченний періодичний десятковий дріб*. Наприклад:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ — скінченний десятковий дріб;

$\frac{1}{9} = 0{,}111111\ldots = 0{,}(1)$ — нескінченний десятковий періодичний дріб з періодом 1.

Зауважимо, що скінченний десятковий дріб також можна подати як нескінченний періодичний десятковий дріб з періодом 0:

$$0{,}25 = 0{,}2500000\ldots = 0{,}25(0).$$

Зверніть увагу:
кожне раціональне число можна подати як нескінченний періодичний десятковий дріб. І навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є раціональним числом.

Задача 1.
Запишіть як нескінченний періодичний десятковий дріб число:

1) 5; 3) $\frac{5}{12}$;

2) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{7}$.

Укажіть період одержаного дробу.

Розв'язання.

1. $5 = 5{,}0000... = 5{,}(0)$, період дробу — число 0.

2. $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}20000... = 0{,}2(0)$, період дробу — число 0.

3. $\frac{5}{12} = 0{,}4166666... = 0{,}41(6)$, період дробу — число 6.

4. $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857142857... = 0{,}(142857)$, період дробу — число 142857.

Числа, які не можна подати як нескінченні періодичні десяткові дроби, називаються *ірраціональними числами*.

У десятковому записі ірраціональних чисел не існує періоду. Це — *нескінченні неперіодичні десяткові дроби*. Наприклад: $0{,}1234567891011121314...$

Множина ірраціональних чисел має нескінченно багато елементів. Її позначають буквою *I*. Наведемо приклади ірраціональних чисел.

Найбільш відомим ірраціональним числом є число π:

$$\pi = 3{,}1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 502...$$

Прикладами ірраціональних чисел також є числа:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135...;$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508...;$$
$$\sqrt{5} = 2{,}2360679...;$$
$$\sqrt{7} = 2{,}6457513... \text{ тощо.}$$

? Чи кожний квадратний корінь з раціонального числа є ірраціональним числом? Ні. Наприклад, число $\sqrt{100} = 10$ є раціональним числом, більше того, є натуральним числом.

3. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Множина чисел, яку утворюють разом множина раціональних чисел і множина ірраціональних чисел, називається *множиною дійсних чисел*.

Множина дійсних чисел має нескінченно багато елементів. Її позначають буквою R.

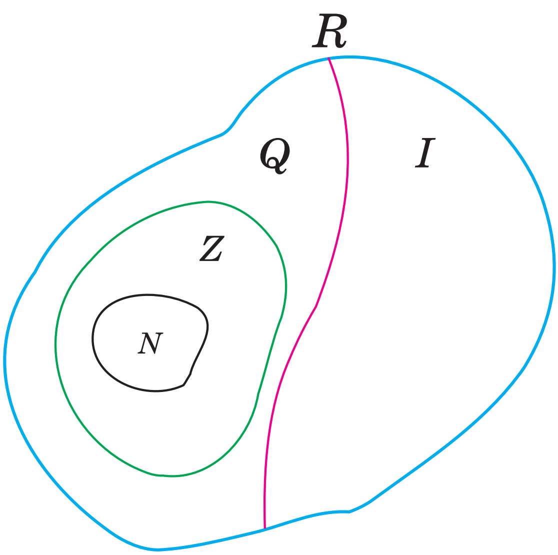
Множина раціональних чисел є підмножиною дійсних чисел: $Q \subset R$.

Множина ірраціональних чисел є підмножиною дійсних чисел: $I \subset R$.

Зверніть увагу:
кожне дійсне число є або раціональним числом, або ірраціональним числом.

Тепер ви знаєте такі числові множини: множина натуральних чисел, множина цілих чисел, множина раціональних чисел, множина ірраціональних чисел, множина дійсних чисел. Однак математики розглядають ще й інші числові множини. Про них ви дізнаєтесь у старшій школі та університеті.

Співвідношення між натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними та дійсними числами показано на малюнку 38.



Мал. 38

Задача 2. Серед чисел 0, $-\sqrt{19}$, 0,09, 12, $\sqrt{81}$ укажіть числа: 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні; 4) ірраціональні; 5) дійсні.

Розв'язання.

1. Натуральними є числа 12 і $\sqrt{81}$, оскільки $\sqrt{81} = 9$.

2. Цілими є числа 12, $\sqrt{81}$ і 0.

3. Раціональними є числа 0, 0,09, 12, $\sqrt{81}$.

4. Ірраціональним є число $-\sqrt{19}$.

5. Дійсними є всі дані числа: 0, $-\sqrt{19}$, 0,09, 12, $\sqrt{81}$.

Зверніть увагу:

- кожне натуральне число є і цілим числом, і раціональним числом, і дійсним числом;
- кожне ціле число є як раціональним числом, так і дійсним числом;
- кожне ірраціональне число є дійсним числом;
- не кожне дійсне число є раціональним числом;
- не кожне дійсне число є ірраціональним числом.

Для дійсних чисел виконуються ті самі властивості додавання та множення, що й для раціональних чисел.

Задача 3. Порівняйте числа: 1) 2,34 і 2,(3); 2) 1,(41) і $\sqrt{2}$.

Розв'язання. **1.** Перше з даних чисел є скінченним десятковим дробом, а друге — нескінченним періодичним десятковим дробом. Порівняння десяткових дробів, згідно з відомим правилом, здійснюється порозрядно. Отже, щоб виконати порівняння, потрібно даний періодичний дріб подати в розгорнутому вигляді: 2,(3) = 2,333... Оскільки 2,34 > 2,333..., то 2,34 > 2,(3).

2. Обидва числа є нескінченними дробами: перший дріб є періодичним з періодом 41, а другий — неперіодичним. Подамо обидва дроби в розгорнутому вигляді. Тоді одержуємо:

1,(41) = 1,4141... і $\sqrt{2}$ = 1,4142...

Оскільки 1,4141... < 1,4142..., то 1,(41) < $\sqrt{2}$.

Кожне дійсне число можна позначити на координатній прямій, і навпаки — кожній точці координатної прямої відповідає деяке дійсне число. Інакше можна сказати, що існує *взаємно однозначна відповідність* між множиною точок координатної прямої та множиною дійсних чисел. Між будь-якими двома цілими числами міститься нескінченна кількість як раціональних чисел, так і ірраціональних чисел, а отже, і дійсних чисел.

Дізнайтеся більше

1. Терміни «раціональне число» та «ірраціональне число» походять від латинського слова *ratio* — розум (буквальний переклад: «раціональне число — розумне число», «ірраціональне число — нерозумне число»).
2. Число π — число, яке дорівнює відношенню довжини кола до довжини його діаметра. Про це число пишуть картини, знімають фільми, його «грають» на музичних інструментах, йому присвячують вірші та свята, його шукають і знаходять у священних текстах, установлюють рекорди щодо його запам'ятовування. Так, китаєць Лю Прат установив рекорд із запам'ятовування послідовності цифр числа π. Протягом 24 год 4 хв Лю Прат назвав 67 890 знаків після коми, не допустивши жодної помилки.

У світі святкують міжнародний день числа «Пі» —14 березня. Святкування починається рівно о 1 год 59 хв 26 с. Таким чином, дата (згідно із західною традицією, спочатку записують місяць, а потім день: 03.14) і час початку святкування відповідають першим знакам числа π — 3,1415926.

Цікаво, що Альберт Ейнштейн народився в день числа π (3.14.1879).

Вважають, що встановлення найбільш точного значення числа π серед стародавніх учених належить Архімеду. Учений, досліджуючи відношення периметрів вписаного й описаного 96-кутників до діаметра кола, одержав: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Архімед виразив наближене значення числа π у вигляді дробу $\frac{22}{7}$, який на його честь називають *архімедовим числом*.

У 2010 р. співробітник компанії «Yahoo» математик Ніколас Чже зміг обчислити в числі π два квадрильйони (2^{10}) знаків після коми. Для того щоб просто записати його на папері, знадобиться паперова стрічка, більш як два мільярди кілометрів завдовжки. Якщо розгорнути такий запис, кінець стрічки вийде за межі Сонячної системи.

Позначення π (від початкової літери грецьких слів περιφερεια — коло, периферія та περιμετρος — периметр) уперше трапляється в книзі «Новий вступ до математики» (1706 р.) британського вченого Уільяма Джонса. Загальновизнаним це позначення стало після праць Леонарда Ейлера в 1737 р.

Пам’ятник числу π перед будівлею Музею мистецтв у Сієтлі

3. Ви вже знаєте, що розвиток математики постійно зумовлював потребу в розширенні числових множин.

Сума й добуток натуральних чисел завжди є натуральним числом, а різниця натуральних чисел не завжди є натуральним числом. Тому натуральні числа потребували розширення. Цілі числа і є розширенням множини натуральних чисел.

Сума, різниця й добуток цілих чисел завжди є цілим числом, а частка цілих чисел не завжди є цілим числом. Тому цілі числа теж потребували розширення. Раціональні числа і є розширенням множини цілих чисел.

Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на 0) раціональних чисел завжди є раціональним числом, а квадратний корінь із невід’ємного раціонального числа не завжди є раціональним числом. Тому раціональні числа також потребували розширення. Дійсні числа і є розширенням множини раціональних чисел.

Існує розширення множини дійсних чисел. Але про це ви дізнаєтеся пізніше.

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке множина; підмножина. Наведіть приклади.
2. Як позначають множину натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел?
3. Які числа називають ірраціональними?
4. Як позначають множину ірраціональних чисел?
5. Які числа називаються дійсними?
6. Як позначають множину дійсних чисел?
7. Як пов’язані між собою раціональні, ірраціональні та дійсні числа?

Розв'яжіть задачі

546'. Назвіть елементи:
1) множини днів тижня;
2) множини планет Сонячної системи;
3) множини парних натуральних чисел, які менші від числа 10.

547'. Чи правильно, що:
1) множина днів тижня є підмножиною днів місяця;
2) множина, що складається із Землі та Місяця, є підмножиною множини планет Сонячної системи;
3) множина одноцифрових натуральних чисел є підмножиною множини парних натуральних чисел?

548'. Чи правильно, що дане число є елементом множини раціональних чисел:

1) 5;	3) $\sqrt{2}$;	5) 5,111...;	7) −5,1;
2) 0;	4) $\sqrt{9}$;	6) $\frac{4}{7}$;	8) $-\sqrt{3}$?

549'. Чи правильно, що дане число є елементом множини ірраціональних чисел:

1) 5;	3) $\sqrt{2}$;	5) 5,111...;	7) −5,1;
2) 0;	4) $\sqrt{9}$;	6) $\frac{4}{7}$;	8) $-\sqrt{3}$?

550°. Наведіть приклад множини та її підмножини з довкілля.

551°. Утворіть множину із членів своєї родини. Наведіть приклади її підмножин.

552°. Дано множину $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Яка із заданих множин є підмножиною множини A:

1) $B = \{1; 5; 10\}$;	4) $E = \{3\}$;
2) $C = \{2; 4; 6\}$;	5) $M = \{6; 7; 8; 9\}$;
3) $D = \{10; 20\}$;	6) $N = \{1\}$?

553°. Дано множину $M = \{3; 6; 9; 12; 15\}$. Яка із заданих множин є підмножиною множини M:
1) $A = \{3; 9; 27\}$;   2) $B = \{6; 15\}$;   3) $C = \{3; 30\}$?

554°. Запишіть усі підмножини множини:
1) $A = \{10; 20; 30\}$;
2) $B = \{100; 1000; 10000\}$;
3) $C = \{-100; 0; 100\}$.

555°. Укажіть період:

1) 4,1111...;
2) 2,35;
3) 0,3535353...;
4) 5,7777...;
5) 2,123123123...;
6) −34;
7) 100,1;
8) 99;
9) 9,010101...;
10) 0,445566445566....

Запишіть дане число як періодичний дріб.

556°. Укажіть період:

1) 8;
2) 3,01;
3) 2,2222...;
4) 1,554444...;
5) 0,523523523....

Запишіть дане число як періодичний дріб.

557°. Запишіть як нескінченний періодичний десятковий дріб число:

1) 2,(8);
2) 19,(3);
3) 1,3(25);
4) 5,9(87);
5) 21,88(9);
6) 4,5(0);
7) 21,(0);
8) 5,(0).

558°. Запишіть як нескінченний періодичний десятковий дріб число:

1) 3,(4);
2) 5,5(12);
3) 7,54(0);
4) 6,(0).

559°. Чи є правильним твердження:

1) $\frac{1}{9}$ — дійсне число;
2) 5 — раціональне число;
3) −11 — дійсне число;
4) $-\frac{2}{7}$ — ірраціональне число;
5) −11 — раціональне число;
6) 5 — ціле число;
7) 2,4444... — раціональне число;
8) 1,55555... — дійсне число;
9) $\sqrt{7}$ — раціональне число;
10) π — ціле число;
11) π — дійсне число;
12) $\sqrt{11}$ — натуральне число?

560°. Чи є правильним твердження:

1) $\frac{2}{3}$ — дійсне число;

2) 8 — раціональне число;

3) -11 — дійсне число;

4) $-\frac{1}{5}$ — ірраціональне число?

561°. Чи є правильним твердження:

1) $5 \in N$;
2) $5 \in Z$;
3) $5 \in Q$;
4) $5 \in I$;
5) $5 \in R$;
6) $-5 \in N$;
7) $-5 \in Z$;
8) $-5 \in Q$;
9) $-5 \in I$;
10) $-5 \in R$;
11) $\frac{1}{5} \in N$;
12) $\frac{1}{5} \in Z$;
13) $\frac{1}{5} \in Q$;
14) $\frac{1}{5} \in I$;
15) $\frac{1}{5} \in R$;
16) $\sqrt{5} \in N$;
17) $\sqrt{5} \in Z$;
18) $\sqrt{5} \in Q$;
19) $\sqrt{5} \in I$;
20) $\sqrt{5} \in R$?

562°. Чи є правильним твердження:

1) $2 \in N$;
2) $-2 \in Z$;
3) $\sqrt{2} \in Q$;
4) $\frac{1}{2} \in I$;
5) $-\sqrt{2} \in R$?

563°. Серед чисел $-\frac{12}{6}$, $-3,(9)$, 0, $\sqrt{25}$, $7,8888...$, -5, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\sqrt{8}$, 22, $\frac{\sqrt{17}}{2}$ оберіть числа:

1) натуральні;
2) цілі;
3) раціональні;
4) ірраціональні;
5) дійсні.

564°. Серед чисел $-0,(4)$, 1, $-\frac{9}{3}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{4}$, $-\frac{3}{5}$, $1,0333...$, 9, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$ оберіть числа:

1) натуральні;
2) цілі;
3) раціональні;
4) ірраціональні;
5) дійсні.

565°. Наведіть приклад числа, яке:

1) є дійсним, але не є раціональним;
2) є раціональним, але не є цілим;
3) є від'ємним ірраціональним.

566°. Наведіть приклад числа, яке:

1) є дійсним, але не є ірраціональним;
2) є раціональним, але не є натуральним;
3) є від'ємним раціональним.

567°. Спираючись на координатну пряму, між числами -7 і -4 визначте кількість чисел:

1) натуральних;
2) цілих;
3) раціональних;
4) ірраціональних;
5) дійсних.

568°. Порівняйте числа:

1) 4,105 і 5,01;
2) 3,056 і 3,0(5);
3) 5,1412 і 5,(14);
4) 3,056 і 3,0(5);
5) 10 і 9,(9);
6) 4,3(4) і 4,4(3);
7) 0,0(5) і 1,00(5);
8) 3,056 і 3,0(5).

569°. Порівняйте числа:

1) 15 і 15,(1);
2) 5,342 і 5,333...;
3) 0,165 і 0,16(5);
4) 2,999... і 2,(10).

570. Чи є підмножиною множини Z дана множина:

1) $A = \{1; 2; 3\}$;
2) $C = \{0\}$;
3) $D = \{-1; 1\}$;
4) $B = \{x \mid x$ — парне натуральне число$\}$?

571. Чи є підмножиною множини I дана множина:

1) $A = \{1; \sqrt{2}; 3\}$;
2) $B = \{\sqrt{3}\}$;
3) $C = \{x \mid x$ — раціональне число$\}$?

572. Чи є правильним твердження:
1) $N \subset I$;
2) $I \subset Q$;
3) $Q \subset Z$;
4) $Q \subset R$;
5) $R \subset I$;
6) $Q \subset I$?

573. Дано множини: $A = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $C = \{-4; -2; 2; 4\}$, $D = \{0\}$. Запишіть множину:
1) M, для якої $M \subset A$, $M \subset C$;
2) P, для якої $A \subset P$, $B \subset P$;
3) N, для якої $N \subset A$, $N \subset B$, $B \subset P$;
4) H, для якої $A \subset H$, $B \subset H$, $D \subset H$;
5) F, для якої $B \subset F$, $F \subset A$, $F \subset C$;
6) K, для якої $D \subset K$, $K \subset C$.

574. Запишіть як нескінченний періодичний десятковий дріб число:
1) $\frac{1}{2}$;
2) $\frac{3}{8}$;
3) $\frac{5}{6}$;
4) $\frac{1}{13}$;
5) $-\frac{5}{11}$;
6) $-1\frac{2}{7}$.

Укажіть період одержаного дробу.

575. Запишіть як нескінченний періодичний десятковий дріб число:
1) $\frac{1}{3}$;
2) $\frac{2}{5}$;
3) $\frac{7}{9}$;
4) $\frac{1}{15}$;
5) $-\frac{3}{14}$.

Укажіть період одержаного дробу.

576. Порівняйте числа:
1) $0,(8)$ і $\frac{3}{8}$;
2) $0,(5)$ і $\frac{5}{9}$;
3) $0,(18)$ і $\frac{1}{11}$;
4) $0,(6)$ і $\frac{3}{5}$;
5) $0,08(3)$ і $\frac{1}{6}$;
6) $0,(2)$ і $\frac{1}{3}$.

577. Порівняйте числа:

1) $0{,}0(6)$ і $\frac{1}{16}$; 3) $0{,}1(4)$ і $\frac{1}{7}$;

2) $0{,}(45)$ і $\frac{5}{11}$; 4) $0{,}(7)$ і $\frac{7}{9}$.

578*. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{17-4\sqrt{15}}+\sqrt{2\sqrt{10}+7}-\sqrt{2}$ є ірраціональним числом.

579*. За яких значень x значення виразу $\sqrt{5-x}$ є ірраціональним числом, якщо:

1) x — ціле невід'ємне число;

2) x — ціле недодатне число?

580*. Визначте відношення до діаметра кола периметрів вписаного в нього й описаного навколо нього:

1) рівностороннього трикутника;

2) квадрата.

Запишіть відповідні оцінки для числа π.

Проявіть компетентність

581. Нехай A — множина учнів вашого класу. Скільки елементів містить множина A? Утворіть чотири підмножини множини A.

582. На парті лежать щоденник, підручник, зошит і ручка. Назвіть усі підмножини множини предметів на парті.

583. На столі стоїть тарілка й лежать виделка та ніж. Назвіть усі підмножини множини предметів на столі.

Задачі на повторення

584. Доведіть, що вираз набуває додатних значень за будь-якого значення x:

1) $2x(x+3)-(6x-1)$;

2) $(4+5x)(3x+1)-17(x-4)$.

585. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x+3x^2-(3x^2-5)=17$; 3) $\frac{x+3}{4}+\frac{x-5}{2}=\frac{x+2}{3}$;

2) $x(x-2)-x^2=4$; 4) $4x+x^2-2(2x-1)=18$.

§ 15 Перетворення ірраціональних виразів

Вирази, які містять квадратні корені з чисел, числових виразів чи виразів зі змінними, є різновидом *ірраціональних виразів*. Наприклад, ірраціональними є вирази:

$$\sqrt{2}\,,\ 1+\sqrt{2\cdot 9}\,,\ \sqrt{x-2}\,,\ \frac{4}{\sqrt{x+1}}\,.$$

З іншими видами ірраціональних виразів ви ознайомитеся в наступних класах.

1. ПРО ДОПУСТИМІ Й НЕДОПУСТИМІ ЗНАЧЕННЯ ЗМІННОЇ ІРРАЦІОНАЛЬНОГО ВИРАЗУ

Кожний із наведених вище ірраціональних виразів містить дію добування квадратного кореня. Проте у виразах $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2\cdot 9}$ під коренем міститься додатне число або числовий вираз, який набуває додатного значення, а у виразах $\sqrt{x-2}$, $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ — вираз зі змінною. Перші два вирази завжди мають зміст. А от про інші два вирази такого однозначно сказати не можна, оскільки значення підкореневого виразу залежить від значення змінної x. Наприклад:

— якщо $x = 3$, то $\frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{3+1}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$ і даний вираз має зміст;

— якщо $x = -5$, то $\frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{-5+1}} = \frac{4}{\sqrt{-4}}$ і даний вираз втрачає зміст, оскільки не можна добути квадратний корінь з від'ємного числа;

— якщо $x = -1$, то $\frac{4}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{-1+1}} = \frac{4}{\sqrt{0}} = \frac{4}{0}$ і даний вираз втрачає зміст, оскільки на нуль ділити не можна.

Зверніть увагу:
Якщо A — вираз зі змінними і $A = 0$, то $\sqrt{A} = 0$. І навпаки, якщо $\sqrt{A} = 0$, то $A = 0$.

Як бачимо, для виразу $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ числа -5 і -1 є недопустимими значеннями змінної. Існує безліч інших значень змінної x, за яких даний вираз втрачає зміст. Отже, для ірраціонального виразу зі змінними необхідно шукати ОДЗ його змінних. Як саме це можна зробити, ви дізнаєтесь у наступних класах. Наразі, спираючись на означення квадратного кореня з числа, для ірраціонального виразу зі змінними домовимося враховувати таке.

Нехай A — вираз зі змінними. Тоді:
— вираз $\sqrt{A}$ має зміст, якщо $A \geq 0$;
— вираз $\frac{1}{\sqrt{A}}$ має зміст, якщо $A > 0$.

? Чому для виразу $\frac{1}{\sqrt{A}}$ приймаємо саме таке обмеження: $A > 0$?
Оскільки якщо $A = 0$, то $\sqrt{A} = 0$, а на нуль ділити не можна.

Надалі перетворення ірраціональних виразів здійснюємо на ОДЗ змінних цих виразів.

2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Нехай A і B — деякі вирази. Сформулюємо властивості, які справджуються для ірраціональних виразів.

1. $\sqrt{A} \geq 0$.
2. $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$.
3. $\sqrt{A^2} = |A|$.
4. $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$.
5. $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Розглянемо приклади застосування цих властивостей для перетворення ірраціональних виразів.

Задача 1. Розкладіть на множники вираз:

1) $3\sqrt{a} - b\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{a} + ab$; 3) $x^2 - 3$; 4) $x - 4$, якщо $x > 0$.

Розв'язання.

1. Винесемо за дужки $\sqrt{a}$. Тоді: $3\sqrt{a} - b\sqrt{a} = \sqrt{a}(3 - b)$.

2. Скористаємося формулою $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Тоді:

$$\sqrt{a} + ab = \sqrt{a} + \left(\sqrt{a}\right)^2 b = \sqrt{a}(1 + \sqrt{a} \cdot b) = \sqrt{a}\,(1 + b\sqrt{a}\,).$$

3. Скористаємося формулою $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ та формулою різниці квадратів. Тоді:

$$x^2 - 3 = x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right).$$

4. Скористаємося формулою $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ та формулою різниці квадратів. Тоді, оскільки $x > 0$, то:

$$x - 4 = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2^2 = \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right).$$

Останні два приклади є особливими. Розв'язуючи їх, ми застосували формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, «прочитавши» її справа наліво. Це дало нам змогу подати число 3 та змінну x як квадрати ірраціональних виразів $\sqrt{3}$ та $\sqrt{x}$ відповідно, щоб потім застосувати формулу різниці квадратів. Узагалі, два вирази виду $a - b$ та $a + b$ називають *взаємно спряженими*. Отже, у кожному з даних прикладів ми подали заданий вираз як добуток взаємно спряжених виразів: $x - \sqrt{3}$ і $x + \sqrt{3}$ та $\sqrt{x} - 2$ і $\sqrt{x} + 2$ відповідно.

Задача 2. Внесіть множник під знак кореня:

1) $ab\sqrt{x}$, якщо $a > 0$, $b < 0$; 2) $x\sqrt{x^2}$.

Розв'язання.

1. Якщо $a > 0$, то $a = \sqrt{a^2}$, якщо $b < 0$, то $-b > 0$ і тому $-b = \sqrt{(-b)^2}$.

Подамо множник b так: $b = -(-b)$. Тоді:

$$ab\sqrt{x} = a \cdot (-(-b)) \cdot \sqrt{x} =$$

$$= \sqrt{a^2} \cdot \left(-\sqrt{(-b)^2}\right) \cdot \sqrt{x} = -\sqrt{a^2(-b)^2 x} = -\sqrt{a^2 b^2 x}.$$

Отже, якщо $a > 0$, $b < 0$, то $ab\sqrt{x} = -\sqrt{a^2 b^2 x}$.

2. Потрібно розглянути два випадки: $x \geq 0$ і $x < 0$.

Якщо $x \geq 0$, то $x = \sqrt{x^2}$. Тоді:

$$x\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 \cdot x^2} = \sqrt{x^4}.$$

Якщо $x < 0$, то $-x > 0$ і $-x = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2}$.

Подамо множник x так: $x = -(-x)$. Тоді:

$$x\sqrt{x^2} = -(-x) \cdot \sqrt{x^2} = -\sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{x^2} = -\sqrt{x^2 \cdot x^2} = -\sqrt{x^4}.$$

Отже, $x\sqrt{x^2} = \begin{cases} \sqrt{x^4}, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^4}, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Зверніть увагу:
під час внесення множника під знак кореня необхідно враховувати, яким саме є цей множник: додатним, від'ємним чи таким, що дорівнює нулю.

Задача 3. Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt{2y^2}$, якщо $y > 0$; 2) $\sqrt{2y^2}$, якщо $y < 0$; 3) $\sqrt{x^4y^3}$.

Розв'язання.

1. Скористаємося властивістю: $\sqrt{y^2} = |y|$. Оскільки $y > 0$, то $|y| = y$, звідси $\sqrt{y^2} = y$. Отже, якщо $y > 0$, то $\sqrt{2y^2} = y\sqrt{2}$.

2. Скористаємося властивістю: $\sqrt{y^2} = |y|$. Оскільки $y < 0$, то $|y| = -y$, звідси $\sqrt{y^2} = -y$. Отже, якщо $y < 0$, то $\sqrt{2y^2} = -y\sqrt{2}$.

3. Оскільки підкореневий вираз $x^4y^3 \geq 0$ і $x^4 \geq 0$, то $y^3 \geq 0$, а значить, $y \geq 0$. Звідси: $\sqrt{x^4y^3} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{(x^2)^2} \cdot \sqrt{y^2 \cdot y} = \sqrt{(x^2)^2} \cdot \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y} = |x^2| \cdot |y| \cdot \sqrt{y} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt{y} = x^2y\sqrt{y}$.

Зверніть увагу:
під час винесення множника з-під знака кореня необхідно враховувати, яким саме є цей множник: додатним, від'ємним чи таким, що дорівнює нулю.

Про дріб, у знаменнику якого міститься один чи кілька квадратних коренів, кажуть, що такий дріб містить *ірраціональність у знаменнику*. Під час перетворення таких виразів нерідко виникає потреба звільнитися від ірраціональності в знаменнику, тобто перетворити дріб так, щоб знаменник дробу не містив квадратних коренів. Розглянемо приклад.

Задача 4. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання.

1. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{x}-1$, який є спряженим з виразом $\sqrt{x}+1$ у його знаменнику:

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}.$$

Зверніть увагу:
щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу, потрібно помножити його чисельник і знаменник:

— на $\sqrt{A}$, якщо знаменник дробу є добутком, що містить $\sqrt{A}$ і не містить інших ірраціональностей;
— на вираз, спряжений до знаменника, якщо знаменник дробу містить суму (різницю) двох виразів, принаймні один з яких є ірраціональним.

Задача 5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)^2=9$;
2) $(x+2)^2=3$;
3) $\sqrt{x+2}=3$;
4) $\sqrt{x+2}=-3$;
5) $x\sqrt{x+2}=0$.

Розв'язання.

1. Скористаємося тим, що рівняння $x^2=a$ $(a\ge 0)$ має два корені, які є протилежними числами. Тоді одержуємо:

$$(x+2)^2=9,$$
$$x+2=3 \quad \text{або} \quad x+2=-3,$$
$$x=1 \quad \text{або} \quad x=-5.$$

Отже, коренями рівняння є числа 1 і –5.

2. Дане рівняння розв'язують так само, як і попереднє. Відмінність полягає лише в тому, що коренями цього рівняння є ірраціональні числа. Розв'яжемо його:

$$(x+2)^2 = 3,$$
$$x+2=\sqrt{3} \quad \text{або} \quad x+2=-\sqrt{3},$$
$$x=\sqrt{3}-2 \quad \text{або} \quad x=-\sqrt{3}-2.$$

Отже, коренями рівняння є числа $\sqrt{3}-2$ і $-\sqrt{3}-2$. Такі два числа можна подати разом:

$$\pm\sqrt{3}-2.$$

3. $\sqrt{x+2}=3$. Спираючись на означення арифметичного квадратного кореня, маємо:

$$x+2=9,\ x=7.$$

Отже, коренем рівняння є число 7.

4. Оскільки квадратний корінь не може набувати від'ємних значень, то рівняння $\sqrt{x+2}=-3$ не може мати коренів.
Отже, рівняння коренів не має.

5. Скористаємося тим, що добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю. Тоді на ОДЗ змінної одержуємо:

$$(x+3)\sqrt{x+2}=0,$$
$$x+3=0 \quad \text{або} \quad \sqrt{x+2}=0,$$
$$x=-3 \quad \text{або} \quad x+2=0,$$
$$x=-2.$$

Якщо $x=-3$, то вираз $x+2$ втрачає зміст, оскільки $-3+2=-1<0$. Отже, число -3 не належить до ОДЗ змінної даного рівняння, а тому не може бути його коренем. Число -2 належить до ОДЗ змінної даного рівняння й перетворює рівняння у правильну рівність, а отже, є коренем даного рівняння.

Зверніть увагу:
розв'язуючи рівняння, що містить ірраціональні вирази зі змінними, потрібно:

— враховувати, що не всі значення змінних є допустимими;

— будь-які перетворення ірраціональних виразів здійснюємо на ОДЗ їхніх змінних;

— знайдені корені необхідно перевірити або на їх належність до ОДЗ змінних, або підстановкою в дане рівняння.

Дізнайтеся більше

Доведемо, що $\sqrt{2}$ — ірраціональне число.

Припустимо, що $\sqrt{2}$ — раціональне число. Тоді $\sqrt{2}$ можна подати як нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$, тобто: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Піднесемо до квадрата цю рівність: $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

Звідси $2n^2 = m^2$. З одержаної рівності випливає, що m^2 — парне число, а значить, і m — парне число. Тоді його можна подати у вигляді $m = 2k$, $k \in N$. Підставимо $m = 2k$ у рівність $2n^2 = m^2$. Тоді одержуємо: $2n^2 = (2k)^2$, $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$. Звідси випливає, що n^2 — парне число, а значить, і n — парне число. Отже, m — парне число і n — парне число. Одержали, що дріб $\frac{m}{n}$ — скоротний дріб. Це суперечить припущенню, що $\sqrt{2}$ — раціональне число. Отже, $\sqrt{2}$ — ірраціональне число.

Пригадайте головне

1. Наведіть приклад ірраціонального виразу.
2. Наведіть приклад значення змінної, яке є недопустимим для обраного вами ірраціонального виразу.
3. За якої умови має зміст вираз $\sqrt{A}$; $\frac{1}{\sqrt{A}}$?
4. Які властивості арифметичного квадратного кореня справджуються для ірраціональних виразів?
5. Які вирази називають взаємно спряженими?
6. Поясніть, як внести під знак кореня додатний множник; від'ємний множник.
7. Поясніть, як винести з-під знака кореня додатний множник; від'ємний множник.
8. Наведіть приклад дробу, що містить ірраціональність у знаменнику.
9. Поясніть, як звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу.

Розв'яжіть задачі

586'. Назвіть підкореневий вираз:

1) $\sqrt{5}$;
2) $\sqrt{0}$;
3) $\sqrt{m}$;
4) $\sqrt{x^2}$;
5) $\sqrt{xy}$;
6) $\sqrt{x+1}$;
7) $\sqrt{2a}$;
8) $\sqrt{3x-1}$;
9) $\sqrt{y+3}$;
10) $\sqrt{x^2+7}$;
11) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$;
12) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

587'. Чи має зміст вираз $\sqrt{A}$, якщо:

1) $A < 0$;
2) $A = 0$;
3) $A > 0$;
4) $A \le 0$;
5) $A \ge 0$?

588'. Чи має зміст вираз $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$, якщо:

1) $A < 0$;
2) $A = 0$;
3) $A > 0$;
4) $A \le 0$;
5) $A \ge 0$?

589'. Чи є правильним співвідношення:

1) $\sqrt{A} < 0$;
2) $\sqrt{A} = 0$;
3) $\sqrt{A} > 0$;
4) $\sqrt{A} \le 0$;
5) $\sqrt{A} \ge 0$?

590'. Чи правильно, що:

1) $\left(\sqrt{A}\right)^2 < 0$;
2) $\left(\sqrt{A}\right)^2 = 0$;
3) $\left(\sqrt{A}\right)^2 = -A$;
4) $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$?

591'. Чи є правильною рівність:

1) $\sqrt{A^2} = |A|$;
2) $\sqrt{A^2} = A$;
3) $\sqrt{(-A)^2} = |A|$;
4) $\sqrt{(-A)^2} = -A$?

592'. Чи правильно, що:

1) $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = A \cdot B$;
2) $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A^2 \cdot B^2}$;
3) $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$?

593'. Чи правильно, що:

1) $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \dfrac{A}{B}$; 2) $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A^2}{B^2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$?

594'. Чи є взаємно спряженими вирази:

1) $(m - n)$ і $(m - n)$;
2) $(m - n)$ і $(m + n)$;
3) $(1 + b)$ і $(1 + b)$;
4) $(1 - b)$ і $(b + 1)$?

595'. Чи містить ірраціональність знаменник дробу:

1) $\dfrac{1}{a}$;
2) $\dfrac{\sqrt{a}}{a}$;
3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$;
4) $\dfrac{1}{3-\sqrt{a}}$;
5) $\dfrac{\sqrt{a}}{3+a}$?

596°. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{x-2}$, якщо $x = 0$;
2) $\sqrt{3+x}$, якщо $x = -3$;
3) $\sqrt{x-1}$, якщо $x = 2$;
4) $\sqrt{4x}$, якщо $x = -5$;
5) $\sqrt{2x}$, якщо $x = 4$;
6) $\sqrt{-x}$, якщо $x = 3$;
7) $\sqrt{-9x}$, якщо $x = -1$;
8) $\sqrt{5x-10}$, якщо $x = 1$;
9) $\sqrt{2x+4}$, якщо $x = -1$;
10) $\sqrt{8x-1}$, якщо $x = 0$;
11) $\sqrt{7-2x}$, якщо $x = 4$;
12) $\sqrt{3-x^2}$, якщо $x = -1$?

597°. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{x+1}$, якщо $x = -1$;
2) $\sqrt{x-8}$, якщо $x = 7$;
3) $\sqrt{20-x}$, якщо $x = -21$;
4) $\sqrt{6x}$, якщо $x = 0$;
5) $\sqrt{-10x}$, якщо $x = 2$;
6) $\sqrt{4x-12}$, якщо $x = -2$;
7) $\sqrt{15-3x}$, якщо $x = 4$?

598°. Чи має зміст вираз $\dfrac{1}{\sqrt{-x+8}}$, якщо:

1) $x = -10$;
2) $x = -6$;
3) $x = -1,2$;
4) $x = 0$;
5) $x = 1$;
6) $x = 8$;
7) $x = 10$;
8) $x = 20$?

599°. Чи має зміст вираз $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$, якщо:

1) $x = -5$;
2) $x = -3$;
3) $x = 0$;
4) $x = 3$;
5) $x = 10$;
6) $x = -0,1$?

600°. Який із виразів не має змісту, якщо $x = -10$:

1) $\sqrt{x-7}$;
2) $\sqrt{-2x}$;
3) $\sqrt{4x}$;
4) $\sqrt{2x-13}$;
5) $\frac{\sqrt{-5x+90}}{2}$;
6) $\frac{10}{\sqrt{-x^2}}$;
7) $\frac{\sqrt{(x+10)^2}}{10x}$;
8) $\frac{x+10}{\sqrt{x^2-200}}$?

601°. Який із виразів не має змісту, якщо $x = 5$:

1) $\sqrt{x-1}$;
2) $\sqrt{-5x}$;
3) $\sqrt{2x-17}$;
4) $\frac{5}{\sqrt{-3x+30}}$;
5) $\frac{x-5}{\sqrt{1-x^2}}$;
6) $\frac{x}{\sqrt{x-2x^2}}$?

602°. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{x-3}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{x+9}\right)^2$;
3) $\left(\sqrt{2x-7}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2$;
5) $\left(\sqrt{\frac{5}{x-5}}\right)^2$;
6) $\left(\sqrt{\frac{x+4}{x-16}}\right)^2$.

603°. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{5x}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{10x+12}\right)^2$;
3) $\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{\frac{x}{x+7}}\right)^2$.

604°. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $\sqrt{p}\,(\sqrt{p}-15)$;
2) $\sqrt{n}\,(2\sqrt{n}+5)$;
3) $\sqrt{3}\,(\sqrt{a}+\sqrt{c})$;
4) $(\sqrt{n}+7)(\sqrt{n}-2)$;
5) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$;
6) $(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)$;
7) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}-\sqrt{x})$;
8) $(\sqrt{a}+a)(\sqrt{a}-a)$;
9) $(\sqrt{5m}+\sqrt{n})(\sqrt{5m}-\sqrt{n})$;
10) $(\sqrt{x}+1)^2$;
11) $(\sqrt{a}-4)^2$;
12) $(\sqrt{m}+\sqrt{3})^2$;
13) $(\sqrt{x}-\sqrt{2y})^2$;
14) $(\sqrt{x}+\sqrt{z})^2$.

605°. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+6)$;
2) $2\sqrt{2}\,(\sqrt{n}+\sqrt{2m})$;
3) $(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-6)$;
4) $(\sqrt{y}+8)(\sqrt{y}-8)$;
5) $(\sqrt{x}+y)(y-\sqrt{x})$;
6) $(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})(\sqrt{3x}-\sqrt{2y})$;
7) $(\sqrt{y}-2)^2$;
8) $(\sqrt{a}-1)^2$;
9) $(\sqrt{y}+\sqrt{10})^2$;
10) $(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$.

606°. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{a}-2a\sqrt{a}$;
2) $25\sqrt{x}+x\sqrt{x}$;
3) $9\sqrt{m}-n\sqrt{m}$;
4) $\sqrt{x}+4y\sqrt{x}$;
5) $6\sqrt{a}-15a\sqrt{a}$;
6) $12\sqrt{n}-m\sqrt{n}-n\sqrt{n}$;
7) $\sqrt{p}+2p\sqrt{p}-p^2\sqrt{p}$;
8) $m\sqrt{n}-mp\sqrt{n}+2mn\sqrt{n}$;
9) $2\sqrt{x}+x$;
10) $\sqrt{m}-m$;
11) $n\sqrt{m}-m\sqrt{n}$;
12) $2\sqrt{y}-y\sqrt{2x}$;
13) $x-25$, якщо $x \geq 0$;
14) $x-100$, якщо $x \geq 0$;
15) x^2-5;
16) x^2-10;
17) x^2-15;
18) $x-2$, якщо $x \geq 0$;
19) $x-22$, якщо $x \geq 0$;
20) $x-30$, якщо $x \geq 0$.

607°. Розкладіть на множники:

1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$;
2) $a\sqrt{a}+c\sqrt{a}$;
3) $\sqrt{a}+2a$;
4) $\sqrt{5a}-5a$;
5) $4p\sqrt{m}-6m\sqrt{p}$;
6) $x-36$, якщо $x \geq 0$;
7) x^2-7;
8) x^2-3;
9) $x-26$, якщо $x \geq 0$;
10) $x-11$, якщо $x \geq 0$.

608°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{mn}}{m}$;
2) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$;
3) $\dfrac{\sqrt{5d}}{\sqrt{45d}}$;
4) $\dfrac{\sqrt{cd}}{\sqrt{ad}}$.

609°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{2ap}}{\sqrt{2a}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{mn}}{\sqrt{am}}$.

610°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{mn}-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{xy}-\sqrt{y}}{x-\sqrt{x}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{5d}+\sqrt{5b}}{\sqrt{45d}+\sqrt{45b}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{cd}+\sqrt{cb}}{\sqrt{ad}+\sqrt{ab}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;

6) $\dfrac{a+5\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$;

7) $\dfrac{2\sqrt{m}}{m-\sqrt{m}}$;

8) $\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{x+y}$;

9) $\dfrac{\sqrt{8x}+\sqrt{8y}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}$;

10) $\dfrac{\sqrt{3a}-\sqrt{3b}}{\sqrt{27a}-\sqrt{27b}}$;

11) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$;

12) $\dfrac{y-4}{\sqrt{y}+2}$;

13) $\dfrac{\sqrt{m}-5}{m-25}$;

14) $\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$;

15) $\dfrac{a^2-5}{a+\sqrt{5}}$;

16) $\dfrac{m^2-10}{\sqrt{10}-m}$;

17) $\dfrac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$;

18) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{6}}{a-6}$;

19) $\dfrac{m-11}{\sqrt{m}+\sqrt{11}}$;

20) $\dfrac{m}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}+\dfrac{n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

611°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{c}}{3c-\sqrt{c}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{12m}-\sqrt{12n}}{\sqrt{3m}-\sqrt{3n}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{mn}+\sqrt{m}}{1+\sqrt{n}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{mp}+\sqrt{2p}}{\sqrt{ma}+\sqrt{2a}}$;

6) $\dfrac{y-25}{\sqrt{y}+5}$;

7) $\dfrac{n^2-7}{n-\sqrt{7}}$;

8) $\dfrac{x-19}{\sqrt{x}+\sqrt{19}}$;

9) $\dfrac{3}{3+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{3+\sqrt{y}}$.

612°. Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{x}$;

2) $5\sqrt{y}$;

3) $6\sqrt{a}$;

4) $3\sqrt{n}$;

5) $y\sqrt{x}$, якщо $y > 0$;

6) $m\sqrt{m^5}$, якщо $m > 0$;

7) $2x\sqrt{y}$, якщо $x > 0$;

8) $3a\sqrt{n^3}$, якщо $a > 0$;

9) $2x\sqrt{y}$, якщо $x < 0$;

10) $3a\sqrt{n^3}$, якщо $a < 0$;

11) $m\sqrt{n^5}$, якщо $m < 0$;

12) $m\sqrt{m^2}$, якщо $m < 0$;

13) $mn\sqrt{mn}$, якщо $m > 0$, $n > 0$;

14) $mn\sqrt{mn}$, якщо $m > 0$, $n < 0$;

15) $3y^2\sqrt{x}$;

16) $2a^4\sqrt{c}$;

17) $5y\sqrt{x}$, якщо $y > 0$;

18) $2a^3\sqrt{c}$, якщо $a < 0$;

19) $3a^3\sqrt{c}$, якщо $a > 0$;

20) $2xy^3\sqrt{z}$, якщо $x < 0$, $y > 0$.

613°. Внесіть множник під знак кореня:

1) $5\sqrt{c}$;

2) $c\sqrt{a}$, якщо $c < 0$;

3) $mn\sqrt{n^2}$, якщо $m > 0$, $n > 0$;

4) $mn\sqrt{n^2}$, якщо $m < 0$, $n > 0$;

5) $x^5\sqrt{y}$, якщо $x < 0$.

614°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{2x^2}$, якщо $x > 0$;

2) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a < 0$;

3) $\sqrt{8m^2}$, якщо $m > 0$;

4) $\sqrt{a^2b}$, якщо $a < 0$;

5) $\sqrt{a^2b}$, якщо $a > 0$;

6) $\sqrt{5x^2y^2}$, якщо $x > 0$, $y < 0$;

7) $\sqrt{5x^2y^2}$, якщо $x < 0$, $y > 0$;

8) $\sqrt{50x^2y^2}$, якщо $x > 0$, $y \geq 0$;

9) $\sqrt{50x^2y^2}$, якщо $x < 0$, $y < 0$;

10) $\sqrt{18x^4y}$;

11) $\sqrt{x^8y^4z}$;

12) $\sqrt{a^{20}b^{16}c}$.

615°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{7y^2}$, якщо $y > 0$;

2) $\sqrt{7y^2}$, якщо $y < 0$;

3) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a < 0$, $b > 0$;

4) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a > 0$, $b < 0$;

5) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a \geq 0$, $b > 0$;
6) $\sqrt{12a^2b^2}$, якщо $a < 0$, $b < 0$;
7) $\sqrt{27m^8n}$;
8) $\sqrt{32x^4y^{20}}$.

616°. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$;
2) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$;
3) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$;
4) $\dfrac{10}{\sqrt{10}}$;
5) $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$;
6) $\dfrac{2}{\sqrt{11}}$;
7) $\dfrac{1}{\sqrt{m}}$;
8) $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$;
9) $\dfrac{y}{\sqrt{y}}$;
10) $\dfrac{1}{\sqrt{mn}}$;
11) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;
12) $\dfrac{1}{\sqrt{m+5}}$.

617°. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
2) $\dfrac{5}{\sqrt{15}}$;
3) $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$;
4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
5) $\dfrac{a}{\sqrt{2b}}$;
6) $\dfrac{2z}{\sqrt{z}}$;
7) $\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}$;
8) $\dfrac{1}{\sqrt{8x+1}}$.

618°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{c}} - \dfrac{4}{\sqrt{c}}$;
2) $\dfrac{5}{\sqrt{p}} - \dfrac{2}{\sqrt{p}}$;
3) $\dfrac{2}{\sqrt{x}+8} - \dfrac{1}{8+\sqrt{x}}$;
4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{6}{x-1} + \dfrac{8}{\sqrt{x}-1}$.

619°. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$;
2) $\dfrac{4}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$.

620°. Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 = 1$;
2) $x^2 = 36$;
3) $x^2 = 0$;
4) $3x^2 = 9$;
5) $x^2 = 11$;
6) $x^2 = 15$;
7) $x^2 - 64 = 0$;
8) $2x^2 - 42 = 0$;
9) $x^2 - 81 = 0$;
10) $x^2 - 17 = 0$;
11) $x^2 = -1$;
12) $x^2 = -29$;
13) $x^2 = -62$;
14) $x^2 = -100$;
15) $x^2 + 13 = 0$;
16) $x^2 + 40 = 0$;
17) $0{,}1x^2 + 1{,}6 = 0$;
18) $\dfrac{x^2}{4} - 16 = 0$.

621°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$;
2) $x^2 = 64$;
3) $4x^2 = 8$;
4) $x^2 = 7$;
5) $x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 - 5 = 0$;
7) $x^2 = -3$;
8) $x^2 + 12 = 0$.

622°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 2$;
2) $\sqrt{x} = 10$;
3) $2\sqrt{x - 6} = 0$;
4) $\sqrt{x - 2 - 9} = 0$;
5) $\sqrt{x - 12} = 7$;
6) $\sqrt{x + 21} = -3$;
7) $\sqrt{x + 3 + 4} = 0$;
8) $3\sqrt{x + 9} = 0$.

623°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 5$;
2) $\sqrt{x - 4} = 0$;
3) $2\sqrt{x + 7} = 8$;
4) $\sqrt{x - 1 - 2} = 0$;
5) $\sqrt{x + 30} = -30$;
6) $\sqrt{x} = 0$.

624. Чи за будь-яких значень змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{-x^2}$;
2) $\sqrt{-(x + 5)^2}$;
3) $\sqrt{(x - 7)^2}$;
4) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
5) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
6) $\dfrac{5}{\sqrt{x - 12}}$;
7) $\dfrac{x}{\sqrt{4x + 1}}$;
8) $\dfrac{x + 3}{\sqrt{x - 3}}$?

Якщо так, то вкажіть кілька таких значень змінної та обчисліть відповідні значення виразу.

625. Чи за будь-яких значень змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{x^2}$;
2) $\sqrt{(x - 1)^2}$;
3) $\dfrac{1}{\sqrt{x + 10}}$;
4) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 1}}$?

Якщо так, то вкажіть кілька таких значень змінної та обчисліть відповідні значення виразу.

626. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{x} + 3)^2 + (\sqrt{x} - 3)^2$;
2) $(\sqrt{a} + 5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{a} - 5\sqrt{2})^2$;
3) $(2 + \sqrt{y})^2 - (1 - 2\sqrt{y})^2$;

4) $(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)-(-\sqrt{x}+4)^2$;
5) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2-(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})$;
6) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

627. Спростіть вираз:
1) $(\sqrt{a}+2)^2+(\sqrt{a}-2)^2$;
2) $(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2-(\sqrt{y}+\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{x})$.

628. Спростіть вираз:
1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}$;
2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$;
3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;
4) $\dfrac{1}{3\sqrt{m}+3\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2\sqrt{m}+2\sqrt{n}}$;
5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}+2\sqrt{2}}$;
6) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

629. Спростіть вираз:
1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}-\sqrt{5}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{m}}{m-25}-\dfrac{1}{\sqrt{m}-5}$;
3) $\dfrac{\sqrt{11}}{m-11}-\dfrac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{11}}$;
4) $\dfrac{\sqrt{5p}}{p-5}-\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{5}}$.

630. Спростіть вираз:
1) $\dfrac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-3}-\dfrac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+3}$;
2) $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{p}}{\sqrt{m}-\sqrt{p}}+\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}$;
3) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;
4) $\dfrac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}-\dfrac{m+4n}{m-4n}$.

631. Спростіть вираз:
1) $\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}+2}-\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}-2}$;
2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

632. Спростіть вираз:
1) $\sqrt{\dfrac{45a^3}{b}}\cdot\sqrt{\dfrac{5a}{b^{-1}}}$;
2) $\sqrt{\dfrac{45a^3}{b}}:\sqrt{\dfrac{5a}{b^{-1}}}$;
3) $\sqrt{\dfrac{12x^5}{y^{-2}}}:\sqrt{\dfrac{y^6}{3x^{-7}}}$;
4) $\sqrt{\dfrac{12x^5}{y^{-2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{y^6}{3x^{-7}}}$;
5) $\sqrt{1\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{xy}{z^{-2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{xy^{-5}}{17z^4}}$;
6) $\sqrt{\dfrac{ab^3}{cd^{-4}}}\cdot\sqrt{\dfrac{c^{-3}}{a^{-5}}}\cdot\sqrt{\dfrac{d^{-4}}{c^{-4}a^6}}$.

633. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\dfrac{32c^{-3}}{a^5}} \cdot \sqrt{\dfrac{c^3}{2a^{-5}}}$;   2) $\sqrt{\dfrac{32c^{-3}}{a^5}} : \sqrt{\dfrac{c^3}{2a^{-5}}}$.

634. Внесіть множник під знак кореня:

1) $x\sqrt{-x}$;
2) $-3y^2\sqrt{x}$;
3) $ab^3\sqrt{a^2b^3}$, якщо $a < 0$;
4) $m^2n^2\sqrt{nm}$;
5) $n\sqrt{m} + m\sqrt{-n}$;
6) $3p\sqrt{m^2} + 4\sqrt{p}$.

635. Внесіть множник під знак кореня:

1) $-a\sqrt{-3a}$;
2) $pc^4\sqrt{c^2p}$;
3) $ac\sqrt{ac}$;
4) $x\sqrt{y} - \sqrt{x}$.

636. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8n^2}$;
2) $\sqrt{18x^4y^8z^7}$;
3) $\sqrt{0,01a^8b^3}$;
4) $\sqrt{\dfrac{8x^3}{125y^{10}}}$;
5) $\sqrt{-\dfrac{p^4}{m^6n^3}}$;
6) $\sqrt{\dfrac{(n+3)^4}{m^5}}$.

637. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{54x^2}$;
2) $\sqrt{-0,4x^2y^5}$;
3) $\sqrt{\dfrac{12x^5}{49y^{12}}}$;
4) $\sqrt{\dfrac{p^{12}}{mn^{10}}}$.

638. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$;
2) $\dfrac{7}{\sqrt{2}+3}$;
3) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$;
4) $\dfrac{7}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}$;
5) $\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$;
6) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;
7) $\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}$;
8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$.

639. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$;
2) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$;
3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;
4) $\dfrac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$;
5) $\dfrac{1}{1+\sqrt{m}}$;
6) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$.

640. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)^2 = 64$;
2) $(x-3)^2 = 5$;
3) $(x-10)^2 = 0$;
4) $(x+12)^2 - 36 = 0$;
5) $(x+9)^2 - 81 = 0$;
6) $(x-9)^2 - 3 = 0$;
7) $(x+5)^2 - 5 = 0$;
8) $(x-10)^2 + 320 = 0$;
9) $(x+8)^2 + 8 = 0$;
10) $-(x-10)^2 - 10 = 0$.

641. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)^2 = 4$;
2) $(x-9)^2 = 100$;
3) $(x-25)^2 = 0$;
4) $(x+4)^2 - 3 = 0$;
5) $(x-7)^2 - 11 = 0$;
6) $(x+7)^2 + 49 = 0$.

642. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x+1)(x+1) - 3x = 4x^2$;
2) $(x+1)(x-1) = 2x^2$;
3) $(5x+1)(x+2) - 6x^2 - 11x = 0$;
4) $(-x+5)(x+4) = x(x+1)$.

643. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x+1)(x-3) + 8x = 2x^2$;
2) $(x+2)(x-2) - 3x^2 = 0$;
3) $(2x+1)(x+3) = x(x+7)$.

644. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 9$;
2) $9\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = 4$;
3) $\sqrt{4x} - \sqrt{9x} = 9$;
4) $\sqrt{25x} - \sqrt{16x} = 0$;
5) $\sqrt{x+3} - 5\sqrt{x+3} + 4 = 0$;
6) $\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x+1} = 8$.

645. Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 10$;
2) $\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 6$;
3) $\sqrt{16x} - \sqrt{25x} = 0$;
4) $\sqrt{x+5} - 7\sqrt{x+5} + 12 = 0$.

646. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) = 2 - x$;
2) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right) = 5 - x$;
3) $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right) = \left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+5\right)$;
4) $\left(2\sqrt{x}-7\right)\left(2\sqrt{x}+7\right) = \left(4\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}+5\right)$;
5) $\left(\sqrt{x}-5\right)^2 = 26 + x$;
6) $\left(\sqrt{x}-2\sqrt{2}\right)^2 = 8 + x$.

647. Розв’яжіть рівняння:

1) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=2-x$;

2) $\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)=\left(\sqrt{x}-7\right)\left(\sqrt{x}+6\right)$;

3) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{15}\right)^2-x=-30$.

648. Розв’яжіть рівняння:

1) $(x+1)\sqrt{x-2}=0$;
2) $(x-1)\sqrt{x-1}=0$;
3) $x\sqrt{x-10}=0$;
4) $x\sqrt{x+4}=0$;
5) $(x+1)(\sqrt{x}-1)=0$;
6) $(x-1)(\sqrt{x}-1)=0$;
7) $x(\sqrt{x}-10)=0$;
8) $2x\sqrt{x}=0$.

649. Розв’яжіть рівняння:

1) $(x+3)\sqrt{x-3}=0$;
2) $(x-3)\sqrt{x+3}=0$;
3) $x(\sqrt{x}-2)=0$;
4) $x\sqrt{1-x}=0$.

650*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(x-1)^2}$, якщо $x>2$;
2) $\sqrt{(x+12)^2}$, якщо $x>20$;
3) $\sqrt{(x-8)^2}$, якщо $x<0$;
4) $\sqrt{(x^2+8)^2}$;
5) $\sqrt{x^2-6x+9}$, якщо $x>9$;
6) $\sqrt{x^2-2x+1}$, якщо $x>5$;
7) $\sqrt{x^2-8x+16}$, якщо $x<0$;
8) $\sqrt{x^2+4x+4}$, якщо $x<-4$.

651*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{x^3y^5}$;
2) $\sqrt{\dfrac{28x^2z}{125y^3}}$;
3) $\sqrt{(x^2-4)(x-2)}$;
4) $\sqrt{x^3-10x^2+25x}$.

652*. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right):\left(-\dfrac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{y-\sqrt{yx}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{y}}{y}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

4) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot(x-y)^{-1}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}-\dfrac{3y}{\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)}$.

653*. Обчисліть:

1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$;

2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

3) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{70}+\sqrt{72}}$.

654*. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{10}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

655*. За яких значень a рівняння не має розв’язків:

1) $(x+24)^2=a$;

2) $(x-14)^2=a$;

3) $(x-9)^2+7=a$;

4) $(x+2)^2+9=a$?

656*. За яких значень a рівняння має тільки один розв’язок:

1) $(x+17)^2=a$;

2) $(x-3)^2=a+1$;

3) $(x-9)^2=a-5$;

4) $(x+32)^2+4=a^2$?

657*. Для всіх значень a розв’яжіть рівняння:

1) $(x+8)^2=a$;

2) $(x-12)^2=a$;

3) $(x-25)^2=a+4$;

4) $(x+9)^2+1=a$.

658*. Для всіх значень a розв’яжіть рівняння:

1) $x^2+4x+4=a$;

2) $x^2+6x+9=a$;

3) $x^2-10x+25=a$.

659*. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+\sqrt{x}}=1$;

2) $\sqrt{1-\sqrt{x}}=1$;

3) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=2$;

4) $\sqrt{9+\sqrt{x}}=2$.

Проявіть компетентність

660. У таблиці 22 показано, як Сашко й Наталка спрощували вирази.
Хто правильно виконав дії (табл. 22)?

Таблиця 22

Сашко	Наталка
$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}{a-\sqrt{5}} = a-\sqrt{5}$	$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-5)(a+5)}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})(a-5)}{a-\sqrt{5}} = (a+\sqrt{5})(a-5)$

А. Наталка.
Б. Сашко.
В. Наталка й Сашко.
Г. Ані Наталка, ані Сашко.

Задачі на повторення

661. Запишіть як степінь з основою 3:
1) $9^{-3} \cdot 3^5$;
2) $27^2 \cdot 81^{-4}$;
3) $(3^{-6})^8 \cdot (9^{-1})^{-2}$;
4) $(81^{-2})^3 \cdot (27^{-3})^{-4}$.

662. Розв'яжіть рівняння:
1) $(4 + 5x)^2 - (2x - 5)^2 = 0$;
2) $(x + 1)^2 - (3x + 3)^2 = 0$.

663. Розв'яжіть графічно систему двох лінійних рівнянь із двома змінними:
1) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 4x + y - 4 = 0. \end{cases}$

§ 16 Функція $y = \sqrt{x}$

Ви вже знаєте, що площу квадрата знаходять за формулою: $S = a^2$. Оскільки $S > 0$ і $a > 0$, то з формули площі квадрата можемо виразити його сторону: $a = \sqrt{S}$. Ця формула задає функціональну залежність, для якої незалежною змінною є площа квадрата S, а залежною змінною — довжина сторони квадрата a. Справді, зі зміною площі квадрата відповідно змінюється й довжина його сторони. Якщо незалежну змінну позначити x, а залежну — y, то одержимо функцію $y = \sqrt{x}$.

1. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $y = \sqrt{x}$

Функцію $y = \sqrt{x}$ задає вираз $\sqrt{x}$, який втрачає зміст, якщо $x < 0$. Справді, з від'ємного числа не можна добути квадратний корінь. Тому областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина невід'ємних чисел.

Коротко це записують так. $D(y)$: x — будь-яке невід'ємне число, або $x \geq 0$.

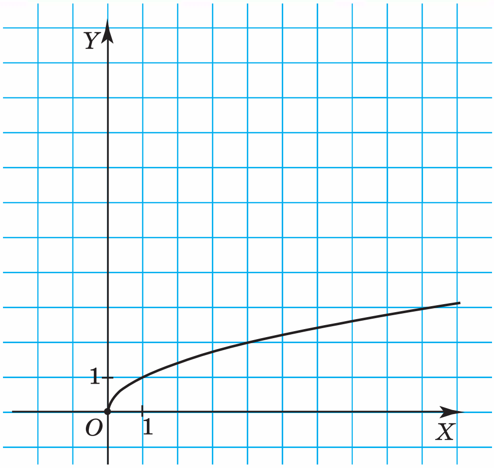
Оскільки для будь-якого $x \geq 0$ вираз $\sqrt{x}$ набуває невід'ємних значень, то $y \geq 0$. Тому область значень функції $y = \sqrt{x}$ містить усі невід'ємні числа.

Коротко це записують так. $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.

2. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = \sqrt{x}$

На малюнку 39 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Його побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Ця лінія є *віткою параболи*, що виходить із початку координат і розташована не вертикально, як у графіка функції $y = x^2$, а горизонтально.

Оскільки x — будь-яке невід'ємне число, а значення функції $y = \sqrt{x}$ є невід'ємними, то графік цієї функції розміщений у першій координатній чверті.



Мал. 39

3. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = \sqrt{x}$

Виокремимо властивості функції $y = \sqrt{x}$, спираючись на її графік (мал. 39).

1. $D(y)$: x — будь-яке невід'ємне число, або $x \geq 0$.
2. $E(y)$: y — будь-яке невід'ємне число, або $y \geq 0$.
3. Точка (0; 0) — точка перетину графіка з осями координат.
4. Функція набуває додатних значень для будь-яких значень x, крім нуля.
5. Функція є зростаючою на всій області визначення.

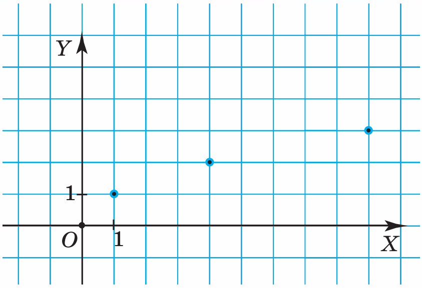
4. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = \sqrt{x}$

Для побудови графіка функції $y = \sqrt{x}$ знаходимо координати кількох точок вітки параболи (табл. 23). Незалежній змінній x зручно надавати таких значень, які є квадратами цілих чисел.

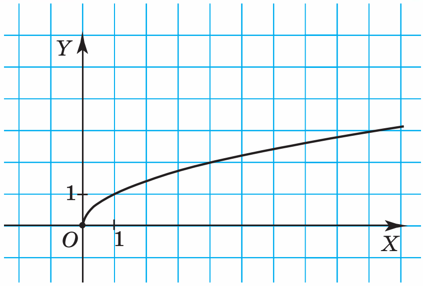
Таблиця 23

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

На координатній площині позначимо точки з координатами (0; 0), (1; 1), (4; 2), (9; 3) (мал. 40). З'єднаємо їх плавною лінією, спираючись на властивості функції. Одержимо графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 41).



Мал. 40



Мал. 41

Задача 1. Чи проходить графік функції $y=\sqrt{x}$ через точку: 1) A (16; 4); 2) B (4; –2)?

Розв'язання.

1. Підставимо координати точки A (16; 4) у формулу $y=\sqrt{x}$. Маємо: $4=\sqrt{16}$. Отже, графік функції $y=\sqrt{x}$ проходить через точку A.

2. *Спосіб 1*. Підставимо координати точки B (4; –2) у формулу $y=\sqrt{x}$. Маємо: $-2\neq\sqrt{4}=2$. Отже, графік функції $y=\sqrt{x}$ не проходить через точку B.

Спосіб 2. Точка B (4; –2) лежить у IV-й координатній чверті, а графік функції $y=\sqrt{x}$ — у I-й координатній чверті. Отже, графік функції $y=\sqrt{x}$ не проходить через точку B.

Зверніть увагу:

щоб з'ясувати, чи проходить графік функції $y=\sqrt{x}$ через задану точку, потрібно перевірити, чи задовольняють координати цієї точки формулу $y=\sqrt{x}$.

Побудова графіка функції $y=\sqrt{x}$ допомагає графічно розв'язувати рівняння та системи рівнянь. Розглянемо приклад.

Задача 2. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=2-x. \end{cases}$

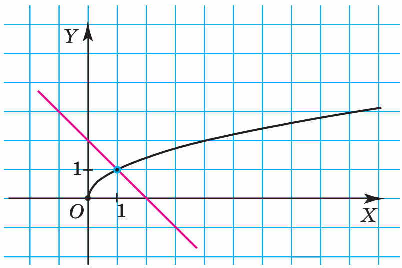
Розв'язання.

Для розв'язування системи рівнянь:

1) побудуємо графік функції $y=\sqrt{x}$ (мал. 42);

2) у тій самій системі координат побудуємо графік лінійної функції $y=2-x$ (мал. 42);

3) визначимо координати точки перетину графіків.
Графік функції $y=\sqrt{x}$ — вітка параболи.
Графік функції $y=2-x$ — пряма, що проходить через точки (0; 2) і (2; 0).
Вітка параболи та пряма перетинаються в точці з координатами (1; 1).



Мал. 42

Отже, пара чисел (1; 1) — шуканий розв'язок системи.

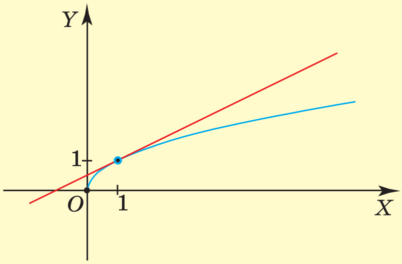
Які рівняння можна розв'язувати за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$? Ті рівняння, в одній із частин яких міститься вираз $\sqrt{x}$.

Наприклад, $\sqrt{x} = 6 - x$. Розв'язування такого рівняння можна здійснити шляхом графічного розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 6 - x. \end{cases}$

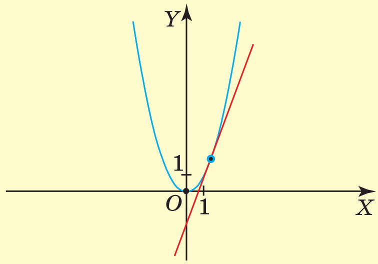
Проте, на відміну від системи, розв'язок рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$ — це лише абсциса точки перетину графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 6 - x$. Отже, рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$ має корінь 1.

Дізнайтеся більше

1. Для характеристики графіків функцій використовують також поняття «опуклість» та «увігнутість». Наприклад, графік функції $y=\sqrt{x}$ є опуклим, оскільки всі його точки лежать нижче будь-якої прямої, що є дотичною до цього графіка (мал. 43). А от графік функції $y=x^2$ є увігнутим, оскільки всі його точки лежать вище будь-якої прямої, що є дотичною до цього графіка (мал. 44). У старших класах ви дізнаєтесь, як можна аналітично, не будуючи графіків, з'ясовувати такі властивості функцій.



Мал. 43



Мал. 44

2. Положій Георгій Миколайович (1914–1968) — відомий математик, член-кореспондент АН УРСР, професор, доктор фізико-математичних наук, із 1958 р. — завідувач кафедри обчислювальної математики Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Започаткував створення в Київському університеті окремого факультету з обчислювальної математики і кібернетики. Відомий своїми працями в галузі функціонального аналізу й математичної фізики. Розроблена ним теорія p-аналітичних і (p, q)-аналітичних функцій є важливою й нині для розвитку не лише математики як науки, а й авіабудівництва, будівництва гідротехнічних споруд та ін. На честь ученого досліджені ним функції називають його ім'ям — «p-аналітичні функції Положія».

Пригадайте головне

1. Яка область визначення функції $y=\sqrt{x}$?
2. Яка область значень функції $y=\sqrt{x}$?
3. Що є графіком функції $y=\sqrt{x}$?
4. Як розміщується в системі координат графік функції $y=\sqrt{x}$?
5. Назвіть властивості функції $y=\sqrt{x}$.

Розв'яжіть задачі

664'. Яке із тверджень є правильним:

1) область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — усі додатні числа;

2) область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — усі числа, крім нуля;

3) область визначення функції $y = \sqrt{x}$ — усі невід'ємні числа;

4) область значень функції $y = \sqrt{x}$ — усі додатні числа;

5) область значень функції $y = \sqrt{x}$ — усі невід'ємні числа;

6) функція $y = \sqrt{x}$ є спадною;

7) функція $y = \sqrt{x}$ є зростаючою?

665°. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 24 та заповніть її.

Таблиця 24

x	0	1,21	1,96	2,89	3,61	4,84	8,41	9
y								

666°. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Накресліть у зошиті таблицю 25 і заповніть її.

Таблиця 25

x	1	1,44	2,25	3,24	6,25	10,24	16
y							

667°. Чи правильно, що графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:

1) A (4; 2); 3) C (6,25; 5); 5) M (1,44; –1,2);
2) B (0; 0); 4) D (0; 4); 6) N (–9; 3)?

668°. Чи правильно, що графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:

1) A (16; 4); 2) B (1; 1); 3) C (2,25; –1,5); 4) D (–4; 2)?

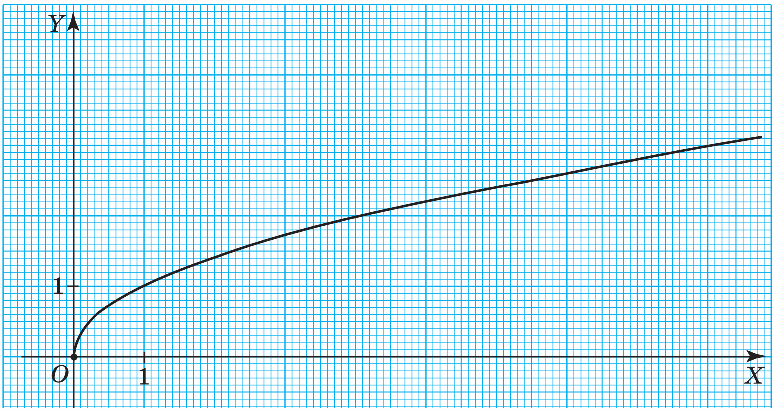
669°. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:

1) A (1; 1); 3) C (100; 10); 5) M (0,01; 0,1);
2) B (81; 9); 4) D (25; –5); 6) N (0,3; 0,09)?

670°. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:

1) K (0; 0); 2) L (36; –6); 3) M (49; 7); 4) N (0,04; 0,2)?

671°. На малюнку 45 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Скориставшись графіком, знайдіть:
1) значення y, якщо $x = 0,5$; $2,5$; 3; 6;
2) значення x, якщо $y = 1,2$; $1,8$; $2,2$; $2,9$.



Мал. 45

672°. Скориставшись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 45), знайдіть:
1) значення y, якщо $x = 1,5$; 2; 5;
2) значення x, якщо $y = 1,5$; $2,5$; $2,7$.

673°. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$ пряма:
1) $x = 4$; 3) $x = 49$; 5) $y = -4$;
2) $x = -9$; 4) $y = 1$; 6) $y = 3$?
Якщо перетинає, то вкажіть координати точки перетину.

674°. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$ пряма:
1) $x = 1$; 2) $x = -25$; 3) $y = 2$; 4) $y = -4$?
Якщо перетинає, то вкажіть координати точки перетину.

675°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:
1) $y = \sqrt{x}$ і $x = 1$; 3) $y = \sqrt{x}$ і $y = -1$;
2) $y = \sqrt{x}$ і $x = 0$; 4) $y = \sqrt{x}$ і $y = 2$.
Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину, якщо це можливо.

676°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:
1) $y = \sqrt{x}$ і $x = 4$; 2) $y = \sqrt{x}$ і $y = -3$.
Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину, якщо це можливо.

677°. Розв’яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2x - 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = -2x + 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = -x. \end{cases}$

678°. Розв’яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x - 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = -3x + 4. \end{cases}$

679°. За допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ порівняйте:

1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$;
2) $\sqrt{0,12}$ і $\sqrt{0,17}$;
3) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{8}$;
4) $\sqrt{0,36}$ і 0,6;
5) $\sqrt{30}$ і 5;
6) 7 і $\sqrt{56}$.

680°. Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $\sqrt{6}$ і $\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{2,5}$ і $\sqrt{2,7}$;
3) $\sqrt{60}$ і 8;
4) 1,2 і $\sqrt{1,44}$.

681. Площа круга обчислюється за формулою $S = \frac{\pi d^2}{4}$, де d — діаметр круга. Задайте формулою залежність d від S. Побудуйте графік одержаної залежності.

682. Площа круга обчислюється за формулою $S = \pi r^2$, де r — радіус круга. Задайте формулою залежність r від S. Побудуйте графік одержаної залежності.

683. Знайдіть такі точки графіка функції $y = \sqrt{x}$, у яких:

1) абсциса дорівнює ординаті;
2) абсциса утричі більша за ординату.

684. Знайдіть такі точки графіка функції $y = \sqrt{x}$, у яких ордината удвічі менша від абсциси.

685. Чи можна знайти найменше та найбільше значення для функції $y = \sqrt{x}$? Відповідь поясніть.

686. Назвіть найменше та найбільше значення функції $y = \sqrt{x}$, яке є натуральним числом, якщо:

1) $4 \le x \le 25$;
2) $0 \le x \le 80$;
3) $6 \le x \le 20$;
4) $9 \le x \le 22$.

687. Назвіть найменше та найбільше значення функції $y=\sqrt{x}$, яке є натуральним числом, якщо:

1) $1 \le x \le 36$; 2) $5 \le x \le 28$.

688. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\sqrt{1,3}$, $\sqrt{1,5}$, $\sqrt{0,8}$, 1;

2) 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3,2}$, $\sqrt{4,8}$;

3) $\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3\frac{2}{7}}$, $\sqrt{3\frac{1}{4}}$, $\sqrt{3\frac{2}{5}}$;

4) 10, $\sqrt{100\frac{3}{4}}$, $\sqrt{102}$, $\sqrt{100,5}$.

689. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\sqrt{4,1}$, 2, $\sqrt{3,8}$, $\sqrt{4,5}$; 2) $\sqrt{2\frac{2}{5}}$, $\sqrt{2\frac{3}{4}}$, $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2\frac{4}{7}}$.

690. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=x-2$; 4) $\sqrt{x}=x$;

2) $\sqrt{x}=x-12$; 5) $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$;

3) $\sqrt{x}=x^2$; 6) $\sqrt{x}=\frac{x}{2}$.

691. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=x-6$;

2) $\sqrt{x}=-x+2$;

3) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$;

4) $\sqrt{x}=2x-6$.

692*. Дано функцію $y=f(x)$, де:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \le 0, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x < -1, \\ 1, \text{ якщо } -1 \le x \le 1, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} -x+2, \text{ якщо } x \le 1, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x \le -1, \\ x^2, \text{ якщо } -1 < x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \ge 1. \end{cases}$

Побудуйте графік функції $y=f(x)$. За графіком охарактеризуйте властивості даної функції.

693*. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{-x} = x + 2$;

2) $\sqrt{|x|} = 4$;

3) $\sqrt{x} = \left|\dfrac{1}{x}\right|$;

4) $\sqrt{x} = -x^2 + 2$.

Проявіть компетентність

694. Сергійко проводив експерименти щодо вільного падіння м'ячика. Швидкість вільного падіння тіла задається формулою $v = \sqrt{2gH}$, де v — швидкість; H — висота; g — прискорення вільного падіння ($g \approx 9{,}8$ м/с^2).

1. М'ячик падає з висоти 1 м. З якою швидкістю він упаде на землю?
2. У скільки разів збільшиться швидкість м'ячика, якщо висоту збільшити у 2 рази; у 4 рази; у 8 разів?
3. Побудуйте графік залежності швидкості падіння м'ячика від висоти.

Задачі на повторення

695. Число a більше за число b на 6. Знайдіть ці числа, якщо їхнє середнє арифметичне дорівнює:

1) 9,6;

2) 22,4;

3) $4\dfrac{1}{5}$;

4) $3\dfrac{2}{7}$.

696. Спростіть вираз:

1) $\left(2\sqrt{8} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{2}\right) \cdot 6$;

2) $\sqrt{20} + \dfrac{\sqrt{7}}{7}\left(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}\right)$.

697. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 3 = \dfrac{5x}{4}$;

2) $\dfrac{6 - x}{3} = \dfrac{3x + 4}{2}$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке множина; підмножина. Наведіть приклади.
2. Які числа називають ірраціональними; дійсними?
3. Як позначають множину натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел; ірраціональних чисел; дійсних чисел?
4. Як пов'язані між собою раціональні, ірраціональні та дійсні числа?
5. Сформулюйте означення квадратного кореня з числа a.
6. Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a?
7. Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа?
8. Які властивості арифметичного квадратного кореня?
9. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$? А область значень?
10. Що є графіком функції $y = \sqrt{x}$?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1° Яким є число $\sqrt{\dfrac{16}{23}}$?

А. Дійсним числом. **Б.** Раціональним числом.
В. Цілим числом. **Г.** Натуральним числом.

2° Розв'яжіть рівняння $x^2 = 25$.

А. 5. **Б.** 25. **В.** 25, −25. **Г.** 5; −5.

3° Яка з точок належить графіку функції $y = \sqrt{x}$?

А. $A\,(-4; 2)$. **Б.** $B\,(2; 4)$. **В.** $C\,(1; 0)$. **Г.** $D\,(4; 2)$.

4 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

А. $\dfrac{1}{2}$. **Б.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **В.** $2+\sqrt{3}$. **Г.** $\sqrt{3}$.

5* Спростіть вираз $\dfrac{3\sqrt{a}+\sqrt{27}}{a-3}$.

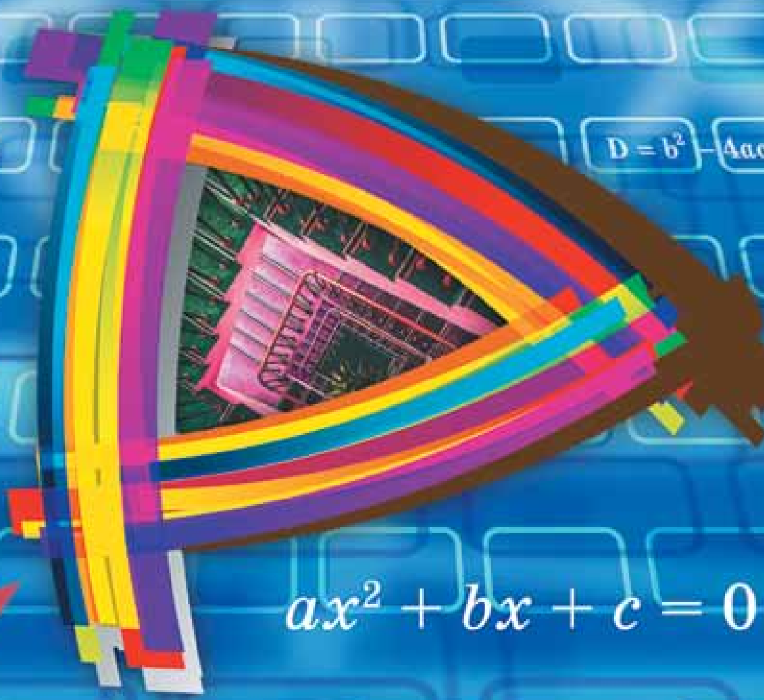
А. $\dfrac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$. **Б.** 3. **В.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}-3}$. **Г.** $3(\sqrt{a}+\sqrt{3})$.

Розділ 3

Квадратні рівняння

У розділі дізнаєтеся:

- які рівняння називаються квадратними;
- як розв'язувати квадратні рівняння;
- про теорему Вієта та її застосування;
- що таке квадратний тричлен;
- як розкласти квадратний тричлен на множники;
- як розв'язувати рівняння, що зводяться до квадратних;
- що таке математична модель прикладної задачі;
- як розв'язувати прикладні задачі методом математичного моделювання;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці



$$ax^2 + bx + c = 0$$

§ 17 Квадратні рівняння

1. ЩО ТАКЕ КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ

Ви вже знаєте, що таке лінійне рівняння з однією змінною, можете назвати його коефіцієнти; знаєте, скільки коренів може мати лінійне рівняння. Проте рівняння бувають не лише лінійними. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. Поряд із будинком, де мешкає Василько, розміщується міський парк прямокутної форми, площа якого 270 000 м^2. Довжина парку на 150 м більша за його ширину. За вказівкою тренера, Василько на ранковій пробіжці має пробігати не менш ніж 2 км. Чи виконає Василько завдання тренера, якщо кожного ранку оббігатиме парк уздовж огорожі?

Щоб відповісти на поставлене запитання, потрібно обчислити довжину огорожі парку. Для цього необхідно знати його ширину й довжину. Нехай ширина парку становить x м, тоді його довжина — $x + 150$ м. Площа прямокутника дорівнює добутку його сторін. За умовою, площа парку становить 270 000 м^2, тому маємо рівняння:

$$x \cdot (x + 150) = 270\,000.$$

Розкриємо дужки та зберемо всі доданки в лівій частині рівняння:

$$x^2 + 150x - 270\,000 = 0.$$

Отже, пошук відповіді на запитання зводиться до розв'язування одержаного рівняння. Таке рівняння є *квадратним*.

Квадратним рівнянням **називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.**

? Чому накладають умову, що $a \neq 0$? Бо інакше рівняння не є квадратним. Справді, якщо $a = 0$, то рівняння $0 \cdot x^2 + bx + c = 0$ набуває вигляду: $bx + c = 0$. А це — лінійне рівняння.

Числа a, b і c називають *коефіцієнтами квадратного рівняння*. Число a — це перший коефіцієнт, b — другий коефіцієнт, c — вільний член. Наприклад, у рівнянні $x^2 + 150x - 270\,000 = 0$ коефіцієнти такі: $a = 1$, $b = 150$, $c = -270\,000$.

Чи можуть коефіцієнти b і c у квадратному рівнянні дорівнювати нулю? Так. Тоді квадратне рівняння набуває вигляду: 1) $ax^2 + c = 0$, якщо $b = 0$, $c \neq 0$; 2) $ax^2 + bx = 0$, якщо $b \neq 0$, $c = 0$; 3) $ax^2 = 0$, якщо $b = 0$, $c = 0$.

Такі рівняння називають *неповними квадратними рівняннями*. Наприклад: $2x^2 - 8 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $4x^2 = 0$.

Натомість, рівняння $2x^2 - 3x + 5 = 0$ є повним квадратним рівнянням.

Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ завжди можна звести до вигляду $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, де перший коефіцієнт дорівнює 1. Таке квадратне рівняння називають *зведеним*.

Наприклад, рівняння $x^2 + 150x - 270\,000 = 0$ є зведеним квадратним рівнянням, бо в ньому $a = 1$. Рівняння $4x^2 + 3x - 1 = 0$ не є зведеним квадратним рівнянням, бо $a = 4$.

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБОМ ВИДІЛЕННЯ КВАДРАТА ДВОЧЛЕНА

Ви пам'ятаєте, що вираз $(a - b)^2$ називають квадратом двочлена. Якщо, наприклад, $(a - b)^2 = 4$, то:

$$a - b = 2 \text{ або } a - b = -2.$$

Наведені міркування розкривають ідею одного зі способів розв'язування квадратних рівнянь — *способу виділення квадрата двочлена*.

Повернемося до ситуації з ранковими пробіжками Василька довкола парку. За умовою нами було складено квадратне рівняння $x^2 + 150x - 270\,000 = 0$. Розв'яжемо його способом виділення квадрата двочлена.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 150x - 270\,000 = 0$.

Розв'язання. У даному рівнянні перенесемо вільний член $-270\,000$ у праву частину рівняння:

$$x^2 + 150x = 270\,000.$$

Ліву частину рівняння перетворимо так, щоб одержати тричлен, що є повним квадратом. А його вже згорнемо у квадрат двочлена.

Оскільки дане рівняння містить доданок x^2, то одним із членів шуканого двочлена є x.

Щоб знайти другий член шуканого двочлена, досліджуємо доданок зі змінною x у першому степені. У даному рівнянні — це доданок $150x$. Подамо його як подвоєний добуток двох множників:

$$x^2 + 2 \cdot 75 \cdot x = 270\,000.$$

Тоді число 75 — другий член шуканого двочлена.

Тепер до обох частин рівняння додамо 75^2:

$$x^2 + 150x + 75^2 = 270000 + 75^2.$$

У лівій частині рівняння одержали повний квадрат. Згорнемо його у квадрат двочлена. Праву частину рівняння подамо як квадрат числа 525:

$$(x + 75)^2 = 275625,$$

$$(x + 75)^2 = 525^2.$$

Для одержаного рівняння можливі два випадки:

$$x + 75 = 525 \quad \text{або} \quad x + 75 = -525.$$

Звідси:

$$x = 450 \quad \text{або} \quad x = -600.$$

Отже, рівняння $x^2 + 150x = 270000$ має два корені:

$$x_1 = 450,\ x_2 = -600.$$

Проаналізуємо одержані розв'язки. Оскільки ширина парку не може бути від'ємним числом, то шукана ширина дорівнює 450 м. Тоді довжина парку: 450 + 150 = 600 (м). Периметр парку дорівнює (450 + 600) · 2 = 2100 (м) або 2 км 100 м. Отже, на запитання, поставлене в наведеній ситуації, можемо дати таку відповідь: Василько виконає завдання тренера під час ранкової пробіжки, якщо оббігатиме парк уздовж огорожі.

Зверніть увагу:

— спосіб виділення квадрата двочлена легше застосовувати до зведеного квадратного рівняння;

— щоб застосувати спосіб виділення квадрата двочлена, спочатку подайте квадратне рівняння у вигляді: $(x + m)^2 = n$, де m і n — деякі числа.

? Як подати повне квадратне рівняння у вигляді зведеного? Для цього достатньо ліву та праву частини квадратного рівняння поділити на його перший коефіцієнт.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння: $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Розв'язання. $2x^2 + 5x - 3 = 0, \;\Big|\; :2$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2},$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x = \frac{3}{2},$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16},$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16},$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

$$x + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{або} \quad x + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4},$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad x = -3.$$

Отже, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$.

Чи завжди рівняння $(x + m)^2 = n$ має розв'язки? Ні. Якщо n — від'ємне число, то розв'язків немає.

Зверніть увагу:
залежно від значення n квадратне рівняння вигляду $(x + m)^2 = n$:
— має розв'язки, якщо $n \geq 0$;
— не має розв'язків, якщо $n < 0$.

Дізнайтеся більше

Уже в другому тисячолітті до нашої ери у Стародавньому Вавилоні знали, як розв'язувати квадратні рівняння. Необхідність їх розв'язування була тісно пов'язана з практичними завданнями, в основному такими, як вимірювання площі земельних ділянок для проведення земельних робіт та для військових потреб. Були відомі способи розв'язування як повних, так і неповних квадратних рівнянь. Наведемо приклади квадратних рівнянь, які розв'язували в Стародавньому Вавилоні, використовуючи сучасний алгебраїчний запис: $x^2 + x = \frac{3}{4}$, $x^2 - x = 14\frac{1}{2}$. Правила розв'язування квадратних рівнянь багато в чому були аналогічні сучасним, однак у вавилонських текстах не зафіксовано міркувань, шляхом яких ці правила були одержані.

У Стародавній Греції квадратні рівняння розв'язували за допомогою геометричних побудов. Методи, які не пов'язані з геометрією, уперше запропонував Діофант Александрійський у III ст. У своїх книгах «Арифметика» вчений навів приклади розв'язування неповних квадратних рівнянь. Його книги з описом способів розв'язування повних квадратних рівнянь до нашого часу не збереглися.

Задачі, які розв'язують за допомогою квадратних рівнянь, трапляються в трактаті з астрономії «Аріабхаттіам», що написав індійський астроном і математик Аріабхата в 499 р. н. е. Правило знаходження коренів рівняння, зведеного до вигляду $ax^2 + bx = c$, уперше дав індійський вчений Брахмагупта (близько 598 р.). Він описав алгоритм для знаходження коренів усіх різновидів квадратного рівняння, включаючи випадки, коли всі коефіцієнти, крім a, можуть бути від'ємними. Сформульоване вченим правило за своєю суттю збігається із сучасним.

Пригадайте головне

1. Що таке квадратне рівняння? Наведіть приклади.
2. Які назви мають коефіцієнти квадратного рівняння?
3. У чому полягає сутність способу виділення квадрата двочлена для розв'язування квадратного рівняння?

Розв'яжіть задачі

698'. Чи правильно, що квадратним є рівняння виду:
1) $0x^2 + bx + c = 0$;
2) $ax^2 + bx + 0 = 0$;
3) $ax^2 + 0x + c = 0$;
4) $ax^2 + 0x + 0 = 0$?

699'. У рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ назвіть:
1) перший коефіцієнт;
2) другий коефіцієнт;
3) вільний член.

700'. Чи має корені рівняння:
1) $(x + m)^2 = 3$; 2) $(x + m)^2 = -4$; 3) $(x + m)^2 = 0$?

701°. Яке з даних рівнянь є квадратним:
1) $4x^2 + 7x - 3 = 0$;
2) $x^2 - 5x + 3 = 0$;
3) $2x^3 + x + 4 = 0$;
4) $4x^2 - 16 = 0$;
5) $x^2 + 5x = 0$;
6) $8x + 16 = 0$?
Відповідь поясніть.

702°. Назвіть коефіцієнти квадратного рівняння:
1) $6x^2 + 5x - 1 = 0$;
2) $5x^2 - 9x + 4 = 0$;
3) $x^2 + x - 6 = 0$;
4) $2x^2 - 12 = 0$;
5) $x^2 + 2x = 0$;
6) $6x^2 = 0$;
7) $5 + x^2 - 6x = 0$;
8) $x + 2x^2 - 4 = 0$;
9) $x^2 - 10 + 3x = 0$.
Чи є серед цих рівнянь зведені квадратні рівняння? Назвіть їх.

703°. Запишіть квадратне рівняння, якщо відомі його коефіцієнти:
1) $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$;
2) $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$;
3) $a = 2$, $b = 0$, $c = -8$;
4) $a = -1$, $b = -2$, $c = 5$;
5) $a = 1$, $b = -7$, $c = 0$;
6) $a = 4$, $b = 8$, $c = 0$.
Чи є серед цих рівнянь зведені квадратні рівняння? Назвіть їх.

704°. Запишіть квадратне рівняння, якщо відомі його коефіцієнти:
1) $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$;
2) $a = 9$, $b = 6$, $c = -8$;
3) $a = 9$, $b = 0$, $c = -4$.

705°. Петрик стверджує, що для того, щоб квадратне рівняння $4x^2 - 5x + 1 = 0$ стало зведеним, необхідно обидві частини цього рівняння поділити на 4. А Сергійко заперечує це. Він говорить, що достатньо обидві частини рівняння помножити на 0,25. Хто із хлопчиків правий?

706°. Перетворіть квадратне рівняння на зведене:
1) $2x^2 + 17x - 9 = 0$;
2) $3x^2 + 10x + 8 = 0$;
3) $-8x^2 + 10x - 3 = 0$;
4) $-9x^2 - 24x + 20 = 0$.

707°. Перетворіть квадратне рівняння на зведене:
1) $4x^2 + 4x - 15 = 0$;
2) $-5x^2 + 8x - 3 = 0$.

708°. Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:
1) $(x + 1)(x - 2) = 4$;
2) $8x = (x - 4)(x + 4)$;
3) $(x + 2)^2 - 13 = 3(x - 1)$;
4) $4x^2 - 5 = 2x(1 + 3x)$;
5) $(x + 3)^2 - 6 = 8 + 10x$;
6) $4(x + 8) = (x - 4)(x + 2)$;
7) $2(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 8$;
8) $3(x - 1)(x + 1) + 11 = 5(2 + x)$.

709°. Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $(x - 4)(x + 1) = x - 7$;
2) $7x^2 - 3 = x(x - 11) + 1$;
3) $2(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 1$;
4) $4(x - 2)(x + 2) + 5 = 7(x - 2)$.

710°. Яке додатне число потрібно підставити замість n, щоб у лівій частині рівняння одержати квадрат суми або квадрат різниці:

1) $x^2 + 2x + n = 0$;
2) $x^2 - 4x + n = 0$;
3) $x^2 + 12x + n = 0$;
4) $x^2 - 8x + n = 0$;
5) $x^2 + 5x + n = 0$;
6) $x^2 - 9x + n = 0$?

711°. Яке додатне число потрібно підставити замість n, щоб у лівій частині рівняння одержати квадрат суми або квадрат різниці:

1) $x^2 + 6x + n = 0$;
2) $x^2 - 10x + n = 0$;
3) $x^2 + 7x + n = 0$;
4) $x^2 - 3x + n = 0$?

712°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 7)^2 = 49$;
2) $(x - 3)^2 = 16$;
3) $(x - 5)^2 = 36$;
4) $(x + 4)^2 = 1$;
5) $(x + 2)^2 = 0$;
6) $(x - 1)^2 = -25$.

713°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 = 64$;
2) $(x - 6)^2 = 0$;
3) $(x + 3)^2 = -9$.

714. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена зведене квадратне рівняння:

1) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
2) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
3) $x^2 + 12x + 35 = 0$;
4) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
5) $x^2 - 6x - 16 = 0$;
6) $x^2 - 10x + 25 = 0$.

715. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена зведене квадратне рівняння:

1) $x^2 + 10x + 24 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
3) $x^2 - 8x + 16 = 0$.

716. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена рівняння:

1) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 + x - 6 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 10 = 0$;
5) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;
6) $5x^2 + 14x - 3 = 0$.

717. Розв'яжіть способом виділення квадрата двочлена рівняння:

1) $x^2 + 5x - 14 = 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 = 0$;
3) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

718. Один із коренів рівняння $3x^2 + bx + 6 = 0$ дорівнює -6. Знайдіть інший корінь і коефіцієнт b.

719. Один із коренів рівняння $4x^2 - 7x + c = 0$ дорівнює 1. Знайдіть інший корінь і коефіцієнт c.

720. Доведіть, що:
1) числа 5 і –7 є коренями рівняння $x^2 + 2x - 35 = 0$;
2) число 2 не є коренем рівняння $2x^2 - x - 10 = 0$.

721. Доведіть, що:
1) числа 1 і –6 є коренями рівняння $x^2 + x - 6 = 0$;
2) число –2 не є коренем рівняння $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

722*. Доведіть, що якщо число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то число 4 є коренем рівняння $cx^2 + bx + a = 0$.

723*. За якого значення параметра p:
1) рівняння $x^2 + px - 35 = 0$ має корінь, що дорівнює 5;
2) рівняння $px^2 - 11x + 6 = 0$ має корінь, що дорівнює 3?

Проявіть компетентність

724. Поряд з будинком, де мешкає Тетянка, установили спортивний майданчик прямокутної форми, площа якого 112 м^2.

1. Обчисліть розміри майданчика, якщо його довжина на 6 м більша за ширину.
2. Для виготовлення водостоку необхідно закупити швелер, довжина якого має бути на півметра довшою за необхідну довжину виробу. Обчисліть вартість швелера для виготовлення водостоку по одній зовнішній стороні спортмайданчика, якщо погонний метр швелера коштує 140 грн.
3. Огорожу спортивного майданчика виготовлено із секційного паркану, висота секції якого дорівнює 2,5 м, а ширина — 2 м. Обчисліть вартість матеріалу для паркану, якщо вартість секції становить 250 грн.

Задачі на повторення

725. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - y = 10, \\ 2x + 3y = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 5x - 2y = -9. \end{cases}$

726. У трьох восьмих класах навчається 68 учнів. У 8-А класі на 3 учні більше, ніж у 8-Б класі, і на 2 учні менше, ніж у 8-В класі. Скільки учнів навчається в кожному класі?

727. У Марічки є 12 олівців чотирьох кольорів: зелених та жовтих — порівну, а червоних — удвічі більше, ніж синіх. Скільки олівців кожного кольору є в Марічки?

§ 18 Формула коренів квадратного рівняння

1. ДИСКРИМІНАНТ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

У попередньому параграфі ви розв'язували квадратні рівняння способом виділення квадрата двочлена. Ви побачили, що у випадках, коли рівняння не є зведеним, застосування даного способу призводить до виконання незручних обчислень. Існує інший, більш зручний спосіб розв'язування квадратних рівнянь — за допомогою спеціальної формули для знаходження його коренів.

Щоб вивести формулу коренів квадратного рівняння, розв'яжемо відомим способом квадратне рівняння, яке подано в загальному вигляді $ax^2 + bx + c = 0$. Для цього:

— перенесемо вільний член у праву частину рівняння:

$$ax^2 + bx = -c;$$

— поділимо обидві частини рівняння на a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

— у лівій частині рівняння шляхом перетворень одержимо квадрат двочлена:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Одержали рівняння виду $(x + m)^2 = n$. Наявність коренів та їх кількість залежать від знака дробу $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Знаменник цього дробу завжди додатний, оскільки за умови $a \neq 0$ маємо: $a^2 > 0$. Тому знак дробу визначає його чисельник, тобто значення виразу $b^2 - 4ac$. Цей вираз називають *дискримінантом* квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Дискримінант позначають буквою D. Отже, $D = b^2 - 4ac$.

2. ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Для виведення формули коренів квадратного рівняння потрібно дослідити три випадки: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

Нехай $D > 0$. Тоді рівняння $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, застосувавши введене позначення для дискримінанта, можна записати так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2},$$

або

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

Звідси $\quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ або $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ або } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ або } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Зазвичай, ці корені записують однією формулою:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Нехай $D = 0$, тоді рівняння набуває вигляду:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Звідси
$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$
$$x = -\frac{b}{2a}.$$

? Чи справджується формула $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ для $D = 0$? Так. Якщо $D = 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Одержали, що в даному випадку рівняння має два корені, які дорівнюють один одному. Тому часто говорять, що для $D = 0$ квадратне рівняння має один розв'язок.

Нехай $D < 0$, тоді рівняння $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$ не може мати коренів, оскільки його ліва частина набуває невід'ємних значень, а права — лише від'ємних.

? Чи варто користуватися формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ для $D < 0$? Ні. Якщо $D < 0$, то $\sqrt{D}$ не існує, тому рівняння коренів не має.

Формула коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Задача 1. Розв'яжіть рівняння: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Розв'язання. Коефіцієнтами рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ є числа: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Знайдемо дискримінант:

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$, $D > 0$.

Отже, рівняння має два різні корені.

Застосуємо формулу коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad x_1 = \frac{5+1}{2} = 3,\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Отже, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння: $2x^2 - 6x - 3 = 0$.

Розв'язання. У рівнянні $2x^2 - 6x - 3 = 0$:
$a = 2$, $b = -6$, $c = -3$.
$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 36 + 24 = 60$, $D > 0$ — два різні корені.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{60}}{2\cdot 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{4} = \frac{2\left(3 \pm \sqrt{15}\right)}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2},\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}.$$

Отже, $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння: $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

Розв'язання. У рівнянні $9x^2 + 6x + 1 = 0$:
$a = 9$, $b = 6$, $c = 1$.
$D = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4\cdot 9\cdot 1 = 36 - 36 = 0$, $D = 0$ — два рівні корені.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2\cdot 9} = -\frac{6}{2\cdot 9} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

Отже, $x_{1,2} = -\dfrac{1}{3}$.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння: $3x^2 + 4x + 3 = 0$.

Розв'язання. У рівнянні $3x^2 + 4x + 3 = 0$:
$a = 3$, $b = 4$, $c = 3$.
$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 16 - 36 = -20$, $D < 0$ — коренів немає.
Отже, дане рівняння не має коренів.

Зверніть увагу:
залежно від значення дискримінанта квадратне рівняння:
— має два різні корені, якщо $D > 0$;
— має два рівні корені, якщо $D = 0$,
— не має коренів, якщо $D < 0$.

Дізнайтеся більше

1. Термін дискримінант (від лат. *discrimino* — «розбираю», «розрізняю») — увів Сильвестр. Поняття «дискримінант квадратичної форми» використовувалося в роботах Гауса, Дедекінда, Кронекера, Вебера та інших.
2. Для квадратних рівнянь, у яких другий коефіцієнт є парним числом, формулу коренів квадратного рівняння зручніше записувати в іншому вигляді. Розглянемо розв'язання рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ для цього випадку.

Поділимо обидві частини рівняння на 2 та застосуємо формулу коренів квадратного рівняння:

$$\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}x+\frac{c}{2}=0,$$

$$D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{c}{2}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac,$$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{2\cdot\frac{a}{2}}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}.$$

Отже, для розв'язування рівнянь виду $ax^2 + bx + c = 0$, де b — парне число, можна застосовувати таку формулу коренів квадратного рівняння:

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}}, \text{ де } \boldsymbol{D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}.$$

Задача 5. Розв'яжіть рівняння: $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння: $x^2 - 8x + 7 = 0$.

$$D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(-4)^2-1\cdot7=16-7=9,\ D_1>0.$$

Застосуємо формулу коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{9}}{1}=4\pm3.$$

Отже, $x_1 = 7$, $x_2 = 1$.

3. Для неповних квадратних рівнянь ($ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 = 0$) зручнішими є інші способи розв'язування.

Задача 6. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x^2 - 20 = 0$; 2) $3x^2 + 18x = 0$; 3) $7x^2 = 0$.

Розв'язання. 1. Для розв'язування рівняння $5x^2 - 20 = 0$ поділимо обидві частини рівняння на 5: $x^2 - 4 = 0$.
Розкладемо ліву частину рівняння на множники, застосувавши формулу різниці квадратів: $(x - 2)(x + 2) = 0$.
Скористаємося властивістю рівності добутку нулю. Маємо:

$$x - 2 = 0 \text{ або } x + 2 = 0.$$

Отже, $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$.
2. Для розв'язування рівняння $3x^2 + 18x = 0$ розкладемо його ліву частину на множники. Для цього винесемо змінну x за дужки: $x(3x + 18) = 0$.
Скористаємося властивістю рівності добутку нулю.
Маємо: $x = 0$ або $3x + 18 = 0$. Отже, $x_1 = 0$ і $x_2 = -6$.
3. Рівняння $7x^2 = 0$ є рівносильним рівнянню $x^2 = 0$.
Звідси $x_1 = x_2 = 0$.

Пригадайте головне

1. Що називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Скільки коренів може мати квадратне рівняння?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.

Розв'яжіть задачі

728'. За якою формулою визначають дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:
1) $D = b^2 + 4ac$;
2) $D = b^2 - ac$;
3) $D = -b^2 - 4ac$;
4) $D = b^2 - 4ac$?

729'. За якою формулою визначають корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $x_{1,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
2) $x_{1,2} = \dfrac{b^2 \pm \sqrt{D}}{2a}$;
3) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
4) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$?

730'. Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:
1) 16; 2) 0; 3) –25?

731°. Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо:
1) $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$;
2) $a = 1$, $b = -7$, $c = 10$;
3) $a = 5$, $b = 6$, $c = 1$;
4) $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$.

732°. Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо:
1) $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$;
2) $a = 2$, $b = 1$, $c = -6$.

733°. Як обчислюють дискримінант квадратного рівняння: $x^2 - 10x + 16 = 0$:
1) $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)$;
2) $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$;
3) $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)$;
4) $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$?
Скільки коренів має дане рівняння?

734°. Для якого з даних квадратних рівнянь дискримінант обчислюють так: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$?
1) $x^2 - 5x - 6 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 5 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 6 = 0$;
4) $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Скільки коренів має це рівняння?

735°. Визначте кількість коренів квадратного рівняння за його дискримінантом:
1) $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$;
2) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$;
3) $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$;
4) $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$.

736°. Визначте кількість коренів квадратного рівняння за його дискримінантом:
1) $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$;
2) $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)$;
3) $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6$;
4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$.

737°. Назвіть коефіцієнти квадратного рівняння та складіть вираз для знаходження дискримінанта:
1) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
2) $x^2 + 5x - 6 = 0$;
3) $x^2 - 3x + 4 = 0$;
4) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
5) $2x^2 + 6x - 1 = 0$;
6) $2x^2 - 6x + 1 = 0$.
Скільки коренів має рівняння?

738°. Назвіть коефіцієнти квадратного рівняння та складіть вираз для знаходження дискримінанта:
1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 + 4x + 5 = 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;
4) $4x^2 - 4x - 1 = 0$.
Скільки коренів має рівняння?

739°. Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 - 6x - 16 = 0$;
3) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 - 8x + 16 = 0$;
5) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
6) $x^2 - 4x + 8 = 0$;
7) $x^2 + x - 12 = 0$;
8) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
9) $x^2 - 7x - 8 = 0$;
10) $x^2 + 6x + 3 = 0$;
11) $x^2 + x - 2 = 0$;
12) $x^2 + 25x + 100 = 0$;
13) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
14) $x^2 + 15x + 26 = 0$;
15) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
16) $x^2 - 10x + 25 = 0$.

740°. Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $x^2 + 4x - 12 = 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 = 0$;
3) $x^2 - 6x + 9 = 0$;
4) $x^2 + 5x + 8 = 0$;
5) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
6) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
7) $x^2 - x - 6 = 0$;
8) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

741°. Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $2x^2 - x - 6 = 0$;
2) $9x^2 - 6x - 8 = 0$;
3) $5x^2 + 7x - 6 = 0$;
4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
5) $-4x^2 - 11x + 3 = 0$;
6) $5x^2 + 14x - 3 = 0$;
7) $-6x^2 - x + 1 = 0$;
8) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
9) $2x^2 - 9x + 10 = 0$;
10) $-25x^2 + 10x + 3 = 0$;
11) $16x^2 + 56x + 45 = 0$;
12) $-4x^2 + 7x - 3 = 0$;
13) $9x^2 + 48x + 64 = 0$;
14) $-3x^2 + 19x - 6 = 0$;
15) $2x^2 - 11x + 5 = 0$;
16) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$.

742°. Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;
2) $9x^2 - 8x - 1 = 0$;
3) $-2x^2 + x + 10 = 0$;
4) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;
5) $5x^2 + 6x + 1 = 0$;
6) $-4x^2 + 28x - 49 = 0$;
7) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
8) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$.

743. Розв'яжіть рівняння:

1) $7x = 3x^2 + 4$;
2) $6y - 1 = 5y^2$;
3) $z^2 - 90 = z$;
4) $5x^2 = 8x - 3$;
5) $5 = 6y - y^2$;
6) $z - 3z^2 = -2$;
7) $4x^2 = 2 - 7x$;
8) $4y^2 = 33 + y$;
9) $9x^2 + 25 = 30x$;
10) $y^2 = 11y - 18$;
11) $13z - 3z^2 = 14$;
12) $2x^2 = 9x - 10$;
13) $81y^2 + 1 = 18y$;
14) $6z - 3 = z^2$;
15) $3x^2 + 10x = 10x + 12$;
16) $18 - y^2 = 5y + 18$.

744. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 = 7x + 30$;
2) $3y = 2y^2 - 5$;
3) $z^2 - 5 = 2z$;
4) $30 - x = x^2$;

5) $5y = 1 - 14y^2$;
6) $1 - 8z = -16z^2$;
7) $4x^2 + 7 = 7 - 12x$;
8) $11y + 2y^2 = 11y + 18$.

745. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(x - 1) = 72$;
2) $2y(y + 2) - 3 = 9y$;
3) $(2z - 3)(2 - 3z) = -4$;
4) $(x + 5)^2 = 4(x + 10)$;
5) $2y(y + 3) = (3 + y)^2$;
6) $(z + 4)^2 + (z - 4)^2 = 36$;
7) $(x + 2)(x + 1) = 4(x^2 - 22)$;
8) $(y + 2)^2 - 10 = 6(y + 3)$.

746. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(x + 1) = 56$;
2) $(y - 2)(2y - 1) = 5$;
3) $4(3 - 2z) = (z - 3)^2$;
4) $(x + 6)(x - 2) = 2(x - 2)$.

747. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{7 + x}{4}$;
2) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{5 + x}{6}$;
3) $\frac{y + y^2}{2} - \frac{y^2 - 6}{6} = \frac{1 - 3y}{4}$;
4) $\frac{y(y - 7)}{3} - y = \frac{4 - y}{3} - 4$.

748. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{x^2 - 4}{5} = \frac{x - 2}{3}$;
2) $\frac{y(y + 1)}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3y + 2y^2}{20}$.

749*. Доберіть таке раціональне число n, для якого рівняння $x^2 - 2x + n = 0$:
1) має два різні корені;
2) не має коренів;
3) має два рівні корені.

750*. Доберіть таке раціональне число n, для якого рівняння $nx^2 + 3x + 2 = 0$:
1) має два різні корені;
2) не має коренів;
3) має два рівні корені.

751*. Розв'яжіть рівняння зі змінною x і буквеними коефіцієнтами:
1) $x^2 + 2x + n = 0$;
2) $x^2 - 4x + 4n = 0$;
3) $nx^2 - 2x + 1 = 0$;
4) $x^2 + 3nx + 2n^2 = 0$.

752*. За якого значення параметра p ліва частина рівняння $4x^2 + 8x + p = 0$ є квадратом суми?

753*. Доведіть, що один із коренів рівняння $nx^2 - (n + m)x + m = 0$ дорівнює 1.

Проявіть компетентність

754. Іван Петрович розпочав будівництво будинку на ділянці землі, що має форму прямокутника. Одна сторона ділянки на 16 м менша від іншої, а її площа дорівнює 720 м^2. Допоможіть Івану Петровичу здійснити необхідні розрахунки.

1. Знайдіть периметр ділянки.
2. Для початку будівництва уздовж сторін ділянки потрібно покласти піноблоки. Скільки штук піноблоків потрібно придбати Івану Петровичу для будівництва будинку, якщо довжина одного такого блоку дорівнює 4 м?
3. Для придбання піноблоків Іван Петрович має звернутися до трьох постачальників, умови яких подано в таблиці 26.

Таблиця 26

Постачальники	Вартість піноблоків (грн / шт.)	Вартість доставки (грн)	Додаткові умови доставки
1	30	200	—
2	40	120	При замовлені товару на суму, більшу за 1000 грн, доставка безкоштовна
3	35	100	При замовлені товару на суму, більшу за 1200 грн, доставка безкоштовна

Яка пропозиція покупки з доставкою буде найвигіднішою для Івана Петровича?

Задачі на повторення

755. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4a}+\dfrac{a}{4}-\dfrac{1}{2}\right)$; 2) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a-3}\right)\left(1+\dfrac{2}{1-a}\right)$.

756. Сума двох чисел дорівнює 15. Якщо перше число збільшити у 3 рази, а друге зменшити у 2 рази, то їх сума стане дорівнювати 25. Знайдіть ці числа.

757. Як зміниться дріб, якщо його чисельник помножити на $2\dfrac{1}{2}$, а знаменник — поділити на $1\dfrac{1}{5}$?

§ 19 Теорема Вієта

1. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ КОРЕНЯМИ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ ЗВЕДЕНОГО КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами існують залежності, які найкраще можна проілюструвати на прикладі зведених квадратних рівнянь. Ви вже знаєте, що це рівняння, у яких перший коефіцієнт дорівнює 1. За домовленістю, зведене квадратне рівняння записують так:

$$x^2 + px + q = 0,$$

де p — другий коефіцієнт, а q — вільний член.

Рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$ має корені 3 і 5. Тоді сума коренів дорівнює 8, а їхній добуток — 15. Тобто сума коренів дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену. Ці залежності вперше встановив французький математик Франсуа Вієт.

ТЕОРЕМА Вієта

Нехай x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. Тоді сума коренів дорівнює другому коефіцієнту, взятому із протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену:

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доведення. Нехай $x^2 + px + q = 0$ — дане зведене квадратне рівняння. Запишемо формулу коренів для зведеного квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2},$$

де $D = p^2 - 4q$ — дискримінант даного рівняння.

Знайдемо суму цих коренів:

$$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}+\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-p+\sqrt{D}-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p.$$

Отже, перше співвідношення доведено: $x_1+x_2=-p$.

Знайдемо добуток коренів:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{\left(-p+\sqrt{D}\right)\left(-p-\sqrt{D}\right)}{4}=$$

$$=\frac{(-p)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4}=\frac{p^2-D}{4}=\frac{p^2-\left(p^2-4q\right)}{4}=\frac{p^2-p^2+4q}{4}=\frac{4q}{4}=q.$$

Отже, друге співвідношення доведено: $x_1\cdot x_2=q$.

Зверніть увагу:
якщо в рівнянні $x^2+px+q=0$ коефіцієнти p і q — цілі числа і його корені x_1 і x_2 також є цілими числами, то корені x_1 і x_2 є дільниками вільного члена q.

Теорема Вієта й наведене міркування надають можливість розв'язувати квадратні рівняння ще одним способом.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння: $x^2-5x+6=0$.

Розв'язання. За теоремою Вієта:

$$x_1+x_2=5,$$
$$x_1\cdot x_2=6.$$

Знайдемо пари цілих чисел, що є дільниками числа 6:

–6 і –1, –3 і –2, 6 і 1, 3 і 2.

Виберемо з них таку пару чисел, для якої сума чисел дорівнює числу 5. Такою є лише одна пара чисел, а саме: 3 і 2.

Отже, $x_1=3$, $x_2=2$.

Спробуйте самостійно одержати ці корені, розв'язавши систему двох рівнянь, складених у цій задачі за теоремою Вієта.

Чи виконується теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння, у якому $D=0$? Так. У такому рівнянні $x_1=x_2$, тоді $x_1+x_2=2x_1=-p$ і $x_1\cdot x_2=(x_1)^2=q$.

Зверніть увагу:
корені зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, у якому $D=0$, можна знайти за допомогою коефіцієнтів:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\ \text{або}\ x_{1,2}=\sqrt{q}.$$

2. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ КОРЕНЯМИ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОВНОГО КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Сформулюємо теорему Вієта для повного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Нехай x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тоді сума коренів дорівнює $-\frac{b}{a}$, а добуток коренів дорівнює $\frac{c}{a}$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Довести це твердження нескладно, якщо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ звести до рівняння виду $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Спробуйте зробити це самостійно.

Зверніть увагу:
справедливим є твердження, обернене до теореми Вієта:
- для **зведеного квадратного рівняння**: якщо для деяких чисел k і l виконуються рівності $k + l = -p$ і $k \cdot l = q$, то k і l є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$;
- для **повного квадратного рівняння**: якщо для деяких чисел k і l виконуються рівності $k + l = -\frac{b}{a}$ і $k \cdot l = \frac{c}{a}$, то k і l є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Задача 2. Запишіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа –4 і 1.

Розв'язання. За теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 = -4 + 1 = -3,$$
$$x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot 1 = -4.$$

Отже, зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має коефіцієнти: $p = 3$, $q = -4$.

Запишемо шукане рівняння: $x^2 + 3x - 4 = 0$.

За допомогою теореми Вієта можна одержати й інші співвідношення між коренями та коефіцієнтами квадратного рівняння.

Задача 3. Доведіть, що для зведеного квадратного рівняння виконується рівність: $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$, де x_1, x_2 — корені квадратного рівняння.

Розв'язання. У лівій частині даної рівності виділимо квадрат двочлена:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

За теоремою Вієта, $x_1+x_2=-p$ і $x_1\cdot x_2=q$. Підставимо $-p$ і q в одержаний вираз:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q.$$

Отже, рівність доведено: $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

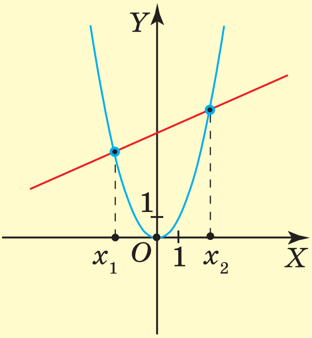
Дізнайтеся більше

1. **Франсуа Вієт** (1540–1603) — французький математик, який запровадив сучасну систему нотації в алгебрі. Особливо пишався теоремою про залежність між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами, яку було оприлюднено в 1591 р. Її названо ім'ям Вієта. Теорема Вієта стала одним із найвідоміших тверджень шкільної алгебри.

Франсуа Вієт

2. Існують різні способи розв'язування квадратних рівнянь. Розглянемо один із них — графічний.

Сутність цього способу полягає в тому, що для зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ одержують рівносильне рівняння $x^2=-px-q$ та будують графіки двох відповідних функцій: $y=x^2$ і $y=-px-q$ в одній системі координат. Графіком першої функції $y=x^2$ є парабола, яка проходить через початок координат, графіком другої функції $y=-px-q$ — пряма. Абсциси точок перетину графіків є розв'язками рівняння (мал. 46).



Мал. 46

Пригадайте головне

1. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
2. Яка особливість теореми Вієта для повного квадратного рівняння?

Розв'яжіть задачі

758'. Яке співвідношення є правильним для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

1) $x_1 + x_2 = p$;
3) $x_1 + x_2 = -p$;
2) $x_1 + x_2 = -q$;
4) $x_1 + x_2 = q$?

759'. Яке співвідношення є правильним для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

1) $x_1 \cdot x_2 = p$; 2) $x_1 \cdot x_2 = -p$; 3) $x_1 \cdot x_2 = q$; 4) $x_1 \cdot x_2 = -q$?

760'. Яке співвідношення є правильним для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $x_1 + x_2 = \dfrac{b}{a}$;
3) $x_1 + x_2 = -b$;
2) $x_1 + x_2 = \dfrac{c}{a}$;
4) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$?

761'. Яке співвідношення є правильним для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{c}{a}$;
3) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$;
2) $x_1 \cdot x_2 = c$;
4) $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{b}{a}$?

762°. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 6x + 8 = 0$, назвіть:
1) суму його коренів;
3) знаки його коренів.
2) добуток його коренів;

763°. Не розв'язуючи рівняння $x^2 + 4x - 5 = 0$, назвіть:
1) суму його коренів;
2) добуток його коренів;
3) знаки його коренів.

764°. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - x - 6 = 0$, назвіть:
1) суму його коренів;
2) добуток його коренів;
3) знаки його коренів.

765°. Якими можуть бути знаки коренів квадратного рівняння, якщо їхній добуток: 1) додатне число; 2) від'ємне число?

766°. Якими можуть бути знаки коренів квадратного рівняння, якщо їхня сума: 1) додатне число; 2) від'ємне число?

767°. Один із коренів рівняння дорівнює 2. Не розв'язуючи рівняння, назвіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 2x - 8 = 0$.

768°. Один із коренів рівняння дорівнює –3. Не розв'язуючи рівняння, назвіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 + x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

769°. Один із коренів рівняння дорівнює 6. Не розв'язуючи рівняння, назвіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 - 8x + 12 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

770°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$:

1) 1 і –10; 2) –2 і 5; 3) –1 і 10; 4) 2 і –5.

771°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $x^2 - 9x + 8 = 0$:

1) –1 і –8; 2) –2 і –4; 3) 1 і 8; 4) 2 і 4.

772°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $5x^2 - 7x + 2 = 0$:

1) 7 і 2; 2) –1 і $-\frac{2}{5}$; 3) 1 і $-\frac{2}{5}$; 4) 1 і $\frac{2}{5}$.

773°. Не розв'язуючи рівняння, установіть, яка пара чисел є коренями рівняння $2x^2 + x - 6 = 0$:

1) –1 і –6; 2) –2 і $-\frac{3}{2}$; 3) –2 і $\frac{3}{2}$; 4) 2 і $\frac{3}{2}$.

774°. Скориставшись теоремою Вієта, розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 6x - 16 = 0$;
3) $x^2 + 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 - 10x + 16 = 0$;
5) $x^2 - 12x + 11 = 0$;
6) $x^2 - 9x + 8 = 0$;
7) $x^2 + x - 12 = 0$;
8) $x^2 - 15x + 26 = 0$;
9) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
10) $x^2 + 6x + 5 = 0$;
11) $x^2 + x - 2 = 0$;
12) $x^2 + 25x + 100 = 0$;
13) $x^2 - 9x - 10 = 0$;
14) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
15) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
16) $x^2 - 16x + 55 = 0$.

775°. Скориставшись теоремою Вієта, розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 10 = 0$;

3) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
4) $x^2 + 9x + 8 = 0$;
5) $x^2 - 5x - 14 = 0$;
6) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
7) $x^2 - x - 20 = 0$;
8) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

776°. Не обчислюючи коренів рівняння $x^2 + 13x + 22 = 0$, знайдіть: 1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 \cdot x_2$.

777°. Не обчислюючи коренів рівняння $25x^2 + 40x - 4 = 0$, знайдіть: 1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 \cdot x_2$.

778°. Не обчислюючи коренів рівняння $9x^2 - 24x + 14 = 0$, знайдіть: 1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 \cdot x_2$.

779. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 2 і 5; 3) -1 і 7; 5) 6 і $\frac{1}{3}$; 7) $-\frac{3}{4}$ і 8;
2) -6 і 3; 4) -8 і -2; 6) -3 і $\frac{2}{3}$; 8) -7 і $-\frac{3}{14}$.

780. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 4 і 3; 2) -2 і 5; 3) -4 і $\frac{3}{4}$; 4) -2 і $-\frac{3}{8}$.

781. Один із коренів рівняння $x^2 + px + 33 = 0$ дорівнює 3. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт p.

782. Один із коренів рівняння $x^2 + px - 28 = 0$ дорівнює 2. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт p.

783. Один із коренів рівняння $x^2 - 10x + q = 0$ дорівнює -3. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт q.

784. Один із коренів рівняння $x^2 + 12x + q = 0$ дорівнює -5. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт q.

785. Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2 - 9x + q = 0$ задовольняють умову $x_1 = 2x_2$. Знайдіть x_1, x_2 і q.

786. Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2 + 4x + q = 0$ задовольняють умову $x_1 = 3x_2$. Знайдіть x_1, x_2 і q.

787. Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2 + px - 16 = 0$ задовольняють умову $x_1 - 4x_2 = 0$. Знайдіть x_1, x_2 і p.

788. Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2 + px + 18 = 0$ задовольняють умову $2x_1 - x_2 = 0$. Знайдіть x_1, x_2 і p.

789. Не обчислюючи коренів рівняння $x^2 - 3\sqrt{3}\,x - 12 = 0$, знайдіть:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

790. Не обчислюючи коренів рівняння $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$, знайдіть:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

791*. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корінь $1 + \sqrt{3}$. Знайдіть другий корінь рівняння.

792*. За яких значень параметра n сума коренів квадратного рівняння $x^2 + (6n^2 + 5n - 1)x + n = 0$ дорівнює нулю?

793*. За яких значень параметра m добуток коренів квадратного рівняння $x^2 - 4mx + (5m^2 + 2m - 3) = 0$ дорівнює нулю?

794*. У рівнянні $x^2 - 3x + p = 0$ сума квадратів коренів дорівнює 5. Знайдіть p.

Проявіть компетентність

795. На дитячому майданчику установили нову дитячу гірку — споруду з гладким похилим спуском і драбинкою, яка дозволяє забиратися на верхню площадку, щоб потім скочуватися вниз. Площадка для спуску розташована на висоті 1,5 м.

1. Розрахуйте довжину похилого спуску, якщо він на півметра довший за його проекцію.

2. Скільки метрів проїхав за день Василько, якщо він спустився 18 разів? А кілометрів?

3. Знайдіть площу поверхні спуску, якщо його ширина — 70 см.

4. Розрахуйте довжину драбинки, якщо вона на 90 см довша за її проекцію.

5. Розрахуйте висоту сходинок, якщо встановлено 7 сходинок і перша розміщується на висоті 30 см від поверхні землі.

Задачі на повторення

796. Доведіть, що для $a > 1$ значення виразу є від'ємним числом:

$$\frac{2}{a} : \left(\frac{1}{a^2 - a} + \frac{a-3}{a^2-1} \right) - \frac{a^2+3}{a-1}.$$

797. *Із книги «Coss» Адама Різе* (1492–1559). Троє людей виграли деяку суму грошей. Частка першого становить $\frac{1}{4}$ цієї суми, частка другого — $\frac{1}{7}$, а частка третього містить 17 флоринів. Яким був виграш?

§ 20 Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

1. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Ліва частина квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ є многочленом другого степеня з однією змінною. Наприклад, многочленом $2x^2 + 3x - 2$. Такий многочлен може входити до складу виразу $\left(\frac{2x^2+3x-2}{x+2}\right)$, нерівності $(2x^2 + 3x - 2 \geq 0)$, функції $(y = 2x^2 + 3x - 2)$ тощо. Його називають квадратним тричленом.

> ***Квадратним тричленом*** **називається многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.**

Числа a, b і c називають *коефіцієнтами квадратного тричлена*.

Коренями квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називають такі значення змінної x, за яких значення даного квадратного тричлена дорівнює нулю. Отже, щоб знайти корені квадратного тричлена $2x^2 + 3x - 2$, необхідно розв'язати відповідне квадратне рівняння $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Якщо квадратний тричлен має корені, то цей тричлен можна розкласти на лінійні множники.

2. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

ТЕОРЕМА (про розкладання квадратного тричлена на лінійні множники)

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то має місце тотожність $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доведення. У даному тричлені винесемо за дужки коефіцієнт a:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Для квадратного тричлена в дужках знайдемо суму та добуток його коренів, застосувавши до відповідного квадратного рівняння теорему Вієта:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ і } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Замість другого і третього коефіцієнтів квадратного тричлена в дужках підставимо суму й добуток його коренів та спростимо одержаний вираз:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right) =$$

$$= a\left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right) = a\left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right) =$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2).$$

Одержали: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Отже, тотожність доведено.

Який вигляд має розклад на лінійні множники квадратного тричлена, у якого дискримінант дорівнює 0? Оскільки у відповідному квадратному рівнянні $x_1 = x_2$, то розклад можна подати так: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Формула розкладання квадратного тричлена на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Задача 1. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $2x^2 + 3x - 2$.

Розв'язання. Складемо та розв'яжемо відповідне квадратне рівняння:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Розв'язавши рівняння, одержимо корені квадратного рівняння, що є коренями даного квадратного тричлена $2x^2 + 3x - 2$, а саме:

$$x_1 = -2 \text{ і } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Застосуємо формулу та запишемо розклад:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Щоб позбутися дробу в других дужках, внесемо множник 2 до цих дужок:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1.$$

Отже, $2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$.

Чи можна розкласти квадратний тричлен на множники, не застосовуючи формулу? Так, якщо застосувати спосіб групування: $2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(2x - 1)$.

Проте ви знаєте, що не завжди вдається швидко визначити, як краще згрупувати доданки.

Задача 2. Скоротіть дріб: $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{3x^2 + 19x + 6}$.

Розв'язання. Знаходимо корені тричлена $x^2 + 4x - 12$, що стоїть у чисельнику даного дробу. Це числа 2 і –6. Отже:

$$x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6).$$

Знаходимо корені тричлена $3x^2 + 19x + 6$, що стоїть у знаменнику даного дробу. Це числа $-\frac{1}{3}$ і –6. Отже:

$$3x^2 + 19x + 6 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 6) = (3x + 1)(x + 6).$$

А тепер скорочуємо даний дріб:

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{3x^2 + 19x + 6} = \frac{(x - 2)\cancel{(x + 6)}}{(3x + 1)\cancel{(x + 6)}} = \frac{x - 2}{3x + 1}.$$

Зверніть увагу:

- якщо квадратний тричлен має два різні корені, то його розклад на лінійні множники має вигляд:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

- якщо квадратний тричлен має два рівні корені, то його розклад на лінійні множники має вигляд:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2;$$

- якщо квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на лінійні множники.

Дізнайтеся більше

Існують квадратні рівняння з особливими співвідношеннями коефіцієнтів, наявність яких дозволяє розв'язувати рівняння набагато легше.

1. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ сума коефіцієнтів дорівнює нулю, то один із його коренів дорівнює 1, а інший — $\frac{c}{a}$.

Тобто: якщо $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$ і $x_2 = \frac{c}{a}$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння: $5x^2 - 9x + 4 = 0$.

Розв'язання. $a = 5$, $b = -9$, $c = 4$.

$$a + b + c = 5 + (-9) + 4 = 0.$$

Отже, $x_1 = 1$ і $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

2. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ сума першого коефіцієнта й вільного члена дорівнює другому коефіцієнту, то один із його коренів дорівнює –1, а інший — $-\frac{c}{a}$.

Тобто: якщо $a + c = b$, то $x_1 = -1$ і $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння: $3x^2 + 8x + 5 = 0$.

Розв'язання. $a = 3$, $b = 8$, $c = 5$.

$a + c = 3 + 5 = 8 = b$. Отже, $x_1 = -1$ і $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$.

Пригадайте головне

1. Який многочлен називають квадратним тричленом?
2. Які числа називають коефіцієнтами квадратного тричлена?
3. Що таке корені квадратного тричлена?
4. Запишіть формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

Розв'яжіть задачі

798'. Чи є квадратним тричленом даний многочлен:

1) $x^2 - 4x + 3$;
2) $x^4 - 2x^3 + 2$;
3) $-2x^2 + x - 3$;
4) $2x^3 - 2x^2 + 2$?

799'. Чи правильно записано формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники:

1) $ax^2 + bx + c = a(x + x_1)(x + x_2)$;
2) $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$;
3) $ax^2 + bx + c = a(x + x_1)(x - x_2)$;
4) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$?

800'. Чи можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники, якщо його дискримінант дорівнює:

1) 25; 2) 0; 3) –16; 4) 20?

801°. Запишіть розклад деякого квадратного тричлена на лінійні множники, якщо:

1) $a = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$;
2) $a = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$;
3) $a = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$;
4) $a = -3$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$;
5) $a = 5$, $x_1 = -2$, $x_2 = -7$;
6) $a = -4$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$.

802°. Запишіть розклад деякого квадратного тричлена на лінійні множники, якщо:

1) $a = 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$;
2) $a = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$;
3) $a = 5$, $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -5$;
4) $a = -2$, $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

803°. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 3x - 10$;
2) $x^2 - 10x + 24$;
3) $-x^2 + 16x - 15$;
4) $x^2 - 2x - 15$;
5) $-x^2 + 4x - 3$;
6) $x^2 - 6x - 7$;
7) $x^2 + 4x + 4$;
8) $-x^2 + 10x - 25$.

804°. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x + 2$;
2) $-x^2 - 8x + 9$;
3) $x^2 - 5x - 24$;
4) $x^2 + 6x + 9$.

805. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $2x^2 - 5x + 3$;
2) $5x^2 + 4x - 1$;
3) $-3x^2 - x + 14$;
4) $6x^2 - 5x + 1$;
5) $-9x^2 + 12x - 4$;
6) $3x^2 - 8x + 5$;
7) $4x^2 - 4x + 1$;
8) $-2x^2 + 3x + 2$.

806. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $3x^2 + 5x - 2$;
2) $-2x^2 + x + 15$;
3) $9x^2 + 6x + 1$;
4) $-5x^2 + 6x - 1$.

807. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$;
2) $\dfrac{2x^2-5x-3}{6x-18}$;
3) $\dfrac{16-x^2}{x^2+x-12}$;
4) $\dfrac{x^2-x-56}{x^2+7x}$;
5) $\dfrac{2x^2+9x-5}{4x^2-1}$;
6) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$;
7) $\dfrac{x^2+9x+8}{-x^2+8x+9}$;
8) $\dfrac{-3x^2+7x+6}{15x^2+13x+2}$.

808. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4x+4}{x^2-5x-6}$;
2) $\dfrac{x^2-3x}{3x^2-10x+3}$;
3) $\dfrac{5x^2-4x-12}{x^2-4}$;
4) $\dfrac{x^2+9x-10}{-x^2-8x+20}$.

809. Знайдіть значення дробу:

1) $\dfrac{x^2-36}{x^2-8x+12}$, якщо $x = 12$;
2) $\dfrac{3x^2+4x-39}{3x+13}$, якщо $x = 21$;
3) $\dfrac{4x^2+7x+3}{4x^2+3x}$, якщо $x = -5$;
4) $\dfrac{x^2-5x+6}{-2x^2+5x-2}$, якщо $x = -0{,}5$.

810. Знайдіть значення дробу:

1) $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}$, якщо $x = -2$;
2) $\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-2x+1}$, якщо $x = 11$.

811. За яких значень m квадратний тричлен $x^2 + mx + 25$ можна розкласти на два однакові лінійні множники?

812. За яких значень n квадратний тричлен $x^2 - 4x + n$ можна розкласти на два однакові лінійні множники?

813*. За яких значень m квадратні тричлени $x^2 + mx + 8$ і $x^2 + x + m$ мають у розкладі один і той самий лінійний множник?

814*. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $nx^2 + (n-2)x - 2 = 0$; 2) $x^2 - mx - mn - n^2$.

815*. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $3x^2 - 8xy + 5y^2$ відносно:

1) змінної x; 2) змінної y.

Проявіть компетентність

816. У збірнику «Юний шашкіст» надрукували 190 партій кругового турніру із шашок «Золота шашка», який проводився серед учнів міста. У турнірі кожний учасник зустрічався з кожним по одному разу.

1. Скільки було учасників турніру?

2. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо до складу команди входило три хлопці й одна дівчина?

3. Турнір проходив 5 днів. Скільки партій було зіграно кожного дня?

4. На шашковій дошці є діагоналі, найдовшою з яких є діагональ, що з'єднує два кути дошки і складається з десяти чорних полів. Її називають «великою дорогою». Скільки великих доріг на дошці? Скільки всього діагоналей на дошці?

Задачі на повторення

817. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x-1) - 4y = 8, \\ x - 2(y-1) = 2. \end{cases}$

818. У шкільній їдальні два пиріжки і три булочки коштують 19 грн, а три пиріжки й чотири булочки коштують 27 грн. Скільки коштує пиріжок і скільки коштує булочка?

§ 21 Рівняння, які зводяться до квадратних

У курсі алгебри є багато рівнянь, розв'язування яких зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Розглянемо деякі з них.

1. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Ви вже знаєте, які рівняння називають раціональними та які з них є цілими, а які — дробовими. Умієте розв'язувати раціональні рівняння, що зводяться до лінійних. Розглянемо особливості розв'язування цілих раціональних рівнянь, що зводяться до квадратних рівнянь.

Пригадаймо, що цілі раціональні вирази не містять ділення на вираз зі змінною. Такі рівняння можна звести до вигляду $P(x) = 0$, де $P(x)$ — многочлен. Якщо одержаний многочлен $P(x)$ є квадратним тричленом, то $P(x) = 0$ — квадратне рівняння. Отже, у такому разі можна вважати, що початкове рівняння ми звели до квадратного рівняння. Розглянемо приклад.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння: $(x-1)^2 + 11 = 2x(x-3)$.

Розв'язання.
Перенесемо вираз $2x(x - 3)$ із правої частини рівняння в ліву:

$$(x-1)^2 + 11 - 2x(x-3) = 0.$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$x^2-2x+1+11-2x^2+6x=0,$$

$$-x^2+4x+12=0,$$

$$x^2-4x-12=0.$$

Одержали квадратне рівняння. Знайдемо корені цього рівняння за формулою коренів або за теоремою Вієта:

$$x_1=-2 \text{ і } x_2=6.$$

Зверніть увагу:
щоб розв'язати ціле раціональне рівняння, яке зводиться до квадратного, потрібно:
1) звести рівняння до вигляду $P(x)=0$,
де $P(x)$ — квадратний тричлен;
2) розв'язати одержане квадратне рівняння $P(x)=0$.

2. ДРОБОВІ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Ви знаєте, що дробові раціональні вирази містять ділення на вираз зі змінною. Відповідні рівняння можна звести до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени. З умови рівності дробу нулю випливає, що одночасно мають виконуватися дві вимоги: $Q(x)\neq 0$ і $P(x)=0$. Тому на ОДЗ змінної даного рівняння (а саме: $Q(x)\neq 0$) можна перейти до розв'язування квадратного рівняння $P(x)=0$. Під час розв'язування дробового раціонального рівняння необхідно визначати ОДЗ його змінної та перевірити знайдені корені на належність до неї. Розглянемо приклад.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{7}{x-1}-\frac{12}{x+1}=\frac{x^2+13}{x^2-1}.$$

Розв'язання.

ОДЗ: x — будь-яке число, крім ± 1.

Перенесемо дріб $\frac{x^2+13}{x^2-1}$ із правої частини рівняння в ліву:

$$\frac{7}{x-1}-\frac{12}{x+1}-\frac{x^2+13}{x^2-1}=0.$$

У лівій частині рівняння зведемо дроби до спільного знаменника $(x-1)(x+1)$. Додатковим множником для першого дробу є двочлен $x + 1$, для другого — двочлен $x - 1$, а для третього — число 1:

$$\frac{7(x+1)-12(x-1)-(x^2+13)}{(x-1)(x+1)}=0.$$

Оскільки на ОДЗ змінної знаменник одержаного дробу не дорівнює нулю, то, згідно з умовою рівності дробу нулю, можемо прирівняти до нуля чисельник цього дробу:

$$7(x+1)-12(x-1)-(x^2+13)=0.$$

Одержали ціле раціональне рівняння, яке можна звести до квадратного:

$$7x+7-12x+12-x^2-13=0,$$

$$x^2+5x-6=0.$$

Одержали квадратне рівняння з коефіцієнтами $a = 1$, $b = 5$, $c = -6$. За теоремою Вієта:

$$x_1=-6,\ x_2=1.$$

Перевіримо, чи є числа –6 і 1 коренями даного рівняння.

Число –6 входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому –6 є коренем даного рівняння.

Число 1 не входить до ОДЗ змінної початкового рівняння, тому 1 не є коренем даного рівняння.

Отже, $x = -6$.

Зверніть увагу:
щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, що зводиться до квадратного, потрібно:

1) визначити ОДЗ змінної рівняння;

2) звести рівняння до вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ — квадратний тричлен;

3) розв'язати квадратне рівняння $P(x) = 0$;

4) зробити перевірку знайдених коренів щодо їх належності до ОДЗ змінної початкового рівняння.

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ СПОСОБОМ ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

Рівняння $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ можна записати так: $(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$. Тобто воно є квадратним рівнянням відносно x^2. Можна сказати, що дане рівняння — «двічі» квадратне. Такі рівняння називають *біквадратними*.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називається *біквадратним*.

Для розв'язування біквадратних рівнянь використовують уведення нової змінної, або *спосіб заміни змінної*. Сутність даного способу полягає в тому, що замість виразу x^2 уводять нову змінну $t = x^2$, розв'язують одержане допоміжне квадратне рівняння відносно змінної t, а потім повертаються до змінної x.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Розв'язання. Уведемо нову змінну:

$$\text{заміна } t = x^2 \ (t \geq 0).$$

Оскільки $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, то одержуємо допоміжне рівняння відносно нової змінної t:

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Знайдемо корені допоміжного квадратного рівняння за формулою коренів або за теоремою Вієта:

$$t_1 = 1 \text{ і } t_2 = 4.$$

Повернемося до змінної x:

$$x^2 = 1 \text{ або } x^2 = 4.$$

Звідси: $x_{1,2} = \pm 1$ і $x_{3,4} = \pm 2$.
Отже, $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$.

Чи завжди біквадратне рівняння має чотири різні корені? Ні, наприклад, якщо допоміжне рівняння $at^2 + bt + c = 0$ має два різні корені, але один із цих коренів від'ємний. У такому разі від'ємний корінь не задовольняє умову $t \geq 0$, а значить, початкове рівняння може мати не більше, ніж два корені. Проаналізуйте інші випадки самостійно.

Для розв'язування рівнянь, які містять вираз, що трапляється кілька разів, також використовують спосіб заміни змінної, який ми використовували для розв'язування біквадратних рівнянь.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння: $\left(x^2 + 2x - 5\right)\left(x^2 + 2x - 6\right) = 6$.

Розв'язання. Якщо перенести число 6 у ліву частину рівняння, розкрити дужки та звести подібні доданки, то одержимо рівняння:

$$x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0.$$

Розв'язати таке рівняння буде складно. Проте, якщо уважно придивитися до початкового рівняння, то можна побачити, що вираз $x^2 + 2x$ повторюється двічі (він є і в перших дужках, і в других). Тому доцільно замінити цей вираз на нову змінну:

заміна $t = x^2 + 2x$ (t — будь-яке число).

Увівши цю заміну в початковому рівнянні, одержимо допоміжне рівняння зі змінною t:

$$(t-5)(t-6)=6.$$

Це рівняння можна звести до квадратного:

$$t^2 - 11t + 24 = 0.$$

Знайдемо його корені:

$$t_1 = 3 \text{ і } t_2 = 8.$$

Повернемося до змінної x:

$$x^2 + 2x = 3 \text{ або } x^2 + 2x = 8.$$

Одержали ще два квадратні рівняння:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ або } x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ і $x_3 = 2$, $x_4 = -4$.

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -4$.

Задача 5. Розв'яжіть рівняння: $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{13}{6}$.

Розв'язання. Розв'язати дане рівняння можна двома способами: 1) звести рівняння до виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$; 2) застосувати спосіб заміни змінної.

***Спосіб 1*.**

ОДЗ: $x \neq \pm 2$.

$$\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}-\frac{13}{6}=0,$$

$$\frac{6(x+2)(x+2)+6(x-2)(x-2)-13(x-2)(x+2)}{6(x-2)(x+2)}=0,$$

$$6(x+2)^2+6(x-2)^2-13\left(x^2-4\right)=0,$$

$$6\left(x^2+4x+4\right)+6\left(x^2-4x+4\right)-13\left(x^2-4\right)=0,$$

$$6x^2+24x+24+6x^2-24x+24-13x^2+52=0,$$

$$-x^2+100=0,$$

$$x^2=100,$$

$$x_{1,2}=\pm 10.$$

Перевірка:

$x = 10$ — входить до ОДЗ змінної,

$x = -10$ — входить до ОДЗ змінної.

Отже, $x_{1,2} = \pm 10$.

Спосіб 2.

ОДЗ: $x \neq \pm 2$.

Заміна $\frac{x+2}{x-2} = t \ (t \neq 0)$,

тоді $\frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{t}$.

$$t + \frac{1}{t} - \frac{13}{6} = 0.$$

Одержали допоміжне рівняння, яке є дробовим. Тому потрібно визначати ОДЗ змінної цього допоміжного рівняння.

ОДЗ (доп): $t \neq 0$.

$$\frac{6t^2 + 6 - 13t}{t} = 0,$$

$$6t^2 - 13t + 6 = 0.$$

Одержали квадратне рівняння з коефіцієнтами $a = 6$, $b = -13$, $c = 6$.

Розв’яжемо його:

$D = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 169 - 144 = 25$, $D > 0$ — два різні корені.

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-13) + 5}{2 \cdot 6} = \frac{13 + 5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2},$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-13) - 5}{2 \cdot 6} = \frac{13 - 5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Перевірка:

$t = \frac{3}{2}$ — входить до ОДЗ змінної допоміжного рівняння,

$t = \frac{2}{3}$ — входить до ОДЗ змінної допоміжного рівняння.

Повертаємося до змінної x:

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{3}{2} \quad \text{або} \quad \frac{x+2}{x-2} = \frac{2}{3}.$$

$2(x + 2) = 3(x - 2)$,	$3(x + 2) = 2(x - 2)$,
$2x + 4 = 3x - 6$,	$3x + 6 = 2x - 4$,
$2x - 3x = -6 - 4$,	$3x - 2x = -4 - 6$,
$-x = -10$,	$x = -10$.
$x = 10$.	

Перевірка:

$x = 10$ — входить до ОДЗ змінної початкового рівня,

$x = -10$ — входить до ОДЗ змінної початкового рівня.

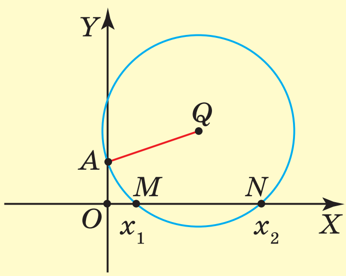
Отже, $x_{1,2} = \pm 10$.

Зверніть увагу:
для розв'язування рівнянь способом заміни змінної потрібно:
1) за потреби, визначити ОДЗ змінної початкового рівняння;
2) для виразу, що повторюється, увести заміну й одержати допоміжне рівняння;
3) розв'язати допоміжне рівняння;
4) повернутися до початкової змінної та знайти корені початкового рівняння;
5) за потреби, зробити перевірку знайдених коренів на належність їх до ОДЗ змінної початкового рівняння.

Дізнайтеся більше

Розглянемо ще два способи розв'язування квадратних рівнянь.

1. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна розв'язати й графічно. Сутність такого розв'язування полягає у знаходженні абсцис точок перетину кола, що має центр у точці $Q\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$ і радіус QA, де $A(0;\ 1)$, та осі OX (мал. 47). Абсциси точок M і N — корені рівняння.



Мал. 47

2. Для розв'язування квадратних рівнянь, які містять «незручні коефіцієнти», використовують також метод «перекидання». План розв'язування передбачає таке:

1) помножити обидві частини рівняння на коефіцієнт a:

$$ax^2 + bx + c = 0, \,\Big|\cdot a$$

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0;$$

2) увести нову змінну $t = ax$ та одержати допоміжне рівняння:

$$t^2 + bt + ac = 0;$$

3) розв'язати допоміжне рівняння й повернутися до змінної початкового рівняння.

У допоміжному рівнянні вільний член c множать на коефіцієнт a, який начебто «перекидається» до нього, тому його називають способом «перекидання».

Задача 6. Розв'яжіть рівняння: $12x^2 + 5x - 2 = 0$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 12 («перекинемо» коефіцієнт 12 до вільного члена), уведемо заміну $t = 12x$ (t — будь-яке число) й одержимо допоміжне рівняння:

$$t^2 + 5t - 24 = 0.$$

За теоремою Вієта:

$$t_1 = 3 \text{ і } t_2 = -8.$$

Повернемося до змінної x:

$$12x = 3 \text{ або } 12x = -8.$$

Звідси $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Пригадайте головне

1. Поясніть, як розв'язують цілі раціональні рівняння, що зводяться до квадратних.
2. Поясніть, як розв'язують дробові раціональні рівняння.
3. Які рівняння називаються біквадратними?
4. Поясніть, як розв'язують біквадратні рівняння.
5. Поясніть, як розв'язують рівняння способом заміни змінної.

Розв'яжіть задачі

819'. Яким буде наступний крок у розв'язуванні рівняння: $x(x+1) = 10$?

820'. Яким буде наступний крок у розв'язуванні рівняння: $x + \frac{4}{x} = 5$?

821'. Яким буде наступний крок у розв'язуванні рівняння: $(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0$?

822'. Які з рівнянь є біквадратними рівняннями:

1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
2) $x^4 - 2x^3 + 2 = 0$;
3) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$;
4) $2x^4 - 2x + 2 = 0$?

823'. Для рівняння $a^4x^4 + a^2x^2 + c = 0$ назвіть:
1) очікувану заміну; 2) допоміжне рівняння.

824°. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(x-1)=12$;
2) $9x(x+1)=-x-1$;
3) $(x+4)^2+x^2=x+31$;
4) $(x-1)^2+(x+1)^2=5x$;
5) $(x+3)^2+(x-3)^2=9(x+1)$;
6) $(3x-2)^2+11=4x(2x-1)$.

825°. Розв'яжіть рівняння:
1) $2x(x-5)+5=x$;
2) $(2x-1)^2+5x=3x^2+7$;
3) $(x-2)^2+(x+2)^2=3x+7$;
4) $(2x-3)^2-4=x(x-4)$.

826°. Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{x^2}{x-3}=\dfrac{5x-6}{x-3}$;
2) $\dfrac{x^2-15}{5-x}=\dfrac{2x}{5-x}$;
3) $\dfrac{8}{x-1}=\dfrac{6x+x^2}{1-x}$;
4) $\dfrac{x}{5-x}=\dfrac{x^2-30}{x-5}$;
5) $\dfrac{3x}{x-6}=\dfrac{x^2-18}{6-x}$;
6) $\dfrac{x^2-18}{x-2}=\dfrac{7x}{2-x}$;
7) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{5x-2}{2x-4}$;
8) $\dfrac{5x^2+3}{8x+8}=\dfrac{x}{x+1}$.

827°. Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{3x}{x-2}=\dfrac{10-x^2}{x-2}$;
2) $\dfrac{x^2+20}{x-10}=\dfrac{-12x}{10-x}$;
3) $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{3x-1}{2x-2}$;
4) $\dfrac{3x^2+5}{8x-8}=-\dfrac{x}{x-1}$.

828°. Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3}=0$;
2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=0$;
3) $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-2x}=0$;
4) $\dfrac{3x^2-5x+2}{1-x^2}=0$.

829°. Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}=0$;
2) $\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+2x}=0$.

830°. Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{x^2-4}{x-1}=4$;
2) $x=\dfrac{x+10}{x-2}$;

3) $\dfrac{2}{x} + 15 = \dfrac{8}{x^2}$;

4) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{2}$;

5) $\dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{20}{x^2}$;

6) $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{3}{x} = 2$;

7) $\dfrac{3x^2 + x - 24}{x^2 - 9} = 2$;

8) $\dfrac{9x + 3}{1 + 3x} = x - 7$.

831°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x + 4}{x - 2} = x$;

2) $\dfrac{32}{x} + \dfrac{x}{2} = 10$;

3) $\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4} = 1$;

4) $\dfrac{4x + 2}{1 + 2x} = x - 6$.

832°. За якого значення x значення виразу $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ дорівнює 2,5?

833°. За якого значення x значення виразу $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$ дорівнює 3,5?

834°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
2) $x^4 - x^2 - 12 = 0$;
3) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
4) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
5) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
6) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$;
7) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;
8) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

835°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 + x^2 - 20 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
4) $x^4 + 11x^2 + 18 = 0$.

836. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{10}{x - 3} - 1 = \dfrac{8}{x}$;

2) $\dfrac{x + 3}{x + 2} - \dfrac{6}{x} = \dfrac{1}{x + 2}$;

3) $\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{5}{8}$;

4) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + \dfrac{x - 3}{x + 3} = \dfrac{10}{3}$.

837. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x + 4}{x - 3} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{7}{x - 3}$;

2) $\dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{x + 2}{x - 2} = \dfrac{5}{2}$.

838. Знайдіть усі значення змінної x, за яких значення виразів $\dfrac{x + 1}{5x + 1}$ і $\dfrac{x}{x + 2}$ дорівнюють одне одному.

839. Знайдіть усі значення змінної x, за яких значення виразів $\dfrac{x + 2}{9x}$ і $\dfrac{x}{8x - 5}$ дорівнюють одне одному.

840. Знайдіть усі значення змінної x, за яких значення суми дробів $\frac{2x-2}{x+3}$ і $\frac{x+3}{x-3}$ дорівнює 5.

841. Знайдіть усі значення змінної x, за яких значення суми дробів $\frac{3x-9}{x-1}$ і $\frac{x+6}{x+1}$ дорівнює 3.

842. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-1}{x-4}-\frac{2}{5x}=1$;

2) $\frac{3}{x+1}-\frac{19}{x-7}=8$;

3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{1}{x-2}=\frac{3x+4}{x^2-2x}$;

4) $\frac{2}{x+7}+\frac{7-x}{x^2+7x}=1$;

5) $\frac{4}{x+3}+\frac{x-5}{x-3}=-\frac{24}{x^2-9}$;

6) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{1+x}{x-1}=\frac{12-8x}{x^2-1}$.

843. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{1}{2x}=1$;

2) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=-\frac{4}{x^2-4}$;

3) $\frac{3}{x+1}+\frac{x+14}{x^2+x}=3$;

4) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{3x+1}{x+2}=-1$.

844. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^4-37x^2+9=0$;

2) $9x^4-32x^2-16=0$;

3) $2x^4-5x^2+2=0$;

4) $16x^4-8x^2+1=0$.

845. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^4-5x^2+2=0$;

2) $16x^4-25x^2+9=0$.

846. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-x)^2+5(x^2-x)=6$;

2) $4(x^2-x+1)^2-5(x^2-x+1)=21$;

3) $(x^2+x)(x^2+x-5)-84=0$;

4) $2\left(\frac{x+6}{x}\right)^2-11\left(\frac{x+6}{x}\right)+15=0$;

5) $\frac{x+10}{x}-12\cdot\frac{x}{x+10}+1=0$;

6) $\frac{x-3}{x+5}+\frac{x+5}{x-3}=-2$.

847. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+1)^2-12(x^2+1)=-35$;

2) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)=3$;

3) $5\left(\frac{x+12}{x}\right)^2+3\left(\frac{x+12}{x}\right)-2=0$;

4) $\frac{x+2}{4-x}+\frac{4-x}{x+2}=2$.

848*. Знайдіть найбільший корінь рівняння:

1) $5(x+1)^2-8|x+1|+3=0$;

2) $\frac{4}{x^2+10|x|}-\frac{2}{5x}=\frac{1}{25}$.

849*. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4-(n^2+9)x^2+9n^2=0$;

2) $(x-n)^2+(x-m)^2=(n-m)^2$;

3) $x+\frac{1}{n}=n+\frac{1}{x}$;

4) $\frac{m}{x-n}+\frac{n}{x-m}=2$.

850*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x^2+2x+4}+\frac{4(x-1)}{x^3-8}=\frac{1}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x^2-2}+\frac{x^2}{x+2}=2$;

3) $x^2=\frac{6}{1-\frac{1}{x}}$;

4) $x^2-x-14=\frac{24}{x-x^2}$.

Проявіть компетентність

851. У Наталчиній кімнаті повісили дзеркало прямокутної форми, яке вправлене в раму (мал. 48). Периметр зовнішнього контура дзеркала, ураховуючи раму, дорівнює 3,2 м, а площа всієї поверхні — 0,6 м^2.

Мал. 48

1. Знайдіть довжини сторін зовнішнього контура дзеркала.

2. Знайдіть довжини сторін дзеркальної поверхні, якщо рама, в яку вправлено дзеркало, має ширину з усіх чотирьох сторін по 8 см.
3. Знайдіть площу дзеркальної поверхні дзеркала.
4. Знайдіть площу поверхні рами.
5. Рама складається із двох частин — внутрішньої та зовнішньої (див. мал. 48). Знайдіть відношення площ поверхонь цих частин, якщо вони мають однакову ширину.

Задачі на повторення

852. Розкладіть на множники:

1) $3x^3 - 4x^2 + 3x - 4$; 2) $2(x+5)^2 - 4x - 20$.

853. На ділянці, яку із двох сторін обмежено взаємно перпендикулярними дорогами, посадили сад. Відстань від яблуні до першої дороги становить 3 м, а до другої — 4 м. Відстань від груші до першої дороги дорівнює 6 м, а до другої — 8 м. Знайдіть відстань між цими деревами.

§ 22 Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь

1. КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ

Раціональні рівняння, що зводяться до квадратних, можуть бути математичними моделями реальних ситуацій. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. У зв'язку зі встановленням сучасного обладнання в кінотеатрі проводили ремонт глядацької зали, у якій кількість рядів мала стати більшою за кількість місць у ряді. До ремонту в залі було 396 місць, а після ремонту стало 300 місць. Під час ремонту прибрали 2 ряди повністю та по 3 крісла в кожному ряді.

Запитання. Скільки зараз рядів у глядацькій залі кінотеатру?

Щоб відповісти на поставлене запитання, потрібно перекласти умову й вимогу задачі мовою математики, тобто скласти математичну модель задачі.

Математична модель — це опис деякого реального процесу засобами математики.

Математичну модель сюжетної задачі можна подати аналітично, графічно, у мішаному вигляді — така модель містить й аналітичні, і графічні елементи. Аналітичною моделлю може бути: вираз або запис за діями, якщо задачу розв'язують арифметичним способом; рівняння або система рівнянь, якщо задачу розв'язують алгебраїчним методом. Графічна модель — це здебільшого малюнок, схема або графік. До мішаної форми моделі звертаються найчастіше тоді, коли є потреба у візуальній опорі для складання й тлумачення виразу, рівняння, системи рівнянь.

Складання математичної моделі задачі називають *математичним моделюванням*. Розв'язування задачі методом математичного моделювання містить *три етапи*:

1) **побудова математичної моделі;**
2) **робота з математичною моделлю;**
3) **складання відповіді до задачі в термінах її сюжету.**

На першому етапі побудуємо математичну модель ситуації, яку ми розглядаємо. Для цього необхідно ввести змінну x.

Нехай у глядацькій залі було x рядів. Тоді в кожному ряді цієї зали було $\frac{396}{x}$ місць.

Після ремонту в глядацькій залі стало $(x-2)$ рядів по $\frac{300}{x-2}$ місць у кожному ряді.

За умовою, місць у кожному ряді зали стало на 3 менше, отже, складаємо рівняння: $\frac{396}{x}-\frac{300}{x-2}=3$. Одержали дробове раціональне рівняння, що є моделлю даної ситуації.

На другому етапі розв'язуємо рівняння:

ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$.

$$\frac{396}{x}-\frac{300}{x-2}-3=0,$$

$$\frac{396(x-2)-300x-3x(x-2)}{x(x-2)}=0,$$

$$396(x-2)-300x-3x(x-2)=0,$$

$$396x-792-300x-3x^2+6x=0,$$

$$-3x^2+102x-792=0, \;|:(-3)$$

$$x^2-34x+264=0.$$

Одержали квадратне рівняння з коефіцієнтами $a = 1$, $b = -34$, $c = 264$.

Знаходимо його корені.

$$D=b^2-4ac=(-34)^2-4\cdot 1\cdot 264=1156-1056=100,$$

$$D > 0 \text{ — два різні корені.}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{34\pm 10}{2\cdot 1}=\frac{34\pm 10}{2},$$

$$x_1=22,\ x_2=12.$$

Перевірка:

$x = 22$ — входить до ОДЗ, $x = 12$ — входить до ОДЗ.

На третьому етапі складаємо відповідь до задачі.

Щоб визначити кількість рядів у глядацькій залі кінотеатру після ремонту, потрібно знайти значення виразу $(x - 2)$, якщо $x = 22$ або $x = 12$. Одержуємо: $22 - 2 = 20$, $12 - 2 = 10$. Отже, нині в залі може бути або 20 рядів, або 10 рядів.

Щоб визначити кількість місць у ряді після ремонту, потрібно знайти значення виразу $\frac{300}{x-2}$, якщо $x = 22$ або $x = 12$. Маємо: $\frac{300}{20}=15$ або $\frac{300}{10}=30$. Отже, нині в ряді може бути або 15 місць, або 30 місць.

Загалом одержуємо, що нині в залі може бути: або 20 рядів по 15 місць, або 10 рядів по 30 місць.

За умовою, кількість рядів у залі має стати більшою за кількість місць у ряді. Друга пара значень не задовольняє цю вимогу, оскільки $10 < 30$. Перша пара значень задовольняє цю вимогу, оскільки $20 > 15$.

Отже, після ремонту в глядацькій залі кінотеатру стало 20 рядів.

Зверніть увагу:
в оформленні розв’язання задачі методом математичного моделювання доцільно виділяти три етапи:
— побудова математичної моделі;
— робота з математичною моделлю;
— складання відповіді до задачі.

2. ЗАДАЧІ НА РУХ

Ви вже знаєте, що для розв'язування задач на рух застосовують формулу, що виражає закон руху: $s = vt$, де s — відстань; v — швидкість; t — час. Тому для складання математичної моделі можна використовувати одну з формул для знаходження: відстані — $s = vt$, швидкості — $v = \frac{s}{t}$ або часу — $t = \frac{s}{v}$.

Задача 1. Відстань від Черкас до Києва, що становить 180 км, автобус має проїхати зі сталою швидкістю за визначений розкладом час. Проте в Борисполі водій автобуса на 5 хв зробив незаплановану зупинку для пасажирів, які їхали до аеропорту. Тому, щоб прибути до Києва вчасно, після незапланованої зупинки водій збільшив швидкість на 10 км/год. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом, якщо Бориспіль розташований на відстані 35 км від Києва?

Розв'язання.

Побудова математичної моделі. Для побудови математичної моделі ситуації, яку розглядаємо, потрібно ввести змінну x.

Нехай x км/год — швидкість автобуса за розкладом. Оскільки відстань між містами 180 км, то запланований час руху автобуса становить $\frac{180}{x}$ год.

За умовою, автобус проїхав відстань $(180 - 35)$ км до Борисполя зі швидкістю x км/год. Тоді час, витрачений на цю відстань, дорівнює $\frac{180-35}{x}$ год. Решту відстані, тобто 35 км, автобус подолав зі швидкістю $(x + 10)$ км/год за $\frac{35}{x+10}$ год.

Час $\frac{180}{x}$ більший за час $\frac{180-35}{x} + \frac{35}{x+10}$ на 5 хв, тобто на $\frac{1}{12}$ год. Отже, складаємо рівняння:

$$\frac{180}{x} = \frac{180-35}{x} + \frac{35}{x+10} + \frac{1}{12}.$$

Одержали дробове раціональне рівняння, що є моделлю ситуації, поданої в задачі.

Робота з математичною моделлю. Розв'язуємо рівняння:

ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -10$.

$$\frac{180}{x} - \frac{180-35}{x} - \frac{35}{x+10} - \frac{1}{12} = 0,$$

$$\frac{180\cdot 12(x+10)-145\cdot 12(x+10)-35\cdot 12x-x(x+10)}{12x(x+10)}=0,$$

$$2160(x+10)-1740(x+10)-420x-x(x+10)=0,$$

$$2160x+21600-1740x-17400-420x-x^2-10x=0,$$

$$x^2+10x-4200=0.$$

Одержали квадратне рівняння з коефіцієнтами $a = 1$, $b = 10$, $c = -4200$.

Розв'яжемо його:

$$D=b^2-4ac=10^2-4\cdot 1\cdot(-4200)=100+16800=16900,$$

$D > 0$ — два різні корені.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-10\pm 130}{2\cdot 1}=\frac{-10\pm 130}{2},$$

$x_1 = 60$, $x_2 = -70$.

Перевірка:

$x = 60$ — входить до ОДЗ, $x = -70$ — входить до ОДЗ.

Складання відповіді до задачі. У задачі необхідно визначити швидкість автобуса за розкладом, яку позначили x. Одержали $x = 60$ або $x = -70$. Значення $x = -70$ не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість автобуса не може бути від'ємним числом. Значення $x = 60$ задовольняє умову задачі. Отже, шукана швидкість автобуса за розкладом дорівнює 60 км/год.

Зверніть увагу:
для складання рівняння необхідно порівнювати величини одного й того самого найменування — відстань із відстанню, швидкість зі швидкістю, час із часом, вартість із вартістю, кількість із кількістю тощо.

3. ЗАДАЧІ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ

Ви вже знаєте, що обсяг виконаної роботи знаходять як добуток продуктивності праці й часу: $A = pt$, де A — обсяг роботи; p — продуктивність праці; t — час роботи. Тому для складання математичної моделі цієї задачі можна застосувати одну з формул для знаходження: обсягу роботи — $A = pt$, продуктивності праці — $p = \frac{A}{t}$ або часу роботи — $t = \frac{A}{p}$.

Зверніть увагу:
якщо в умові задачі не вказано обсяг роботи, то його приймають за число 1.

Задача 2. Через дві труби резервуар можна заповнити за 4 хв. Через першу трубу цей резервуар може заповнитися на 6 хв швидше, ніж через другу. За скільки хвилин заповниться цей резервуар, якщо працює одна перша труба?

Розв'язання.

Побудова математичної моделі. Нехай час заповнення резервуара через першу трубу — x хв, тоді час заповнення цього резервуара через другу трубу — $(x + 6)$ хв.

Обсяг роботи, що полягає в заповненні резервуара, приймаємо за 1. Отже, продуктивність першої труби становить $\frac{1}{x}$, а другої — $\frac{1}{x+6}$. За умовою, дві труби можуть заповнити резервуар за 4 хв, тому за цей час перша труба виконає $\frac{4}{x}$ обсягу роботи, а друга — $\frac{4}{x+6}$. Складаємо рівняння: $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+6}=1$.

Для побудови математичної моделі короткий запис даних задачі можна подати в таблиці (табл. 27).

Таблиця 27

Труба	Час роботи	Продуктивність	Робота
Перша	x	$\frac{1}{x}$	$\left.\begin{matrix}\frac{4}{x}\\ \frac{4}{x+6}\end{matrix}\right\}1$
Друга	$x + 6$	$\frac{1}{x+6}$	

Робота з математичною моделлю. Розв'язуємо рівняння:

ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -6$.

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x+6}-1=0,$$

$$\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{x(x+6)}=0,$$

$$4(x+6)+4x-x(x+6)=0,$$

$$4x+24+4x-x^2-6x=0,$$

$$x^2-2x-24=0.$$

Одержали квадратне рівняння з коефіцієнтами $a = 1$, $b = -2$, $c = -24$.

Розв'язуємо його:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100,$$

$D > 0$ — два різні корені.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 10}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 10}{2},\ x_1 = 6,\ x_2 = -4.$$

Перевірка:
$x = 6$ — входить до ОДЗ, $x = -4$ — входить до ОДЗ.

Складання відповіді до задачі. У задачі необхідно визначити час заповнення резервуара через першу трубу, який позначили x. Одержали $x = 6$ або $x = -4$. Проаналізуємо знайдені корені рівняння. Значення $x = -4$ не задовольняє умову задачі, оскільки час роботи не може бути від'ємним числом. Значення $x = 6$ задовольняє умову задачі. Отже, час заповнення резервуара через першу трубу становить 6 хв.

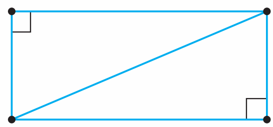
4. ЗАДАЧІ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ

Для розв'язування задач геометричного змісту також застосовують квадратні рівняння або рівняння, що зводяться до квадратних.

Задача 3. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а його діагональ — 13 см. Знайдіть сторони прямокутника.

Розв'язання.

Побудова математичної моделі. Нехай x см — довжина однієї зі сторін прямокутника. Оскільки периметр прямокутника 34 см, то інша його сторона дорівнює $34 : 2 - x$, тобто $(17 - x)$ см.



Мал. 49

Діагональ ділить прямокутник на два рівні прямокутні трикутники, катети яких є сторонами прямокутника, а гіпотенуза — його діагоналлю (мал. 49). Застосуємо теорему Піфагора: $x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$. Маємо рівняння, яке є математичною моделлю ситуації, поданої в задачі.

Робота з математичною моделлю. Розв'яжемо рівняння:

$$x^2 + (17 - x)^2 = 169, \quad x^2 + 289 - 34x + x^2 - 169 = 0,$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \ \big|: 2, \quad x^2 - 17x + 60 = 0.$$

Одержали квадратне рівняння з коефіцієнтами $a = 1$, $b = -17$, $c = 60$.

Розв'яжемо його: $D = b^2 - 4ac = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49,$

$D > 0$ — два різні корені.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{17\pm7}{2\cdot1}=\frac{17\pm7}{2},\ x_1=12,\ x_2=5.$$

Перевірка:

x = 12 — входить до ОДЗ, x = 5 — входить до ОДЗ.

Складання відповіді до задачі. У задачі необхідно знайти довжини сторін прямокутника. За x прийнято довжину однієї зі сторін прямокутника. Одержали x = 12 або x = 5. Обидва корені задовольняють умову задачі.

Якщо x = 12, то довжина цієї сторони дорівнює 12 см. Тоді довжина іншої сторони становить: $17-x=17-12=5$ (см). Якщо x = 5, то довжина цієї сторони дорівнює 5 см. Тоді довжина іншої сторони становить: $17-x=17-5=12$ (см). Одержали дві пари значень для довжин сторін прямокутника:

12 см і 5 см та 5 см і 12 см.

Обидві ці пари задовольняють умову задачі. До того ж, не є важливим, яку зі сторін прямокутника вважати першою, а яку — другою. Тому вважаємо, що знайдені дві пари значень збігаються й задача має один розв'язок: довжини сторін прямокутника дорівнюють 5 см і 12 см.

Зверніть увагу:

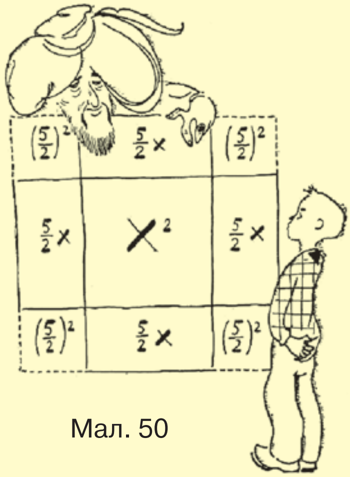
— якщо в задачі необхідно знайти пару чисел a і b, то таких пар може бути дві: a і b та b і a;

— якщо за умовою задачі не важливо, у якому порядку подавати знайдені числа, то із двох можливих пар чисел у відповідь записують лише одну: або a і b, або b і a.

Дізнайтеся більше

У давнину, коли геометрія була розвинена більше, ніж алгебра, одним зі способів розв'язування квадратних рівнянь був геометричний спосіб. Наведемо приклад розв'язування квадратного рівняння $x^2+10x=39$, запропонованого аль-Хорезмі (787–бл. 850). В оригіналі ця задача формулюється так: «Квадрат і десять коренів дорівнюють 39».

Розв'язання. Намалюємо квадрат зі стороною x. Площа такого квадрата дорівнює x^2. На сторонах квадрата побудуємо чотири прямокутники зі сторонами x і $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$, а в кутах — чотири квадрати зі стороною $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ (мал. 50). Одержали великий квадрат. Тоді площа кожного з добудованих прямокутників дорівнює $\frac{5}{2}x$, а сума площ усіх чотирьох прямокутників дорівнює $10x$. Площа кожного з добудованих квадратів відповідно дорівнює $\frac{25}{4}$, а сума площ усіх чотирьох квадратів дорівнює 25. Додамо площу початкового квадрата та площі прямокутників. Одержимо вираз x^2+10x, значення якого дорівнює 39. Звідси можна зробити висновок, що площа великого квадрата буде дорівнювати: $39 + 25 = 64$. Отже, сторона великого квадрата дорівнює 8.



Мал. 50

Сторону квадрата можна подати як вираз $x+2\cdot\frac{5}{2}$. Звідси $x = 3$.

Зауважимо, що даним способом можна знаходити лише додатні корені квадратного рівняння.

Пригадайте головне

1. Що таке математична модель?
2. Що таке математичне моделювання?
3. Назвіть етапи математичного моделювання.

Розв'яжіть задачі

854'. Чи може бути математичною моделлю:
1) число;
2) рівняння;
3) схема;
4) система рівнянь?

855'. Розставте етапи математичного моделювання за порядком їх виконання:
1) робота з математичною моделлю;
2) складання відповіді до задачі;
3) побудова математичної моделі.

856°. Одне із чисел у 5 разів більше за друге. Чи правильно подано цю умову за допомогою змінної x:
1) перше число — 5, друге — x;
2) перше число — $5x$, друге — x;
3) перше число — $(x + 5)$, друге — x;
4) перше число — $5x$, друге — 5?

857°. Одне із чисел на 2 більше за друге. Чи правильно подано цю умову за допомогою змінної x:
1) перше число — $(x + 2)$, друге — 2;
2) перше число — $2x$, друге — x;
3) перше число — $(x + 2)$, друге — x;
4) перше число — 2, друге — x?

858°. Сума двох чисел дорівнює 15. Чи правильно подано цю умову за допомогою змінної x:
1) перше число — x, друге — 15;
2) перше число — x, друге — $15x$;
3) перше число — x, друге — $(x + 15)$;
4) перше число — x, друге — $(15 - x)$?

859°. Складіть рівність для визначення часу руху:
1) автобуса, який проїхав 120 км зі швидкістю v км/год;
2) велосипедиста, який проїхав відстань s км зі швидкістю 10 км/год.

860°. Швидкість течії річки 2 км/год. Складіть рівність для визначення часу руху катера, який проплив:
1) 40 км за течією річки, якщо власна швидкість катера — v км/год;
2) s км проти течії річки, якщо власна швидкість катера — 20 км/год.

861°. Складіть рівність для визначення швидкості руху:
1) автобуса, який проїхав 120 км за t год;
2) велосипедиста, який проїхав відстань s км за 0,5 год.

862°. Складіть рівність для визначення продуктивності праці за такими даними:
1) труба заповнює басейн за 3 год;
2) бригада будівників виконує завдання за 15 днів;
3) трактор оре поле за 2 дні;
4) програміст виконує завдання за 5 год.

863°. Добуток двох чисел дорівнює 72. Знайдіть ці числа, якщо:
1) одне із чисел на 1 більше за друге;
2) одне із чисел у 2 рази менше від другого.

864°. Добуток двох чисел дорівнює 48. Знайдіть ці числа, якщо:
1) одне із чисел на 2 менше від другого;
2) одне із чисел у 3 рази більше за друге.

865°. Добуток двох чисел дорівнює 32. Знайдіть ці числа, якщо:
1) їх сума дорівнює 12; 2) їх різниця дорівнює 14.

866°. Добуток двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо:
1) їх сума дорівнює 18; 2) їх різниця дорівнює 4.

867°. Знайдіть два послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 240.

868°. Знайдіть два послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 132.

869°. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо чисельник зменшити на 2, а знаменник — на 4, то одержимо дріб, який на $\frac{1}{8}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

870°. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо чисельник збільшити на 1, а знаменник — на 4, то одержимо дріб, який на $\frac{1}{8}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

871°. Із Києва до Харкова одночасно виїхали автобус й автомобіль. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса, тому він прибув до Харкова на 2 год раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між містами 480 км.

872°. Із Львова до Києва одночасно виїхали автобус й автомобіль. Швидкість автомобіля на 30 км/год більша за швидкість автобуса, тому він прибув до Києва на 3 год раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між містами 540 км.

873°. Із Києва до Бухареста, що розташований на відстані 900 км, відправився міжнародний автобус. Автобус їхав зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж було заплановано за розкладом. Тому до Бухареста він прибув на 1 год 15 хв раніше, ніж планував. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом?

874°. Із Києва до Мінська, що розташований на відстані 560 км, відправився міжнародний автобус. Через негоду автобус їхав зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж було заплановано за розкладом. Тому до Мінська він прибув із запізненням на 1 год. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом?

875°. Моторний човен проплив проти течії річки 24 км і повернувся до пункту відправлення, витративши на зворотний шлях на 2 год менше. Знайдіть швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 1 км/год.

876°. Катер проплив 18 км за течією річки та 20 км проти течії, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть швидкість течії, якщо швидкість катера дорівнює 20 км/год.

877°. Замовлення на 110 деталей перший робітник виконує на 1 год швидше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє другий робітник, якщо перший робітник за 1 год виготовляє на 1 деталь більше?

878°. Замовлення на 156 деталей перший робітник виконує на 1 год довше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє перший робітник, якщо другий робітник за 1 год виготовляє на 1 деталь більше?

879°. Петрик та Миколка майструють із паперу кораблики. За 1 год Петрик може виготовити 8 корабликів, а Миколка — 12. Скільки годин знадобиться хлопцям, щоб разом виготовити 100 корабликів?

880°. Тетянка з Наталкою виготовляють новорічні прикраси для шкільної ялинки. За 1 год Тетянка може виготовити 4 прикраси, а Наталка — 5 прикрас. Скільки годин знадобиться дівчатам, щоб виготовити 45 прикрас?

881°. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 23 см, а площа даного трикутника дорівнює 60 см^2.

882°. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 14 см, а площа даного трикутника — 24 см^2.

883°. Площа прямокутника, одна зі сторін якого на 7 см більша за іншу, дорівнює 60 см^2. Знайдіть сторони та периметр прямокутника.

884°. Площа прямокутника, одна зі сторін якого на 3 см більша за іншу, дорівнює 54 см^2. Знайдіть сторони та периметр прямокутника.

885. Знайдіть два послідовні натуральні числа, сума квадратів яких дорівнює 313.

886. Знайдіть два послідовні натуральні числа, сума квадратів яких дорівнює 365.

887. У міському чемпіонаті з баскетболу було проведено 66 матчів. Скільки команд брало участь у чемпіонаті, якщо кожна команда провела з кожною по одній грі?

888. У турнірі з шахів було зіграно 231 партію. Скільки шахістів брало участь у турнірі, якщо кожний з кожним зіграв по одному разу?

889. Повертаючись від бабусі додому, Василько йшов до автобусної зупинки вздовж річки. Коли до зупинки залишалося 3 км, він вирішив скупатися й витратив на це 15 хв. Для того щоб не запізнитися на автобус, він збільшив швидкість на 2 км/год. З якою швидкістю рухався Василько на початку?

890. Повертаючись із походу додому, учні 8-А класу зробили привал на 20 хв, коли до їхнього містечка залишилося 4 км. Щоб встигнути прибути в зазначений час, вони збільшили швидкість на 1 км/год. З якою швидкістю рухались учні 8-А класу до привалу?

891. Мотоцикліст виїхав зі сталою швидкістю з Миколаєва до Херсона, відстань між якими дорівнює 70 км. На наступний день він відправився назад зі швидкістю на 5 км/год більшою, ніж напередодні. У дорозі він зробив зупинку на 20 хв, тому на зворотний шлях він витратив стільки ж часу, скільки на шлях із Миколаєва до Херсона. Знайдіть швидкість мотоцикліста на шляху з Миколаєва до Херсона.

892. Із пункту A до пункту B, відстань між якими 105 км, одночасно виїхали автомобіліст і мотоцикліст. Відомо, що за годину автомобіліст проїжджає на 40 км більше, ніж мотоцикліст. Визначте швидкість мотоцикліста, якщо відомо, що він прибув до пункту B на 2 год пізніше від автомобіліста.

893. Товарний поїзд було затримано в дорозі на 18 хв. Щоб надолужити цей час, решту відстані в 60 км поїзд проїхав, збільшивши швидкість на 10 км/год. Знайдіть початкову швидкість товарного поїзда.

894. Поїзд мав проїхати 840 км за певний час. Але на середині шляху його було затримано на 30 хв через технічну несправність. Щоб прибути вчасно, машиністові довелося збільшити швидкість поїзда на 2 км/год. Скільки часу перебував у дорозі поїзд?

895. На середині шляху між станціями A і B поїзд було затримано на 10 хв. Щоб прибути до станції B за розкладом, машиніст збільшив швидкість поїзда на 12 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда, якщо відстань між станціями A і B дорівнює 120 км.

896. Під час відпочинку родина Сергійка пропливла на моторному човні 10 км озером і 4 км проти течії річки, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

897. Катер проплив 15 км за течією річки і 4 км озером, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 4 км/год.

898. Баржа о 10 год вийшла з пункту A до пункту B, розташованого на відстані 15 км від пункту A. Простоявши в пункті B 1 год 20 хв, баржа вирушила назад і повернулася до пункту A о 16 год. Визначте швидкість течії річки, якщо власна швидкість баржі дорівнює 7 км/год.

899. Круїзний теплохід «Славутич» проходить за течією річки до пункту призначення 200 км і після стоянки повертається до пункту відправлення. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода дорівнює 15 км/год, стоянка триває 10 год, а до пункту відправлення теплохід повертається через 40 год після відплиття з нього.

900. На виготовлення 475 деталей перший робітник витрачає на 6 год менше, ніж другий робітник на виготовлення 550 таких самих деталей. Відомо, що перший робітник за 1 год виготовляє на 3 деталі більше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє перший робітник?

901. На виготовлення 40 деталей перший робітник витрачає на 6 год менше, ніж другий робітник на виготовлення 70 таких самих деталей. Відомо, що перший робітник за 1 год виготовляє на 3 деталі більше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє другий робітник?

902. Перша труба за 1 хв пропускає на 1 л води менше, ніж друга. Скільки літрів води за 1 хв пропускає перша труба, якщо резервуар об'ємом 110 л вона заповнює на 2 хв довше, ніж друга труба заповнює резервуар об'ємом 99 л?

903. Перша труба за 1 хв пропускає на 5 л води менше, ніж друга. Скільки літрів води за 1 хв пропускає друга труба, якщо резервуар об'ємом 375 л вона заповнює на 10 хв швидше, ніж перша труба заповнює резервуар об'ємом 500 л?

904. Плиточник має укласти 175 $м^2$ плитки. Якщо щодня він буде укладати на 10 $м^2$ більше, ніж повинен, то закінчить роботу на 2 дні раніше. Скільки квадратних метрів плитки за день має укладати плиточник?

905. Кравчиня має пошити 60 суконь. Якщо щодня вона буде шити на 2 сукні більше, ніж заплановано, то закінчить роботу на 5 днів раніше. Скільки суконь за день за планом має шити кравчиня?

906. Два промислові фільтри, працюючи одночасно, очищують цистерну води за 30 хв. Визначте, за скільки хвилин другий фільтр очистить цистерну води, працюючи окремо, якщо відомо, що він зробить це на 25 хв швидше, ніж перший.

907. Якщо два принтери працюють одночасно, то витрата паперу становить 1 пачку за 12 хв. Визначте, за скільки хвилин буде витрачено пачку паперу на першому принтері, якщо це відбудеться на 10 хв швидше, ніж на другому.

908. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а площа — 60 $см^2$. Знайдіть діагональ прямокутника.

909. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а площа — 48 $см^2$. Знайдіть діагональ прямокутника.

910. Знайдіть довжини сторін ділянки землі, що має форму прямокутника, якщо площа ділянки дорівнює 12 $м^2$, а її ширина становить $\frac{3}{4}$ довжини.

911*. Двоє фермерів на двох ділянках посадили 330 дерев. На кожній ділянці кількість рядів на 1 більша, ніж кількість дерев у ряді. По скільки дерев посаджено в кожному ряді на кожній ділянці окремо, якщо відомо, що на першій ділянці на 150 дерев більше, ніж на другій?

912*. Знайдіть трицифрове число, цифри якого, записані в оберненому порядку, дадуть число, яке на 198 менше від даного числа. Відомо, що сума цифр числа дорівнює 12, а сума їх квадратів — 74.

913*. Знайдіть два числа, якщо їх сума, різниця та добуток відносяться, як 5 : 3 : 4.

914*. Ігор і Богдан зможуть пофарбувати паркан у бабусі в селі за 9 год, Богдан і Василь — за 12 год, а Василь та Ігор — за 18 год. За скільки годин хлопці пофарбують паркан, якщо будуть працювати втрьох?

915*. Петрик і Катруся збирали малину. Коли Катруся наповнила $\frac{2}{3}$ свого дволітрового бідона, трилітровий бідон Петрика був майже повний. Діти помінялися бідонами й через деякий час одночасно закінчили збирання ягід. У скільки разів швидше працював Петрик, ніж Катруся? Скільки літрів ягід набрали діти до того, як помінялися бідонами?

916*. Пасажир метро спускається донизу ескалатором за 24 с. Якщо пасажир крокує нерухомим ескалатором, то він спускається донизу за 42 с. За скільки секунд він спуститься донизу, крокуючи ескалатором, який рухається?

Проявіть компетентність

917. Подружки Тетянка й Наталка полюбляють спілкуватися за допомогою СМС-повідомлень. СМС-повідомлення із 24 слів Тетянка набирає на 2 хв швидше, ніж Наталка.
1. Скільки слів набирає за 1 хв Наталка, якщо відомо, що Тетянка за 1 хв набирає на 2 слова більше, ніж Наталка?
2. Скільки слів набирає за 1 хв Тетянка?
3. Дівчатка дізналися, що в Сергійка сьогодні день народження, і відразу ж одночасно почали набирати вітальні СМС-повідомлення. Тетянка набрала привітання із 36 слів, а Наталка — із 24. Чиє привітання Сергійко одержить першим?

Задачі на повторення

918. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; 2) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)$.

919. Знайдіть значення виразу:

1) $12x^2y^3:\left(3xy^2\right)$, якщо $x=0,75$; $y=\frac{1}{9}$;

2) $\left(-36x^3y^4\right):\left(6xy^2\right)$, якщо $x=\frac{1}{12}$; $y=-1$.

920. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-16}{a^2+8a+16}$; 2) $\frac{2a^2-10a}{a^2-10a+25}$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке квадратне рівняння? Наведіть приклади.
2. Що називають дискримінантом квадратного рівняння?
3. Скільки коренів може мати квадратне рівняння?
4. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.
5. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
6. Який многочлен називають квадратним тричленом?
7. Що таке корені квадратного тричлена?
8. Запишіть формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
9. Поясніть, як розв'язують цілі раціональні рівняння, що зводяться до квадратних.
10. Поясніть, як розв'язують дробові раціональні рівняння.
11. Поясніть, як розв'язують рівняння способом уведення нової змінної.
12. Які рівняння називаються біквадратними?
13. Поясніть, як розв'язують біквадратні рівняння.
14. Що таке математична модель?
15. Що таке математичне моделювання?
16. Назвіть етапи математичного моделювання.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° Розв'яжіть рівняння $(x-9)^2 = 0$.

А. ± 9.
Б. ± 3.
В. 3.
Г. 9.

2° Розв'яжіть рівняння $(x+5)^2 = 16$.

А. 1; 9.
Б. –1; –9.
В. 11; 21.
Г. –11; –21.

3° Розв'яжіть рівняння $3x^2 + x - 4 = 0$.

А. 3; –4. **В.** $-1; \frac{4}{3}$.

Б. –3; 4. **Г.** $1; -\frac{4}{3}$.

4 Розв'яжіть рівняння $x^2 + 6x - 40 = 0$ за теоремою Вієта.

А. 5; –8. **В.** 4; –10.

Б. –5; 8. **Г.** –4; 10.

5* Розв'яжіть рівняння $x^2 + 4x + m = 0$ відносно змінної x.

А. $\pm\sqrt{m-4}$. **В.** $-2 \pm \sqrt{m}$.

Б. $2 \pm \sqrt{m-4}$. **Г.** $-2 \pm \sqrt{4-m}$.

№ 2

1° Розкладіть квадратний тричлен $x^2 + 4x - 5$ на лінійні множники.

А. $(x-1)(x-5)$. **В.** $(x-1)(x+5)$.

Б. $(x+1)(x-5)$. **Г.** $(x+1)(x+5)$.

2° Розв'яжіть рівняння $x(x+2) = 8$.

А. –8; 1. **В.** –2; 4.

Б. 8; –1. **Г.** 2; –4.

3° Скоротіть дріб $\frac{x+5}{x^2+3x-10}$.

А. $\frac{1}{x+5}$. **В.** $\frac{1}{x-2}$.

Б. $\frac{1}{x-5}$. **Г.** $\frac{1}{x+2}$.

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-6}{x-2} = \frac{x}{2-x}$.

А. 2; –3. **В.** 2.

Б. –2; 3. **Г.** –3.

5* За 4 год туристи подолали 300 км. Відомо, що $\frac{2}{5}$ відстані вони проїхали автобусом, а решту — поїздом. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 30 км/год більша за швидкість автобуса.

А. 60 км/год. **В.** 80 км/год.

Б. 70 км/год. **Г.** 90 км/год.

ВІДПОВІДІ

РОЗДІЛ 1

§ 1

9. 1) Так; 3) так; 5) ні. **10.** 3) Так. **11.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. **12.** 1) x — будь-яке число, крім 2; 3) b — будь-яке число, крім 1; 5) b — будь-яке число. **13.** 1) x — будь-яке число, крім –1; 3) z — будь-яке число, крім –1; 5) a — будь-яке число. **14.** 1) 2; 3) 4; 5) 8; 7) –2; 9) 6. **15.** 1) 3; 3) 9; 5) 15. **18.** 1) Ні; 3) ні. **21.** 1) a — будь-яке число, крім 0, c — будь-яке число, крім 0; 3) b — будь-яке число, крім 0, c — будь-яке число, крім 0; 5) a — будь-яке число, крім 1, c — будь-яке число, крім –1; 7) b — будь-яке число, крім 4, c — будь-яке число, крім 3; 9) a — будь-яке число, крім –1, c — будь-яке число, крім 0; 11) a — будь-яке число, крім 2, c — будь-яке число, крім –2; 13) x — будь-яке число, крім $-1\frac{1}{3}$ і 2,5, y — будь-яке число; 15) b — будь-яке число, крім 0,25, c — будь-яке число, крім 0,25. **22.** 1) a — будь-яке число, крім –2 і 2; 3) b — будь-яке число, крім –5 і 5, c — будь-яке число; 5) y — будь-яке число, крім –5 і 5; 7) b — будь-яке число, крім 3; 9) x — будь-яке число, крім –2. **23.** 1) b — будь-яке число, крім 0, c — будь-яке число, крім 0; 3) a — будь-яке число, крім 2, b — будь-яке число, крім 0; 5) a — будь-яке число, крім $-\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{3}$. **24.** 1) Наприклад, $a - 2$; 3) наприклад, $2a - 1$; 5) наприклад, $3a + 2$. **25.** 1) Наприклад, $b^2 - 1$; 5) наприклад, $(b+1)(5b+3)$; 6) наприклад, $(b-5)(3b+1)$. **26.** 1) Наприклад, $c - 3$; 3) наприклад, $(c+1)(c-5)$. **27.** 1) 0; 3) $-\frac{1}{3}$; 5) 1,2. **28.** 1) 0; 3) $-\frac{3}{7}$; 5) 1,8. **29.** 1) Не можна визначити; 3) $-\frac{5}{48}$. **30.** 1) 0; 3) –15. **35.** 1) 1,6; 3) 6,2; 5) $\frac{32}{75}$. **36.** 1) 5; 2) $3\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{5}{12}$. **38.** 1) z — будь-яке число; 3) z — будь-яке число, крім –0,5 і 0,5; 5) z — будь-яке число, крім –6 і 0. **39.** 1) $\frac{5}{9}$; 3) 1,3. **40.** 1) x — будь-які числа, крім 2 і 4; 2) x — будь-які числа, крім 9 і 12. **42.** 1) $\frac{7}{12}$; 2) $\frac{23}{30}$; 3) $\frac{13}{16}$. **43.** 1) 10 год 23 хв; 3) 1 км 79 м.

§ 2

48. 1) $\frac{x^2y^3}{4xy^4}$; 3) $\frac{2x^2y^2}{8xy^3}$; 5) $\frac{2x}{8y}$. **49.** 1) $\frac{2x^3y^4}{8x^2y^3}$; 3) $\frac{x^3y^3}{4x^2y^2}$. **50.** Ні. $\frac{xy}{5}$. **51.** 1) Так, $\frac{1}{2x}$; 3) ні; 5) ні. **52.** 1) $\frac{2x}{y}$; 3) $\frac{16a}{3b}$; 5) $\frac{7x}{3y}$. **53.** 1) $6x^2y^2$; 3) $\frac{3ab^2}{2c^2}$; 5) $\frac{3xy^2}{a}$. **54.** 1) $\frac{3x}{a}$; 3) $\frac{5a^2}{6}$. **55.** 1) $\frac{x-y}{2x}$; 3) $\frac{x-2y}{2y}$; 5) $\frac{x+y}{3y}$; 7) $2x+3y$; 9) $\frac{x-y}{2a}$. **56.** 1) 3; 3) 1,5; 5) –3; 7) $-\frac{a}{b}$; 9) $-\frac{2a}{3b}$. **57.** 1) $\frac{3x-12y}{2x}$; 3) $\frac{x-y}{2c}$;

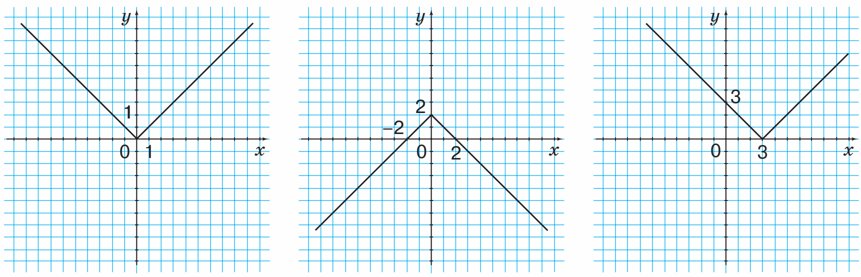
5) $\frac{11}{a}$. **59.** 1) $\frac{3x}{x-1}$; 3) $\frac{a-2}{4a}$; 5) $\frac{y^2-1}{3y^2}$. **60.** 1) $7x$; 3) $3a$; 5) $-\frac{1}{y}$. **61.** 1) $\frac{4b}{1-b^2}$; 3) $4x$.

62. 1) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{a-3b}{2}$; 5) $\frac{a(a+5b)}{b}$. **63.** 1) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{a(a-4b)}{b(a+4b)}$. **64.** 1) $\frac{x-y}{xy}$;

3) $\frac{5-a}{b}$. **65.** 1) $\frac{x^2+x+1}{x^2}$; 3) $\frac{a}{b(a+b)}$. **66.** 1) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$; 3) $\frac{x+z}{y-x+z}$.

67. 1) $\frac{x-y}{x}$; 2) $\frac{a-3}{a-b}$. **68.** 1) $\frac{x-1}{x-3}$; 3) x^4-x^2+1. **69.** 1) $y=\begin{cases}x, x>0,\\ -x, x<0;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}2-x, x\ge 0,\\ 2+x, x<0;\end{cases}$ 3) $y=\begin{cases}3-x, x<3,\\ x-3, x>3.\end{cases}$



71. 1) 12 340 або 12 345; 3) 12 342, або 12 345, або 12 348. **72.** 0,3 л.

§ 3

76. 1) $\frac{3}{3x}$; 3) $\frac{x}{x^2}$; 5) $\frac{5x^2}{5x^3}$. **77.** 1) $\frac{2}{4a}$; 3) $\frac{a}{2a^2}$; 5) $\frac{5a^2}{10a^3}$. **78.** 1) $\frac{3}{9b}$; 3) $\frac{b}{3b^2}$;

5) $\frac{5b^2}{15b^3}$. **79.** 1) $\frac{2}{2ab}$; 3) $\frac{b}{ab^2}$; 5) $\frac{3c}{3abc}$. **80.** 1) $\frac{2}{2(a+b)}$; 3) $\frac{a+b}{(a+b)^2}$.

81. 1) $\frac{4}{4xy}$; 3) $\frac{y}{xy^2}$; 5) $\frac{6z}{6xyz}$. **82.** 1) $\frac{7}{56}$ і $\frac{8}{56}$; 3) $\frac{3}{6x}$ і $\frac{1}{6x}$. **83.** 1) $\frac{c}{abc}$ і $\frac{b}{abc}$;

3) $\frac{x}{x^3y}$ і $\frac{1}{x^3y}$; 5) $\frac{12}{15b^2}$ і $\frac{3b}{15b^2}$. **84.** 3) $\frac{6c}{4abc}$ і $\frac{b}{4abc}$. **85.** 1) $\frac{2}{2a+2}$ і $\frac{1}{2a+2}$;

3) $\frac{4}{4-4x}$ і $\frac{1}{4-4x}$. **86.** 1) $\frac{2}{a-1}$ і $\frac{-3}{a-1}$; 5) $\frac{9}{9-3y}$ і $\frac{1}{9-3y}$. **87.** 2) $\frac{4}{20a+4}$ і

$\frac{1}{20a+4}$. **89.** 1) $\frac{a(a-b)}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{a+b}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{a}{a(a^2-b^2)}$. **91.** 1) $\frac{2}{2(a^2-9)}$, $\frac{a-3}{2(a^2-9)}$,

$\frac{-2(a+3)}{2(a^2-9)}$. **92.** 1) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$, $\frac{x+1}{x^4-1}$, $\frac{x-1}{x^4-1}$, $\frac{1}{x^4-1}$; 2) $\frac{x^2+8x+15}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$,

$\frac{x^2+6x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$, $\frac{x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$; 3) $\frac{x-2}{(x-2)(x+1)(x+3)}$,

$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)(x+3)}$, $\frac{x+1}{(x-2)(x+1)(x+3)}$. **94.** $a=5$, $b=-2$. **95.** 25 учнів.

§ 4

104. 1) $\frac{9}{5x}$; 3) $\frac{4}{3c}$; 5) $\frac{5y}{y+1}$; 7) $\frac{7a}{x+2}$. **105.** 1) $\frac{5}{7ab}$; 3) $\frac{5xy}{2a^2b}$; 5) $\frac{7y}{a-c}$. **106.** 1) $\frac{7}{9y}$; 3) $\frac{13b}{a^2+3}$; 5) $\frac{10c}{a+2}$. **107.** 1) $\frac{9}{7x}$; 3) $\frac{8}{9c}$; 5) $-\frac{5c}{c+2}$; 7) $-\frac{13a}{d-1}$. **108.** 1) $-\frac{5}{4ab}$; 3) $\frac{9xy}{5ab^2}$; 5) $-\frac{7c}{a+c}$. **109.** 1) $-\frac{7}{5y}$; 3) $\frac{b}{a^2-1}$; 5) $-\frac{2c}{1+a}$. **110.** 1) $\frac{c}{9}$; 3) ac. **111.** 1) 1; 3) 2; 5) 1. **112.** 1) $3-x$; 3) $6-c$; 5) $y+1$; 7) –2; 9) $c+1$. **113.** 1) 1; 3) –1; 5) $\frac{1}{a-8}$. **114.** 1) $\frac{1}{1-a}$, 10; 2) $-\frac{1}{y+2}$, –5; 3) $\frac{3}{b+1}$, 10. **115.** 1) $\frac{7}{10x}$; 3) $\frac{43}{36c}$; 5) $\frac{11y}{5(y+1)}$; 7) $-\frac{1}{4x}$; 9) $\frac{14}{45c}$. **116.** 1) $\frac{11}{12ab}$; 3) $\frac{13x}{28a^2b}$; 5) $\frac{9y}{5(a-c)}$. **117.** 1) $-\frac{9}{8ab}$; 3) $\frac{74x}{75b^2}$. **118.** 1) $\frac{5}{16y}$; 3) $\frac{14b}{3(a^2+3)}$; 5) $\frac{7c}{12(a-2)}$. **119.** 1) $\frac{5x^2-1}{10x^3}$; 3) $\frac{8x-7}{x(x+5)}$; 5) $\frac{y+3}{3(y+1)}$. **120.** 1) $\frac{6}{9-x^2}$; 3) $\frac{12}{36-c^2}$. **121.** 1) $\frac{1}{1-a^2}$, 1,8; 3) $\frac{5}{1-b^2}$, $-\frac{1}{3}$. **122.** 1) $\frac{21}{9-a^2}$, 4,2. **123.** 1) $x-2$; 3) 1. **124.** 1) a^2-ab+b^2; 3) x^2-xy+y^2; 7) $\frac{1}{a^2-ab+b^2}$; 9) $\frac{1}{x^2-2x+4}$. **125.** 1) $\frac{y+2}{5}$; 3) $-(a^2+4a+16)$; 5) $\frac{1}{x+y}$. **126.** 1) 1; 3) $\frac{2(x-y)}{x+y}$; 5) $\frac{x^2+5x+25}{5-x}$. **127.** 1) $\frac{x^2+x+1}{x-1}$. **128.** 1) $\frac{6x+1}{6}$. **129.** 1) $\frac{2y}{y^2-x^2}$; 3) $\frac{108}{a(9-a^2)}$. **130.** 3) $\frac{1}{t(t-1)}$. **131.** 1) $a=3$, $b=1$; 2) $a=-1$, $b=4$; 3) $a=0{,}125$, $b=0{,}125$; 4) $a=1$; $b=1$. **132.** *Вказівка*: спростіть даний вираз і покажіть, що він тотожно дорівнює числу 1 на ОДЗ змінної x. **133.** *Вказівка*: спростіть даний вираз і покажіть, що він тотожно дорівнює числу 1,5 на ОДЗ змінної y. **134.** 1) 0; 2) $\frac{3}{x(x+3)}$. **135.** $\frac{100}{x(x+100)}$. **137.** 1) 96; 2) 240; 3) 480. **138.** 1) (1; 2); 2) (2; 1).

§ 5

142. 1) $\frac{ax}{40}$; 3) $\frac{ax}{4cy}$; 5) $\frac{6ax}{35by}$; 7) $\frac{ax}{5cy}$; 9) $\frac{8xy}{15b}$; 11) $\frac{2a}{3y}$. **143.** 1) $\frac{5y}{3a}$; 3) $\frac{8y}{15bx^2}$. **144.** 1) $\frac{2}{x+1}$; 3) 1; 5) –7,5. **145.** 1) $\frac{5}{y+3}$; 3) –0,75. **146.** 1) $\frac{x^2}{8}$; 3) $\frac{x^2}{2y}$; 5) $-6y$; 7) $\frac{24x^5}{5}$. **147.** 1) 11; 3) –5; 5) 21; 7) $2a$; 9) $-1{,}5b$. **148.** 1) $\frac{4}{a^2}$;

3) $-\frac{16x^2}{5}$. **149.** 1) $\frac{x^4}{36}$; 3) $\frac{x^2}{4y^2}$; 5) $\frac{8a^6}{27}$; 7) $\frac{x^6}{64y^{10}}$. **150.** 1) $\frac{a^6}{16}$; 3) $\frac{25a^2}{b^6}$. **151.** 1) $1{,}5a^2b^2$; 3) $2{,}75a^2b^2$. **152.** 1) $\frac{5}{3}x^2y^2$; 2) $3{,}75x^2y^2$. **154.** 1) $3b$; 2) $4xy^2$. **155.** 1) $21a^3$; 3) $6x$. **156.** 1) $\frac{3b^2y}{2a}$; 3) $(a+b)^2$; 5) $\frac{10}{3}(a-b)^2$; 7) x^2-y^2; 9) $\frac{a^2+b^2}{a}$. **157.** 1) bxy; 2) $x+y$. **158.** 2) –0,5; 3) 4. **159.** 1) $\frac{3}{b^5}$; 3) $\frac{25a^4b^6c^2}{9x^4y^4z^2}$. **160.** 1) –1; 2) 2; 3) $\frac{x^9y^2}{135ac^4}$. **161.** 1) $x-1$; 2) $-a-4$; 3) $\frac{y}{y-4}$. **162.** 1) $\frac{x}{y}$; 2) 1; 3) 1; 4) $\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$. **163.** 1) $-\frac{1}{3}$. **165.** 125 г. **166.** 1) $(x+y)(xy-z^2)$; 3) $(c^2+d^2)(c^4-c^2d^2+d^4)$.

§ 6

169. 1) $\frac{b}{a}$; 3) $\frac{y}{x}$; 5) $\frac{5x}{3y}$; 7) $\frac{3y}{2}$; 9) $\frac{5x}{2y}$; 11) $\frac{5x^2}{7}$. **170.** 1) $\frac{b}{a}$; 3) $\frac{3x}{2y^2}$; 5) $\frac{2b}{3a}$; 7) $\frac{4x}{3y}$. **171.** 1) $\frac{4x}{5y}$; 3) $\frac{7b}{3}$; 5) $\frac{1}{ab}$. **172.** 1) 5; 3) 1; 5) –9. **173.** 1) 9; 2) $2\frac{1}{3}$; 3) $-1\frac{2}{3}$. **174.** 1) 0,2; 3) $\frac{3}{4y^3}$; 5) $\frac{x^2}{5}$; 7) $\frac{5}{2x^4}$; 9) $-\frac{3}{7}$; 11) $\frac{1}{14x^2}$. **175.** 1) 9; 3) –2; 5) 9; 7) a^2; 9) $-b^2$. **176.** 1) $\frac{a^2}{4}$; 3) $-\frac{3}{10x}$; 5) –9. **177.** 1) $3a$; 3) $17a$. **178.** 1) a; 3) $8a$. **179.** 1) $2b$; 3) $9b$. **181.** 1) $9a$; 2) $16xy$. **182.** 1) $7b^3$; 2) $25xy$. **183.** 1) $\frac{2}{ax}$; 3) $2xy^2$; 5) $-\frac{a^2b^2}{2c}$. **184.** 1) $\frac{4(y-x)}{x^2}$; 3) $\frac{3d^2(d-c)}{(c+d)^2}$. **185.** 1) $20a^2$; 2) $\frac{x+y}{(x-y)^2}$. **186.** 1) $x^4+x^2y^2+y^4$; 4) a^2-b^2. **187.** 1) x^2+y^2; 2) $\frac{x-y}{(x+y)(a+b)}$. **188.** 1) 1; 2) –0,5; 3) $\frac{1}{ab}$. **189.** 1) 1; 2) $2x+2$; 3) $(m-n)^2$. **190.** 1) –1; 2) 2. **192.** 220 кг. **193.** 1) 1; 2) 0,5; 3) –5; 4) 0,2.

§ 7

198. 1) 0 або 4; 3) –1 або 4; 5) 0 або 6; 7) –2 або 2. **199.** 1) 0 або 3; 3) 4 або 5. **200.** 1) x — будь-яке число; 3) x — будь-яке число; 5) x — будь-яке число, крім 0 і 2; 7) x — будь-яке число; 9) x — будь-яке число, крім –2 і 1. **201.** 1) x — будь-яке число; 3) x — будь-яке число, крім –5 і 4. **202.** 1) 0; 2) 3; 3) 2; 4) –3; 5) 0; 6) –1 або 1; 7) 0; 8) 5. **203.** 1) ∅; 3) ∅; 5) ∅; 7) ∅. **204.** 1) 0; 2) 4; 3) ∅; 4) ∅. **205.** 1) ∅; 3) ∅; 5) –1; 7) –4. **206.** 1) ∅; 2) 3. **207.** 1) Ні; 3) ні; 5) ні. **208.** 1) 2,8; 3) –4,5; 5) 4; 7) 1,5; 9) 4,2; 11) 4,5; 13) 2; 15) $-\frac{2}{3}$; 17) 7; 19) 2. **209.** 1) 1,75; 3) 16; 5) 11. **210.** 1) Так; 3) так; 5) ні; 7) ні.

212. 1) Ні; 3) так. **213.** 1) ∅; 3) –1; 5) ∅; 7) –3. **214.** 1) ∅; 2) ∅; 3) 1; 4) –3. **215.** 1) 2; 3) 0; 5) –1; 7) 4; 9) $-\frac{27}{40}$. **216.** 1) 3; 3) –3. **217.** 10 км / год. **218.** $\frac{5}{3}$. **219.** $\frac{7}{9}$. **220.** $-\frac{2}{9}$. **221.** $a<3$ і $a>5$. **222.** $a=-0{,}5$ і $a=-2$. **223.** 40 пістолів або 60 пістолів. **225.** 1100 грн. **226.** 5 см і 7 см.

§ 8

227. 4). **228.** 4). **232.** 3). **233.** 1) 3^{-1}; 3) 10^{-1}; 4) 17^{-1}; 7) c^{-1}; 9) x^{-1}. **234.** 1) 4^{-1}; 3) 345^{-1}; 6) y^{-1}. **235.** 1) 6^{-2}; 3) 11^{-7}; 4) 5^{-5}; 7) 44^{-22}; 9) x^{-4}; 13) n^{-15}; 15) c^{-120}. **236.** 1) 5^{-7}; 3) 22^{-7}; 5) y^{-9}. **237.** 1) 2^3; 3) 2^0; 5) 2^{-2}; 8) 2^{-6}. **239.** 1) 3^3; 3) 3^0; 5) 3^{-2}; 6) 3^{-6}. **241.** 3) $\frac{1}{2^5}$; 5) $\frac{1}{10^9}$; 7) $\frac{1}{21^5}$; 12) $\frac{1}{100^{10}}$. **242.** 1) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{20}$; 6) $\frac{1}{25^7}$. **244.** 1) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{20}$; 6) $\frac{1}{1000}$. **245.** 1) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{100}$; 5) 25; 8) 100. **246.** 1) 3^4; 3) $\left(\frac{3}{2}\right)^6$; 5) $-\left(\frac{11}{4}\right)^9$. **247.** 1) 5; 3) 9^6; 5) 27^5. **248.** 1) 1; 3) 1; 5) 1; 8) 1. **249.** 1) 75; 2) $\frac{1}{15}$; 4) 2; 6) –40; 7) 11,1. **250.** 1) 2; 2) 5; 4) –30. **251.** 1) $4^4>4^0$; 4) $3^{-4}<10^0$. **253.** 1) Додатним; 4) від'ємним. **254.** 1) $\frac{1}{a^8}$; 3) $\frac{1}{m^5}$; 8) $\frac{1}{y^{21}}$. **255.** 1) $\frac{1}{a^4}$; 3) $\frac{1}{m^{12}}$; 6) $\frac{1}{x^{100}}$. **256.** 1) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{16}$; 4) 10000; 10) $-\frac{8}{27}$; 11) $\frac{16}{25}$. **257.** 1) $15\frac{5}{8}$; 3) 1; 4) –100 000; 6) 81. **258.** 1) $\frac{9}{25}$; 2) $\frac{4}{25}$; 5) 25; 7) $\frac{25}{36}$; 8) $\frac{25}{36}$. **259.** 1) $\frac{9}{16}$; 2) $\frac{16}{49}$. **260.** 1) $3\cdot 5^{-2}$; 2) $7^2\cdot 23^{-3}$; 4) $6\cdot 9^{-3}\cdot 11^{-5}$. **261.** 1) $2\cdot 9^{-7}$; 2) $6\cdot 8^{-8}$; 4) $3^{-8}\cdot 5^{-9}\cdot 8^{-16}$. **263.** 1) $5\frac{2}{3}$; 2) 50,75; 4) –0,5. **264.** 1) 20; 2) 0. **265.** 1) $n=\{-3; -2; -1; 0; 1\}$; 2) $n=\{-4; -3; -2; -1\}$. **267.** 1) 2^7; 2) 2^{11}. **268.** 1) x^{14}; 2) x^{37}. **269.** 1) 1; 2) 25.

§ 9

270. 1); 3). **272.** 4). **277.** 1); 2); 4); 5). **279.** 1) $\frac{1}{64}$; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$. **281.** 1) a^{-12}; 2) a^{-4}; 3) a^4; 4) a^{12}; 5) 1; 11) a^8; 12) a^8. **282.** 1) x^{-13}; 2) x^{-7}; 3) x^7; 4) x^{13}; 5) 1; 6) x^{20}. **283.** 1) $10^{-1}\cdot 10^m$; 3) $8^{-4}\cdot 8^m$. **284.** 1) $6^{-4}\cdot 6^x$; 3) $12^{-8}\cdot 12^n$. **286.** 5) 256; 7) 1; 9) 64; 10) 16. **287.** 1) 32; 3) 2; 5) 1. **288.** 1) a^{12}; 2) a^{-4}; 3) a^7; 4) a^{-13}; 6) a^2; 8) a^{12}. **289.** 1) m^{12}; 2) m^{-8}; 4) m^{-20}. **291.** 1) 7^6; 2) 7^{-7}; 3) 7^{15}; 6) 7^{-2}. **292.** 1) 8^7; 2) 8^{20}; 3) 8^5; 6) 8^3. **293.** 2) 1; 3) a^{-20}; 4) a^{21}; 6) a^{-8}; 9) m^{-22}. **295.** 1) 5^{-50}; 2) 4^{44}; 4) 1; 5) 1; 8) 1; 9) a^{-30}; 12) a^{-25}; 16) a^{-22}. **296.** 1) 2^{-8}; 2) 3^{30}; 3) 3^{-30}; 4) 1; 8) 1. **297.** 1) 8^{-3}; 5) 80^{-9}; 8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}$; 12) $(3mn)^{-4}$; 14) $\left(\frac{3}{ab}\right)^{-1}$. **298.** 1) 70^{-7}; 4) 5^{-10}.

299. 1) 30^{-5}; 5) 30^{-1}; 7) 30^{-4}. **300.** 1) 12^{-2}; 2) 12^{-10}; 5) 12^{-15}. **301.** 2) 0,0001; 4) 5; 6) 4. **303.** 1) $2{,}2 \cdot 10$; 5) $9{,}76 \cdot 10^2$; 7) $5 \cdot 10^{-3}$; 10) $3{,}33 \cdot 10^{-1}$; 15) $3{,}35 \cdot 10^8$; 17) $2{,}30002 \cdot 10^2$; 22) $7{,}4 \cdot 10^{-5}$. **304.** 1) $3{,}7 \cdot 10$; 5) $3{,}8 \cdot 10^{-1}$; 7) $6{,}5 \cdot 10^{-2}$; 10) $4{,}82 \cdot 10^{-3}$; 14) $1{,}1 \cdot 10^{-1}$. **306.** 1) $5 \cdot 10^{-7} > 1{,}2 \cdot 10^{-7}$, $6{,}2 \cdot 10^{-7}$, $3{,}8 \cdot 10^{-7}$, $6 \cdot 10^{-14}$, $4\frac{1}{6}$. **307.** 1) $0{,}1^2$; 4) $0{,}1^{-2}$; 6) $0{,}1^{-4}$. **308.** 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$.
309. 1) 5; 2)1; 7) $\frac{1}{14}$. **310.** 1) –1; 2) 0,5. **311.** 1) a^{-7n}; 5) a^{-31}. **312.** 1) $x = a^{-6}b^{32}$; 4) 7. **313.** 1) $a^{16}b^{-15}$; 3) 4. **314.** 1) $(5^{-2})^6$. **316.** 1) $m^2 \cdot m^{22}$. **317.** 1) 2^{-1}; 3) 2^{-27}. **318.** 1) $2^{-5}(2^{-1} + 2^{12})$; 4) $2^{-5}(2^2 + 2^8 - 2^{-10} + 2^{20})$. **319.** 1) $3^{-4}(3^{-8} + 3^{16})$; 2) $3^{-4}(3^5 + 1 + 3^8)$; 4) $3^{-4}(3^{-1} + 3^9 - 3^3 + 3^5)$. **320.** 13) $3\frac{4}{7}$; 15) 2. **321.** 5) 5; 6) 2. **324.** 1) 0,25. **325**. 1) $5^{-2}(1 + 81 \cdot 5^6)$; 2) $5^{-2}(2 \cdot 5^8 - 3 \cdot 5^2 + 2^{-4} \cdot 5^{-2})$; 4) $5^{-2}(5^{-3m+2} + 6m \cdot 5^{2+m} - 5^{1+m})$. **326**. 1)1; 2) a^{-2}; 4) x^{-9}; 6) $\frac{a^3}{b^6}$. **327**. 1) Коренів немає; 3) 1; 4) 2000; 5) ± 2. **331.** 1) 1; 2) $\frac{10}{x^2-25}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. **332.** 1) $\frac{m(m+3)}{m+2}$; 3) $2b$.

§ 10

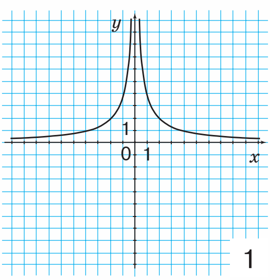
341. 1) $a - 2$; 2) xy. **342.** 1) $\frac{1}{b-9}$; 3) $\frac{1}{a^3-b^3}$; 4) $x - y$; 7) $\frac{x+3}{x-1}$; 10) $\frac{y^2-4}{y^2+4}$.
343. 1) $\left(\frac{1}{x-y}\right)^2$; 5) x^5; 8) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$; 12) $-\left(\frac{z}{3}\right)^3$. **344.** 1) $\left(\frac{1}{2-m}\right)^5$; 3) a^9; 5) $\left(\frac{y}{x}\right)^3$; 6) $-\left(\frac{y}{x}\right)^3$. **346.** 1) x^{-1}; 2) x^{-2}; 5) x^{-5}; 9) $\left(\frac{a}{c}\right)^{-12}$. **347.** 1) $\frac{1}{b^3}$; 2) $\frac{1}{ca^5}$; 4) $\frac{a}{b^2}$; 6) m^3; 7) x^9; 9) $\frac{1}{ab^7}$. **348.** 1) $\frac{1}{xy^{10}}$; 4) y; 6) $\frac{1}{a^3b^9}$; 9) $\frac{a^9m^{15}c^5}{n^4}$. **349.** 1) $a + \frac{1}{a}$.
350. 1) $\frac{1}{a^2} + a$; 3) $\frac{4}{a^4} - \frac{1}{a^2}$. **352.** 1) 0; 2) $\frac{10}{a+10}$; 3) 1; 4) 1; 6) $\frac{-2x}{16-x^2}$.
354. 1) $2a^{-1}$; 2) xy^{-8}; 4) $n^4m^{-5}p^{-3}$. **355.** 1) 1; 2) $\frac{1}{(a-b)^2}$; 7) m^8a^{11}; 9) $y^{-3}(x-y)^{-4}$.
356. 1) 1; 2) $(5+a)^{-3}$; 4) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-6}$; 6) x^{-2}; 8) $(n+4m)^9$. **358.** 1) $2{,}5x^{-8}y^3$; 2) $m^{21}n^6$; 4) $\frac{1}{8}b^{15}a^{18}$. **359.** 1) 1; 2) 1; 4) z^{-8}; 9) x^4. **360.** 1) $(a^2-b^2)^{-5}$; 2) 2,25; 3) 1; 4) $\frac{1}{8}$; 5) 1; 6) x. **361.** 1) 0,5; 3) $\frac{b}{a}$; 6) $\frac{4}{5(y+x)^2}$. **362.** 1) $(y^{-1} - 2)^2$; 3) $(a^{-2} - 5)^2$; 4) $(2m^{-1} - 3n^{-1})^2$. **364.** 1) $(x^{-1} - 5)(x^{-1} + 5)$; 2) $(a^{-1} - b)(a^{-1} + b)$. **365.** 1) $a - b$; 4) $-a - 2$; 5) 1; 10) $\frac{1}{x+1}$. **366.** 1) $a - 3$; 6) $\frac{1}{a^3-1}$. **367.** 1) $y^{-2}(y^{-6} + y^{-2})$; 4) $y^{-2}(2y^3 + 4y^2)$; 6) $y^{-2}(xy^{-7} + 9)$. **368.** 1) $a^{-4}(a^{-8} + a^{-6})$; 2) $a^{-4}(a^{-3} + a^7)$;

4) $a^{-4}(7a^{-10} + 6a^4)$. **370.** 1) $a(a^3 + a^2 + a^{-4} + a^{-5})$; 2) $a^3\ (a + 1 + a^{-6} + a^{-7})$; 4) $a^{-5}\,(a^9 + a^8 + a^2 + a)$. **371.** 6) a^{-2}; 8) 1; 9) x; 10) b^{-4}. **372.** 2) $\frac{x^2y^{10}}{z^{25}}$; 5) $4x^{-10}y^{-6}$. **373.** 1) $3a^3c^{-2}$. **374.** 5) n^{-5}. **375.** 2) $\frac{m^2-n^2}{mn}$; 4) x^{-4}; 5) $\left(\frac{n}{m}\right)^2$. **376.** 1) 23; 2) 3; 3) 2. **377.** 1) 7; 2) 83. **379.** 2) $\frac{-4}{19}$. **380.** 2) 0,25. **381.** $\frac{-5}{71}$. **382.** 1) $\frac{1}{x-1}$; 2) $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$; 3) –0,5; 4) $-\frac{a^2+b^2}{ab}$; 5) $1 + 3ab$. **384.** 1) $y = x$; 2) $y = -3x$.

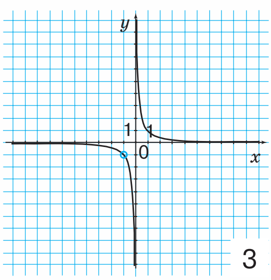
§ 11

389. 1) 1; 2) –4; 3) 4; 4) 10; 5) –12; 7) 28; 8) 100. **394.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) ні; 6) ні. **395.** *M*, *P*. **396.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **397.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **399.** 1) –10; 2) 16; 3) 27; 6) –50; 7) 36; 8) –18. **400.** 1) –1; 2) 21; 3) 20. **401.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **402.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **406.** 1) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{4}{9}$; 5) –5; 6) –8; 7) 7. **407.** 7) 10. **408.** 2) –1; 4; –8; 7) –8. **410.** 1. Для функції $y=-\frac{1}{x}$: 1) x — будь-яке число, крім нуля; 2) y — будь-яке число, крім нуля; 3) –1; 4) 1, –1, 0,1; 5) –1, –0,1, 0,5; 6) $x < 0$; 7) $x > 0$; 8) $x < 0$ і $x > 0$; 9) не існує таких значень аргументу. 3. Для функції $y=\frac{0{,}2}{x}$: 1) x — будь-яке число, крім нуля; 2) y — будь-яке число, крім нуля; 3) 0,2; 4) –0,2, 0,2, –0,02; 5) 0,2, 0,02, –0,1; 6) $x > 0$; 7) $x < 0$; 8) не існує таких значень аргументу; 9) $x < 0$ і $x > 0$. **411.** 1) –5; 2) 10; 5) 6; 6) $-\frac{9}{8}$. **412.** 1) –0,002; 2) –14. **413.** 4 (мал. 16), 10 (мал. 19). **418.** 1) (2; 2); 2) (1; –2); 4) (–1; 1); 8) графіки не перетинаються. **419.** 2) (–1; 1); 4) (2; 6) і (–3; –4); 5) графіки не перетинаються; 6) графіки не перетинаються. **421.** $y=\frac{4}{x}$. **422.** $y=\frac{9}{x}$. **423.** 1) –6; 1; 2) –1; 2.

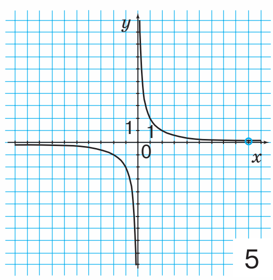
424.



1

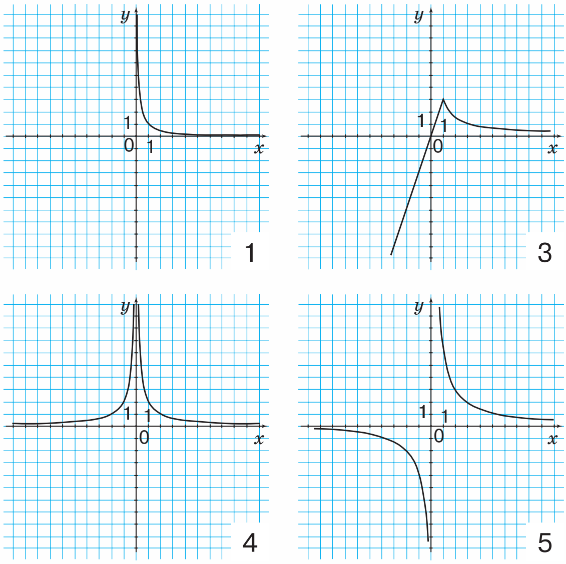


3



5

425.

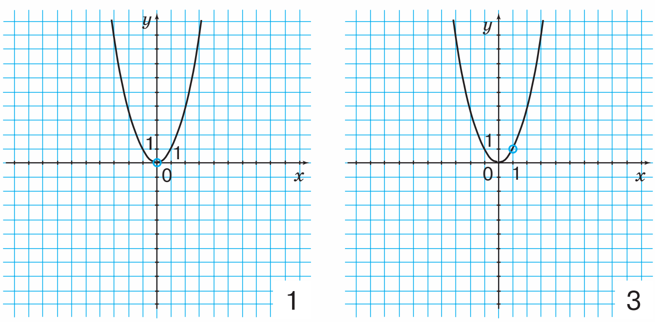


426. $y = \dfrac{1}{|x|}$ (мал. 22). **427.** 1. $t = \dfrac{400}{v}$ (год). 2. 5 год; 4 год. **430.** 1) 10; –10; 2) 8; –8; 3) 1,5; –1,5; 4) 3; –1; 5) 0; 6.

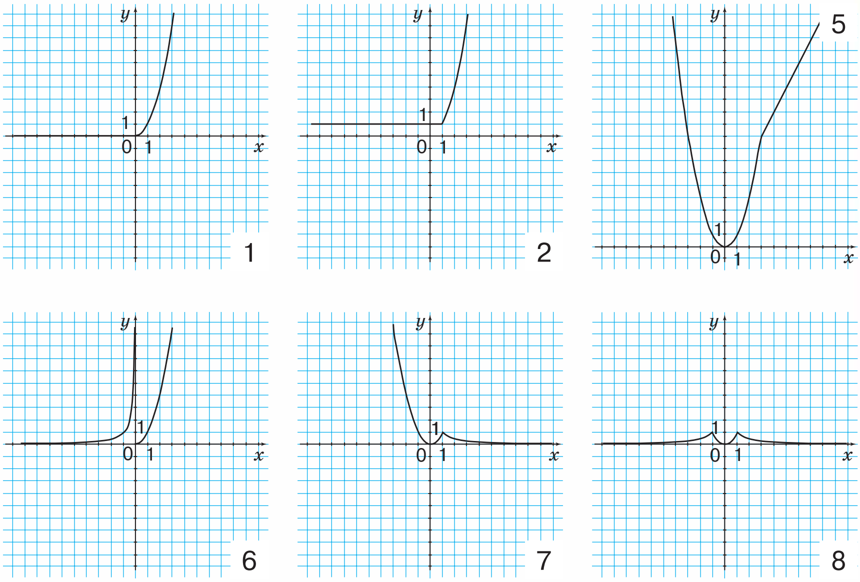
РОЗДІЛ 2

§ 12

435. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **436.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **438.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **439.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **441.** 1) 1; 4; 9; 16; 2) 0; 4; –4; 3) $x < 0$ і $x > 0$; 4) $x < 0$. **444.** 1) (±3; 9). **445.** 1) (0; 0) і (4; 16); 2) розв'язків немає; 3) (2; 4) і (3; 9). **446.** 1) –2 і 2; 2) –4 і 4; 3) 0; 5) коренів немає. **447.** 1) –1 і 1; 2) коренів немає; 3) –3 і 3; 4) 0. **448.** (0; 0), (1; 1). **453.** 1) –2 і 2; 2) 0 і 1; 3) –1 і 2; 5) коренів немає. **454.** 1) –1 і 0; 2) 1 і –3; 3) коренів немає. **455.**



456.



457. $y=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\le -1, \\ 1, \text{ якщо } -1<x<1, \\ x^2, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$ (мал. 33), $y=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x<0, \\ x^2, \text{ якщо } x\ge 0 \end{cases}$ (мал. 34), $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\le -1, \\ x^2, \text{ якщо } -1<x<1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\ge 1 \end{cases}$ (мал. 36). **461.** 1) $\dfrac{a^2+9}{a^2-9}$; 2) $\dfrac{m^2+25}{m^2-25}$; 3) $\dfrac{x+3y}{2(x^2-y^2)}$. **462.** 1) $\dfrac{a^2}{4(a-3)}$; 3) $\dfrac{a^2}{3(a-10)}$.

§ 13

475. 1) Так; 2) ні; 3) ні. **477.** 1) –9; 9; 8) –1,5; 1,5. **483.** 1) 0,3; 2) 0,4; 3) 0,5; 4) 0,07; 5) 0,06; 6) 0,13. **485.** 1) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{5}{7}$; 6) $\dfrac{9}{10}$. **486.** 1) $\sqrt{5}>0$; 3) $\sqrt{100}>-10$; 4) $-4<\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}>-\sqrt{7}$; 12) $\sqrt{12}<4$. **487.** 1) $-\sqrt{6}<0$; 2) $0<\sqrt{0,01}$; 6) $6<\sqrt{38}$; 8) $\sqrt{101}>10$. **489.** 1) 4; 2) 3; 4) 9; 5) 10; 6) 0,2; 7) 0,99; 9) $\dfrac{2}{5}$;

10) $\frac{1}{8}$. **490.** 1) 2; 2) 2; 3) 0; 4) 0,7; 5) 5,7; 6) $\frac{1}{7}$. **491.** 1) 6; 2) 6; 3) 10; 4) 18; 6) 120; 8) 80; 9) 140; 10) 320. **492.** 1) 2; 2) 24; 3) 50; 4) 8; 5) 96; 6) 50. **493.** 1) 2; 2) 20; 3) 0,5; 7) 10; 8) 6; 9) 28; 10) 4. **494.** 1) 7; 2) 0,3; 3) 8; 4) 6; 5) 35; 6) 1,5. **495.** 1) 2; 2) 5; 3) 5; 4) 2; 5) 6; 6) 10. **496.** 1) 3; 2) 3; 3) 3; 4) 3; 5) 3; 6) 10. **497.** 1) 4; 2) 4; 3) 0; 4) 90. **498.** 1) 3; 2) 3; 3) 11; 4) 5,4. **499.** 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{75}$; 8) $\sqrt{63}$; 9) $\sqrt{40}$; 10) $\sqrt{90}$; 11) $\sqrt{99}$. **500.** 1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{48}$; 3) $\sqrt{20}$; 4) $\sqrt{54}$. **501.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{2}$; 4) $9\sqrt{2}$. **502.** 1) $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $7\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{7}$. **506.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) $6\sqrt{3}$; 5) $-\sqrt{21}$; 6) 0; 7) $2\sqrt{7}$. **507.** 1) $2\sqrt{10}$; 2) 0; 3) $-40\sqrt{23}$; 4) $8\sqrt{2}$. **508.** 1) $10-5\sqrt{10}$; 2) $2+\sqrt{2}$; 6) $-1-\sqrt{5}$; 7) 2; 9) 1; 10) –10; 11) –31; 14) –2; 20) $19+4\sqrt{21}$. **509.** 1) $3+\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{5}+5$; 4) –1; 5) 4; 6) 10; 8) $9-4\sqrt{5}$. **514.** 1) $1\frac{2}{3}$; 5) $1\frac{1}{2}$; 8) $1\frac{3}{4}$. **515.** 1) $3\frac{1}{2}$; 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{3}{7}$. **516.** 1) $4\sqrt{3}<7$; 2) $\sqrt{28}>2\sqrt{6}$; 4) $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$; 11) $\sqrt{1\frac{9}{16}}<\sqrt{2}$. **517.** 1) $5\sqrt{2}>7$; 2) $4\sqrt{5}<9$; 3) $4\sqrt{2}=\sqrt{32}$; 7) $\sqrt{\frac{1}{4}}=\sqrt{0{,}25}$. **518.** 1) 1 і 2; 2) –3 і –2; 3) 2 і 3. **519.** 1) 1 і 2; 2) –3 і –2; 3) 3 і 4; 4) 4 і 5. **521.** 1) 75; 2) 700; 3) 2; 4) $\frac{11}{25}$. **527.** 1) $5-\sqrt{23}$; 2) $\sqrt{3}-2$; 3) $\sqrt{12}-\sqrt{8}$. **528.** 1) $\sqrt{0{,}03}$; 2) $-\sqrt{0{,}9}$. **529.** 1) $\sqrt{0{,}18}$; 2) $-\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{\frac{20}{3}}$. **531.** 1) $0{,}1\sqrt{5}$. **538.** 4) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2-1}=1$; 5) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=$ $=\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}=\sqrt{25-24}=1$. **539.** 1) $3-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{7}-1$; 3) $\sqrt{2}+1$; 4) $2-\sqrt{3}$. **540.** 1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=|1+\sqrt{3}|+$ $+|1-\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}==\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}-$ $-\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}=|\sqrt{2}+\sqrt{5}|-|\sqrt{2}-\sqrt{5}|=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}=2\sqrt{2}$. **541.** 1) $\sqrt{4\sqrt{3}}>$ $>\sqrt{3\sqrt{4}}$; 4) $1+\sqrt{2}>\sqrt{2\sqrt{2}}$.

§ 14

553. В. **555.** 1) 1, 4,(1); 2) 0, 2,35(0); 3) 35, 0,(35); 5) 123, 2,(123). **556.** 1) 0, 8,(0); 3) 2, 2,(2); 4) 4, 1,55(4); 5) 523, 0,(523). **558.** 1) 3,4444...; 2) 5,5121212.... **560.** 1) Так; 2) так; 4) ні. **562.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **563.** 3) $-\frac{12}{6}$, –3,(9), 0, $\sqrt{25}$, 7,888..., –5, $-\frac{1}{3}$. **564.** 3) –0,(4), 1, $-\frac{9}{3}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{4}$, $-\frac{3}{5}$, 1,0333..., 9; 4) $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$. **571.** 1) Ні; 2) так. **575.** 1) 0,333..., 3; 2) 0,4000..., 0. **579**. 9, 16, 25. **580**. 2) $2\sqrt{2}<\pi<4$. **585.** 1) 3; 2) –2.

§ 15

597. 1) Так; 2) ні; 3) так. **599.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **602.** 1) $x-3$. **603.** 1) $5x$; 2) $10x+12$. **604.** 1) $p-15\sqrt{p}$; 5) $2x-3\sqrt{xy}-2y$; 6) $a-1$. **605.** 4) $y-64$; 7) $y-4\sqrt{y}+4$; 9) $y+2\sqrt{10y}+10$. **606.** 15) $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)$; 20) $(\sqrt{x}-\sqrt{30})(\sqrt{x}+\sqrt{30})$. **607.** 2) $\sqrt{a}(a+c)$; 7) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$; 8) $(\sqrt{x}-\sqrt{3})\times$ 3)
$\times(\sqrt{x}+\sqrt{3})$. **610.** 1) $\sqrt{n}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$; 9) 2; 12) $\sqrt{y}-2$; 14) $x+\sqrt{3}$.

611. 1) $\frac{2}{\sqrt{y}+1}$; 3) 2; 6) $\sqrt{y}-5$; 7) $n+\sqrt{7}$; 9) 1. **612.** 1) $\sqrt{4x}$; 6) $\sqrt{m^7}$; 15) $\sqrt{9y^4x}$.

613. 1) $\sqrt{25c}$; 3) $\sqrt{n^4m^2}$; 4) $-\sqrt{n^4m^2}$; 5) $-\sqrt{x^{10}y}$, якщо $y\ge0$; $-\sqrt{9y^3}$, якщо $y<0$. **614.** 1) $x\sqrt{2}$; 2) $-a\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{2}\,m$; 4) $-a\sqrt{b}$; 5) $a\sqrt{b}$; 6) $-xy\sqrt{5}$; 7) $-xy\sqrt{5}$; 8) $5\sqrt{2xy}$; 9) $5\sqrt{2xy}$; 12) $a^{10}b^8\sqrt{c}$. **615.** 1) $y\sqrt{7}$; 2) $-y\sqrt{7}$; 3) $-2ab\sqrt{3}$; 4) $-2ab\sqrt{3}$; 5) $2ab\sqrt{3}$; 6) $2ab\sqrt{3}$; 8) $4\sqrt{2}x^2y^{10}$. **616.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{8}}{8}$; 3) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$; 4) $\sqrt{10}$; 7) $\frac{\sqrt{m}}{m}$; 8) $\frac{2\sqrt{n}}{n}$; 9) $\sqrt{y}$; 11) $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$; 12) $\frac{\sqrt{m+5}}{m+5}$. **617.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{x}$; 5) $\frac{a\sqrt{2b}}{2b}$; 6) $2\sqrt{z}$; 7) $\frac{\sqrt{y-2}}{y-2}$; 8) $\frac{\sqrt{8x+1}}{8x+1}$. **620.** 1) $x=\pm1$; 2) $x=\pm6$; 3) $x=0$; 4) $x=\pm\sqrt{3}$; 9) $x=\pm9$; 11) коренів немає; 12) коренів немає. **621.** 1) $x=\pm7$; 2) $x=\pm8$; 4) $x=\pm\sqrt{7}$; 5) $x=\pm3$; 6) $x=\pm\sqrt{5}$; 7) коренів немає; 8) коренів немає. **622.** 1) $x=4$; 2) $x=100$; 3) $x=9$; 5) $x=61$; 6) коренів немає; 8) $x=-9$. **623.** 1) $x=25$; 2) $x=16$; 4) $x=5$; 5) коренів немає; 6) $x=0$.

626. 1) $2x+18$; 2) $20\sqrt{2a}$. **627.** 1) $2a+8$; 2) $2x-2\sqrt{xy}$. **628.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}-a}$; 3) $\frac{-2\sqrt{y}}{x-y}$.

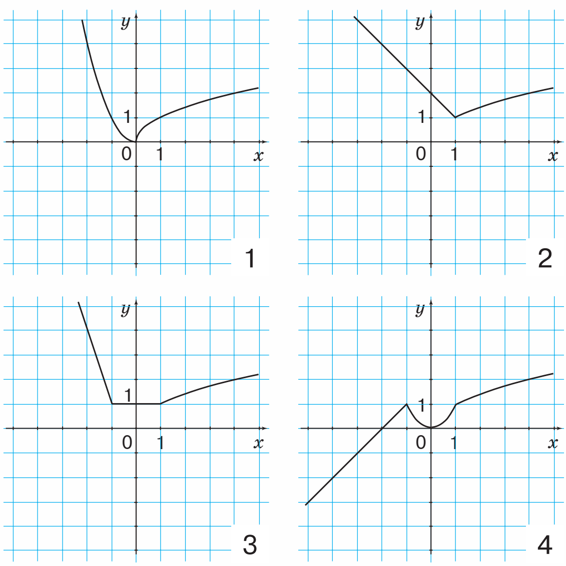
629. 1) $\frac{-10}{a-5}$; 3) $-\frac{\sqrt{m}}{m-11}$. **633.** 1) 4. **634.** 1) $\sqrt{-x^3}$; 2) $-\sqrt{9y^4x}$; 3) $-\sqrt{a^4b^9}$, якщо $a<0$, $\sqrt{a^4b^9}$, якщо $a\ge0$; 5) $-\sqrt{n^2m}+\sqrt{-m^2n}$. **635.** 1) $-\sqrt{3a^3}$; 3) $\sqrt{(ac)^3}$.

636. 1) $-2n\sqrt{2}$, якщо $n<0$, $2n\sqrt{2}$, якщо $n\ge0$; 2) $3x^2y^4z^3\sqrt{2z}$, 4) $-\frac{2x}{5y^5}\sqrt{\frac{2x}{5}}$, якщо $y<0$, $\frac{2x}{5y^5}\sqrt{\frac{2x}{5}}$, якщо $y>0$. **637.** 1) $-3x\sqrt{6}$, якщо $x<0$, $3x\sqrt{6}$, якщо $x\ge0$; 2) $-2xy^2\sqrt{-0{,}1y}$, якщо $x<0$, $2xy^2\sqrt{-0{,}1y}$, якщо $x\ge0$; 4) $-\frac{p^6}{n^5}\sqrt{\frac{1}{m}}$, якщо $n<0$, $\frac{p^6}{n^5}\sqrt{\frac{1}{m}}$, якщо $n>0$. **638.** 1) $-1-\sqrt{2}$; 2) $3-\sqrt{2}$; 3) $2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$; 6) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 7) $\frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$; 8) $\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{x-y}$. **639.** 1) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; 2) $\sqrt{7}+2$; 6) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a-c}$.
640. 1) -9, 7; 3) 10; 4) -18, 0; 8) коренів немає. **641.** 1) -4, 0; 3) 25; 6) коренів немає. **642.** 1) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; 2) коренів немає; 3) $\pm\sqrt{2}$. **643.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) коренів

немає. **644.** 1) 9; 2) 1; 3) коренів немає; 4) 0; 5) –2; 6) 3. **645.** 1) 4; 3) 0; 4) –1. **646.** 1) 1,5; 2) 4; 3) 256; 6) 0. **647.** 1) 2. **648.** 1) 2; 2) 1; 3) 10; 4) –4; 0; 6) 1; 7) 0; 100. **649.** 1) 3; 2) –3; 3; 3) 0; 4; 4) 0; 1. **650.** 1) $x-1$; 2) $x+12$; 3) $-x+8$; 5) $x-3$. **651.** 1) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо $xy \geq 0$, $-xy^2\sqrt{-xy}$, якщо $x<0$, $y>0$; $xy^2\sqrt{-xy}$, якщо $x>0$, $y<0$. **652.** 1) $\sqrt{y}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **653.** 1) 4; 4) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **654.** 1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4}$; 3) $\dfrac{3\sqrt{7}+7\sqrt{3}+\sqrt{210}}{42}$. **655.** 1) $a<0$; 2) $a<0$. **656.** 1) $a=0$; 2) $a=-1$; 4) $a=\pm 2$. **657.** 1) Якщо $a<0$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $a=0$, то $x=-8$. Якщо $a>0$, то $x=-8-\sqrt{a}$, $x=-8+\sqrt{a}$; 3) Якщо $a<-4$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $a=-4$, то $x=25$. Якщо $a>-4$, то $x=25-\sqrt{a+4}$, $x=25+\sqrt{a+4}$. **658.** 1) Якщо $a<0$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $a=0$, то $x=-2$, якщо $a>0$, то $x=-2-\sqrt{a}$, $x=-2+\sqrt{a}$; 2) Якщо $a<0$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $a=0$, то $x=-3$. Якщо $a>0$, то $x=-3-\sqrt{a}$, $x=-3+\sqrt{a}$. **659.** 1) 0; 2) 0; 3) 1. **660.** Г. **661.** 1) 3^{-1}; 2) 3^{-10}. **662.** 2) –1. **663.** 1) (0; 0); 2) (1; 0).

§ 16

671. 1) 0,7; 1,6; 1,7; 2,5; 2) 1,4; 3,3; 4,8; 8,4. **672.** 1) 1,2; 1,4; 2,2; 2) 2,3; 6,3; 7,3. **675.** 1) (1; 1); 2) (0; 0); 3) точок перетину немає; 4) (4; 2). **676.** 1) (4; 2); 2) точок перетину немає. **677.** 1) (1; 1); 2) (4; 2); 3) (1; 1); 4) розв'язків немає. **678.** 1) (4; 2); 2) (1; 1). **681.** $d=\sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}$. **682.** $d=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. **683.** 1) (1; 1); 2) (9; 3). **684.** (4; 2). **686.** 1) 2 і 5; 2) 0 і 8; 3) 2 і 4; 4) 3 і 4. **687.** 1) 1 і 6; 2) 2 і 5. **690.** 1) 4; 2) 16; 3) 0 і 1; 4) 0 і 1; 5) 1. **691.** 1) –1; 2) –16 і 16; 3) –1 і 1; 4) 1. **692.**



693. 1) –1; 2) ±16; 3) 1; 4) 1. **694.** 1) ≈ 4,4 м/с; 2) в 1,4 раза; у 2 рази; у 2,8 раза. **695.** 1) 12,6 і 6,6; 2) 25,4 і 19,4; 3) 7,2 і 1,2; 4) $6\frac{2}{7}$ і $\frac{2}{7}$. **696.** 1) $12\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$. **697.** 1) 1; 2) 0.

РОЗДІЛ 3

§ 17

708. 1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 - 8x - 16 = 0$; 3) $x^2 + x - 6 = 0$; 4) $2x^2 + 2x + 5 = 0$; 5) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 6) $x^2 - 6x - 40 = 0$; 7) $4x^2 + 8x - 5 = 0$; 8) $3x^2 - 5x - 2 = 0$. **709.** 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $6x^2 + 11x - 4 = 0$; 3) $9x^2 - 12x + 2 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 3 = 0$. **710.** 1) 1; 2) 4; 3) 36; 4) 16; 5) 6,25; 6) 20,25. **711.** 1) 9; 2) 25; 3) 12,25; 4) 2,25. **712.** 1) 0 і –14; 2) 7 і –1; 3) 11 і –1; 4) –3 і –5; 5) –2 і –2; 6) коренів немає. **713.** 1) 6 і 10; 2) 6 і 6; 3) коренів немає. **714.** 1) 2 і –4; 2) 1 і 3; 3) –5 і –7; 4) 3 і 5; 5) –2 і 8; 6) 5 і 5. **715.** 1) –6 і –4; 2) 2 і –4; 3) 4 і 4. **716.** 1) 1 і –4; 2) 1 і 4; 3) 2 і –3; 4) 2 і 2,5; 5) 2 і $\frac{1}{3}$; 6) –3 і $\frac{1}{2}$. **717.** 1) 2 і –7; 2) 5 і –2; 3) 1 і $\frac{1}{2}$. **718.** 19. **719.** 3. **722.** *Вказівка*: знайдіть корені кожного з рівнянь та порівняйте їх. **723.** 1) 2; 2) 3. **724.** 1) 9 м, 15 м; 2) 6790 грн; 3) 6000 грн. **725.** 1) (2; –4); 2) (–1; 2). **726.** 23, 20 і 25. **727.** 3 зелені, 3 жовті, 2 сині, 4 червоні.

§ 18

731. 1) 36; 2) 9; 3) 16; 4) 49. **732.** 1) 4; 2) 49. **739.** 1) –5 і 1; 2) –2 і 8; 3) 2 і –4; 4) 4 і 4; 5) –1 і –7; 6) коренів немає; 7) 3 і –4; 8) –3 і 5; 9) –1 і 8; 10) $-3 \pm \sqrt{6}$; 11) 1 і –2; 12) –5 і –20; 13) –1 і 7; 14) –2 і –13; 15) 1 і 2; 16) 5 і 5. **740.** 1) 2 і –6; 2) –2 і 5; 3) 3 і 3; 4) коренів немає; 5) 1 і 4; 6) –2 і –4; 7) –2 і 3; 8) 2 і 5. **741.** 1) 2 і –1,5; 2) $1\frac{1}{3}$ і $-\frac{2}{3}$; 3) –2 і 0,6; 4) 1,5 і 0,5; 5) –3 і $\frac{1}{4}$; 6) –3 і $\frac{1}{5}$; 7) $\frac{1}{3}$ і $-\frac{1}{2}$; 8) 1,5 і 1; 9) 2 і 2,5; 10) 0,6 і –0,2; 11) $-1\frac{1}{4}$ і $-2\frac{1}{4}$; 12) 1 і $\frac{3}{4}$; 13) $-2\frac{2}{3}$ і $-2\frac{2}{3}$; 14) 6 і $\frac{1}{3}$; 15) 5 і 0,5; 16) 0,5 і 0,5. **742.** 1) 1 і –2,5; 2) 1 і $-\frac{1}{9}$; 3) 2,5 і –2; 4) $\frac{1}{3}$ і –2; 5) –1 і $-\frac{1}{5}$; 6) 3,5 і 3,5; 7) 3 і –0,5; 8) 1 і 0,5. **743.** 1) $1\frac{1}{3}$ і 1; 2) 1 і $\frac{1}{5}$; 3) 10 і –9; 4) 1 і 0,6; 5) 5 і 1; 6) 1 і $-\frac{2}{3}$; 7) –2 і $\frac{1}{4}$; 8) 3 і $-2\frac{3}{4}$; 9) $1\frac{2}{3}$ і $1\frac{2}{3}$; 10) 9 і 2; 11) 2 і $2\frac{1}{3}$; 12) 2,5 і 2; 13) $\frac{1}{9}$ і $\frac{1}{9}$; 14) $3 \pm \sqrt{6}$; 15) 2 і –2; 16) 0 і –5. **744.** 1) 6 і –2,5; 2) –1 і 2,5; 3) $1 \pm \sqrt{6}$; 4) 5 і –6; 5) $\frac{1}{7}$ і $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{4}$; 7) 0 і –3; 8) 3 і –3. **745.** 1) 9 і –8; 2) 3 і –0,5; 3) 2 і $\frac{1}{6}$; 4) $-3 \pm 2\sqrt{6}$; 5) 3 і –3; 6) $\pm\sqrt{2}$; 7) –5 і 6; 8) 6 і –4. **746.** 1) 7 і –8; 2) –0,5 і 3; 3) 1 і –3; 4) 2 і –4. **747.** 1) 1 і –3,5; 2) 5 і $-\frac{5}{6}$; 3) $-\frac{3}{4}$ і –3; 4) 8 і –1. **748.** 1) 2 і $-\frac{1}{3}$; 2) –2 і $1\frac{1}{3}$. **749.** 1) $n < 1$; 2) $n > 1$; 3) $n = 1$.

750. 1) $n < 1\frac{1}{8}$; 2) $n > 1\frac{1}{8}$; 3) $n = 1\frac{1}{8}$. **752**. 4. **753**. *Вказівка*: розв'яжіть рівняння з буквеними коефіцієнтами. **754.** 1) 10 м і 26 м; 2) 18. **755.** 1) $\frac{a-1}{a+1}$; 2) $\frac{3}{a}$. **756.** 7 і 8. **757.** Збільшиться в 3 рази.

§ 19

774. 1) –4 і 1; 2) –2 і 8; 3) 3 і –10; 4) 2 і 8; 5) 1 і 11; 6) 1 і 8; 7) 3 і –4; 8) 13 і 2; 9) –1 і –4; 10) –1 і –5; 11) 1 і –2; 12) –5 і –20; 13) –1 і 10; 14) –1 і –7; 15) 1 і 2; 16) 5 і 11. **775.** 1) –1 і 9; 2) –2 і 5; 3) 4 і 5; 4) –1 і –8; 5) –2 і 7; 6) –2 і –4; 7) 5 і –4; 8) 2 і 5. **776.** 1) –13; 2) 22. **777.** 1) $-1\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{4}{25}$. **778.** 1) $2\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{5}{9}$. **781.** 11 і –14. **782.** –14 і 12. **783.** 13 і –39. **784.** –7 і 35. **785**. 6, 3 і 18. **786**. –3, –1 і 3. **787**. 2, –8, 6 або –2, 8, –6. **788**. 3, 6, –9 або –3, –6, 9. **789.** 1) 51; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $-4\frac{1}{4}$; 4) $189\sqrt{3}$. **790.** 1) 10; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) –2,5; 4) $14\sqrt{2}$. **791.** $1-\sqrt{3}$. **792**. 1 і –6. **793**. –1 і 0,6. **794.** 2. **795.** 1) 2,5 м; 2) 45 м; 3) 1,75 м^2; 4) 1,7 м. **797.** 28.

§ 20

803. 1) $(x-5)(x+2)$; 2) $(x-6)(x-4)$; 3) $-(x-1)(x-15)$; 4) $(x+3)(x-5)$; 5) $-(x-1)(x-3)$; 6) $(x+1)(x-7)$; 7) $(x+2)^2$; 8) $-(x-5)^2$. **804.** 1) $(x+1)(x+2)$; 2) $-(x+9)(x-1)$; 3) $(x-8)(x+3)$; 4) $(x+3)^2$. **805.** 1) $(2x-3)(x-1)$; 2) $(5x-1)(x+1)$; 3) $-(3x+7)(x-2)$; 4) $(2x-1)(3x-1)$; 5) $-(3x-2)^2$; 6) $(3x-5)(x-1)$; 7) $(2x-1)^2$; 8) $-(2x+1)(x-2)$. **806.** 1) $(3x+2)(x+1)$; 2) $-(2x+5)(x-3)$; 3) $(3x+1)^2$; 4) $-(5x-1)(x-1)$. **807.** 1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{2x+1}{6}$; 3) $\frac{4-x}{x-3}$; 4) $\frac{x-8}{x}$; 5) $\frac{x+5}{2x+1}$; 6) $\frac{x+2}{x-3}$; 7) $\frac{x+8}{9-x}$; 8) $\frac{3-x}{5x+1}$. **808.** 1) $\frac{4}{x-6}$; 2) $\frac{x}{3x-1}$; 3) $\frac{5x+6}{x+2}$; 4) $\frac{x-1}{2-x}$. **809.** 1) 1,8; 2) 18; 3) 0,8; 4) –1,75. **810.** 1) 1,4; 2) 3,4. **811.** ± 10. **812.** 4. **813.** –6. **814.** 1) $(nx-2)(x+1)$; 2) $(x-m-n)(x-n)$. **815.** 1) $(3x-5y)(x-y)$; 2) $(y-x)(5y-3x)$. **816.** 1) 20; 2) 5; 3) 38. **817.** 1) (2; 0); 2) (11; 5,5). **818.** 5 грн, 3 грн.

§ 21

824. 1) –3 і 4; 2) –1 і $-\frac{1}{9}$; 3) 1,5 і –5; 4) 2 і 0,5; 5) 3 і 1,5; 6) 5 і 3. **825.** 1) 5 і 0,5; 2) 2 і –3; 3) 0,5 і 1; 4) 1 і $1\frac{2}{3}$. **826.** 1) 2; 2) –3; 3) –2 і –4; 4) –6; 5) 3 і –6; 6) –9; 7) 0,5; 8) 1 і 0,6. **827.** 1) –5; 2) 2; 3) 0,5; 4) –1 і $-1\frac{2}{3}$. **828.** 1) –6; 2) 2; 3) 0,5; 4) $\frac{2}{3}$. **829.** 1) –5; 2) 0,5. **830.** 1) 0 і 4; 2) –2 і 5; 3) $\frac{2}{3}$ і $-\frac{4}{5}$; 4) –2 і 4; 5) 4 і –5; 6) –1 і 2,5; 7) 2; 8) 10. **831.** 1) –1і 4; 2) 16 і 4; 3) –3; 4) 8. **832.** 0,5. **833.** 0,5.

834. 1) ±1 і ±3; 2) ±2; 3) ±2; 4) ±3; 5) $\pm\sqrt{2}$ і $\pm\sqrt{3}$; 6) $\pm\sqrt{2}$; 7) ±2 і ±4; 8) коренів немає. **835.** 1) ±2; 2) ±2 і $\pm\sqrt{5}$; 3) ±1 і ±2; 4) коренів немає. **836.** 1) 8 і –3; 2) 6; 3) $-1\frac{4}{5}$; 4) коренів немає. **837.** 1) 4; 2) ±6. **838.** 1 і –0,5. **839.** 1 і 10. **840.** 6 і –5. **841.** 4 і –3. **842.** 1) –1 і –1,6; 2) $2\pm\sqrt{6}$; 3) 0 і 4; 4) 1; 5) 1; 6) –5. **843.** 1) 2 і 0,5; 2) 0; 3) $2\frac{1}{3}$ і –2; 4) $3\pm\sqrt{5}$. **844.** 1) ±3 і $\pm\frac{1}{2}$; 2) ±2; 3) $\pm\sqrt{2}$ і $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\pm\frac{1}{2}$ і $\pm\frac{1}{2}$. **845.** 1) ±1 і $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) ±1 і $\pm\frac{3}{4}$. **846.** 1) –2 і 3; 2) –1 і 2; 3) 3 і –4; 4) 3 і 4; 5) 5 і –2; 6) –1. **847.** 1) ±2 і $\pm\sqrt{6}$; 2) ±1 і 3; 3) –4 і –6; 4) 1. **848.** 1) 0; 2) 20. **849.** 1) ±3 і $\pm n$; 2) n і m; 3) n і $-\frac{1}{n}$; 4) $n+m$ і $\frac{n+m}{2}$. **850.** 1) 5; 2) 2; 3) 3 і –2; 4) –3, –1, 2 і 4. **851.** 1) 0,6 м і 1 м; 2) 0,44 м і 0,84 м; 3) ≈ 0,4 м^2. **852.** 1) $(x^2+1)(3x-4)$; 2) $2(x+5)(x+3)$. **853.** 5 м.

§ 22

863. 1) 8 і 9 або –9 і –8; 2) 6 і 12 або –6 і –12. **864.** 1) 8 і 6 або –6 і –8; 2) 4 і 12 або –4 і –12. **865.** 1) 8 і 4; 2) 2 і 16 або –2 і –16. **866.** 1) 3 і 15; 2) 5 і 9 або –5 і –9. **867.** 15 і 16. **868.** 11 і 12. **869.** $\frac{3}{4}$ або $\frac{5}{8}$. **870.** $\frac{1}{4}$. **871.** 60 км/год і 80 км/год. **872.** 60 км/год і 90 км/год. **873.** 80 км/год. **874.** 80 км/год. **875.** 5 км/год. **876.** 4 км/год. **877.** 10 дет. **878.** 12 дет. **879.** 5 год. **880.** 5 год. **881.** 8 см і 15 см. **882.** 6 см і 8 см. **883.** 5 см, 12 см і 34 см. **884.** 6 см, 9 см і 30 см. **885.** 12 і 13. **886.** 13 і 14. **887.** 12. **888.** 22. **889.** 4 км/год. **890.** 4 км/год. **891.** 30 км/год. **892.** 30 км/год. **893.** 40 км/год. **894.** 21 год 30 хв. **895.** 60 км/год. **896.** 15 км/год. **897.** 16 км/год. **898.** 2 км/год. **899.** 5 км/год. **900.** 25 дет. **901.** 7 дет. **902.** 10 л. **903.** 25 л. **904.** 25 м^2. **905.** 4. **906.** 75 хв. **907.** 30 хв. **908.** 13 см. **909.** 10 см. **910.** 3 м і 4 м. **911.** 15 і 9. **912.** 381 і 705. **913.** 4 і 1. **914.** 8 год. **915.** У 2 рази; 2 л. **916.** 56 с. **917.** 1) 4; 2) 6; 3) одночасно. **918.** 1) $a+b$; 2) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$. **919.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$. **920.** 1) $\frac{a-4}{a+4}$; 2) $\frac{2a}{a-5}$.

ПОВТОРЕННЯ
РОЗДІЛ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

1. 1) x — будь-яке число; 2) y — будь-яке число, крім –3 і 0; 3) a — будь-яке число, крім –2 і –1; 4) x — будь-яке число, крім –1, y — будь-яке число, крім 0,5. 5) b — будь-яке число, крім 0,6, a — будь-яке число, крім 2; 6) a — будь-яке число, крім $-\frac{1}{3}$, b — будь-яке число, крім 0,25, c — будь-яке число, крім 0; 7) x — будь-яке число, крім 0, y — будь-яке число, крім 1,5, z — будь-яке число, крім 2,6; 8) b — будь-яке число, крім $\frac{2}{7}$, a — будь-яке число, крім –1. **2.** 2) Наприклад, x^2; 4) наприклад, $x(x-3)$; 6) наприклад, $1-x^2$. **3.** 1) $x=-0,5$; 2) $x=6$; 3) $x=-4$ або $x=0$; 4) $x=-4$ або $x=4$; 5) $x=1$;

6) $x = -5$ або $x = 5$. **4.** 1) $\frac{x}{x-2}$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$; 5) $\frac{4-a}{a}$; 7) $a - 3b$. **5.** 1) $x + 1$; 3) $\frac{x-2}{x-1}$; 5) $\frac{x-4}{1-x}$. **6.** 1) $\frac{6}{6x-18}$, $\frac{2}{6x-18}$, $-\frac{1}{6x-18}$; 3) $\frac{x-2}{x^2-4}$, $\frac{1}{x^2-4}$, $\frac{x+2}{x^2-4}$; 5) $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. **7.** 1) $\frac{6x}{x^2-9}$; 2) 0. **8.** 1) $\frac{x}{2}$; 2) $-x^2$. **9.** 1) $\frac{x-1}{(x-2)^2}$; 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$. **10.** 1) $-\frac{x+5}{x}$; 2) $-\frac{x+6}{x}$.
11. 1) $a = 0{,}25$, $b = -0{,}25$; 2) $a = -1$, $b = 1$; 3) $a = -1$, $b = 1$. **12.** 1) $-\frac{y(x+2)}{4}$; 2) $\frac{1-3y}{1+3y}$. **13.** 1) $\frac{1}{4(x-4)}$; 2) $\frac{x+y}{x(x^2+xy+y^2)}$. **14.** 1) -1; 2) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.
15. 1) $y=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$; 2) $y=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$; 3) $y=\frac{x}{4}, x\neq 3$; 4) $y=\frac{x}{5}+1, x\neq 0$; 5) $y=\frac{x}{2}-1, x\neq 1$; 6) $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}, x\neq -6$. **16.** 1) 17; 2) 6; 3) –1; 4) 3; 5) –3; 6) –1; 7) 3; 8) 3.
17. 1) $2x^{-1}y^{-1}$; 2) $np^{-1}m^{-3}$; 3) $b^3d^3a^{-2}c^{-2}$. **18.** 1) $\frac{1}{80}$; 3) 1,5; 5) 0; 6) 5; 7) 64.
19. 1) a^{-9}; 2) a^{-21}; 3) a; 4) a^{-21}; 11) 1; 12) a^{11}. **20.** 1) 3^{-3}; 2) 3^{-8}; 3) 3^{-24}. **21.** 1) $9\cdot 10^1$; 2) $1{,}12\cdot 10^2$; 4) $7\cdot 10^{-2}$. **23.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **24.** 1) –8; 2) 1; 3) –0,6; 4) 0,625.

РОЗДІЛ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

1. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. **5.** 1) 0,8(3); 2) 0,(7); 4) 0,(6). **6.** 1) 5 см; 2) 15 см; 3) 1,2 м; 5) $1\frac{1}{3}$ см. **7.** 1) 5; 2) 1,5; 3) 0,5; 4) 6; 5) 0.
8. 1) $\sqrt{128}$; 2) $\sqrt{0{,}02}$; 3) $\sqrt{0{,}75}$; 4) $\sqrt{16x}$. **9.** 1) $2\sqrt{0{,}1}$; 2) $3\sqrt{5}$; 3) $5\sqrt{0{,}1}$; 4) a^4. **10.** 1) $x = \pm 9$; 2) $x = \pm 12$; 3) $x = \pm 3$; 4) $x = \pm\sqrt{15}$; 5) $x = \pm\sqrt{21}$; 8) $x = 1{,}5$, $x = -0{,}5$. **11.** 1) 36; 2) 144; 3) 9. **12.** 1) $5\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt{6} - 3$; 7) $5 + 2\sqrt{10}$. **13.** 2) 2; 3) 6; 4) $1-2\sqrt{6}$; 6) 4; 10) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; 12) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
15. 1) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{15}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{x}$; 7) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{11}+\sqrt{6}$; 10) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$.
16. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні.

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

1. 1) 1 і –9; 2) 7 і –1; 3) 3 і 3; 4) –1 і –5. **2.** 1) 3 і $\frac{1}{3}$; 2) 2 і –0,2; 3) $\frac{2}{3}$ і $\frac{2}{3}$; 4) 2,5 і 2,5. **3.** 1) 1 і –15; 2) 10 і –1; 3) 10 і –4; 4) 1 і –3. **5.** –21 і 18. **6.** –1,5 і $-\frac{3}{4}$.
7. 1) $(x-4)(x-3)$; 2) $(x-5)(x+7)$; 3) $3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)$; 4) $-6\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2{,}5)$.
9. 1) –29; 2) 2,5. **10.** 1) 0,5 і 0,5; 2) 2 і –3; 3) 4 і 2; 4) –1 і –4. **11.** 1) 7 і $3\frac{1}{3}$;

2) 8 і –3; 3) 12 і $-1\frac{2}{3}$; 4) 1 і –2,4. **12.** 1) ±5 і ±1; 2) ±1; 3) ±6 і ±2; 4) $\pm\frac{1}{3}$. **13.** 1) ±4 і $\pm\sqrt{10}$; 2) 0 і ±1; 3) $-2\pm\sqrt{7}$; –1 і –3; 4) 2 і –3. **14.** 1) 6 і 15 або –6 і –15; 2) 3 і 30 або –3 і –30. **15.** 1) 4 і 16; 2) 32 і 2. **16.** 19 і 20. **17.** 60 км/год і 80 км/год. **18.** 40 км/год. **19.** 80 км/год і 100 км/год. **20.** 15 км/год. **21.** 3 год і 6 год. **22.** 12 год і 6 год. **23.** 8 м і 48 м. **24.** 3 м і 15 м. **25.** 36 см.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ